République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou

Faculté des sciences

Département de mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du diplôme de Master Mathématiques Appliquées à la Gestion

Thème

Résolution d'un problème min-max en programmation linéaire par la méthode DUALE ADAPTÉE

Réalisé par :

Melle : LISA AIT OUFELLA **Melle : DYHIA IBESSAINE**

Proposé et dirigé par :

Mr CHEBBAH MOHAMMED

Devant le jury :

Présidente : Mme LESLOUS FADILA

Examinateur : Mr GOUBI MOULOUD

Promotion : 2019-2020

Remerciements

Avant tout; nos remerciements vont d'abord au Créateur de l'univers qui nous a doté d'intelligence, et nous a maintenu en santé pour mener à bien cette année d'étude malgré tous les obstacles.

Nous voudrons dans un premier temps remercier chaleureusement, notre directeur de mémoire. Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mr M. CHEBBAH, pour sa patience, et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion. Nous le remercions pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance spécialement à Madame F. LESLOUS, responsable de spécialité ; pour sa générosité, ses conseils, sa confiance, ses encouragements et son soutien inestimable dont elle a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles.

Nous voudrons également remercier les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer et de juger notre travail.

Nous adressons nos sincères remerciements à tous les professeurs, chercheurs et toute l'équipe pédagogique du département mathématiques qui nous ont fourni les outils nécessaires pour la réussite de nos études universitaires.

Nous voudrons exprimer notre reconnaissance envers nos amis pour leur soutien moral et intellectuel tout au long de notre démarche.

Enfin, nous tenons à témoigner toute notre gratitude à tous ceux qui ont contribué et nous ont soutenu de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

DEDICACE

Je remercie dieu le tout puissant, de m'avoir donné la force et la patience.

Je dédie ce travail :

À mes très chers parents

Autant de phrases aussi expressives soient-elles ne sauraient montrer le degré d'amour et d'affection que j'éprouve pour vous.

Vous m'avez comblée avec tendresse et affection tout au long de mon parcours.

Vous n'avez cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études, vous avez toujours été présents à mes côtés pour me soutenir quand il fallait.

Puisse le tout puissant vous donner santé, bonheur et longue vie afin que je puisse vous combler à mon tour.

À mes agréables et aimables sœurs

Titem et sa petite famille, Lidia, Lamia et leurs maris, Latifa et Haoua

À ma meilleure amie sœur

Liza

À mon cher ami

Ouali

À celle avec qui j'ai partagé ce travail

Dyhia

Aux étudiants de la promotion MAG

Lisa

DEDICACE

Je remercie dieu le tout puissant, de m'avoir donné la force et la patience.

Je dédie ce travail :

À mes très chers parents

Autant de phrases aussi expressives soient-elles ne sauraient montrer le degré d'amour et d'affection que j'éprouve pour vous.

Vous m'avez comblée avec tendresse et affection tout au long de mon parcours.

Vous n'avez pas cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études, vous avez toujours été présents à mes côtés pour me soutenir quand il fallait.

Puisse le tout puissant vous donner santé, bonheur et longue vie afin que je puisse vous combler à mon tour.

À ma très chère grand-mère

Malha

À mes agréables et aimables sœurs et frère

Faiza, Nassima, Kahina, Massissilia, Maria et Rayane

À tous les membres de ma grande famille

Cousins, cousines, tantes et oncles

À celle avec qui j'ai partagé ce travail

Lisa

À mes amis(es)

À monsieur Remdhane Kacioui

Qui n'a pas hésité à m'aider durant mes années à l'université

Aux étudiants de la promotion MAG.

Dyhia

Sommaire

Introduction générale

CHAPITRE I :

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

CHAPITRE II:

LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX AVEC DES CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE AVEC LA MÉTHODE ADAPTÉE

Introduction générale :

La prise de décision dans une entreprise est parfois liée à plusieurs contraintes. Ces contraintes sont généralement liées aux ressources limitées de matières premières, en main d'œuvre, capacité de production des machines … etc. Alors que l'objectif soit maximiser les profits ou minimiser les coûts.

L'optimisation est plus particulièrement la programmation mathématique, vise à résoudre des problèmes où l'on recherche à déterminer parmi un grand nombre de solutions candidates, celle qui donne le meilleur résultat de la fonction « objectif ». Plus précisément, on cherche à trouver une solution satisfaisante à l'ensemble des contraintes, et qui minimise ou maximise une fonction donnée. L'application de la programmation mathématique est en expansion croissante dans plusieurs domaines pratiques.

Dans ce cas la programmation linéaire joue un rôle important dans la planifications optimale de la production d'une entreprise et ainsi un outil efficace et très puissant d'aide à la décision qui permet de résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation en apparence très différent, dans des contextes très divers relevé des mathématiques , de la recherche opérationnelle et à des applications en gestion, d'où elle occupe une place centrale de l'optimisation.

Dans la plupart des problèmes pratiques, les variables sont bornées. Une composante x_j est bornée inférieurement par d_{1j} et supérieurement par d_{2j}, où $d_{1j} < d_{2j}$. Si on note d_1 et d_2 les vecteurs borne inférieure et supérieure respectivement, on obtient les contraintes dites simples (ou directes) suivantes : $d_1 < x < d_2$.

La plus simple manière de traiter ces contraintes consiste à introduire des variables d'écarts x_1 et x_2 on obtient ainsi les contraintes $x + x_1 = d_2$ et $x - x_2 = d_1$.

Dans ce cas le nombre de contraintes d'un problème de programmation linéaire à variables bornées sera augmenté de $2n$ contraintes : $y_1 = x - d_2$, $y_2 = x - d_1$.

Une méthode adaptée du simplexe pour la résolution d'un problème de programmation linéaire à variables bornées, sans introduire de variables d'écarts par exemple a été proposé par R.Gabasov et F.M.Kirillova durant les années 80. L'avantage de celle-ci est une méthode de points intérieurs pour aller plus vite vers la solution optimale, elle permet aussi l'obtention d'une solution approchée et résout des problèmes de contrôle optimal.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux problèmes Min-Max en programmation linéaire, vu leur importance dans de nombreuses applications pour le contrôle optimal, la programmation multi-objective ainsi que dans le domaine de décision multicritère en général.

Le présent travail, s'inspirant essentiellement des travaux de R.Gabasov et F.M.Kirillova est consacré à la résolution des problèmes Min-Max en programmation linéaire.

Dans le premier chapitre, nous rappelons la méthode adaptée pour la résolution de problèmes de programmation linéaire :

$$(P1)\begin{cases} f(x) = C'x \rightarrow \max \\ Ax = b \\ d_1 \leq x \leq d_2 \end{cases}$$

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la résolution de problèmes Min-Max en programmation linéaire avec des contraintes généralisées primales. Et ensuite par la méthode duale adaptée dans le troisième chapitre.

Dans le quatrième chapitre nous avons implémenté la méthode adaptée sur la machine sous Matlab.

CHAPITRE I :
RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

INTRODUCTION :

La méthode classique de résolution de problème de programmation linéaire est la méthode du simplexe mise au point par le mathématicien américain J.Danzting dans les années 40.

La méthode adaptée a été mise au point par les professeurs R.Gabasov et F.M.Kirillova de l'université de Minsk, en Belarusse dans les années 80. Elle est dite adaptée car elle garde certaines structures de la méthode du simplexe comme elle permet d'avoir une solution approchée.

Dans ce chapitre, nous proposons de résoudre un problème de programmation linéaire par la méthode adaptée.

I.1 POSITION DU PROBLÈME :

Considérons le problème suivant :

$$(\text{P1}) \begin{cases} f(x) = C'x \rightarrow \max & (1) \\ Ax = b & (2) \\ d_1 \leq x \leq d_2 & (3) \end{cases}$$

Où x, C', d_1, d_2 sont des n -vecteurs réels. b est un m -vecteur réel ; C' transposé de C.

$A = A[I, J]$: Une $m \times n$ matrice

$I = \{1 \ldots m\}$: L'ensemble des indices lignes de A.

$J = \{1 \ldots n\}$: L'ensemble des indices colonnes de A.

Définition 1 :

Tout vecteur $x = x(J)$ vérifiant les contraintes (2) et (3) est dit plan du problème (P1)

- Un plan x^0 est optimal si $C'x^0 = \max C'x / x$ plan de (P1)
- Un plan x^ε est ε-optimal "solution approchée à ε-prés "si ; $f(x^o) - f(x^\varepsilon) \leq \varepsilon,\ \varepsilon > 0$ réel donné.

Définition 2 :

L'ensemble des indices $J_B \subset J, |J_B| = m$ est appelé support (appui) du problème (P1) si : $\det A_B \neq 0$ tel que : $A_B = A[I, J_B]$ est la matrice du support (matrice d'appui).

De là en choisissant un support J_B, tout vecteur $x(J)$ peut s'écrire sous la forme :

$x(J) = (x(J_B), x(J_H)), \quad J_H = J - J_B$, où

$x(J_B)$ Est l'ensemble des composantes sur les indices du support,

$x(J_H)$ Est l'ensemble des composantes sur les indices hors-support,

De la même manière la matrice A peut s'écrire de la façon suivante :

$A(I, J) = (A(I, J_B), A(I, J_H))$

En utilisant cette dernière décomposition le système $Ax = b$ prend la forme suivante :

$$Ax = (A(I, J_B), A(I, J_H)) \cdot (x(J_B), x(J_H)) = b$$
$$Ax = A(I, J_B) \cdot x(J_B) + A(I, J_H) \cdot x(J_H) = b$$

Comme A_B est inversible ($\det A_B \neq 0$), on peut calculer les composantes x_B en fonction de x_H :

$x_B = x(J_B) = A_B^{-1}(b - A_H . x_H)$, où $A_H = A(I, J_H)$.

Définition 3 :

La paire $\{x, J_B\}$ formée du plan x et du support J_B, est appelé support-plan (plan d'appui) du problème (P1).

Définition 4 :

Le support plan $\{x, J_B\}$ est dit non-dégénéré si : $d_{1j} < x_j < d_{2j}, j \in J_B$

I.2 ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONELLE :

Soit $\{x, J_B\}$ un support plan de départ non dégénéré et $\bar{x} = x + \Delta x$ un autre plan

(Δx accroissement de x),

D'un côté : $$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(\bar{x}) - f(x) = C'\bar{x} - C'x \\ &= C'(x + \Delta x) - C'x = C'\Delta x\end{aligned}$$

D'un autre côté : $\begin{cases} Ax = b \\ A\bar{x} = A(x + \Delta x) = b \end{cases} \Rightarrow A\Delta x = 0$

$$\Rightarrow A_B \Delta x_B + A_H \Delta x_H = 0$$

On multiplie par $A_B^{-1} \Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1} A_H \Delta x_H$

$$\Rightarrow \Delta f(x) = -(C'_B A_B^{-1} A_H - C'_H)\Delta x_H$$

Posons les vecteurs suivants :

$y' = C'_B A_B^{-1}$ Vecteurs des potentiels.

$\Delta'_j = y'A(I, j) - C'_j \Leftrightarrow \Delta' = y'A - C'; j \in J$ (Δ Vecteurs des estimations).

Remarque 1 :

Par construction, les composantes de support du vecteur Δ sont nulles : $\Delta_B = \Delta(J_B) = 0$.

Soit d'autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$ et calculons la quantité définissant l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(\bar{x}) - f(x) = C'\bar{x} - C'x = C'(x + \Delta x) - C'x = C'\Delta x \\ &= C'(J_B) \cdot \Delta x(J_B) + C'(J_H) \cdot \Delta x(J_H) = C_B{}' \Delta x_B + C_H{}' \Delta x_H\end{aligned}$$

Comme $Ax = b$ et $A \cdot \bar{x} = b$ alors

$$A \cdot \Delta x = 0 \Rightarrow A_B \cdot \Delta x_B + A_H \cdot \Delta x_H = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1} A_H \cdot \Delta x_H$$

En remplaçant Δx_B dans $\Delta f(x)$, on obtient :

$$\Delta f(x) = (-C'_B A_B^{-1} A_H + C'_H) \cdot \Delta x_H = -\Delta'_H \cdot \Delta x_H = -\sum_{j \in J_H} \Delta_j \cdot \Delta x_j \qquad (4)$$

Comme $\bar{x}$ est un plan admissible (réalisable) alors, l'accroissement Δx vérifie :

$$d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, \ j \in J \qquad (5)$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (4) sous les contraintes (5) est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{1j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j > 0, \\ \Delta x_j = d_{2j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j < 0, \\ d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j = 0, \end{cases} \qquad j \in J_H$$

Et est égal à :

$$\beta = \beta(x, J_B) = \sum_{\Delta_j \geq 0} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{\Delta_j \leq 0} \Delta_j (x_j - d_{2j}), \ j \in J_H \Rightarrow \text{appelé valeur de suboptimalité.}$$

De là il en résulte que :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, J_B)$$

Et pour $\bar{x} = x^0$, on aura $f(x^0) - f(x) \leq \beta(x, J_B)$.

De cette dernière inégalité, on déduit le critère d'optimalité suivant :

I.2.1 THEORÈME : (Critère d'optimalité)

Les inégalités :

$$\begin{cases} x_j = d_{1j} & \text{si} \quad \Delta_j \geq 0, \\ x_j = d_{2j} & \text{si} \quad \Delta_j \leq 0, \\ x_j \in [d_{1j}, d_{2j}] & \text{si} \quad \Delta_j = 0, \quad j \in J_H \end{cases} \qquad (6)$$

Sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, J_B\}$.

PREUVE :

Conditions suffisantes :

Si les inégalités (6) sont vérifiées alors $\beta(x, J_B) = 0$ et comme $\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, J_B) = 0$, pour tout $\bar{x}$, donc

$f(\bar{x}) \leq f(x)$, $\forall \bar{x} \Rightarrow x$ est optimal.

Conditions nécessaires :

Soit $\{x, J_B\}$ un support optimal non dégénéré et supposons que les inégalités (6) ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire, il existe un indice $j_0 \in J_H$ tel que :

$\Delta_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d_{1j_0}$ ou $\Delta_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d_{2j_0}$

Prenons par exemple le 2eme cas : $\Delta_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d_{2j_0}$

Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :

$\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta \cdot \ell$, θ un réel positif non nul et ℓ un vecteur (direction).

Il faut trouver θ , ℓ tel que : $A \cdot \bar{x} = b, d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$. Pour cela :

- sur J_H, posons :

$$\Delta x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \in J_H - j_0 \\ \theta & \text{si} \quad j = j_0 \end{cases}$$

Avec $\theta > 0$

$\Delta x(J_B) = -A_B^{-1} A_H \Delta x(J_H) = -\theta A_B^{-1} a_{j_0}$, $\bar{x}$ vérifie $A\bar{x} = b$ et pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$, il faut prendre un θ suffisamment petit, d'autant plus que le support plan $\{x, J_B\}$ est non dégénéré.

En portant $\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta \cdot \ell$ dans la formule d'accroissement, on obtient :

$\Delta f(x) = \Delta f(\bar{x}) - f(x) = -\theta \cdot \Delta_{j_0} \cdot \ell_{j_0} > 0$.

Ce qui contredit l'optimalité de $\{x, J_B\}$.

I.2.2 THEORÈME : (Critère de suboptimalité)

Soit $\varepsilon > 0$ donné, pour l' ε -optimalité du plan x, il est suffisant de trouver un tel support J_B,

pour lequel la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivante : $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$.

PREUVE :

Conditions suffisantes :

Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon \Rightarrow \Delta f(x) \leq \varepsilon \Rightarrow x$ est ε -optimal, ce qui permet d'obtenir le résultat anticipé.

Faisons une décomposition de $\beta(x, J_B)$:

Pour cela construisons le problème dual de (P1) :

$$\begin{cases} \Phi(\lambda) = b'\mu - v'd_1 + w'd_2 \rightarrow \min \\ A'\mu - v + w = C, \\ v' \geq 0, w' \geq 0, \mu \in \Re^n \end{cases}$$

Le vecteur $\lambda = (\mu, v, w)$ construit de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} \mu = y; & & \\ v_j = \Delta_j, w_j = 0 & \text{si} & \Delta_j \geq 0, \\ v_j = 0, w_j = -\Delta_j & \text{si} & \Delta_j \leq 0, j \in J \end{array}$$

est un plan dual (solution admissible du dual).

$$\beta(x,J_B)=\sum_{\Delta_j>0}\Delta_j(x_j-d_{1j})+\sum_{\Delta_j<0}\Delta_j(x_j-d_{2j}),\, j\in J_H$$
$$=\sum_{j\in J}\Delta_j x_j-\sum_{\Delta_j>0}\Delta_j d_{1j}-\sum_{\Delta_j<0}\Delta_j d_{2j},\, j\in J_H$$
$$=\Delta'x-\Delta'd_1-\Delta'd_2$$
$$=(y'A-C')x-v'd_1+w'd_2$$
$$=-C'x+y'b-v'd_1+w'd_2$$
$$=-C'x+\theta(\mu,v,w)$$
$$=C'x^o-C'x+\theta(\mu,v,w)-C'x^0;$$
$$\beta(x,J_B)=C'x^0-C'x+\theta(\mu,v,w)-\theta(\mu^0,v^0,w^0)$$
$$\beta(x,J_B)=\beta_x+\beta(J_B);$$

β_x : Mesure de la non optimalité de x,

$\beta(J_B)$: Mesure du non optimalité de l'appui J_B .

Remarque 1 :

Soit $\{x,J_B\}$un plan d'appui non dégénéré de départ :

Si $\beta(x,J_B)=0\Rightarrow x$ est optimal.

Si $\beta(x,J_B)\le\varepsilon\Rightarrow x$ est ε -optimal.

Si $\beta(x,J_B)>\varepsilon\Rightarrow$on passe à l'itération de l'algorithme.

I.3 DÉROULEMENT DE LA MÉTHODE :

La méthode de résolution est constituée de 02 procédures :

- **Changement de plan** : consiste à augmenter $C'x$
- **Changement de support (appui)** : consiste à diminuer $\theta(\lambda)$.

I.3.1 Étape 1 : Changement de plan

Soit $\bar{x}$ un nouveau plan qui sera construit la manière suivante :

$\bar{x}=x+\theta\ell$; ℓ : étant la direction du changement,

θ : (un réel positif) le pas maximale le long de la direction ℓ (tel que $f(\bar{x}) \geq f(x)$).

Le vecteur de direction $\ell = (\ell(J_B), \ell(J_H))$ est construit de la manière suivante :

Sur J_H , on pose $\theta = 1$et

$$\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j > 0, \\ d_{2j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j < 0, \\ 0 & \text{si} \quad \Delta_j = 0, j \in J_H, \end{cases} \qquad (7)$$

et $\ell(J_B) = -A_B^{-1} A_H \cdot \ell(J_H)$ pour avoir $A\bar{x} = b$.

Pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$ il faut calculer

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j} - x_j}{\ell_j} & \text{si} \quad \ell_j < 0 \\ \dfrac{d_{2j} - x_j}{\ell_j} & \text{si} \quad \ell_j > 0 \\ \infty & \text{si} \quad \ell_j = 0, j \in J_B \end{cases}$$

$\theta_{j_0} = \min(\theta_j)$ pour $j \in J_B$

Et le pas maximal sera $\theta^0 = \min(1, \theta_{j_0})$.

De là, le nouveau plan sera : $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$ et la valeur de suboptimalité pour le nouveau plan

sera :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{j \in J_{H^+}} \Delta_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H^-}} \Delta_j (\bar{x}_j - d_{2j})$$

$$= \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{j \in J_H} \Delta_j \ell_j \qquad \text{(en remplaçant les } \ell_j \text{ données par (7))}$$

$$= \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B) = (1 - \theta^0) \beta(x, J_B).$$

De cette dernière expression on conclut :

- Si $\theta^0 = 1 \Rightarrow \bar{x}$ est optimal
- Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon \Rightarrow \bar{x}$ est ε -optimal

- Si $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon \Rightarrow$ on passe au changement du support $J_B \to \bar{J}_B (A_B \to \bar{A}_B)$.

I.3.2 Étape 2 : Changement du support

Le changement du support $A_B \to \bar{A}_B$ consiste à faire un changement du co-plan Δ vers $\bar{\Delta}$ et du vecteur des potentiels y vers $\bar{y}$ de telle sorte que :

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \le \beta(\bar{x}, J_B)$, pour cela on pose :

$$\begin{cases} \bar{\Delta}(J) = \Delta(J) + \sigma_0 t(J) \in \Re^n & (8) \\ \bar{y}(I) = y(I) + \sigma_0 t(I) \in \Re^m & (9) \end{cases}$$

Où t : est la direction de diminution de la fonction duale,

σ_0 : est le pas maximal le long de cette direction.

Calcul de t et σ$_0$:

En utilisant la définition de Δ et y on obtient :

$$\bar{\Delta} = \bar{y}' A - C' = (y' + \sigma_0 t'(I))A - C' = \Delta' + \sigma_0 t'(I)A$$

De là : $t'(J) = t'(I)A(I, J) \Rightarrow t'(J_B) = t'(I)A(I, J_B) \Rightarrow t'(I) = t'(J_B) \cdot A_B^{-1}$

Ce qui nous donne $t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1} \cdot A(I, J_H)$.

Après calcul du plan $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$, le pas θ^0 est donné par $\theta^0 = \min(1, \theta_{j_0}) = \theta_{j_0}; j_0 \in J_B$

On cherchera un indice $j_i \in J_H$ qui entrera dans la base à la place de j_0.

Pour cela posons :

$$t_j = \begin{cases} -signe(\ell_{j_0}) & \text{si} \quad j = j_0 \\ 0 & \text{si} \quad j \in J_B - j_0 \end{cases}$$

$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1} \cdot A(I, J_H)$

Et calculons : $\sigma_0 = \sigma_{j_1} = \min\limits_{j \in J_H}(\sigma_j)$

$$\sigma_j = \begin{cases} -\dfrac{\Delta_j}{t_j} & \text{si} \quad \Delta_j t_j < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \begin{array}{l} \Delta_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \ \underline{\text{ou}} \\ \Delta_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0, j \in J_H \end{array} \\ +\infty & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

► Le calcul de σ_0 vérifie $\overline{\Delta}_j \Delta_j \geq 0, \forall j \in J$.

► $\overline{\Delta}(j_1) = 0$.

Le nouveau support sera $\overline{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1$, et on remarque que la quantité $\beta(\overline{x}, \overline{J}_B)$ est égale à : $\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = \sum_{j \in \overline{J}_{H^+}} \overline{\Delta}_j (\overline{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \overline{J}_{H^-}} \overline{\Delta}_j (\overline{x}_j - d_{2j})$

Où : $\overline{J}_{H^+} = \{ j \in J_H / \overline{\Delta}_j \geq 0 \}$, $\overline{J}_{H^-} = \{ j \in J_H / \overline{\Delta}_j \leq 0 \}$,

Selon la relation (8) et sur J_B :

$$\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = \sum_{j \in J_{H^+}} \Delta_j (\overline{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H-}} \Delta_j (\overline{x}_j - d_{2j}) + \sigma_0 \Big(\sum_{j \in J_{H^+}} t_j (\overline{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H-}} t_j (\overline{x}_j - d_{2j}) \Big)$$

$$\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = (1 - \theta^0) \cdot \beta(x, J_B) + \sigma^0 \Big(\sum_{j \in J_{H^+}} t_j (\overline{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H-}} t_j (\overline{x}_j - d_{2j}) \Big)$$

$t \cdot \ell = 0$ car $A \cdot \ell = 0 (t'(J_B) = t'(J) A(I, J_B))$ et $t'(J_H) = t'(J_B) A_B^{-1} \cdot A(I, J_H)$.

Par construction toutes les composantes de $t'(J_B)$ sont nulles sauf à l'indice j_0.

Posons $\alpha = \alpha_0 = \sum_{j \in J_{H^+}} t_j (\overline{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H-}} t_j (\overline{x}_j - d_{2j}) = -(1 - \theta^0) \cdot \sum_{j \in J_H} t_j \ell_j = (1 - \theta^0) t_{j_0} \ell_{j_0}$

$$\alpha = \alpha_0 = (1 - \theta^0) t_{j_0} \ell_{j_0} = \begin{cases} x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{1 j_0} & \text{si } t_{j_0} = 1 \\ -(x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{2 j_0}) & \text{si } t_{j_0} = -1 \end{cases}$$

Donc $\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = (1 - \theta^0) \cdot \beta(x, J_B) - \sigma_0 |\alpha_0|$.

I.4 ALGORITHME DE RÉSOLUTION :

Soit $\{x, J_B\}$un support plan de départ
(1). Calculer

- $y' = C'_B A_B^{-1}$
- $\Delta' = y'A - C'$
- $\beta = \beta(x, J_B)$

Si $\beta = \beta(x, J_B) = 0 \Rightarrow \{x, J_B\}$ est optimal $\Rightarrow$arrêt du processus

Si $\beta = \beta(x, J_B) \leq \varepsilon \Rightarrow \{x, J_B\}$est ε -optimal$\Rightarrow$arrêt du processus

Sinon $\Rightarrow$aller à **(2)**.

(2).

- Déterminer le vecteur $\ell(J)$,
- Déterminer le vecteur $\bar{x}(J)$,
- Calculer $(1-\theta^0)\cdot\beta$

Si $(1-\theta^0)\cdot\beta < \varepsilon$, $\{\bar{x}, J_B\}$ est ε -optimal$\Rightarrow$ arrêt du processus.

Si $\theta^0 = 1$, $\{\bar{x}, J_B\}$ est optimal$\Rightarrow$ arrêt du processus.

Si $(1-\theta^0)\cdot\beta > \varepsilon$ aller à **(3).**

(3). Changement de support :

- Calculer le vecteur t
- Calculer $\sigma_{j_1} = \min\limits_{j \in J_H}(\sigma_j)$
- le nouvel support est $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1$
- Aller à I (on passe à une nouvelle itération avec un support plan $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$).

I.5 EXEMPLE D'APPLICATION :

Nous allons résoudre le problème suivant par la méthode adaptée, en suite on compare le résultat obtenu avec Matlab.

$$
(P1)\quad \begin{cases}
-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + 6x_6 \to \max \\[2ex]
-5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 + x_6 = 2 \\
-x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 2 \\
2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 + 5x_6 = 3 \\
6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 4 \\
-2 \le x_1 \le 2 \\
-2 \le x_2 \le 2 \\
-4 \le x_3 \le 4 \\
-4 \le x_4 \le 4 \\
-6 \le x_5 \le 6 \\
-7 \le x_6 \le 7
\end{cases}
$$

Avec :

$x' = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$, $d_1 = (-2;-2;-4;-4;-6;-7)$, $d_2 = (2;2;4;4;6;7)$, $c' = (-1;2;-3;4;-5;6)$, $b' = (2;2;3;4)$

$$
A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}
$$

Nous prenons comme solution initiale le vecteur x défini comme suit (en prennant $x_5 = x_6 = 0$).

$$x = \begin{pmatrix} -291/1250 \\ 63/200 \\ 976/625 \\ -1163/1439 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad J_B = (1,2,3,4)$$

1 ère itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	$\bar{x}$	t
1	-291/1250	0	564/3029	875/73	1351/1250	0
2	63/200	0	1079/10000	-5363/250	-2	0
3	976/625	0	2331/10000	-1741/73	-1171/1157	0
4	-1163/1439	0	129/1000	8008/215	1307/407	0
5	0	-1088/73	1	6	259/400	675/1057
6	0	625/1037	1	-7	-1294/1713	-2552/1035

$\beta(x, J_B) = 6836/73$, $\beta(\bar{x}, J_B) = 11027/132$

2 ème itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	$\bar{x}$	t
1	5303/500	0	253/1706	5751/908	1595/1047	0
2	-2	611/2500	∞	0	-2	-565/482
3	-1171/1157	0	225/1499	-3919/197	-2394/971	0
4	1307/407	0	73/1000	17929/1661	4	-1
5	259/400	-2955/2006	1	2901/542	-1052/1013	3523/1747
6	-1294/1713	0	2112/413	1057/697	3223/5000	0

$\beta(x, J_B) = 3943/50$, $\beta(\bar{x}, J_B) = 4459/61$

3 $^{\text{ème}}$ itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	$\bar{x}$	t
1	1595/1047	0	209/1723	3326/847	1249/671	0
2	-2	0	2343/5000	2885/338	-377/298	0
3	-2394/971	0	2488/289	-35647/2000	-4	1
4	4	417/2000	∞	0	4	3136/509
5	1052/1013	-4394/307	1	1414/285	916/625	2017/571
6	3223/5000	0	724/461	1027/211	-451/2000	0

$\beta(x, J_B) = 6320/89$, $\beta(\bar{x}, J_B) = 4478/69$

4 $^{\text{ème}}$ itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	$\bar{x}$	t
1	1249/671	0	2594/321	-5543/116	1491/1250	0
2	-377/298	0	799/571	8867/38	2	-1
3	-4		∞	0	-4	19703/1423
4	4	0	2932/969	-3437/13	751/2500	0
5	916/625	-3599/1671	1	1256/277	289/189	669/13
6	-451/2000	0	2162/287	7002/73	2233/2000	0

$\beta(x, J_B) = 2881/295$, $\beta(\bar{x}, J_B) = 2677/278$

5$^{\text{ème}}$ itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	$\bar{x}$	t
1	1491/1250	0	/	/	/	/
2	2	-1310/313	/	/	/	/
3	-4	773/195	/	/	/	/
4	751/2500	0	/	/	/	/
5	289/189	0	/	/	/	/
6	2233/2000	0	/	/	/	/

$$\beta(x, J_B) = 0,\ x_{opt} = \begin{pmatrix} 226/223 \\ 2 \\ -4 \\ 67/223 \\ 341/223 \\ 249/223 \end{pmatrix}$$

CHAPITRE II:

LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX AVEC DES CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE AVEC LA MÉTHODE ADAPTÉE

INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution d'un problème Min-Max avec des contraintes généralisées dans la programmation linéaire par la méthode adaptée mise en avant par R.Gabasove et F.M Kirillova.

II.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME :

On appelle problème min- max en programmation linéaire tout problème ; qui consiste à maximiser (resp minimiser) une fonctionnelle f définie par : $f(x) = \min_{k \in K}(C'_k x + a_k)$

(resp $f(x) = \max_{k \in K}(C'_k x + a_k)$) sur un sous-ensemble de $\Re^n$ défini par des contraintes linéaires.

Considérons le problème suivant :

$$
(P2) \qquad \begin{cases} f(x) = \min_{k \in K}(C'_k x + a_k) \to \max_x \\ Ax = b \\ d_1 \leq x \leq d_2 \end{cases}
$$

Où x, d_1, d_2 sont des n-vecteurs réels, $C_k, k \in K$ des n-vecteurs.

b un m-vecteur, $a_k, k \in K$ des scalaires, C'_k la transposé du vecteur $C_k, k \in K$.

$A = A[I, J]$: $(m * n)$ matrice, rang $A = m \leq n$.

$K = \{1 \dots p\}$: L'ensemble des indices des composantes de la fonctionnelle f .

$I = \{1 \dots m\}$: L'ensemble des indices des lignes de A.

$J = \{1 \dots n\}$: L'ensemble des indices des colonnes de A.

$C[K, J]$: $(p * n)$ matrice formée par les vecteurs lignes $C'_k, k \in K$.

II.2 DÉFINITIONS DE BASE :

1. **Plan admissible** : On appelle plan admissible (solution réalisable) ; tout vecteur x de $\Re^n$ vérifiant les contraintes du problème (P2)
2. **Plan optimal** : Un plan x^0 est optimal s'il réalise le maximum de la fonctionnelle du problème (P2) i.e. $f(x) \leq f(x^0)$. $\forall x$ plan de (P2).
3. **Plan sub-optimal (Plan ε-optimal)** : Soit $\varepsilon > 0$ réel donné.

   Tout plan x^ε vérifiant l'inégalité suivante $f(x^0) - f(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$ est dit plan sub-optimal (ou plan ε-optimal).
4. **Support plan** : Soit $J_B \subset J / |J_B| = m$ « un ensemble d'indices de J ».

   L'ensemble J_B est appelé « support des contraintes de (P2) » si et seulement si :

   $\det A(I, J_B) \neq 0 \Leftrightarrow A_B$ inversible,

   $\Rightarrow A(I, J_B) = A_B$ est dite « matrice du support ».

   La paire $\{x, J_B\}$ formée du plan x et du support J_B est appelée « support-plan ».

II.3 VECTEURS DES ECRARTS DE LA FONCTIONELLE :

Soit x un plan du problème (P2) et considérons l'ensemble $K(x)$ des indices des composantes actives de la fonctionnelle défini comme suit :

$$K(x) = \{k \in K : f(x) = C'_k x + a_k\}$$

$K(x) \neq \varnothing$ pour tout plan x du problème (P2).

On définit le vecteur des écarts des composantes de la fonctionnelle f :

$$\omega(k) = \{\omega_k, k \in K\}$$

$$\omega_k = \omega_k(x) = C'_k x + a_k - f(x), k \in K \qquad (10)$$

Conséquences :

$$\omega(k) \geq 0, k \in K$$

$$\min \omega_k(x) = 0, \forall k \in K$$

$\Delta\omega_k \geq -\omega_k, k \in K_f$

II.4 SUPPORT (APPUI) DE LA FONCTIONELLE :

Considérons les deux sous-ensembles d'indices K_f et J_f avec :

$K_f \subset K$ et $J_f \subset J$ tel que $|K_f| = |J_f| + 1$

et construisons la matrice suivante :

$$\Delta(K,J) = C(K,J_B)A_B^{-1}A(I,J) - C(K,J) \tag{11}$$

Soit le vecteur $e(K) = (e_k = 1, k \in K)$,

et formons par la suite la matrice suivante :

$$\Delta_f = (\Delta(K_f, J_f), e(K_f)) \tag{12}$$

L'ensemble $Q_f = \{K_f, J_f\}$ est appelé « support de la fonctionnelle » si la matrice Δ_f correspondante est régulière i.e. $\det \Delta_f \neq 0$.

Support plan non dégénéré : Le support-plan $\{x, J_B\}$ est dit « non dégénéré »si et seulement si :

- $d_{1j} < x_j < d_{2j}$, $\forall j \in J_B \cup J_f$
- $c_k' x + \alpha_k > f(x)$. $\quad k \in K_H = K - K_f$.

Définition 1 :

On définit le vecteur des estimations $\Delta(J)$ par :

$$\Delta'(J) = \gamma'(K_f)\Delta(K_f, J) \tag{13}$$

$$\mu'(I) = \gamma'(K_f) \cdot C(K_f, J_B) \cdot A_B^{-1} \tag{14}$$

Où $\gamma'(K_f)$ est la dernière ligne de la matrice Δ_f^{-1}

Et $\mu'(I)$ est le vecteur des potentiels.

de là, on retire les relations suivantes :

- $\gamma'(K_f) = (0'(J_f),1)\Delta_f^{-1}$
- $\gamma'(K_f)e(K_f) = 1$
- $\Delta(J_f) = 0(J_f)$
- $\Delta(J_B) = 0(J_B)$

Remarque 1 :

L'ensemble $Q_p = \{J_B, Q_f\}$ formé du support des contraintes et du support de la fonctionnelle est appelé support du problème (P2).

- Le support Q_f de la fonctionnelle est dit régulier si $\gamma_k \geq 0, k \in K_f$.
- Le support Q_p du problème est dit régulier si Q_f est régulier.
- Le support $Q_f\{K_f, J_f\}$ avec $J_f = \varnothing$ est régulier, par définition.

Par la suite, on ne considère que des supports réguliers.

La paire $\{x, Q_p\}$ formée du plan x et du support Q_p est appelée support-plan (plan d'appui) du problème (P2).

II.5 FORMULES D'ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE :

Soit $\{x, Q_p\}$ un plan d'appui de départ non dégénéré du problème (P2) et $\bar{x} = x + \Delta x$ un plan quelconque, et nous calculons la quantité représentant l'accroissement de la fonctionnelle f telle que :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \tag{15}$$

Soit $\Delta\omega$ le vecteur d'accroissement des écarts de la fonctionnelle tel que :

$$\Delta\omega(K) = C(K, J) \cdot \Delta x - e(K) \cdot \Delta f(x) \tag{16}$$

À partir de la relation (11), on aura :

$$\Delta\omega(K) = -\Delta(K, J) \cdot \Delta x - e(K) \cdot \Delta f(x) \tag{17}$$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_f \\ \Delta f(x) \end{pmatrix} = \Delta_f^{-1}\Delta\omega(K_f) - \Delta_f^{-1}(\Delta(K_f, J_H))\Delta x_H, J_H = J - (J_B \cup J_f)$$

En utilisant la décomposition de la matrice Δ_f^{-1} on aura comme dernière solution :

$$\Delta x(J_f) = -D(J_f, K_f)\cdot\Delta(K_f, J_H)\Delta x(J_H) - D(J_f, K_f)\cdot\Delta\omega(K_f) \quad (18)$$

$$\Delta f(x) = -\Delta'(J_H)\Delta x(J_H) - \gamma'(K_f)\Delta\omega(K_f) \quad (19)$$

Donc : $\Delta_f^{-1} = \begin{pmatrix} D(J_f, K_f) \\ \gamma'(K_f) \end{pmatrix}$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (19) sous les contraintes suivantes :

$d_{1j} - x_j \le \Delta x_j \le d_{2j} - x_j,\ j \in J_H$ et $\Delta\omega_k \ge -\omega_k, k \in K_f$

Est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{2j} - x_j & \text{si} & \Delta_j < 0, \\ \Delta x_j = d_{1j} - x_j & \text{si} & \Delta_j > 0,\ j \in J_H, k \in K_f \\ \Delta\omega_k = -\omega_k \end{cases}$$

Et égale à :

$$\beta = \beta(x, Q_p) = \sum_{j\in J_H^+}\Delta_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-}\Delta_j(x_j - d_{2j}) + \sum_{k\in K_f}\gamma_k\omega_k \quad (20)$$

Tel que : $J_H^+ = \{j \in J_H / \Delta_j \ge 0\}$et $J_H^- = \{j \in J_H / \Delta_j \le 0\}$.

$\beta(x, Q_p)$ est appelée valeur de sub-optimalité du plan d'appui $\{x, Q_p\}$.

Remarque 1 :

Pour tout plan admissible $\bar{x}$ du problème (P2), la valeur de sub-optimalité $\beta(x, Q_p)$ du support plan $\{x, Q_p\}$vérifie :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \le \beta(x, Q_p) \quad (21)$$

En particulier, pour un plan optimal $\bar{x} = x^0$ on obtient :

$$0 \le f(x^0) - f(x) \le \beta(x, Q_p) \quad (22)$$

À partir de l'inégalité (22), on déduit le critère suivant :

II.5.1 Théorème : (Critère d'optimalité)

Soit les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_j = d_{1j} & \text{si} \quad \Delta_j \geq 0 \\ x_j = d_{2j} & \text{si} \quad \Delta_j \leq 0 \\ d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j} & \text{si} \quad \Delta_j = 0 \\ \omega_k \geq 0 & \text{si} \quad \gamma_k = 0 \\ \omega_k = 0 & \text{si} \quad \gamma_k \geq 0 \ ; \ j \in J_H, k \in K_f \end{cases} \tag{23}$$

Sont suffisantes pour l'optimalité, et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, Q_p\}$.

Preuve :

Conditions suffisantes :

Soit $\{x, Q_p\}$ un support plan du problème (P2) pour lequel les conditions (23) sont vérifiées, alors la relation (20) donne $\beta(x, Q_p) = 0$.

De là, pour tout plan admissible $\bar{x}$, et d'après les relations (23) :

$f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, Q_p) = 0$ donc $f(\bar{x}) - f(x) \leq 0$ d'où $\{x, Q_p\}$ est un plan optimal.

Conditions nécessaires :

Soit $\{x, Q_p\}$ un support plan optimal non dégénéré du problème (P2), et pour lequel les conditions (23) ne sont pas vérifiées, alors on distingue deux cas :

1) $\exists j_0 \in J_H \ / \ \Delta_{j_0} > 0, x_{j_0} > d_{1j_0}$ ou $\Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0}$ (24)

2) $\exists k_0 \in K_f \ / \ \gamma_{k_0} > 0, \omega_{k_0} > 0$. (25)

Construisons alors un nouveau plan $\bar{x} = x + \theta\ell$ tel que $f(\bar{x}) > f(x)$, avec

θ : Le pas admissible ($\theta > 0$).

ℓ : La direction admissible.

Considérons d'abords le premier cas :

$$\exists j_0 \in J_H \,/\, \Delta_{j_0} > 0, x_{j_0} > d_{1j_0} \text{ ou } \Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0}$$

On pose ℓ_{j_0} = signe (a_0) où

$$a_0 = \begin{cases} d_{1j_0} - x_{j_0} & \text{si} \quad \Delta_{j_0} > 0, x_{j_0} > d_{1j_0} \\ d_{2j_0} - x_{j_0} & \text{si} \quad \Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0} \end{cases}$$

$\ell_j = 0, \forall j \in J_{H-j_0}, \Delta\omega_k = 0, k \in K_f$

et $\ell(J_B) = -A_B^{-1}A(I, J_H \cup J_f)\ell(J_H \cup J_f)$, $\ell(J_f) = -D(J_f, K_f)\Delta(J_f, K_f)\ell(J_H)$

$\Delta_{j_0} > 0, x_{j_0} > d_{1j_0}, \exists\theta_1 > 0 / \bar{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 \geq d_{1j_0}$.
$\Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0}, \exists\theta_2 > 0 / \bar{x}_{j_0} = x_{j_0} + \theta_2 \leq d_{2j_0}$.

On obtient dans ce cas $\bar{x}_{j_0} = x_{j_0} + \theta_1 \operatorname{signe}(a_0)$, $\quad \bar{x}_j = x_j \forall j \in J_{H-j_0}$

$\Rightarrow \forall j \in J_H, \bar{x}_j = x_j + \theta_1\ell_j, d_{1j} \leq x_j + \theta_1\ell_j = \bar{x}_j \leq d_{2j}$.

D'autre part, puisque $\{x, Q_p\}$ est un support plan non dégénéré, alors on a :

$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \forall j \in J_f \cup \mathrm{J_B}$,

il existe $\theta_2 > 0$ tel que : $d_{1j} \leq \bar{x}_j = x_j + \theta_2\ell_j \leq d_{2j}, \forall j \in J_f \cup J_{B.}$

Pour $\theta^0 = \min(\theta_1, \theta_2), \bar{x} = x + \theta^0\ell$ et par construction de $\ell(J_B)$ et $\ell(J_f)$ est aussi un plan du problème (P_2) et on obtient :

$\Delta f(x) = -\theta^0\Delta_{j_0}$ signe (a_0)>0 ce qui contredit l'optimalité du plan $\{x, Q_p\}$.

Pour le deuxième cas :

Posons $\Delta\omega_{k_0} = -\theta\omega_{k_0}, \theta > 0, \Delta\omega_k = 0, \forall k \in K_f \setminus \{\mathrm{k}_0\}$

et $\ell_{J_H} = 0(J_H),$

$\ell(J_B) = -A_B^{-1} A(I, J_H \cup J_f)\ell(J_H \cup J_f),$

$\ell(J_f) = D(J_f, K_f) \cdot \omega(K_f).$

Puisque $\{x, Q_p\}$est un support plan non dégénéré, alors on a :

$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \forall j \in J_f \cup J_B$, donc il existe $\theta_2 > 0$ tel que :

$d_{1j} \leq \bar{x}_j = x_j + \theta_2 \ell_j \leq d_{2j}, \forall j \in J_f \cup J_{B.}$

En prenant $\theta_1 = \min(\theta_2, \theta)$. $\bar{x} = x + \theta_1 \ell$ est un plan du problème (P2) et on obtient :

$\Delta f(x) = \theta_1 \gamma_{k_0} \omega_{k_0} > 0.$

Ce qui contredit l'optimalité du plan d'appui $\{x, Q_p\}$.

II.5.2 Théorème : (Critère de sub-optimalité)

Pour $\varepsilon > 0$ un réel donné, la condition suivante :

$$\beta(x, Q_p) \leq \varepsilon \qquad (26)$$

Est suffisante pour l'ε-optimalité du plan d'appui $\{x, Q_p\}$.

Preuve :

<u>Conditions suffisantes :</u>

Si $\beta(x, Q_f) \leq \varepsilon$, alors de la relation (22) ; on obtient $\Delta f(x) \leq \varepsilon$, ce qui implique que x est

ε-optimal.

En faisant une décomposition de $\beta(x,Q_f)$, pour cela nous construisons le problème dual du problème (P2) suivant :

$$(D)\quad \begin{cases} \Phi(X)=\lambda' a + y'b - v'd_1 + w'd_2 \to \min \\ -\lambda'(K)\cdot C(K,J)+y'(I)A(I,J)-v'(J)+w'(J)=0'(J) \\ \\ \lambda'(K)\cdot e(K)=1 \\ \lambda\in\Re_+^p\ ,\ v,w\in\Re_+^n\ ,\ y\in\Re^m \end{cases} \tag{27}$$

$X(\lambda,y,v;w)$ vecteur dual construit de la manière suivante :

$$\lambda'(K_f)=(0'(J_f),1)\Delta_f^{-1}\ ;\ \ \lambda'(K_H)=0$$

$$y'(I)=\lambda'(K_f).C(K_f,J_B)A_B^{-1}$$

$$\begin{cases} v_j=\Delta_j, w_j=0 & \text{si} \quad \Delta_j\ge 0 \\ v_j=0, w_j=-\Delta_j & \text{si} \quad \Delta_j<0 \end{cases}$$

Est un plan du problème dual (D).

$$\beta(x,Q_p)=\sum_{j\in J_H^+}\Delta_j(x_j-d_{1j})+\sum_{j\in J_H^-}\Delta_j(x_j-d_{2j})+\sum_{k\in K_f}\gamma_k\omega_k$$

En introduisant le plan ci-dessus, on obtient :

$$\beta(x,Q_p)=-\sum_{j\in J_H^+}\Delta_j(d_{1j})-\sum_{j\in J_H^-}\Delta_j(d_{2j})+\sum_{j\in J_H}\Delta_j(x_j)+\sum_{k\in K_f}\gamma_k\omega_k$$

$$\gamma'(K_f)\omega(K_f)=\gamma'(K_f)(C(K_f,J).x(J)+a(K_f)-e(K_f).x(J))$$

Introduisons la matrice $\Delta(K,J)$, on obtient alors :

$$\gamma'(K_f)\omega(K_f)=-\Delta'(J_H).x(J)+\gamma'(K_f)C(K_f,J_{\mathbf{B}})A_B^{-1}b-f(x)+\lambda'a$$

$$\begin{aligned}\beta(x,Q_p) &= \lambda' a + y' b - v' d_1 + w' d_2 - f(x)\\ &= \lambda' a + y' b - v' d_1 + w' d_2 - f(x) + f(x^0) - \Phi(X^0)\\ &= \underbrace{\left(\Phi(X) - \Phi(X^0)\right)}_{\beta(Q_p)} + \underbrace{\left(f(x^0) - f(x)\right)}_{\beta(x)}\end{aligned}$$

D''où le résultat :

$$\beta(x,Q_p) = \beta(x) + \beta(Q_p)$$

Où :

$\beta(x)$ Est la mesure de la non optimalité du plan x.

$\beta(Q_p)$ Est la mesure de la non optimalité du support Q_p.

II.6 DÉROULEMENT DE LA MÉTHODE :

L'itération de la méthode adaptée est basée sur la décroissance de la valeur de sub-optimalité.

Cette itération est constituée de deux procédures :

- Changement de plan
- Changement de support

II.6.1 Étape 1 : Changement de plan

Cette étape de l'itération consiste à construire un nouveau plan admissible $\bar{x}$ tel que $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$.

Désignons par :

θ^0 Le pas admissible maximal le long de la direction ℓ ($\theta > 0$, réel),

ℓ La direction admissible au point x.

Le changement du plan $\bar{x}$ a pour effet d'augmenter la valeur de la fonctionnelle f : $f(\bar{x}) \geq f(x)$

* Pour $j \in J_H$ on pose :

$$\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j > 0 \\ d_{2j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \Delta = 0 \end{cases} \qquad (28)$$

Pour avoir $A\bar{x} = b$, on prend $\ell(J_B) = -A_B^{-1} A(I, J_H \cup J_f)\ell(J_H \cup J_f)$ et $\ell(J_f)$.

est calculé de la manière suivante :

En vertu du fait que $\Delta\omega(K_f) \geq -\omega(K_f)$ peut s'écrire $\Delta\omega(K_f) = -\theta\omega(K_f)$ avec $\theta \leq 1$, ce qui résulte à partir de la relation (18)

$\ell(J_f) = D(J_f, K_f)(-\Delta(K_f, J_H)\ell(J_f) + \omega(J_f))$

Soit θ^0 la valeur maximale du pas pour lequel les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) $d_{1j} \leq x + \theta^0 \ell \leq d_{2j}, \forall j \in J$

b) $\Delta\omega_k \geq -\omega_k, \forall k \in K.$

La condition a) est vérifiée sur J_H pour $\theta \in [0,1]$, et sur $J_f \cup J_B$, pour $\theta = \theta_{j_0}$

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j} - x_j}{\ell_j} & \text{si} \quad \ell_j < 0 \\ \dfrac{d_{2j} - x_j}{\ell_j} & \text{si} \quad \ell_j > 0 \\ \infty & \text{si} \quad \ell_j = 0, j \in J_f \cup J_B \end{cases} \qquad (29)$$

$\theta_{j_0} = \min(\theta_j)$ pour $j \in J_f \cup J_B$

Quant à la deuxième condition b) est vérifiée pour $\theta \leq 1$ sur K_f, et sur K_H pour $\theta_{k_0} = \min(\theta_k), k \in K_H$

$$\theta_k = \begin{cases} \dfrac{C'_k x + \alpha_k - f(x)}{\beta(x, Q_p) - C'_k \ell} & \text{si} \qquad C'_k \ell < \beta(x, Q_p) \\ \infty & \text{si non} \end{cases}$$

Le pas maximal θ^0 est donc $\theta^0 = \min(1, \theta_{k_0}, \theta_{j_0})$

Donc $\beta(\bar{x}, Q_p) = (1-\theta^0)\beta(x, Q_f)$.

Alors :

Si $\theta^0 = 1 \Rightarrow \beta(\bar{x}, Q_p) = 0 \Rightarrow \bar{x}$ est optimal i.e. le support plan $\{\bar{x}, Q_p\}$est un plan optimal.

Si $\beta(\bar{x}, Q_p) \leq \varepsilon \Rightarrow \bar{x}$ est ε-optimal i.e. le support plan $\{\bar{x}, Q_p\}$ est ε-optimal.

Si $\beta(\bar{x}, Q_p) > \varepsilon \Rightarrow$ on passe au changement du support.

II.6.1 Étape 2 : Changement du support

Le changement d'appui s'accompagne par la diminution de la fonctionnelle duale c'est-à-dire :

Le changement de $Q_p \to \overline{Q}_p$ entraîne le changement du plan dual (λ, y, v, w) vers $(\bar{\lambda}, \bar{y}, \bar{v}, \bar{w})$.

De là, on pose :

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \lambda + \sigma.\delta\lambda = \lambda + \sigma t(K) \\ \bar{v} = v + \delta v \\ \bar{w} = w + \delta w \\ \bar{y} = y + \sigma \cdot \delta y \end{cases}$$

Où :

t La direction admissible du changement du plan dual ;

σ Le pas maximal le long de cette direction.

Ici on remplace v, w par $\Delta : \overline{\Delta} = \Delta + \sigma t(J)$.

Le calcul de la direction admissible et le pas maximal se fait comme suit :

À partir de $\overline{\Delta} = \Delta + \sigma t(J)$, $X, \overline{X}$ des plan duaux

$$t'(J) = \delta y'(I) A(I, J) - \delta\lambda'(K) C(K, J) . \qquad (*)$$

Ce qui résulte que $t'(J_B) = \delta y'(I)A_B - \delta\lambda'(K)C(K, J_B)$
Donc $\delta y'(I) = t'(J_B)A_B^{-1} + \delta\lambda'(K)C(K, J_B)A_B^{-1}$
On remplaçant dans (*) on aura

$$t(J) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J) + \delta\lambda'(K)\Delta(K, J)$$

$$(t'(J_f),0) = (t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_f).0) + \delta\lambda'(K_f)\big(\Delta(K_f, J_f).e(K_f)\big) + \delta\lambda'(K_H)\big(\Delta(K_H, J_H).e(K_H)\big)$$

Alors :

$$\delta\lambda'(K_f) = \Big((t'(J_f),0) - (t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_f).0) - \delta\lambda'(K_H)\big(\Delta(K_H, J_f), e(K_H)\big)\Big)\Delta_f^{-1}$$

$$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_H) + \delta\lambda'(K_H)(\Delta(K_H, J_H) + \delta\lambda'(K_f)(\Delta(K_f, J_H)))$$

$t'(J_f)$, $t'(J_B)$ et $\delta\lambda'(K_H)$ sont construit d'une manière à assurer une diminution de la fonctionnelle du problème dual (D).

- $\theta^0 = \theta_{j_0}$, on pose $t_{j_0} = -signe(\ell_{j_0})$, $t(J_f \cup J_B - J_0) = 0$, $\delta\lambda(K_H) = 0$
- $\theta^0 = \theta_{j_0}$, on pose $\delta\lambda_{k_0} = 1$, $\delta\lambda(K_{H-k_0}) = 0$, $t(J_f \cup J_B) = 0$

Calcul du pas maximal σ^0 :

$$\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}, \sigma_{k_1})$$

Où $\sigma_{j_1} = \min(\sigma_j) / j \in J_H$

$$\sigma_j \begin{cases} -\dfrac{\Delta_j}{t_j} & \text{si} \quad \Delta_j t_j < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \Delta_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ & \quad\quad\; ou \\ & \quad\quad\; \Delta_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \\ +\infty & \quad\quad\; \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

σ_{j_1} assure la diminution de la valeur de sub-optimalité.

$$\sigma_{k_1} = \min_{k \in K_f}(\sigma_k)$$

$$\sigma_k \begin{cases} -\dfrac{\lambda_k}{\delta\lambda_k} & \text{si} \quad \delta\lambda_k.\lambda_k < 0 \\ +\infty & \text{si non} \end{cases}$$

σ_{k_1} assure la régularité de l'appui $\overline{Q}_p$.

On construit le nouveau plan $\overline{Q}_p$ comme suit :

Si $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = (J_f - j_0), \overline{K}_f = K_f - k_1$

Si $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1, \overline{K}_f = K_f$

Si $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_B$ alors :

si $\exists j_2 \in J_f / t'(J_B) A_B^{-1} A(I, j_2) \neq 0$ alors $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_2,\ \bar{J}_f = (J_f - j_2) \cup j_0$

faire comme le cas $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$

Si $\sigma^0 = \sigma_j$ alors $\bar{J}_B = J_B,\ \bar{J}_f = (\bar{J}_f - j_0) \cup j_1,\ \overline{K}_f = K_f$

Si non si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\bar{J}_B = \bar{J}_B,\ \bar{J}_f = \bar{J}_f - j_0,\ \overline{K}_f = K_f - k_1$

si non $\exists j_2 \in \bar{J}_f / t'(J_B) A_B^{-1} A(I, j_2) = 0$ alors $\sigma^0 = \sigma_{j_1},\ \bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1,\ \bar{J}_f = J_f,\ \overline{K}_f = K_f$

si $\theta^0 = \theta_{k_0}$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\bar{J}_B = J_B,\ \bar{J}_f = J_f \cup j_1,\ \overline{K}_f = K_f \cup k_0$

si $\theta^0 = \theta_{k_0}$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\bar{J}_B = J_B,\ \bar{J}_f = J_f,\ \overline{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$

II.7 ALGORITHME DE RÉSOLUTION :

(1). Soit le plan d'appui $\{x, Q_p\}$ du problème (P2) et $\varepsilon > 0$ un réel donné.

(2). Calculer $\beta(x, Q_p)$:

Si $\beta(x,Q_p)=0$ alors $\{x,Q_p\}$est optimal, arrêt du processus.

Si $\beta(x,Q_p)<\varepsilon$ alors $\{x,Q_p\}$est ε-optimal, arrêt du processus.

Si $\beta(x,Q_p)>\varepsilon$ alors on passe à l'itération.

(3). Calculer :

- $\ell(J_H);\ell(J_f);\ell(J_B)$
- $\theta^0=\min(1;\theta_{k_0};\theta_{j_0})$
- $\bar{x}=x+\theta^0\ell$

Si $\beta(\bar{x},Q_p)=0$ alors $\{x,Q_p\}$est optimal, arrêt du processus.

Si $\beta(\bar{x},Q_p)<\varepsilon$ alors $\{x,Q_p\}$est ε-optimal, arrêt du processus.

Si $\beta(\bar{x},Q_p)>\varepsilon$ alors continuer le processus.

(4).

Si $\theta^0=\theta_{k_0}$

$\delta\lambda_{k_0}=1$; $\delta\lambda(K_H-k_0)=0$; $t(J_f-J_B)=0$;

$\delta\lambda'(K_f)=-\delta\lambda'(K_H)\left(\Delta(K_H,J_f);e(K_H)\right)\Delta_f^{-1}$; $t'(J_H)=\delta\lambda'(K)\left(\Delta(K,J_H)\right)$

Faire(6).

Si $\theta^0=\theta_{j_0},j_0\in J_B$

$t_{j_0}=-signe(\ell_{j_0})$; $t'(J_B-j_0)=0$; $t'(J_f)=0$; $\delta\lambda'(K_H)=0$;

$\delta\lambda'(K_f)=-\left(t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J_f).0\right)\Delta_f^{-1}$;

$t'(J_H)=t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J_H)+\delta\lambda'(K_f)\Delta(K_f,J_H)$;

Faire(4).

Si $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$

$t_{j_0} = -signe(\ell_{j_0})$; $t'(J_f - j_0) = 0$; $t'(J_B) = 0$; $\delta\lambda'(K_H) = 0$;

$\delta\lambda'(K_f) = (t'(J_B).0)\Delta_f^{-1}$; $t'(J_H) = \delta\lambda'(K_f)\Delta(K_f, J_H)$;

Faire (5).

Si $\exists j_2 \in J_f / t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) \neq 0$;

Alors $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_2$; $\bar{J}_f = (J_f - j_2) \cup j_0$.

Faire comme le cas $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$.

Si $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$;

Alors $\bar{J}_B = \bar{J}_B$, $\bar{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1$, $\bar{K}_f = K_f$

Si non

Si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\bar{J}_B = \bar{J}_B$; $\bar{J}_f = J_f - j_0$ $\bar{K}_f = K_f - k_1$

Aller à **(2)**

Si non $t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) = 0, \forall j_2 \in \bar{J}_f$

Alors $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$; $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1$, $\bar{J}_f = J_f$, $\bar{K}_f = K_f$;

Aller à **(2)**

(5). Calculer σ^0 :

Si

$\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\bar{J}_B = \bar{J}_B, \bar{J}_f = J_f \cup j_0, \bar{K}_f = K_f \cup k_0$

$\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$

Aller à **(2)**.

(6). Calculer σ^0

$\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f \cup j_0, \bar{K}_f = K_f \cup k_0$

$\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$

Aller à **(2)**.

II.8 EXEMPLES D'APPLICATION :

Soit le problème min-max suivant :

$$
(P2)\quad \left\{
\begin{array}{l}
f(x) = \min\limits_k \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + 6x_6 - 2 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 - 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 2x_5 + x_6 - 3 \end{pmatrix} \to \max\limits_x \\
\frac{3}{2}x_1 + 3x_2 + \frac{7}{2}x_3 - \frac{37}{10}x_4 - \frac{21}{10}x_5 + \frac{43}{20}x_6 = 2 \\
\frac{9}{4}x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 - x_6 = 2 \\
2x_1 + 3x_2 + \frac{35}{4}x_3 + 5x_4 + \frac{79}{100}x_5 - \frac{7}{4}x_6 = 3 \\
9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 4 \\
\\
-2 \le x_1 \le 2 \\
-2 \le x_2 \le 2 \\
-4 \le x_3 \le 4 \\
-4 \le x_4 \le 4 \\
-6 \le x_5 \le 6 \\
-7 \le x_6 \le 7
\end{array}
\right.
$$

Avec :

$x' = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$, $d_1 = (-2;-2;-4;-4;-6;-7)$, $d_2 = (2;2;4;4;6;7)$, $\alpha = (-2;-2;-3)$, $b = (2;2;3;4)$

$$C_k = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ -6 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad k = \overline{1,3} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 & \frac{7}{2} & -\frac{37}{10} & -\frac{21}{10} & \frac{43}{20} \\ \frac{9}{4} & -1 & -3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & \frac{35}{4} & 5 & \frac{70}{100} & -\frac{7}{4} \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1 ère itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	$\bar{x}$	t
1	-2957/5000	0	-2439/1013	-1445/247	-780/917	0
2	759/500	0	2769/625	1871/172	2	-1
3	0	3463/407	1	-4	-443/2500	3701/1227
4	-1355/4897	0	-1120/123	1564/333	-5573/812	0
5	337/263	0	6579/5000	1793/500	867/602	0
6	0	-2117/306	1	7	961/3099	-106/625

$\beta(x,Q_p) = 6836/73 = 93.6438$**,** $\beta(\bar{x},Q_p) = 11027/132 = 83.5379$donc on passe au changement de support

2 ème itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	$\bar{x}$	t
1	-780/917	0	1181/265	-1289/5000	-694/773	0
2	2	-1763/625	1	0	2	-958/335
3	-443/2500	0	5873/578	-1881/500	-773/3141	0
4	-5573/812	0	6831/5000	1489/500	320/671	0
5	1731/1202	0	2139/371	722/913	2617/1651	0
6	961/3099	-4623/625	1	1639/245	3850/2507	1183/370

$\beta(x,Q_p) = 9105/184 = 49.4837$ $\beta(\bar{x},Q_p) = 6184/153 = 40.4183$

donc on passe au changement de support

3 ème itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	$\bar{x}$	t
1	-694/773	0	4625/884	-1053/5000	-75/702	0
2	2	-1369/241	1	0	2	-6095/1659
3	-773/3141	0	6462/529	-964/3137	-497/1000	0
4	320/671	0	2087/1441	1997/821	1165/473	0
5	2671/1651	0	1073/157	1213/1878	169/80	0
6	3850/2507	-2801/667	1	2213/405	2219/370	850/517

$\beta(x, Q_p) = 2157/94 = 22.9468 \quad \beta(\bar{x}, Q_p) = 3019/717 = 4.2106$

On passe au changement de support

4 ème itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	$\bar{x}$	t
1	-751/702	0	6473/269	-2640/683	-613/553	/
2	2	-5833/625	1	0	2	/
3	-497/1000	0	3044/49	-4167/739	-2767/5000	/
4	1165/473	0	334/97	1550/3473	2569/883	/
5	169/80	0	5477/167	237/2000	2231/1000	/
6	2219/370	-1597/625	1	1157/1154	7	/

$\beta(x, Q_p) = 2001/781 = 2.5621 \; \beta(\bar{x}, Q_p) = 0$

Donc $\{\bar{x}, Q_f\}$ est optimal.

CHAPITRE III :

LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX EN PROGRAMMATION LINÉAIRE AVEC LA MÉTHODE DUALE ADAPTÉE

INTRODUCTION :

Ce chapitre est consacré à présenter la méthode duale adaptée pour la résolution d'un problème Min-Max en programmation linéaire.

III.1 FORMULATION DU PROBLÈME DUAL :

Le problème (P2) est équivalent au problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} (0'(J),1)\gamma \rightarrow \max \\ \left(-C(K,J), e(K)\gamma\right) \leq a(K) \\ \left(A(I,J), 0(I)\right)\gamma = b(I) \\ d_1(J) \leq (I_n, 0(J))\gamma \leq d_2(J) \end{cases} \quad \text{où } \gamma = \begin{pmatrix} \chi(J) \\ \xi \end{pmatrix} \qquad \text{(LP2)}$$

On obtient le problème dual suivant :

$$\begin{cases} \Phi(X) = \lambda'a + y'b - u'd_1 + v'd_2 \rightarrow \min \\ -\lambda'(K)C(K,J) + y'(I)A(I,J) - u'(J) + v'(J) = 0'(J) \\ \lambda'(K)e(K) = 1 \\ X(\lambda, y, u, v)'v \in \Re_+^n \text{ et } \lambda \in \Re_+^p,\ y \in \Re^m,\ u \in \Re_+^n,\ v \in \Re_+^n \end{cases} \qquad \text{(D2)}$$

III.2 DÉFINITIONS ESSENTIELLES :

1. Plan dual :

Tout vecteur $X = (\lambda, y, u, v)'$ vérifiant les contraintes du problème (D2) est dit « plan dual ».

2. **Plan dual basique :**

Tout plan dual X tel que $y'(I) = \lambda'(K)C(K, J_B)A_B^{-1}$ avec $\lambda(K_f) = \gamma(K_f), \lambda(K_H) = 0$ est dit « plan dual basique ».

Remarque 1 :

Les plans basiques sont associés à des appuis réguliers, ce qui justifie le choix fait au chapitre 2, et qui consiste à considérer uniquement les appuis réguliers.

3. **Plan dual accordé :**

Tout plan dual basique vérifiant :

$$\begin{cases} u_j = \Delta_j \quad , v_j = 0 & \text{si} \quad \Delta_j \geq 0 \\ u_j = 0 \quad v_j = -\Delta_j & \text{si} \quad \Delta_j < 0 \end{cases}$$

est dit « plan dual accordé »

4. **Pseudo plan :**

Au plan dual accordé X , on associe le pseudo-plan $\chi = \chi(J)$ tel que :

$$\chi_j = \begin{cases} d_{1j} & \text{si} \quad j \in J_H^+, J_H^+ = \{j \in J_H / \Delta_j \geq 0\} \\ d_{2j} & \text{si} \quad j \in J_H^-, J_H^- = \{j \in J_H / \Delta_j < 0\} \end{cases}$$

$\chi(J_B) = A_B^{-1}(b - A(I, J_H)\chi(J_H) - A(I, J_f)\chi(J_f))$ où $\chi(J_f)$ est donné par :

$$\chi(J_f) = D(J_f, K_f)(a(K_f) + C(K_f, J_B)A_B^{-1}b - \Delta(K_f, J_H)\chi(J_H))$$

Remarque 2 :

Pour le pseudo-plan ainsi défini on pose $f(\chi) = \Phi(X)$

III.3 PROPRIÈTÉES :

Lemme 1 :

Pour tout plan dual X et tout plan admissible primal x , on a $f(x) \leq \Phi(X)$.

Preuve :

On a : $\Phi(X) = \lambda' a + y' b - u' d_1 + v' d_2$, étant donné que tout plan admissible primal x vérifie :

$d_{1j} \le x_j \le d_{2j}, \forall j \in J$ on a $-u' d_1 \ge -u' x$, $v' d_2 \ge v' x$ et $Ax = b$, de là on obtient :

$$\Phi(X) \ge \lambda' a + (y' A - u' + v')x$$

D'autre part, pour tout plan dual, les contraintes du problème (D2) nous donnent :

$y' A - u' + v' = \lambda'(K) C(K, J)$ et $\lambda'(K) e(K) = 1$.

D'où le résultat suivant : $\Phi(X) \ge \lambda'(K)\big(a(K) + C(K, J) x(J)\big) \ge \lambda'(K) e(K) f(x) = f(x)$

Lemme 2 :

Pour tout appui Q_p du problème (P2) on a : $\Phi(\overline{X}) \le \Phi(X)$

Où : $\overline{X}$ est le plan dual accordé et X est un plan dual basique quelconque associé à l'appui Q_p du problème (P2).

Preuve :

Soit Q_p un appui du problème (P2), $\overline{X}$ le plan dual accordé et X un plan dual basique quelconque associé à l'appui Q_p.

On a alors : $\Phi(\overline{X}) - \Phi(X) = -\delta u' d_1 + \delta v' d_2$ et par définition du plan dual accordé on obtient :

$$\Phi(\overline{X}) - \Phi(X) = \sum_{\Delta_j < 0} u_j d_{1j} + \sum_{\Delta_j \ge 0} (-\Delta_j + u_j) d_{1j} + \sum_{\Delta_j < 0} (-\Delta_j - v_j) d_{2j} + \sum_{\Delta_j \ge 0} -v_j d_{2j}$$

Les contraintes du problème (D2) donne $u_j - v_j = \Delta_j, \forall j \in J$

D'où :

$$\Phi(\overline{X}) - \Phi(X) = \sum_{\Delta_j < 0} u_j d_{1j} + \sum_{\Delta_j \ge 0} (-u_j + v_j + u_j) d_{1j} + \sum_{\Delta_j < 0} (-u_j + v_j - v_j) d_{2j} + \sum_{\Delta_j \ge 0} -v_j d_{2j}$$

$$\Phi(\overline{X}) - \Phi(X) = \sum_{\Delta_j \ge 0} (d_{1j} - d_{2j}) u_j + \sum_{\Delta_j < 0} (d_{1j} - d_{2j}) v_j$$

D'où : $\Phi(\overline{X})-\Phi(X)\leq 0$

Conséquence :
Le lemme 2 montre l'intérêt de ne considérer par la suite, que des plans duaux accordés.

Lemme 3 :

Pour le plan dual accordé et le pseudo-plan associés à tout appui Q_p du problème (P2), on a $f(\chi)=\Phi(\mathrm{X})$ si et seulement si $\chi(J)$ vérifie le système d'équations linéaires suivant :

$$C(K_f,J)\chi(J)+a(K_f)=e(K_f)f(\chi) \tag{30}$$

Preuve :

On suppose que $\chi(J)$ vérifie le système (30) par définition de $\chi(J_H)$ et du plan dual accordé X on a :

$$\Phi(X)=\gamma'(K_f)\big(C(K_f,J)\chi(J)\big)+a(K_f) \tag{31}$$

D'où : comme $\gamma'(K_f)e(K_f)=1$, on aura $f(\chi)=\Phi(\mathrm{X})$; et comme par définition du plan dual accordé et du pseudo-plan χ, on a :

$$\Delta_f\begin{pmatrix}\chi(J_f)\\ f(\chi)\end{pmatrix}=C(K_f,J_B)A_B^{-1}b-\Delta(K_f,J_H)\chi(J_H)+a(K_f)\Rightarrow C(K_f,J)\chi(J)+a(K_f)=e(K_f)f(\chi)$$

III.4 CRITÉRES D'OPTIMALITÉ :

III.4.1 Théorème :

Les conditions :

$$\begin{cases} d_{1j}\leq\chi_j\leq d_{2j},\forall j\in J_B\cup J_f \\ C'_k\chi+a_k\geq f(\chi),\forall k\in K_H\end{cases} \tag{32}$$

Sont suffisantes pour l'optimalité du plan dual accordé associé à l'appui Q_p du problème (P2).

Démonstration :

Supposons que pour le pseudo-plan $\chi(J)$ associé à l'appui Q_p du problème (P2), les relations (32) sont vérifiées, alors $\chi(J)$ est un plan admissible du problème (P2) et en vertu du lemme (3.3.1) on a $f(\chi) \leq \Phi(\overline{X})$ quel que soit le plan dual $\overline{X}$, et par construction on a : $f(\chi) = \Phi(X)$ où X est le plan dual accordé associé à Q_p.

Par conséquent, le plan dual accordé X est un plan optimal pour le problème (D2).

III.4.2 Théorème :

$\{\chi, Q_p\}$ est un plan d'appui optimal du problème (P2) si et seulement si les relations (32) sont vérifiées.

Démonstration :

<u>Condition suffisante :</u>

Soit χ le pseudo-plan associé à l'appui Q_p du problème (P2), il est claire que si les relations (32) sont vérifiées, $\{\chi, Q_p\}$ devient plan d'appui. Et par le lemme 1 on a $f(x) \leq \Phi(\overline{X})$ pour tout plan admissible x et tout plan dual $\overline{X}$, et en particulier pour le plan accordé X associé à Q_p.

D'autre part : Par construction de χ, on a $f(\chi) = \Phi(X)$, d'où on obtient : $f(x) \leq f(\chi)$ pour tout plan admissible x.

<u>Condition nécessaire :</u>

Il est clair que si les relations (32) ne sont pas vérifiées pour le pseudo-plan $\chi(J)$ associé à l'appui Q_p du problème $\{\chi, Q_p\}$ ne constitue pas un plan d'appui. Et par conséquent, n'est pas un plan d'appui optimal.

III.5 CONDITIONS SUFFISANTES D'INEXISTENCE DE PLAN ADMISSIBLE POUR LE PROBLÈME (P2)

III.5.1 Théorème :

Si pour le pseudo-plan et le plan dual accordé associé à un appui Q_p du problème (P2), le critère d'optimalité n'est pas vérifié, et si on a de plus les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall k \in K_f, \delta\lambda_k \geq 0 \\ \forall j \in J_H, \text{si } \Delta_j \neq 0 \text{ alors } \Delta_j t_j \geq 0 \\ \qquad\qquad \text{si } \Delta_j = 0 \text{ alors } t_j \geq 0 \end{cases} \tag{33}$$

Alors le problème (P2) n'admet pas de plan admissible.

Démonstration :

Soit Q_p un appui du problème (P2), $\chi(J)$ le pseudo-plan et $X = (\lambda, y, u, v)'$ le plan dual accordé associé.

En admettant que le critère d'optimalité n'est pas vérifié pour $\chi(J)$ et X, si de plus les relations (33) sont vérifiées alors pour tout $\sigma \geq 0$, on construit un plan dual :

$X = (\overline{\lambda}, \overline{y}, \overline{u}, \overline{v})'$ tel que $\overline{\lambda} = \lambda + \sigma\delta\lambda$ et $\overline{u} - \overline{v} = \Delta + \sigma t(J)$.

Par définition de la direction $(t'(J), \delta\lambda'(K))$ on a les deux cas suivants :

__**Cas 1 :**__

$\theta^0 = \theta_{k_0}$ alors :

$$\Delta\Phi(X) = \sigma\left(C'_{k_0}\chi + a_{k_0} - f(\chi)\right)$$

__**Cas 2 :**__

$\theta^0 = \theta_{j_0}$ alors :

$$\Delta\Phi(X) = \begin{cases} \sigma(\chi_{j_0} - d_{1j_0}) & \text{si} \quad \chi_{j_0} < d_{1j_0} \\ \sigma(d_{2j_0} - \chi_{j_0}) & \text{si} \quad d_{2j_0} < \chi_{j_0} \end{cases}$$

On remarque que dans chacun des deux cas (1) et (2), l'accroissement dual $\Delta\Phi(X)$ décroit indéfiniment lorsque σ tend vers $+\infty$. Par conséquent, le problème dual (D2) n'admet pas d'optimum fini, et en vertu du théorème fondamental de la dualité, le problème (P2) n'admet pas de plan admissible.

III.6 ITÉRATION DE LA MÉTHODE :

III.6.1 Calcul de l'indice de non optimalité :

Pour le pseudo plan $\chi(J)$, on définit l'indice de non optimalité $\theta^0 = \max(\theta_{j_0}, \theta_{k_0})$ par :

$$\theta_{j_0} = \max_{j \in J_B \cup J_f}(\theta_j)$$

$$\text{où} \quad \theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j} - \chi_j}{\mu_j} & \text{si} \quad \mu_j = 1 \\ \dfrac{d_{2j} - \chi_j}{\mu_j} & \text{si} \quad \mu_j = -1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad \text{avec } \mu_j = \begin{cases} \mu_j = 1 & \text{si} \quad d_{1j} > \chi_j \\ \mu_j = -1 & \text{si} \quad d_{2j} < \chi_j \\ +\infty & \text{si non} \end{cases}$$

$$\theta_{k_0} = \max_{k \in K_H}(\theta_k)$$

$$\text{où} \quad \theta_k = \begin{cases} f(\chi) - \left(C'_k \chi(J) + a_k\right) & \text{si} \quad f(\chi) > C'_k \chi(J) + a_k \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Remarque 1 :

Si pour un pseudo-plan, l'indice de non optimalité est nul, alors il est optimal.

On suppose que pour le pseudo-plan $\chi(J)$ correspondant au plan dual accordé X et à l'appui Q_p du problème, le critère d'optimalité n'est pas vérifié. Construisons alors l'itération :

$(\lambda, \Delta, Q_p) \to (\bar{\lambda}, \bar{\Delta}, \bar{Q}_p)$ où $\bar{\lambda} = \lambda + \sigma^0 \delta\lambda$, $\bar{\Delta} = \Delta + \sigma^0 t$ et $\bar{y} = y + \sigma^0 \delta y$ avec $\left(t'(J), \delta\lambda'(K)\right)$ une direction admissible au point X et σ^0 le pas maximal le long de cette direction.

III.6.2 Calcul de l'accroissement dual :

On a $\Phi(\overline{X})+\Phi(X)=\sigma^0\delta\lambda' a+\sigma^0\delta y' b-\delta u' d_1+\delta v' d_2$, $\delta\Delta=\sigma^0\delta y' A-\sigma^0\delta\lambda' C$ et comme $A\chi=b$, l'accroissement dual devient :

$\Phi(\overline{X})+\Phi(X)=\sigma^0\delta\lambda' a+\delta\Delta'\chi+\sigma^0\delta\lambda' C\chi-\delta u' d_1+\delta v' d_2$, de plus on a $\delta\lambda'(K)e(K)=0$ ce qui nous permet d'écrire : $\Phi(\overline{X})+\Phi(X)=\sigma\gamma+\beta$ où :

$$\begin{cases}\beta=(\delta\Delta)'\chi.(\delta u)' d_1+(\delta v)' d_2\\ \gamma=\delta\lambda'(K_H).\left[a(K_H)+C(K_H,J)\chi-e(K_H)f(\chi)\right]\end{cases}$$

Notation :

On pose $\beta_{(J_H)}=\sum_{j\in J_H}\left(\delta\Delta_j\chi_j-\delta u_j d_{1j}+\delta v_j d_{2j}\right)$ tout en tenant compte du signe de Δ_j et $\overline{\Delta}_j$.

On obtient :

$\beta(J_H)=\beta(J_{H^{+-}})+\beta(J_{H^{-+}})+\beta(J_{H^{0-}})$ où :

$\beta(J_{H^{+-}})=\sum_{j\in J_{H^{+-}}}\overline{\Delta}_j(d_{1j}-d_{2j})>0$ avec $J_{H^{+-}}=\left\{j\in J_H/\Delta_j>0,\overline{\Delta}_j<0\right\}$,

$\beta(J_{H^{-+}})=\sum_{j\in J_{H^{-+}}}\overline{\Delta}_j(d_{2j}-d_{1j})>0$ avec $J_{H^{-+}}=\left\{j\in J_H/\Delta_j<0,\overline{\Delta}_j>0\right\}$,

$\beta(J_{H^{0-}})=\sum_{j\in J_{H^{0-}}}\overline{\Delta}_j(d_{1j}-d_{2j})>0$ avec $J_{H^{0-}}=\left\{j\in J_H/\Delta_j=0,\overline{\Delta}_j<0\right\}$.

Donc, pour avoir $\beta(J_H)=0$; on prend $\sigma_{j_1}=\min_{j\in J_H}(\sigma_j)$ où :

$$\sigma_j=\begin{cases}\dfrac{-\Delta_j}{t_j} & \text{si} \quad \Delta_j t_j<0 \text{ ou } (\Delta_j=0 \text{ et } t_j<0)\\ +\infty & \text{si non}\end{cases}$$

D'autre part, pour avoir un nouvel appui régulier, on prend σ tel que $\overline{\lambda}_k\geq 0,\forall k\in K_f$; c'est-à-dire $\sigma=\sigma_{k_1}$ où $\sigma_{k_1}=\min_{k\in K_f}(\sigma_k)$ avec :

$$\sigma_k = \begin{cases} \dfrac{-\lambda_k}{\delta\lambda_k} & \text{si} \quad \delta\lambda_k < 0 \\ +\infty & \text{si non} \end{cases}$$

D’où , le pas maximal est donné par $\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}, \sigma_{k_1})$.

III.7 ALGORITHME DE RÉSOLUTION :

Début

(0).

Soit Q_p un appui du problème (P_2), construisons le pseudo-plan $\chi(J)$ correspondant où :

$$\chi_j = \begin{cases} d_{1j} & \text{si} \quad j \in J_H^+, J_H^+ = \{j \in J_H / \Delta_j \geq 0\} \\ d_{2j} & \text{si} \quad j \in J_H^-, J_H^- = \{j \in J_H / \Delta_j < 0\} \end{cases}$$

$$\chi(J_f) = D(J_f, K_f)\left(a(K_f) + C(K_f, J_B)A_B^{-1}b - \Delta(K_f, J_H)\chi(J_H)\right)$$

$$\chi(J_B) = A_B^{-1}\left(b - A(I, J_H)\chi(J_H) - A(I, J_f)\chi(J_f)\right)$$

$f(\chi) = C_k' x + a_k, \forall k \in K_f$ et aller en **(1)**

(1).

Calculons $\theta^0 = \max(\theta_{j_0}, \theta_{k_0})$ où $\theta_{j_0} = \max\limits_{j \in J_B \cup J_f} (\theta_j)$, $\theta_{k_0} = \max\limits_{k \in K_H}(\theta_k)$ avec :

$$\text{où} \quad \theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j} - \chi_j}{\mu_j} & \text{si} \quad \mu_j = 1 \\ \dfrac{d_{2j} - \chi_j}{\mu_j} & \text{si} \quad \mu_j = -1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad \text{avec} \ \mu_j = \begin{cases} \mu_j = 1 & \text{si} \quad d_{1j} > \chi_j \\ \mu_j = -1 & \text{si} \quad d_{2j} < \chi_j \\ +\infty & \text{si non} \end{cases}$$

$$\text{où} \quad \theta_k = \begin{cases} f(\chi) - \left(C'_k \chi(J) + a_k\right) & \text{Si} \quad f(\chi) > C'_k \chi(J) + a_k \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Alors Si $\theta = 0$ aller en **(7)**

Si non

Si $\theta^0 = \theta_{k_0}$ **alors faire**

$\delta\lambda_{k_0} = 1, \delta\lambda\left(K_H \setminus \{\mathrm{k}_0\}\right) = 0$

$t(J_B) = 0, t(J_f) = 0$

$\delta\lambda'(K_f) = -\delta\lambda'(K_H)\left(\Delta(K_H, J_f), e(K_H)\right)\Delta_f^{-1}$

$t'(J_H) = \delta\lambda'(K)\Delta(K, J_H)$ et aller en **(3)**

Fin faire

Si non $\theta^0 = \theta_{j_0}$ et aller en **(2)**

Fin si

Fin si

(2).

Si $j_0 \in J_f$ **alors faire**

$t_{j_0} = \mu_{j_0}, t\left(J_f \setminus \{\mathrm{j}_0\}\right) = 0, t(J_B) = 0, \delta\lambda'(K_H) = 0, \delta\lambda'(K_f) = \left(t'(J_f), 0\right)\Delta_f^{-1},$

$t'(J_H) = \delta\lambda'(K_f)\Delta(K_f, J_H)$ et aller en **(4)**

Fin faire

Si non $j_0 \in J_B$ **alors faire**

$t_{j_0} = \mu_{j_0}, t\left(J_B \setminus \{\mathrm{j}_0\}\right) = 0, t(J_f) = 0, \delta\lambda'(K_H) = 0, \delta\lambda'(K_f) = -\left(t'(J_B), A_B^{-1}A(I, J_f), 0\right)\Delta_f^{-1},$

$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_H) + \delta\lambda'(K_f)\Delta(K_f, J_H)$ et aller en **(5)**

Fin faire

Fin si

(3).

Calculer $\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}, \sigma_{k_1})$ où $\sigma_{k_1} = \min\limits_{k \in K_f}(\sigma_k)$ et $\sigma_{j_1} = \min\limits_{j \in J_H}(\sigma_j)$ avec :

$$\sigma_k = \begin{cases} \dfrac{-\lambda_k}{\delta\lambda_k} & \text{si} \quad \delta\lambda_k < 0 \\ +\infty & \text{si non} \end{cases}$$

$$\sigma_j = \begin{cases} \dfrac{-\Delta_j}{t_j} & \text{si} \quad (\Delta_j t_j < 0) \text{ ou } (\Delta_j = 0 \text{ et } t_j < 0) \\ +\infty & \text{si non} \end{cases}$$

Alors Si $\sigma^0 = +\infty$ aller en **(6)**

Si non

Si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ **alors faire**

$\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = \left(K_f \setminus \{\mathrm{k}_1\} \cup \{\mathrm{k}_0\}\right)$ et aller en **(0)**

Fin faire

Si non $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ **alors faire**

$\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f \cup \{j_1\}, \bar{K}_f = K_f \cup \{\mathrm{k}_0\}$ et aller en **(0)**

Fin faire

Fin si

Fin si

(4).

Calculer $\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}, \sigma_{k_1})$

Alors si $\sigma^0 = +\infty$ aller en **(6)**

Si non

Si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ **alors faire**

$\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f \setminus \{j_0\}, \bar{K}_f = (K_f \setminus \{k_1\})$ et aller en **(0)**

Fin faire

Si non $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ **alors faire**

$\bar{J}_B = J_B, \bar{K}_f = K_f, \bar{J}_f = (J_f \setminus \{j_0\}) \cup \{j_1\}$ et aller en **(0)**

Fin faire

Fin si

Fin si

(5).

Si $\exists j_0 \in J_f / t'(J_B) A_B^{-1} A(I, j_2) \neq 0$ **alors faire**

$J_B = (J_B \setminus \{j_0\}) \cup \{j_2\}, J_f = (J_f \setminus \{j_2\}) \cup \{j_0\}, K_f = K_f$ et aller en **(4)**

Fin faire

Si non calculer $\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}, \sigma_{k_1})$

Alors si $\sigma^0 = +\infty$ aller en **(6)**

Si non $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ **alors faire**

$\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_0\}) \cup \{j_1\}, \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = K_f$ et aller en **(0)**

Fin faire

Fin si

Fin si

(6).

Le problème (P2) n'admet pas de plan admissible.

(7).

$\{\chi(J), Q_p\}$ est un plan d'appui optimal du problème (P2)

Fin.

CHAPITRE IV:
LOGICIEL MATLAB ET APPLICATION INFORMATIQUE

INTRODUCTION :

La programmation est un ensemble d'outils et de techniques permettant de résoudre des problèmes mathématiques par ordinateur, elle sert à trouver une solution optimale de n'importe quel type de problème par exemple. Le processus de résolution de problèmes mathématiques exige un grand nombre de calculs donc il est mieux de l'exécuter par machine. Pour cela nous avons cité dans les paragraphes qui suivent le logiciel Matlab qui est spécifié pour résoudre des problèmes d'optimisation (linéaire, non linéaire, convexe, non convexe…etc.).

IV.3.1 Présentation du logiciel :

MATLAB dont le nom provient de « Matrix Laboratory » est un solveur de calcul scientifique basé sur le type de variable matricielle.

Il a été conçu pour fournir un environnement de calcul numérique de haut niveau grâce à sa structure de données interne et ses grandes capacités graphiques pour la visualisation d'objets mathématiques complexes.

Son fonctionnement repose sur un langage de programmation interprété qui permet un développement très rapide. Pour des applications nécessitant un temps de calcul plus élevé, un langage compilé comme le C++ ou le Fortran est mieux adapté.

IV.3.2 Description de la fenêtre MATLAB :

1. La barre de titre :

La fenêtre MATLAB est surmontée par une barre de de titre, contenant à sa gauche une icône et à sa droite les trois boutons :

- Mise en icône
- minimisation /maximisation

➢ fermeture.

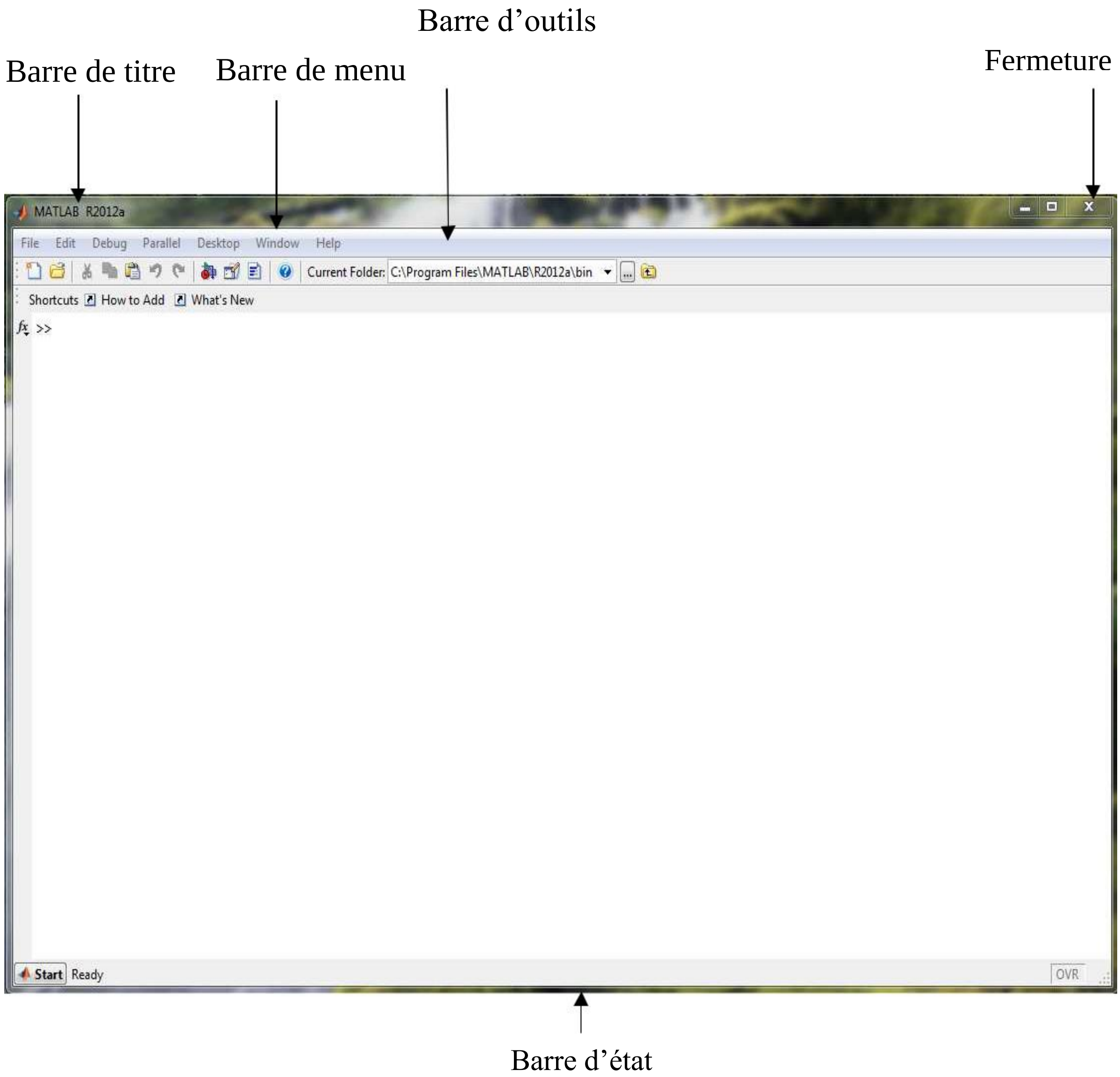

FIG V.1 : La fenêtre principale de logiciel MATLAB

2. La barre du menu :

La barre du menu contient en général 5 fenêtres:

- **File** (Fichier) permet d'obtenir l'éditeur de programme ;
- **Edit** (Edition) permet de couper/coller dans la ligne de commande et autres ;

- **Debug** permet l'exécution d'un programme et autres ;
- **Window** (Fenêtre) permet le passage aux différents fenêtres du logiciel ;
- **Help** (Aide) accède au menu d'aide.

3. La barre d'outils:

La barre d'outils est souvent des raccourcis de fonctions contenues dans les menus :

- Ouvrir un nouveau fichier dans l'éditeur ;
- Rappeler un ancien fichier dans l'éditeur ;
- Couper ;
- Copier ;
- Coller ;
- Annuler ;
- Appeler l'aide.

4. La fenêtre de commande :

Elle se divise en deux zones :

- La zone historique : qui ne peut être modifiée, mais dont on peut copier des parties ;
- La zone de commande éditable : permet de taper une commande qui sera acceptée à l'aide de touche « **return** » ou « **entrée** ».

IV.3.3 Méthode de travail :

1) Edition et sauvegarde des fichiers MATLAB :

Dans un premier temps, on peut se contenter d'introduire ses commandes une à une au niveau de l'espace de travail ou elles sont interprétées directement.

Cependant, par la suite, il est beaucoup plus pratique d'écrire sa séquence de commandes complétée au moyen d'un éditeur, puis de sauvegarder le tout dans un fichier avec l'extension « **.m** ». Cette séquence pourra alors être exécutée dans MATLAB par simple introduction du nom de fichier.

2) Aide en ligne :

En plus de l'aide Window une aide en ligne est disponible pour chaque commande de MATLAB. Il suffit d'introduire « **help nom de la commande** ».

3) Création de fichiers de commandes et de fonctions utilisateurs :

- Fichier de commande « Script files » :

Un fichier de commande (script file) est un fichier ASCII d'extension « .m » contenant une suite de commandes MATLAB. Il peut être exécuté directement en tapant simplement son nom dans l'espace de travail MATLAB.

- Fonctions :

De nouvelles fonctions peuvent être ajoutées à MATLAB par l'utilisateur. Il suffit de créer un fichier de nom « **nom_de_function.m** » contenant les commandes à exécuter et dont l'entête a le format :

function [liste des arguments de sortie]= nom de fonction (liste des arguments d'entrée).

Contrairement aux fichiers de commande, les variables intervenants dans les fonctions sont locales.

Les commentaires documentant les fonctions peuvent être insérés en les faisant précéder du symbole %.

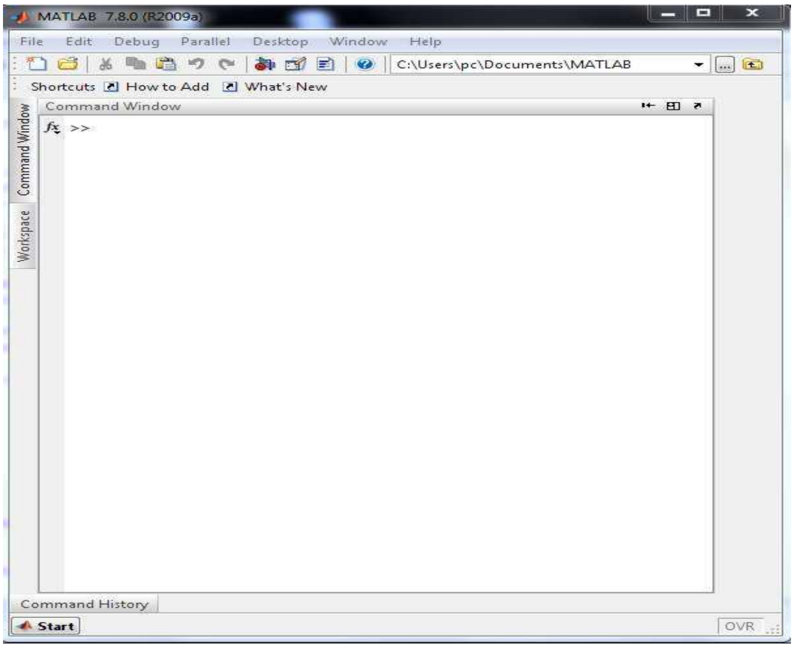

FIG IV.2 Fenêtre d'édition de fichiers

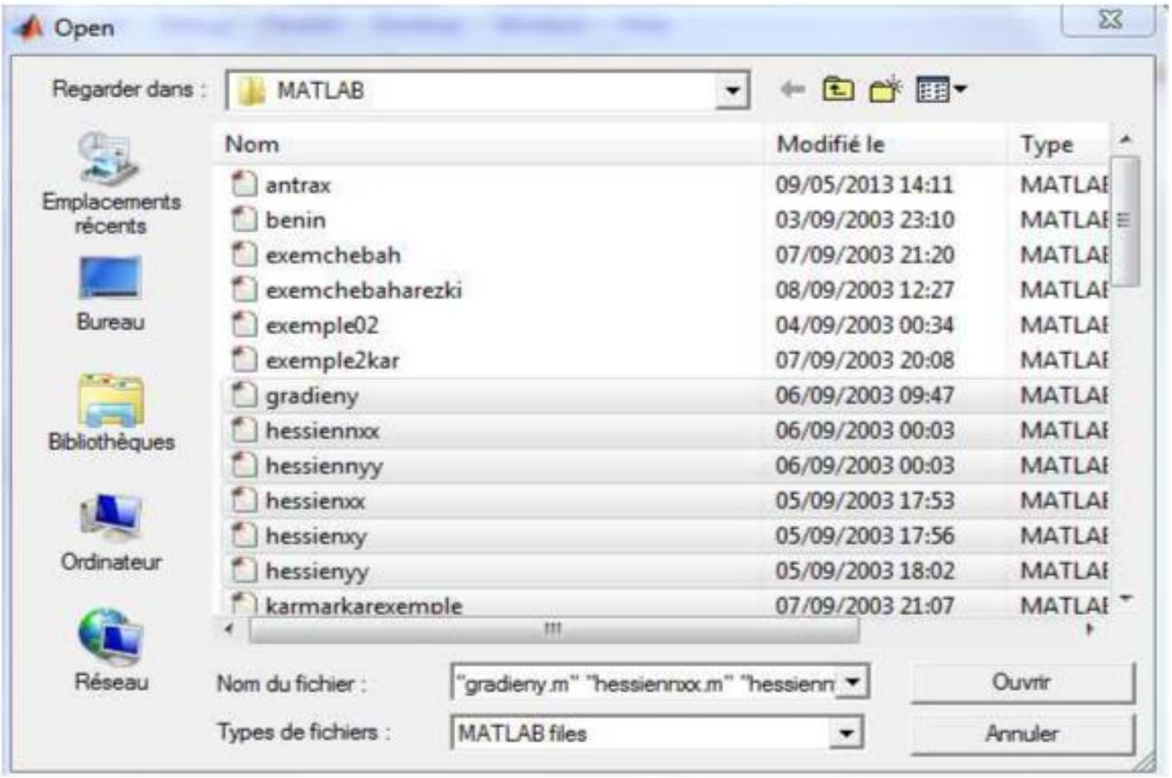

FIG IV.3 : La boîte de dialogue d'ouverture de fichiers

Pour les deux exemples numériques précédents résolus dans le premier et deuxième chapitre, en utilisant MATLAB nous avons trouvé les solutions optimales de la manière suivante :

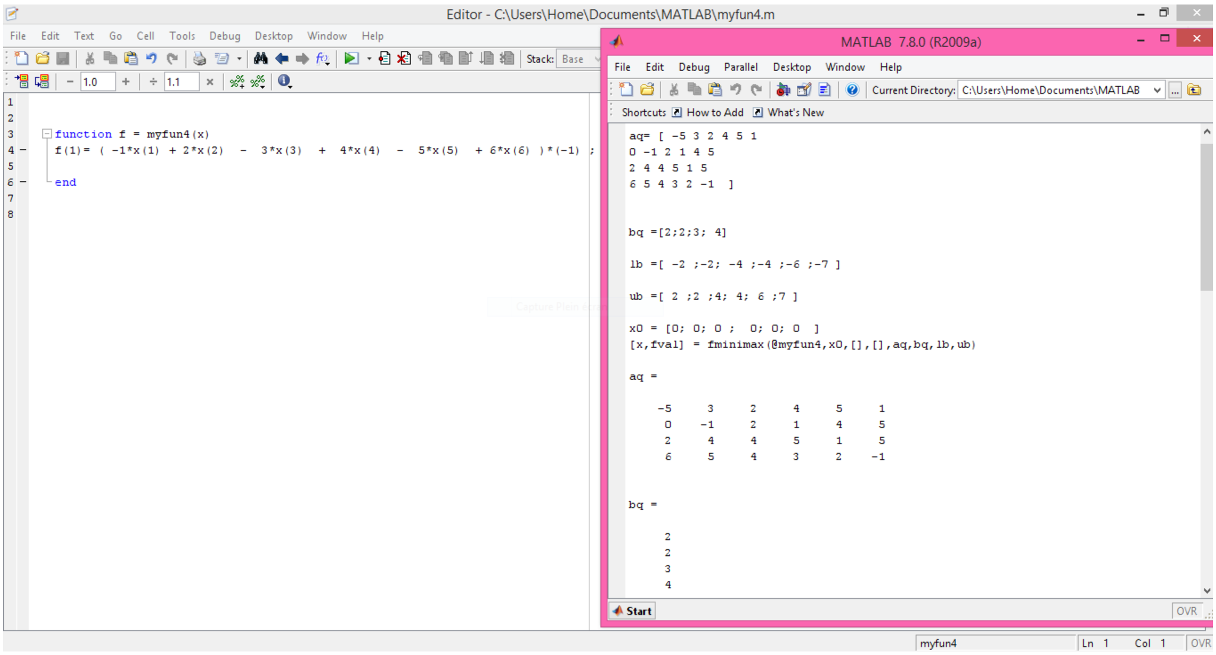

FIG IV.4 : Résolution du problème 1 sous MATLAB

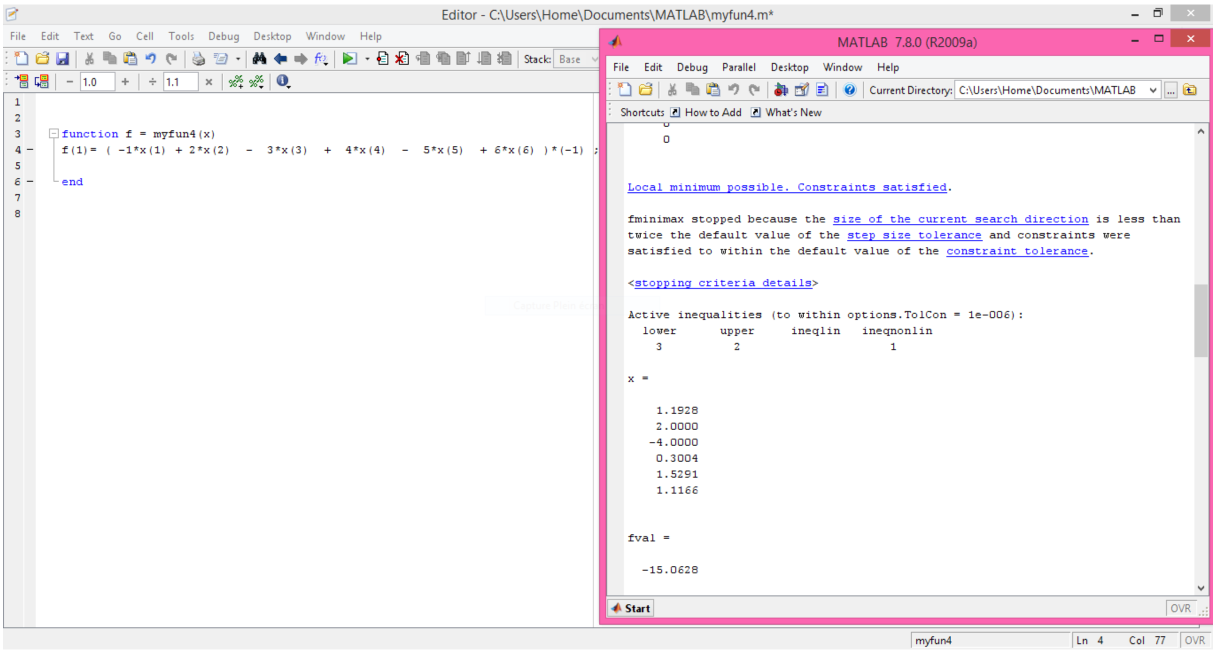

FIG IV.5 : Résolution du problème 1 sous MATLAB

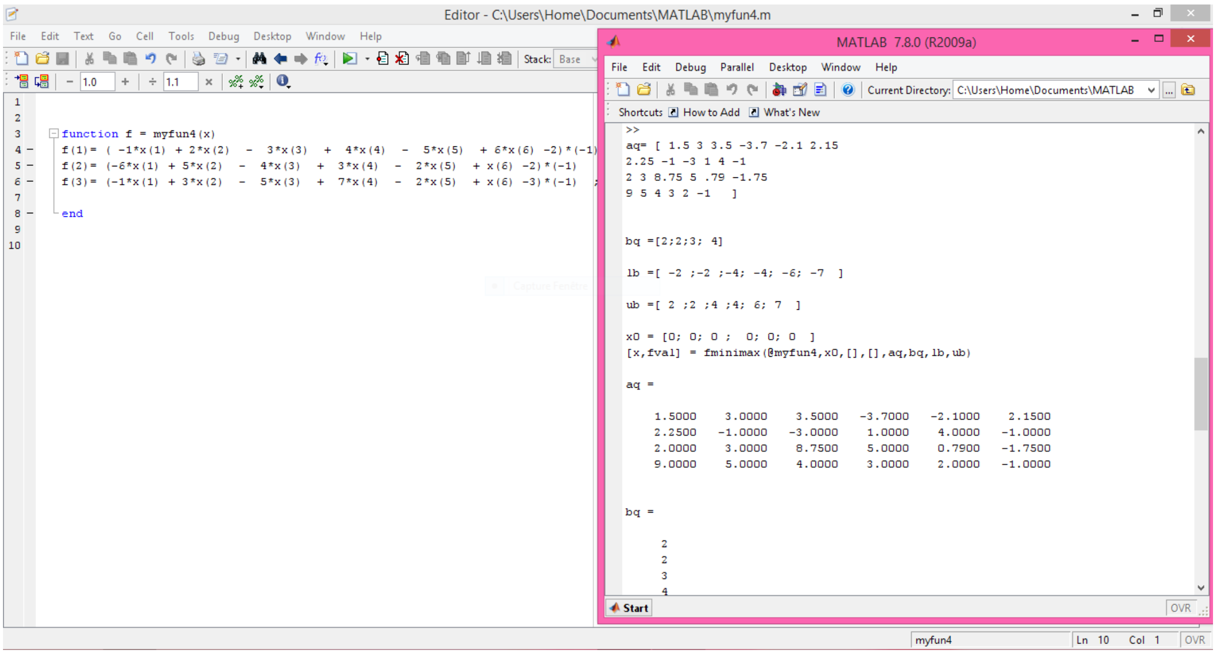

FIG IV.6 : Résolution du problème 2 sous MATLAB

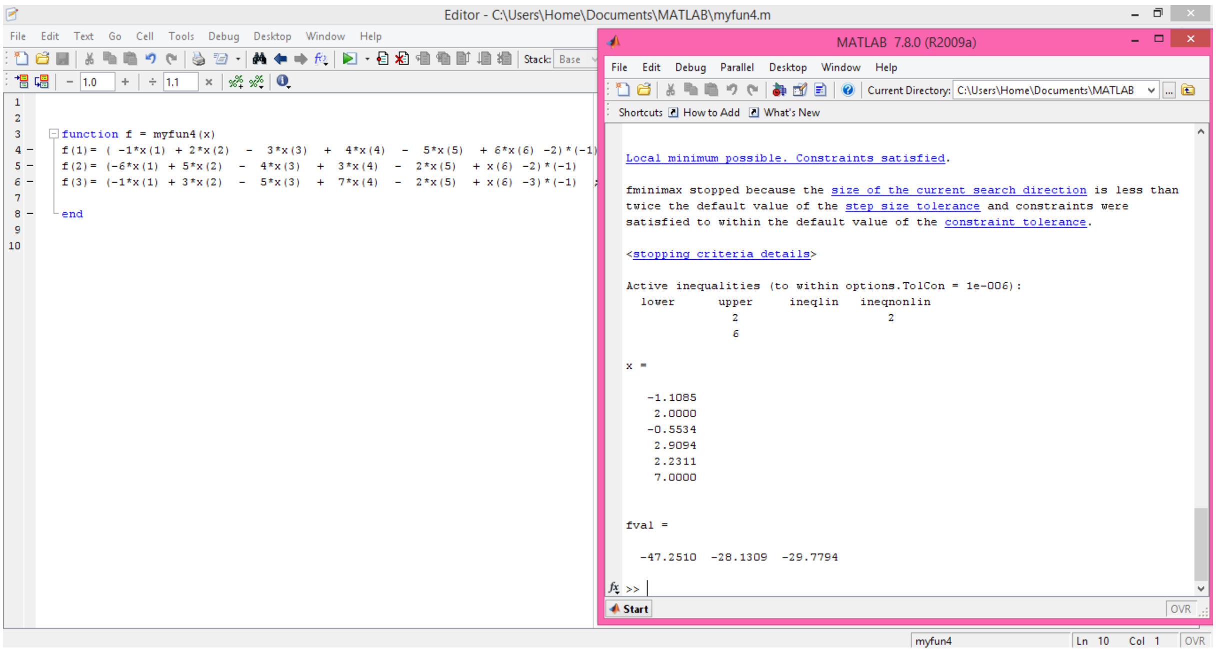

FIG IV.7 : Résolution du problème 2 sous MATLAB

Conclusion générale :

Notre but dans le cadre de ce mémoire était la résolution de problème Min-Max en programmation linéaire par les méthodes primale et duale adaptées et le contrôle optimal.

En premier lieu, nous avons introduit la méthode adaptée pour la résolution de problème en programmation linéaire ensuite nous avons résolu un exemple numérique et par suite nous avons procédé à une comparaison de résultats obtenus à ceux de Matlab.

Nous nous sommes intéressés ensuite à la résolution du problème min-max avec des contraintes généralisées en programmation linéaire par la méthode adaptée ainsi qu'un exemple d'application est résolu par la méthode adaptée avec des contraintes généralisées puis par le logiciel Matlab, les résultats obtenus sont identiques.

Le troisième chapitre du travail a été consacré à la résolution du problème min-max avec des contraintes généralisées en programmation linéaire par la méthode duale adaptée.

La dernière partie a été axée sur la présentation de logiciel MATLAB et applications informatiques.

Bibliographie

[1] CHEBBAH MOHAMMED : Résolution et implémentation d'un problème min-max en contrôle optimal. Mémoire de magister en mathématiques appliquées UMMTO, (2006).

[2] GABASOV.R : Adaptive méthode of solving linear programming problems, Preprint Seies of University of Karlsruhe, institut for Statistic and Mathematics 1980.

[3] GABASOV.R et KIRILLOVA F.M : Méthode de programmation linéaire Edition de l'université de Minsk 1980.

[4] AIDENE.M et OUKACHA.O : Programmation linéaire Recherche Opérationnelle 2005 Edition page bleu.

[5] DANTZIG.D : Programmation linéaire Dunod paris 1966.

[6] M elle HAMDOUS .S : Méthode de résolution de problème min-max en programmation linéaire, Thèse de magister UMMTO, 2010.

[7] BELKACEM.R Thèse Résolution d'un problème min-max en programmation linéaire par la méthode adaptée 2016.

[8] M. POSTEL : Introduction au logiciel Matlab. Mémoire de DEA, université d'Angers, 2004.

[9] J-T. LAPRESTE : Introduction à Matlab Ellipses 2000.

Références webographie :

[1] https://www.techniques-ingenieur.fr/.