

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOULOU MAMMERI, TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

**Mémoire de fin d'études**  
Présenté en vue de l'obtention  
du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Electronique

**Option : Communication**

*Thème:*

**Filtrage de l'ECG par seuillage de  
coefficients d'ondelettes**

**Proposé et dirigé par :**

**M<sup>me</sup> Z .AMIROU**

**Présenté par :**

**M<sup>r</sup>. GRARADJI KAMAL  
M<sup>r</sup>. SADOUN AREZKI**

**Année universitaire 2008/2009**

**Soutenu le : 09 /07/2009**

## REMERCIEMENTS

*Nous commençons par dire louange à celui qui a fixé un terme à toute chose .Nous remercions le tout puissant pour nous avoir gratifié de santé et de moyens, sans l'usage desquels, il serait impossible de mener à terme notre travail.*

*Nous tenons à remercier tout le corps professoral pour avoir ; contribué à notre formation ; et veillé sur notre orientation pour le meilleur essor de nos études.*

*Particulièrement, nous remercions M<sup>me</sup> AMIROU.Z, notre promotrice, pour avoir accepté de nous encadrer, pour sa disponibilité qui nous a été précieuse et pour tout son suivi et ses conseils sous lesquels nous avons pu mener à bien notre travail.*

*Nos sincères remerciements, sont destinés à tous les membres du jury, pour avoir répondu à notre demande d'évaluer ce travail.*

*Enfin, nous présentons nos très vifs et chaleureux à la fois remerciements à tous les étudiants et camarades de classe, à tous ceux et celles, qui de près ou de loin, ont contribué et prié à la réussite de ce travail.*



# Dédicaces

*Je dédie ce travail:*

*A mes très chers parents qui sont toujours mon soutien et ma force. Le joyau de ma vie, que Dieu me les garde.*

*A mes frères et mes chères soeurs, pour leurs aides et leurs précieux Conseils (Ali, Belkacem, Tassadite, Zohra et Fatima.)*

*A mes ami(e)s, pour leurs amitiés sincères (Jugurtha, akli, fateh, Mouloud, Madjid, Nordine. Kamélia, Ouzna, Kahina, Amel, Nacera, Lynda).*

*A tous les jeunes du village d'Agni-tgharmine.*

*A tous mes collègues de la promotion 2009, particulièrement à Kamal et Sofiane) qui ont partagé mes moments de bonheurs et de souffrances durant ce parcours.*

*A toute personne qui m'apprécie...*

*Arézki*





# Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail:*

*A mon très cher père qui est toujours mon soutien et ma force. Ma très chère mère, les joyaux de ma vie, que Dieu me les garde.*

*A mes frères et mes chères soeurs, pour leurs aides et leurs précieux conseils (Fazia, Djamilia, Karima, Salihha, Lamia, Hand et Lounes).*

*A mes ami(e)s, pour leurs amitiés sincères (Kamel, Allaoua, Madjid, Amal, Mina, Nadine, Ghania, et Safia).*

*A tous mes collègues de la promotion 2009, particulièrement à Sofiane et Arezki) qui ont partagé mes moments de bonheurs et de souffrances durant ce parcours.*

*A toute personne qui m'apprécie...*

*Kamal*



# Abréviations

**ECG** : Signal électrocardiographique.

**EGG** : Signal électrogastrographique.

**TFCT** : Transformée de Fourier à Court Terme.

**TFFG** : Transformée de Fourier à Fenêtre Glissante.

**T.F** : La Transformée Fourier.

**T.O** : Transformée en Ondelette.

**DWT** : Transformée en Ondelette Discrète.

**CWT** : Transformée en Ondelette Continue.

**U** : Unité de prélèvement de l'ECG.

**db** : Décibel

:

# ***-SOMMAIRE-***

## ***Chapitre I : Généralités et limites des méthodes de filtrage classique***

Introduction .....	1
I-1 Définition d'un signal .....	1
I-2 Classification des signaux .....	1
I-2-1 Signaux déterministes .....	1
I-2-1-1 Signaux périodiques .....	2
a- Signaux quasi périodiques .....	2
b- Signaux transitoires .....	2
I-2-2 Signaux aléatoires .....	2
I-2-2-1 Signaux stationnaires .....	2
I-2-2-2 Signaux non stationnaires .....	2
I-3 Définition et différents types de bruit .....	3
I-3-1 Bruit déterministe .....	3
I-3-2 Bruit aléatoire .....	3
I-3-2-1 Bruit blanc .....	3
I-3-2-2 Bruit coloré .....	3
I-4 Méthodes de traitement classique .....	4
I-4-1 Filtres numériques .....	4
I-4-1-1 Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) .....	4
I-4-1-2 Les Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) .....	5
I-4-2 Transformée de Fourier .....	7
I-4-3 Transformée de Fourier à Court Terme (T.F.C.T) ou (TFFG) .....	9
I-4-3-1 Les Fenêtres .....	10
a- Fenêtre rectangulaire .....	10
b- Fenêtres de Hamming et Hanning .....	10
I-4-3-1-2 Effet de fenêtrage .....	10
I-4-3-2 Algorithme de la T.F.C.T .....	10
Conclusion .....	11

## *Chapitre II : Théorie des ondelettes*

Introduction .....	13
II-1 Définition d'une ondelette .....	13
II-2 La transformée en ondelettes .....	13
II-3 Dilatation et Translation d'ondelette .....	14
a- La dilatation .....	14
b- La translation .....	15
II-4 Inversion et admissibilité .....	15
II-5 Propriétés de la transformée en ondelette .....	16
II-5-1 Linéarité .....	16
II-5-2 Régularité .....	16
II-5-2 Compacité .....	17
II-5-3 Localisation .....	17
II-5-4 Orthogonalité .....	17
II-6 Transformée en ondelette continue (CWT) .....	18
II-6-1 Calcul de la CWT .....	18
II-7 Transformée en ondelette discrète (T.O.D) .....	21
II-8 Analyse multi-résolution .....	22
II-8-1 Décomposition du signal original (analyse) .....	22
❖ Nombre de niveaux .....	23
❖ Sous-échantillonnage .....	24
II-8-2 Reconstruction du signal original (synthèse) .....	24
II-9 Différents algorithmes de décomposition .....	25
II-9-1 Algorithme de S.Mallat .....	25
II-9-b Algorithme à trous .....	26
II-10 Différentes familles d'ondelettes .....	28
II-10-1 Ondelette de HAAR .....	28
II-10-2 Ondelettes de Daubéchies .....	28
➤ Propriétés des ondelettes de Daubéchies .....	29
II-10-3 Les symlets .....	29
II-10-4 Ondelette de MORLET .....	29
II-10-5 Ondelette de MEYER .....	30
II-10-6 Chapeau mexicain .....	30
II-10-7 Ondelettes biorthogonales .....	31
II-10-8 Les Coiflets .....	32
II-11 Critères de Choix de l'ondelette analysante .....	32
Conclusion .....	33

## *Chapitre III : Application de la TO au signal ECG*

Introduction .....	34
III-1 Notions sur l'électrocardiogramme .....	34
III-1-1 Activité électrique d'une cellule cardiaque .....	34
III-1-2 Electrocardiogramme normal .....	35
III-1-4 Fréquence d'enregistrement du signal ECG .....	36
III-1-5 Bruit et artefacts .....	36
III-1-5-1 Influence du réseau (50HZ) .....	36
III-1-5-2 Influence électromagnétique .....	36
III-1-5-3 Artefacts dus aux mouvements .....	37
III-2 Application de la transformée en ondelettes pour le filtrage du signal ECG .....	37
III-2-1 Base d'étude .....	37
III-2-2 Méthodes existantes pour le filtrage du signal ECG .....	38
III-2-3 Résultats expérimentaux .....	38
III-2-3-1 Filtrage par ondelettes discrète avec décimation .....	38
1- Chargement du signal original .....	39
2- Choix de l'ondelette .....	40
3- Décomposition du signal original .....	41
4- Seuillage des coefficients .....	43
a- Le seuillage dur .....	43
b- Le seuillage doux .....	44
5- Reconstruction .....	46
6- Suppression de la ligne de base .....	47
III-2-3-2 Filtrage par ondelettes discrète sans décimation .....	50
1- Décomposition et seuillage.....	52
2- Reconstruction .....	53
III-2-3-3 Comparaison entre les deux méthodes .....	54
Exemples d'applications des méthodes sur d'autres signaux ECG .....	55
1- signal ECG présentant une anomalie .....	55
2- Signal ECG fortement bruité .....	56
3- Résultats expérimentaux .....	57
Conclusion .....	57

## Introduction

L'analyse de signal porte sur un vaste ensemble de phénomènes et réalités physique diverses : l'évolution de l'intensité du courant électrique en un point d'un réseau est un signal électrique, la vibration de la terre est un signal sismique, l'activité du cœur est un signal bioélectrique .ces signaux dépendent d'une seule variable le temps.

Le traitement du signal consiste à extraire des informations contenue dans ce signal .plusieurs méthodes et analyses ont été développées relativement à ce sujet.

L'analyse de Fourier étant la plus ancienne et la plus connue, nous propose une approche globale de l'information contenue dans le signal. Cette dernière considère le signal comme une fonction infinie, ainsi toute notion de localisation et d'information temporelle disparaît dans l'espace de Fourier .il faut donc trouver une représentation qui fait apparaître l'information temporelle et fréquentielle.

Une première solution a été introduite par Denis GABOR à l'aide d'une fonction « fenêtre » limitée dans le temps, laquelle en translatant pour visualiser le signal partie par partie.

### I-1 Définition d'un signal

Un signal est fonction d'une ou plusieurs variables servant à la transition d'une commande ou d'une information. Le signal constitue le support d'une information.

Suivants leur nature, on peut distinguer plusieurs types de signaux.

### I-2 Classification des signaux

On peut classer les signaux en deux grandes catégories

- Les signaux déterministes.
- Les signaux aléatoires.

#### I-2-1 Signaux déterministes

Ils sont définis par les équations mathématiques à chaque instant. Cette catégorie est divisée en deux classes

### I-2-1-1 Signaux périodiques

Ce sont des signaux dont l'amplitude se répète dans des intervalles réguliers. Les signaux non périodiques, parmi lesquels on retrouve les signaux quasi périodiques et les signaux transitoires.

#### a- Signaux quasi périodiques

Sont des signaux composés d'une somme de plusieurs sinusoïdes.

#### b- Signaux transitoires

Sont définis dans un intervalle de temps donné, en dehors de cet intervalle ils seront nuls.

### I-2-2 Signaux aléatoires

Les signaux aléatoires sont définis par des grandeurs dont les valeurs successives sont gérées par la loi de probabilité. Ce sont des signaux à puissance moyenne finie.

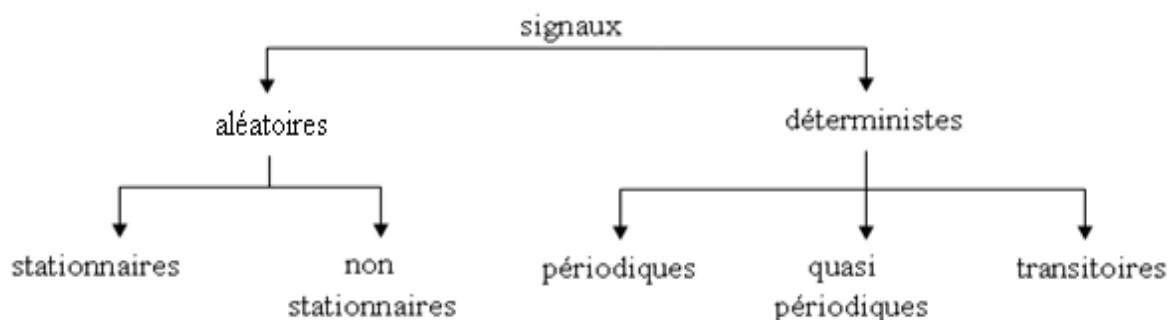
La catégorie des signaux aléatoires se divisent en deux classes :

#### I-2-2-1 Signaux stationnaires

Ce sont des signaux dont les propriétés statistiques sont les mêmes quel que soit l'origine du temps considéré (translation de l'origine du temps).

#### I-2-2-2 Signaux non stationnaires

Ce sont des signaux pour lesquels l'amplitude a une variation particulière dans un intervalle de temps donnés.



**Figure I-1** : Classification des signaux

### I-3 Définition et différents types de bruit

Le bruit est un signal indésirable qui masque ou dégrade le signal utile. Il peut être de nature déterministe (prévisible) ou aléatoire (imprévisible).

#### I-3-1 Bruit déterministe

Le bruit déterministe est un son. Le son possède des fréquences précises et donc des harmoniques. Du fait qu'il y a des groupes de signaux qui se répètent dans le temps (périodicité), le signal devient prévisible.

#### I-3-2 Bruit aléatoire

Le bruit aléatoire n'est pas prévisible. A chaque instant, le signal a une certaine probabilité d'avoir une certaine amplitude. Le bruit de la rue est un bruit aléatoire. On distingue deux types de ces bruits :

##### I-3-2-1 Bruit blanc

Un bruit blanc  $b(t)$  est un processus stochastique (aléatoire) idéalisé qui possède les caractéristiques suivantes :

- son spectre de puissance est une constante :  $S_b(f) = \text{Cte}$ . Donc ce bruit contient toutes les fréquences en égale proportion. (D'où le concept de "bruit blanc" par analogie avec la lumière blanche.)
- sa fonction d'autocorrélation est un pic de Dirac :

$$C_{bb}(t) = \langle b(t).b(0) \rangle = \delta(t)$$

##### I-3-2-2 Bruit coloré

Un autre type de bruit important dans les phénomènes physiques est le « bruit coloré ». Ce processus est caractérisé par un spectre de puissance qui décroît comme suit :

$$S(f) = f^{-\alpha}$$

Un cas particulier est celui  $\alpha= 1$ , appelé bruit en  $1/f$  (bruit rose).

## I-4 Méthodes de traitement classique

### I-4-1 Filtres numériques

#### Définition

Un filtre numérique F est un algorithme de calcul par lequel une séquence de nombres  $x(n)$  dite séquence d'entrée, est transformée en une autre séquence de nombre  $y(n)$  dite séquence de sortie.

$$y(n)=F [x(n)]$$

#### Formule générale [1]

$$y(n) = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x(n - i) + \sum_{j=1}^N a_j y(n - j) \quad (\text{I. 1})$$

A partir de la relation (I.1) on peut distinguer deux types de filtres :

#### I-4-1-1 Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Dans ces filtres tous les coefficients  $a_j$  sont nuls, on obtient donc :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x(n - i) \quad (\text{I. 2})$$

L'échantillon  $y(n)$  ne dépend donc que d'un nombre limité d'échantillons. La fonction de transfert  $H(z)$  s'écrit :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \sum_{i=0}^{i=M} b_i Z^{-i} \quad (\text{I. 3})$$

La transformée  $H(z)$  est aussi la transformée en Z (voir annexe) de la réponse impulsionnelle  $h(n)$  avec :

$$H(Z) = \sum_{K=0}^{\infty} h(K) Z^{-K} \quad (\text{I. 4})$$

Il s'ensuit que  $b_i=h(i)$ , les coefficients  $h(k)$  sont donc nuls pour  $k>M$ , c'est la raison pour laquelle ces filtres sont appelés filtres à réponse impulsionnelle finie. Ce sont des filtres toujours stables car la sortie revient toujours à zéro après suppression de l'excitation.

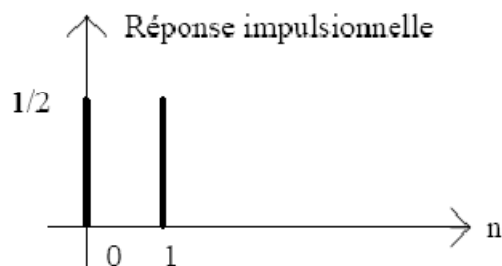
Ces filtres sont appelés aussi filtres à phase linéaire parce que le terme de phase de leur réponse fréquentielle (la transformée en Z de la suite des coefficients) est linéaire avec la fréquence. L'intérêt de cette propriété est que le filtre n'introduit pas de distorsion fréquentielle, c'est-à-dire qu'il n'introduit pas un retard différent selon la fréquence considérée.

### Exemple de filtre RIF

Soit le filtre obéissant à la relation suivante :

$$y(n) = \frac{X(n) + X(n-1)}{2} \quad (\text{I.5})$$

Seuls les deux premiers coefficients  $b_0$  et  $b_1$  sont différents de zéro. La réponse impulsionnelle de ce filtre est représentée ci-dessous.



**Figure I-2 :** Réponse impulsionnelle finie

#### I-4-1-2 Les Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Ces filtres sont encore appelés filtres récursifs. Dans ces filtres les coefficients  $a_j$  sont différents de zéro, en conséquence un échantillon  $y(n)$  dépend de tous les échantillons  $x(n)$  passés. La transformée  $y(z)$  de ces filtres s'écrit :

$$\begin{aligned}
y(Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \right) Z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^N a_j y(n-j) \right) Z^{-n} \quad (\text{I.6}) \\
&= \sum_{i=0}^M b_i \left( \sum_{n=0}^{\infty} x(n-i) \right) Z^{-n} + \sum_{j=1}^N a_j \left( \sum_{n=0}^{\infty} y(n-j) \right) Z^{-n}
\end{aligned}$$

En effectuant les changements de variables  $(n-i)=u$  et  $(n-j)=v$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
Y(Z) &= \sum_{i=0}^M b_i Z^{-i} X(Z) + \sum_{j=1}^N a_j Z^{-j} Y(Z) \quad (\text{I.7}) \\
&= X(Z) \sum_{i=0}^M b_i Z^{-i} + Y(Z) \sum_{j=1}^N a_j Z^{-j}
\end{aligned}$$

D'où la fonction de transfert  $H(z)$  suivante :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i Z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^N a_j Z^{-j}} \quad (\text{I.8})$$

La réponse impulsionnelle de ces filtres est donc infinie, en conséquence ces filtres peuvent devenir instables.

### Exemple de filtre RII

Soit le filtre obéissant à la relation suivante :

$$y(n) = \frac{X(n) + y(n-1)}{2} \quad (\text{I.9})$$

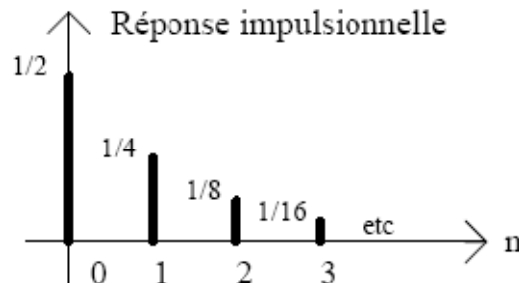
La transformée en Z de ce filtre s'écrit :

$$H(Z) = \frac{1}{2 - Z^{-1}} \quad (\text{I.10})$$

La transformée en z inverse permet de déterminer l'élément  $h(n)$  de la réponse impulsionnelle :

$$h(n) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n \quad (\text{I.11})$$

Il s'agit bien d'une réponse impulsionnelle infinie, en effet  $h(n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .  
La réponse impulsionnelle du filtre est donnée ci-dessous.



**Figure I-3** : réponse impulsionnelle infinie

#### I-4-2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un outil majeur dans l'analyse du signal. Elle permet de passer de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle, son expression est la suivante :

$$s(t) \longrightarrow s(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2jv\pi t} dt \quad (\text{I. 12})$$

$s(v)$  Peut s'écrire :

$$s(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi vt) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi vt) dt \quad (\text{I. 13})$$

D'où :  $s(v) = A(v) + jB(v)$

Tel que  $A(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi vt) dt$  et  $B(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi vt) dt$

$s(v) = |s(v)| e^{-j\varphi}$  avec  $|s(v)| = [A(v)^2 + B(v)^2]^{1/2}$  : Spectre d'amplitude de  $s(t)$ .

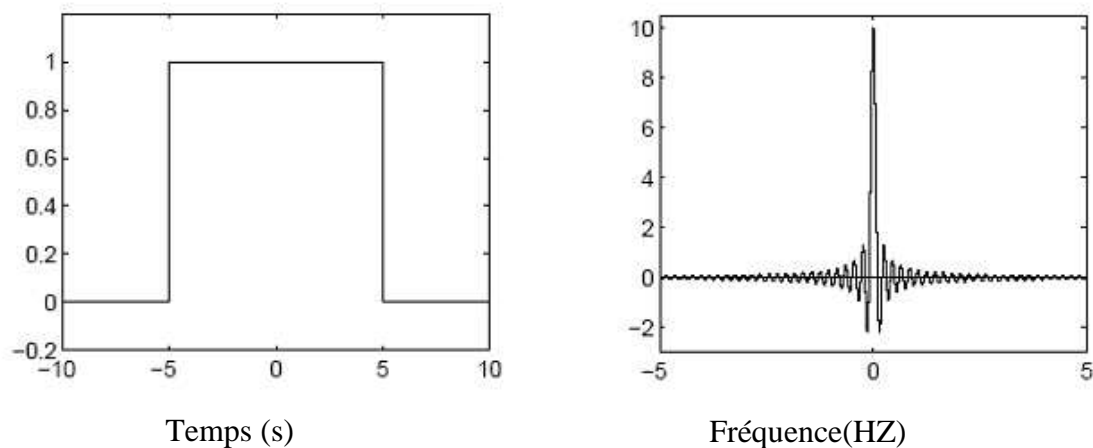
$\varphi = \arctg B(v)/A(v)$  : Spectre de phase de  $s(t)$ .

Malgré son immense intérêt, cette technique a plusieurs limites en particulier son manque évident de localisation temporelle. En effet, l'analyse de Fourier permet de connaître les différentes fréquences contenues dans un signal, c'est-à-dire

son spectre de fréquence, mais ne permet pas de savoir à quel instant ces fréquences ont été émises.

Cette analyse donne une information globale et non locale, car les fonctions d'analyse utilisées sont des sinusoides qui oscillent indéfiniment sans s'amortir.

Cette perte de localité n'est pas un inconvénient pour analyser des signaux dont la structure n'évolue pas ou peu (statiquement stationnaires), mais devient un problème pour l'étude des signaux non stationnaires, car l'information qui est véhiculée dans l'évolution temporelle du signal est perdue lors du passage à la représentation fréquentielle.



**Figure I-4:**Exemple de la Transformée de Fourier.

Si on prend l'exemple de la **Figure I-4**, on remarque que lors du passage de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle l'information liée au temps est perdue. En effet, dans la représentation fréquentielle, il est impossible de savoir à quel instant le pic a eu lieu.

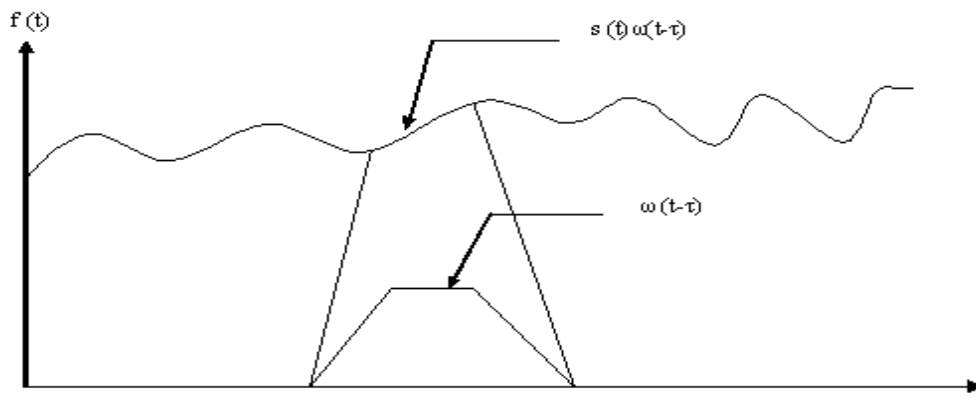
L'analyse de Fourier ne permet pas l'étude des signaux dont la fréquence varie dans le temps. De tels signaux nécessitent la mise en place d'une analyse temps-fréquence qui permettra une localisation des périodicités dans le temps et

indiquera donc si la période varie d'une façon continue, si elle disparaît par la suite, etc.

Pour les signaux non stationnaires, la première idée des traiteurs des signaux a consisté en l'introduction de la notion de stationnarité locale, qui revient à découper le signal à traiter en segments tel que ce signal est considéré comme stationnaire à l'intérieur de chaque segment, et à appliquer la T.F à chaque segment. Cette représentation est appelée Transformée de Fourier à Court Terme (T.F.C.T).

#### I-4-3 Transformée de Fourier à Court Terme (T.F.C.T) ou (TFFG)

Pour pallier aux limites de la T.F, GABOR dans les années 1940 définit la première forme de la représentation temps-fréquence (T.F.C.T) [2]. La technique consiste à découper le signal en tranches successives de telles sorte que le signal puisse, dans la durée de chaque tranche, être considéré comme stationnaire, chaque tranche de durée  $T$  et obtenue en multipliant le signal par une fenêtre temporelle de largeur finie, elle est considérée comme stationnaire. On peut alors appliquer la T.F, non pas au signal globale, mais à chacune des tranches de ce signal.



**Figure I-6:** Influence de la fenêtre de GABOR

$$s(t) \longrightarrow s(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\omega(t - \tau)s(t)]e^{-2j\pi\nu\tau} d\tau \quad (\text{I. 16})$$

$s(t)$ : Signal à traiter.

$\tau$ : Translation de la fenêtre.

$\omega(t - \tau)$  : La fonction introduisant la notion de fenêtre de GABOR.

### **I-4-3-1 Les Fenêtres**

En général, la transformation est appliquée au produit entre le signal et une fenêtre. Ces fenêtres affectent toujours le spectre vu la modification de la définition de la transformée de Fourier. Il existe plusieurs types de fenêtres.

#### **a- Fenêtre rectangulaire**

La fenêtre rectangulaire a d'excellentes caractéristiques de résolution pour des signaux possédant des amplitudes comparables, mais c'est un choix mauvais pour des signaux possédant des amplitudes disparates.

#### **b- Fenêtres de Hamming et Hanning**

Les fenêtres de Hamming et Hanning [3] sont généralement employées dans des applications à bande étroite, telles que le spectre d'un signal téléphonique.

### **I-4-3-1-2 Effet de fenêtrage**

En théorie, le calcul de la transformée de Fourier devrait s'effectuer sur un signal dans la durée est infinie. Or dans la pratique cette transformée ne peut se calculer que sur une fenêtre temporelle de largeur  $\Delta t$ . Il est donc nécessaire de considérer que le signal est nul en dehors de cette fenêtre et le rendre « artificiellement » infini en le répétant identiquement à lui-même. La multiplication du signal par la fenêtre temporelle  $\Delta t$  se traduit par une convolution de la TF du signal et la TF de la fenêtre, le spectre du signal sera donc modifié.

### **I-4-3-2 Algorithme de la T.F.C.T**

1. Choisir une fonction fenêtre de longueur finie  $N$
2. Placer la fenêtre sur le début du signal au temps  $t=0$
3. Tronquer le signal en le multipliant par cette fenêtre
4. Calculer la TF du signal tronqué.
5. Décaler incrémentalement la fenêtre vers la droite

6. Revenir au pas 3, jusqu'à ce que la fenêtre atteigne l'extrémité du signal.

Pour chaque partie où la fenêtre est centrée, nous obtenons une FT différente.

Malheureusement cette représentation (T.F.C.T) présente les inconvénients suivants :

- ✚ La longueur de la plage étant fixée, il n'est pas possible d'analyser simultanément des phénomènes dont les échelles de temps sont différentes.
- ✚ La précision de l'analyse impose un compromis insurmontable entre la résolution temporelle et la résolution fréquentielle.
- ✚ La détermination de l'intervalle temporel dans lequel on peut considérer le signal comme stationnaire, est un inconvénient pratique.

Pour remédier aux limites de la T.F.C.T, MORLET a choisi une autre méthode [2]. Au lieu de garder la taille de la fenêtre fixe et de varier le nombre d'oscillations à l'intérieur de cette fenêtre, il a gardé le nombre d'oscillations constant, et fait varier la taille de la fenêtre, l'étirant ou la comprimant comme un accordéon. MORLET a pu alors localiser les hautes fréquences avec des fenêtres plus larges.

## Conclusion

Les informations de fréquence et de temps d'un signal en un certain point du plan temps – fréquence ne peuvent être simultanément connues. De la même manière, pour les particules élémentaires, Heisenberg stipula que le moment cinétique et la position d'une particule ne peuvent être simultanément déterminés [3].

On ne peut savoir quelle composante spectrale existe à un instant donné. Le mieux qu'on puisse faire est de chercher quelles composantes spectrales existent pendant un intervalle de temps donné. C'est un problème de résolution et c'est la raison principale pour laquelle les chercheurs sont passés de la TFCT à la transformée en ondelette. La TFCT donne une résolution fixe pour tous les instants alors que la transformée en ondelette donne une résolution variable.

Les hautes fréquences sont mieux résolues en temps et les basses fréquences sont mieux résolues en fréquence. Ceci signifie, qu'aux hautes fréquences, les composantes sont mieux localisées en temps (moindre erreur relative) qu'aux basses fréquences. Au contraire, une composante de basse fréquence est mieux localisée en fréquence qu'une composante de haute fréquence.

## Introduction

L'analyse par ondelette a été introduite au début des années 1980, dans un contexte d'analyse du signal et d'exploitation pétrolière. Il s'agissait à l'époque de donner une représentation de signaux permettant de faire apparaître simultanément des informations temporelles et fréquentielles, facilitant par là l'identification des caractéristiques physique de la source du signal. Les ondelettes n'ont depuis cessé de développer et de trouver de nouveaux champs d'application.

### II-1 Définition d'une ondelette

L'analyse en ondelettes propose une évaluation importante de la T.F.C.T en ce sens qu'elle adopte une fenêtre de durée moyenne  $\Delta t$  variable en fonction de la zone spectrale à analyser.

Une ondelette est la vibration la plus courte dans une plage de fréquence. Elle est donc concentrée en temps ou en fréquence. L'idée de base est de décomposer un signal sur une famille de fonction translatées et dilatées à partir d'une fonction unique  $\Psi(t)$  appelée ondelette mère. Le terme ondelette désigne une fonction qui oscille pendant un temps donné « si la variable est le temps » ou un intervalle de longueur finie « si la variable est de type spatiale ». Au delà la fonction décroît très vite vers zéro.

### II-2 La transformée en ondelettes

La transformée en ondelette peut être définie comme étant la projection du signal sur la base des fonctions ondelettes [4] [5], appelées aussi ondelettes filles ( $\Psi_{a,b}(t)$ ). Les coefficients d'ondelettes sont définis comme suit :

$$\text{TO } f(a, b) = C_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi_{a,b}(t) dt \quad (\text{II. 1})$$

Avec:

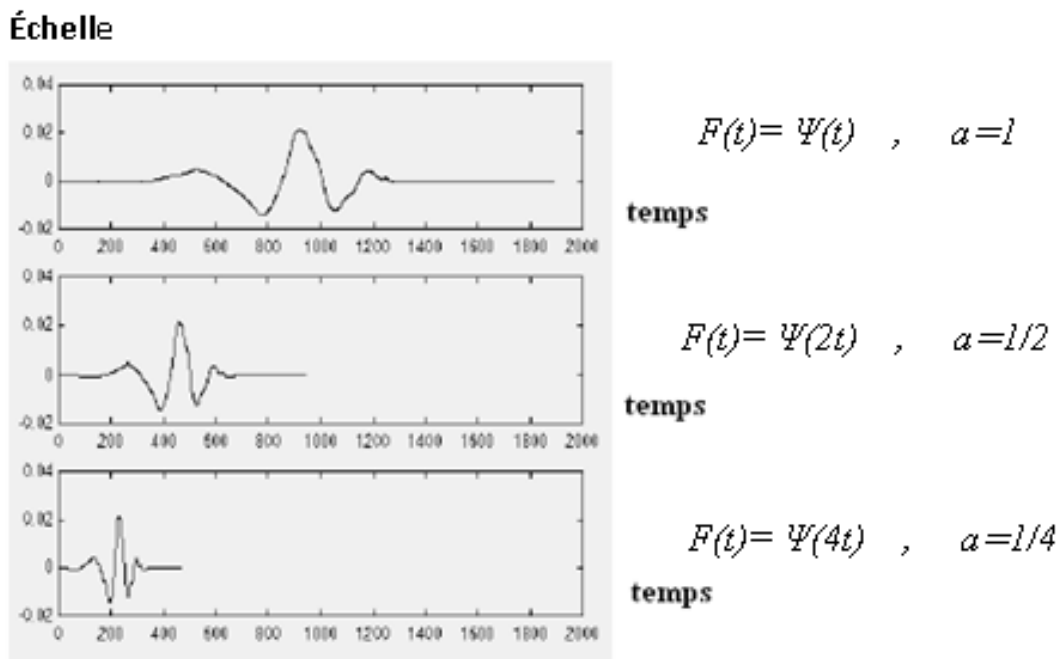
$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{R} \quad (\text{II. 2})$$

- Les coefficients d'ondelettes  $C_{a,b}$  dépendent de deux paramètres  $a$  et  $b$ , où  $a$  est le facteur d'échelle et  $b$  le facteur de translation. Le pas de translation à l'échelle  $a$  est :  $b/a$ .
- Les fonctions  $\Psi_{a,b}(t)$  sont obtenues à partir de la dilatation et de la translation de la fonction ondelette mère  $\Psi(t)$ .
- $\frac{1}{\sqrt{a}}$  est un coefficient utilisé pour avoir la même énergie dans chacune des ondelettes analysantes.

### II-3 Dilatation et Translation d'ondelette

#### a- La dilatation

Le facteur d'échelle  $a$  ( $a$  : dilatation définissant la largeur de la fenêtre d'analyse). Signifie tout simplement l'étirage ou la compression de l'ondelette mère, qui est relié à la notion de fréquence (l'ondelette  $\Psi_{a,b}(t)$  oscille à une fréquence  $1/a$ ).



**Figure II -1:** la dilatation pour différentes valeurs de  $a$

### b- La translation

La translation est la possibilité de retarder ou d'avancer le départ d'une ondelette.

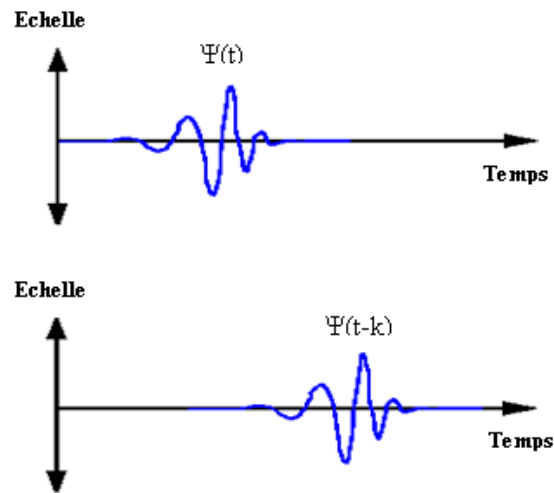


Figure II-2 : La translation

### II-4 Inversion et admissibilité

Si la fonction analysante (l'ondelette) est convenablement choisie, la transformée en ondelettes est inversible et la fonction peut être reconstruite après analyse, suivant l'équation [4]:

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} C_{a,b} \psi_{a,b} da db \quad (\text{II. 3})$$

Où  $C_\psi$  est un coefficient dont l'expression est :

$$c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega} \quad (\text{II. 4})$$

Avec  $\hat{\psi}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $\Psi(t)$

Pour que la transformée admet une inversion, il faut que l'ondelette  $\psi$  vérifie la condition d'admissibilité suivante :

$$\text{Soit: } \psi(t) \in L^2, \text{ alors: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (\text{II. 5})$$

Si cette condition est satisfaite, on peut analyser le signal puis le reconstruire sans perte d'information.

La condition d'admissibilité implique en outre que la transformée de Fourier de l'ondelette à la fréquence du continu (pour  $\omega = 0$ ) doit être nulle.

$$TF\{\psi(\omega)\}_{\omega=0} = 0 \quad (\text{II. 6})$$

Ceci implique en particulier deux conséquences importantes :

- La première est que les ondelettes doivent posséder un spectre de type passe-bande
- La seconde apparaît en réécrivant l'équation (II-6) de façon équivalente sous la forme:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (\text{II. 7})$$

- Cette relation montre que  $\Psi(t)$  doit être à moyenne nulle.

## II-5 Propriétés de la transformée en ondelette [6]

### II-5-1 Linéarité

La transformée en ondelette est un opérateur linéaire si :

$$C(\alpha f_1 + \beta f_2) = C\alpha f_1 + C\beta f_2 \quad (f_1, f_2) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

### II-5-2 Régularité

Une ondelette est dite régulière d'ordre 'n' si elle est 'n' fois continûment dérivable. Cette propriété se traduit sur les coefficients d'ondelette par une amplitude importante, caractérisant une singularité dans le signal, et par la décroissance des valeurs des coefficients avec l'échelle de résolution. On peut noter

qu'il existe un lien entre la régularité et les moments nuls d'une ondelette. Une ondelette  $\Psi$  a  $n$  moment nuls si :

$$M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p \Psi(t) dt \quad 0 \leq p \leq n \quad (\text{II. 8})$$

Elle est capitale pour la décomposition car la régularité implique une meilleure localisation fréquentielles des filtres.

### II-5-2 Compacité

Cette propriété est indispensable pour l'algorithme rapide, car si la fonction d'échelle  $\varphi$  et d'ondelette  $\Psi$  sont à support compact, les filtres sont à réponse impulsionnelle finie.

Si cette condition n'est pas satisfaite, une décroissance de l'ondelette est souhaitable, pour que les filtres puissent être approchés par des filtres à réponse impulsionnelle finie.

Il n'est pas possible de construire des ondelettes ayant toutes ces propriétés réunies. Il faudra donc faire un compromis.

### II-5-3 Localisation

La qualité de localisation en temps et en fréquence peut se mesurer par la borne d'incertitude de principe Heisenberg, qui assume une meilleure localisation. Lorsque cette incertitude est atteinte, une mauvaise localisation induit un étalement de l'énergie au signal autour d'un instant moyen et d'une fréquence moyenne pour une échelle donnée.

### II-5-4 Orthogonalité

L'orthogonalité permet de minimiser la redondance, autorisant un codage efficace grâce aux nombres de coefficients. L'orthogonalité simplifie la reconstruction qui reste néanmoins possible même lorsque cette propriété est vérifiée. La redondance (non-orthogonale) n'empêche pas la reconstruction, mais la rend plus compliquée, elle donne cependant plus de robustesse dans les calculs et une meilleure précision de reconstruction.

Le choix de l'ondelette est donc très ouvert, il faut cependant noter que la robustesse et la vitesse de convergence de l'algorithme de reconstruction sont très dépendantes du choix de l'ondelette.

Il est clair que la transformée en ondelette ne sera intéressante comme outil d'analyse du signal que si la fonction analysante (l'ondelette) reste bien localisée dans le temps et en fréquence.

Il existe différents types de familles d'ondelettes :

- On peut faire varier les paramètres  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (domaine continu), on parle alors de la transformation continue en ondelette (CWT)
- On peut faire varier les paramètres  $a$  et  $b$  dans un domaine discret, on parle de la transformation discrète en ondelette (DWT)

## II-6 Transformée en ondelette continue (CWT)

La CWT a été développée comme une approche alternative à la TFCT pour surmonter le problème de résolution. L'analyse d'ondelette est faite d'une manière semblable à l'analyse de TFCT, en un sens que le signal est multiplié par une fonction ondelette semblable à la fonction de fenêtre dans le TFCT, et la transformation est calculée séparément pour différents segments du signal dans le domaine temporel.

Cependant, il y a deux différences principales entre la TFCT et la CWT. Dans le cas de CWT : [2]

1. Les fréquences négatives de la TF de signaux fenêtrés ne sont pas prises, et donc une crête unique sera vue comme un spectre correspondant à une sinusoïde.
2. La largeur de la fenêtre sera changée pendant la transformation et sera calculée pour chaque composante spectrale unique. Ceci est probablement la caractéristique la plus significative de la transformée en ondelettes.

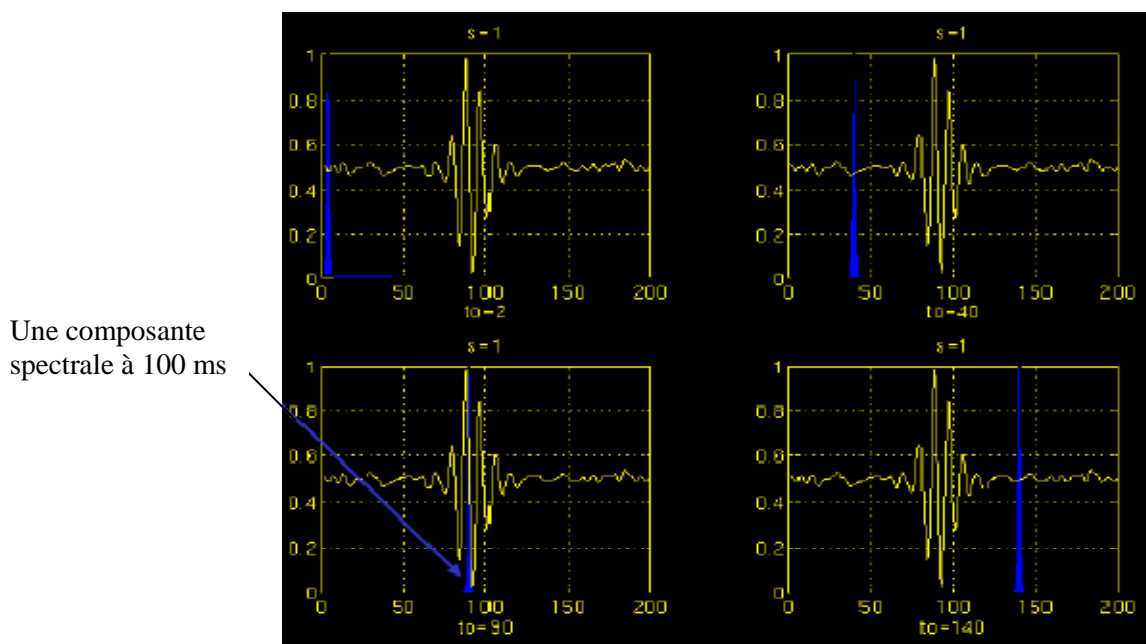
### II-6-1 Calcul de la CWT

Soit  $x(t)$  le signal à être analysé. L'ondelette mère  $\psi(t)$  est choisie pour servir de prototype à toutes les fenêtres dans le processus. Toutes les fenêtres qui sont

employées (ondelettes filles) sont des versions dilatées (ou comprimées) et décalées de l'ondelette mère.

Une fois que l'ondelette mère est choisie le calcul commence par  $a = 1$  et la CWT est calculée pour toutes les valeurs de  $a < 1$  et  $a > 1$ . Cependant, selon le signal, une transformée complète n'est habituellement pas nécessaire. Pour tous les besoins pratiques, les signaux sont limités en largeur de la bande, et donc, le calcul de la transformation pour un intervalle limité d'échelles est habituellement adéquat. Dans cette étude, un certain intervalle fini de valeurs pour  $a$  ont été employés.

Si le signal a une composante spectrale qui correspond à la valeur courante de  $a$ , le produit de l'ondelette mère avec le signal à l'endroit où cette composante spectrale existe donne une valeur relativement grande. Autrement ce produit donne une valeur relativement petite ou nulle.



**Figure II-3** : Calcul de CWT (hautes fréquences)

La CWT compacte (en bleu pour  $a=1$  (correspondant à la plus haute fréquence du signal)) à  $b=2, 40, 90$  et  $140$ . A chaque position, la CWT est multiplié par le signal.

En décalant l'ondelette dans le temps, le signal est localisé dans le temps, et en changeant la valeur de  $a$ , le signal est localisé dans l'échelle (fréquence).

La CWT produira des valeurs élevées pour des basses échelles autour de 100 ms, et petites valeurs ailleurs. Pour de hautes échelles, d'autre part, la CWT donnent de grandes valeurs pour presque la durée entière du signal, puisque les basses fréquences existent à tout moment.

À la valeur  $a = 5, a=20$

À mesure que la largeur de la fenêtre augmente, la transformée commence à sélectionner les composantes de plus basses fréquences.

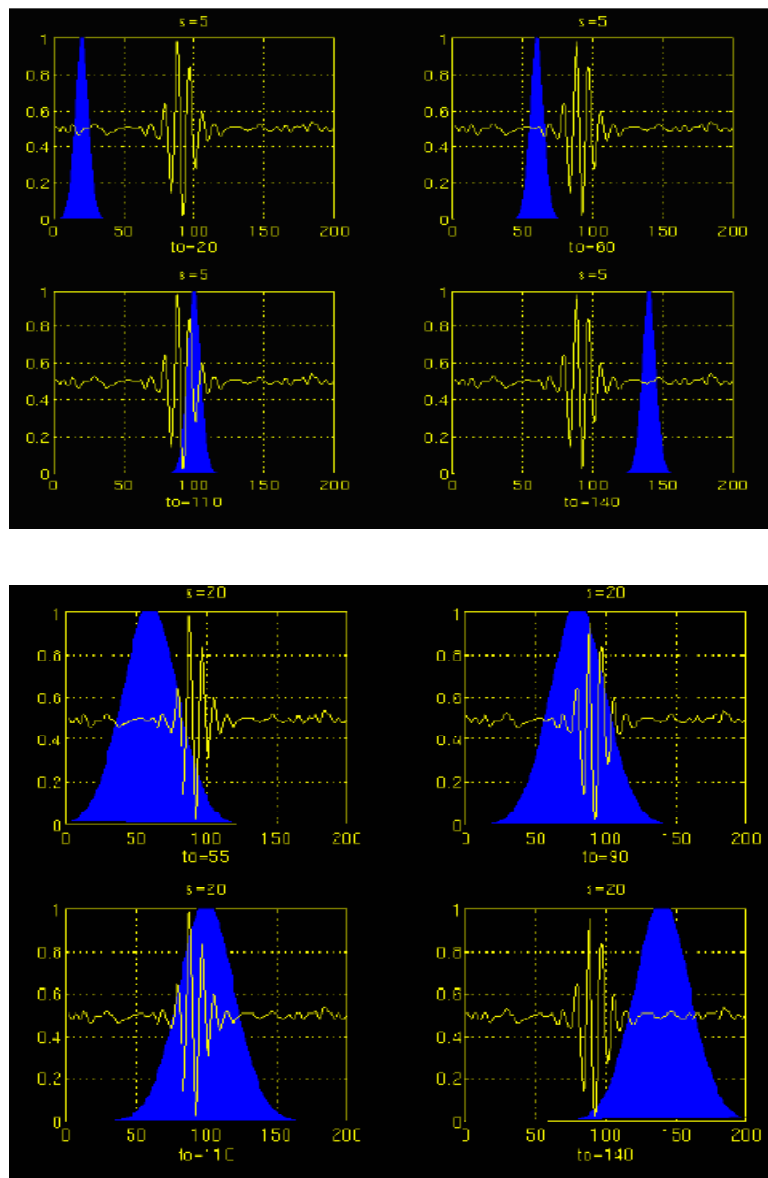


Figure II-3 : Calcul de CWT (basses fréquences)

**II-7 Transformée en ondelette discrète (T.O.D) :**

La transformée continue en ondelette décompose un signal selon un ensemble d'ondelette déduites d'une ondelette de référence par des operateurs de dilatation et de translation. Cependant, il est possible d'augmenter l'efficacité de la décomposition, c'est-à-dire de limiter le nombre de facteur d'échelle à utiliser tout en conservant la même précision dans la décomposition. Le problème posé est donc : comment choisir le facteur d'échelle et de décalage pour obtenir une décomposition en coefficient d'ondelette complète (pour permettre une bonne reconstruction), mais sans redondance. On choisi pour cela de fixer un pas  $a_1$  de variation de l'échelle et un pas  $b_1$  de variation du décalage, et de prendre : [6]

$$a = a_1^m$$

$$b = nb_1 a_1^m \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Ou  $m$  et  $n$  sont des entiers relatifs variant entre des bornes fixées par l'utilisateur.

Donc La transformée en ondelette discrète s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \text{TOD } f(m, n) &= a_1^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi(a_1^{-m}t - nb_1) dt & \text{(II. 10)} \\ &= \langle f(t), \Psi_{m,n}(t) \rangle \end{aligned}$$

Avec :

$$\Psi_{m,n}(t) = a_1^{-\frac{m}{2}} \Psi(a_1^{-m}t - nb_1) \quad \text{(II. 11)}$$

En pratique, on choisit  $a_1=2$  et  $b_1=1$  de telle sorte que les fonctions  $\Psi_{m,n}(t)$  forment une base orthonormée, et obtenir une représentation non redondante de l'information et une reconstruction optimale.

Le facteur d'échelle varie de façon dyadique c'est-à-dire en puissance de 2, Donc la nouvelle expression de l'ondelette analysante est :

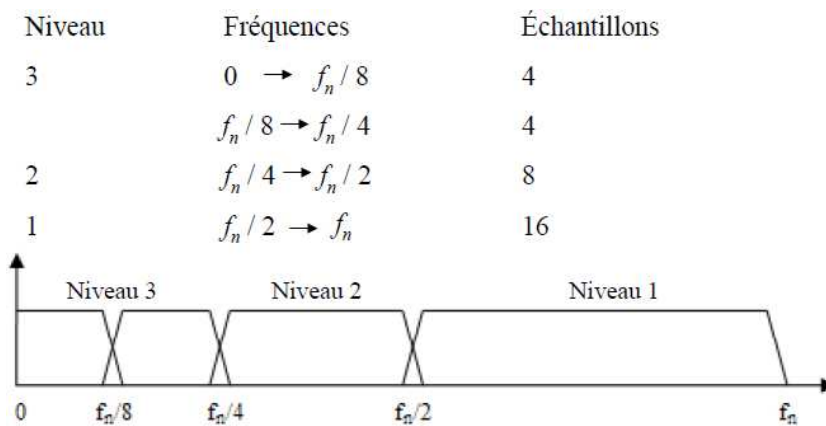
$$\Psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \Psi(2^{-n}t - n) \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{II. 12})$$

La transformée inverse de la TOD est donnée par la formule suivante :

$$f(t) = \sum_m \sum_n \langle f(t), \Psi_{m,n}(t) \rangle \Psi_{m,n}(t) \quad (\text{II. 13})$$

### II-8 Analyse multi-résolution

Le principe de base de l'analyse multi résolution est de séparer le signal en deux composantes, l'une représentant l'allure du signal, l'autre représentant ses détails. L'allure générale d'un signal est représentée par ses basses fréquences donc les grandes échelles, les détails par ses hautes fréquences.



**Figure II-4 :** division du domaine fréquentiel pour TOD.

#### II-8-1 Décomposition du signal original (analyse)

Le signal original  $x[n]$ , traverse deux filtre complémentaires et émerge en tant que deux signaux, donc on a besoin d'un filtre passe bas  $h[n]$  pour obtenir l'allure générale appelée approximation ou moyenne, et un filtre passe haut  $g[n]$  pour estimer ses détails.

Pour la DWT seuls les signaux d'approximation sont à nouveau décomposés. Les signaux de détails issus du filtre passe-haut sont laissés de côté à chaque itération, on divise la résolution par 2. C'est la raison pour laquelle cette méthode est appelée analyse multi résolution.

Afin d'éviter la perte d'information, on utilise deux paire de filtres complémentaires, et en quadrature pour que les fréquences coupées par l'un seront conservées par l'autre.

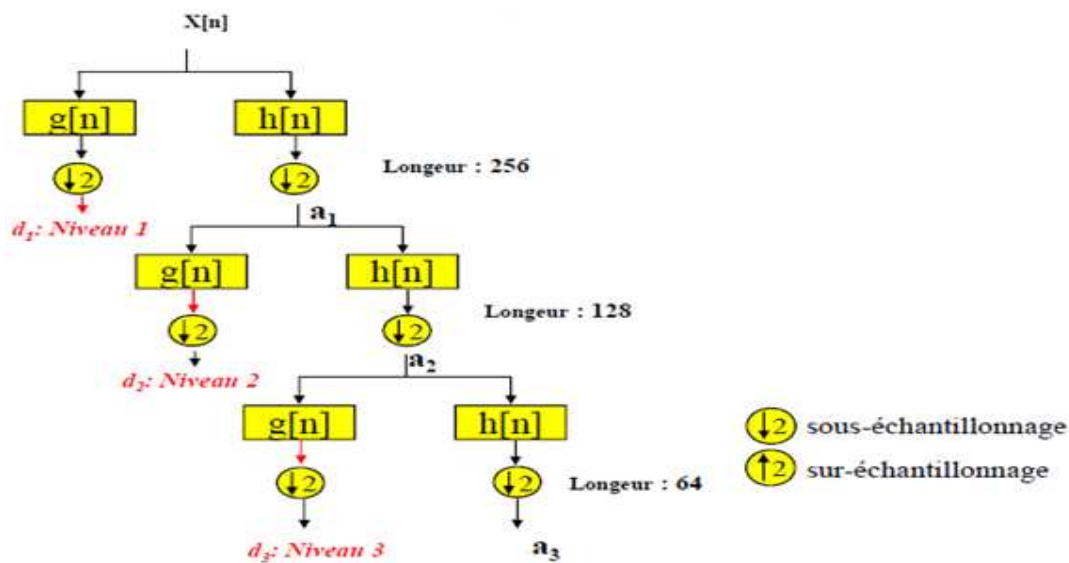


Figure II-5 : Arbre d'analyse multi résolution.

#### ❖ Nombre de niveaux

Puisque le processus d'analyse est itératif, dans la théorie il peut être continu indéfiniment. En réalité, la décomposition peut procéder jusqu'à ce que les différents détails se composent d'un échantillon ou d'un pixel simple. Dans la pratique, on choisit un nombre approprié de niveaux basés sur la nature du signal et de l'application envisagée.

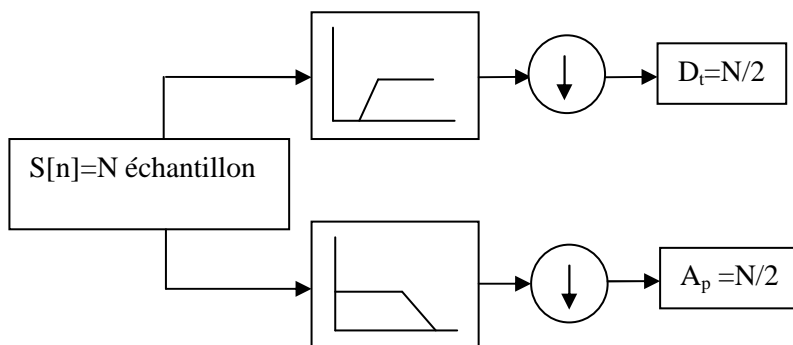
#### Exemple

Longueur:  $512=2 \times 2^8$ , alors il ya 8 niveaux de décompositions.

### ❖ Sous-échantillonnage

En effectuant l'opération de filtrage sur un signal numérique réel, on retrouve deux fois autant de données qu'au début.

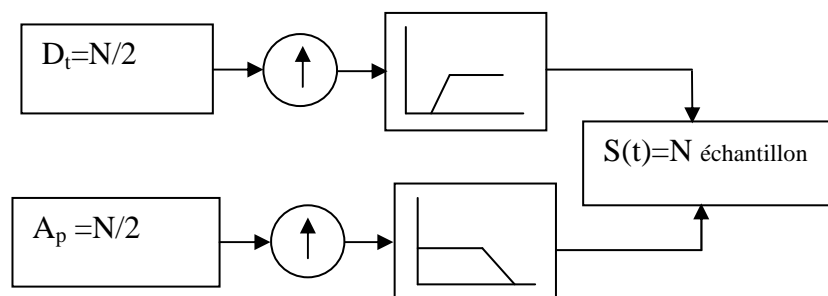
Pour y remédier, nous sous-échantillons chaque signal d'un facteur 2, c'est-à-dire maintenir seulement une des deux composantes dans chacun des deux échantillons, on se ramène à deux signaux de longueur  $N/2$  ( $N$  : longueur du signal initial).



**Figure II-6** : Décomposition du signal par deux filtres passe bas et passe haut plus un sous échantillonnage

### II-8-2 Reconstruction du signal original (synthèse)

La procédure est identique à celle de la décomposition mais opérant dans le sens inverse avec une modification au niveau des blocs de traitement ; la décimation est remplacée par une interpolation qui permet de doubler à chaque pas la longueur de l'approximation et de détail en introduisant un zéro entre chaque échantillon. On passe donc de l'approximation  $A_{p_i}$  à l'approximation  $A_{p_{i-1}}$  par l'opération suivante :



**Figure II.7:** Schéma de synthèse

## II-9 Différents algorithmes de décomposition

Le problème pour effectuer concrètement la décomposition est que l'on ne dispose pas en général du signal  $s$  mais seulement d'une approximation à une échelle donnée. Il faut donc trouver un algorithme qui, à partir de cette approximation, permet de trouver l'approximation et les détails à la résolution immédiatement inférieure, ce qui par itérations successives conduit à l'analyse du signal pour toutes les résolutions inférieures à celle de départ. Deux algorithmes principaux ont été mis en évidence : l'algorithme de Mallat utilisé dans le cas des analyses orthogonales et biorthogonales et l'algorithme à trous qui concerne des analyses multirésolutions non-orthogonales.

### II-9-1 Algorithme de S.Mallat

Stéphane Mallat a montré les relations récursives [5] entre  $A_{k,j}$  et  $A_{k,j+1}$  de même entre  $D_{k,j}$  et  $D_{k,j+1}$

$$A_{k,j} = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[n - 2k] A_{k,j+1}(s) \quad (\text{II. 14})$$

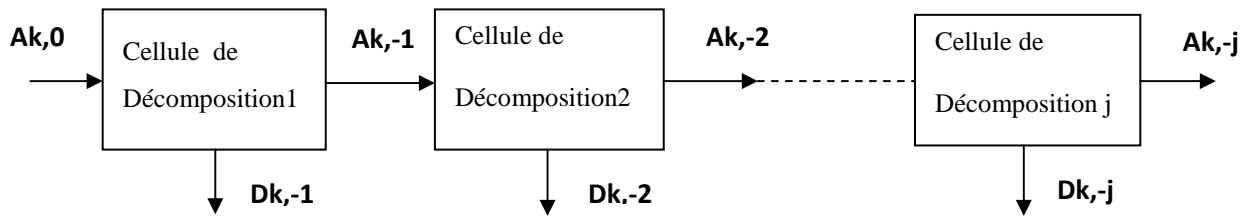
$$D_{k,j} = \sum_{-\infty}^{+\infty} g[n - 2k] D_{k,j+1}(s) \quad (\text{II. 15})$$

Le filtre  $h(n)$  assure le filtrage passe bas, alors que le filtre  $g(n)$  assure le filtrage passe haut. Ces filtres sont liés par la relation suivante :

$$g(n) = (-1)^n h(-n + 1) \quad \text{Filtre à mémoire}$$

Ces deux équations ci-dessus indiquent que le calcul des coefficients d'approximation  $A_{k,j}(s)$  et de détails  $D_{k,j}(s)$  se fait de façon hiérarchique.

A chaque étape on applique un filtrage passe-bas dont sera issue une approximation  $A_{k,j}$  et un passe-haut dont on obtiendra les détails  $D_{k,j}$ . En procédant à une décimation d'ordre 2 sur  $A_{k,j}$ , on pourra dans l'étage suivant utiliser les mêmes filtres ce qui simplifie fortement l'architecture du système. Un tel algorithme est dit pyramidal. sa structure pyramidale est illustrée par la figure **II-8** :



**Figure II-8:** principe de l'algorithme pyramidal

Si l'on sait grâce à cet algorithme pyramidal décomposer le signal, en utilisant un processus inverse on pourra reconstruire le signal.

Donc la reconstruction du signal se fait par la relation suivante :

$$A_{k,j+1}(s) = 2 \left[ \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} [h(k - 2n)] A_{n,j}(s) + \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} [g(k - 2n)] D_{n,j}(s) \right] \quad (\text{II. 16})$$

### II-9-b Algorithme à trous

C'est un algorithme très général et valable pour toute interpolation emboîtée. En effet, à partir d'une interpolation linéaire, on peut montrer qu'il est possible de calculer de manière exacte la transformée en ondelette d'une fonction connaissant ses coefficients d'interpolation à l'échelle 1 d'échantillonnage [7]. Cette hypothèse s'écrit :

$$f_1(k) = \langle f(x), \Phi(x - k) \rangle \quad (\text{II. 17})$$

Ou :  $f(x)$  est la fonction originale, et  $f_1(k)$  les valeurs initiales, produit scalaire de  $f(x)$  avec la base échantillonnée au pas 1. Dans la théorie classique d'échantillonnage, la fonction  $\Phi(x)$  est égale à  $\text{sinc}(x)$ . Les coefficients de l'approximation lissée du signal à l'échelle  $i$  s'écrivent :

$$f_i(k) = \frac{1}{2^i} \langle f(x), \Phi\left(\frac{x - k}{2^i}\right) \rangle \quad (\text{II. 18})$$

Si  $\Phi(x)$  engendre une base d'interpolation emboîtée, on a :

$$\frac{1}{2^i} \Phi\left(\frac{x-k}{2^i}\right) = \frac{1}{2^{i-1}} \sum_n h(n) \cdot \Phi\left(\frac{x-k}{2^{i-1}} - n\right) \quad (\text{II. 19})$$

Le calcul de  $f_1(k)$  devient donc :

$$f_1(k) = \sum_n h(n) \cdot f_{i-1}(k + 2^{i-1} \cdot n) \quad (\text{II. 20})$$

On a donc une convolution entre le filtre symétrique  $h$  et les éléments de  $2^{i-1}$  créant des trous, d'où le nom de l'algorithme. Les coefficients en ondelettes à l'échelle  $i$  sont obtenus par :

$$d_i(k) = \left\langle f(x), \frac{1}{2^i} \psi\left(\frac{x-k}{2^i}\right) \right\rangle \quad (\text{II. 21})$$

Si l'ondelette  $\psi(x)$  est choisie comme étant le résultat de la différence de deux interpolations, alors les coefficients en ondelettes sont données par :

$$d_i(k) = f_{i+1}(k) - f_i(k) \quad (\text{II. 22})$$

Une seule convolution est donc effectuée en sommant tous les coefficients en ondelettes obtenus et l'approximation à l'échelle du signal  $f_N(k)$  :

$$f_1(k) = f_N(k) + \sum_n d_n(k) \quad (\text{II. 23})$$

Cependant, le calcul de la transformée en ondelette du signal reconstruit par la méthode donnée par la dernière équation ne donne pas les mêmes coefficients en ondelettes que la transformée du signal original. Par conséquent, on applique un processus itératif à la transformée inverse afin qu'au bout de quelques itérations, la transformée du signal original soit égale à celle du signal reconstruit.

L'avantage de l'algorithme à trous par rapport à l'algorithme de MALLAT est qu'il permet le calcul de la transformée sur l'ensemble des abscisses. En revanche, cet avantage est aussi un inconvénient puisque la relation signal original/signal transformé n'est biunivoque, ce qui implique que la reconstruction du signal original à partir de ces coefficients et signaux transformée n'est exacte.

## II-10 Différentes familles d'ondelettes

### II-10-1 Ondelette de HAAR

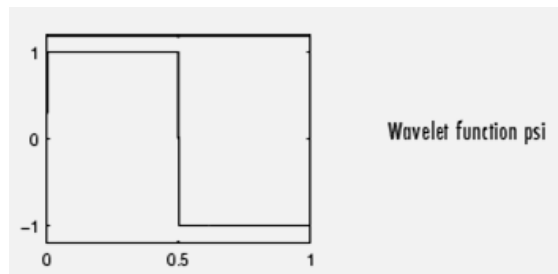
L'ondelette de HAAR est la seule ondelette discontinue qui a un seul moment nul elle ressemble a la fonction escalier, donc si on effectue une projection d'un signal sur cette base on aura une allure escalier. Elle est défini par :

**La fonction ondelette :**

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

**La fonction d'échelle :**

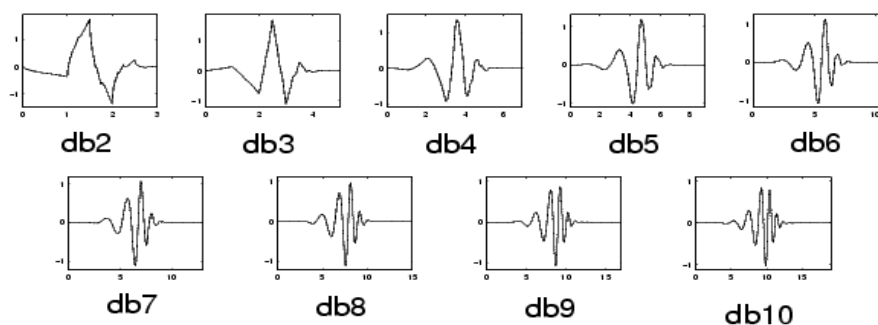
$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1[ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



**Figure II-9:** Ondelette de Haar

### II-10-2 Ondelettes de Daubéchies

Proposées 1988 par Ingrid DAUBECHIES, elles sont des ondelettes orthogonales à support compact ; tout comme la fonction de HAAR, notons que DAUBAHIES 1 n'est autre que l'ondelette de HAAR. Ces ondelettes n'ont pas d'expressions, cependant Daubechie a proposé un algorithme de synthèse des filtres explicite et simple.



**Figure II-10:** Ondelettes de Daubechies.

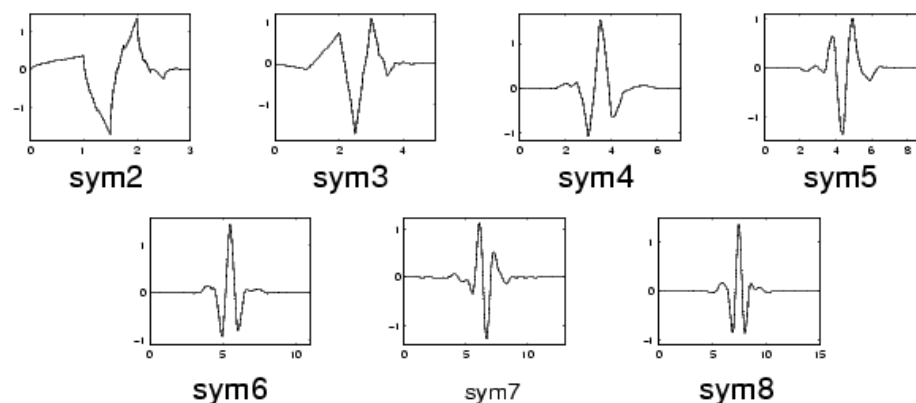
### ➤ Propriétés des ondelettes de Daubéchies

- Le nombre de moments nuls égal à l'ordre de l'ondelette (N)
- La longueur du support des fonctions ondelettes  $\Psi$  les fonctions d'échelles  $\varphi$  est de  $2N-1$
- Elles ne sont pas symétriques, d'ailleurs pour certaines l'asymétrie est plus prononcée
- La régularité augmente avec l'ordre de l'ondelette
- L'analyse est orthogonale

### II-10-3 Les symlets

Les symlets sont des ondelettes presque symétriques, construites par Daubéchies afin d'améliorer la symétrie des Daubechies.

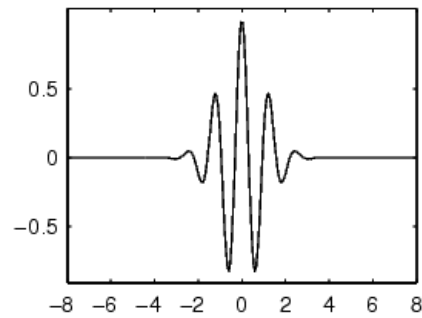
Les propriétés de ces ondelettes sont similaire à celles des Daubéchies .



**Figure II-11** : Les ondelettes «symlet »

### II-10-4 Ondelette de MORLET

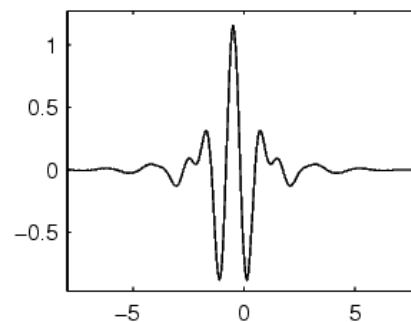
Elle est inspirée du signal élémentaire de GABOR, c'est-à-dire par modulation d'une Gaussienne. Depuis, toutes les ondelettes correspondent à une exponentielle complexe qui s'appelle ondelette de type MORLET. Elle ne satisfait pas rigoureusement la condition d'admissibilité. Comme  $\varphi$  n'existe pas, l'analyse n'est pas orthogonale.



**Figure II-12** : Ondelette de Morlet.

### II-10-5 Ondelette de MEYER

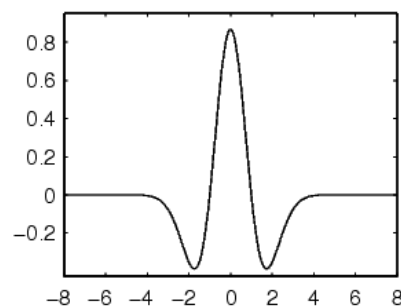
Les fonctions  $\Psi$  et  $\varphi$  sont définies par les expressions explicites, mais dans le domaine fréquentiel avec une fonction auxiliaire. En changeant la fonction auxiliaire, on obtient une famille de différentes ondelettes.



**Figure II-13** : L'ondelette de Meyer.

### II-10-6 Chapeau mexicain

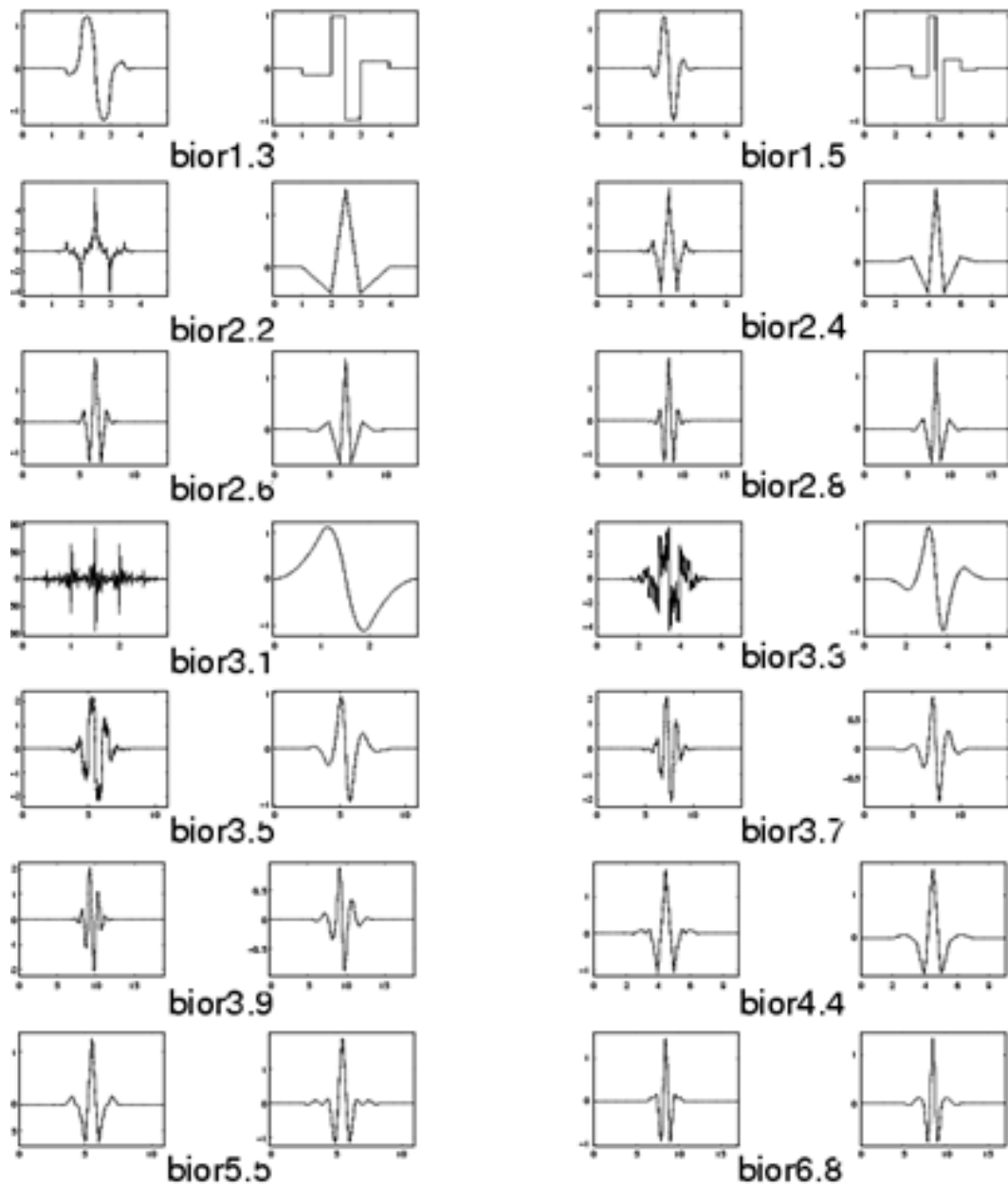
C'est la dérivée seconde d'une Gaussienne. Cette ondelette n'a pas de fonction d'échelle  $\varphi$  donc n'est pas orthogonale.



**Figure II-14** : l'ondelette chapeau.

**II-10-7 Ondelettes biorthogonales**

Ces ondelettes sont surtout utilisées pour la reconstruction des signaux ou d'images. L'idée est d'utiliser deux ondelettes, une pour la décomposition et l'autre pour la reconstruction, afin de régler le problème de distorsion de phase.



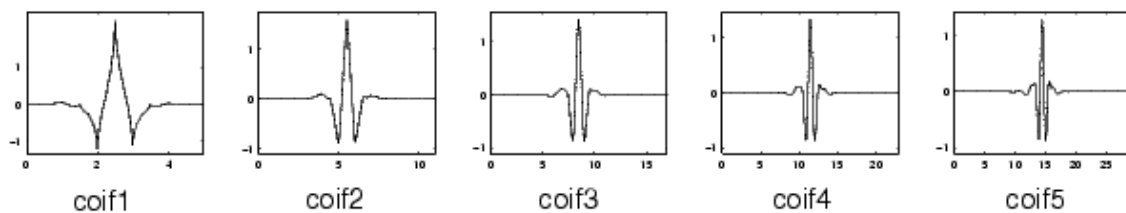
**Figure II-15** : Ondelettes biorthogonales.

### II-10-8 Les Coiflets

Elles ont été construites par Daubechies pour BEYLKIN, COIFMAN et ROKHLIN. Les coiflets ne sont donc qu'un cas particulier des ondelettes de Daubechies.

➤ **Les propriétés de ces ondelettes sont**

- La fonction ondelette  $\Psi$  a  $2N$  moments nuls et que  $N$  est l'ordre de l'ondelette, la fonction d'échelle  $\varphi$  a  $2N-1$  moment nuls
- Le support de ces ondelettes est  $6N-1$



**Figure II-16** : les ondelettes « Coiflets ».

### II-11 Critères de Choix de l'ondelette analysante

L'analyse du choix de l'ondelette analysante (ondelette-mère) sera effectuée sur la base d'un test de plusieurs ondelettes analysantes. Ceci se fera sur l'étude de l'erreur existant entre le signal original (à l'état brut) et le signal de synthèse (signal après reconstruction). Dans ce sens, un paramètre d'erreur caractérise la reconstruction (ou synthèse). L'erreur qui sera calculée à chaque fois est donnée par l'expression suivante [8] :

$$E_{o/r} = \frac{\sum_{i=1}^N |S_{oi} - S_{ri}|}{N} \quad (\text{II. 24})$$

- $S_o$  : signal original ;  $S_{oi}$  : Echantillon  $i$  de  $S_o$
- $S_r$  : signal de synthèse ;  $S_{ri}$  : échantillon  $i$  de  $S_r$

Le choix de l'ondelette peut être ainsi guidé par :

- Un bon compromis de résolution temps/fréquence.
- ces propriétés mathématiques : moments nuls, régularité,...
- une forme proche d'un motif que l'on veut mettre en évidence dans le signal sans en connaître exactement l'échelle.

Donc l'ondelette analysante choisie sera celle qui présentera la plus faible erreur de reconstruction en respectant les particularités du signal original normal. Ceci permettra de trouver l'ondelette analysante optimale, afin d'établir une distinction très facile des bruits et des différents signaux indésirables.

### **Conclusion**

La transformée en ondelettes est un outil qui fournit une approche nouvelle pour l'analyse de signaux, comportant des transitions abruptes en complément à de basses fréquences correspondantes à la parole, la musique ou les signaux bioélectriques. La transformée en ondelettes a une capacité de multi-résolution lui permettant de fournir un ensemble de champ de travail pour un nombre de techniques qui ont été développées indépendamment pour diverses applications de traitement du signal. Parmi les vastes domaines d'application de la théorie des ondelettes on distingue :

- ✓ le filtrage des signaux biologique tel que l'ECG, l'EKG.
- ✓ le traitement d'image et la compression de données.
- ✓ la détection des discontinuités.
- ✓ l'analyse de turbulences. Analyse d'écoulement turbulent des fluides de basse viscosité coulant aux vitesses élevées.
- ✓ l'analyse de séries temporelles pour des prévisions du marché boursier.

**Introduction :**

L'objectif de cette application est l'amélioration de la qualité du signal ECG bruité tout en minimisant la perte d'information pouvant être causée par les traitements effectués sur le signal  $x(t)$  exprimé par :  $x(t)=u(t)+b(t)$ , où  $u(t)$  représente la composante utile et  $b(t)$  la composante indésirable qui contamine l'ECG soit directement dans son environnement propre, soit le long de la chaîne d'acquisition. Deux cas sont à considérer, soit le signal perturbateur se situe dans une plage de fréquence extérieure à celle du signal utile (la composante continue et la ligne de base), soit au contraire il y a recouvrement total ou partiel. Le premier cas sera plus aisé à traiter, le second nécessite des méthodes beaucoup plus appropriées.

L'application qui nous intéresse ici est le filtrage par deux méthodes relatives à différents algorithmes. Pour choisir une méthode de filtrage, il est nécessaire de connaître la nature et le contenu fréquentiel du signal à traiter

**III-1 Notions sur l'électrocardiogramme**

L'électrocardiogramme (ECG) est l'une des méthodes exploratrices les plus utilisées pour diagnostiquer des pathologies cardiaques.

L'ECG mesure l'activité électrique du cœur par l'emploi d'électrodes externes placées à des endroits bien précis du corps. L'activité enregistrée est formée d'ondes d'activation permettant d'identifier les phases de systoles et diastoles des oreillettes et des ventricules [9].

**III-1-1 Activité électrique d'une cellule cardiaque**

Le déroulement de l'activité électrique d'une cellule cardiaque se résume en trois phénomènes :

- La polarisation qui correspond à la phase durant laquelle les cellules myocardiques sont au repos.
- La dépolarisation qui correspond à la contraction du myocarde

- La repolarisation : durant cette phase, les cellules myocardique reviennent progressivement à leur état de repos, on dit qu'elles sont repolarisées.

### III-1-2 Electrocardiogramme normal

Chaque contraction cardiaque génère une suite d'ondes électriques correspondant au processus de dépolarisation et de repolarisation des oreillettes et des ventricules. La terminologie adoptée par Einthoven [10] pour désigner les ondes d'activation du cœur est : P, Q, R, S, T et U comme indiqué par la Figure III- 1.

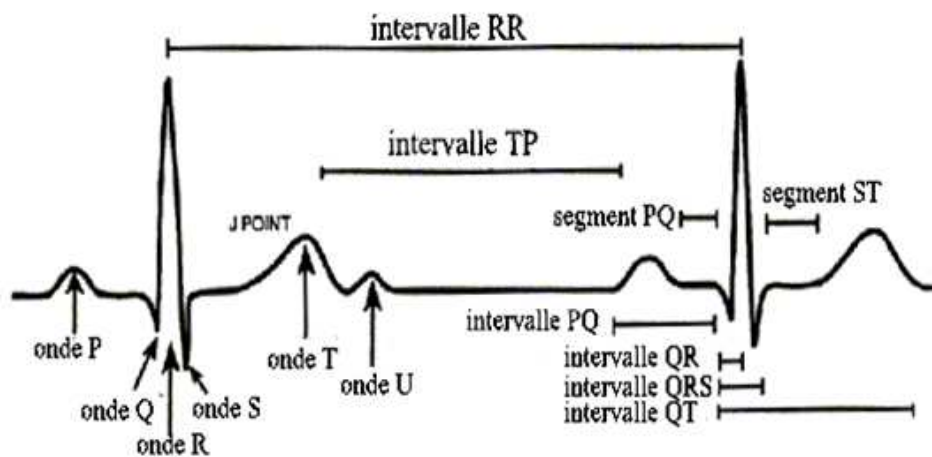


Figure III-1 : Tracé du signal electrocardiographique.

### III-1-3 Caractéristiques du signal cardiaque normal [9]

L'activité électrique de l'ensemble des cellules cardiaques est représentée à la surface du corps.

- L'onde P représente la dépolarisation auriculaire, sa durée est de l'ordre de 90ms ; c'est une onde positive dont l'amplitude est normalement inférieure ou égale à 0,2mv.
- Le complexe QRS correspond à la dépolarisation ventriculaire précédant l'effet mécanique de contraction. La durée de ce complexe est comprise entre 85 et 95ms. Son amplitude est comprise entre 0,5 et 1,5 mV. Cette onde représente la composante de plus haute fréquence de l'ECG, environ 4 à 17 Hz.

- L'onde T correspond à la repolarisation des ventricules. L'onde T normal à une amplitude plus faible que le complexe QRS.
- L'onde U est une petite déflexion parfois observée après l'onde T dans les dérivations précordiales V à V4 (voir annexe). Elle est positive dans toutes les dérivations sauf en aVR.
- L'intervalle PR mesure la durée entre le début de l'onde P et le début de l'onde Q ou de R. sa durée est comprise entre 120 et 180ms. La phase de repolarisation ST-T est beaucoup plus longue (300-400ms) que la phase de dépolarisation ventriculaire 85-95ms.
- La phase de repolarisation auriculaire n'apparaît pas sur l'ECG car elle est noyée dans le complexe QRS.

#### **III-1-4 Fréquence d'enregistrement du signal ECG**

Dans la plupart des systèmes d'acquisition d'ECG, le signal est enregistré à des fréquences allant de 250 Hz à 500 Hz pour les enregistreurs classiques et à une fréquence de 1 KHz pour l'ECG à haute résolution. Dans notre cas on considère que la plage de fréquence du signal utile est comprise entre [0,2, 20 Hz].

#### **III-1-5 Bruit et artefacts**

##### **III-1-5-1 Influence du réseau (50HZ)**

Les principales interférences proviennent du réseau de distribution électrique et des rayonnements électromagnétiques environnant. L'influence du réseau sur le signal ECG provoque un bruit non négligeable .la valeur mesurée pour 9 mètres de câble peut montrer que le courant parasite est  $I=6$  nano-ampères (cette valeur dépend de l'environnement).

##### **III-1-5-2 Influence électromagnétique**

De multiples sources d'interférence autre que le réseau de distribution peuvent aussi perturber les signaux électro-physiologiques (ECG, EGG, etc.). En effet la

présence de champ électromagnétique due à la proximité d'émetteur (radio, TV, radar, téléphone portable, etc.) peuvent induire des courants dans le patient et les cordons.

En milieu hospitalier des générateurs hautes fréquences utilisées en électrochirurgie ou en radiologie, peuvent être source de telles perturbations.

### **III-1-5-3 Artefacts dus aux mouvements**

Les mouvements du patient sont le produit d'une activité musculaire ou respiratoire ayant pour origine une excitation électrique qui interfère avec le signal électro-physiologique. Ces mouvements peuvent aussi provoquer des variations d'impédance électrode peau. Tout cela se traduit par des fluctuations de la ligne de base (dérive de la ligne de base) qui représente un bruit de basse fréquence (environ 0 à 2Hz).

On appelle ligne de base la ligne isoélectrique du cœur, elle correspond au tracé qui serait observé sur un ECG si le cœur n'avait aucune activité électrique. Lorsque l'ECG est enregistré en milieu hospitalier, cette ligne est le plus souvent horizontale car le patient n'effectue aucun mouvement et le signal est peu perturbé par le bruit extérieur. En revanche, les enregistrements provenant du Holter (appareil portable pendant 24 heures, voir annexe), les mouvements du patient modifient les positions relatives des électrodes, de sorte que cette ligne présente un tracé ondulé. Pour l'analyse d'un enregistrement ECG, un œil exercé fait abstraction de cette ligne : elle est prise comme référence pour étudier la forme et la hauteur des différentes ondes cardiaques. Dans le cas d'un traitement automatique de l'ECG, il est impératif de la supprimer.

## **III-2 Application de la transformée en ondelettes pour le filtrage du signal ECG**

### **III-2-1 Base d'étude**

Notre base d'étude contient des signaux ECG réels appartenant à la base de données internationale MIT-BIH Arrhythmia database [11].

Ces enregistrements sont effectués sur une durée de 30 minutes, échantillonnés à une fréquence de 360 Hz avec une résolution de 12 bits. Ces signaux ont été téléchargés puis décodés et mis sous forme de fichiers.mat compréhensibles par MATLAB.

### III-2-2 Méthodes existantes pour le filtrage du signal ECG

Les méthodes les plus récentes, ont vu le jour depuis une dizaine d'années, elles sont liées à l'utilisation de l'outil informatique pour le traitement de signaux non stationnaires tels que les signaux biologiques. Ces différentes méthodes ont été regroupées en différentes catégories:

- Les filtres linéaires.
- Les filtres non linéaires.

Dans la suite de notre travail, nous nous intéresserons aux algorithmes basés sur les transformations non linéaires.

### III-2-3 Résultats expérimentaux

L'implémentation de fonctions permettant de filtrer le signal ECG en utilisant les ondelettes a été faite sous le logiciel MATLAB version 7.5.0

Deux méthodes ont été utilisées pour le filtrage du signal ECG :

- La première méthode est basée sur la transformée en ondelettes discrète avec décimation (méthode de DONOHO).
- La seconde est basée sur l'utilisation de la transformée en ondelettes discrète sans décimation.

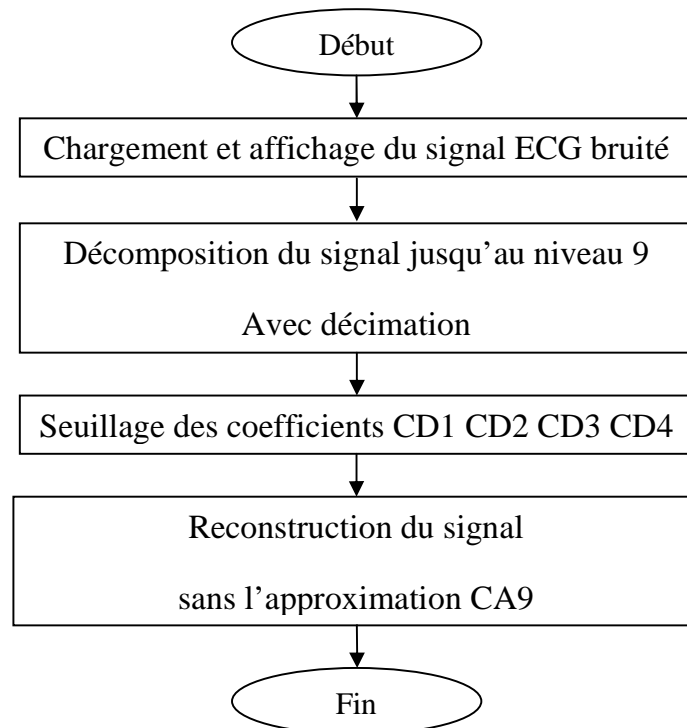
#### III-2-3-1 Filtrage par ondelettes discrète avec décimation

Les travaux récents de DONOHO [12] donnent une meilleure explication pour comprendre l'application de la transformée en ondelette. Cette méthode est basée sur un traitement non linéaire et donne de bons résultats.

La méthode de filtrage de DONOHO comprend les étapes suivantes :

- ❖ Décomposition du signal par ondelettes discrètes.
- ❖ Seuillage des coefficients.
- ❖ Reconstruction du signal à partir des coefficients modifiés.

Ces étapes sont illustrées par l'organigramme suivant :



**Figure III-2:** Organigramme de filtrage selon DONOHO.

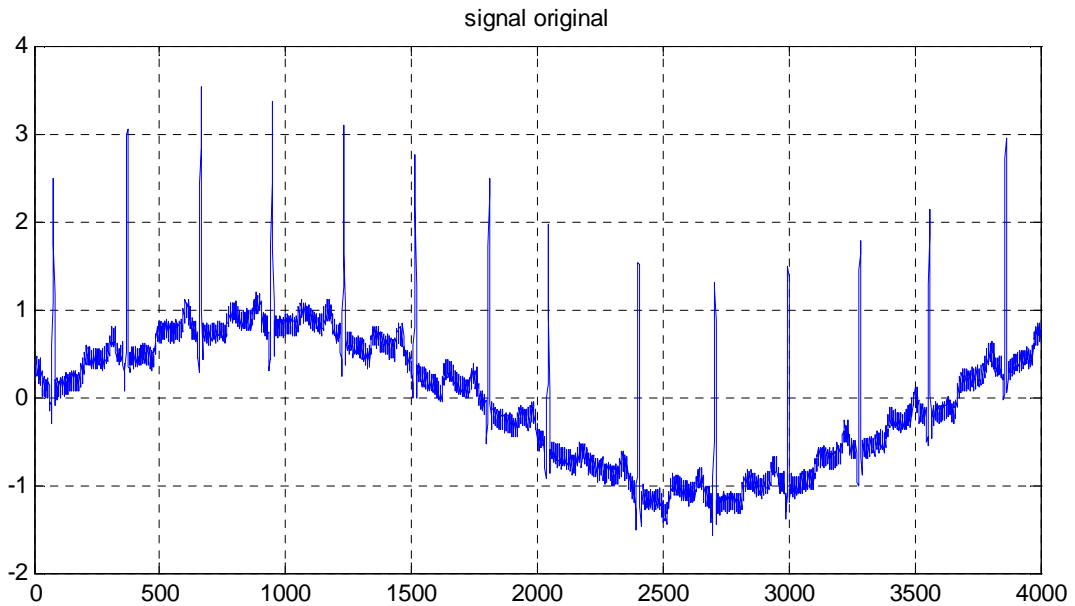
### 1- Chargement du signal original

Cette étape consiste à charger le signal ECG ( $V_b(n)$ ) bruité par un bruit  $b(n)$  sur un nombre suffisant d'échantillons en utilisant la commande « load » (voir figure III-3),

$$V_b(n) = b(n) + V(n)$$

Ou :

- $b(n)$  : bruit.
- $V(n)$  : signal utile.
- $V_b(n)$  : signal bruité.



**Figure III- 3:** Exemple de signal ECG bruité

La Figure III- 3 représente le signal ECG affecté par un bruit HF de faible amplitude et un bruit de très basse fréquence appelé couramment fluctuations de la ligne de base.

## 2- Choix de l'ondelette

Le choix de l'ondelette analysante est un problème critique dans la théorie d'ondelettes. Pour extraire des événements spécifiques dans un signal, le choix de l'ondelette est important. A partir de la littérature, nous avons sélectionné 3 ondelettes analysantes.

Si le calcul de l'erreur  $\varepsilon_{\text{ormoy}}$  est important pour procéder au choix de la meilleure ondelette analysante à appliquer dans l'analyse des signaux ECG, les caractéristiques propres du signal ECG sont aussi importantes. Ici pour distinguer laquelle des ondelettes (db4, sym4, bior3.9) qui pourrait être utilisée de façon convenable, nous avons effectué le calcul d'erreurs indiqué par la table suivante :

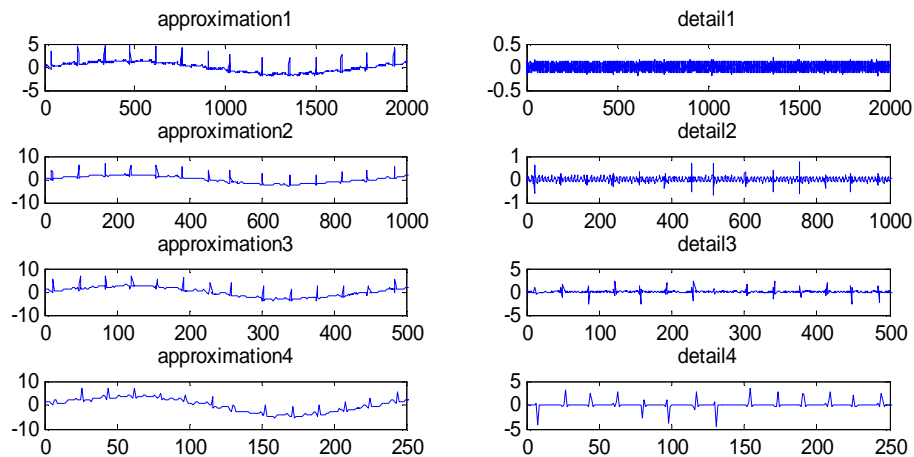
Familles d'ondelettes	Ondelettes optimales	$\epsilon_{ormoy}$
<b><i>Ondelettes orthogonales</i></b>		
Daubechies	db4	<b>0.6213 u</b>
Symlet	sym4	<b>0.6165 u</b>
<b><i>Ondelettes bi-orthogonales</i></b>		
Biorthogonale reversible	Bior3.9	<b>0.6221u</b>

**Table III-1** : Erreur calculée en utilisant différentes ondelettes

Le travail effectué ci-dessus, nous a permis de choisir l'ondelette «sym4» comme étant la plus appropriée à l'analyse du signal ECG. L'ondelette «sym4 » qui est une ondelette à support compact et à phase linéaire permet d'avoir un meilleur résultat.

### 3- Décomposition du signal original

Puisque le signal est échantillonné à 360 hertz, la plage de fréquences occupées par le signal est  $[0, 180 \text{ Hz}]$ . Au premier niveau de décomposition, le signal traverse deux filtres miroirs, passe bas  $h[n]$  et passe haut  $g[n]$  de même fréquence de coupure dont les sorties sont sous échantillonnées par deux (décimation 2). La sortie du filtre passe haut présente le premier niveau des coefficients de détails qui occupent la plage de fréquence  $[90, 180]$  hertz. La sortie du filtre passe bas (approximations) qui est également sur 2000 échantillons, couvre une bande de fréquence  $[0, 90]$  hertz. L'approximation est à son tour décomposée de la même manière (voir chapitre II). Les résultats de cette série de décompositions sont indiqués par la figure suivante.

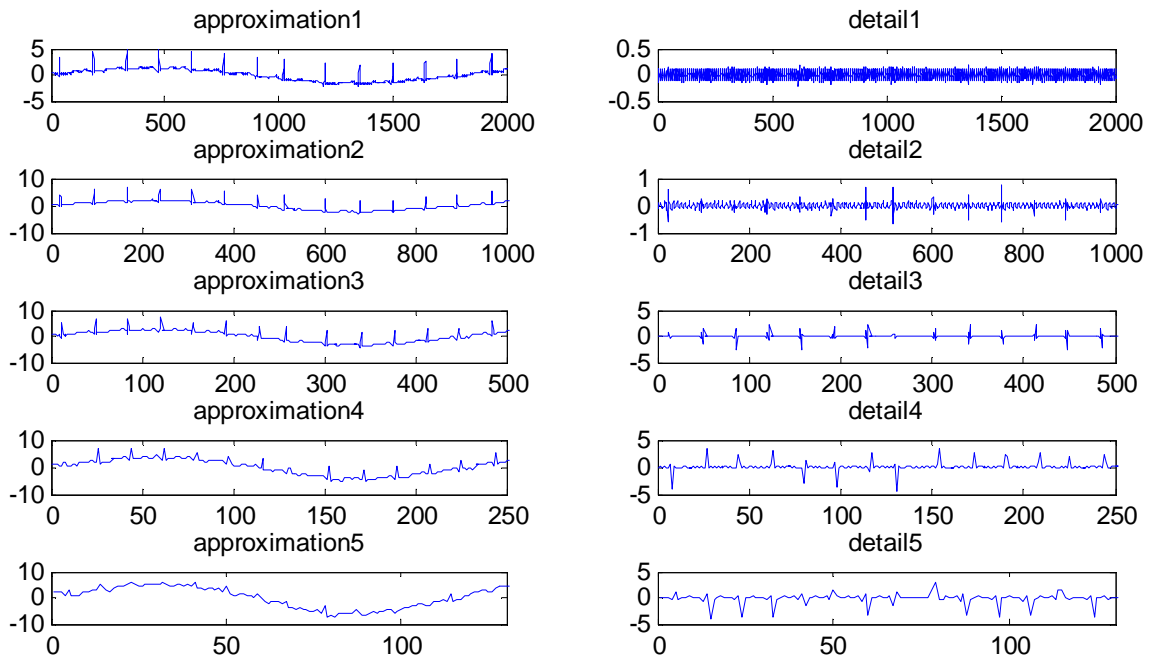


**Figure III-4 :** Décomposition du signal original sur 4 niveaux de résolution

Sur la Figure III-4 on remarque que les approximations apparaissent de moins en moins bruitées, les informations hautes fréquences apparaissent surtout dans les détails cD1 et cD2 qui contiennent les petites impulsions correspondant aux bruits de hautes fréquences.

### Remarque

L'analyse de ce type de signaux ne nécessite pas d'aller loin dans les échelles de décompositions, puisque le signal biologique est de basses fréquences et que la fréquence d'échantillonnage n'est pas très élevée. Nous remarquons sur la figure III-5 que le coefficient d'ondelette cA5 ne donne aucune information supplémentaire part apport au coefficient cA4, de même le détail cD5 ne donne plus d'information haute fréquence (par rapport à la fréquence du bruit).



**Figure III-4 :** Décomposition du signal original sur 5 niveaux de résolution

#### 4- Seuillage des coefficients

Les techniques traditionnelles de filtrage réalisent un seuillage des coefficients d'ondelettes en remplaçant par des zéros les valeurs des coefficients inférieures au seuil choisi. DONOHO et JOHNSTONE ont proposé deux types de fonctions .Le seuillage dur et le seuillage doux :

##### a- Le seuillage dur

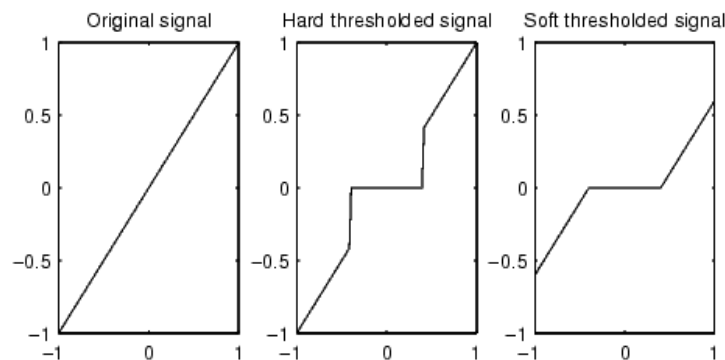
Le principe de seuillage dur est de fixer un seuil  $T > 0$  , si la valeur absolue d'un coefficient d'ondelette donné  $X$  est supérieure à  $T$ , on garde ce coefficient tel qu'il est. Sinon on le met zéro.

$$X = \begin{cases} X & \text{si } |x| \geq T \\ 0 & \text{si } |x| < T \end{cases}$$

### b- Le seuillage doux

Le seuillage doux est pareil au seuillage dur sauf qu'il diminue de  $T$  la valeur des coefficients bruités se trouvant au-dessous du seuil :

$$X = \begin{cases} X-T & \text{si } X \geq T \\ X+T & \text{si } X \leq -T \\ 0 & \text{si } -T < X < T \end{cases}$$



**Figure III-6 :** Illustration du seuillage dur et doux.

Généralement on prend  $T = \sigma\sqrt{2\log(N)}$  ou  $\sigma^2$  est l'estimation de la variance du bruit et  $N$  le nombre de coefficients d'ondelette.

Dans le cas d'un bruit blanc et Gaussien, l'écart type du bruit contenu dans tous les sous-signaux de détail est constant. Donc une seule estimation faite sur le sous-signal de détails après la première itération est suffisante. Dans le cas du bruit corrélé (comme dans notre cas) cette estimation doit être corrigée à chaque itération. En conséquence, pour estimer le niveau de bruit, un estimateur de l'écart type d'une variable aléatoire Gaussienne peut être utilisé.

En MATLAB il y en a deux estimateurs, l'estimateur STD (standard déviation) et l'estimateur MAD (Median Absolute Deviation). Dans cette méthode de filtrage, David DONOHO a conseillé l'utilisation de l'estimateur MAD, la valeur du seuil  $T$  est choisie en fonction du niveau du bruit et de la longueur  $N$  du vecteur à analyser.

$$T_i = \sigma_i \sqrt{2 \log(N_i)} \quad (\text{III. 1})$$

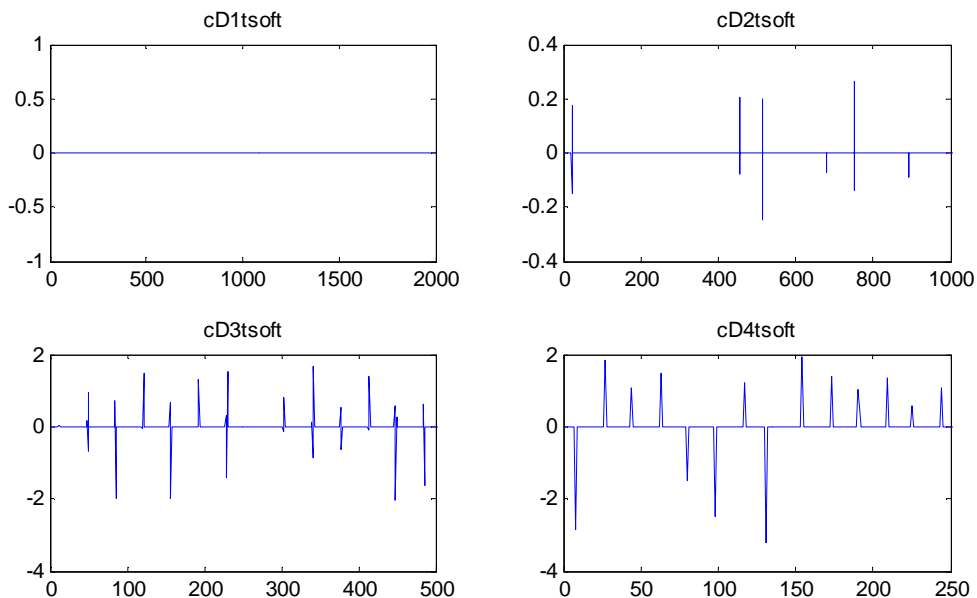
$$\sigma_i = \frac{\text{MAD}(cD_i)}{0,6745} \quad (\text{III. 2})$$

Ou :

- $T_i$ : seuil calculé pour chaque niveau.
- $N_i$  : nombre d'échantillons dans le niveau  $i$ .
- $\sigma_i$  : Niveau du bruit estimé dans chaque niveau.
- $\text{MAD}(cD_i)$ : Moyenne absolue de déviation de chaque valeur des coefficients  $cD_i$ .

Dans notre cas  $cD_i$  est un vecteur alors :

$$\text{MAD} = \text{moy}|cD_i - \text{moy}(cD_i)| \quad (\text{III. 3})$$



**Figure III-7:** Détails obtenus après le seuillage.

La figure III-7 montre que le seuil est calculé pour les quatre premiers niveaux de détails (cD1, cD2, cD3, cD4), On utilise alors un seuil différent pour chaque niveau de résolution. En dessous du seuil, les coefficients d'ondelettes sont annulés car ils correspondent à du bruit et on ne conserve que les coefficients les plus élevés qui contiennent l'information sur le signal.

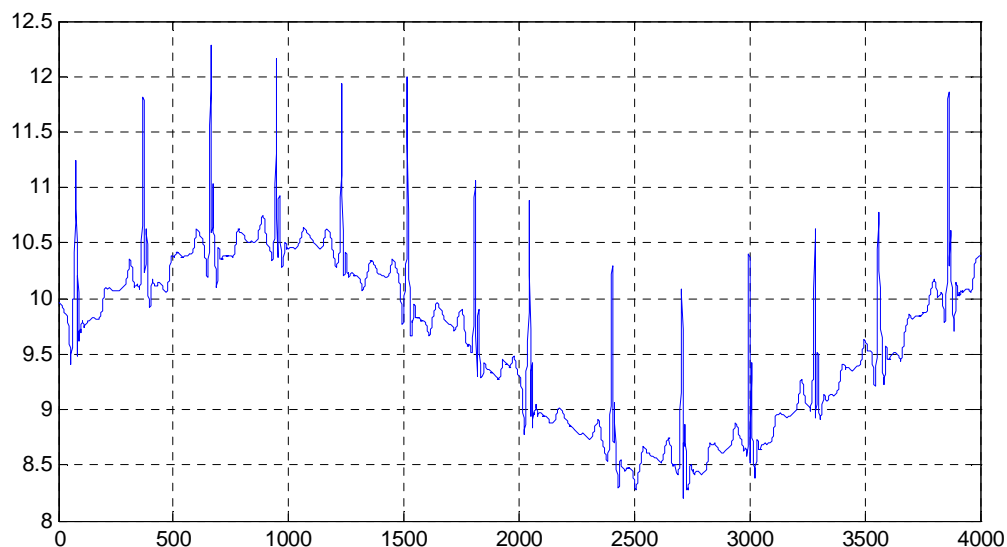
Le seuillage utilisé est le seuillage doux qui permet de réduire les coefficients de détails du signal bruité.

Cette méthode de seuillage permet d'annuler les petites amplitudes des coefficients qui correspondent aux bruits blanc additifs gaussiens ainsi que les petits bruits qui peuvent se chevaucher avec le signal utile (bruit corrélé). L'efficacité de cette méthode est assurée grâce à la propriété de localisation et de concentration de la T.O.D.

### 5- Reconstruction

Après avoir mis à zéro les détails de valeur inférieure au seuil choisi, on passe à la reconstruction du signal à partir des coefficients d'ondelette modifiés. La procédure de la reconstruction est identique à celle de la décomposition, mais en agissant dans le sens contraire, en remplaçant la décimation par l'interpolation.

La reconstruction se fait par la transformation en ondelette inverse IDWT.



**Figure III-8** : signal reconstruit après élimination du bruit HF.

## 6- Suppression de la ligne de base

Un autre phénomène qui peut influencer sur l'interprétation de l'ECG est celui des fluctuations de la ligne de base figure III-8. Rencontrée souvent dans les enregistrements, une dérive peut importante n'est pas préjudiciable quant à la qualité de la segmentation et de l'interprétation, en revanche, une forte dérive de la ligne de base peut donner à celle-ci des valeurs prises habituellement par un QRS.

Nous utilisons également la décomposition en ondelette pour corriger cette dérive.

Sachant que les ondulations de la ligne de base provenant principalement du mouvement respiratoires ont une fréquence avoisinant les 0,2 Hz, le niveau de décomposition approprié est donnée par formule suivante :

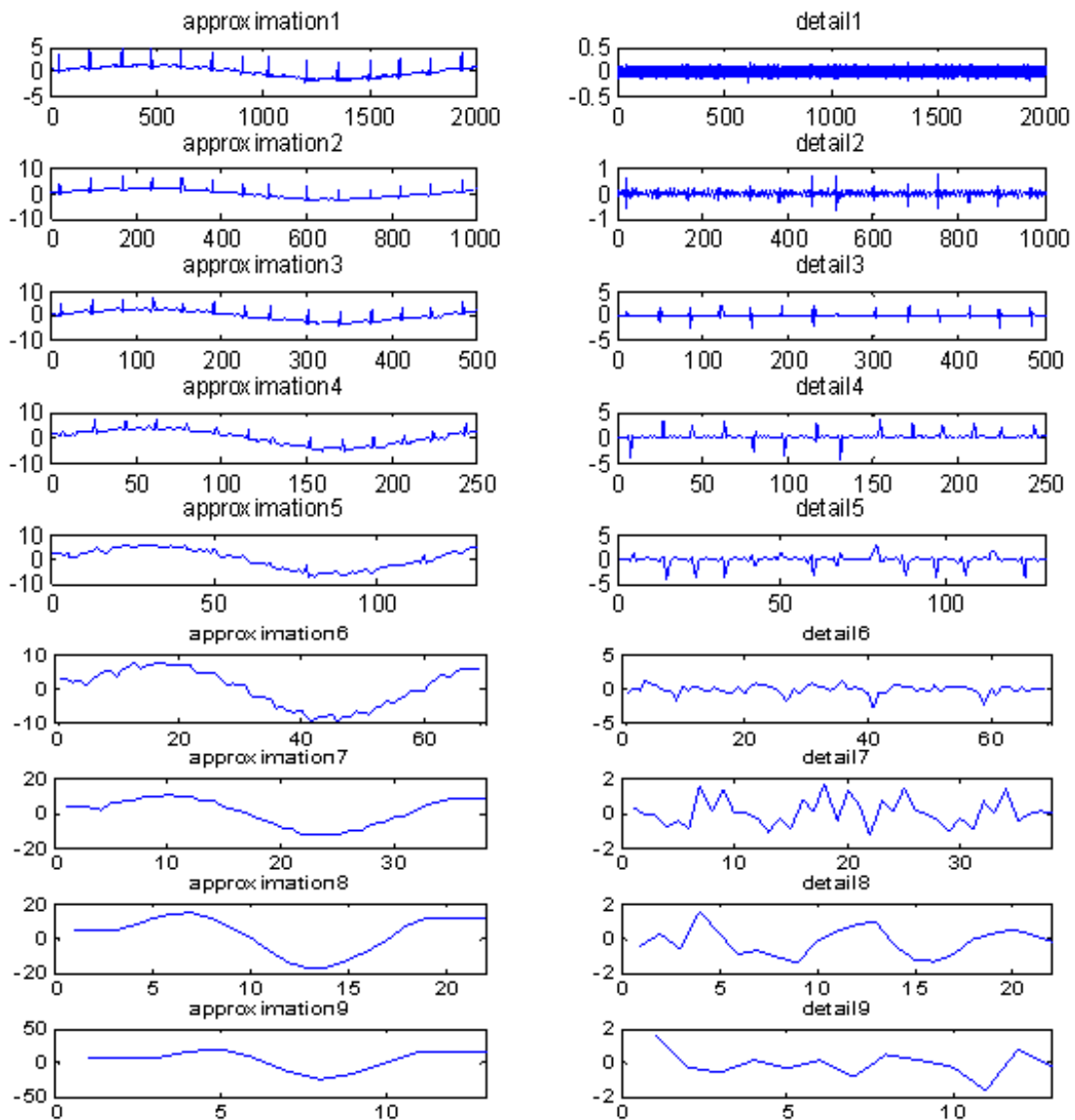
$$f_j = \frac{F_e}{2^{j+1}} \quad (\text{III. 4})$$

$F_e$  : fréquence d'échantillonnage du signal original.

$F_j$  : fréquence au niveau.

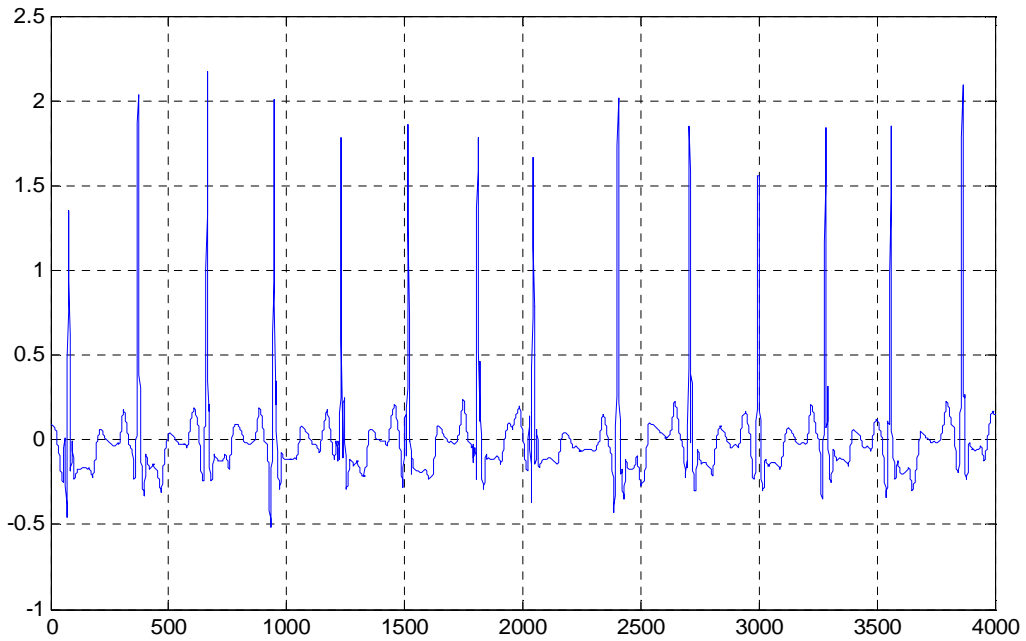
$j$ :niveau de décomposition.

La décomposition jusqu'au niveau 9 est illustré par la figure suivante :

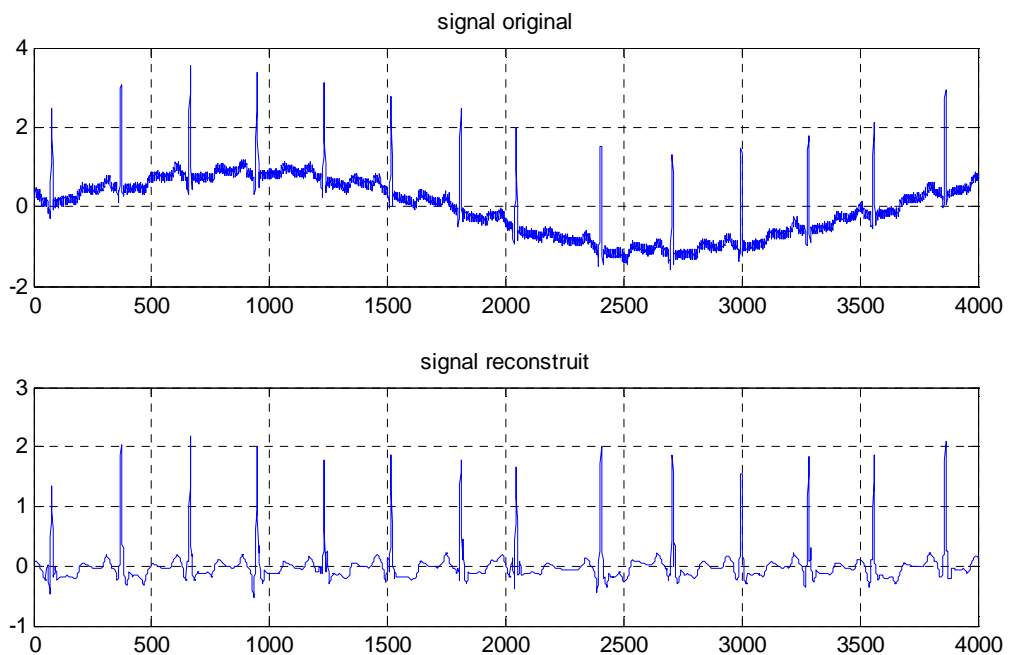


**Figure III-9:** Décomposition du signal sur 9 niveaux de résolution.

Pour supprimer cette ligne de base il faut annuler l'approximation cA9 qui correspond à plage de fréquence  $[0, 0,3 \text{ Hz}]$ . Puis reconstruire le signal avec tous les coefficients modifiés (voir figure III-10 et figure III-11).



**Figure III-10** : signal reconstruit après élimination de la ligne de base.



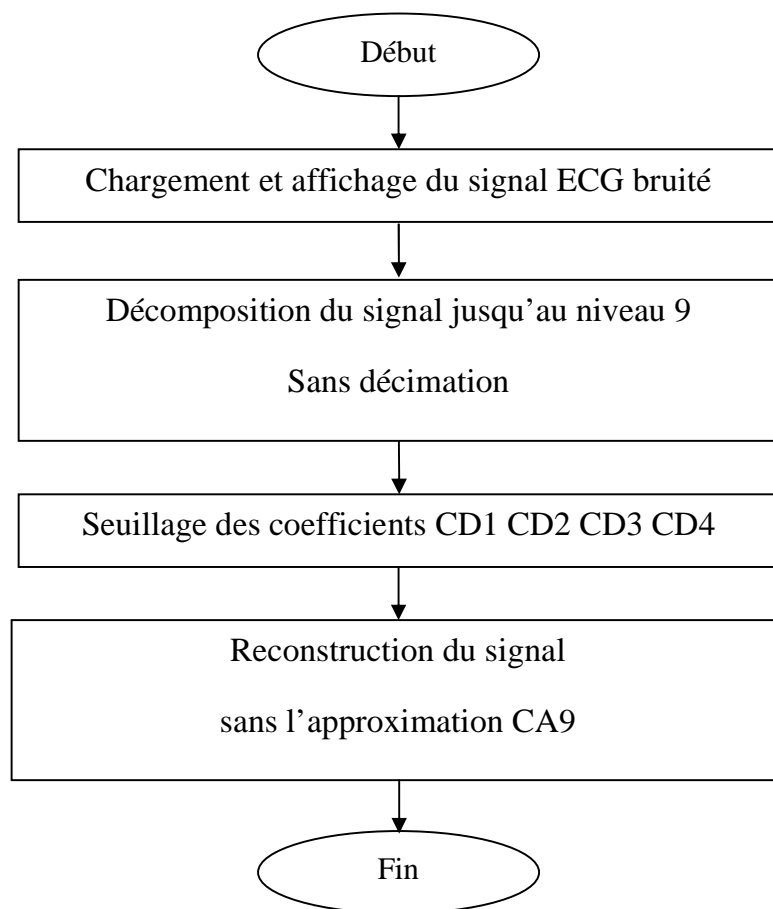
**Figure III-11** : illustration du signal original et du signal filtré.

Le signal du haut représente le signal original, celui du bas représente le signal filtré.

**III-2-3-2 Filtrage par ondelettes discrète sans décimation.**

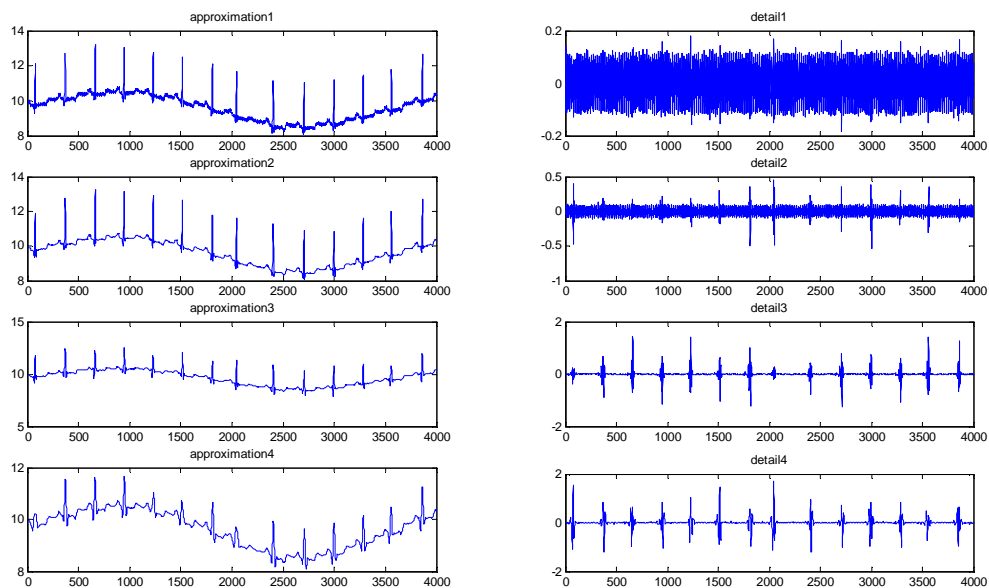
Dans ce qui suit, nous présentons une autre méthode de filtrage par ondelette.

La méthode de filtrage par ondelette discrète sans décimation est caractérisée par sa simplicité et sa rapidité d'exécution. La figure suivante représente l'organigramme de cette méthode.



**Figure III-12 :** Organigramme de filtrage sans décimation.

## 1- Décomposition et seuillage

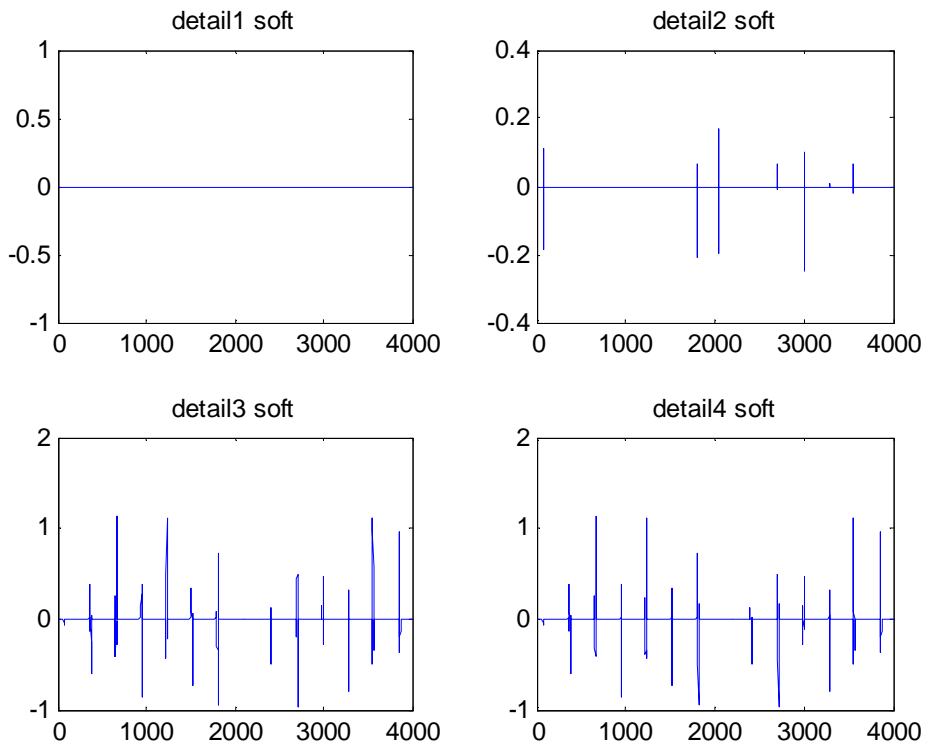


**Figure III-13 :** Décomposition du signal original en 5 niveaux sans décimation.

Dans cette méthode la décomposition est réalisée à l'aide de la fonction « wavedec » qui permet de garder le même nombre d'échantillons quelque soit le niveau de résolution (voir Figure III-13)

L'absence de décimation, permet une connaissance de tous les coefficients d'ondelettes, qui ne sont certes pas nécessaires pour une reconstruction parfaite, mais qui contiennent des informations intéressantes pour le filtrage. Elle présente ainsi l'intérêt de conserver toutes les projections orthogonales, si les filtres employés sont associés à une analyse multirésolution orthogonale. Afin de conserver ces projections orthogonales, l'algorithme à trous [7] utilise la décomposition avec des filtres miroirs en quadrature.

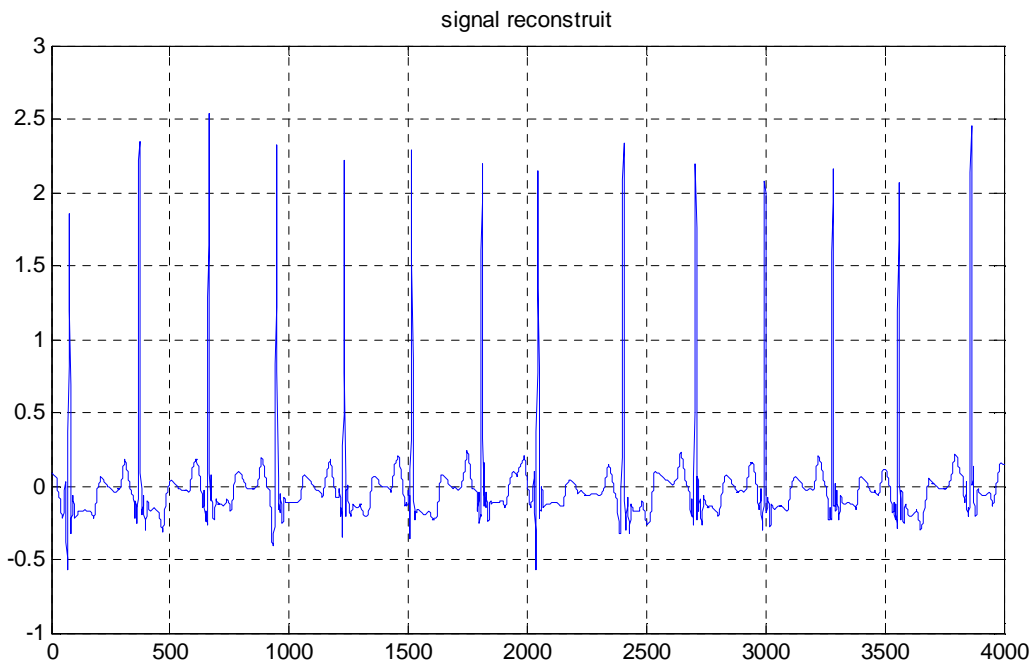
Cet algorithme réalise un filtrage du signal ECG par une transformée en ondelettes non décimée, améliorant ainsi les résultats obtenus par la première méthode. En effet, le seuillage d'une décomposition non décimée est le même que dans la décomposition décimée.



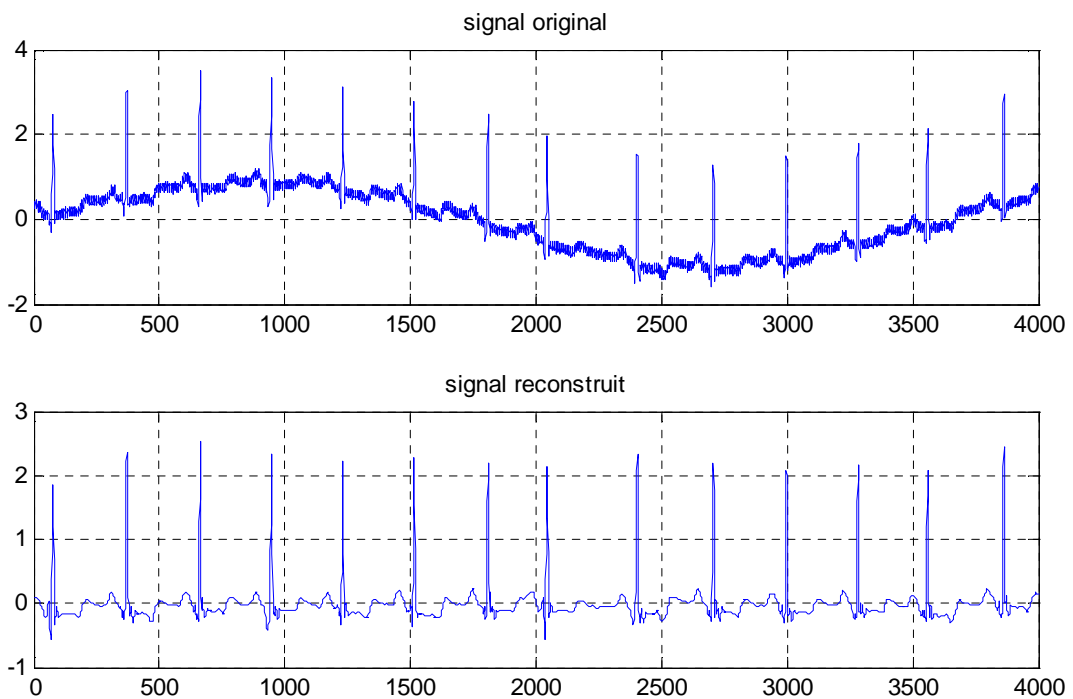
**Figure III-14 :** Détails obtenus après le seuillage.

## 2- Reconstruction

La figure III-15 représente le signal ECG filtré. Nous constatons que le bruit est supprimé, donnant ainsi une ligne de base nulle, tandis que la forme du signal utile est parfaitement préservée. La reconstruction du signal est réalisée à l'aide de la fonction « waverec ».



**Figure III-15 :** signal reconstruit après élimination de la ligne de base.



**Figure III-16 :** Illustration du signal original et le signal filtré.

### III-2-3-3 Comparaison entre les deux méthodes

Le signal est décomposé en 4 niveaux de résolution, ce qui correspond à un filtrage sur une plage de fréquences allant de 0 jusqu'à 180 Hz (la fréquence d'échantillonnage est de 360 Hz). En utilisant la connaissance à priori que nous avons sur l'ECG, nous choisissons de conserver l'intégralité du signal situé en dessous de 17 Hz. Dans un souci de comparaison, nous avons appliqué deux méthodes de filtrage, dont nous présentons les résultats sur la table III-2. Celle proposée par DONOHO dans le cas d'un bruit blanc gaussien avec décimation, ne filtre pas suffisamment le signal. La méthode sans décimation, pour le cas du bruit corrélé, est mieux adaptée à l'ECG.

Afin de mieux comparer les deux méthodes, le rapport signal sur bruit (RSB) est calculé pour vérifier l'amélioration du signal reconstruit dans chaque cas.

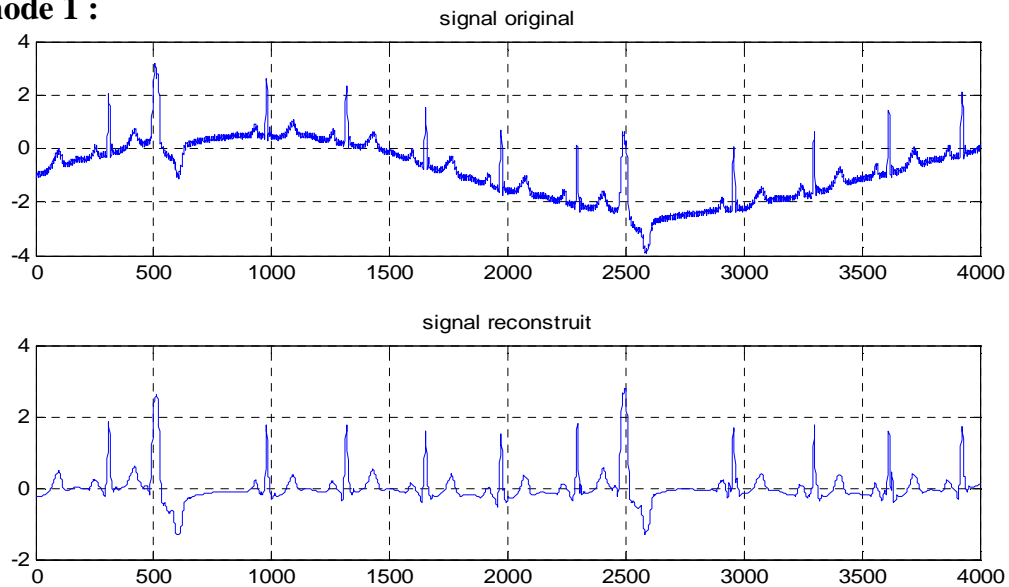
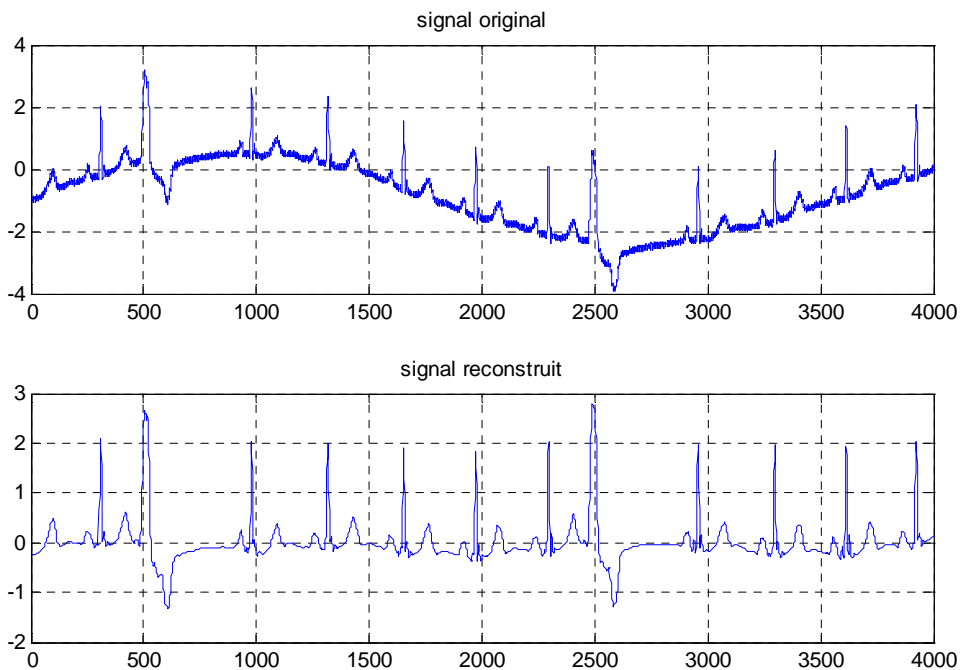
$$RSB = \log_{10} \frac{\sum_{n=0}^N V_R^2(n)}{\sum_{n=0}^N S_R^2(n)} \quad (\text{III. 5})$$

$$S_R(n) = \sum_{n=0}^N V_b(n) - V_R(n) \quad (\text{III. 6})$$

- $V_R(n)$  : Signal reconstruit.
- $S_R(n)$  : Déformation du signal ECG reconstruit.

Rapport signal/bruit	Méthode 1	Méthode 2
RSB (db)	-0.8373	-0.7103

**Tableau III- 2** : Résultat du rapport signal/bruit pour chaque méthode.

**Exemples d'applications des méthodes sur d'autres signaux ECG****1- signal ECG présentant une anomalie****Méthode 1 :****Figure III-17 :** illustration du signal original et du signal filtré.**Méthode 2****Figure III-18:** illustration du signal original et du signal filtré.

## 2- Signal ECG fortement bruité

### Méthode1

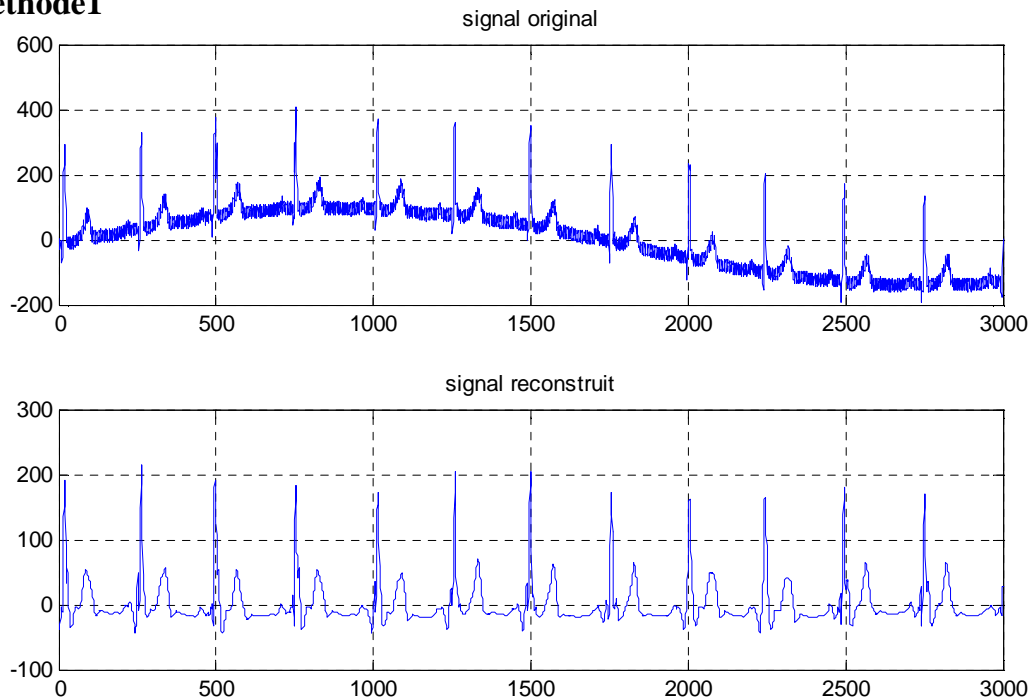


Figure III-19 : illustration du signal original et du signal filtré.

### Méthode 2

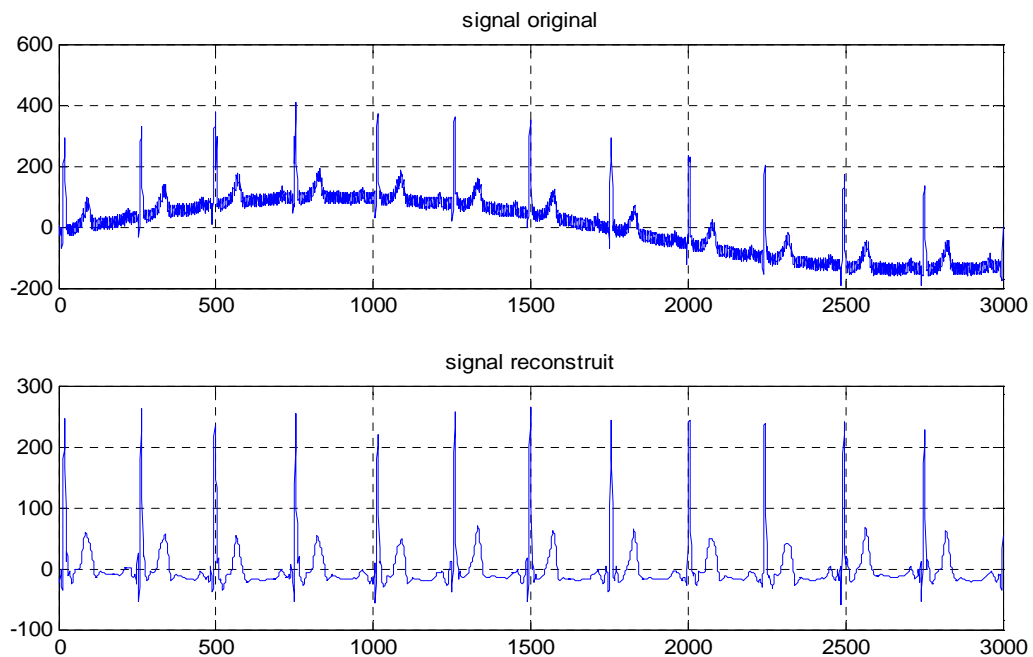


Figure III-20 : illustration du signal original et du signal filtré.

### 3- Résultats expérimentaux

Rapport signal/bruit	Méthode 1	Méthode 2
RSB1 (db)	-0.9262	-0.9014
RSB2 (db)	-0.8598	-0.7235

**Tableau III- 3** : Résultat du rapport signal/bruit pour chaque méthode.

D'après les résultats du rapport signal sur bruit qui est donné par la table III-3, la méthode 2 c'est à dire celle qui n'applique pas la décimation donne toujours un meilleur filtrage pour le cas des signaux ECG bruités.

#### Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exploité la transformée en ondelette pour le traitement numérique d'un signal physiologique (ECG).

Nous avons filtré le signal ECG par ondelette puis comparé les résultats obtenu par les deux méthodes utilisées.

Nous avons obtenu un filtrage de haute qualité (la forme du signal utile est bien conservée et le bruit entièrement éliminé). La méthode de filtrage sans décimation est très efficace. En effet, il y'a un grand nombre de paramètres qui peuvent améliorer la qualité de filtrage : les ondelettes utilisées, le type de transformée utilisé, l'estimateur utilisé, le seuillage utilisé.

Ce travail nous a permis de nous familiariser avec un nouvel outil de traitement numérique du signal, la transformée en ondelettes et de l'appliquer à un exemple de signaux biologique (l'ECG). L'avantage des ondelettes est de travailler en sous bandes avec possibilité de séparer les composantes du bruit des composantes du signal utile. La méthodologie adoptée dans le cadre de ce travail consiste à seuiller les coefficients d'ondelettes sur chaque niveau de résolution, en procédant chaque fois à la suppression du bruit puis à la reconstitution du signal.

Dans notre application, nous nous sommes intéressés au traitement du signal ECG altéré par un bruit HF avec dérives de la ligne de base causées par les mouvements et la respiration du patient. Un premier traitement consiste à éliminer le bruit HF en utilisant deux algorithmes (algorithme de S. Mallat et algorithme à trous) en vue d'une comparaison.

Ce travail s'ouvre sur plusieurs perspectives qui pourraient améliorer la qualité du filtrage de l'ECG et de signaux biologiques d'une manière générale :

- Utilisation de la décomposition du signal par paquet d'ondelettes.
- Amélioration de la qualité du seuillage.

Nous espérons que ce travail sera amélioré par des étudiants des promotions à venir.

➤ **Rappels :**

**Définition de la Transformée en Z :**

La transformée en z peut être considérée comme une généralisation de la transformation de Fourier à laquelle elle peut s'identifier dans un cas particulier.

La transformée en z constitue l'outil privilégié pour l'étude des systèmes discrets. Elle joue un rôle équivalent à celui de la transformée de Laplace.

Par exemple, la transformée en z permet de représenter un signal possédant une infinité d'échantillons par un ensemble fini de nombre.

Soit un signal discret  $x(n)$ . La transformée en Z (bilatérale) est définie par :

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

Où  $z$  est une variable complexe et  $X(z)$  est une fonction complexe de la variable  $z$ .

**Lien avec la transformée de Fourier :**

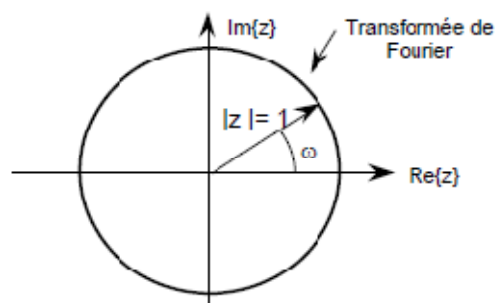
Soit :  $z = r e^{j\omega}$

$$X(Z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) (re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) r^{-n} e^{-j\omega n}$$

$$\text{Pour } |r| = 1, X(Z) = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) e^{-j\omega n}$$

Donc, la transformée de Fourier est une transformée de Z pour lequel  $|Z| = 1$ .

On peut trouver la transformée de Fourier sur l'anneau  $|Z| = 1$



### ➤ **Principe d'incertitude de Heisenberg**

Le principe d'incertitude de Heisenberg vient de la mécanique quantique, mais il joue un rôle important dans la théorie du traitement du signal car il donne une limite à la précision de la localisation dans différentes représentations d'un signal. Ainsi le principe nous dit que l'énergie d'un signal et celle de sa transformée de Fourier ne peuvent être localisées avec une précision arbitraire. De façon plus simple, on peut dire qu'il y a toujours une incertitude sur les mesures en temps et en fréquence d'un signal. Le théorème démontre que :

$$\sigma_t^2 \sigma_w^2 \geq \frac{1}{4}$$

Ou  $\sigma^2$  désigne la variance, c'est à dire la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne.

### ➤ **Histoire des ondelettes :**

La première transformation en ondelette (le nom n'est pas encore utilisé) est proposée par HAAR en 1910, il serait plus judicieux de parler alors de « paléo-ondelette ». La transformée en ondelettes est un outil qui découpe les données, les fonctions ou les opérateurs en composante fréquentielles suivant une résolution adaptée à l'échelle.

Les précurseurs conscients de cette technique ont été des mathématiciens (Kalderon 1964), des physiciens (Alsaken et Klauder en 1968, Paul 1985), et surtout des ingénieurs de recherche comme Esteban et Galand (1977), Smith et Barnwell(1986), Vetterli(1986), dans leur cas on parle de «pré-ondelette».

Le premier à avoir utilisé la méthode et avoir proposé le nom ondelettes fut Jean Morlet en 1983. Le problème traité par Morlet était celui de l'analyse de données issues de sondage sismiques effectués pour des recherches géologiques, ces données faites de nombreux transitoires sont particulièrement adaptées à l'analyse conservant la notion de localisation de l'événement tout en fournissant une information sur son contenu fréquentiel ce qui est tout l'intérêt de ce type de transformation. Les résultats obtenus par Morlet et par le physicien Alex Grossmann ont rapidement éveillé l'attention de nombreux chercheurs et bien des

bases mathématiques solides ont été mises en place faisant apparaître la notion de base orthogonale (Y.Myer 1985), d'analyse multirésolution (S.Mallat 1989) et d'ondelettes à support compact (I.Daubéchies 1988).

Les recherches tant théoriques qu'appliquées se sont très largement développées ces dernières années. On compte actuellement des un volume annuelle de plusieurs centaines de publications sur le sujet et une bonne dizaine de congrès internationaux lui sont consacrés.

➤ **Bases orthonormées et analyse multirésolution :**

**Axiomatique de base :**

**Espace d'approximation :**

Nous nous plaçant dans l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  des fonctions continue d'une variable réelle et de carré intégrable. Une analyse à la résolution  $j$  de la fonction  $f$  sera obtenue par action d'un opérateur linéaire  $A_j$  sur  $f$ , tel que :

$$A_j f \in V_j$$

$V_j$  étant un sous espace de  $L^2$ ,  $A_j$  sera un projecteur (idempotent).

On construira une analyse mutiresolution à l'aide de de sous espace  $V_j$  emboîtés les un dans les autres, tel que le passage de l'un à l'autre soit le resultat d'un changement d'échelle (zoom).

Par exemple, dans le cas dyadique on aura :

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{j+1}$$

Ce qui concerne une dilatation d'un facteur de 2. L'espace  $V_{j+1}$  contient des signaux plus grossiers que l'espace  $V_j$  et il est clair que :

$$V_{j+1} \in V_j$$

L'axiomatique correspondante peut s'exprimer comme suit :

Soit un ensemble de sous espace de  $L^2$  tel que :

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{j-1} \subset \dots \subset V_{j+1} \subset V_j \subset$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

$$\forall j \in \mathbb{Z} \text{ si } f(x) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{j+1} \text{ (ou } f\left(\frac{x}{2^j}\right) \in V_0)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \text{ si } f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x - k) \in V_0 \text{ (invariance par translation)}$$

Cet ensemble définit une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ .

➤ **Espace des détails :**

L'espace des détails vient compléter l'analyse.

On peut définir pour chaque  $V_j$  son complément orthogonal  $W_j$  dans  $V_{j-1}$  tel que :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$$

Comme  $W_{j-1}$  est orthogonal  $V_{j-1}$ , alors  $W_{j-1}$  sera orthogonal à  $W_j$ ; cette propriété s'écrit :

$$\forall j, k \neq j \text{ alors } V_j \perp W_j$$

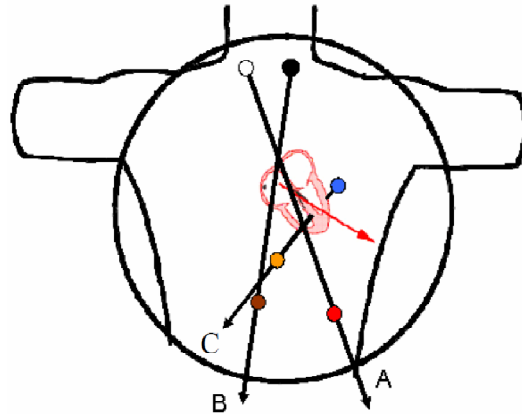
Les sous espaces  $W_j$  ne forme pas une famille d'espace emboîtée, mais les propriétés d'échelle et d'invariance par translation sont conservées.

Dans ces conditions, on peut montrer qu'il existe une fonction appelée ondelette qui par dilatations et translations engendre une base orthonormée des  $W_j$  et donc de  $L^2$ .

**Enregistrement d'un ECG 3 voies :**

L'électrocardiogramme (ECG) mesure l'activité électrique du cœur par l'emploi d'électrodes externes mises au contact de la peau. L'activité mesurée rend compte de

l'activité cardiaque.



L'axe électrique du cœur suit la flèche rouge, les axes mesurés (A, B et C) donnent des informations complémentaires qui permettent de déduire le comportement électrique qui sous-tend les battements. Les voies A et B sont mesurées par des électrodes placées au niveau de la base du cou, respectivement à droite et à gauche et sur la dernière côte, respectivement à gauche et à droite, la voie C par deux électrodes placées l'une dans le dos et l'autre sur le bord d'une côte gauche à l'horizontale de l'électrode dorsale.

Il existe plusieurs types d'enregistrement de l'ECG, ce dernier est appelée enregistrement Holter, il utilise en général deux ou trois de ces voies (A, B ou A, B, C).

### **Holter :**

L'objectif de cet appareil, qui porte le nom de son inventeur, est de recueillir et d'analyser des paramètres physiologique chez un patient sur 24H.

### **Conditions d'enregistrement :**

Les ondes caractérisant le signal ECG doivent apparaitre le plus nettement possibles sur le tracé, pour un enregistrement de bonne qualité et sans trop de bruit, le respect de certaines conditions est nécessaire.

Le patient doit être en position couche et relaxe, il doit être également protégé du froid et cela pour éviter la contraction musculaires qui se traduit par des ondes qui viennent s'ajouter au signal utile, et qui sont considéré comme du bruit.

Le bruit HF généralement d'amplitude réduite sont visible sur la ligne isoélectrique.

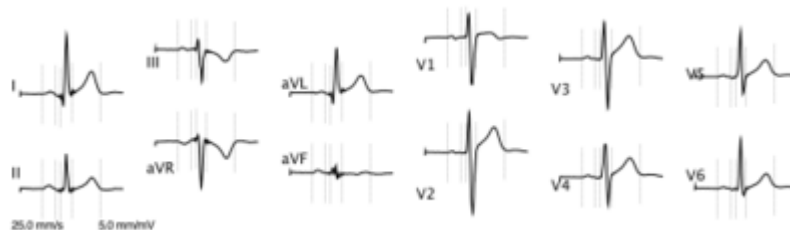
La ligne isoélectrique peut subir :

Des ondulations du au mauvais contact électrode-peau qui avec la respiration fait varier la pression d'application des électrodes.

Des parasites du a la contraction musculaire ou a des ondulations du courant alternatif provenant du réseau électrique avoisinant les appareils de mesures.

### **Les douze dérivations :**

L'ECG à 12 dérivations a été standardisé par une convention internationale. Elles permettent d'avoir une idée tridimensionnelle de l'activité électrique du cœur.



L'ECG à 12 dérivations qui comporte six dérivations frontales (DI DII DIII aVR aVL et aVF) et six dérivations précordiales (V1 à V6).

### **Six dérivations frontales :**

- DI : mesure bipolaire entre bras droit et bras gauche.
- DII : mesure bipolaire entre bras droit et jambe gauche.
- DIII : mesure bipolaire entre bras gauche et jambe gauche.
- La lettre D pour dérivation n'est pas en usage dans les pays anglo-saxons qui les appellent tout simplement I, II et III
- aVR : mesure unipolaire sur le bras droit.
- aVL : mesure unipolaire sur le bras gauche.
- aVF : mesure unipolaire sur la jambe gauche.

La lettre **a** signifie "augmentée"

DI, DII, et DIII décrivent le triangle d'Einthoven, et on peut calculer la valeur de toutes ces dérivations à partir du signal de deux d'entre elles. Par exemple, si on connaît les valeurs de (DI) et (DII) : Enoncé de la théorie d'Einthoven : le cœur se trouve au centre d'un triangle équilatéral formé par les membres supérieurs et la racine de la cuisse gauche.

- $III = II - I$
- $aVF = II - I / 2$
- $aVR = -I / 2 - II / 2$
- $aVL = I - II / 2$

Ces équations expliquent que les électrocardiogrammes numériques n'enregistrent plus en réalité que 2 dérivations et restituent les 4 autres à partir de celles-ci par simple calcul.

#### **Six dérivations précordiales :**

- V1 : 4e espace intercostal droit, bord droit du sternum (parasternal).
- V2 : 4e espace intercostal gauche, bord gauche du sternum (parasternal).
- V3 à mi-chemin entre V2 et V4.
- V4 : 5<sup>e</sup> espace intercostal gauche, sur la ligne médioclaviculaire.
- V5 : même horizontale que V4, ligne axillaire antérieure.
- V6 : même horizontale que V4, ligne axillaire moyenne.

## **BIBLIOGRAPHIE**

[1] **André Quinquis** « traitement du signal sous MATLAB pratique et application », Collection traitement du signal, HERMES

[2] **M. BEDOUHENE, K.TABANI** « les méthodes de débruitage du signal de parole », Mémoire d'ingénieur en électronique UMMTO 2007/2008.

[3] **T. ALANI**, «Introduction aux ondelettes (wavelets)», 2008.

<http://www.esiee.fr/~alanit>

[4] **Frédéric Truchetet** « Ondelettes pour le signal numérique » collection traitement du signal. Editions HERMES.

[5] **S. MALLAT** « Une exploration des signaux en ondelettes » Editions de l'école polytechnique, Novembre 2000.

[6] **I. MERAKEB** « Méthodes des Ondelettes Dans Le Diagnostic Des Machines Tournantes », Mémoire d'ingénieur en Génie Mécanique UMMTO 2006/2007.

[7] **R. Hamoume** « Traitement de signaux non stationnaire par la transformée en ondelette », Mémoire d'ingénieur en électronique UMMTO 2000/2001.

[8] **S. M. Debbal et al.** « Choix de l'ondelette analysante et classification des signaux Phonocardiogrammes en fonction des souffles surajoutés », Afrique SCIENCE 2005

[9] **A. TABTI** « filtrage de signaux cardiaques par la transformée en ondelettes ». Mémoire d'ingénieur en électronique UMMTO 2001/2002

[10] **D. BENATIA et al.** « Analyse et traitement du signal electrocardiographique (ECG) par la transformée en ondelettes », Rapport annuel de projet de recherche 2007

[11] <http://physionet.org/physiobank/database/mitdb/>

[12] **A. Mikhled**, « ECG Signal Denoising By Wavelet Transform Thresholding», American Journal of Applied Sciences, 2008

[www.wavetour.com](http://www.wavetour.com)

[www.mathwork.com](http://www.mathwork.com)

[www.ondelette.com](http://www.ondelette.com)