

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI DE TIZI-OUZOU



FACULTÉ DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

## Mémoire de Fin d'Études de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies  
Filière : Électrotechnique  
Spécialité : **Machines Electriques**

*Présenté par*

**Abdelkader Igheroussene**

Thème

### **Modélisation électromagnétique par éléments finis et calcul des performances d'un moteur asynchrone à rotor massif.**

*Mémoire soutenu publiquement le 01 / 07 / 2024 devant le jury composé de :*

**M Chafik Birouche**

MAA, UMMTO, Président

**M Mustapha Bouheraoua**

Professeur, UMMTO, Encadrant

**M Arezki Diche**

MAA, Lieu d'exercice, , Examineur

# REMERCIEMENT

JE TIENS PROFONDÉMENT À REMERCIER TOUT  
D'ABORD ALLAH LE TOUT  
PUISSANCE DE M'AVOIR DONNÉ LE COURAGE ET  
LA PATIENCE POUR RÉALISER CE  
MODESTE TRAVAIL SANS OUBLIER MES CHERS  
PARENTS QUI ONT TOUJOURS ÉTÉ LÀ POUR MOI  
ET MON TOUJOURS SOUTENUE TOUT AU LONG DE  
MA VIE.

JE TIENS À REMERCIER TRÈS VIVEMENT MR  
BOUHERAOUA, CHARGÉ DE COURS À  
L'UMMTO POUR RÉALISER CE MODESTE TRAVAIL  
J'ADRESSEMES VIFS REMERCIEMENT AU  
PRÉSIDENT DU JURY AINSI QU'AUX  
EXAMINATEUR POUR L'HONNEUR QU'IL ME FAIT  
EN ACCEPTANT DE JUGER CE  
TRAVAIL

ENFIN, JE REMERCIE TOUS CEUX QUI ONT  
CONTRIBUÉ DE PRÈS OU DE LOIN À  
L'ÉLABORATION DE CE TRAVAIL

# DÉDICACE

JE DÉDIE CE TRAVAIL À MES TRÈS CHERS PARENTS,  
POUR LEURS SACRIFICES ET ENCOURAGEMENTS DURANT  
TOUTES CES ANNÉES D'ÉTUDES, POUR LEURS CONSEILS ET  
ORIENTATIONS,

ET L'ENSEMBLE DE MA FAMILLE POUR LEURS APPUIS ET  
LEUR ENCOURAGEMENT,

À TOUS MES AMIS AMAYAS, YOUNES, AYOUB, MOUMOUH,  
KHALED, IRATH, SAID, RAMDANE, RACHID, BOUSSAD,  
DJIALALI, YOUVA, LAMINE, ABDELMALEK. JUGURTHA ,

À TOUT CEUX ONT QUI ONT CONTRIBUÉ DE PRÈS OU DE  
LOIN À CE TRAVAIL,

ABDELKADER

## Table des matières

|         |   |    |
|---------|---|----|
| I       | Introduction générale.....  | 1  |
| II      | CHAPITRE I : Généralités sur les machines asynchrones à rotor massif 2            |    |
| II.1    | INTRODUCTION .....  | 2  |
| II.2    | Les différents types de machines asynchrones à rotors massifs comprennent .....   | 2  |
| II.3    | Définition d'un rotor massif .....  | 4  |
| II.4    | Constitution et principe d'un moteur asynchrone.....                              | 7  |
| II.5    | Avantages et inconvénients de la machine asynchrone à rotor massif .....          | 8  |
| II.5.1  | Avantages .....   | 8  |
| II.5.2  | Inconvénients .....   | 8  |
| II.6    | CONCLUSION : .....  | 9  |
| III     | Modélisation électromagnétique du moteur asynchrone à rotor massif .....          | 10 |
| III.1   | Introduction : .....  | 10 |
| III.2   | Equations de base gouvernant le champ électromagnétique en électrotechnique ..... | 11 |
| III.2.1 | Equation de Maxwell-Faraday .....   | 12 |
| III.2.2 | Equation de Maxwell-Ampère : .....  | 12 |
| III.2.3 | Equation de Maxwell-Gauss .....   | 13 |
| III.3   | Equation de conservation de flux magnétique.....                                  | 13 |
| III.4   | Equation de continuité .....  | 14 |
| III.5   | Lois des matériaux (milieux):.....  | 14 |
| III.6   | Relations de passage .....  | 15 |
| III.7   | Condition aux limites[13].....  | 17 |
| III.7.1 | Condition aux Limites de Dirichlet.....   | 17 |
| III.7.2 | Condition aux Limites de Neumann.....   | 17 |
| III.7.3 | Condition de périodicité et anti-périodicité.....                                 | 18 |
| III.8   | Modèle magnétostatique.....   | 18 |
| III.8.1 | Equation générale de magnétostatique .....  | 18 |
| III.8.2 | Modèle magnétostatique scalaire .....   | 19 |
| III.8.3 | Modèle magnétostatique vectoriel.....   | 19 |
| III.9   | Modèle magnétodynamique.....  | 20 |
| III.9.1 | Equations générales de magnétodynamique .....                                     | 20 |
| III.9.2 | Modèle magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique <b>A</b> .....            | 21 |
| III.10  | Conclusion.....   | 22 |

|        |   |    |
|--------|---|----|
| IV     | Modèle Eléments finis sous FEMM, et calcul des performances .....                           | 23 |
| IV.1   | Introduction .....  | 23 |
| IV.2   | Présentation de la méthode des éléments finis .....   | 24 |
| IV.3   | Principe de la méthode des éléments finis .....   | 24 |
| IV.3.1 | La méthode des résidus pondérés .....   | 25 |
| IV.3.2 | La méthode viriationnelle .....   | 25 |
| IV.4   | Types d'éléments finis .....  | 26 |
| IV.4.1 | Discretisation et approximation .....   | 26 |
| IV.5   | Avantages principaux de la méthode .....  | 27 |
| IV.6   | Présentation de l'outil logiciel F.E.M.M .....  | 27 |
| IV.7   | Étapes de résolution avec F.E.M.M .....   | 29 |
| IV.8   | Calcul des performances du moteur asynchrone à rotor massif lisse en régime permanent ..... | 30 |
| o      | Déterminations des grandeurs électromagnétiques .....                                       | 31 |
| IV.8.1 | Flux embrassé par encoche et par phase .....  | 31 |
| IV.8.2 | Force électromotrice .....  | 32 |
| IV.8.3 | Pertes Joules .....   | 32 |
| IV.8.4 | Puissances .....  | 32 |
| IV.8.5 | Couple électromagnétique .....  | 33 |
| IV.8.6 | Facteur de puissance .....  | 33 |
| IV.8.7 | Rendement .....   | 33 |
| IV.9   | Identification des paramètres du circuit équivalent .....                                   | 33 |
| IV.9.1 | La réactance de magnétisation .....   | 34 |
| IV.9.2 | le courant de magnétisation .....   | 34 |
| IV.9.3 | Le courant rotorique .....  | 34 |
| IV.9.4 | La résistance rotorique .....   | 35 |
| IV.9.5 | La réactance magnétique .....   | 35 |
| IV.10  | Conclusion .....  | 36 |
| V      | Chapitre IV : Résultats théoriques et Discussion .....                                      | 37 |
| V.1    | Introduction .....  | 37 |
| V.2    | Validation du modèle éléments finis .....   | 37 |
| V.2.1  | Présentation de la machine étudiée .....  | 37 |
| V.3    | Etapes de calcul .....  | 41 |
| V.4    | Implémentation de la géométrie et du maillage .....   | 42 |

|     |                                       |    |
|-----|---------------------------------------|----|
| V.5 | Paramètres du circuit équivalent..... | 45 |
| V.6 | Conclusion .....                      | 47 |
| VI  | CONCLUSION GENERALE.....              | 48 |

## Liste des figures

**Figure I.1:** rotor massif lisse en acie

**Figure I.2 :** Coupe de la machine a rotor composite.

**Figure I.3 :** Moteur asynchrone avec un rotor massif

**Figure. I.4 :** Moteur asynchrone à rotor bobiné à bagues

**Figure I.5 :** Principe de fonctionnement d'un moteur asynchrone

**Figure II.1 :** Sémantisation des conditions d'interfaces

**Figure III.2 :** maillage de la machine asynchrone a rotor massif

**Figure III.3 :** Organigramme des étapes de résolution par l'outil FEMM

**Figure.III. 4. :** Schéma équivalent par phase de la machine étudiée

**Figure IV.1 :** Configuration géométrique de la section transversale de la machine

**Figure IV.2 :** Caractéristique magnétique  $B=f(H)$  du fer statorique

**Figure IV.3 :** Caractéristique magnétique  $B=f(H)$  du fer rotorique

**Figure IV.4 :** Dimensions géométrique principale d'une encoche du stator

**Figure IV.5 :** Dimensions géométrique principale d'une rainure du rotor

**Figure IV.6 :** Organigramme d'étude de la machine étudiée.

**Figure IV.7 :** Modèle géométrie transversale de la machine asynchrone à rotor massif

**Figure IV.8 :** Maillage de la machine asynchrone à rotor massif

**Figure IV. 9 :** Lignes de champs au démarrage et à vide

**Figure IV.10 :** Distribution des inductions dans l'entrefer à vide  $g=0$

**Figure IV.11 :** Variation du module de l'induction magnétique dans la machine

**Figure IV.12 :** Distribution des courants induits

**Fig. IV.13 :** Résistance rotorique en fonction de glissement

**Fig. IV.14 :** Réactance rotorique en fonction de glissement

# **Introduction générale**

# **I Introduction générale**

Le développement et l'optimisation des moteurs asynchrones sont des domaines de recherche essentiels pour améliorer l'efficacité énergétique et la performance des systèmes électromécaniques modernes. Parmi ces moteurs, le moteur asynchrone à rotor massif suscite un intérêt croissant en raison de ses avantages en termes de robustesse et de coût de fabrication. Cependant, pour exploiter pleinement ces avantages, une compréhension approfondie de ses performances électromagnétiques est primordiale.

La modélisation électromagnétique par éléments finis (MEF) est une technique puissante permettant de simuler et d'analyser les phénomènes complexes au sein des moteurs électriques. En particulier, cette méthode offre une précision élevée dans l'évaluation des champs électromagnétiques, des pertes et des forces agissant sur le rotor et le stator. Grâce à la MEF, il est possible de prédire avec précision les performances du moteur, d'identifier les zones de pertes et de surchauffe potentielles, et d'optimiser la conception pour des performances améliorées.

Ce mémoire vise à explorer la modélisation électromagnétique par éléments finis appliquée à un moteur asynchrone à rotor massif et à évaluer ses performances. L'étude se concentrera sur la formulation mathématique des équations de Maxwell adaptées à ce type de moteur, la mise en œuvre de la méthode des éléments finis pour résoudre ces équations, et l'analyse des résultats obtenus. En outre, une comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux sera effectuée pour valider les modèles développés.

L'objectif principal de ce travail est de fournir une compréhension détaillée des phénomènes électromagnétiques dans les moteurs asynchrones à rotor massif et de proposer des recommandations pour améliorer leur conception et leur efficacité. Les résultats obtenus contribueront non seulement à la connaissance théorique dans ce domaine, mais offriront également des perspectives pratiques pour le développement de moteurs plus performants et économes en énergie.

Ainsi, ce mémoire se structure autour de trois axes principaux : la modélisation électromagnétique par éléments finis, l'évaluation des performances d'un moteur asynchrone à rotor massif, et la validation expérimentale des modèles développés. Par cette approche, nous espérons apporter une contribution significative à la recherche et au développement des moteurs asynchrones, répondant aux exigences croissantes en matière d'efficacité énergétique et de performance dans les applications industrielles.

# **CHAPITRE I**

## **Généralités sur les Machines Asynchrones à Rotor Massif**

## II.1 INTRODUCTION

Les machines asynchrones à rotor massif, également connues sous le nom de moteurs asynchrones ou moteurs à induction, représentent l'une des formes les plus répandues de moteurs électriques dans le monde moderne. Leur conception robuste, leur fiabilité éprouvée et leur capacité à fonctionner dans une gamme variée d'applications en font un pilier de l'ingénierie électrique et de l'industrie manufacturière. Ces machines, dont le fonctionnement repose sur le principe de l'induction électromagnétique, sont utilisées dans une multitude de secteurs, allant de l'industrie lourde à l'électroménager domestique, en passant par les applications agricoles et les systèmes de transport. Ce chapitre explorera les principes de base de fonctionnement, les caractéristiques et les applications des machines asynchrones à rotor massif ces avantages et ces inconvénients, offrant ainsi un aperçu des fondements de cette technologie essentielle.

## II.2 Les différents types de machines asynchrones à rotors massifs comprennent

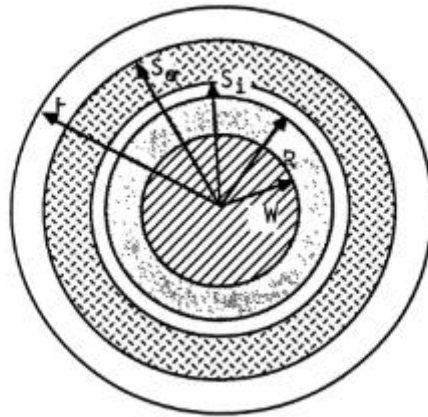
- **Rotor massif lisse :** Ce type de rotor a une surface lisse et est fait d'un matériau solide, généralement en aluminium ou en cuivre. Il est utilisé dans les machines où un couple de démarrage élevé est requis, telles que les pompes, les ventilateurs et les compresseurs. [1]



**Figure I.1:** rotor massif lisse en acier.

- **Rotor massif composite :** Ce type de rotor est constitué d'un noyau cylindrique ferromagnétique et d'une couche conductrice non magnétique. La présence du noyau

est très intéressante et la performance est optimale lorsque le diamètre du noyau est d'environ 80 à 90% du diamètre du rotor. [2]



**Figure I.2 :** Coupe de la machine à rotor composite.

- **Rotor massif bobiné :** Ce type de rotor a des enroulements sur sa surface, qui sont connectés pour former un circuit fermé. Il est employé dans les machines où la puissance élevée et le rendement élevé sont exigés, comme dans des applications industrielles [3]
- **Rotor massif à cage d'écureuil :** Ce type de rotor a une structure de cage d'écureuil, qui est faite de barres conductrices reliées par des anneaux d'extrémité. C'est le type le plus commun de rotor utilisé dans les machines asynchrones et est employé dans des applications où le couple de démarrage élevé et le rendement élevé sont exigés, comme dans des applications de traction et de pompage. [4]
- **Rotor massif à encoches profondes :** Ce type de rotor a des fentes profondes sur sa surface, ce qui augmente la surface du rotor et améliore la dissipation thermique. Il est employé dans les machines où la puissance élevée et le rendement élevé sont exigés, comme dans des applications industrielles. [3]
- **Rotor massif à rotor bobiné en régime permanent :** Ce type de rotor a des enroulements sur sa surface, qui sont connectés pour former un circuit fermé. Il est employé dans les machines où la puissance élevée et le rendement élevé sont exigés, comme dans des applications industrielles. [2]

### II.3 Définition d'un rotor massif

Un massif de rotor est un type de rotor utilisé dans les machines électriques, telles que les machines asynchrones, qui se caractérise par sa construction solide et sa grande inertie. Il

est fait d'une seule pièce de matériau conducteur, typiquement en cuivre ou en aluminium, et est souvent utilisé dans les applications où un couple de démarrage élevé est nécessaire. Le massif du rotor est généralement de forme cylindrique et est monté sur des roulements à ses extrémités. Il est souvent utilisé dans les machines où une puissance élevée et un rendement élevé sont nécessaires, comme dans les applications industrielles. Le massif du rotor peut être lisse ou avoir des fentes ou des enroulements sur sa surface. Le type de rotor massif utilisé dépend de l'application spécifique et des caractéristiques de performance souhaitées. [1] [5]

Dans le moteur à rotor massif, les courants de Foucault ne sont plus engendrés dans des conducteurs bien définis, mais dans une masse métallique. La perméabilité élevée et le calcul local des diverses grandeurs électriques est nécessaire. Ainsi que, la résistance du rotor n'est plus celle d'une cage d'écureuil de valeur constante, mais c'est celle d'une masse métallique influencée par l'effet pelliculaire.

Pour des matériaux à perméabilité constante, l'induction et la densité de courant décroissent exponentiellement à partir de la surface du rotor, soit [9] :

$$B = B_e \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \quad (I.1)$$

Avec :

$x$  : Distance comptée à partir de la surface [m] ;

$B_e$  : Induction sur la surface du rotor [Tesla]

$\delta$  : Epaisseur de Peau [m] ;

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho_r}{\omega\mu_0\mu_r}} \quad (I.2)$$

Avec :

$\rho_r$  : Résistivité des matériaux [ $\Omega \cdot m$ ] ;

$\mu_0$  : Perméabilité du vide [H/m] ;

$\mu_r$  : Perméabilité relative [H/m] ;

$\omega$  : Pulsation ;

Donc pour un rotor de rayon  $R_f$  au-dessous du cercle de rayon  $(R_f - \delta)$ , il y a pratiquement plus de courant.

Dans une machine à rotor massif, la vitesse du rotor  $n$  est différente de la rotation  $n_s$  qui représente la vitesse de synchronisme du flux de stator. Cette différence de vitesse est communément appelée le glissement du rotor qui est souvent décrite comme une fraction de la vitesse de synchronisme de manière suivante :

$$g = \frac{n_s - n}{n_s} \quad (\text{I.3})$$

La fréquence de la tension induite dans le rotor du fait du mouvement relatif du flux de stator et les conducteurs du rotor peut être déduite. La vitesse du rotor à partir de la relation (I.3) peut être exprimée sous la forme :

$$n = (1 - g)n_s \quad (\text{I.4})$$

La relation (I.3), peut également être écrite en termes de vitesse angulaire :

$$g = \frac{\Omega_s - \Omega}{\Omega_s} \quad (\text{I.5})$$

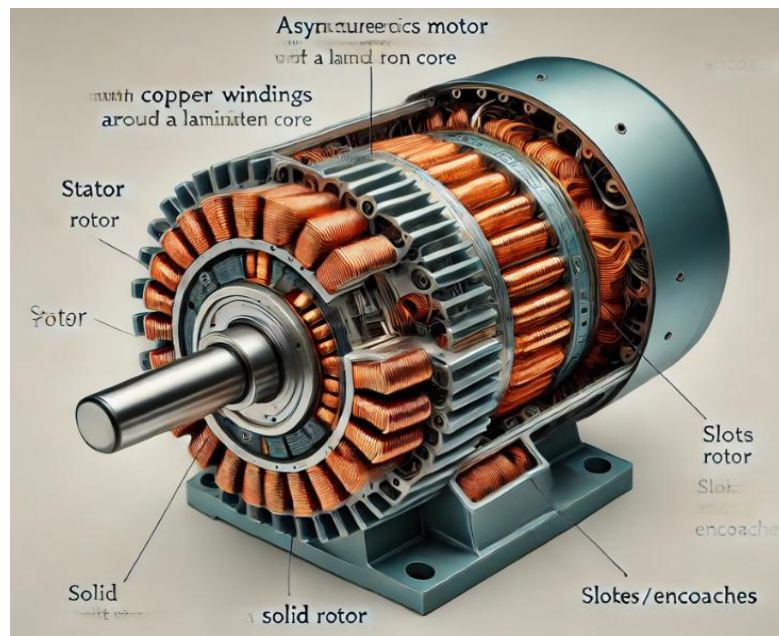
Maintenant, en termes de fréquence, nous avons :

$$f_r = g \cdot f_s \quad (\text{I.6})$$

Où :

$f_s$ : Est souvent appelé la fréquence de glissement ;

Huppunen [3] montre que la fréquence de glissement et de la vitesse angulaire du rotor ont une grande importance, car non seulement il joue un rôle important dans la détermination de la pénétration du flux magnétique dans le rotor mais qui agissent en tant que facteur pour déterminer le couple produit par le rotor.



**Figure I.3 :** Moteur asynchrone avec un rotor massif

## II.4 Constitution et principe d'un moteur asynchrone

Le moteur asynchrone triphasé est largement utilisé en industrie du fait essentiellement de sa fiabilité, de sa robustesse, du peu d'entretien qu'il demande et de son prix. Il est constitué d'une partie fixe le stator, logé dans une carcasse en acier trois enroulement sous bobinage sont raccordés à une plaque à borne permettant le branchement sur le réseau, et d'une partie mobile le rotor qui peut être à cage d'écureuil, type rotor bobiné, laminé, double est notre cas d'étude. Ce qui permet au rotor de tourner c'est le principe des champs magnétiques tournant produit par des tensions alternatives. Trois enroulements sont disposés dans le stator à  $120^\circ$  les uns des autres, une fois alimentés trois champs magnétiques indépendants sont créés. Ces champs magnétiques sont déphasés dans le temps par la nature même du courant triphasé, la vitesse du champ magnétique sera toujours supérieure à celle du rotor, les deux vitesses ne peuvent être synchrones d'où le nom de moteur asynchrone (Figure I.1). La vitesse d'un moteur en tours par secondes dépend de la fréquence du réseau qui alimente le stator en Hz et du nombre de pôle du moteur, donc pour faire varier la vitesse d'un moteur il suffit de modifier la fréquence ou le nombre de pôle [6]

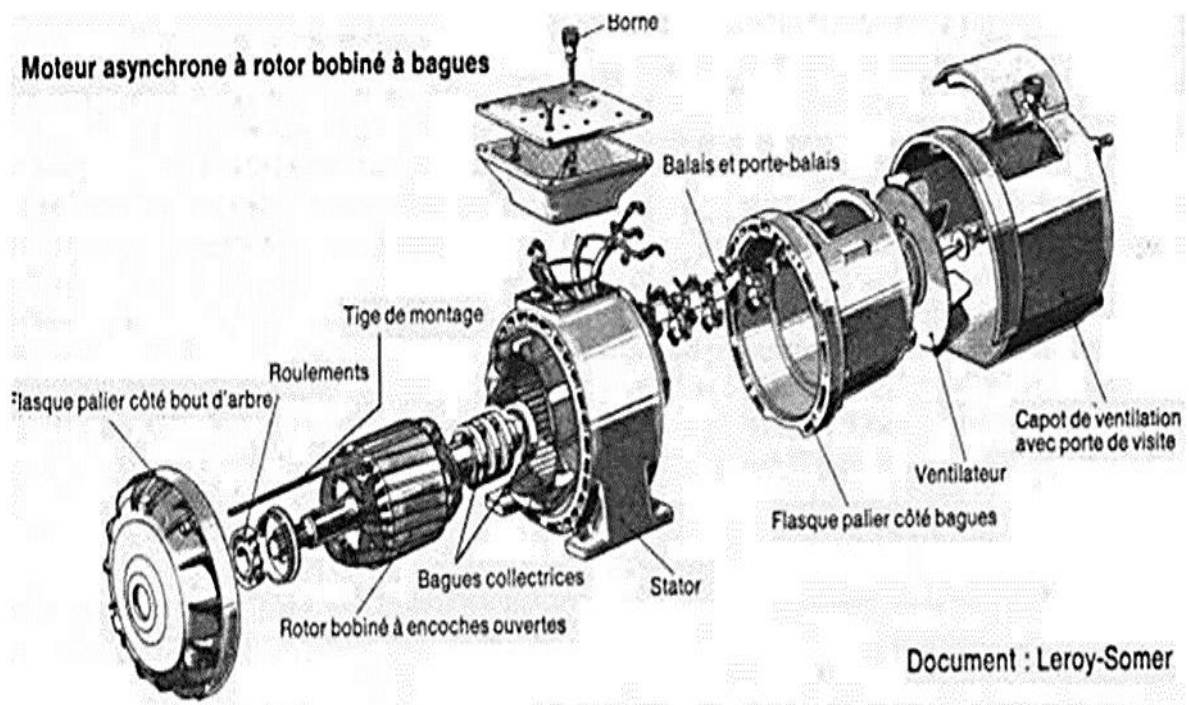


Fig. I.4 : Moteur asynchrone à rotor bobiné à bagues

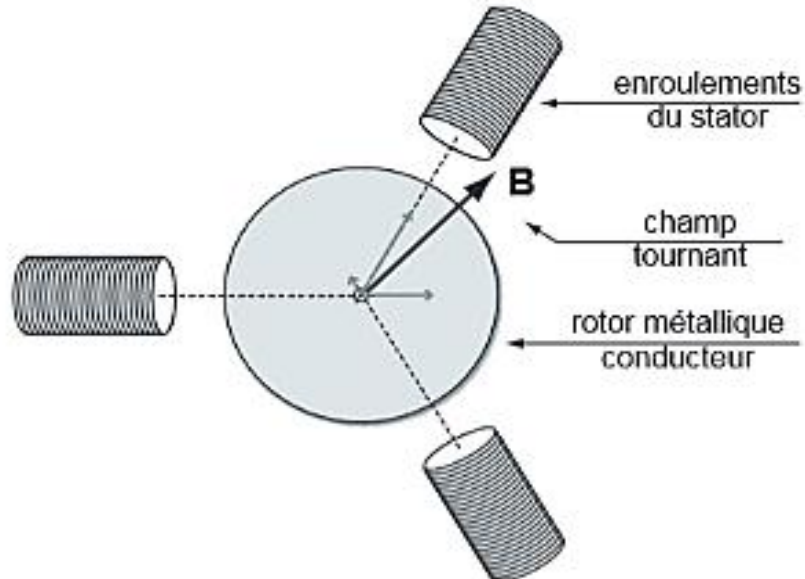


Figure I.5 : Principe de fonctionnement d'un moteur asynchrone

## **II.5 Avantages et inconvénients de la machine asynchrone à rotor massif**

### **II.5.1 Avantages**

- Faible coût de production.
- Simplicité dans sa construction.
- Équilibre mécanique élevé, stable.
- Fiabilité thermique élevée

### **II.5.2 Inconvénients**

- Un rendement insatisfaisant.
- Mauvais facteur de puissance.
- Une densité de puissance faible.[7]

**II.6 CONCLUSION :**

En somme, les machines asynchrones à rotor massif sont des piliers de l'ingénierie électrique et de l'industrie manufacturière, offrant robustesse et fiabilité dans une multitude d'applications. Ce chapitre a exploré les différents types de rotors massifs, ainsi que les principes de fonctionnement des moteurs asynchrones triphasés. Bien qu'elles présentent des avantages indéniables en termes de coût et de simplicité, des défis persistent en matière de rendement et de facteur de puissance. Malgré cela, ces machines demeurent des éléments essentiels de notre infrastructure électrique mondiale, et leur évolution continue pourrait répondre aux besoins futurs de notre société.

Dans le prochain chapitre, nous aborderons la modélisation électromagnétique des machines en utilisant des méthodes numériques pour résoudre les équations de Maxwell. Cette approche nous permettra d'analyser en détail les interactions électromagnétiques à l'intérieur des machines, aidant ainsi à optimiser leurs performances.

**Chapitre II**

**Modélisation Electromagnétique du Moteur**

**Asynchrone à Rotor Mas**

### **III.1 Introduction :**

Le chapitre présent vise à explorer la modélisation électromagnétique de la machine asynchrone à rotor massif, une thématique essentielle dans le domaine de l'ingénierie électrique et de la conception des systèmes électromécaniques. Comprendre leur comportement électromagnétique est crucial pour optimiser leur performance, améliorer leur efficacité énergétique et répondre aux exigences croissantes en matière de durabilité. Cette revue permettra d'établir un socle de connaissances fondamentales nécessaire à la compréhension de la modélisation électromagnétique qui suivra.

Ensuite, nous explorerons les fondements théoriques de la modélisation électromagnétique, en mettant l'accent sur les équations de Maxwell et les lois électromagnétiques qui gouvernent le comportement des champs électrique et magnétique au sein de la machine. Nous discuterons également des méthodes numériques et des techniques de simulation utilisées pour résoudre ces équations et modéliser de manière précise et efficace son fonctionnement.

En résumé, ce chapitre fournira une base solide pour comprendre les principes de la modélisation électromagnétique des machines asynchrones à rotor massif, offrant ainsi un cadre théorique et méthodologique essentiel pour l'analyse et la conception de ces dispositifs électromécaniques fondamentaux. [13]

### **III.2 Equations de base gouvernant le champ électromagnétique en électrotechnique**

Les équations de Maxwell sont les lois fondamentales de l'électromagnétisme. Elles décrivent mathématiquement les relations entre les champs électrique ( $E$ ) et magnétique ( $B$ ) et les sources de ces champs, à savoir les charges électriques ( $\rho$ ) et les courants électriques ( $j$ ).

Ces équations permettent de calculer la répartition des champs électromagnétiques dans les dispositifs électrotechniques tels que les machines électriques, les transformateurs, les antennes, etc. Elles sont essentielles pour comprendre et prédire les performances de ces dispositifs.

Les équations de Maxwell sont des équations aux dérivées partielles qui relient localement les variations des champs électrique et magnétique. Elles peuvent être réécrites en utilisant les potentiels électromagnétiques (potentiel scalaire  $V$  et potentiel vecteur  $A$ ), ce qui facilite leur résolution numérique.

La résolution numérique des équations de Maxwell dans des géométries complexes, comme celles des machines électriques, nécessite des méthodes avancées comme la méthode des éléments finis. Cette méthode permet de prendre en compte les phénomènes importants comme les courants de Foucault dans les matériaux conducteurs.

En résumé, les équations de Maxwell sont la base théorique fondamentale pour l'analyse et la conception des dispositifs électrotechniques [11]

- **Champs**

$\vec{B}(T)$  Induction magnétique.

$\vec{H}(A.m^{-1})$  Champ magnétique.

$\vec{D}(C.m^{-2})$  Induction électrique.

$\vec{E}(V.m^{-1})$  Champ électrique.

- **Densités**

$\vec{J}(A.m^{-2})$  Densité de courant.

$\rho(C.m^{-3})$  Densité de charges.

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}(A.m^{-2})$  Densité de courant de déplacement.

- **Matériaux**

$\mu(H/m)$  Perméabilité magnétique absolue.

$\sigma$  (s/m) Conductivité électrique.

$\varepsilon(F/m)$  Permittivité magnétique absolue.

### III.2.1 Equation de Maxwell-Faraday

Un champ électrique peut induire un champ magnétique. Ce champ induit est utilisé dans de nombreux générateurs électriques.

- La loi d'induction magnétique de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d \iint \vec{B} \cdot \vec{ds}}{dt} = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad (\text{II.3})$$

- Théorème de stocks :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint \overrightarrow{rot} \cdot \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II.4})$$

Donc :  $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\iint \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{ds} = \iint \overrightarrow{rot} \cdot \vec{E} \cdot \vec{ds}$  (II.5)

Alors la loi de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.6})$$

### III.2.2 Equation de Maxwell-Ampère :

Les champs magnétiques peuvent être générés de deux manières :

- Par la variation d'un champ électrique.
- Ou
- Par les courants électriques.

La loi d'Ampère est :

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum I = I_T \quad (\text{II.7})$$

$$\iint \overrightarrow{rot} \cdot \vec{H} \cdot \vec{ds} = I_T = \iint \vec{J}_s \cdot \vec{ds} \quad (\text{II.8})$$

\* $\vec{J}_s$  : Densité de courant de source [A/m<sup>2</sup>].

Alors la loi d'Ampère-Maxwell :

$$\overrightarrow{rot} \cdot \vec{H} = \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.9})$$

### III.2.3 Equation de Maxwell-Gauss

Un champ électrique est généré par des charges électriques. Le champ électrique est orienté à partir des charges électriques positives vers les charges négatives. Plus précisément, cette loi relie le flux électrique à travers n'importe quelle surface de Gauss fermée [6].

- Théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \sum Q_s \quad (\text{II.10})$$

- théorème de la divergence (Ostrogradsky) :

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \iiint_v \text{div} \vec{D} \cdot dv \quad (\text{II.11})$$

$$\sum Q_s = \iiint_v \rho \cdot dv \quad (\text{II.12})$$

Alors la loi de Gauss-Maxwell :

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{II.13})$$

### III.3 Equation de conservation de flux magnétique

Le théorème dit :

$$\oiint \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (\text{II.14})$$

$$\oiint \vec{B} \cdot ds = \iiint \text{div} \vec{B} \cdot dv = 0 \quad (\text{II.15})$$

Alors la loi de Gauss-Maxwell magnétique :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II.16})$$

➤ **Remarque**

- Ces équations s'appliquent quel que soit le milieu.
- Les distributions de  $\rho$  et  $J$  sont des distributions réelles et sont supposées connues.
- Les grandeurs  $E$  et  $D$ ,  $H$  et  $B$ ,  $J$  et  $E_{ne}$  sont pas (respectivement) indépendantes entre elles car elles sont liées par les lois de comportement des milieux, dites aussi relation de constitutives.

### III.4 Equation de continuité

D'après l'équation (II.9), on obtient l'équation suivante:

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{H}) = \operatorname{div}(\vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \quad (\text{II.17})$$

De l'équation (II.17) on aura :

$$0 = \operatorname{div}\vec{J}_s + \operatorname{div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Implique : 
$$0 = \operatorname{div}\vec{J}_s + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{D}$$

Alors l'équation de continuité est comme suit :

$$0 = \operatorname{div}\vec{J}_s + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{II.18})$$

### III.5 Lois des matériaux (milieux):

- Le cas du vide :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (\text{II.19})$$

- Milieu conducteurs (loi d'Ohm):

$$\vec{J}_s = \sigma \cdot \vec{E} \quad (\text{II.20})$$

Avec : 
$$\sigma = \frac{1}{\text{résistivité}} = \frac{1}{\rho}$$

(II.21)

- Milieu magnétique :

Sous l'effet d'un champ magnétique, la matière s'aimante. Quel que soit le milieu, on écrit par définition:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (\text{II.22})$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M} \quad (\text{II.23})$$

Avec :

$\vec{M}$ : Vecteur d'aimantation [A/m]

$\mu_0$  : Perméabilité magnétique du vide [H/m].

$\mu_r$  : Perméabilité magnétique relative [H/m].

- Milieu diélectrique (isolant) :

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (\text{II.24})$$

Avec :

$\varepsilon_r$ : Permittivité relative [F/m].

$\varepsilon_0$  : Permittivité du vide [F/m].

Et dans le système M.S.K.A:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m.}$$

$$\text{Et} \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{F/m}$$

### **III.6 Relations de passage**

Les relations de passage permettent de déterminer les conditions aux limites des champs électrique et magnétique aux interfaces, assurant ainsi un fonctionnement optimal de la machine. Ces relations sont cruciales pour maintenir le flux magnétique constant sur toute la gamme de vitesse du moteur, assurant ainsi des performances optimales en termes de couple et de vitesse.

Les équations de propagation des champs électrique et magnétique, les conditions aux limites, et les relations de continuité/discontinuité des champs électromagnétiques sont fondamentales pour modéliser et contrôler efficacement un moteur asynchrone. Elles permettent de garantir un fonctionnement stable et performant du moteur, en assurant la cohérence des champs électromagnétiques à travers les différentes parties de la machine.

En résumé, les relations de passage dans un moteur asynchrone sont cruciales pour assurer un fonctionnement optimal de la machine en contrôlant les champs électrique et magnétique à

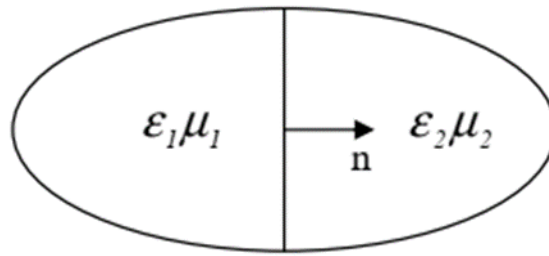
travers les différentes zones du moteur, garantissant ainsi des performances fiables en termes de couple et de vitesse [12]

A la limite de séparation de deux milieux correspondant aux indices  $i$  et  $j$ , les grandeurs électromagnétiques subissent des discontinuités et ne sont donc mathématiquement plus différentiables.

Où :

$$\vec{H} = v(B)\vec{B} \quad (\text{II.10})$$

$v$  : représente la reluctivité magnétique ( $v = \frac{1}{\mu}$ )



**Figure II.1** : Sémantisation des conditions d'interfaces

Les relations de passage entre deux milieux de propriétés différentes, s'écrivent alors

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (\text{II.11})$$

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \quad (\text{II.12})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad (\text{II.14})$$

$J_s$  et  $\rho_s$  sont respectivement les densités de courants et de charges surfaciques.

Les équations I.11 et I.12 peuvent être expliquées ainsi :

$$H_{t1} - H_{t2} = J_s \quad (\text{II.15})$$

Cette dernière équation traduit la discontinuité du champ magnétique.

L'équation (II.10) devient :

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (\text{II.16})$$

L'équation (II.12) traduit la continuité de la composante normale de l'induction au passage d'un milieu à un autre. Les équations II.9 et II.10 expriment successivement la continuité de la composante normale de l'induction magnétique et la composante tangentielle du champ électrique. Les équations II.11 et II.12 indiquent, quand à elles la discontinuité normale de l'induction électrique et la composante tangentielle du vecteur champ magnétique.

### **III.7 Condition aux limites [13]**

Les conditions aux limites sont des spécifications mathématiques qui définissent les relations entre les variables physiques à l'intérieur et à l'extérieur de la machine. Dans le cas de notre moteur, ces conditions sont essentielles pour définir les flux magnétiques, les courants électriques et les températures au sein de la machine. Par exemple, les conditions aux limites peuvent inclure des spécifications sur les courants, les tensions électriques, les températures et les flux magnétiques aux frontières du stator et du rotor. Pour une modélisation précise, il est important de définir des conditions aux limites appropriées qui reflètent les caractéristiques réelles de la machine. Cela peut inclure des spécifications sur les conditions de mise en marche, les régimes de fonctionnement et les conditions de charge. Les conditions aux limites peuvent également être utilisées pour valider les résultats de la modélisation en les comparant à des mesures expérimentales ou à des simulations numériques précédemment validées.

En résumé, les conditions aux limites jouent un rôle crucial dans la modélisation du moteur, en permettant de définir les comportements aux frontières de la machine et de valider les résultats.[1]

### III.7.1 Condition aux Limites de Dirichlet

Cette condition nous informe sur la valeur de l'inconnue sur la frontière du domaine de résolution on distingue deux types. Elle apparaît souvent sur les axes de symétrie du domaine d'étude :

$$A = g_0 \quad (\text{II.17})$$

Où A est la fonction inconnue et  $g_0$  représente une constante.

- **Dirichlet homogène**

L'inconnu de l'équation est fixé sur la limite est considéré égal à zéro :  $A=0$ .

- **Dirichlet non homogène**

L'inconnu de l'équation est fixé sur la limite et sa valeur est non nul :  $A \neq 0$ .

### III.7.2 Condition aux Limites de Neumann

Cette condition spécifie la dérivée (flux) normale à la frontière, La valeur du gradient sur les bords du domaine de résolution est connue. On distingue aussi deux types

- **Neumann**

**homogène**

La dérivé par rapport a la normal de l'inconnu est nulle :  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial n} = 0$ . Ce qui signifie que les lignes isovaleurs de l'inconnu sont perpendiculaires à la limite.

- **Neumann non homogène**

Dans ce cas,  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial n} = cte \neq 0$ . Ce qui signifie que les lignes isovaleurs de l'inconnue forment un angle  $\alpha$  avec la limite.

### III.7.3 Condition de périodicité et anti-périodicité

- **Condition de Périodicité**

La condition de périodicité est utilisée lorsque le domaine d'étude présente une répétition régulière. Dans le contexte d'un moteur asynchrone à rotor massif, cela signifie que certaines propriétés ou grandeurs physiques se répètent identiquement après une certaine distance angulaire ou temporelle. Mathématiquement, si  $f(x)$  est une fonction périodique avec une période  $T$ , alors :

$$f(x)=f(x+T) \quad (\text{II.18})$$

Pour un moteur asynchrone à rotor massif, cette condition est appliquée aux champs magnétiques et aux courants induits pour simplifier la résolution des équations de Maxwell. La périodicité peut aussi être utilisée pour modéliser les fentes du stator ou les barres du rotor

- **Condition d'Anti-Périodicité**

La condition d'anti-périodicité est similaire à la périodicité, mais avec un changement de signe après une certaine distance angulaire ou temporelle. Si  $f(x)$  est une fonction anti-périodique avec une période  $T$ , alors :

$$f(x) = -f(x+T) \quad (\text{II.19})$$

Cette condition est souvent utilisée pour les grandeurs qui changent de signe après une certaine distance angulaire, comme les composantes du champ magnétique dans certaines configurations de rotor et stator.

### III.8 Modèle magnétostatique

#### III.8.1 Equation générale de magnétostatique

Dans ce modèle on obtient les équations de Maxwell qui se réduisent à :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_s \quad (\text{II.25})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$B = \begin{cases} \mu \cdot \vec{H} \rightarrow \text{Materiaux magnétique que conque} \\ \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{B}_r \rightarrow \text{Aimant permanent} \\ \mu_0 \cdot \vec{H} \rightarrow \text{air} \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

➤ **Remarque** En régime statique le courant est constant.

#### III.8.2 Modèle magnétostatique scalaire

Dans ce modèle, on suppose que les courants électriques sont nuls dans la pièce à étudier et que les champs ne dépendent pas du temps. On s'intéresse aux grandeurs  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$ .

On obtient donc les équations de maxwell suivant:

$$\begin{cases} \overline{rot}\vec{H} = \vec{J}_s \\ div\vec{B} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

C'est le cas des dispositifs pour lesquels les champs sont créés par des forces magnétomotrices extérieures et indépendantes du dispositif étudié ou bien par des aimants permanents. Dans ce dernier cas, on dispose de l'équation (II.23).

Et dans le cas ou densité de courant surfacique est nulle ( $J_s = 0$ ), La relation (II.25) implique qu'il existe une fonction potentiel scalaire magnétique  $\varphi$  telle que :

$$\vec{H} = -\overline{grad}\varphi \quad (\text{II.28})$$

Avec :  $J_s = J_c$

D'où on obtient l'équation suivante :

$$div(\mu \cdot \overline{grad}\varphi) = div\vec{B} \quad (\text{II.29})$$

### III.8.3 Modèle magnétostatique vectoriel

Comme dans le modèle précédent, on suppose que le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps.

Le terme  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  est alors nul et les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  sont découplés. Par contre, on désire modéliser un objet parcouru par des courants non nuls.

On obtient alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \overline{rot}\vec{H} = \vec{J}_s \\ div\vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M} \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

L'équation  $div\vec{B} = 0$  permet de définir une fonction potentielle vectrice magnétique  $\vec{A}$  telle que :

$$\vec{B} = \overline{rot}\vec{A} \quad (\text{II.31})$$

Pour que  $\vec{A}$  soit totalement défini, il faut également fixer la valeur de sa divergence. D'où on ajoute la condition de jauge coulomb suivante:

$$\text{div}\vec{A} = 0 \quad (\text{II.32})$$

On obtient donc l'équation vectorielle de Poisson suivante:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = \vec{J}_s \quad (\text{II.33})$$

### III.9 Modèle magnétodynamique

#### III.9.1 Equations générales de magnétodynamique

Aussi dans ce modèle on obtient les équations de Maxwell qui se réduisent comme suit :

$$\begin{cases} \text{div}\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \vec{J}_s \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

Avec :

$$\text{div}\vec{J}_s = 0 \quad (\text{II.35})$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu\vec{H} \\ \vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{B}_r \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \sigma\vec{E} + \sigma(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.37})$$

Et : 
$$\vec{J}_{ind} = \sigma\vec{E} + \sigma(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.38})$$

Avec :

❖  $\vec{J}_{ind}$ : Densité de courant induite.

### III.9.2 Modèle magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$

L'équation(II.16) implique qu'elle existe l'équation (II.31), et donc :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \quad (\text{II.39})$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} + \overrightarrow{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (\text{II.40})$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{B}-\vec{B}_r}{\mu}\right) = \vec{J}_s + \sigma\vec{E} + \sigma(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.41})$$

On obtient l'équation générale suivante :

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) + \sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \sigma(\vec{v} \wedge (\overrightarrow{rot}\vec{A})) = \vec{J}_s + \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{B}_r}{\mu}\right) \quad (\text{II.42})$$

Avec présence de l'équation (II.30).

$$\overrightarrow{J}_{ind1} = \sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.43})$$

$$\overrightarrow{J}_{ind2} = \sigma(\vec{v} \wedge (\overrightarrow{rot}\vec{A})) \quad (\text{II.44})$$

Et tel que :

- $\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}\vec{A}\right)$  : Terme dû au phénomène magnétique.
- $\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{B}_r}{\mu}\right)$  : Terme source magnétique.

### **III.10 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons discuté des principes de la modélisation, équations de Maxwell qui sont fondamentales pour la modélisation électromagnétique de notre moteur et nous avons évoqué les conditions aux limites ensuite nous avons développé une approche basée sur la méthode des éléments finis pour le calcul des performances électromagnétique d'un moteur asynchrone à rotor massif lisse. Permet la détermination des performances des moteurs à induction en régime permanent la méthode numérique par éléments finis est élaboré en utilisant le logiciel FEMM 4.2. Cette méthode permet de prendre en compte des phénomènes physiques spécifiques au moteur étudié et peut être appliquée à toute géométrie mais en contrepartie le temps de calcul est important.

Cette méthode permet donc de calculer le potentiel vecteur en régime permanent à un instant donné. En outre, pour le cas particulier de l'étude à rotor bloqué, les paramètres du circuit équivalent se déduisent du calcul par éléments finis, en le couplant aux équations électriques déduites de schéma équivalent.

## **Chapitre III**

# **Modèle Eléments finis sous FEMM, et calcul des performances**

## IV Modèle Éléments finis sous FEMM, et calcul des performances

### IV.1 Introduction

L'étude des machines à induction constitue un domaine fondamental de l'électrotechnique, avec des applications variées allant des entraînements industriels aux systèmes de transport. Parmi ces machines, celles à rotor massif se distinguent par leur robustesse et leur capacité à fonctionner dans des conditions sévères. Cependant, leur modélisation et analyse présentent des défis uniques en raison de la complexité des phénomènes électromagnétiques et thermiques en jeu.

L'approche par éléments finis (EF) s'est révélée être une méthode puissante pour étudier et optimiser les performances des machines à induction à rotor massif. Elle permet de capturer avec précision les interactions complexes entre les champs électromagnétiques et les structures matérielles, offrant ainsi des connaissances détaillées sur le comportement de la machine sous diverses conditions de fonctionnement.

Ce chapitre vise à présenter une modélisation par éléments finis d'une machine à induction à rotor massif, sous environnement FEMM .4.2 (finite element method magnetics) en mettant l'accent sur les aspects théoriques et pratiques de cette approche. Nous aborderons d'abord les principes fondamentaux de la méthode des éléments finis appliquée aux machines électriques. Ensuite, nous discuterons des résultats obtenus et de leur interprétation, en le comparant aux données expérimentales et aux modèles analytiques disponibles.

L'objectif de ce chapitre est de fournir une compréhension approfondie des techniques de modélisation par éléments finis appliquées aux machines à induction à rotor massif, ainsi que de démontrer leur utilité pour l'amélioration des performances et la conception optimisée de ces machines.

## **IV.2 Présentation de la méthode des éléments finis**

Historiquement, les premiers développements de la méthode des éléments finis ont été proposés par Richard Courant dans les années 1940, mais ce sont les mécaniciens qui ont développé, popularisé et démontré l'efficacité de cette méthode. En 1970, Silvestre et son équipe de l'université MC Gill ont adapté cette méthode de résolution des problèmes elliptiques d'électrotechnique [2].

Appliquée à la conception des structures électromagnétiques, la méthode des éléments finis est fréquemment utilisée pour modéliser des systèmes électrotechniques, d'ailleurs elle est devenue un outil très répandu. Cette méthode permet de tenir compte de la géométrie de la machine et permet une approche systématique de problème magnétique. En plus, un couplage entre les grandeurs électriques, mécaniques, et magnétiques peut être réalisé. Néanmoins, la méthode des éléments finis consiste à chercher une solution approchée à partir d'une discrétisation du domaine d'étude sur lequel les équations de Maxwell sont résolues. Comme elle permet de déterminer un champ scalaire ou vectoriel correspondant à un ensemble d'équations aux dérivées partielles et d'équations ordinaires en tout points du domaine d'étude à tout instant, tout en respectant les conditions aux limites.

Une étude tridimensionnelle par éléments finis apporte une très grande finesse dans la connaissance du système.

## **IV.3 Principe de la méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis représente la méthode d'approximation des équations aux dérivées partielles qui régissent les phénomènes physiques et leurs conditions aux limites.

Le principe de cette méthode est de discrétiser le domaine d'étude en de multiples éléments puis de résoudre localement, dans chacun de ceux-ci, les équations associées à la formulation retenue. Les inconnues élémentaires sont alors définies par une combinaison linéaire, pondérée par des polynômes d'interpolation.

La précision de calcul est liée à la finesse du maillage et au degré de ces polynômes. Cependant leurs coefficients ne dépendent que de la géométrie et de sa discrétisation.

Finalement, on obtient après assemblage un système matriciel d'équations, pouvant tenir compte de certain non linéarités, comme celle intervenant dans les matériaux ferromagnétiques [3].

Pour cela, il y a deux variantes de la méthode des éléments finis qui sont :

### IV.3.1 La méthode des résidus pondérés

Si le modèle mathématique n'admet pas de solution analytique, il est alors nécessaire de chercher une solution approchée de ce modèle. Dès lors, la discrétisation du problème correspond au choix d'un modèle numérique permettant de traiter les équations mathématiques. Il est important de savoir distinguer et hiérarchiser les différents niveaux d'hypothèse utilisés pour modéliser un phénomène physique. En effet, la solution exacte d'un modèle mathématique qui ne correspond pas à la réalité physique est inutile.

- Si on prend l'exemple d'une équation différentielle de type Laplacien:

$$L(\Phi) = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$R = L(\Phi) - L(\Phi^*) \quad (\text{III.2})$$

Avec:

- ❖ L : Laplacien.
- ❖  $\Phi^*$ : La solution exacte.
- ❖  $\Phi$  : La solution approximative.
- ❖ R : Le résidu.

La méthode des résidus pondérés consiste à minimiser le résidu ( $R=0$ ).

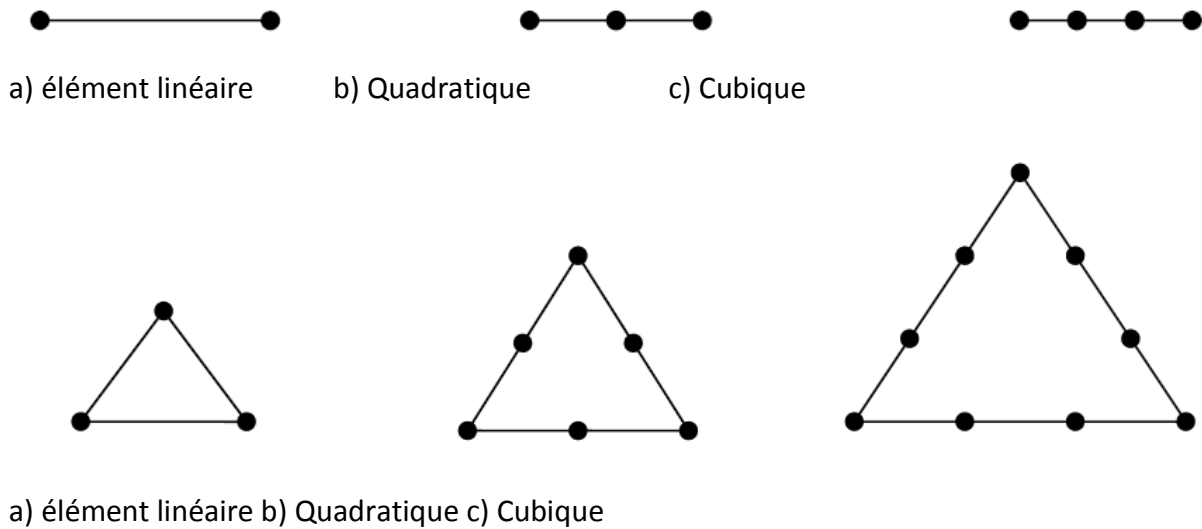
### IV.3.2 La méthode viriationnelle

Elle consiste à minimiser une fonctionnelle qui représente généralement l'énergie du système à résoudre. Pour la mise en œuvre de la méthode, il existe des étapes à suivre qui sont :

- Le maillage ou bien discrétisation du domaine.
- Choix de la fonction d'interpolation.
- Choix de la fonctionnelle.
- La minimisation.
- Résolution du système algébrique.
- Exploitation des résultats.

### IV.4 Types d'éléments finis

Selon le domaine d'étude, à une, à deux ou à trois dimensions, on rencontre le plus souvent des éléments linéaires, quadratiques ou cubiques comme le montre la figure II.1.



**Figure III.1 :** Eléments classiques en une et deux dimensions

Dans la majorité des cas bidimensionnels, on préfère utiliser des éléments triangulaires du premier ordre. Pour aboutir à une meilleur exactitude de la solution, on procède a raffiner le maillage [4].

#### IV.4.1 Discrétisation et approximation

L'idée fondamentale de la méthode des éléments finis est de subdiviser la région à étudier en petites sous régions appelées élément finis constituant le maillage.

Les fonctions inconnues sont approximées sur chaque élément fini par une simple fonction appelée fonction de forme qui est continue et définie sur chaque élément seul.

La forme des éléments est directement liée à la dimension du problème (2D ou 3D). Pour une géométrie en (2D), on utilise généralement des triangles ou des quadrilatères; pour une géométrie en (3D), on utilise les tétraèdres, les prismes ou les hexaèdres [5].

La discrétisation est une étape importante dans l'analyse par éléments finis car la précision des résultats dépend de la méthode de discrétisation et de la finesse de cette subdivision en sous-domaines.

La fonction inconnue est approchée dans chaque élément par une fonction d'interpolation nodale, faisant intervenir les valeurs de l'inconnue aux nœuds de ces éléments ainsi que les coordonnées géométriques de ces nœuds.

Dans le cas du calcul du champ dans les structures électromagnétiques, les éléments de forme triangulaire sont les plus utilisés. Cette subdivision exclusivement triangulaire du premier ordre a l'avantage de s'adapter à toute configuration géométrique et permet de traiter des expressions simples.

#### IV.5 Avantages principaux de la méthode

- Mise en œuvre relativement simple ;
- Prise en considération des non linéarités ;
- Préparation et introduction des données relativement simples.

#### • Inconvénients principaux de la méthode

- Difficultés pour considérer les géométries complexes donc impact sur la précision des calculs;
- Temps de calcul relativement important en régime saturé ;

#### IV.6 Présentation de l'outil logiciel F.E.M.M

C'est un logiciel de modélisation par la méthode des éléments finis 2D cartésien et 2D axisymétrique. Dédié à la résolution de problèmes électromagnétiques dans le domaine des basses fréquences.

Il est constitué de trois modules principaux [8] :

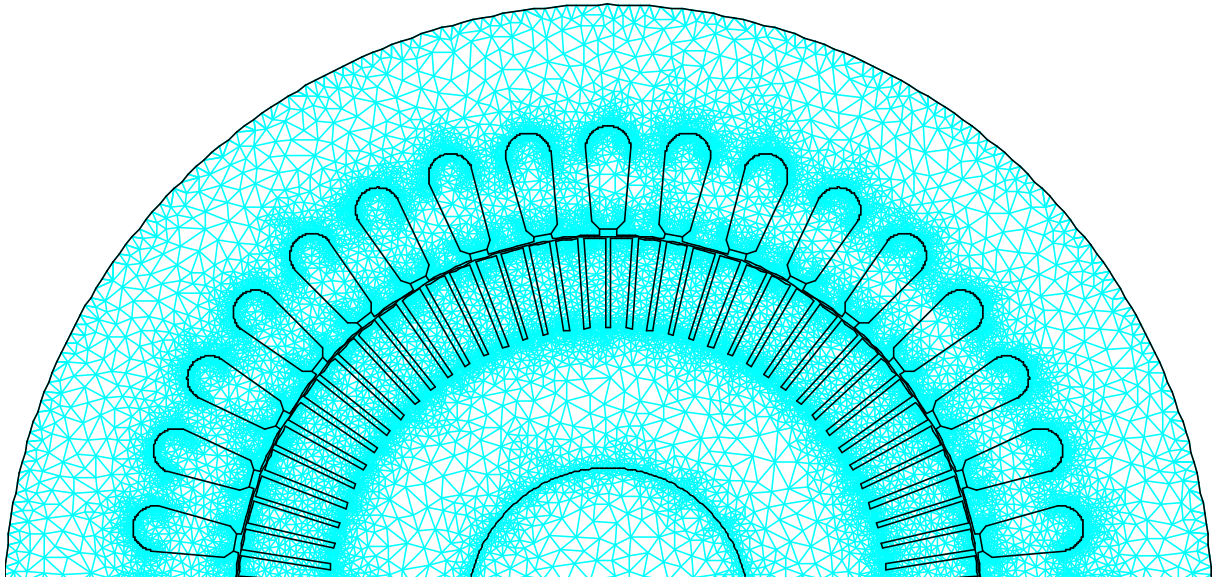
##### ▪ Un module "Pré-processeur" et " Post-processeur"

Ce module permet, au travers d'une interface graphique, la saisie de la géométrie et la définition du problème en vue de sa résolution par la méthode des éléments finis. La saisie de la géométrie peut se faire avec la définition de points clefs que l'on relie pour former des régions ou par l'importation de structures AUTOCAD au format DXF. Comme aussi ce module intègre également des outils de **post-traitement** : visualisation et différents calculs inhérents au problème (inductance, flux, pertes Joule, etc.).

##### ▪ Un module de maillage

Le maillage est l'opération qui définit un domaine d'étude, puis à la subdiviser en plusieurs sous domaines de forme polygonale simple appelés « éléments ». Ces éléments sont repérés par les coordonnées de leurs sommets qu'on appelle « nœuds ».

L'élément triangulaire est le plus utilisé pour les problèmes 2D, vu qu'il présente des expressions simples à manipuler, et qu'il s'adapte aux géométries les plus complexes.



**Figure III.2 :** maillage de la machine asynchrone a rotor massif

#### ▪ Un module de résolution par éléments finis

Ce solveur 2D cartésien et axisymétrique permet de résoudre des problèmes d'électrostatique linéaires, de magnétostatique linéaires et non linéaires, de magnétodynamique en régime harmonique linéaires et non linéaires et de thermique en stationnaire.

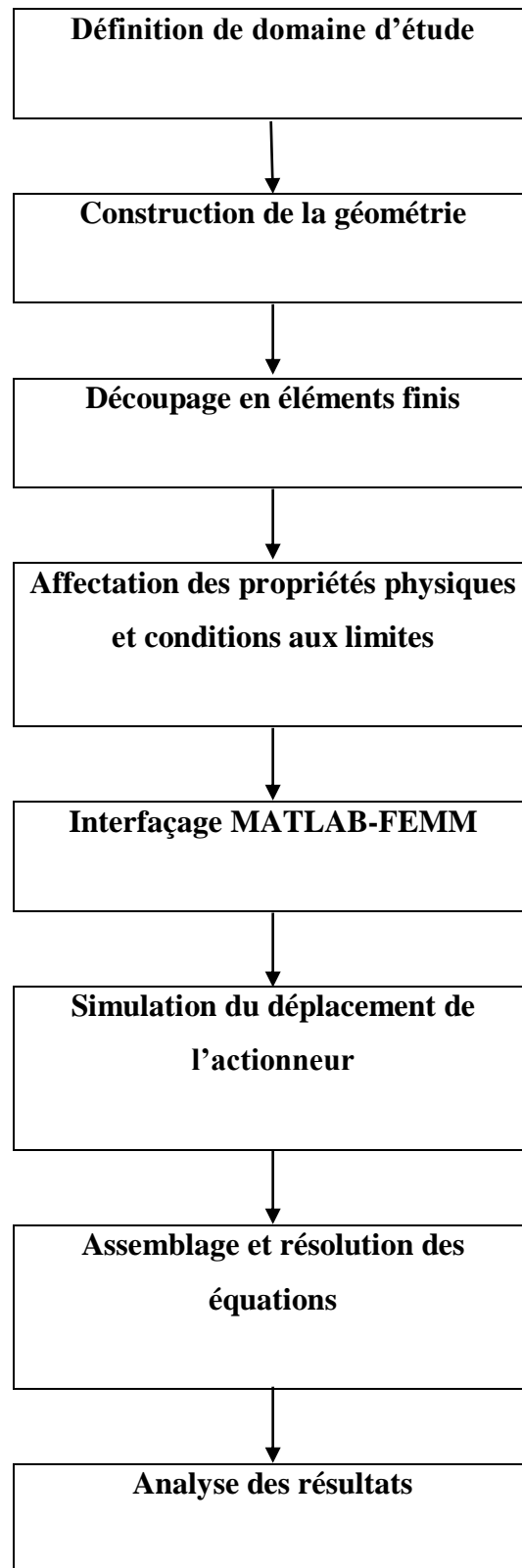
Ce logiciel peut être utilisé sans interface graphique au travers du langage script "LUA". Il est dédié aux problématiques du génie électrique, ses menus utilisent le vocabulaire du domaine et il possède un ensemble de pré et de post-traitement dédié à ces problématiques (introduction de la courbe  $B(H)$  pour les matériaux magnétiques non linéaires, conditions de périodicité, calcul des pertes par effet Joule, visualisation des champs électromagnétiques, calcul de forces électromagnétiques, etc.). Il est possible de mettre en place un couplage magnétique-thermique via le langage script LUA.

Par contre il ne possède pas de techniques permettant la prise en compte du mouvement dans les actionneurs électromécaniques. Il existe une bibliothèque de matériaux magnétiques. La version FEMM 4.2 contient une boîte à outils, qui permet d'interfacer FEMM avec Matlab ou Mathematica. **(Pour plus de détail voir l'annexe)**

#### **IV.7 Étapes de résolution avec F.E.M.M**

Afin de résoudre un problème magnétostatique et de faible fréquence en deux dimensions (2D). Le logiciel FEMM qui est une suite de programme, nous permet de résoudre

ce problème et pour cela on passe par plusieurs étapes de résolution. Alors on suit l'organigramme suivant qui représentent toutes les étapes à suivre :



**Figure III.3 :** Organigramme des étapes de résolution par l'outil FEMM

#### IV.8 Calcul des performances du moteur asynchrone à rotor massif lisse en régime permanent

La présence des courants induits dans le rotor massif rend la modélisation par des circuits couplés imprécise. Le recours à un modèle numérique tel que celui des éléments finis s'est avéré donc nécessaire. La résolution du système d'équations doit être menée en parallèle avec l'équation électrique par phase du moteur étudié (Fig. II. 4). Cette équation peut s'écrire ainsi [6], [21], [22], [23]:

$$\bar{V} = r_1 \bar{I} + jx_1 \bar{I} + \bar{E} \quad (\text{III-3})$$

où  $\bar{V}$  désigne la tension efficace complexe appliquée à la phase statorique considérée,  $\bar{I}$  est le courant efficace complexe absorbé,  $r_1$  la résistance par phase du bobinage statorique,  $x_1$  la réactance de fuite,  $r_2$  la résistance rotorique ramenée au stator,  $x_2$  la réactance rotorique,  $X_m$  la réactance de magnétisation,  $R_f$  la résistance équivalente aux pertes fer et  $\bar{E}$  la force électromotrice ( $\bar{E} = \bar{Z} \bar{I}$ ).

La résistance et la réactance de fuite de la phase statorique sont déterminées expérimentalement.

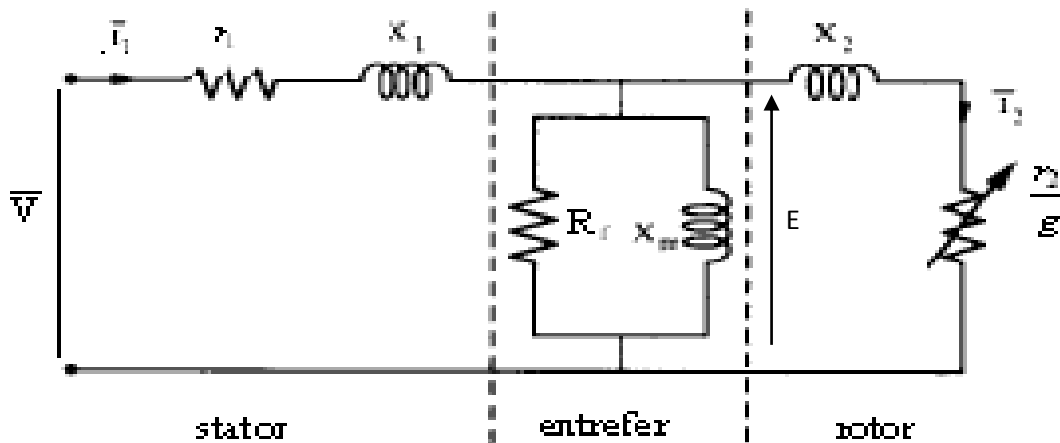


Figure.III. 4. : Schéma équivalent par phase de la machine étudiée

Les grandeurs électromagnétiques caractérisant le fonctionnement de la machine étudiée peuvent être déterminées une fois que le potentiel vecteur magnétique complexe est déterminé dans les domaines statorique et rotorique.

#### IV.8.1 Flux embrassé par encoche et par phase

Le flux complexe, embrassé par encoche et par phase, est calculé en utilisant la relation suivante [1], [2], [6] :

$$\bar{\varphi} = \frac{L}{S} \iint_S \bar{A} ds \quad (\text{III-4})$$

S représente la surface d'une encoche statorique.

L la longueur utile de la machine.

Le flux de phase est obtenu par :

$$\bar{\Psi} = N.[C]^t . \bar{\varphi} \quad (\text{III-5})$$

Où N et [C] représentent respectivement le nombre de conducteurs en série par encoche et la matrice de connexion des encoches par rapport aux phases.

#### IV.8.2 Force électromotrice

La force électromotrice est donnée par [3] :

$$\bar{E} = -j\omega . \bar{\Psi} \quad (\text{III-6})$$

#### IV.8.3 Pertes Joules

Les pertes joules dans la machine sont de deux types : Celles dissipées dans les conducteurs du stator et celles dues aux courants induits dans les matériaux conducteurs du rotor. Pour une machine triphasée, les expressions des pertes Joule statoriques et rotoriques sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} P_{j_s} &= 3.r_1 . |\bar{I}|^2 \\ P_{j_r} &= L \iint \frac{|\bar{J}_r|^2}{2\sigma} ds \end{aligned} \quad (\text{III-7})$$

avec  $\bar{J}_r = jg\omega\sigma\bar{A}_r$

#### IV.8.4 Puissances

Des grandeurs importantes dans le cahier de charge d'une machine électrique telles les puissances active et réactive peuvent être évaluées grâce aux expressions suivantes :

$$P(\text{abs}) = 3 \cdot \text{Re}(\bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1^*) \quad (\text{III-8})$$

$$P(\text{réact}) = 3 \cdot \text{Im}(\bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1^*) \quad (\text{III-9})$$

$\bar{I}_1^*$  est le conjugué du courant  $\bar{I}_1$

La puissance apparente est déterminée comme suit :

$$S = (P(\text{abs})^2 + P(\text{réact})^2)^{0.5} \quad (\text{III-10})$$

En absence des frottements, la puissance mécanique coïncide avec la puissance utile sur l'arbre. Elle est donnée par la relation suivante :

$$P(\text{méc}) = P(\text{trans}) - P_{jr} \quad (\text{III-11})$$

avec :

$$P(\text{trans}) = 3 \cdot \text{Re}(\bar{E} \cdot \bar{I}_1^*) \quad (\text{III-12})$$

#### IV.8.5 Couple électromagnétique

Le couple électromagnétique, développé par la structure étudiée, est déterminé en utilisant la relation suivante :

$$\Gamma = 2p L_u r^2 \sum_{i=1}^{N_{el}} H_t B_r \quad (\text{III-13})$$

où  $p$  représente le nombre de paires de pôles et où  $N_{el}$  représente le nombre d'éléments sur le rayon considéré,  $L_u$  la longueur utile de la machine et  $r$  le rayon d'alésage.

#### IV.8.6 Facteur de puissance

Le facteur de puissance est calculé à partir du rapport des puissances active et apparente.

$$\cos(\varphi) = \frac{P(\text{abs})}{S} \quad (\text{III-14})$$

### IV.8.7 Rendement

Le rendement est calculé en utilisant l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P(\text{méc})}{P(\text{abs})} \quad (\text{III-15})$$

### IV.9 Identification des paramètres du circuit équivalent

Les circuits équivalents sont l'un des outils les plus traditionnels utilisés pour optimiser la conception des moteurs. En effet, le lien entre les modèles établis par la méthode des éléments finis et le circuit équivalent est profondément appréciable pour engendrer les changements souvent évalués en termes d'effets qu'ils auront sur les paramètres de circuit équivalent. Il est très difficile de prendre en compte les géométries complexes, saturation magnétique et l'effet de peau. L'utilisation de la méthode des éléments finis dans la modélisation des machines électriques tournantes a apporté une avance significative dans le degré de l'exactitude des modèles élaborés pour prévoir leur fonctionnement [22].

Pour déterminer les paramètres par phase de circuit équivalent, il faut d'abord déterminer le courant statorique complexe  $\bar{I}_1$  (équation (III-3)).

En se référant au schéma équivalent de la figure (III-4), les différents paramètres sont définis comme suit [22]:

#### IV.9.1 La réactance de magnétisation

Pour déterminer la réactance de magnétisation, un calcul à vide est effectué ( $g=0$ ), à partir des équations électriques déduites de schéma équivalent, on peut écrire la formule suivante :

$$x_m = \frac{|\bar{E}(\text{à vide})|}{|\bar{I}_1|} \quad (\text{III-16})$$

#### IV.9.2 le courant de magnétisation

Une fois la réactance de magnétisation est déterminée, on peut déduire le courant magnétisant pour les différents glissements :

$$\bar{I}_m = \frac{\bar{E}}{jx_m} \quad (\text{III-17})$$

### IV.9.3 Le courant rotorique

Le courant rotorique est défini par la formule suivante :

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 - \bar{I}_m \quad (\text{III-18})$$

### IV.9.4 La résistance rotorique

La résistance rotorique ramenée au stator peut être déduite à partir des pertes joules calculées au niveau de rotor :

$$r_2 = \frac{P_{jr}}{3|\bar{I}_2|^2} \quad (\text{III-19})$$

### IV.9.5 La réactance magnétique

La réactance magnétique rotorique est déterminée comme suit :

$$x_2 = \text{Im}\left(\frac{\bar{E}}{\bar{I}_2}\right) \quad (\text{III-20})$$

**IV.10 Conclusion**

Ce chapitre a présenté une étude approfondie de la modélisation par éléments finis (EF) d'une machine à induction à rotor massif en utilisant le logiciel FEMM 4.2. Nous avons exploré les principes théoriques sous-jacents à la méthode des éléments finis et mis en évidence son efficacité pour capturer les interactions complexes entre les champs électromagnétiques et les structures matérielles de la machine. L'application de cette méthode nous a permis de simuler avec précision le comportement de la machine sous diverses conditions de fonctionnement, offrant ainsi des informations détaillées sur ses performances.

Les résultats obtenus ont été comparés aux données expérimentales et aux modèles analytiques existants, démontrant une bonne concordance et validant ainsi l'approche par EF comme outil fiable pour l'étude des machines à induction à rotor massif. Cette méthode s'est avérée particulièrement utile pour identifier les points de performance critiques et proposer des améliorations potentielles, contribuant ainsi à l'optimisation de la conception et à l'amélioration des performances de ces machines.

En conclusion, l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la modélisation des machines à induction à rotor massif s'est révélée être une approche puissante et précise, permettant non seulement une meilleure compréhension des phénomènes électromagnétiques et thermiques en jeu, mais aussi une optimisation substantielle de la conception et des performances des machines. Les connaissances acquises grâce à cette étude fournissent une base solide pour des recherches futures et des développements technologiques dans le domaine des machines électriques, ouvrant la voie à des applications encore plus robustes et efficaces dans divers secteurs industriels et de transport.

# **Chapitre IV**

## **Résultats théoriques et Discussion**

## **V.1 Introduction**

Nous avons présenté, dans le Chapitre précédent, le calcul électromagnétique de la machine asynchrone à rotor massif lisse. Dans le présent Chapitre, nous cherchons à valider et discuter les résultats obtenus, dans le cas du prototype étudié.

Dans cette dernière partie, nous clôturons l'étude et nous la rattachons au but recherché : contribution à la modélisation électromagnétique bidimensionnelle par la méthode des éléments finis d'une machine asynchrone à rotor massif. Dans les chapitres précédents, nous avons mis l'accent sur un calcul de champ électromagnétique bidimensionnel avec prise en compte de la saturation magnétique. Ce présent chapitre, renfermera diverses simulations effectuées sur une machine asynchrone à rotor massif.

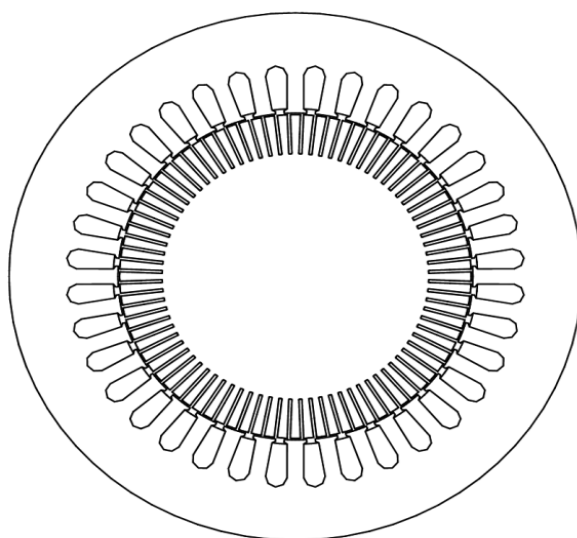
A l'aide d'un logiciel 2D basé sur la méthode des éléments finis (F.E.M.M) FiniteElement Method Magnetics [4], nous aurons à exécuter un programme écrit en code L.U.A écrit à partir de la commande pré-processeur (femm.exe) suivants plusieurs étapes successives toutes en respectant les conditions aux limites et les hypothèses simplificatrices.

l'application est faite en étudiant l'influence de la géométrie du rotor sur la distribution des l'induction dans l'entrefer ainsi que sur la distribution des courants induits dans le rotor.

## **V.2 Validation du modèle éléments finis**

### **V.2.1 Présentation de la machine étudiée**

Le prototype étudié est une machine à induction triphasée à rotor massif de puissance 7.5 kW, 50 Hz, 380 V connectée en étoile. La confédération géométrique de cette machine en coupe transversale est donnée par la figure.IV.1. Les caractéristiques de la machine étudiée (Fig.IV.1) sont données dans le Tableau.IV.1.

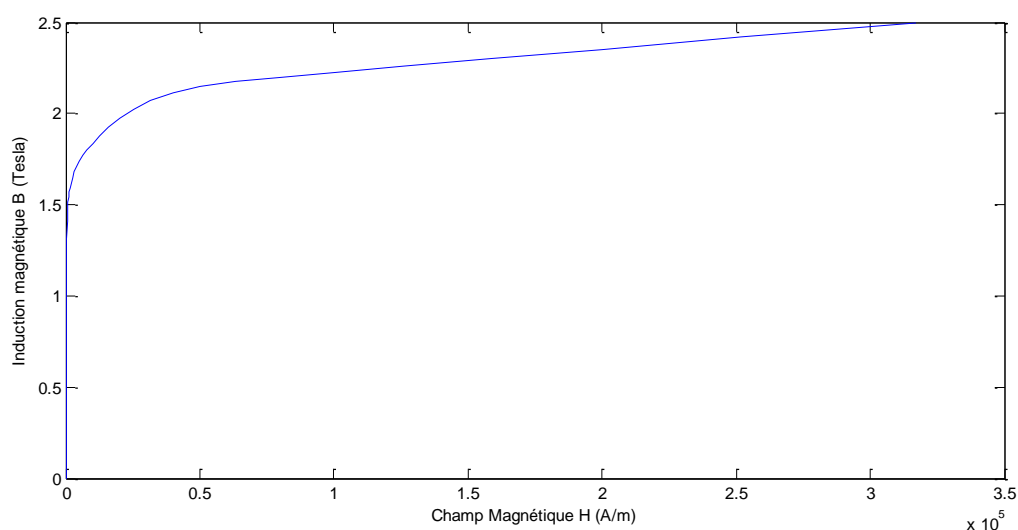


**Figure IV.1 :** Configuration géométrique de la section transversale de la machine

| Paramètres                            | grandeurs |
|---------------------------------------|-----------|
| Puissance nominale (kW)               | 7.5       |
| Tension nominale (V)                  | 380       |
| Fréquence nominale (Hz)               | 50        |
| Nombres de pôles                      | 4         |
| Nombres de phases                     | 3         |
| Nombres de voies parallèles           | 1         |
| Nombres de conducteurs dans l'encoche | 20        |
| Longueur de la machine (m)            | 0.146     |
| Diamètre externe du stator (m)        | 0.202     |
| Diamètre interne du stator (m)        | 0.125     |
| Nombres d'encoches                    | 36        |
| Diamètre externe du rotor (m)         | 0.124     |
| Diamètre interne du rotor (m)         | 0.047     |
| Nombres d'encoche au rotor            | 84        |

**Tableau IV.1 :** Paramètres du prototype étudié

Le stator est composé d'un matériau ferromagnétique non linéaire constitué en tôle d'acier de conductivité électrique supposée nulle possédant 36 encoches dans lesquelles des enroulements triphasés en cuivre de conductivités  $58.1 \times 10^6 \text{ S/m}$  sont constitués. Le type ainsi que les dimensions utilisées pour l'encoche statorique est montrée dans la figure IV.4. Le rotor est aussi composé d'un matériau ferromagnétique constitué en acier non linéaire. De conductivité  $4.30 \times 10^6 \text{ S/m}$  et possède 84 rainures qui est un avantage en terme de couple de la machine. La géométrie des rainures utilisées dans le rotor est illustrée par la figure.IV.5. La caractéristique magnétique de l'acier rotorique et du fer statorique est montrée dans la figure. IV.2 et figure.IV.3 respectivement. Le type et les dimensions géométriques de l'encoche statorique et rotorique sont montrées respectivement par les figures IV.4 et IV.5.



**Figure IV.2 :** Caractéristique magnétique  $B=f(H)$  du fer statorique

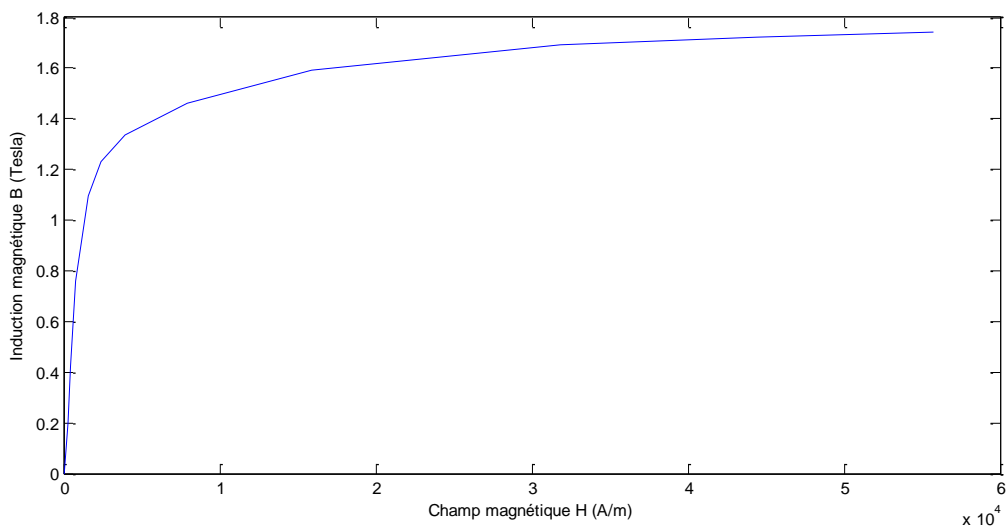


Figure IV.3 : Caractéristique magnétique  $B=f(H)$  du fer rotorique

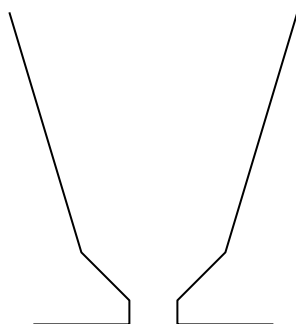


Figure IV.4 : Dimensions géométrique principale d'une encoche du stator

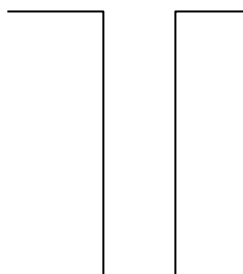
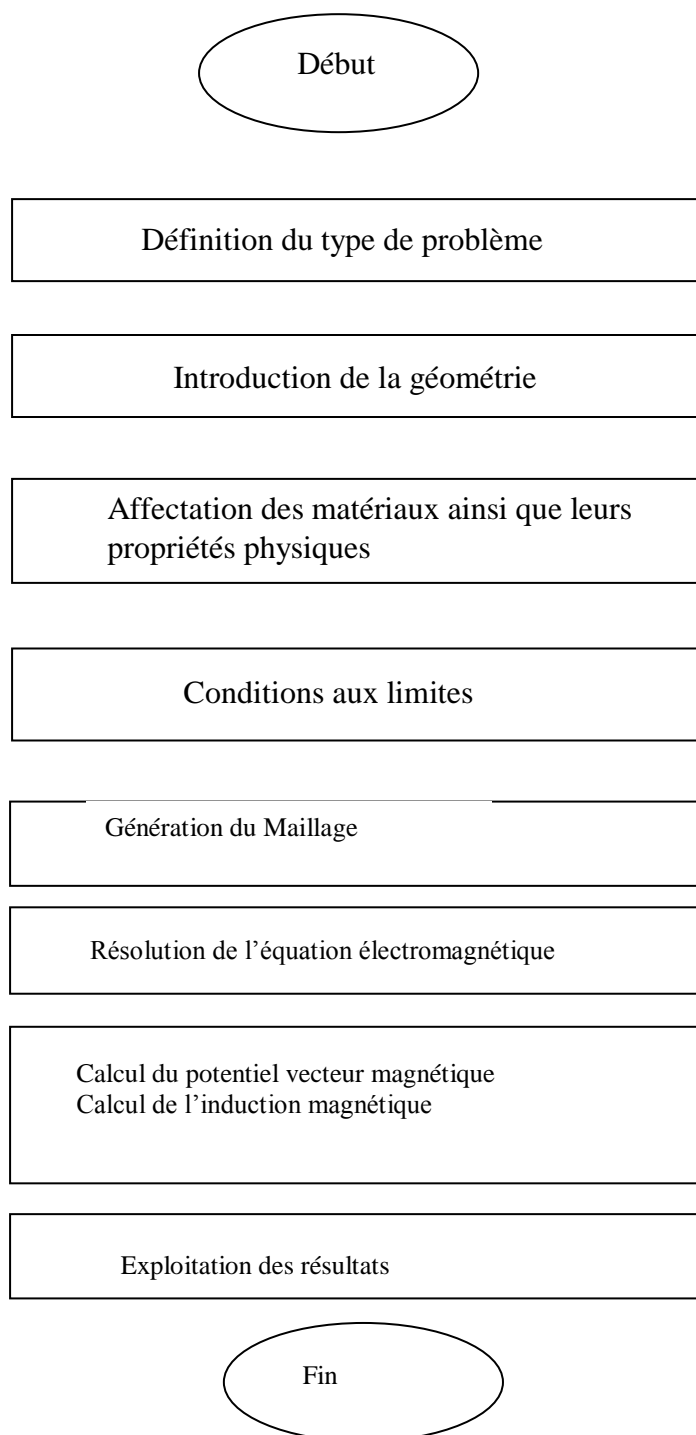


Figure IV.5 : Dimensions géométrique principale d'une rainure du rot

### V.3 Etapes de calcul

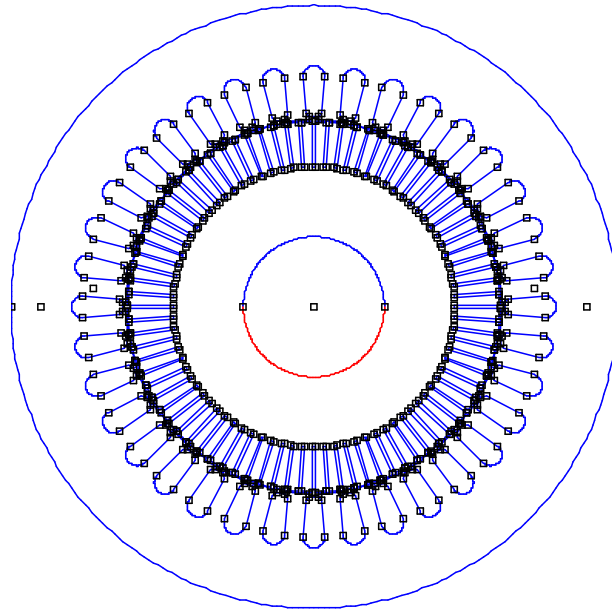
L'organigramme de calcul est donné par :



**Figure IV.6 :** Organigramme d'étude de la machine étudiée.

#### V.4 Implémentation de la géométrie et du maillage

La géométrie de la structure complète 2-D de la machine étudiée est réalisée en utilisant le logiciel F.E.M.M .4.2. la figure IV.9 représente la vue radiale de la machine avec les détails des en



**Figure IV.7 :** Modèle géométrie transversale de la machine asynchrone à rotor massif

Le maillage de la géométrie donnée par la figure IV.9 a été automatiquement réalisé en utilisant le logiciel F.E.M.M pouvant générer une topologie de maillage optimale.

Le nombre de nœuds et de triangles sont respectivement (156402) et (312)

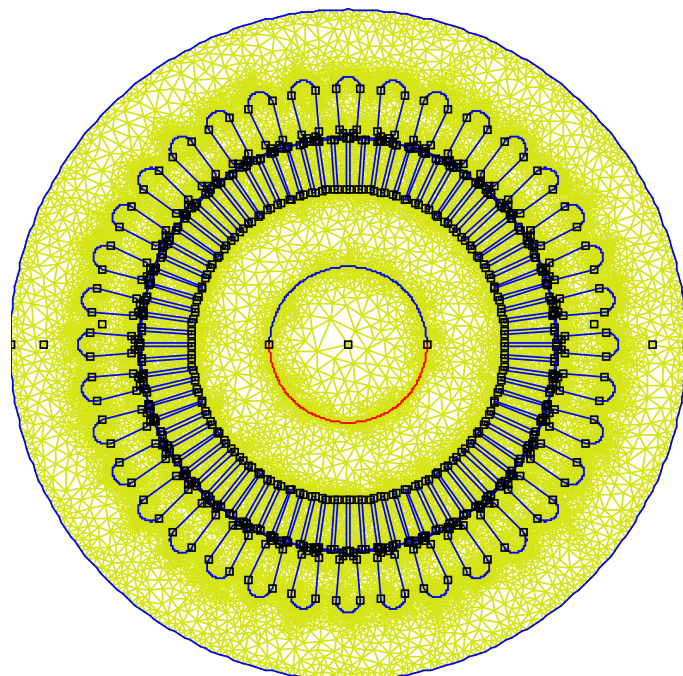


Figure IV.8 : Maillage de la machine asynchrone à rotor massif

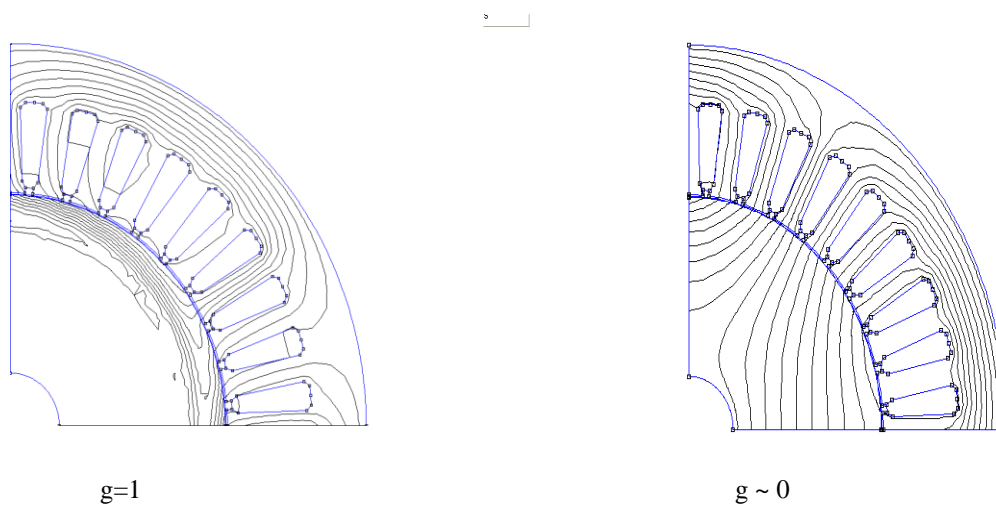
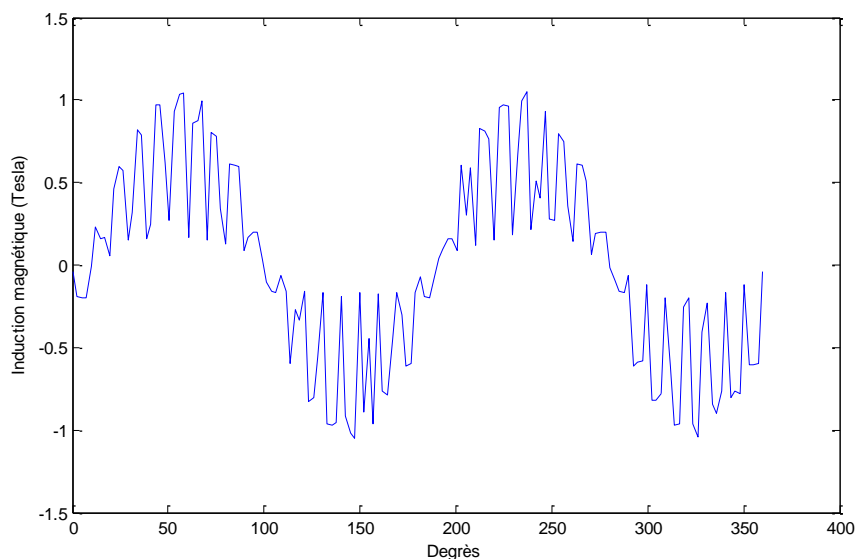


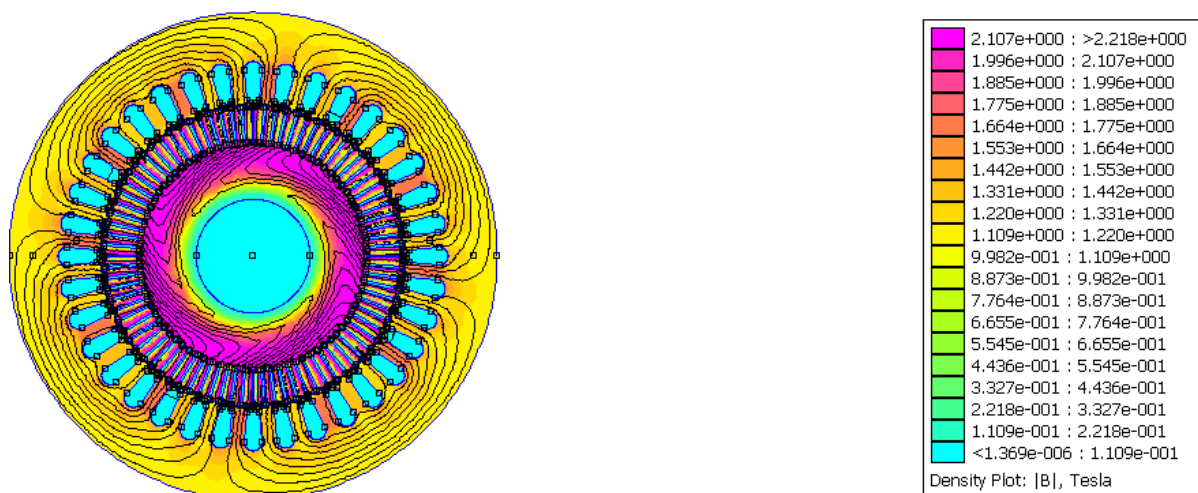
Figure IV.9 : Lignes de champs au démarrage et à vide

La figure IV.14 représente la distribution des inductions dans l'entrefer à vide  $g=0$



**Figure IV.10 :** Distribution des inductions dans l'entrefer à vide  $g=0$

La figure IV.11 illustre la répartition spatiale du module de l'induction pour une machine à induction pour un glissement de 5%.



**Figure IV.11 :** Variation du module de l'induction magnétique dans la machine

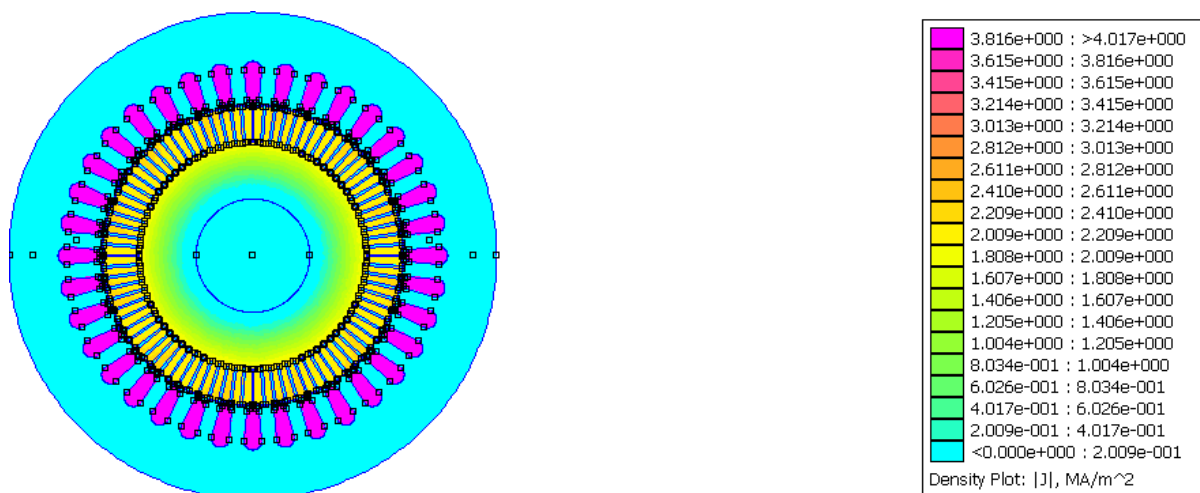


Figure IV.12 : Distribution des courants induits

### V.5 Paramètres du circuit équivalent

En couplant les résultats issus de la résolution par la méthode des éléments finis et les équations électriques déduites à partir de circuit équivalent, les paramètres déterminés sont représentées dans les figures (IV.12) et (IV.13). Pour la réactance de magnétisation, nous nous sommes limitées à une seule valeur.

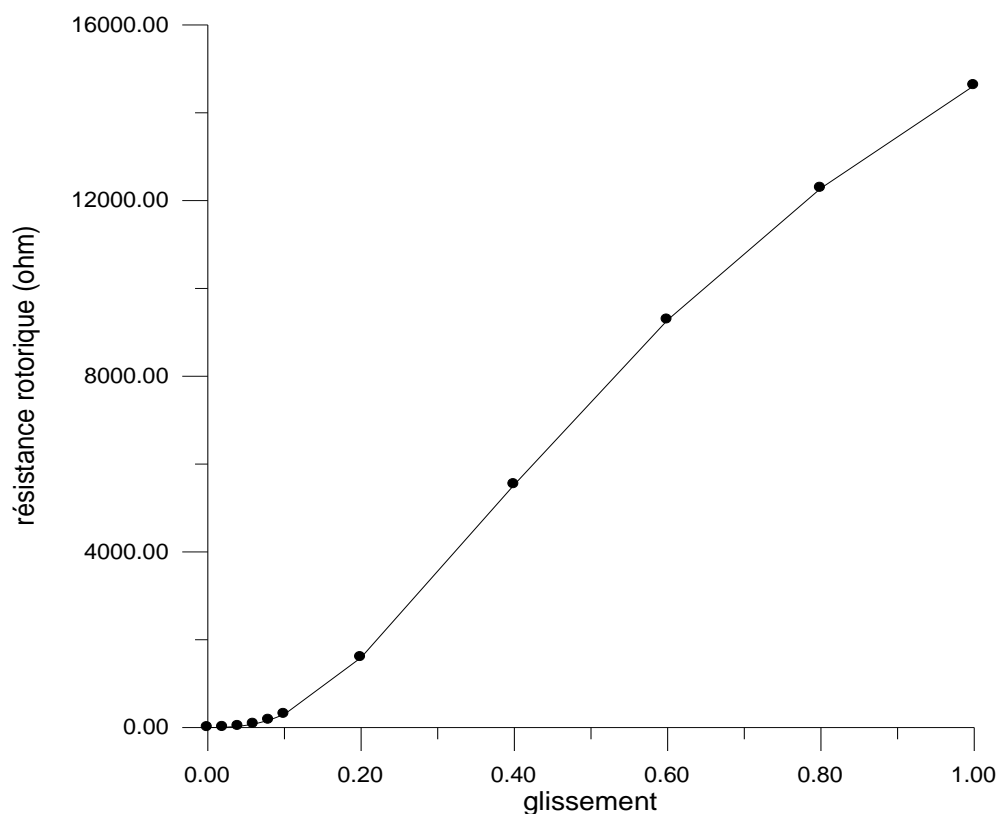


Fig. IV.13 : Résistance rotorique en fonction de glissement

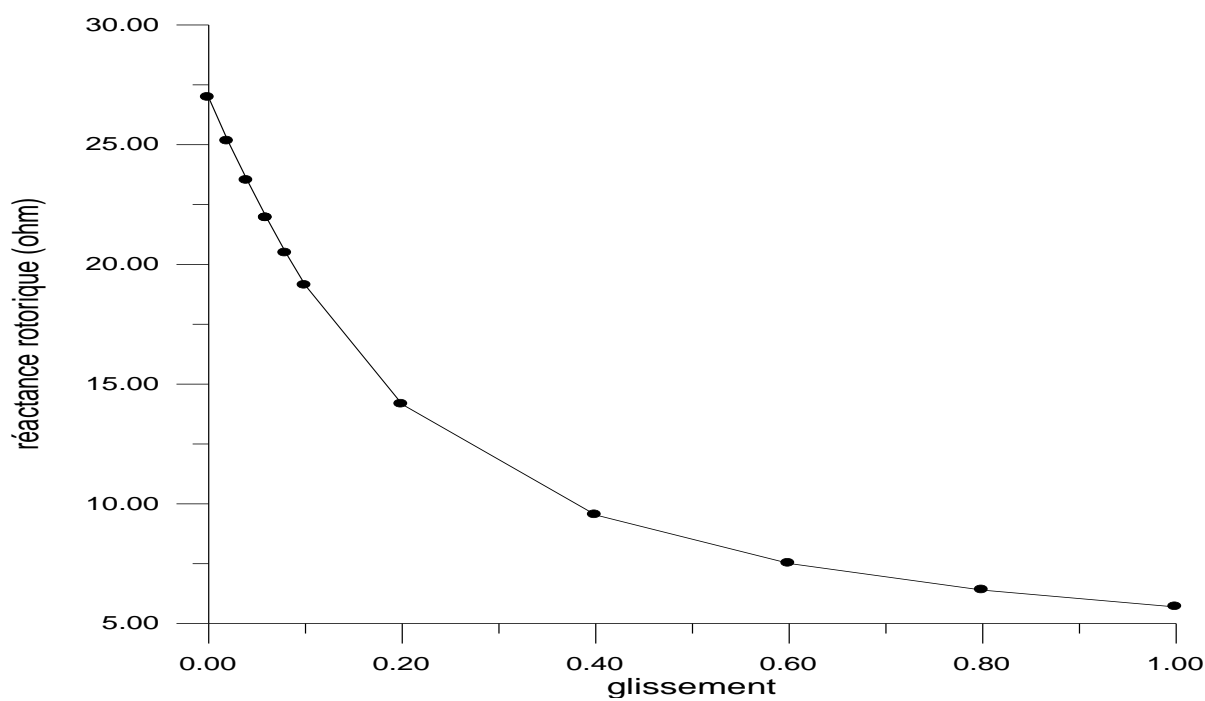


Fig. IV.14 : Réactance rotorique en fonction de glissement

Les figures (IV.13) et (IV.14) montrent l'effet de la saturation magnétique sur les paramètres du circuit équivalent (résistance et réactance rotorique). Ces paramètres sont en fonction du glissement.

## **V.6 Conclusion**

En utilisant FEMM 4.2 avec un code de calcul sous LUA script, basé sur la méthode des éléments finis 2D, nous avons pu résoudre les équations de la magnétodynamique complexe dans le cas d'un moteur asynchrone à rotor massif lisse en tenant compte de la saturation. On a déterminé les paramètres des schémas équivalents à savoir la résistance rotorique ainsi que la réactance rotorique en fonction du glissement. La machine asynchrone à rotor massif présente donc des harmoniques d'espace importants et il est nécessaire de les prendre en considération pour améliorer la précision des résultats.

# **Conclusion générale**

Un modèle élément finis à deux dimensions a été utilisé sous environnement F.E.M.M 4.2 afin de calculer les courants induits dans une machine à induction triphasée, 50 Hz, 380 V de puissance 7.5 kW à rotor massif, connectée en étoile. La densité de courant dans les enroulements statorique est prise comme source dans le modèle élément finis. La formulation en potentiel vecteur magnétique est utilisée pour le calcul des courants induits dans le rotor.

La cartographie de la distribution des courants induits montre que ces courants sont plus distribués sur les dents rotoriques.

A l'aide du code de calcul de champ FEMM 4.2, basé sur la méthode des éléments finis 2D, nous avons pu résoudre les équations de la magnétodynamique complexe dans le cas d'un moteur asynchrone à rotor massif rainuré en tenant compte de la saturation. Pour les calculs spécifiques à notre étude, nous avons effectué les programmes nécessaires en utilisant le langage LUA compatible avec ce dernier code.

La distribution 2D de la densité de flux magnétique dans la machine à induction à rotor massif illustrée par la figure.(....) montre que la densité de flux magnétique semble se concentrée dans le dos du stator dans la région interpoles et dans les dents du stator à cotés des pôles. Dans le rotor, le flux est plus concentré sur la surface du rotor à cause du fait que les courants induits dans les dents rotorique tendent à s'opposer à la pénétration du flux dans celles-ci. Cela est du à l'effet de peau dans le rotor.

## Bibliographie

- [1] BOUNAR Amina et CHERAITIA Khadidja : « Calcul analytique des machines asynchrones à rotors massifs », ENP 2015.
- [2] F. Rioux-Damidau, C. Rioux, A. Gueraud. Machines asynchrones à rotor massif composite.  
Revue de Physique Appliquée, 1989, 24 (11), pp.1039-1047.
- [3] Mr ARKOUB Nadir, Mr BODE DERE Salé Bourkaou, «Amélioration des performances du démarrage d'un moteur asynchrone à cage d'écureuil avec insertion des pièces ferromagnétiques dans les encoches rotoriques» Université Abderrahmane Mira Bejaia 2017
- [4] Djediai Ammar, Tedjini Noureddine, «Comparaison des performances des différents types de machines asynchrones en régimes dynamique et permanent UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA 2019
- [5] Institut d'automatisation industrielle, Haute école spécialisée de Suisse occidentale, cours chapitre7 Systèmes électromécaniques LES MOTEURS PAS À PAS.
- [6] ABCCLIM. <http://www.abcclim.net/moteur-asynchrone-triphas.html>, Juillet 2016
- [7] M.Bertin, J.P.Faroux, J.Renault: «Electromagnétisme 2 : phénomènes d'induction et Électrocinétique », Dunod édition 1979.
- [8] M.JUFER :« Circuits magnétiques », Techniques de l'ingénieur, D 1050, 1989.
- [9] Jin, J.-M. (2015). The Finite Element Method in Electromagnetics (3rd ed.). Wiley-IEEE Press.
- [10] J.Hupponen, «High-Speed Solid-Rotor Induction Machine – Electromagnetic Calculation and Design»,Doctoral Dissertation, Lappeenranta University of Technology, Lappeenranta, Finland, (2004)
- [11] C. Barnetche, « Calcul numérique de machines asynchrones en régime transitoire, en tenant compte de la saturation magnétique », Thèse de doctorat de l'INPL, Nancy, Octobre, 1997.
- [12] R. Kechroud, « Contribution à la modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis associée aux multiplicateurs de Lagrange », Thèse de doctorat d'état, ENP, Avril, 2002.

- [13] P.Silvester, R.L.Ferrari: « Finite elements for electrical engineers », Cambridge University Press, Third edition 1996.
- [14] G.Touzot, G.Dhatt: «Une représentation matricielle de la méthode des éléments finis », Maloine éditeur, deuxième édition 1984.
- [15] D.Meeker, «Manual of Finite Element Method Magnetics FEMM » ,<http://femm.foster-miller.net>.
- [16] B.Brunelli, D.Casudei, U.Reggiani,G.serra (1983).’’Transient and Steady – state Behavior of solid rotor induction machines, IEEE Trans.Magn,19(6) : 2650-2654
- [17] T.Aho, J.Nerg, J.Pyrhonen, (2006). The effect of the number of rotor slits on the performance characteristics of medium speed solid rotor induction motor. In Proc.3<sup>rd</sup> IET. Conf.power Electronics, Machines and Drives, pages 515-59, Dublin, Irland.
- [18] S.L.Ho, Niu.Shuangxia,W.n.Fu (2010) .‘’ A novel solid rotor induction motor with skewed slits in radial and axial direction and its performance analysis using finite element method.Trans.App.Superconductivity,20 (3): 1089-1092.
- [19] J.F Gieras (1955) Solid rotor induction motor design , pages 293-298. In Engelmann,R., Middendorf,W.Handbook Inc., New York.

(Jan Staszak. "Solid-Rotor Induction Motor Modeling Based on Circuit Model Utilizing Fractional-Order Derivatives." *Energies*, 2022, 15(17), 6371. DOI: 10.3390/en15176371.)