

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE POPULAIRE ET DÉMOCRATIQUE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMÉRI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DU GÉNIE DE LA CONSTRUCTION
DÉPARTEMENT GÉNIE-CIVIL



THÈSE DE DOCTORAT EN GÉNIE CIVIL
OPTION : STRUCTURES ET MATÉRIAUX

Présentée par :

M^{me} YACOUB née SMAHI Rebiha

THÈME

**Modélisation du comportement non linéaire par la
mécanique de l'endommagement des structures
en béton armé**

Devant le Jury composé de :

Mr HAMIZI Mohand
Mr BOUAFIA Youcef
Mr TAHAKOURT Abdelkader
Mr NECHNECH Ammar
Mr ZERIZER Abdelatif

Professeur, UMMTO
Professeur, UMMTO
Professeur, UAM Béjaia
Professeur, USTHB
Professeur, UMB Boumerdés

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur

Soutenue, le : 30 / 05 /2015

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements à monsieur le professeur Y.BOUAFIA qui a accepté d'être rapporteur.

Je le remercie d'avoir suivi et examiné ce travail avec tant d'intérêt et d'attention.

Je remercie vivement, Mme le professeur Hélène Dumontet professeur à l'Institut Jean le Rond d'Alembert (Université Pierre et Marie Curie, Paris Cedex 05) pour m'avoir accueillie et permis d'effectuer un Stage de courte durée du 31 Aout au 20 Septembre 2010 au sein de son service (Mécanique et Ingénierie des solides et des structures) situé au site JUSSIEU et pour sa disponibilité et de l'intérêt qu'elle a apporté à mon travail.

Durant toute la durée de mon stage j'ai appris en elle, le dévouement, la sagesse et surtout la grande responsabilité envers la tâche d'enseignement et la recherche scientifique.

Ma gratitude va aussi vers Mr Alliche Abdenour (Maître de Conférences - Habilité à Diriger des Recherches à l'Institut Jean le Rond d'Allembert -UPMC).

C'est pour moi aussi un plaisir d'exprimer ma reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont à mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

Que les membres de jury désignés pour juger ce travail trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

« L'enseignement devrait être ainsi : celui qui le reçoit le recueille comme un don inestimable mais jamais comme une contrainte pénible »

Albert Einstein

DEDICACES

A mes très chers parents.

A mon cher mari Mustapha.

A mes adorables enfants Melissa Ilyas et Nadir

A mes frères et sœurs.

A ma belle famille.

Résumé

Un nouveau modèle est introduit, pour prédire le comportement réel, non linéaire, du matériau béton et ce jusqu'à la rupture. Il permet de décrire le comportement non linéaire du béton sous chargement monotone vérifiant les principes de la mécanique de l'endommagement et les concepts de la mécanique de la rupture tout en utilisant les fondements de la mécanique continue des matériaux.

Le comportement mécanique non linéaire du béton en unidirectionnel est décrit par deux lois (SARGIN pour la compression et GRELAT pour la traction). En introduisant deux variables de dommage appliquées en unidirectionnel notée respectivement D_t en traction et D_c en compression, leurs combinaison avec les lois de la mécanique des matériaux continue (loi de Hooke généralisée), et la théorie de la mécanique de l'endommagement (théorie de l'isotropie du dommage, et principe de la déformation équivalente), nous amène à une loi de variation du dommage en tridirectionnel appliquée en bidirectionnel notée D_{tot} .

La variation du coefficient de Poisson en compression uniaxial du béton a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs : Sami, A., Klink, (1975), Murray D.W. (1979), Niels Saabye ottosen, (1980), Atheel E. Allos., L.H.Martin,(1981), Ramtani.S, Y. Berthaud ,J. Mazars,(1992) et Ferretti, E.,(2004). Alors qu' en multiaxial on peut citer: Chen (1982), Guo, (1997), Zhu, (1998), Hyuk-Chun Noh , Hyo-Gyoung Kwak, (2006) et Ding Faxing Yu Zhiwu, (2006).

La prise en compte de l'évolution du coefficient de Poisson et du dommage en unidirectionnel permet de décrire et de suivre correctement le comportement réel du béton et ce jusqu'à rupture. Les deux variables de dommage, respectivement, en compression et en traction, sont très représentatives du comportement non linéaire du béton pour un état unidirectionnel. A la valeur de la déformation de rupture en compression adoptée par le BAEL (3,5 ‰) correspond une valeur de dommage D voisine de 0,8 (< 1). La constante a permet de prendre en compte la ductilité du matériau en traction.

La prise en compte de la variation du coefficient de Poisson $\tilde{\nu}$ rend mieux compte du comportement réel et cette étude montre son influence directe sur la déformation latérale et sur la déformation volumique. Enfin, le dommage de type volumique D_v (changement de volume) responsable de la variation du coefficient de compressibilité, reste faible devant le dommage de type déviatorique (changement de forme) : seul paramètre à affecter le module de Young.

La Variable de dommage obtenue notée D_{tot} est valable quelque soit l'état de contrainte (uni-bi et tri directionnel) ; dépend de la seule variable observable ε et dépend uniquement des différents dommages créés dans les trois directions principales de déformations

D_1, D_2, D_3 . S'est aussi une variable qui représente le dommage totale et ceci quelque soit l'état de contraintes. Cette variable définit un dommage de type déviatorique (obtenue à partir d'un état de cisaillement pur), tel que dans le cas multiaxial, les différents dommages existants en fonctions des déformations locales principales $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, donne naissance à un seul dommage de type déviatorique, qui influe à lui seul sur le module de Young \tilde{E} . Un dommage volumique noté D_V (définissant un changement de volume), vient s'ajouter au dommage D_{tot} , imposé par la non linéarité du comportement du béton dans le cas d'un chargement hydrostatique, induisant ainsi une variation du coefficient de compressibilité et entraînant une variation du coefficient de Poisson en multiaxial. Prendre le coefficient de Poisson comme variable et dépendant des deux dommages deviatorique D_{tot} et volumique D_V , donne des résultats très proches de l'expérimental et ceci dans le cas d'un état de contrainte de compression biaxial.

Une modélisation du comportement non linéaire du béton armé en utilisant le modèle du treillis adoucissant d'angle variable «Rotating angle softened truss model» (RA-STM-Hus 1988) en tenant compte de l'endommagement locale définit par la variable de dommage adoptée dans notre modélisation pour le cas du béton seul et un logiciel de calcul élément finis est introduit basé sur le code de calcul (D. R. J. Owen et al, 1980).

Des confrontations des calculs aux résultats expérimentaux et par comparaison au modèle de MAZARS (Applications des relations d'évolutions adoptées-loi d'évolution du coefficient de Poisson, loi d'évolution du dommage en uni-bidirectionnel), tout en considérant l'effet du pourcentage d'aciers, ont permis de décrire et de suivre le comportement réel du béton (béton armé) et ce jusqu'à la rupture.

Mots- clés : Béton, Endommagement, Non linéaire, Rupture, Statique, Coefficient de Poisson, Loi de Hooke généralisée, Eléments finis, Isotrope, Dommage volumique, Dommage deviatorique, Biaxial, béton armé, pourcentage d'acier.

Abstract

A new Model is introduced, for predicting the nonlinear behavior of the concrete until the rupture. The non-linear behavior of the concrete is taken into account under monotonic load verifying the principles of the mechanics damage and the concepts of the mechanics of the fracture, using the foundations of the continuum mechanics of materials .

The nonlinear mechanical behavior of the concrete in unidirectional is described by two laws (Sargin for the compression and Grelat on the tension). By introducing two variables of damage applied in unidirectional respectively D_t in tension and D_c in compression. Their combination with the laws of the continuum mechanics of materials (Hooke's law generalized) and the theory of the mechanics damage (theory of the isotropy of the damage, and principle of the equivalent deformation), brings us to a law of variation of the damage in three-directional applied in bidirectional is described by a variable D_{tot} .

In addition, the variation of the Poisson's ratio of concrete in unidirectional compression has attracted the interest of several researchers we can cite: Sami, A., Klink, (1975) , Murray D.W. (1979), Niels Saabye ottosen, Atheel E. Allos., L.H.Martin, Ramtani.S, Y. Berthaud , J. Mazars, (1992) and Ferretti, E., (2004). For the three-dimensional, we can mention: Chen (1982), Guo (1997), Zhu (1998), Hyuk-Chun Noh, Hyo-Gyoung Kwak (2006) and Ding Faxing Yu Zhiwu, (2006). To best approach the real concrete behavior, we consider here the Poisson's ratio $\tilde{\nu}$ and Young's modulus \tilde{E} depending of the damage.

Taking into account the evolution of Poisson's ratio and unidirectional damage can describe properly the real behavior of concrete until rupture. Both variables of damage, respectively, in compression and tension, are representative of the non-linear behavior of the concrete for a unidirectional state. A value of rupture strain in compression adopted by the BAEL (3.5 ‰) corresponds to a value of damage about 0.8 ($D < 1$). The constant a can take into account the tensile ductility of the material.

Taking into account the variation of Poisson's ratio $\tilde{\nu}$ better reflects the real behavior and this study shows a direct influence on the lateral deformation and volumetric strain. Finally, the volumetric damage (volume change), responsible for the variation of the coefficient of compressibility, remains small compared to the deviatoric damage (change of form): only parameter to affect the Young's modulus.

The obtained Variable of damage noted D_{tot} is valid of the applied state of constraints on (uni - bi and tri- directional), ε depends on the only of damage create in three directional D_1, D_2, D_3 and strains $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. the deviatoric damage (change of form): only parameter to affect the Young's modulus \tilde{E} and the volumetric damage (volume change), responsible for the variation of the coefficient of compressibility. The most important conclusion is the equation of the coefficient \tilde{K} on nonlinear that it's taking different in unidirectional and bidirectional, so imposed to describe the real behavior of concrete. Finally Taking into account the evolution of Poisson's ratio and bidirectional damage can describe properly the real behavior of concrete until rupture.

A modelling of the non-linear behavior of the reinforced concrete one using the Rotating angle softened truss model (RA-STM-Hus on 1988) developed previously, by taking into account the damage local defines by the variable of damage adopted in our modelling for the concrete and the development of a finite-element software using a calculation codes of (*D. R. J. Owen and al, 1980*).

Confrontations of the calculations with experimental results (behavior of the concrete in biaxial compression and tension) have allowed to describe and to follow the real behavior of the concrete. The comparison of model calculations with experimental results presented in one hand, and with the results of calculation with the model of Mazars in the other hand, is very satisfactory. Applying relations changes adopted (evolution of Poisson's ratio, the damage evolution in uni and bidirectional) While considering the effect of the ratio of steels has correctly describe and track the actual behavior of concrete (reinforced concrete) and up to rupture.

Keywords: Concrete, damage, Nonlinear calculation, Rupture, Static, Poisson's ratio, Hooke's law generalized, Finite element, Isotropy, Volumetric damage, Deviatoric damage, Biaxial, Reinforced concrete, Steel ratio.



Table des matières



TABLE DES MATIERES

Table des matières	i
Introduction générale	1
Chapitre.1. Etude bibliographique.....	3
Partie. I. Résultats expérimentaux et interprétation du comportement mécaniques du béton et du béton armé sous chargement statique et monotone	3
I. Introduction.....	3
II. Etude du comportement expérimental du béton	3
II.1. Comportement expérimental du béton en compression.....	3
II .2. Comportement expérimental du béton en traction.....	6
II.2.1. Essai de traction directe	6
II.2. 1.1. Traction directe par Terrien (1980)	7
II.2. 1.2. Comportement du béton en traction selon PETERSON- HUGHES et CHAPMAN ..	7
II.2. 2. Essai de traction indirecte	8
II.2. 2.1. Essai sur un tirant en béton armé.....	8
II.2. 2.2. Traction par fendage.....	9
II.2. 2.3. Essai de traction par flexion.....	10
II.2. 2.4. Essai PIED	10
II. 3. Comportement biaxial du béton.....	11
II .4. Combinaison traction-compression.....	12
II .5. Comportement en traction pluri axial	13
II. 6. Comportement sous confinement du Béton.....	13
II.6.1. Confinement du béton	13
II.6.2. L'essai de confinement.....	14
II.7. Confinement du béton armé	15
II.8. Comportement triaxial hydrostatique.....	16
II.9. Phénomène unilatéral et endommagement du béton.....	16

III. Effet d'échelle dans les structures en béton	17
IV. Rupture des structures en béton et en béton armé	19
IV. 1. Mode de rupture	19
IV.1.1. Fissuration du béton.....	20
IV.1.2. Fissuration par Traction du béton	20
IV.2. Les causes de la fissuration.....	21
IV.3. Fissuration des structures en béton armé.....	21
IV. 3.1. Mécanismes de rupture d'une poutre en Béton Armé (BA).....	21
IV.2.2. Comportement global, d'une poutre en béton armé soumise à un essai de flexion trois points ou quatre points	22
IV.3.3. Rupture par flexion	23
IV.3.3.1. Rupture par la plastification de l'armature tendue due à la flexion.....	23
IV.3.3.2. Rupture par compression du béton due à la flexion associée à la plastification de l'armature tendue	24
IV. 3.4. Rupture par cisaillement.....	24
IV.3. 4. 1. Rupture due à la Contrainte principale Oblique (CO)	24
IV. 3.4. 2. Rupture due à la contrainte par cisaillement (CC)	25
IV.3. 4.3. Rupture due à l'Adhérence par Cisaillement (AC)	26
V. Conclusion	26

Partie. II. Modélisation numérique du comportement non linéaire du béton et du béton armé sous chargement statique et monotone - Le choix de la mécanique de l'endommagement

I. Introduction.....	27
II. Modélisation du comportement non linéaire du béton en compression.....	27
II.1. Modèles réglementaires.....	27
II.2. Modèles non linéaires.....	30
II. 2.1. Loi de comportement de SARGIN	31
II. 2.2. Loi de comportement de POPOVIC (1973)	33
II. 2.3. Loi de comportement de DESAYI et KRISNAN (1964).....	34
II. 2.4. Loi de comportement de MACGREGOR (1997)	35
II.2.5. Loi cubique.....	35

III. Comportement non linéaire du béton en traction uniaxiale	38
III.1. Comportement du béton en traction selon Grelat.....	38
III.2. Comportement du béton selon Quast et Espion	40
III.3. Comportement du béton selon MAZARS.....	41
III.4. Comportement du béton selon ZHEN-HAI et XIU-QIN	41
III.5. Comportement du béton selon SCANLON.....	42
III.6. Comportement du béton selon LIN	43
III.7. Comportement du béton selon BERGAN et HOLLAND.....	44
III.8. Expression proposée par Vecchio et Collins (1986).....	45
III.9. Autre modèles de comportement	46
IV. Modèles basés sur la théorie de l'endommagement.....	47
IV.1. Introduction à la mécanique de l'endommagement.....	47
IV.2. La théorie de l'endommagement	48
IV. 3. Modèle d'endommagement de Mazars	49
V. Modélisation du comportement statique et monotone de l'acier	54
V. 1. Les différents types d'aciers d'armatures.....	54
V. 2. Modélisation du comportement de l'acier d'armature.....	55
VI. Modèle de comportement non linéaire du béton armé.....	57
VI.1. L'importance de la modélisation du comportement non linéaire du béton armé sous effort de cisaillement et de flexion.....	57
VI.2. Choix du modèle du treillis adoucissant d'angle variable	58
VI.3. Développement du modèle «softenedtruss model theory »	60
VII. Conclusion	64

Chapitre.2. Modélisation du comportement non linéaire du béton et du béton armé par la mécanique de l'endommagement-

<i>Introduction de la variable du dommage D_{tot}</i>	66
I. Introduction.....	66
II. Hypothèses	66
III. Application de la théorie des milieux continus et principe d'homogénéisation.....	67
IV. Application du principe de la déformation équivalente : Introduction d'une variable de dommage	67
IV.1. Critères de l'étude	67

IV.2. Principes de l'étude	68
IV.3. Application de la loi de Hooke pour un état de déformation principal en tri directionnel	69
IV.3.1.Cas tridirectionnel	69
IV.3.2.Cas bidirectionnel	70
IV.3.3.Cas unidirectionnel.....	70
IV.4. Introduction de la variable de dommage D_{tot} en multiaxial	71
IV.5. Base du modèle	71
IV.6. Vérification de l'unicité de la variable de dommage D_{tot} en multidirectionnel	73
IV.7. Fonction seuil du dommage pour un état biaxial et triaxial et critère de rupture.....	74
V. Simulation numérique du modèle d'endommagement et organigramme de calcul.....	75
V.1. Application de la méthode des éléments finis.....	75
V.2. Modélisation par éléments finis	75
V.3. Modélisation du comportement non linéaire des structures en béton et en béton armé - Choix de la méthode de Newton Raphson modifié (méthode mixte)	76
V.4. Algorithme de calcul	78
VI. Conclusion	79
Chapitre.3 : Introduction de la variation du coefficient de Poisson.....	81
I. Un aperçut sur l'origine, et la définition du Coefficient de Poisson.....	81
II. Compression isostatique - Module de compressibilité	81
III. Introduction de la variation du coefficient de Poisson	82
III.1.Comportement en compression uni axial du béton	82
III.2.Essais expérimentaux.....	83
III.3.Différentes propositions des équations représentatives de la variation du coefficient de Poisson.....	87
III.4. Proposition d'une équation de variation du coefficient de Poisson.....	91
IV. Détermination de la contrainte de cisaillement τ_0 et de distorsion pur γ	93
V. Conclusion	94

Chapitre.4. Partie. I. Modélisation du comportement du béton en compression et en traction unidirectionnel par la mécanique de l'endommagement -Coefficient de Poisson variable	95
I. Introduction.....	95
II. Hypothèses.....	95
III. Variable de dommage en compression et en traction unidirectionnel	96
III.1. Application de la loi de Hooke généralisée et loi d'évolution du coefficient de Poisson	96
III.2. Variable de dommage en compression unidirectionnel.....	98
III.3. Variable de dommage D_t en traction unidirectionnel.....	101
IV. Application des deux variables de dommages D_c et D_t	104
IV.1. Application numérique de la loi de comportement ($\sigma - \varepsilon$) de SARGIN, et de la variable de dommage en compression unidirectionnel D_c	104
IV.2. Simulation du comportement en compression unidirectionnel du béton, confrontation avec le modèle de MAZARS (Mazars et al. (2006)).....	106
IV.3. Simulation de l'essai de traction uniaxial	108
IV.4. Simulation Du comportement latéral lors de l'essai de compression simple d'après Ramtani (Ramt-1990)	109
IV.5. Modélisation du comportement volumique du béton en compression uni axial.....	109
V. Conclusion	111

Chapitre.4. Partie. II. Modélisation du comportement biaxial du béton par la mécanique de l'endommagement- Coefficient de Poisson variable.....	112
I. Introduction.....	112
II. Bases du modèle.....	112
III. Critères de l'étude	113
IV. Variable de dommage en bidirectionnel - Loi d'évolution du coefficient de Poisson en multiaxial.....	113
IV.1. Introduction de la variable de dommage en bidirectionnel.....	113
IV.2. Introduction des deux variables de dommage en traction et en compression uniaxial	114
IV.3. Loi d'évolution du coefficient de Poisson en multiaxial	115

V. Application de la variable de dommage en bidirectionnel D_{tot} et du coefficient de Poisson $\tilde{\nu}$...	116
V.1. Simulation du comportement biaxial –coefficient de Poisson variable	116
V.1.1. Influence du dommage volumique sur les résultats du modèle.....	116
V.1.2. Confrontation du modèle avec l'expérimental et le modèle de Mazars.....	116
V.1.3. Modélisation du comportement en traction bi axial	118
V.2. Simulation du comportement d'une plaque entaillée en béton	119
VI. Conclusion.....	121

Chapitre.4. Partie.III. Modélisation du comportement non linéaire par la mécanique de l'endommagement des Structures en béton-Armé 122

I. Introduction.....	122
II. Hypothèses.....	122
III. Introduction des deux variables de dommage D_C et D_t et du coefficient de Poisson $\tilde{\nu}$ pour décrire le comportement non linéaire locale du béton et du béton armé	123
III.1. Introduction de la variable de dommage D_{tot}	123
III.2. Introduction de l'équation de variation du coefficient de Poisson $\tilde{\nu}$	123
IV. Modèle analytique d'un élément en B.A	124
IV.1. Principe de la méthode.....	124
IV.2. Base de la modélisation de l'élément en béton armé.....	126
V. Simulation du comportement non linéaire des structures en béton armé.....	127
VI. Conclusion.....	140

Conclusion générale 141

Bibliographie..... 143

Organigramme de calcul..... 159

Notice d'utilisation du programme de calcul..... 161



INTRODUCTION GENERALE



Introduction générale

Le béton ordinaire est un matériau hétérogène ; il est constitué de composant de caractéristiques morphologiques, mécaniques et physico-chimiques très différentes : ciment, Granulat, eau, air et éventuellement adjuvants ou ajouts. Chacun de ces éléments joue un rôle particulier dans le comportement du béton, les interactions entre les différentes phases sont nombreuses et l'étude rhéologique devient particulièrement difficile si on désire la conduire en analysant l'influence de tous les paramètres.

Pour mieux comprendre les phénomènes mis en jeu dans ce matériau qu'est le béton, on note qu'il s'agit d'un composé multiphasique dont les deux principaux éléments sont la pâte de ciment hydraté et les granulats. Divers auteurs [1-2-3-4] ont montré que la liaison entre pâte et granulats présentait une structuration particulière encore appelée auréole de transition. Cette interface, est le siège de différentes anomalies (concentration des contraintes créent par l'hydratation, clivage particulier des hydrates, défauts d'adhérence ...) ce qui lui confère une faiblesse locale. Du fait, dès l'état "vierge", avant tout chargement et pour diverses causes (airocculus, fissurations de température et d'humidité, évaporation ou retrait gêné par agrégats ...); Le béton compte de nombreux micro vides ou microfissures.

Les problèmes actuellement posés aux chercheurs, dans le domaine du génie civil, concernent les aspects d'intégrité et de pouvoir modéliser le comportement post-localisation de la zone endommagée. En effet, lors du chargement jusqu'à rupture d'une structure, il est fréquent de voir apparaître des zones où se concentrent les déformations. Cependant, leur influence sur le comportement de la structure est telle qu'ils ne peuvent pas être ignorés dans la modélisation.

La dégradation par microfissuration représente un aspect essentiel dans l'étude du comportement mécanique du béton. La mécanique de l'endommagement [5-6] permet d'appréhender ce phénomène. Les études numériques effectuées dans le cadre de l'endommagement isotrope conduisent à des résultats assez satisfaisants aussi bien dans la description du comportement local que dans celle du comportement global. Elles permettent de décrire l'ensemble des phénomènes liés à la dégradation du béton par le biais de variables internes.

On propose dans le cadre de ce travail un modèle permettant de suivre le comportement en élasticité non linéaire du béton aussi bien en compression qu'en traction et ce jusqu'à la rupture. Ce modèle est établi par application des principes de la mécanique de l'endommagement et de la rupture en utilisant les lois réelles de comportement non linéaire habituellement admises dans la mécanique continue des matériaux (relations de Sargin [7], pour la compression et relation de Grelat [8] pour la traction).

A partir des phénomènes physiques existants (apparition d'une microfissuration initiale puis croissance, propagation et coalescence des microfissures), la mécanique de l'endommagement permet alors de déduire l'évolution des caractéristiques mécaniques du matériau. La combinaison des lois de la mécanique continue des matériaux (loi de Hooke généralisée) [9-10] et la théorie de la mécanique de l'endommagement (en adoptant l'isotropie du dommage et le principe de la déformation équivalente) nous emmène vers une variable unique de dommage notée D_{tot} représentative de l'état de dommage locale, qui est une fonction de la déformation (variable observable) et ceci quelque soit l'état de contrainte appliqué.

Depuis fort longtemps la variation du coefficient de Poisson du béton à suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs on peut citer les travaux de Sami A.Klink (1975) [11], Murray D.W.(1979)[12], Niels Saabye ottosen, (1980)[13]. Atheel E.Allos, L.H.Martin(1981)[14], Chen W.F (1982) [15], Ramtani.S, Y. Berthaud and J. Mazars (1992)[16], Selby R.G, Vecchio F.J (1996)[17], Mirmiran, A., Shahawy, M., (1997) [18] et les plus récents [19-20-21-22-23-24]....

Pour approcher le mieux le comportement réel du béton, dans notre modélisation nous considérons le coefficient de Poisson et le module d'Young dépendent du dommage. Les études entreprises pour l'étude de l'effet hydrostatique sur le matériau béton indiquent une évolution du module de compressibilité (Chen,1982)[15-25]. En considérant que le module de compressibilité est en rapport avec la variation de volume et qu'il est indépendant de la variable qui affecte le module de Young, on extrait une loi d'évolution du coefficient de Poisson imposé par l'existence d'un dommage volumique.

La confrontation des calculs du modèle proposé est effectuée aux résultats expérimentaux d'une part, et avec les résultats du calcul élaboré à partir du modèle de Mazars [26-27-28-29] d'autre part. L'application des relations d'évolutions adoptées (évolution du coefficient de Poisson, évolution du dommage en uni bi et tri-directionnel) a permis de décrire et de suivre correctement le comportement réel du béton et ce jusqu'à rupture.

La variable de dommage proposée notée D_{tot} appliquée aux éléments en béton pour décrire leurs comportements non linéaires en uni-bi et tri-directionnel, sous chargement mécanique statique et monotone, combiné avec le modèle à treillis adoucissant d'angle variable, proposée par VECCHIO et COLLINS (1986) [30], et en utilisant une loi élasto-plastique avec écrouissage de l'acier, nous à permis de décrire convenablement le comportement non linéaire des structures en béton armé.



Chapitre.1 :

Etude bibliographique

***Partie. I. Résultats expérimentaux et interprétation
du comportement mécanique du béton et du béton armé
sous chargement statique et monotone***

***Partie. II. Modélisation numérique du comportement non linéaire du béton et
du béton armé sous chargement statique et monotone
- Le choix de la mécanique de l'endommagement -***



Partie. I. Résultats expérimentaux et interprétation du comportement mécanique du béton et du béton armé sous chargement statique et monotone

I. Introduction

La particularité des structures du génie civil en béton armé est que le béton est largement utilisé dans son domaine non linéaire. Ce matériau étant fragile, les non linéarités s'accompagnent de microfissures et parfois de macro-fissures. Pour reproduire correctement le comportement de ces structures, il faut porter une attention particulière au comportement mécanique du matériau.

Modéliser le comportement multiaxial du béton nécessite avant tout de connaître celui-ci. Ceci constitue l'essentiel du chapitre I où sont mis en évidence les phénomènes que le modèle devra reproduire: La non linéarité, comportement multiaxial du béton, gain en ductilité dans un comportement bi et tri directionnel, variation des caractéristiques mécaniques (module de Young, coefficient de Poisson ainsi que le module de compressibilité) sous chargement mécanique statique et monotone.....

Les bétons couramment utilisés dans la construction des ouvrages de génie civil tels que les ponts, les murs de soutènement, les centrales nucléaires..... présentent des résistances à la compression f_{cj} variant de 40 à 60 MPa ([31]). Ces structures, qui doivent supporter des charges extérieures importantes, doivent être fabriquées avec des bétons de grande résistance. Par contre, pour des structures secondaires, des bétons avec des résistances à la compression simple f_{cj} de l'ordre de 25MPa sont suffisants.

Dans cette première partie, un résumé des caractéristiques principales du comportement mécanique du béton et du béton armé sera présenté, basé sur les expériences au laboratoire et les résultats publiés par différents auteurs dans la littérature.

II. Etude du comportement expérimental du béton

II.1. Comportement expérimental du béton en compression

En raison de sa facilité de réalisation, l'essai de résistance en compression uni-axiale sur des éprouvettes de béton est l'expérience la plus répandue pour estimer les caractéristiques générales de résistance du béton (voir : Figure. I.1).

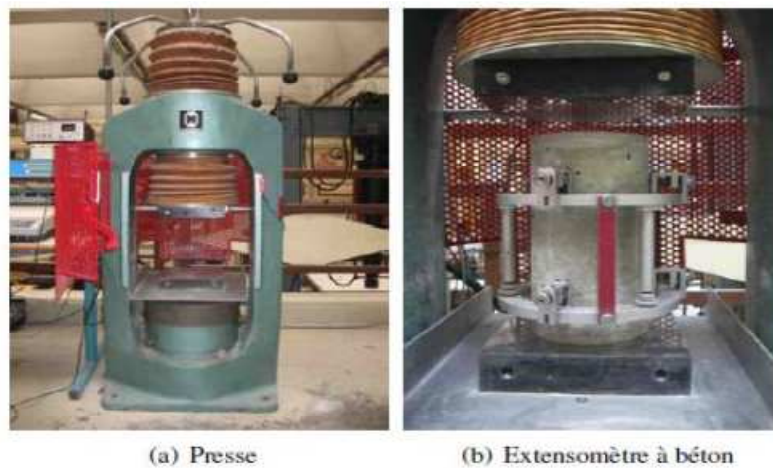


Figure. I.1. Essai de compression [4]

Plusieurs études dans la littérature comme celles de Hsu (1963)[32] et Benouniche (1978) [33], Chen (1982)[15], Bischoff, P. H. et Perry, S. H. (1991)[34], D. J. HAN, W. F. CHEN (1986)[35]. Kotsovos (1983) [36], Ramtani (1990) [37], Erik Van Geel, (1998)[38], J.M. Torrenti, G.P.Cabot, J.M. Reynouard,(2010) [39]. Kotsovos (2013) [40], ont mis en évidence différentes phases de comportement du béton en compression uni-axiale en fonction du niveau de la contrainte appliquée, l'allure générale du comportement du béton est donnée par la figure suivante (Figure. I.2).

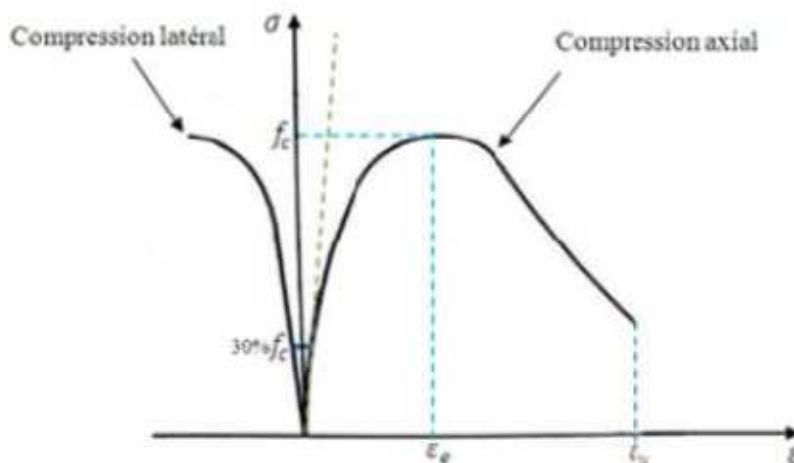


Figure. I.2. Comportement du béton en compression simple.

La courbe présente une réponse presque linéaire jusqu'à 30% de la limite de résistance en compression simple f_c , en dépassant ce point on observe que la courbe devient de plus en plus non linéaire jusqu'à 75% de la limite en compression simple, cette phase correspondant à un comportement ductile adoucissant et quasi-linéaire est suivie d'un maximum correspondant au pic de résistance. Au delà duquel une autre branche descendante représentant la chute de résistance jusqu'à la rupture totale du matériau.

L'allure de la courbe contrainte - déformation en fonction de la résistance [4] est représentée sur la figure I.3.

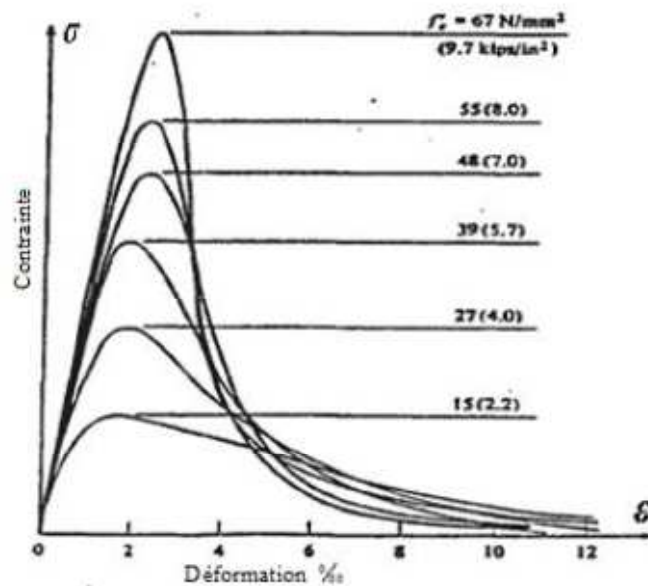


Figure .I.3. Courbes contraintes – Déformations en compression uni-axial [35]

Dans un comportement en compression uni-axial les fissures se propagent dans la matrice parallèlement à la direction de chargement (figure.I.4).

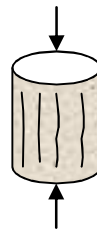


Figure. I.4. Propagation des fissures sous compression uniaxial du béton

La classification actuelle des bétons [42-43] est basée sur la résistance en compression à 28 jours .Un Béton Ordinaire (BO) à une résistance comprise entre 20 et 40 MPa, un Béton à Hautes Performances (BHP) à une résistance située entre 40 et 80 MPa, Pour des valeurs comprises entre 80 et 120 MPa , on parle de Bétons à Très Hautes Performances (BTHP) et au-delà, de Bétons à Ultra Hautes Performances (BUHP) tel que les Bétons de Poudres Réactives (BPR).

II.2. Comportement expérimentale du béton en traction

II.2.1. Essai de traction directe [44-45-46]

L'essai de traction directe est l'essai le plus représentatif du phénomène de la traction mais, il est entre autre, très délicat à réaliser. L'application directe d'un effort de traction pure, en dehors de toute excentricité, est très difficile car il nécessite, après sciage des extrémités, le collage de têtes de traction parfaitement centrées, l'opération devant avoir lieu sans aucun effort de flexion parasite. Cet essai, satisfaisant sur le plan théorique, a deux défauts principaux :

Il est assez dispersé dans ces résultats, ceci en raison du sciage des extrémités qui crée un affaiblissement dans ces zones, les ruptures se produisent assez souvent dans la zone du collage ces essais.

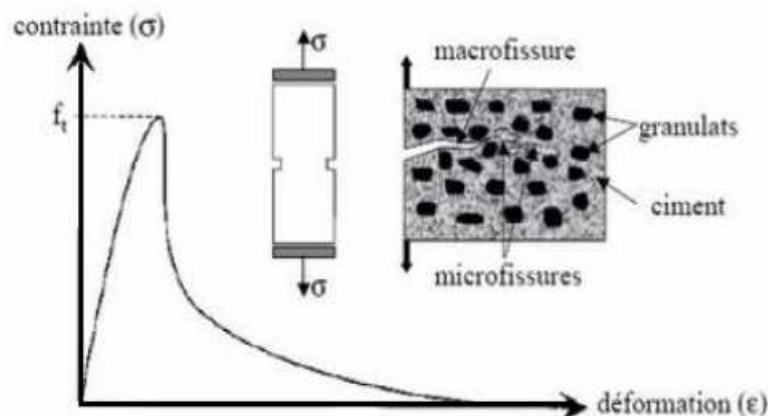


Figure. I.5. Courbe contrainte-déformation du béton en traction

La courbe contrainte-déformation du béton obtenue en traction uni-axiale (figure.I.5) est similaire à celle de la compression, mis à part le fait que la résistance limite en traction f_t est nettement plus faible que celle en compression ($f_t=0.1 f_c$). La courbe est linéaire jusqu'à environ 75% de sa résistance limite de traction f_t . Les microfissures s'initient à se développer dans la région qui précède la résistance au pic et qu'elles s'agrandissent plus rapidement que lors du test de compression et par conséquent la rupture survient plus tôt.

Des tests expérimentaux de traction directe effectués sur des éprouvettes en béton ont montré que, juste avant le pic, une décohésion des granulats les plus importants apparaissait et que les fissures nées de cette décohésion se coalisent ensuite avec les microfissures existantes pour former une macro fissure continue. De plus, les résultats révèlent la présence de nombreux grains reliant les surfaces de la fissure, ce qui explique la branche d'adoucissement de la courbe contrainte-déformation. La ruine des éprouvettes apparaît lors de la rupture de ces grains. Parmi ces essais on peut citer :

II.2.1.1. Traction directe par Terrien (1980) [44]

Les essais de traction directe du béton sont difficiles à réaliser vu la faible résistance en traction de ce matériau. Les résultats d'essais réalisés par Terrien (1980) ont démontré qu'un comportement presque élastique linéaire du béton dans la phase pré-pic peut être considéré, avant une rupture brusque dans la phase post-pic (Figure. I. 6). Le module d'élasticité diminue fortement dans cette phase post-pic.

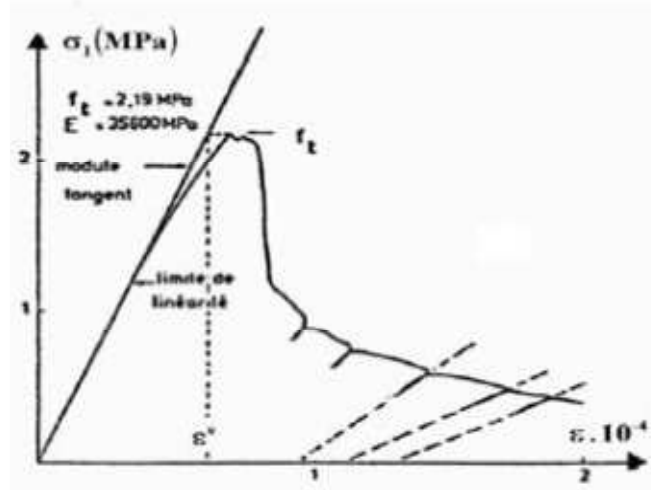


Figure. I.6. Comportement en traction directe du béton Terrien (1980)

Les essais de traction directe du béton sont assez peu réalisés et les résultats obtenus dépendent fortement de la méthode d'essai.

II.2.1.2. Comportement du béton en traction selon Peterson- Hughes et Chapman [45 -46]

Les diagrammes obtenus lors des essais, réalisés par Peterson [45], montrent l'existence de deux phases très distinctes :

- Une branche ascendante (élastique linéaire) rectiligne jusqu'au maximum de résistance.
- Au delà du pic, la courbe décroît progressivement jusqu'à s'annuler pour un déplacement nettement supérieur à celui du pic, d'où un comportement assez ductile (Voir figure. I.7). D'autres essais du même type, (Figure.I.8) ont été réalisés par Hughes et Chapman [46].

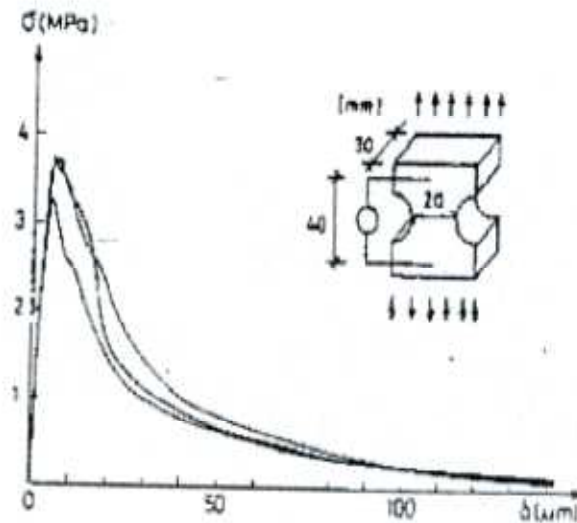


Figure. I.7. Courbes expérimentales du béton en traction selon Peterson.

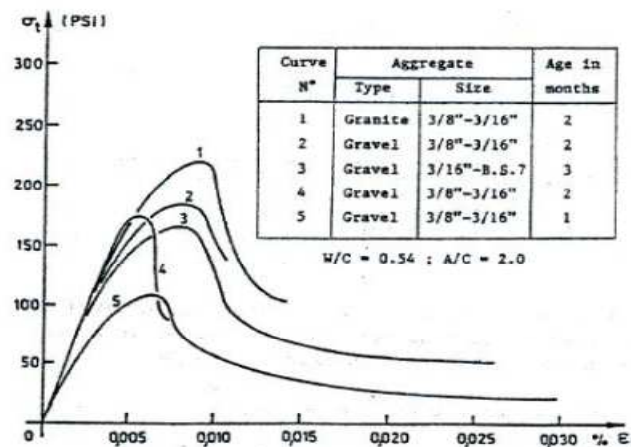


Figure. I.8. Courbe de traction d'éprouvettes en béton selon Hughes et Chapman.

De nombreux essais permettent de déterminer la résistance à la traction d'un matériau, mais tous, sauf l'essai de traction simple, sont indirects.

II.2.2. Essai de traction indirecte

II.2.2.1. Essai sur un tirant en béton armé [47-48-49-50-51-52]

En dépit du succès de l'emploi de fixations spéciales, il est difficile d'éviter des contraintes secondaires telles que celles induites par les mâchoires ou par des ancrages noyés. La rupture se fait toujours au niveau des extrémités de l'éprouvette (voir figure. I.9).

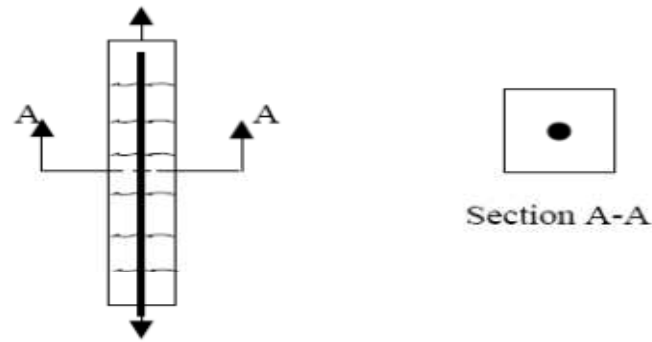


Figure. I.9. Essai de traction sur un tirant en béton armé

II.2.2.2.Traction par fendage [4]

L'essai est réalisé sur une éprouvette cylindrique de 11 cm de diamètre et 17 cm de hauteur. Le problème du béton est qu'il est très fragile en traction et qu'il est difficile de réaliser des essais de traction directe sur béton en raison de la difficulté de solidariser le béton avec les plateaux de la presse (par exemple par collage). Pour contourner la difficulté, on comprime l'éprouvette de béton sur une génératrice du cylindre. Le champ de contrainte qui en résulte est tel que dans le plan parallèle à la direction de chargement apparaît une contrainte de traction qui va provoquer la ruine du béton.

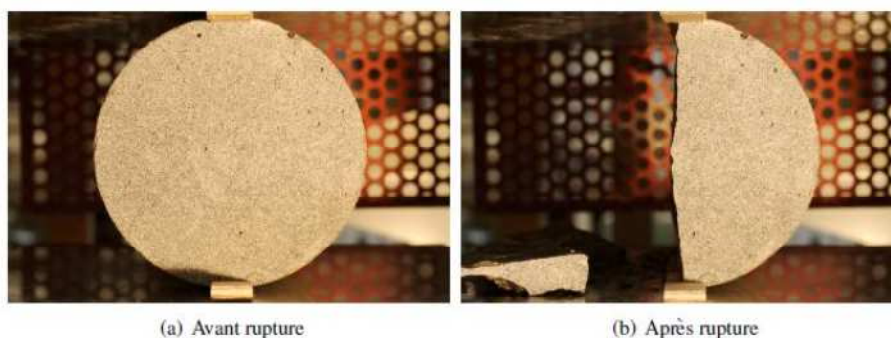


Figure. I.10. Essai de fendage (ou essai brésilien)

Dans la figure. I.10 on voit une éprouvette sollicitée par un essai de fendage juste avant et juste après la rupture (fragile) du matériau.

Le calcul de la résistance en traction F_t en fonction de l'effort F appliqué sur l'éprouvette à rupture (en KN), de son diamètre D (en cm) et de la longueur L de contact entre l'éprouvette et les plateaux de la presse (en cm), par la formule (I.1).

$$F_t = \frac{20F}{\pi DL} \quad (I.1)$$

II.2.2.3. Essai de traction par flexion [53]

Cet essai permet de contrôler la qualité du béton (voir figure.I.11) ; il donne une indication sur la résistance à la traction par flexion du béton et donc sur sa résistance à la fissuration.

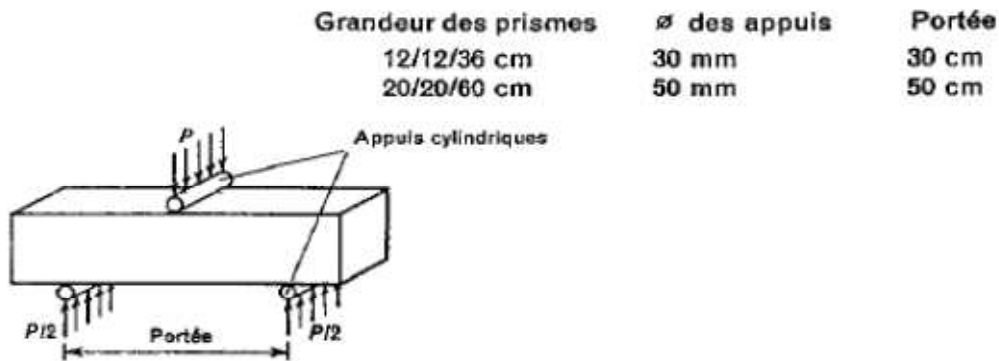


Figure. I.11. Essai de traction par flexion

Les essais de traction par flexion sont utilisés très couramment au laboratoire pour déterminer la résistance en traction du béton, en raison de la simplicité de ces essais et de leur capacité à représenter presque exactement le comportement réel du béton dans des structures de génie civil. Les éprouvettes peuvent être fléchies sur trois ou quatre points. Sur les Figures (a) et (b), les résultats d'un essai de traction par flexion sur 3 points sont présentés sous la forme charge P en fonction de la flèche de l'éprouvette V (figure.I.12).

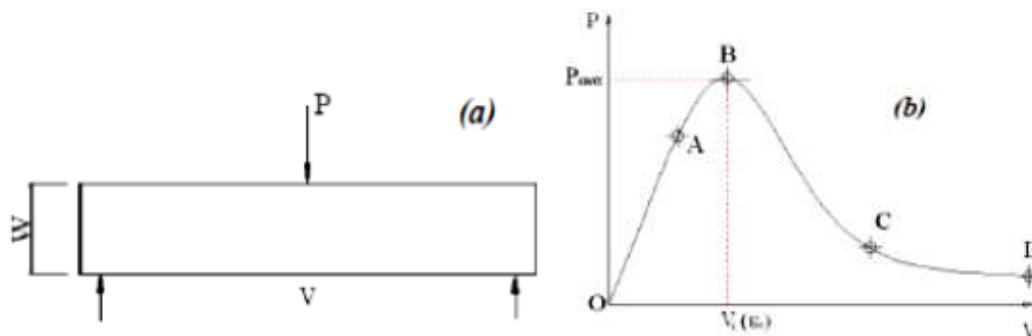


Figure. I.12. Essai de traction par flexion 3 points (a) et la relation entre la charge P et la flèche V accompagnant les phases de comportement (b)

II.2.2.4. Essai PIED [44-54-55- 56]

Le comportement adoucissant du béton en traction peut également être obtenu grâce à un autre type d'essai. Cet essai est appelé essai P.I.E.D, il est réalisé de façon à maintenir un

champ de déformation uniforme dans l'éprouvette. L'idée de base est due à L'HERMITE(1973)[54], améliorée par BAZANT et PIJAUDIER- CABOT (1987)[55]. L'effort est transmis au matériau testé en traction par des barrettes métalliques collées le long des faces latérales d'une éprouvette prismatique.

La mise en place de l'essai PIED (figure I.13) a permis de caractériser les phénomènes unilatéraux liés à la dégradation en traction des matériaux [13,56]. Les résultats obtenus montrent que le comportement fait apparaître distinctement deux phases :

- L'avant pic ($\sigma = 0.6 f_t$) avec f_t la contrainte maximale en traction, où la courbe s'écarte assez peu de la droite élastique, met en évidence un comportement quasi élastique jusqu'au pic de chargement avec un module de Young de l'ordre de $E = 35800$ MPa pour ce matériau. L'après pic où la contrainte chute brutalement avant de se stabiliser. Le pic est la contrainte maximale en traction $f_t = 2,19$ MPa pour ce type de matériau.
- Notant que dans un état de traction simple, la fissuration se développe perpendiculairement au chargement [38- 46] et aboutit à une rupture unique (Figure. I.14).

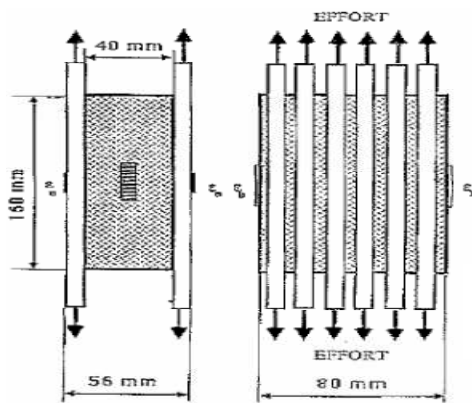


Figure. I.13
(Essai P.I.E.D)



Figure. I.14.
Fissure en
traction du béton

II.3. Comportement biaxial du béton [56- 57-58-59]

On peut résumer les principales caractéristiques de comportement du béton chargé de manière biaxiale (compression-compression, traction-compression et traction-traction) comme suit :

- Comme les résultats expérimentaux de Kupfer et al. (1969)[58] repris à la figure. I.15 montrent, la résistance à la compression augmente dans un état de contrainte en bi-compression.
- L'augmentation peut être de 25 % pour un rapport de contrainte $\sigma_2/\sigma_1 = 0.5$ et de 16 % pour $\sigma_2/\sigma_1 = 1$. En état de traction – compression, la résistance à la compression décroît quand la contrainte de traction appliquée croît. En traction bi-axiale, la résistance à la traction reste quasiment égale à la résistance à la traction uni-axiale.

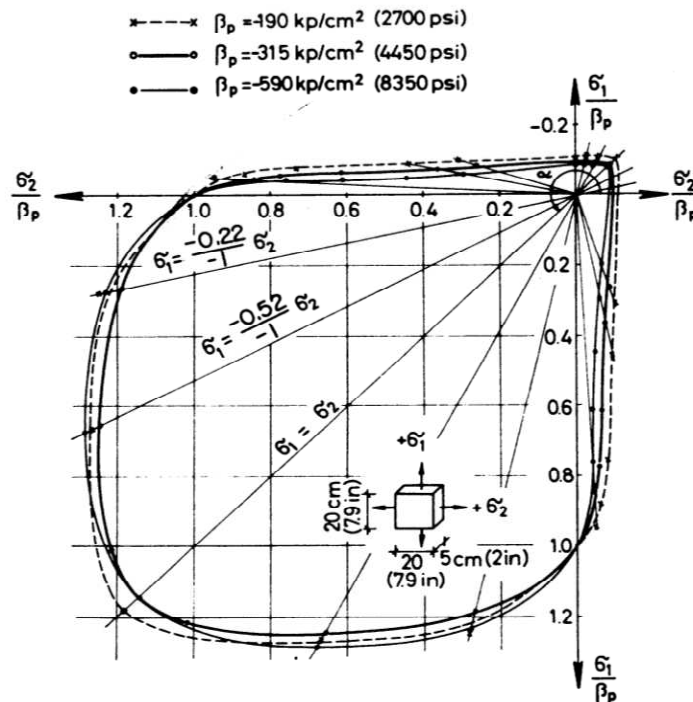


Figure. I.15. Enveloppe de rupture pour des essais bi-axiaux en contraintes planes Kupfer et al. (1969)[58]

En règle générale pour un tel essai on constate une rupture parallèle au plan de chargement [58-59] (c'est-à-dire suivant la direction d'extension maximale).

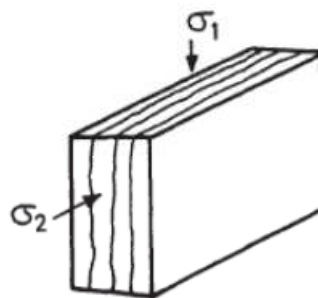


Figure. I.16. Schéma de fissuration lors d'un essai bi-axial

II.4. Combinaison traction-compression [58-59]

Là aussi les résultats sont rares. Les auteurs ont constaté que lorsque la contrainte de traction dépasse une faible fraction (7,5 %) de la contrainte de compression la rupture est du type traction simple, c'est-à-dire fragile avec plan de rupture orthogonal à la traction

maximale. Et, bien entendu, dans tous les cas les contraintes à la rupture sont inférieures aux résistances en compression et traction simple. Ceci provient du fait que les fissures qui sont dans la direction de compression sont également orthogonales à la direction de traction. Leur propagation est donc facilitée, d'où une résistance plus faible.

II.5.Comportement en traction pluri axial

Parce que les cas où le béton est sollicité en traction pluri axial sont très rares, les résultats disponibles sur ce sujet le sont aussi. Citons toutefois l'étude de STEGBAUER et LINSE [60] Globalement, le comportement est analogue à celui de la traction simple. Ceci s'explique par le fait qu'aucun mécanisme plastique ne peut être mis en jeu. On a donc:

- un plan de rupture perpendiculaire à la direction de traction maximale.
- une rupture fragile.
- une résistance à la rupture quasiment constante et égale à celle de la traction simple.

II.6. Comportement sous confinement du béton

II.6.1. Confinement du béton.

La réponse du béton est d'autant moins fragile que le confinement est important (Voir figure.I.18) .C'est effectivement ce qui a été démontré par plusieurs auteurs (Richart & al. 1928) [61], Balmer 1949[62], Jamet & al. 1984 [in 63] , et que l'on obtient un comportement ductile pour les très grands confinements. Ce gain de rigidité est lié à l'augmentation des contacts au sein de la micro- structure du matériau béton qui est une conséquence de la destruction des pores (Chen 1982[15], Ramtani 1990[37]), B.M. Luccioni ,V.C. Rougier [64], Tao. Xiaoya, Phillips. David V[65],.....

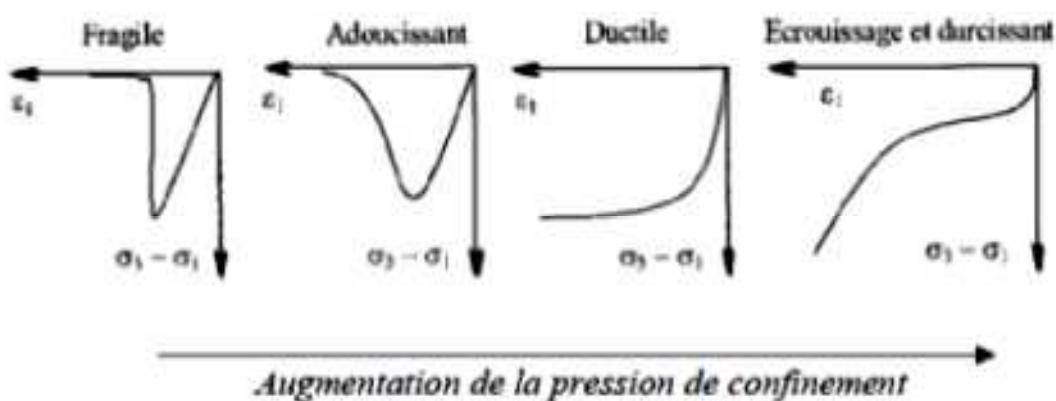


Figure. I.17. La transition du comportement du béton : d'un comportement fragile à la ductilité en fonction de la pression de confinement (Reynouard(2005))[25]

La ductilité et la résistance du béton sous compression triaxiale augmentent considérablement. Les essais sur des cylindres en béton chargés axialement et confinés latéralement par pression hydraulique ont mis en évidence ce phénomène.

Ces courbes (voir courbe de la figure. I.18) montrent qu'une augmentation de pression latérale apporte une augmentation significative aussi bien en résistance qu'en ductilité. Ceci est dû au fait que la pression latérale confine le béton et diminue la tendance de fissuration interne et l'augmentation du volume avant la rupture.

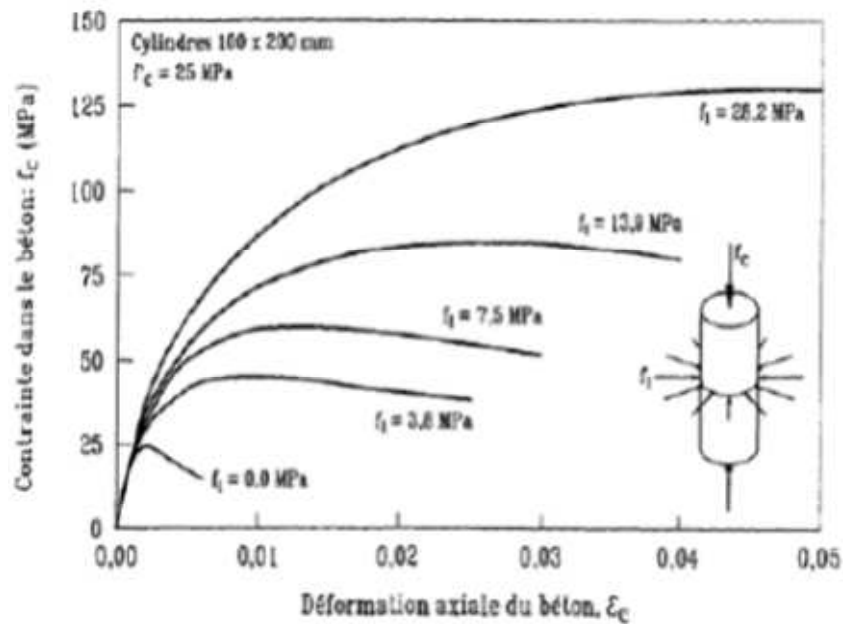


Figure. I.18. Courbes contraintes-Déformations axiales des essais de compression triaxiale sur des cylindres en béton [66-67]

II.6.2. L'essai de confinement [68, 69-70]

Réalisés sur des échantillons de béton grâce à une presse triaxiale de grande capacité, dénommée presse « GIGA ». Ce dispositif expérimental permet d'atteindre, au sein des échantillons, des niveaux de contrainte moyenne de l'ordre du giga Pascal avec des trajets de chargements statiques, homogènes et bien contrôlés.

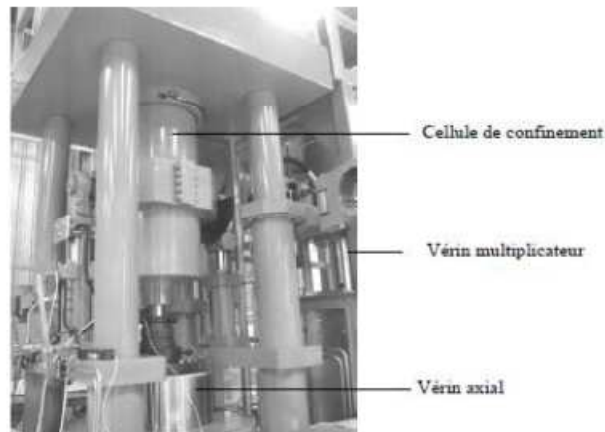


Figure .I.19. Vue générale de la presse GIGA

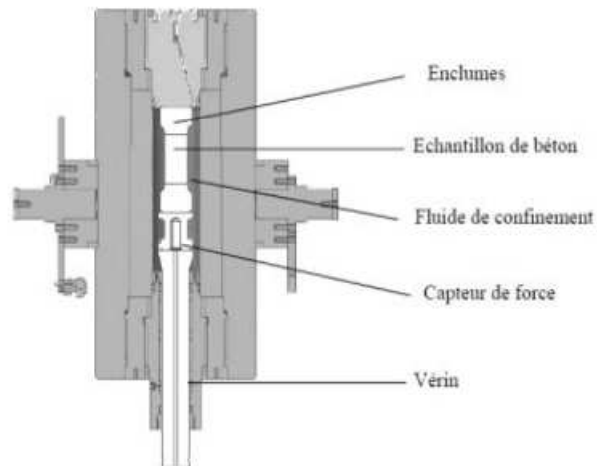


Figure. I.20. Vue en coupe de la cellule de confinement

A titre indicatif, la presse triaxiale GIGA, a été inaugurée le 13 mai 2004 par la Délégation Générale pour l'Armement (DGA), le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), l'Université Joseph Fourier (UJF). Cette presse a été financée par DGA dans le cadre d'un contrat qui s'inscrit dans un projet d'étude entrepris sur les "Modèles matériaux pour simulation en dynamique rapide - thème béton" (DGA, 2002) [71-72].

II.7. Confinement du béton armé [30-73-74-75-76-77]

Le confinement du béton est assuré par le ferrailage transversal, généralement sous forme de spires ou de cadres en acier étroitement espacés. Pour de faibles contraintes dans le béton, l'intervention du ferrailage transversal en tant qu'armature de confinement est non significative par conséquent le béton est considéré comme non confiné.

Le béton devient effectivement confiné lorsque les contraintes développées par le noyau du béton s'approchent de la résistance uni-axiale. Les déformations transversales deviennent très importantes en raison de la fissuration interne progressive dans le béton qui s'appuie sur le ferrailage transversal, qui à son tour répond par une réaction de confinement sur le béton.

II.8. Comportement triaxial hydrostatique [78-79-80-81]

En ce qui concerne le comportement du béton sous chargements hydrostatiques, le béton présente un comportement non linéaire (Chen 1982)[15]. On remarque sur cette figure trois phases de comportement:

Une phase élastique linéaire, une deuxième phase d'assouplissement correspondant à l'effondrement progressif de la structure micro- poreuse de la pâte de ciment hydraté et une dernière phase de raidissement liée à l'augmentation des contacts au sein de la matière qui est une conséquence de la destruction des pores.

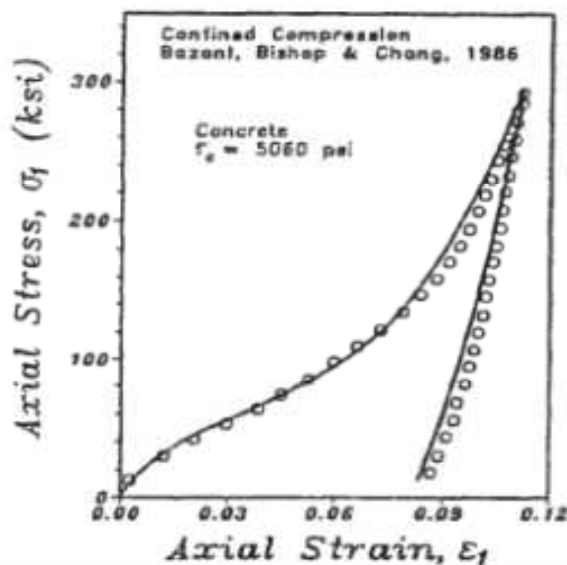


Figure. I.21. Comportement du béton sous compression hydrostatique (Basant et Prat, 1987)

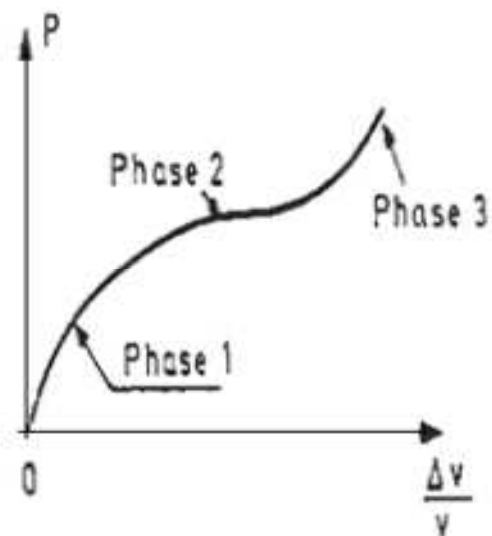


Figure. I.22. Relation pression hydrostatique – variation de volume dans le cas d'une compression hydrostatique

II.9. Phénomène unilatéral et endommagement du béton

Le phénomène unilatéral consiste en une restauration de la raideur lors du passage d'un chargement en traction, où apparaît de l'endommagement (perte de raideur), à un chargement en compression.

Dans le béton endommagé ce caractère est observé macroscopiquement sur les réponses globales des structures (courbes force-déplacement par exemple). Phénoménologiquement ceci s'explique par une refermeture des microfissures et microcavités créées lors d'une dégradation en traction.

Ce comportement a été mis en évidence dans (Terrien, 1980) [53] pour le cas particulier de ruptures localisées en une seule macrofissure. Il a été par la suite confirmé pour le cas d'une distribution diffuse des microfissures dans (Ramtani, 1990) lors des essais de type P.I.E.D. (Figure. I.23)

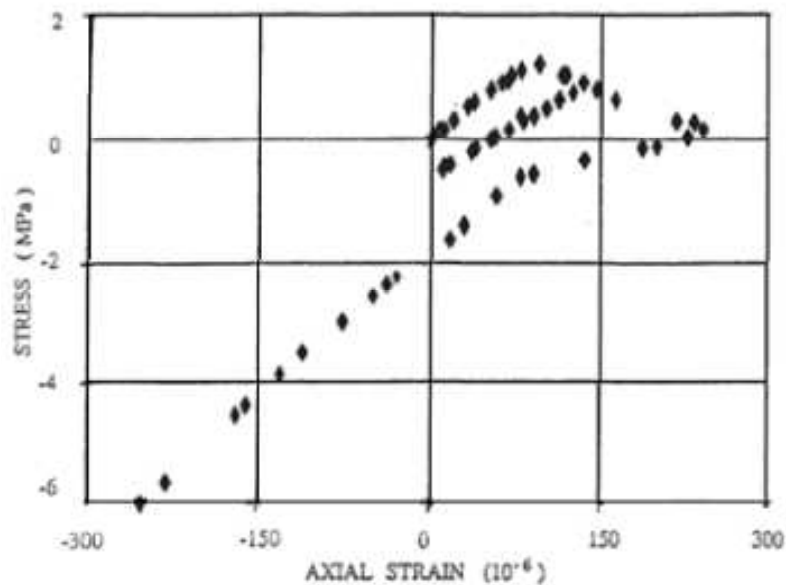


Figure .I.23. Comportement unilatéral du béton (Ramtani,1990)[37]

III. Effet d'échelle dans les structures en béton [52], [57], [81]

L'effet d'échelle est mis en évidence par divers types de sollicitations sur des éprouvettes et des structures en béton, que ce soit sous sollicitations uni-axiales ou sous sollicitations multiaxiales. Lors d'essais uni-axiaux sur des éprouvettes en béton, il apparaît que la contrainte maximale supportée diminue quand la taille de l'éprouvette augmente (voir figure.I.24). Ce cas particulier d'effet d'échelle, où les sollicitations sont uniformes dans toutes les éprouvettes, est aussi appelé effet de volume.

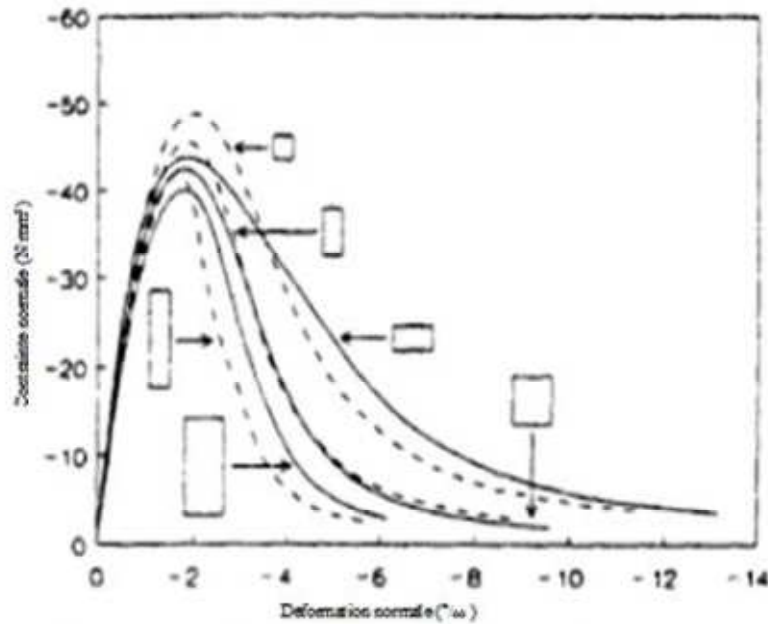


Figure. I.24. Réponses contraintes-déformation en compression pour les différentes géométries (Vonk,1993)[82]

L'effet d'échelle ou l'influence de la taille de la structure sur les caractéristiques mécaniques du béton est connu depuis longtemps. Il faut en tenir compte lorsque l'on mesure ces caractéristiques sur des éprouvettes au laboratoire. En général, la valeur de ces caractéristiques diminue quand la taille des éprouvettes augmente (Hermite (1973)) [83](Figure.I.25).

Un groupe d'éprouvettes "standard" est ainsi défini dans toutes les normes de béton. Les résultats d'essais obtenus sur des éprouvettes de dimensions plus grandes ou plus petites que les dimensions standard doivent donc être adaptés. On considère ainsi que la valeur de la résistance réelle du béton dans les structures du génie civil est inférieure de 20 à 50% à celle obtenue sur un même béton au laboratoire (Bazant & al (2004))[84].

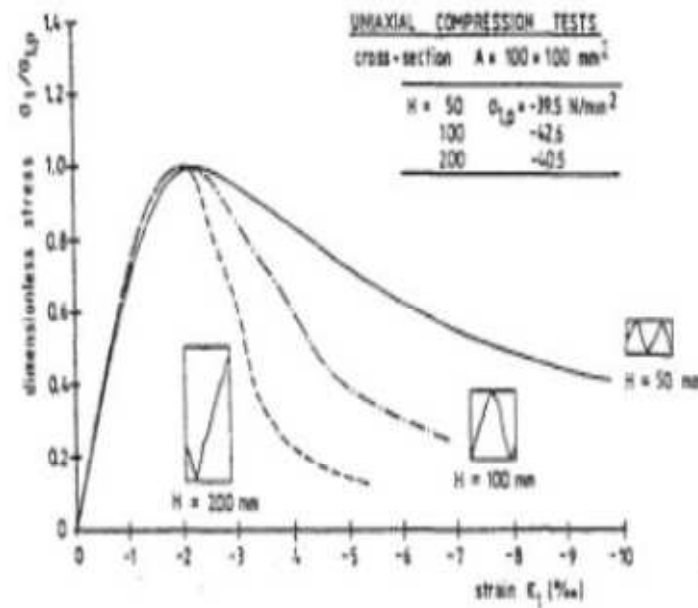


Figure.I.25 .Variation de la résistance de flexion et de compression du béton selon la taille des éprouvettes (Hermite 1973)

IV. Rupture des structures en béton et en béton armé

IV.1. Mode de rupture [85],[86],[87-5]

La fissuration dans un matériau supposé homogène et isotrope, se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants :

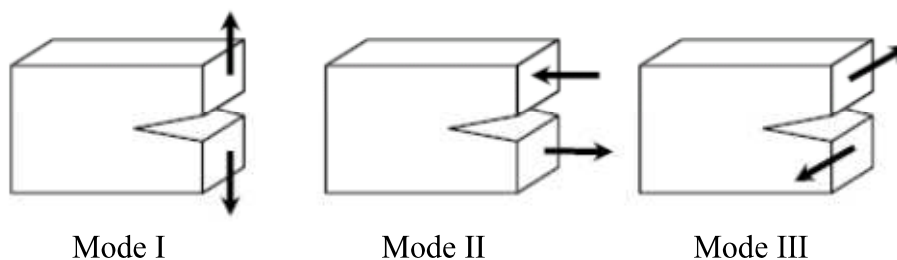


Figure. I.26. Modes de rupture

- Mode I: ouverture (ou clivage);
- Mode II: cisaillement plan;
- Mode III: cisaillement anti-plan (déchirement)

Le mode I est le plus dangereux pour l'extension d'une fissure ; cependant, une fois amorcée et pour des sollicitations mixtes ou des géométries complexes, la fissure a tendance à bifurquer, et reste donc rarement rectiligne.

IV.1.1. Fissuration du béton

Le béton, largement utilisé dans la construction, présente un comportement mécanique très complexe du à son caractère hétérogène et fragile .Cette hétérogénéité favorise le développement de divers modes de rupture et de propagation de fissures.

IV.1.2. Fissuration par Traction du béton [88]

La fissuration du béton, essentiellement due à son comportement en traction, est un phénomène critique dans le calcul des constructions en béton armé. Depuis le début des années quatre-vingts, des chercheurs ont tenté de modéliser le comportement du béton sous charges cycliques en traction. Nous citons les modèles de Rots(1985) , de Gylltoft(1984), de Reinhardts(1986) et de Yankelevski(1989).

Les structures en béton sont généralement fissurées à l'état limite de service, ce qui fait que leur comportement est influencé par la résistance à la traction du béton. La résistance à la traction du béton est d'une part influencée par l'état de contraintes et la géométrie de l'élément de structure ainsi que par le climat environnant. D'autre part, la résistance effective à la traction d'un élément de structure est en général inférieure à celle déterminée sur éprouvette dans un essai de traction directe. La détermination de la résistance à la traction par d'autres types d'essais donne des résultats différents, car cette résistance dépend de la façon dont elle est déterminée. On a une résistance à la traction différente pour chaque sorte de béton. L'évolution dans le temps de la résistance à la traction dépend de nombreux facteurs, comme la composition du béton, le type et la classe du ciment, les adjuvants et les ajouts, les conditions de production et de durcissement du béton ainsi que le type de cure. Pour les vérifications à l'état de service, on se basera en général sur la valeur moyenne de la résistance à la traction du béton.

Si les contraintes de traction dominant, la rupture du béton peut être engendrée par le phénomène de fissuration. Dans ce cas, il est considéré que le comportement du béton est de type fragile. Dans le cas contraire, si les contraintes de compression dominant, le béton peut rompre par un effet d'écrasement qui aura lieu, en général, dans les zones à fortes localisations de contraintes, dans le cas de poutres en béton armé, cette zone est déduite analytiquement ou numériquement au voisinage d'application de la charge externe. Dans plusieurs modèles de comportement du béton, il est considéré de type ductile sachant que le béton présente un certain adoucissement. En effet la répartition de la fissuration n'existe pas dans le cas du béton non armé ou une unique fissure se développe dans les zones ou la résistance à la traction du béton est dépassée (Figure.I.27).

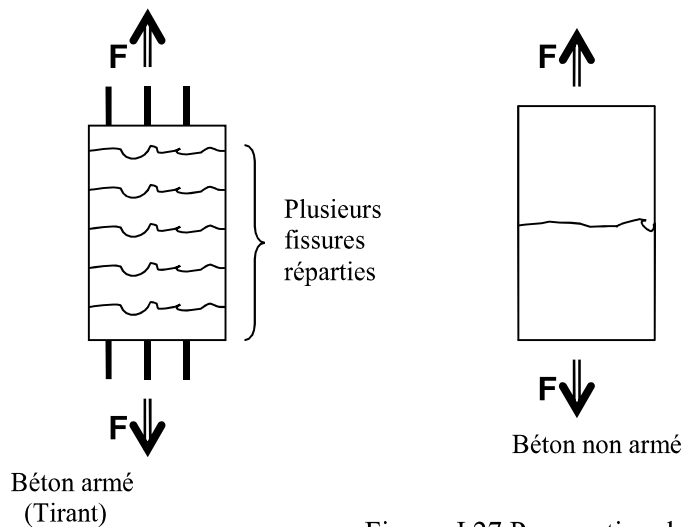


Figure. I.27. Propagation de la fissuration du béton et du béton armé en traction uniaxiale.

IV.2. Les causes de la fissuration du béton

L'hétérogénéité de composition du béton vient s'ajouter une hétérogénéité dite structurelle. Elle consiste en l'existence de défauts initiaux (microfissures) au sein de la microstructure. La plupart de ces défauts se situent à l'interface entre les granulats et la pâte de ciment, cette interface constituant le lien le plus faible du matériau.

Des microfissures peuvent également être générées dans le ciment par différents facteurs, tels que : le retrait (diminution du volume apparent de la matière) hydraulique engendré par une évaporation d'eau, le retrait thermique engendré par une variation de température ou une consolidation incomplète du ciment entraînant la formation de microcavités. Lorsque cette structure est soumise à une sollicitation, des microfissures supplémentaires peuvent se former suite à des concentrations de contraintes de tension isolées dues à des déformations incompatibles entre les granulats et le ciment.

IV.3. Fissuration des structures en béton armé

IV.3.1. Mécanismes de rupture d'une poutre en Béton Armé (BA)

a- Les fissures qui naissent dans les éléments en béton armé peuvent être classifiées en deux catégories principales, à savoir les fissures provoquées par les charges extérieurement appliquées, et ceux qui se produisent indépendamment des charges (Base 1978) [89]. Les fissures de flexion et les fissures inclinées de cisaillement sont les deux types principaux de fissures provoquées par les charges extérieures. Les fissures de flexion (figure.I.29) sont formées dans la zone tendue de l'élément et ont une forme de cale, avec la largeur de fissure est maximale à la face tendue et égale à zéro près de l'axe neutre. Les fissures inclinées de cisaillement (figure.I.28) se développent généralement dans des poutres à âme mince une fois

soumises aux forces de cisaillement élevées (Warner *et autres* 1998[90], Loo 1990)[91], indépendamment des charges en peut évoquer :

- dessiccation trop rapide du béton
- variations de température dues, par exemple à la chaleur d'hydratation
- retrait
- déformations imposées ou entravées
- gel.

b- les caractéristiques géométriques de la poutre en béton armé [92]

Le mode de rupture dépend de la valeur du rapport a/d . Des phénomènes de fissuration et d'écrasement du béton aux appuis sont distingués. De ce fait, le rapport a/d est généralement utilisé pour distinguer les différents types de poutre en béton armé, où a est la distance entre l'appui et le point d'application de la charge et d la hauteur effective de la section de la poutre. Ainsi, les poutres sont classées comme suit:

- Poutres très profondes $a/d \leq 1$;
- Poutres profondes $1 < a/d \leq 2.5$;
- Poutres élancées $2.5 < a/d \leq 6$;
- Poutres très élancées $a/d > 6$.

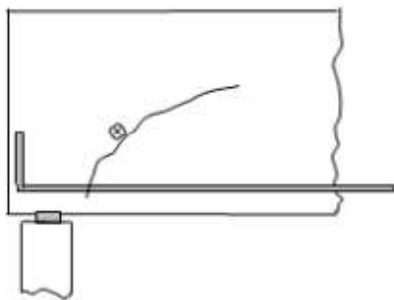


Figure. I.28. Les fissures inclinées de cisaillement

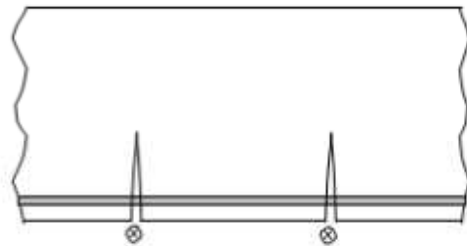


Figure. I.29. Les fissures de flexion.

IV.2.2. Comportement global, d'une poutre en béton armé soumise à un essai de flexion trois points ou quatre points (Figure.I. 30) [93]

On distingue 3 phases :

La **1re phase** linéaire correspond au comportement élastique de service des poutres non fissurées.

La **2ème phase** linéaire correspond au comportement de service mais lorsque la poutre est fissurée. Pendant cette phase, il n'existe pas de différence notable du développement de la fissuration initiale que la poutre ait été endommagée par cisaillement ou par flexion. De toutes les façons, la fissuration commence avec l'apparition de fissures due à la flexion dans la partie inférieure centrale de la poutre.

Ensuite, ces premières fissures dites de flexion se propagent vers le haut de la poutre.

La principale différence, entre l'endommagement par cisaillement et celui par flexion, se constate à la rupture de la poutre : **3ème phase** du comportement.(voir figure.I.30)

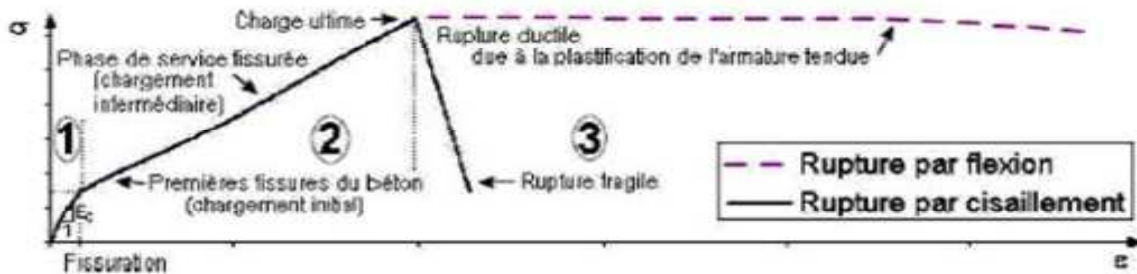


Figure.I. 30. Représentation graphique de la contrainte (σ) en fonction de la déformation (ϵ) d'un élément en béton armé.

Deux mécanismes principaux de rupture existent : rupture par flexion (F) ou rupture par cisaillement. La rupture par flexion peut se produire : par la plastification de l'armature tendue ou par compression du béton associée à la plastification de l'armature tendue.

La rupture par cisaillement est due soit à :

- 1) la contrainte principale oblique (CO)
- 2) la compression par cisaillement (CC)
- 3) l'adhérence par cisaillement (AC)

Ces mécanismes de rupture dépendent de la résistance des matériaux, des dimensions de la structure et du type de chargement. La résistance à la flexion d'une poutre en béton armé est apportée principalement par l'armature tendue et les propriétés du béton. La résistance aux efforts tranchants est assurée par l'armature transversale (cadres) et les caractéristiques du béton. Les calculs des résistances à la flexion et aux efforts tranchants.

IV.3.3. Rupture par flexion [93]

IV.3.3.1. Rupture par la plastification de l'armature tendue due à la flexion (F)

Une poutre est considérée endommagée par flexion si la quasi-majorité des fissures sont verticales et positionnées dans le tiers central de la longueur libre entre les appuis. Le début de l'endommagement commence avec la fissuration du béton. Des fissures verticales souvent très fines sont donc observées au milieu de la poutre. Ensuite, avec l'augmentation du chargement, de nouvelles fissures se développent dans cette même zone centrale alors que les anciennes fissures s'ouvrent et s'étendent vers l'axe neutre et/ou au delà (Figure.I.31).

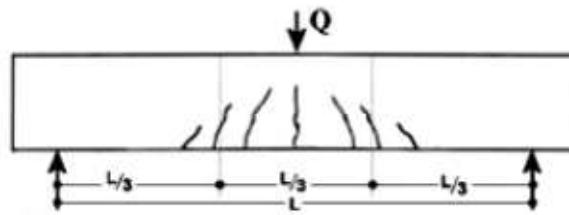


Figure.I. 31. Schéma typique d'une poutre en béton armé (BA) endommagée par flexion.

Le mécanisme de rupture par flexion est dit "ductile" en raison de la plastification de l'armature métallique qui est soumise à de la traction (3^{ème} phase de la Figure.I. 31), lors de la conception d'une poutre, il est recommandé que la rupture de la poutre soit par flexion, parce que ce type de rupture donne un avertissement suffisant de la ruine imminente de la poutre grâce à cette plastification.

Les poutres arrivent à la rupture par flexion, seulement si leur résistance au moment fléchissant est inférieure à leur résistance aux efforts tranchants.

IV.3.3.2. Rupture par compression du béton due à la flexion associée à la plastification de l'armature tendue

Ce type de rupture commence de la même façon que la rupture précédente avec l'apparition des fissures dans la zone centrale. Ensuite, il est observé l'écrasement du béton suite à un niveau trop important de compression.

Les trois mécanismes qui sont présentées maintenant produisent des ruptures dites "fragiles" (3^{ème} phase de la Figure.I. 31).

IV.3.4. Rupture par cisaillement

IV.3.4.1. Rupture due à la Contrainte principale Oblique (CO)

Ce mode de fissuration commence, comme exposé précédemment, avec le développement de quelques fissures fines verticales du type flexion au centre de la longueur entre appuis, suivie par une perte d'adhérence entre l'acier de renforcement inférieur et le béton qui l'entoure dans la zone près des appuis (NAWY R. 1988) [94] ; (GONZALES CUEVAS O., ROBLES F 2002)[95].

Ensuite, 2 ou 3 fissures, inclinées vers le centre de la poutre, se développent à une distance entre $1,5d$ et $2d$ (Figure. I. 32) de l'appui. Lorsque les fissures de flexion n'évoluent plus, une des fissures inclinées dues à la contrainte principale oblique (CO) s'ouvre vers le point de chargement (zone supérieure de compression de la poutre). Il faut remarquer que comme les

fissures de flexion n'évoluent plus vers l'axe neutre, cet endommagement fragile dû à la CO produit la ruine instantanée de la poutre avec une faible déformation au centre de la poutre.

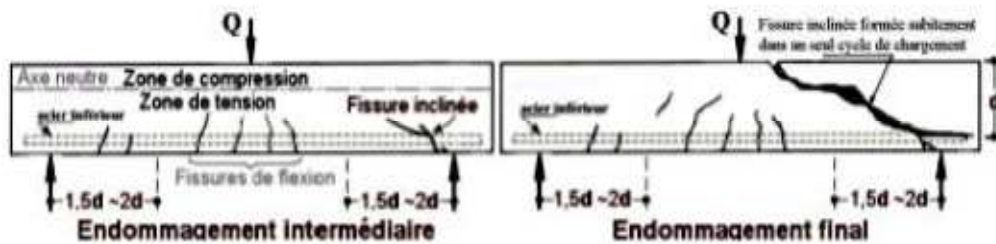


Figure.I. 32. Schéma typique d'une poutre en BA endommagée par la contrainte principale oblique.

IV.3.4.2. Rupture due à la contrainte par cisaillement (CC)

De même que pour la défaillance due à la contrainte principale oblique (CO), quelques fissures fines de flexion commencent à se développer au milieu de la longueur libre et leur développement s'arrête au fur et à mesure que se produit la perte d'adhérence entre le renforcement longitudinal en acier et le béton qui l'entoure dans la zone de l'appui.

Ensuite, une fissure plus inclinée que celle produite par la CO se développe rapidement vers l'axe neutre, mais moins vite que la fissure de CO. Cette différence est due à l'écrasement du béton dans la zone en compression et, aussi, à la redistribution des efforts internes de la zone supérieure. Lorsque la fissure principale inclinée arrive dans la zone où le béton est écrasé (Figure. I.33), il se produit la ruine subite de la poutre. Ce mécanisme de rupture peut être considéré relativement moins fragile, que la rupture par CO, dû à la redistribution des efforts. Cependant, cette rupture doit être évitée.

La différence principale entre la rupture due à la CO et celle due à la CC consiste dans le fait que la fissure principale inclinée par CO apparaît subitement, en provoquant la ruine immédiate de la poutre, ce qui n'est pas le cas par la CC qui peut supporter un chargement plus important.

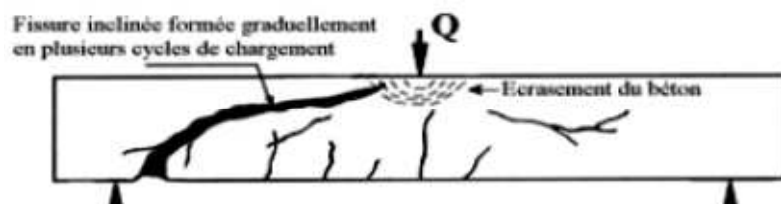


Figure.I. 33. Schéma typique d'une poutre en BA endommagée par la compression due au cisaillement.

IV.3.4.3. Rupture due à l'Adhérence par Cisaillement (AC) [94-95]

Ce mécanisme de rupture est reconnaissable par l'amorçage d'une fissure longitudinale très importante au niveau du renforcement métallique en tension (partie inférieure), simultanément avec l'écrasement du béton de la zone en compression (Figure.I. 34). Ce type d'endommagement est similaire à celui dû à la CC, car l'endommagement dû à l'adhérence par cisaillement permet, aussi, une redistribution des efforts internes de la poutre. La différence réside dans la présence d'une fissuration horizontale le long de l'armature tendue.

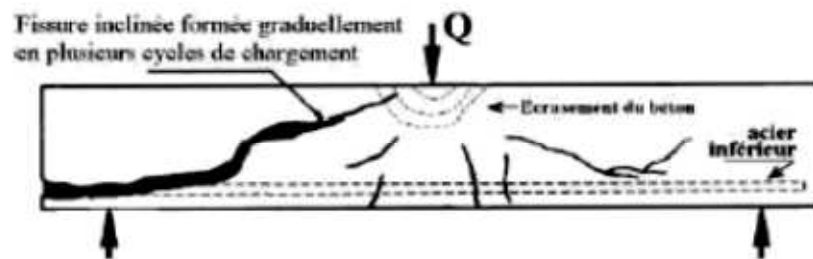


Figure.I. 34. Schéma typique d'une poutre en BA endommagée par la perte de l'adhérence due au cisaillement.

Les mécanismes de rupture doivent donc être correctement décrits afin de pouvoir être pris en compte dans une quelconque modélisation et/ou expertise.

V. Conclusion

L'étude bibliographique des résultats expérimentaux sur éprouvettes permet en effet de mettre en évidence les différents comportements du béton qui peuvent être rencontrés. La principale qualité du béton est son excellente résistance à la compression, mais son principal défaut est sa résistance en traction.

De plus, le béton est un matériau anisotrope et non-homogène. Il est donc difficile de définir les variations de ses caractéristiques mécaniques, en particulier, lorsqu'il est soumis au cisaillement. Le comportement d'une poutre en béton armé face au cisaillement est complexe, car, plusieurs paramètres entrent en jeu.

La durabilité et la tenue en service des structures du génie civil sont fortement influencées par la présence des fissures. Compte tenu de leur conception, les ouvrages en béton armé travaillent dans le domaine non linéaire et sont donc fissurés.

Nous proposons un modèle basé sur la théorie de l'endommagement qui permet d'évaluer les ouvertures de fissures. Les essais, uni-axiaux ou bi-axiaux, ont mis en évidence le caractère non linéaire du comportement du béton particulièrement selon les directions non chargées (La fissuration se développe toujours perpendiculairement à ces directions et le rôle des extensions apparaît capital).

Partie. II. Modélisation numérique du comportement non linéaire du béton et du béton armé sous chargement statique et monotone

- Le choix de la mécanique de l'endommagement -

I. Introduction

Le matériau béton – par nature non homogène - associé à l'acier induit un comportement autrement plus complexe que ne peut le décrire les hypothèses très simplificatrices de la RdM. C'est pourquoi, des règles de calcul précises et dédiées au béton armé ont été établies. Elles sont contenues dans le règlement BAEL (Béton Armé aux Etats Limites). La dernière version majeure date de 91 mais des modifications mineures ont été réalisées depuis BAEL 91 révisées 99[42].

Afin de mieux exploiter les courbes expérimentales caractérisant le comportement mécanique du béton et du béton armé, des chercheurs ont élaboré plusieurs lois de comportement tenant compte de divers mécanismes, tel que la chute de la raideur liée à la fissuration, les déformations anélastique et le comportement unilatéral, ductilité sous confinement du béton...

Nous présentons ci-dessous un nombre restreint de propositions de ces lois qui sont classées selon deux grandes familles :

A. Modèles basés sur la théorie de plasticité (théorie des poutres)

-Modèles réglementaires.

-Modèles non linéaires.

B. Modèles basés sur la théorie de l'endommagement :

-Modèle de Mazars.

II. Modélisation du comportement non linéaire du béton en compression

II.1. Modèles réglementaires

Les modèles réglementaires servent de base aux calculs simplifiés aux Etats limites, ces règlements de calcul sont applicables à tous les ouvrages et constructions en béton armé, avec un dosage en ciment au moins égal à 300kg par m³de béton mis en œuvre (BAEL, EUROCODE 2).

Parmi ces modèles on peut citer :

a- Le modèle de béton simplifié BAEL.

b- Le modèle de béton simplifié Eurocode 2.

II.1. 1. Le modèle de béton simplifié BAEL [42]

Dans les calculs réglementaires, lorsque le calcul précis de la déformation n'est pas utile, on utilise une loi conventionnelle (figure.II.1) présentant une partie parabolique pour des déformations inférieures à la déformation correspondant au pic de contrainte, ε_{co} , et un palier plastique au-delà de la valeur 2.10^{-3} . La contrainte est alors supposée constante et égale à f_{bc} et ce, jusqu'à une déformation limite ε_{cu} égale à $3,5.10^{-3}$.

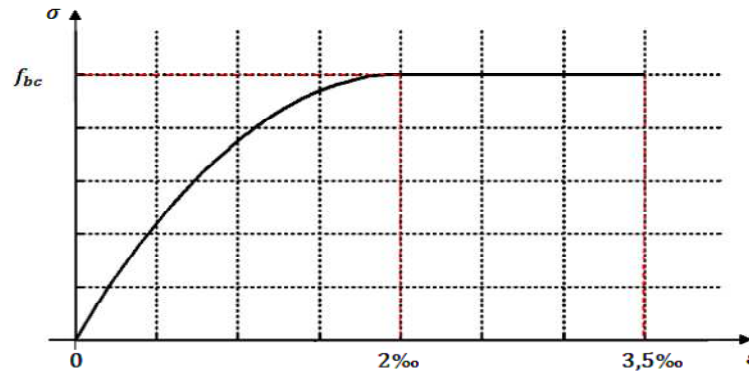


Figure. II.1. Loi Parabole-Rectangle du béton en compression BAEL

Les relations entre contraintes et déformations sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{bc} &= 0.25 f_{bc} 10^3 \cdot \varepsilon_{bc} (4 - 10^3 \cdot \varepsilon_{bc}) & 0 \leq \varepsilon_{bc} \leq 2\text{‰} \\ \sigma_{bc} &= f_{bc} & 2\text{‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5\text{‰} \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$$f_{bc} = \frac{0.85 \cdot f_{cj}}{\theta \gamma_b}$$

θ : Coefficient dépendant de la durée (t) de l'application des combinaisons d'actions

$$\begin{aligned} \theta &= 1 & \text{pour } t > 24h \\ \theta &= 0.9 & \text{pour } 1h \leq t \leq 24h \\ \theta &= 0.85 & \text{pour } t \leq 1h \end{aligned}$$

0.85 : C'est un coefficient de réduction de la résistance du béton dans le temps, il tient en compte de l'effet du fluage.

γ_b : vaut 1,5 pour les combinaisons fondamentales et 1,15 pour les combinaisons accidentelles.

II.1.2. Le modèle de béton simplifié de l'EUROCODE 2 [96].

Pour le calcul des sections, l'EUROCODE2 utilise le diagramme idéalisé dit « parabole-rectangle », constitué par un arc de parabole du second degré prolongé par un segment de droite.

OS : Parabole tangente au point S à l'horizontale.

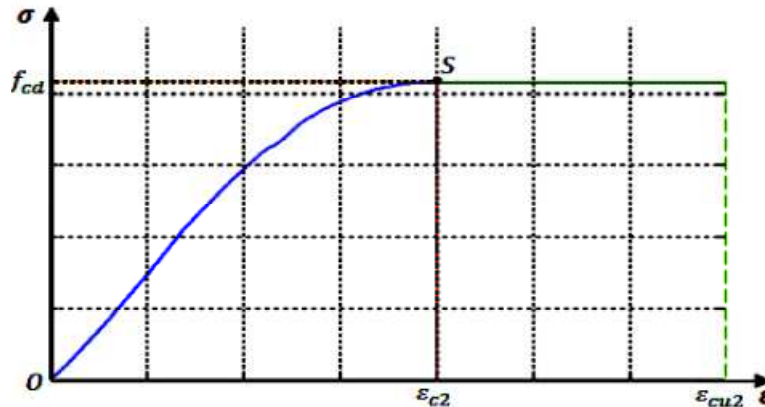


Figure. II.2. Diagramme parabolique-rectangle du béton en compression EUROCODE2.

$$\sigma_c = f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \quad (\text{II.2})$$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \varepsilon_c > \varepsilon_{c2}$$

f_{cd} : Contrainte de compression du béton correspondant à la partie rectiligne du diagramme.

ε_{c2} : Déformation de pic correspondant à f_{cd} .

n : exposant.

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

Avec :

$$\gamma_c = \begin{cases} 1,2 \dots \dots \text{Pour les situations accidentelles.} \\ 1,5 \dots \dots \text{Dans les situations durables.} \end{cases}$$

f_{ck} : Résistance caractéristique du béton à 28 jours.

- Pour les bâtiments : $\alpha_{cc} = 1$ valeur recommandée et à utiliser pour l'Annexe nationale française.

- Pour les ponts : $\alpha_{cc} = 0.85$ valeur recommandée. L'Annexe nationale française préconise $\alpha_{cc} = 1$.

Le coefficient $0.85 < \alpha_{cc} < 1$ tient compte de l'effet défavorable de la durée de l'application des charges, vis-à-vis de l'essai de courte durée utilisé pour définir f_{ck} .

Pour l'analyse non linéaire telle que pour le calcul des effets de second ordre et pour des charges de courte durée d'application, on utilise le diagramme de calcul défini de la manière suivante :

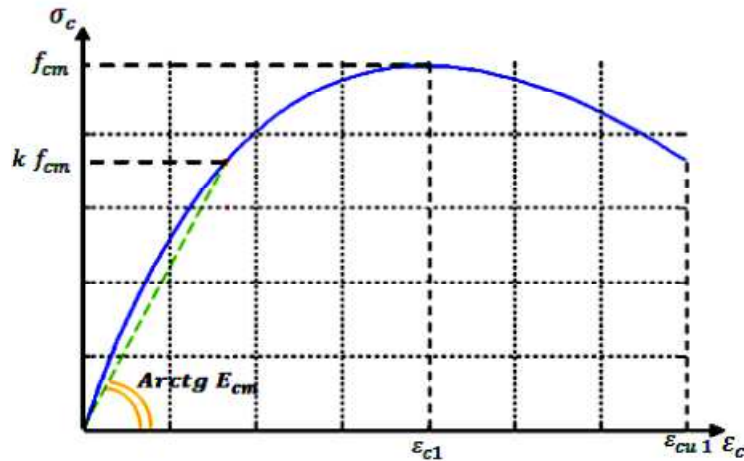


Figure. II.3. Diagramme non linéaire du béton en compression EUROCODE2.

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k \cdot n - n^2}{1 + (k - 2)n} \quad (\text{II.3})$$

Avec : $n = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}$

où ε_c et ε_{cl} sont pris en valeur absolue.

$\varepsilon_{cl} = 0.7 \cdot f_{cm}^{0.31}$: Déformation correspondant au pic de la courbe ($\sigma - \varepsilon$)

$$k = 1,05 \frac{E_{cm} \cdot |\varepsilon_{cl}|}{f_{cm}}$$

f_{cm} : Résistance moyenne à la compression du béton à 28 jours.

E_{cm} : Module de déformation instantanée du béton.

II. 2. Modèles non linéaires

Il existe dans la littérature plusieurs modèles représentant le comportement non linéaire du béton en compression, dont quelque uns sont cités ci-dessous :

- 1-Loi de comportement de SARGIN.
- 2-Loi de comportement de POPOVIC (1973).
- 3-Loi de comportement de DESAYI & KRISNAN (1964).
- 4-Loi de comportement de MACGREGOR (1997).
- 5-Loi cubique.

II.2.1. Loi de comportement de SARGIN. [7]

Ce modèle de comportement du béton en compression est essentiellement employé dans le calcul des structures en béton armé. Il présente un avantage de facilité la détermination des paramètres du modèle d'après les essais au laboratoire.

En élasticité non linéaire, les contraintes sont liées aux déformations par la relation suivante :
 $\sigma = \Phi(\varepsilon)$.

$\Phi(\varepsilon)$: Définit le comportement réel des matériaux.

Les relations qui lient les contraintes aux déformations des fibres de béton comprimé sont connues à l'âge(t) quelconque.

Ces lois sont définies en fonction des paramètres : $E_{b0}, f_{cj}, \varepsilon_{b0}, \varepsilon_{rc}$.

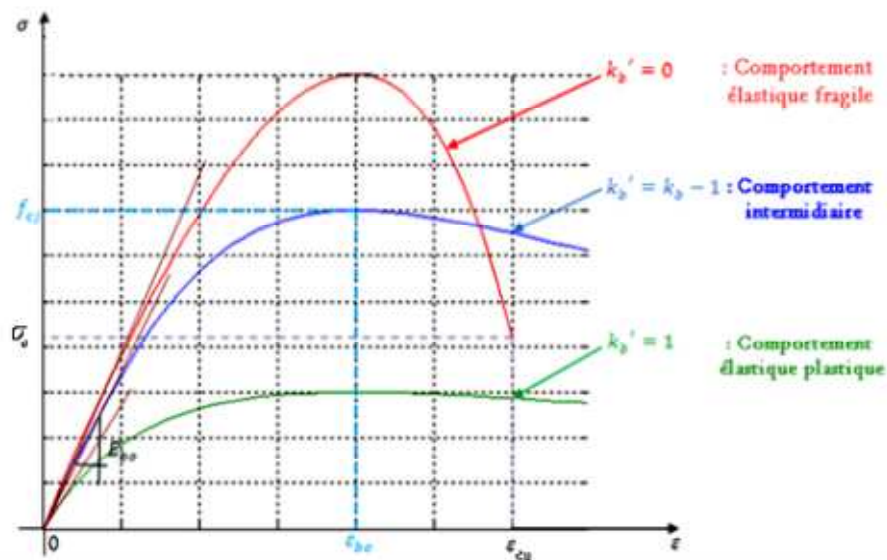


Figure. II.4. Comportement du béton en compression selon Sargin.

Caractéristiques de la courbe :

Ce modèle présente deux branches :

- Branche ascendante, à concavité vers le bas admettant un module tangent initial, et un maximum de contrainte qui correspond à la compression $f_{cj} \cdot \varepsilon_{rc} \sigma_U$

- Branche descendante, commençant par le maximum de la branche ascendante et se termine par le point définissant la déformation ultime correspondante à la contrainte ultime du béton.

Pour décrire le comportement non linéaire du béton en compression, SARGIN a proposé la relation suivante :

$$\sigma = f_{cj} \frac{K_b \bar{\varepsilon} + (K'_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (K_b - 2) \bar{\varepsilon} + K'_b \bar{\varepsilon}^2} \quad (\text{II.4})$$

Tel que :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

$$K_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_0}{f_{cj}}$$

$$E_{b0} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

Avec :

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton.

ε_{b0} : Déformation du pic correspondant à f_{cj}

f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l'âge j.

K_b, K'_b : Sont des paramètres adimensionnels, ajustent la branche ascendante et descendante, respectivement, de la loi de Sargin.

Le paramètre K'_b influe essentiellement sur l'allure de la branche descendante.

$K'_b = 0$: Correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile, avec une branche qui descend brutalement.

$K'_b = 1$: Correspond à un béton ayant un comportement élastique ductile, plastique, avec une branche descendante assez plate.

Pour un béton normal, on prend généralement : $K'_b = K_b - 1$

Le BPEL[43] propose de prendre :

$$K'_b = K_b - 1 \quad \text{Pour} \quad f_{cj} \leq 30 \text{ MPA}$$

$$K'_b = 0 \quad \text{Pour} \quad f_{cj} \geq 55 \text{ MPA} \quad (\text{II.5})$$

$$K'_b = (K_b - 1) \times \left(\frac{55 - f_{cj}}{25} \right) \quad \text{Pour} \quad 30 \text{ MPA} < f_{cj} < 55 \text{ MPA}$$

La déformation ε_0 correspondant au pic de contrainte peut être estimée par la formule donnée par le BPEL :

$$\varepsilon_{b0} = 0,62 \cdot 10^{-3} \sqrt[3]{f_{cj}}$$

et le module à l'origine par :

$$E_{ij} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

Le béton non armé possède une capacité de déformation à la rupture ε_{cu} très limitée, de l'ordre de $3,5 \cdot 10^{-3}$ cette valeur est de l'ordre de 2 fois le raccourcissement maximum élastique ε_{b0} .

II.2.2. Loi de comportement de POPOVIC (1973) [97]

Popovics, propose une équation mathématique unique de la relation « contrainte-déformation », pour représenter tant la phase ascendante que la phase descendante. Cette loi est décrite selon l'équation suivante :

$$\sigma = f_c \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{n}{n-1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n} \quad (\text{II.6})$$

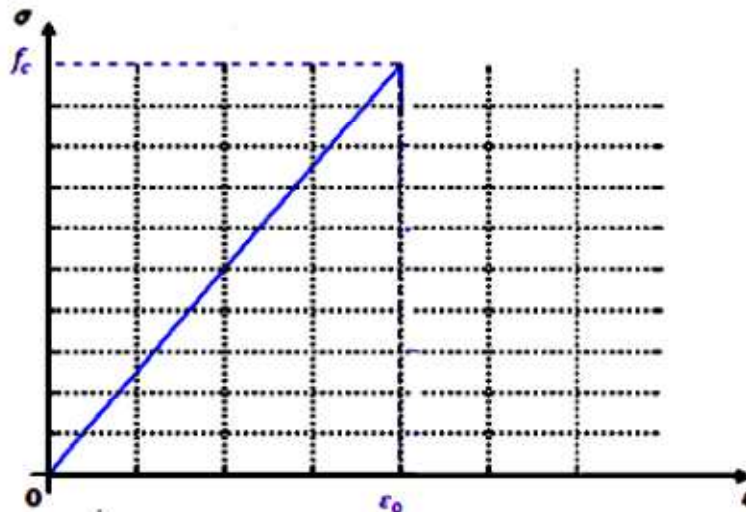


Figure. II.5. Comportement du béton en compression selon Popovics.

Avec :

f_c : Contrainte maximale en compression du béton mesurée sur cylindre.

ε_0 : Déformation au maximum de la contrainte maximale f_c .

ε : Déformation axiale

n : Fonction mathématique dépendant de la contrainte maximale.

Tel que :

$$n = 0.4 \times 10^3 f_c + 1$$

Selon les travaux de Watanabe publiés en 1972, Popovics propose une autre équation afin de déterminer la déformation axiale en fonction de la contrainte maximale en compression.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{K} \left(\sqrt{f_c} + \frac{2500}{\sqrt{f_c}} \right) \quad (\text{II.7})$$

K : Paramètre expérimental à déterminer.

La représentation graphique de la relation proposée, donne plutôt une droite linéaire dans la phase ascendante. Le comportement de la partie ascendante est donc de type élastique.

II.2.3. Loi de comportement de DESAYI et KRISNAN (1964) . [98]

D'après Neville (1995)[99], la relation proposée par Desayi et Krisnan (1964) constitue l'équation la plus représentative de la réalité. On admet dans cette relation que le module tangent initial correspond au double du module sécant à la contrainte maximale ($E_c = 2 \cdot \frac{f_c}{\varepsilon_c}$, ce qui constitue une hypothèse questionable puisque très simplificatrice). La relation entre le module tangent initial et le module d'élasticité est donc non linéaire et mieux représentée par une relation exponentielle (Neville, 1995).

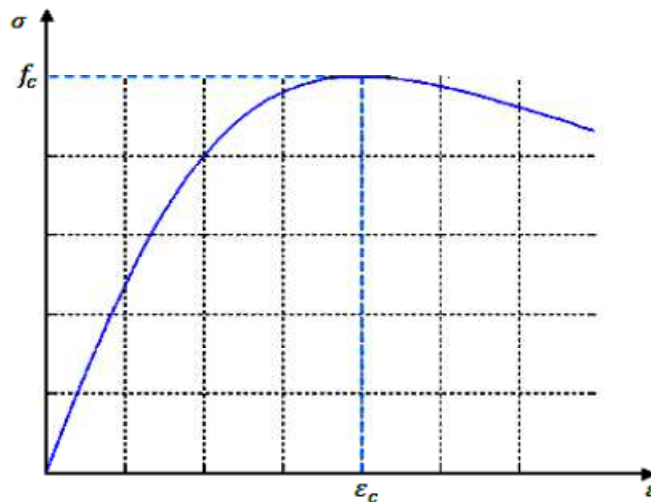


Figure. II.6. Comportement du béton en compression selon Desayi et Krisnan

$$\sigma_c = \frac{E_c \cdot \varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2} = \frac{2 \cdot f_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2} \quad (\text{II.8})$$

II.2.4. Loi de comportement de MacGregor, 1997

Lorsque le béton est soumis à des contraintes supérieures à 40% de sa résistance en compression, la microfissuration s'initie et tend à se propager parallèlement au chargement lors de son augmentation (MacGregor,1997) [100]. La relation contrainte-déformation tend alors à se courber graduellement, traduisant une perte de rigidité, jusqu'à une augmentation plus rapide des déformations au-delà d'une contrainte de 70 à 80% de la résistance en compression qui mène à la rupture par fissuration parallèle à l'axe de chargement.

Une certaine résistance subsiste après le pic et se traduit par une branche descendante dont l'allure dépend des conditions et procédures de l'essai, jusqu'à la déformation ultime du matériau, généralement admise à $3,5 \cdot 10^{-3}$. Cette valeur n'est en réalité pas constante, elle tend à diminuer avec l'augmentation de la résistance ultime (Nawy, 2003)[101].

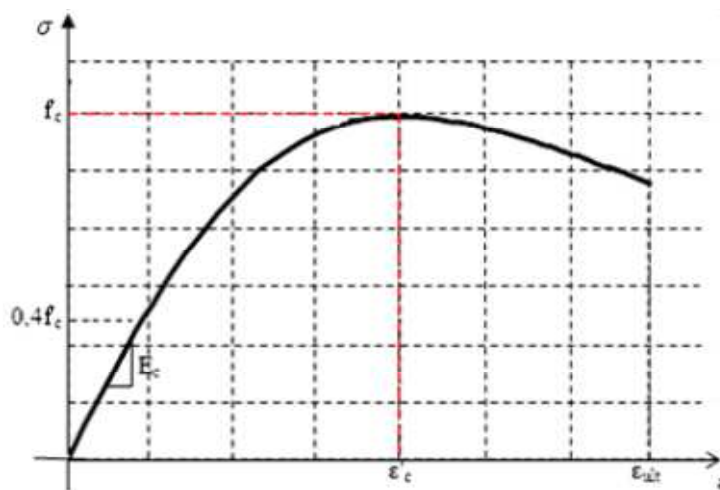


Figure. II.7. Loi de comportement du béton en compression (MacGregor).

Tel que :

f_c : Résistance limite élastique du béton à la compression.

ϵ_c : Déformation élastique du béton à la compression correspondante à f_c .

ϵ_{ult} : Déformation ultime du béton.

II.2.5. Loi cubique. [102-103]

Pour l'étude au second ordre des piles de grandes hauteurs, une estimation correcte des déformations est nécessaire. Virlogeux [102], a cherché à définir une loi permettant de choisir de façon indépendante la résistance $\frac{f_c}{\gamma_c}$, la déformation au pic de contrainte ϵ_{c0} et le module

tangent à l'origine $\frac{\epsilon_{c0}}{\gamma_{cm}}$, tout en induisant un coefficient de sécurité spécifique γ_{cm} . Il a adopté

une loi cubique de la forme :

$$\sigma = A\varepsilon^3 + B\varepsilon^2 + C\varepsilon \tag{II.9}$$

avec :

$$A = \frac{\varepsilon_{c0} \cdot E_{c0} - 2 \cdot f_c}{\varepsilon_{c0}^3}; B = \frac{3 \cdot f_c - 2 \cdot \varepsilon_{c0} \cdot E_{c0}}{\varepsilon_{c0}^2}; C = \frac{E_{c0}}{\gamma_{cm}}$$

Cependant, cette loi présente des inconvénients:

-Pour des valeurs élevées du module, le pic de contrainte n'est pas défini : il est situé au-delà du point d'inflexion.

-La contrainte prend des valeurs supérieures à $\frac{f_c}{\gamma_c}$ pour des déformations légèrement inférieures à ε_{c0} . De même, pour de très faibles valeurs du module, le point d'inflexion est situé dans la partie ascendante de la courbe. Ce qui crée une variation anormale du module (figure. II.8)

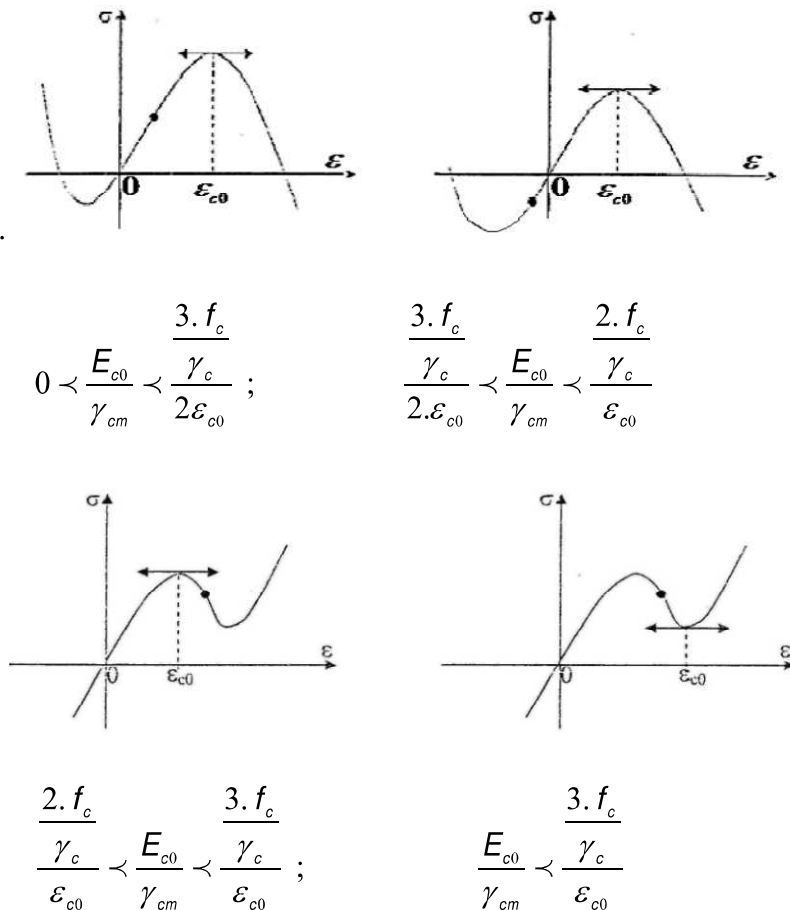


Figure. II.8. Forme de la loi cubique, en fonction des valeurs relatives du module et de la résistance.

La loi cubique n'est réellement applicable que dans le cas des bétons de résistance moyennes.

$$\frac{3 \cdot f_c}{\gamma_c} \cdot \frac{E_{c0}}{\gamma_{cm}} \cdot \frac{3 \cdot f_c}{\varepsilon_{c0}} \quad (II.10)$$

De plus, l'effet Rüsç [104] et le fluage du béton modifient les valeurs de E_{c0} , f_c et ε_{c0} . Une vérification reste donc toujours indispensable.

Cette loi présente l'avantage d'être extrapolable pour tenir compte du comportement en traction, jusqu'à une déformation ($-\varepsilon_{ct}$) qui correspond à la résistance à la traction. Elle est affectée d'un coefficient de sécurité ad hoc ($-\frac{f_{ct}}{\gamma_{ct}}$).

D'après M'RAD. A [103-104], cette loi a été tronquée du coté des grandes valeurs de la déformation, et prolongée sans discontinuité par un segment de droite, pour des valeurs de déformations comprises entre $\delta_1 \varepsilon_{c0}$ et $\delta_2 \varepsilon_{c0}$ (figure. II.9).

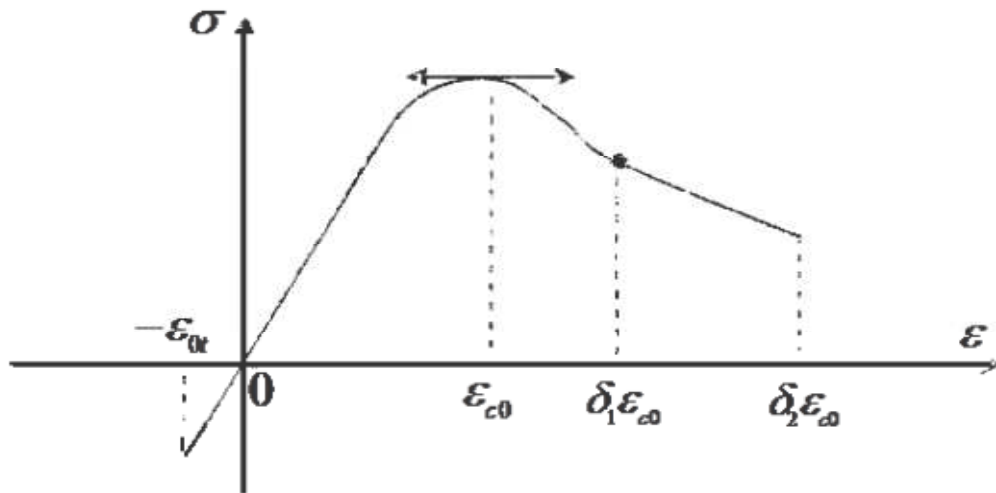


Figure. II.9. Loi cubique complétée.

Les valeurs de δ_1 et δ_2 sont choisies en fonction de l'allure de la loi de déformation qu'on veut obtenir, tandis que la contrainte correspondant à la déformation ultime $\varepsilon_{cu} = \delta_2 \varepsilon_{c0}$ est prise égale à $\beta \cdot (f_c / \gamma_c)$.

L'équation de la droite est alors :

$$\begin{aligned} \sigma &= D.\varepsilon + E ; \\ F &= A(\delta_1 \varepsilon_{c0})^3 + B.(\delta_1 \varepsilon_{c0})^2 + C.(\delta_1 \varepsilon_{c0}) ; \\ G &= \beta. \left(\frac{f_c}{\gamma_c} \right) \end{aligned} \quad (II.11)$$

Les paramètres A,B et C gardent la même signification que précédemment.
D et E sont donnés par :

$$D = \frac{F - G}{(\delta_1 - \delta_2) . \varepsilon_{c0}} \quad \text{et} \quad E = F - \delta_1 \frac{F - G}{(\delta_1 - \delta_2)}$$

III. Comportement non linéaire du béton en traction uniaxial

Le comportement de chaque matériau est défini dans la littérature par différentes lois mathématiques, alors dans ce qui suit est présenté quelques modèles de comportement expérimental du béton en traction sous sollicitation mono-axial.

Notant que dans le règlement de calcul BAEL 91[42] et BPEL 91[43], le comportement du béton à la traction est négligé.

III.1.Comportement du béton en traction selon Grelat [8]

La formulation de Grelat attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (Figure. II.10), dont la contribution du béton s'annule à la plastification des aciers.

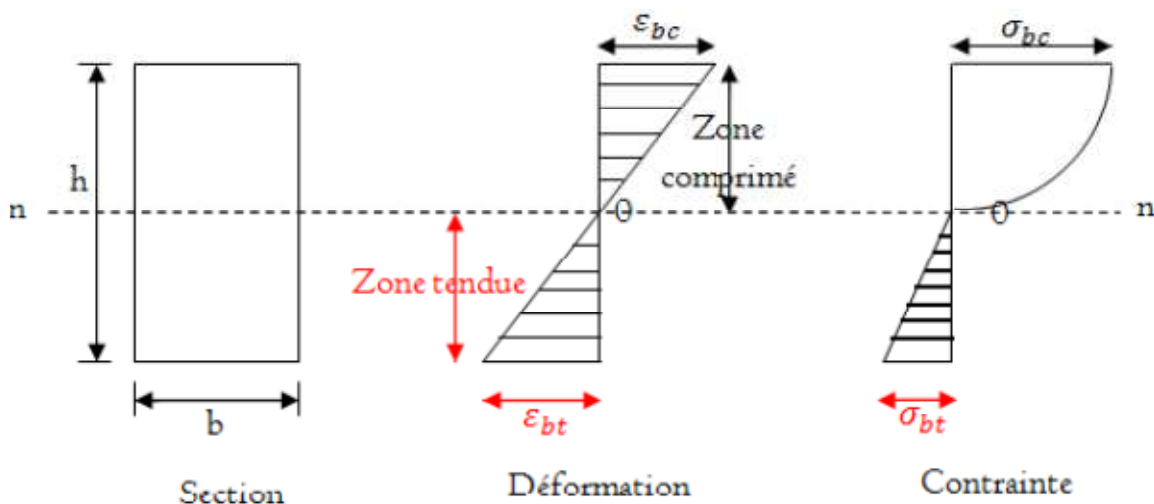


Figure. II.10. Comportement de béton avant fissuration.

Les fibres du béton tendu d'un module de déformation E_{bt} est défini par la contrainte et la déformation instantanée du bord tendu :

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}} \quad (II.12)$$

Au-delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives.

La contrainte ne s'annule pas brusquement, elle décroît selon une loi parabolique progressivement jusqu'à plastification et rupture des aciers tendus. Dans ce cas, l'étude concerne le comportement moyen d'une section situé entre deux fissures donne les relations suivantes :

- Domaine élastique linéaire :

$$\sigma_{bt} = E_{b0} \cdot \varepsilon_{bt} \quad \text{si } |\varepsilon_{bt}| < \varepsilon_{ft}$$

- Fissuration avec participation du béton tendu :

$$\sigma_{bt} = -f_{tj} \frac{(\varepsilon_{bt} - \varepsilon_{ft})^2}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2} \quad \text{si } \varepsilon_{ft} < |\varepsilon_{bt}| < \varepsilon_{rt}$$

- Fissuration sans participation du béton tendu :

$$\sigma_{bt} = 0 \quad \text{si } |\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{rt}$$

Avec : E_{b0} :Module d'élasticité longitudinale du béton,

f_{tj} : Résistance de béton à la traction,

ε_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{tj} ,

ε_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

ε_{bt} : Déformation de la fibre de béton la plus tendue,

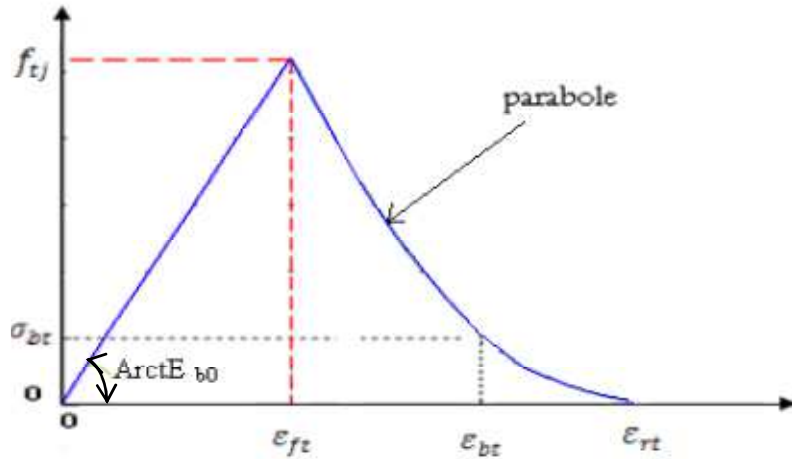


Figure. II.11. Diagramme contrainte-déformation du béton selon Grelat

III.2. Comportement du béton selon Quast[106] et Espion [107]

La proposition de Quast, modifiée par Espion, définit directement les contraintes fictives du béton (Figure. II.12). Ce dernier propose les expressions suivantes :

$$\sigma_t = f_{cj} \left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_s}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ct}} \right)^m \quad \frac{\sigma}{\sigma_t} = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{ct}} \right)^n \quad (\text{II.13})$$

Ou : ε_s : Déformation de l'acier,

ε_y : Limite d'élasticité de l'acier,

n : Coefficient de forme de la courbe (pour $n = 2$: diagramme parabole-rectangle),

$1 < m < 2$: dépend du pourcentage d'acier.

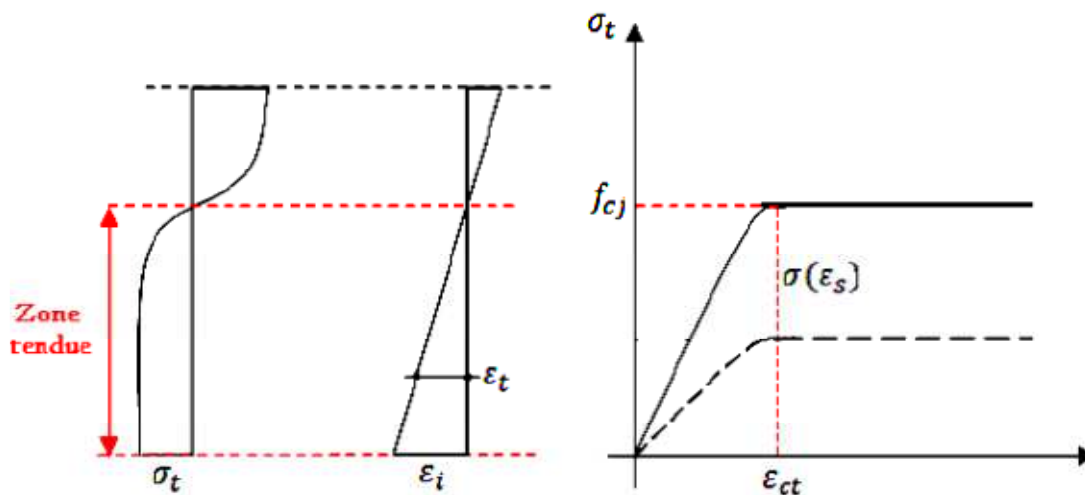


Figure. II.12. Le béton tendu selon ESPION (1986) et QUAST (1980)

III.3.Comportement du béton selon MAZARS

Une loi théorique a été développée par MAZARS (1984)[50-97]. Elle présente l'avantage d'ajuster la courbe décroissante avec deux paramètres A_t et B_t (figure. II. 13).

$$\sigma = E_{c0} \left\{ \varepsilon_{ct} (1 - A_t) + \frac{A_t \varepsilon}{e^{B_t(\varepsilon - \varepsilon_{ct})}} \right\} \quad \text{si } \varepsilon > \varepsilon_{ct} \quad (\text{II.14})$$

Avec : $0.7 < A_t < 1$ en moyenne ; $A_t = 0.8$
 $10^4 < B_t < 10^5$ en moyenne ; $B_t = 2 \times 10^4$

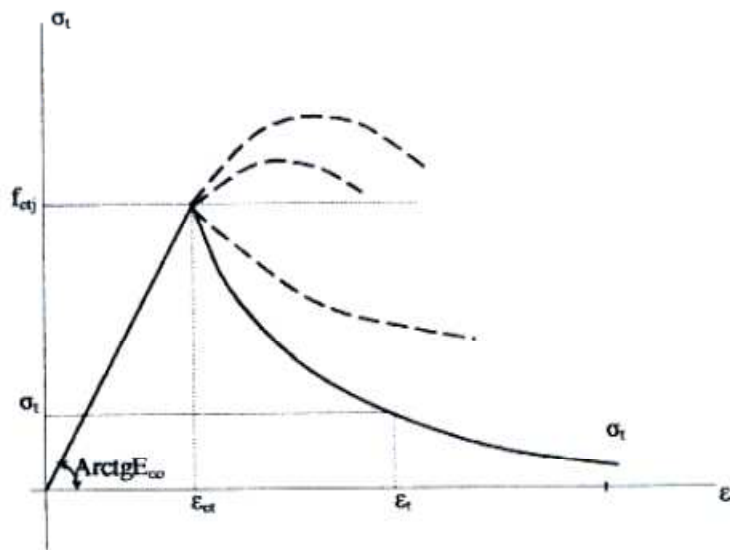


Figure. II. 13.Comportement local du béton en traction selon MAZARS (1984)

III.4.Comportement du béton selon ZHEN-HAI et XIU-QIN [108]

Une autre approche est celle de ZHEN-HAI et XIU-QIN (ZHE87). En prenant certaines précautions (la rigidité de la machine d'essai, centrage des éprouvettes), les auteurs présentent une loi théorique décrivant la courbe ascendante et la courbe décroissante avec un comportement ductile non négligeable du béton tendu (figure. II.14). Ils proposent les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x \leq 1: y &= 1,2x - 0,2x^6 \\ x \geq 1: y &= \frac{x}{\alpha(x-1)^\beta + x} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Avec : $\beta = 1.7$, $y = \frac{\sigma}{f_t}$, $x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}$, $\alpha = 0.312 f_t^2$

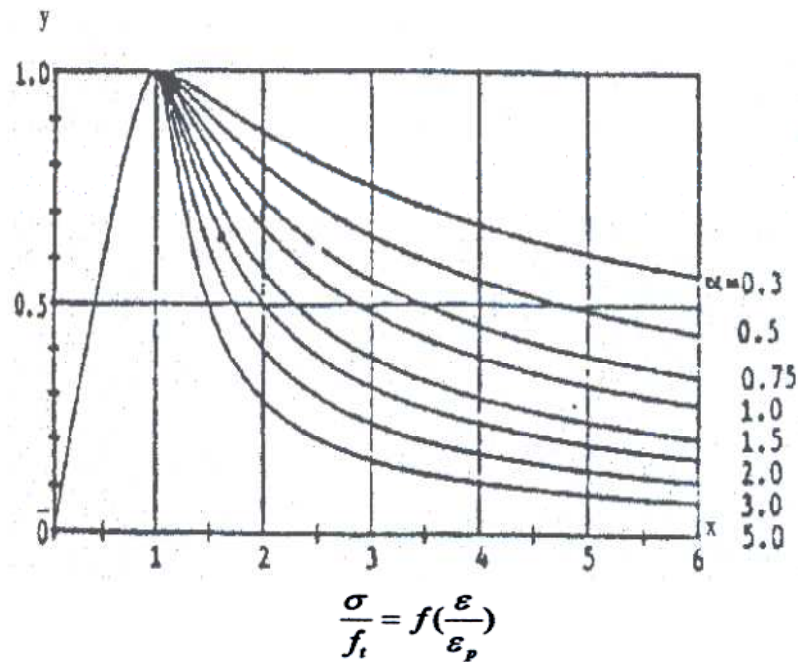


Figure. II.14. Relation de ZHEN-HAI et XIU-QIN (1987)

III.5. Comportement du béton selon SCANLON (1974)[109-110]

Pour approcher correctement le comportement d'une structure (surtout pour les courbes charge-flèche) les lois définies au paragraphe, ne sont pas adéquates.

En effet plusieurs facteurs rentrent en jeu quand le béton est mélangé à des aciers, à savoir :

- Le diamètre des armatures et leur disposition.
- La fissuration.
- Le mode de mise en charge, et l'interaction acier-béton, etc.....

L'ensemble de ces phénomènes physiques et la manière de les modéliser afin d'exprimer la participation du béton fissuré à la rigidité de la structure est appelé (tension stiffening).

La première loi fictive uni axiale du béton a été attribuée à SCANLON (1974) [109-110] (figure. II.15) et elle a été étendue par GILBERT et WARNER (1978) [111](figure. II.16).

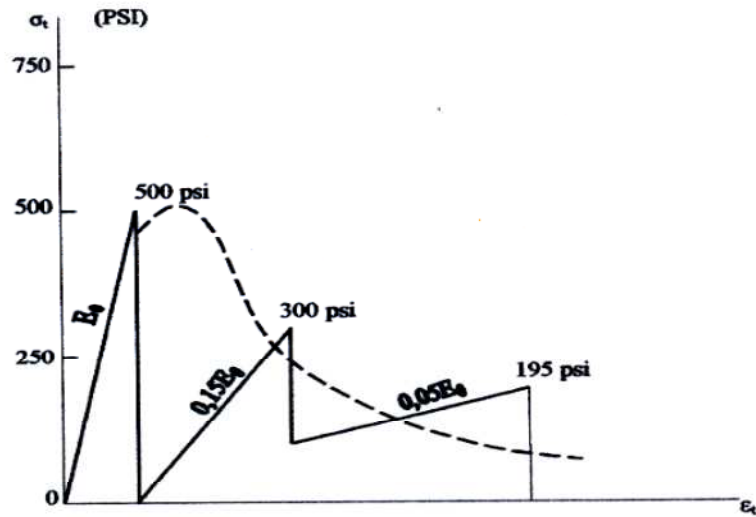


Figure. II.15. Loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après SCANLON (1974)

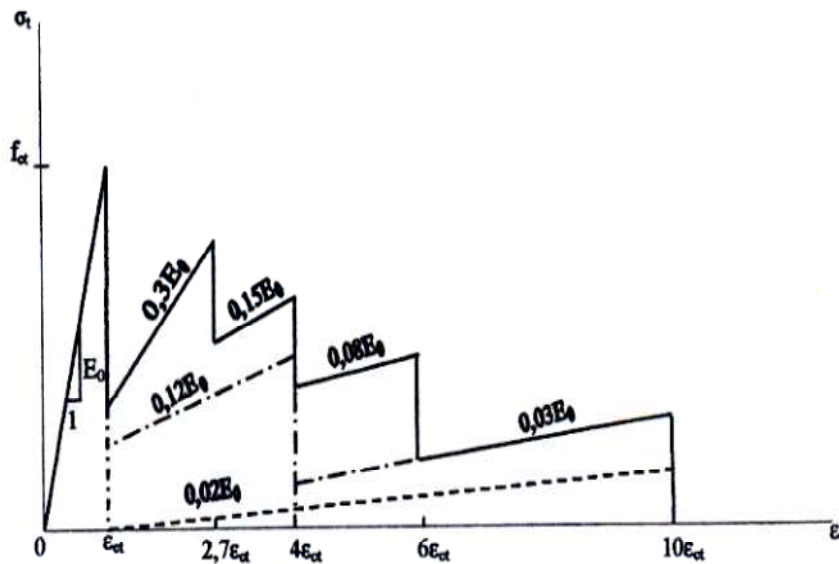


Figure. II.16. Loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après GILBERT et WARNER (1978)

III.6. Comportement du béton selon LIN

LIN (1975)[112] est l'un des premiers auteurs à proposer une réponse décroissante continue juste après le début de la fissuration (figure. II.17).

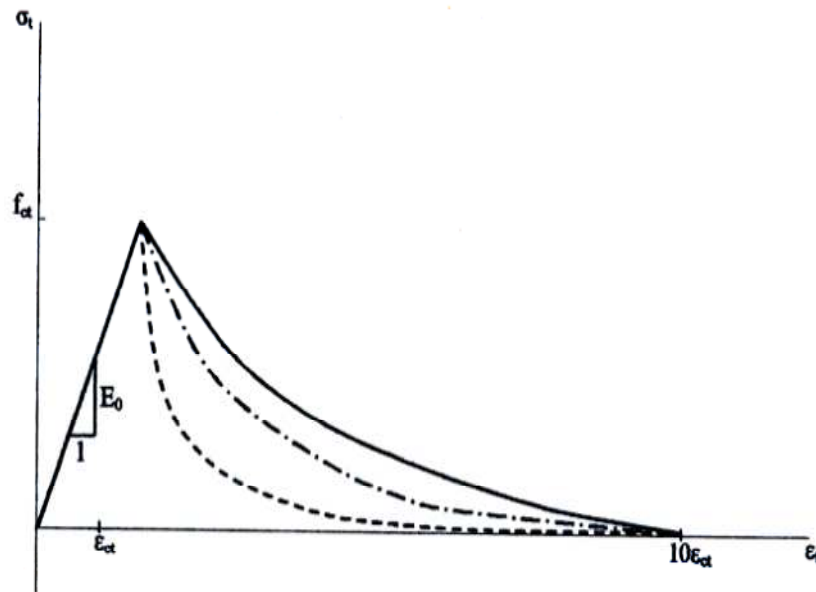


Figure. II.17. Loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après LIN (1975)

III.7. Comportement du béton selon BERGAN et HOLLAND [113]

La chute instantanée de la rigidité, juste après la fissuration a été présentée par BERGAN et HOLLAND(1979) (figure. II.18).est attribuée à KULICKI et KOSTEM (1975)[114].

Cette loi présentée à la (figure15) avec : $\varepsilon'_{ct} = 0.55\varepsilon_{ct}$, ε_{ct} et $\varepsilon_{tu} = 700\mu_s$ a été généralisée par GILBERT et WARNER (1978)[115] (figure. II.19).

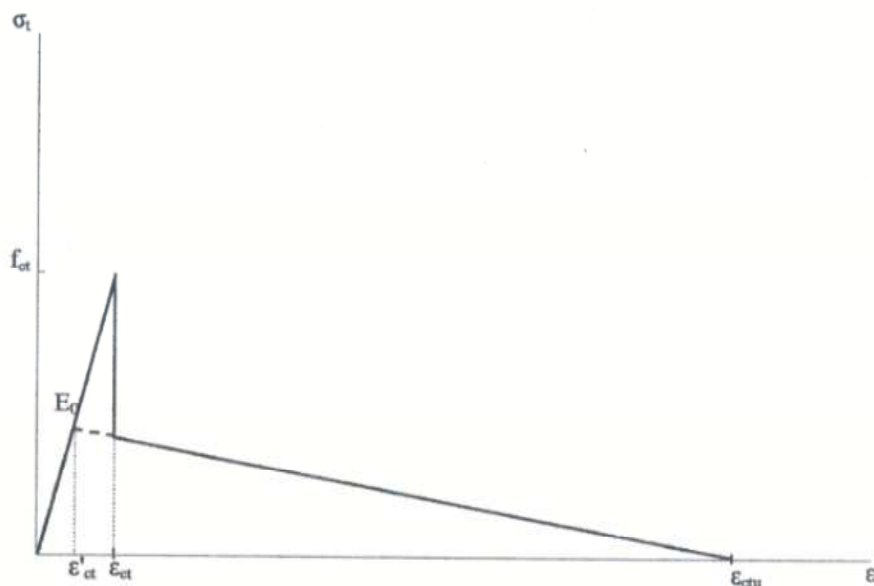


Figure. II.18. Loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après BERGAN et HOLLAND (1979)

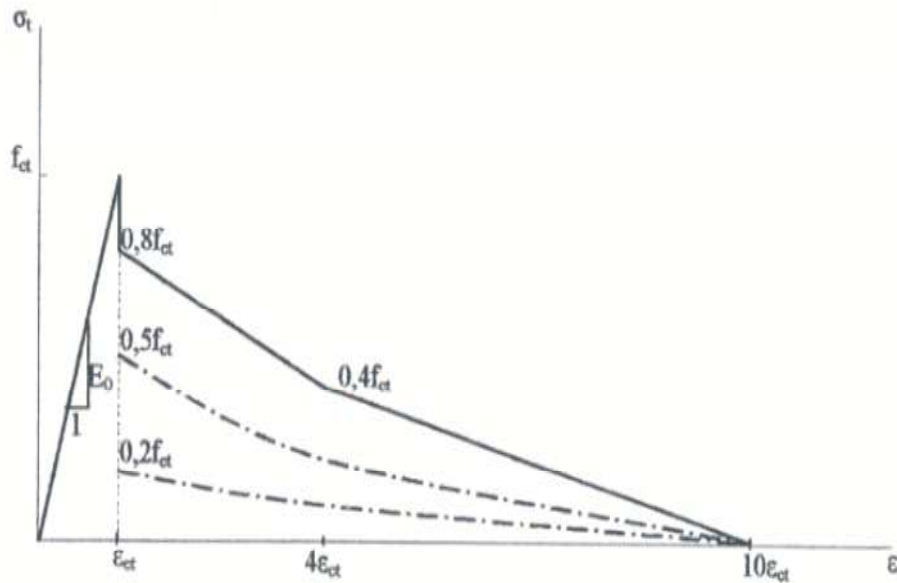


Figure. II.19. Loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après GILBERT et WARNER (1978)

III.8.Expression proposée par Vecchio et Collins (1986) [30]

Dans l'analyse du comportement global d'un élément de béton armé, après la fissuration, la présence de béton ne doit pas être négligée puisque le comportement d'une barre d'acier seule n'est pas le même que celui d'une barre enrobée de béton. Il permet de prendre en compte, dans le comportement global, l'apport positif du béton entourant les barres d'armature entre les fissures dans les zones en traction. Il se traduit en fait par une équation empirique, ne s'appliquant pas au comportement local réel d'une section, mais représentant plutôt le comportement global du béton armé tendu.

Pour le béton, cet effet est inclus en ajoutant, après la fissuration et lors de l'analyse du comportement global de l'élément, une branche descendante à la loi de comportement du béton en traction.

C'est une expression empirique représentant le comportement post-fissuration la plus répandue dans les divers modèles de simulation, qui s'applique pour les barres crénelées.

$$\sigma_c = \frac{f_{ct}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_c}} \quad (\text{II.16})$$

Telque :

σ_c : Contrainte du béton comprimé ;

f_{ct} : Résistance du béton en traction ;

ε_c : Déformation élastique du béton en compression.

Cette relation est valide pour le béton environnant les armatures, situé à l'intérieur d'un rayon équivalent à 7.5 fois le diamètre de l'armature concernée de part et d'autre de celle-ci (application aux cas des voiles). Ces zones doivent donc être considérées indépendamment de béton tendu plus éloigné.

Cette distinction est prise en compte dans la discrétisation de la section où deux types de béton sont considérés; un béton pour les couches situées à proximité des armatures, qui inclut le phénomène de « Tension Stiffening : correspond à la rigidité apportée par le béton fissuré entourant les armatures en zone de flexion négative » et un béton pour les couches plus éloignées qui n'impliquent que la portion élastique du comportement en traction.

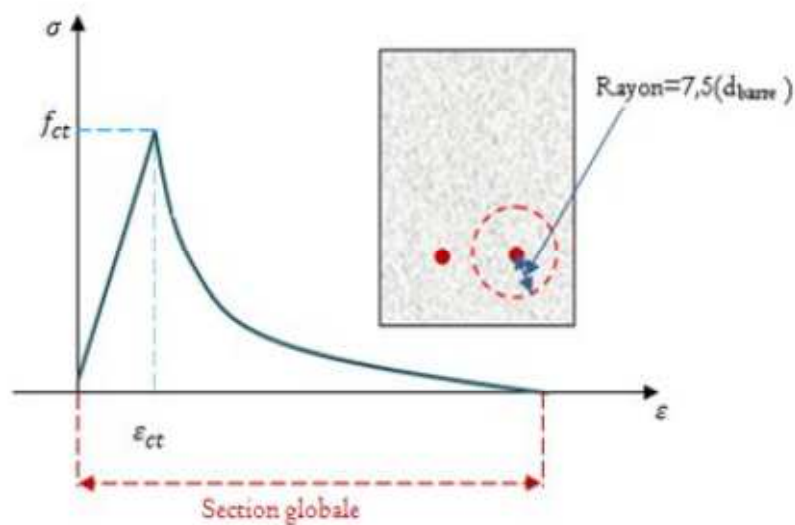


Figure. II.20. Comportement en traction en tenant compte de béton fictif selon Vecchio et Collins

III.9. Autre modèles de comportement [116-117]

Une autre proposition d'une loi de comportement moyenne fictive tenant compte de la contribution du béton tendu dans des éléments fissurés en béton armé est donnée selon Chang et Mander (1994)[116] et Belarbi et Hsu (1994)[117].(figure. II. 21)

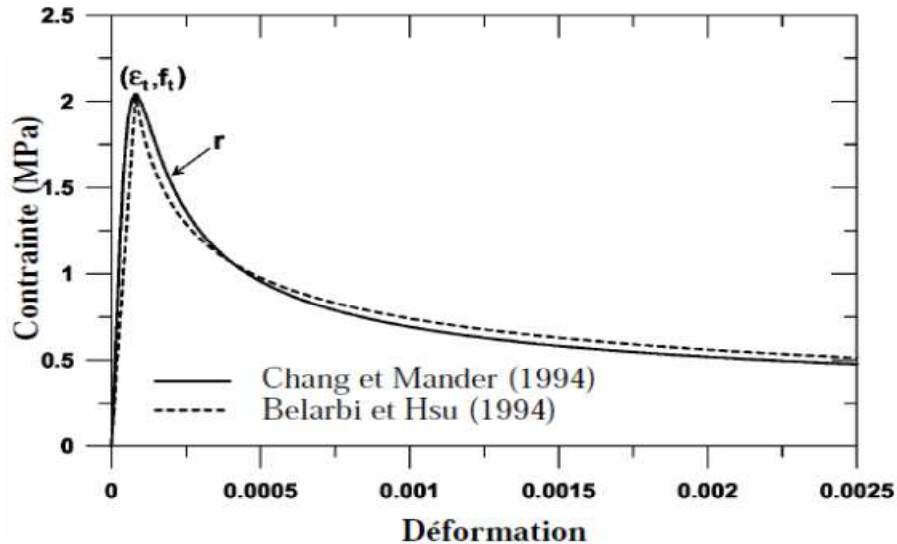


Figure. II.21. Comportement du béton en traction

IV. Modèles basés sur la théorie de l'endommagement

IV.1.Introduction de la mécanique de l'endommagement [5-6-87]

Les modèles d'endommagement sont développés pour modéliser l'évolution des propriétés d'un matériau entre son état sain (initial) et l'amorçage d'une microfissure ayant la taille d'un volume élémentaire représentatif (V.E.R). En 1958, le premier modèle d'endommagement a été proposé par (Kachanov, 1958). Il a décrit la détérioration des matériaux en introduisant une variable cachée continue d'endommagement.

Cette notion a par la suite été reprise dans les années 70, principalement en France (Lemaitre et Chaboche) en Angleterre (Leckie)... Elle a été généralisée au cas tridimensionnel isotrope dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (Lemaitre et Chaboche, 1996).

Le béton est souvent considéré comme un matériau fragile en traction et plus ductile-comportement adoucissant- en compression. Son comportement en traction ou en compression simple est quasi linéaire jusqu'à atteindre sa résistance maximale (la résistance en traction est de l'ordre de 10% de celle en compression).

La naissance et la coalescence de microfissures conduisent à la formation et à la propagation d'une ou plusieurs macro fissures, puis à la ruine. *Cette fissuration, source d'endommagement affecte la rigidité et entraîne une diminution du module de YOUNG* (figure.II. 22).

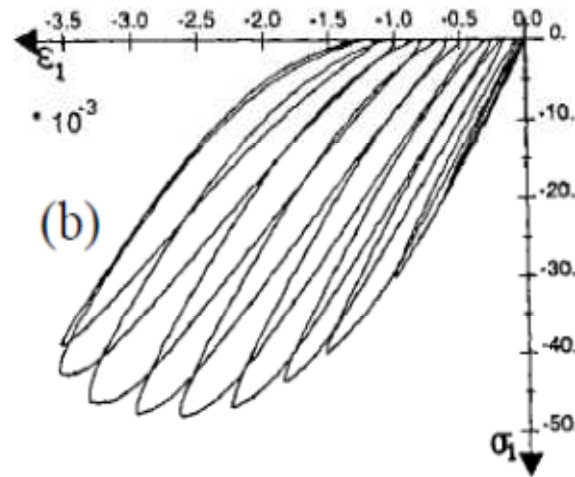


Figure. II.22. Essai de compression : mesures longitudinales (Ramtani 1990).[36]

IV.2.La théorie de l'endommagement

La théorie de l'endommagement est une autre façon d'aborder la phase non linéaire. Elle est basée sur l'observation du fait que, dans les bétons, la fissuration se développe bien avant la rupture de l'élément chargé.

Les contraintes appliquées sur une section du matériau d'aire S (voir : Figure. II.23) sont en fait limitées à une aire effective, plus faible que S , obtenue après déduction de l'aire des vides S_D . La théorie définit le paramètre d'endommagement D comme le rapport S_D / S .

La notion d'endommagement appliquée au béton date du début des années 1980 (Mazars 1984). Tout d'abord proposée par Kachanov (Kachanov 1958), la mécanique de l'endommagement introduit le principe de la contrainte effective $\tilde{\sigma}$ stipulant que la contrainte réelle s'appliquant sur une partie de matière encore résistante est supérieure à la contrainte macroscopique σ (Lemaître Chaboche 1985).

La notion de contraintes effectives est souvent exprimée par le biais du principe d'équivalence en déformation (Lemaître) : la contrainte effective est celle qui produit dans une direction donnée la même déformation sur le matériau vierge que la contrainte macroscopique sur le matériau endommagé.

$$\begin{aligned} \{\tilde{\sigma}\} &= \Lambda \{\varepsilon\}, \\ \{\sigma\} &= \tilde{\Lambda} \{\varepsilon\}. \end{aligned} \tag{II.17}$$

Avec Λ la matrice d'élasticité initiale, $\tilde{\Lambda}$ matrice du matériau endommagé.
L'écriture de la loi dans un cadre uniaxiale nous conduit à la relation suivante :

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon \quad (\text{II.18})$$

Avec E le module d'élasticité et D l'endommagement défini comme le rapport des surfaces matérielles résistantes et initiale, un choix judicieux de la loi d'évolution de D qui varie de 0 quand le matériau est vierge à 1 quand le matériau est complètement ruiné- permet de simuler le comportement non-linéaire du béton.

$$D = \frac{S_D}{S}$$

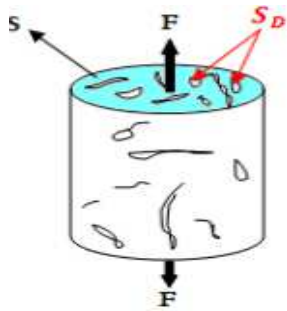


Figure. II.23. Description de la variable de dommage D

IV.3. Modèle d'endommagement de Mazars

IV.3.1. MAZARS (1984) [26-29]

Il s'agit d'un modèle de comportement pour le béton le plus utilisé dans le milieu scientifique d'où le choix qui se porte pour en faire une présentation simple.

Bases du modèle :

Il considère que les microfissures sont provoquées par les extensions suivant les directions principales du tenseur des déformations.

Pour décrire le comportement du béton, Mazars a développé un modèle couplé en élasticité-endommagement en ignorant toute manifestation de plasticité et de viscosité, il a postulé que l'endommagement est responsable uniquement des modifications du comportement élastique du matériau c'est-à-dire que l'endommagement n'est pas responsable de l'apparition des déformations permanentes. Son approche consiste donc à attribuer l'ensemble des phénomènes à une baisse de rigidité du matériau [26].

Afin de simplifier l'identification et les calculs de structure, et pour réduire le nombre de variables, l'auteur a fait le choix d'une seule variable d'endommagement isotrope, dans ce cadre la relation contraintes-déformations s'écrit comme [29] :

$$\sigma_{ij} = (1 - D)E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{II.19})$$

Où :

σ_{ij} : Composante du tenseur de contrainte.

E_{ijkl} : Composante du tenseur d'élasticité d'ordre 4.

ε_{kl}^e : Composante du tenseur de déformation élastique.

Chaque état d'équilibre est distingué par une valeur scalaire du potentiel thermodynamique $\rho\psi$, donné par l'expression suivante :

$$\rho\psi(\varepsilon, D) = \frac{1}{2}(1-D)\Lambda : \varepsilon : \varepsilon \quad (\text{II.20})$$

Sous un état quelconque de sollicitation, l'endommagement est considéré comme étant une combinaison d'un endommagement dû à la traction D_t et d'un endommagement dû à la compression (effet de Poisson) D_c , et il est exprimé sous la forme suivante [29] :

$$D = \alpha_t^\beta D_t + (1 - \alpha_t)^\beta D_c \quad (\text{II.21})$$

α_t : Traduit la part respective de chacun des endommagements de traction et de compression (α_t valant **0** pour une compression pure et **1** dans le cas d'une traction pure), et β est calée sur le cisaillement (voisin de 1.05 pour un béton courant, il permet de représenter à peu de frais sur les résultats expérimentaux, essentiellement pour les essais de cisaillement).

$$\alpha_t = \frac{\sum \langle \varepsilon_i \rangle \varepsilon_{traction}}{\sum \langle \varepsilon_i \rangle^2} \quad (\text{II.22})$$

Avec :

$\varepsilon_{traction}$: Les déformations principales dues aux contraintes de traction.

Les lois d'évolution de D_t et D_c sont données par (chaque fois que $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_{\max}$ est atteint) :

$$\begin{aligned} D_t &= 1 - \frac{\varepsilon_0}{\tilde{\varepsilon}} (1 - A_t) - A_t \exp\{-B_t(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_0)\}, \\ D_c &= 1 - \frac{\varepsilon_0}{\tilde{\varepsilon}} (1 - A_c) - A_c \exp\{-B_c(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_0)\}. \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

La progression de l'endommagement scalaire D est guidée par l'évolution de la déformation équivalente $\tilde{\varepsilon}$, calculée à partir des déformations principales positives $(\varepsilon_i)_+$:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (\text{II.24})$$

Avec :

ε_0 : La valeur de déformation qui correspond à l'initiation de l'endommagement.

A_t, B_t, A_c, B_c : Paramètres scalaires du modèle.

Lors du chargement de compression pure, le respect de la condition de dérivabilité de la courbe (σ, ε) à l'initiation de l'endommagement $(\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0)$ impose une relation supplémentaire entre les paramètres soit :

$$B_c = \frac{A_c - 1}{A_c \varepsilon_0} \quad (\text{II.25})$$

La figure ci- dessous présente les réponses du modèle d'endommagement de Mazars dans le test de compression et de traction [26] .

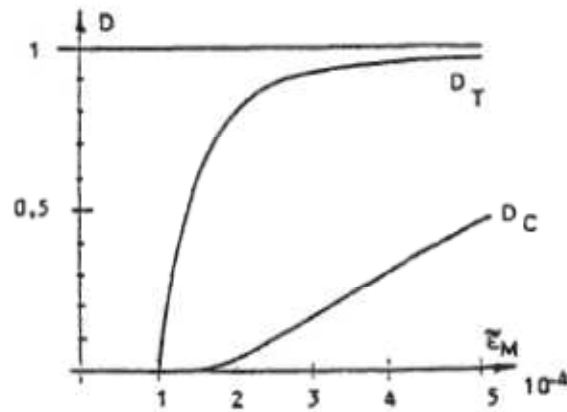


Figure. II.24 : Evolution des deux variables d'endommagement D_t et D_c (Mazars, 1984).

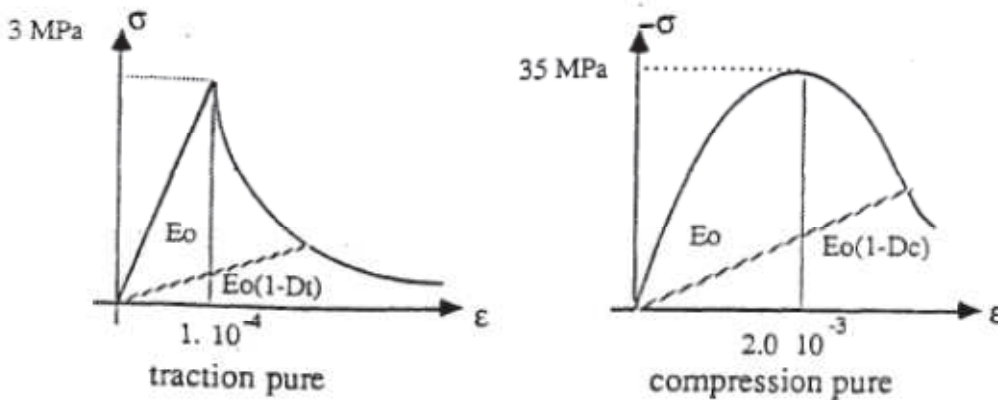


Figure. II.25 : Comportements élémentaires en traction et en compression (Mazars, 1984).

IV.3.2. MAZARS (2013)

Une nouvelle formulation du modèle de Mazars [118] est proposée à travers 2 modifications majeures :

1. Amélioration du comportement en bi-compression,
2. Simplification et amélioration du comportement en cisaillement.

Le modèle de Mazars d'origine (1984) [26] sous-estime grandement la résistance du béton en bi-compression. La première modification apportée par le modèle revisité améliore donc le comportement en bi-compression. Ce but est atteint en corrigeant la déformation équivalente lorsqu'au moins une contrainte principale est négative, à l'aide d'une variable (γ) (borné entre 0 et 1).

$$\varepsilon_{eq}^{corrigée} = \gamma \varepsilon_{eq} = \gamma \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} \quad (II.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = -\frac{\sqrt{\sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_-^2}}{\sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_-} \text{ si au moins une contrainte effective est négative.} \\ \gamma = 1 \quad \text{si non} \end{array} \right. \quad (II.27)$$

La contrainte effective au sens de la mécanique de l'endommagement est définie par :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \frac{\underline{\sigma}}{1-D} \quad (II.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_- = \tilde{\sigma}_i \text{ si } \tilde{\sigma}_i \leq 0 \\ \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_- = 0 \text{ si } \tilde{\sigma}_i > 0 \end{array} \right. \quad (II.29)$$

Où $\tilde{\sigma}_i$ est une contrainte effective principale

L'amélioration du comportement en cisaillement est atteinte par l'introduction d'une nouvelle variable interne : Y . Elle correspond au maximum atteint au cours du chargement de la Déformation équivalente. Sa valeur initiale Y_0 est ε_{d0} . Y est définie par l'équation suivante :

$$Y = \max \left(\varepsilon_{d0}, \max \left(\varepsilon_{eq}^{corrigée} \right) \right) \quad (II.30)$$

La fonction de charge est :

$$f = \varepsilon_{eq}^{corrigée} - Y \quad (II.31)$$

L'évolution de l'endommagement est donnée par :

$$D = 1 - \frac{(1-A)Y_0}{Y} - A \exp(-B(Y - Y_0)) \quad (II.32)$$

Dans cette expression, ce sont les variables A et B qui permettent de reproduire le comportement quasi fragile du béton en traction et le comportement écroui en compression. Pour représenter au mieux les résultats expérimentaux, les lois d'évolution suivantes ont été choisies pour A et B :

$$A = A_t(2r^2(1-2k) - r(1-4k)) + A_c(2r^2 - 3r + 1) \quad (II.33)$$

$$B = r^2 B_t + (1-r^2) B_c \quad (II.34)$$

où l'expression de r est :

$$r = \frac{\sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_+}{\sum_i |\tilde{\sigma}_i|} \quad (II.35)$$

Il apparaît dans ces équations une nouvelle variable r qui nous renseigne sur l'état de contrainte.

Lorsque r est égal à 1 (correspondant au secteur des tractions), les variables A et B sont équivalentes aux paramètres A_t et B_t ou inversement, si r est nulle (correspondant au secteur des compressions), alors $A=A_c$, $B=B_c$ et dans les deux cas (Eq.II.32) est identique à (Eq.II.23) .

La Figure. II.26 , donne dans le plan ($\sigma_3 = 0$) l'évolution en fonction du signe des contraintes principales des variables A , B , r et (γ) .

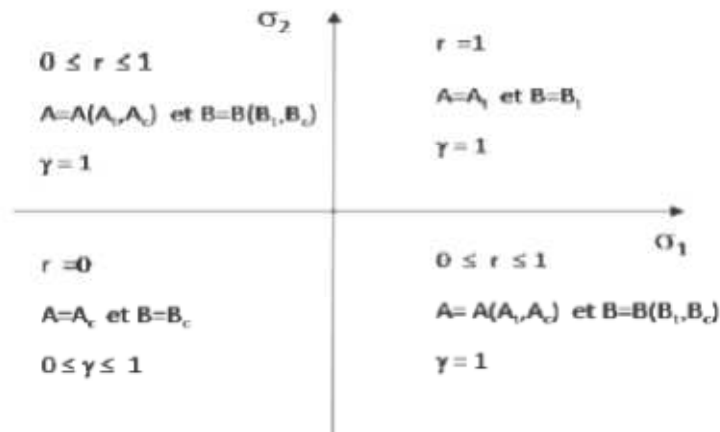


Figure. II.26 : Évolution des variables A , B , r et (γ) dans le plan (σ_3)

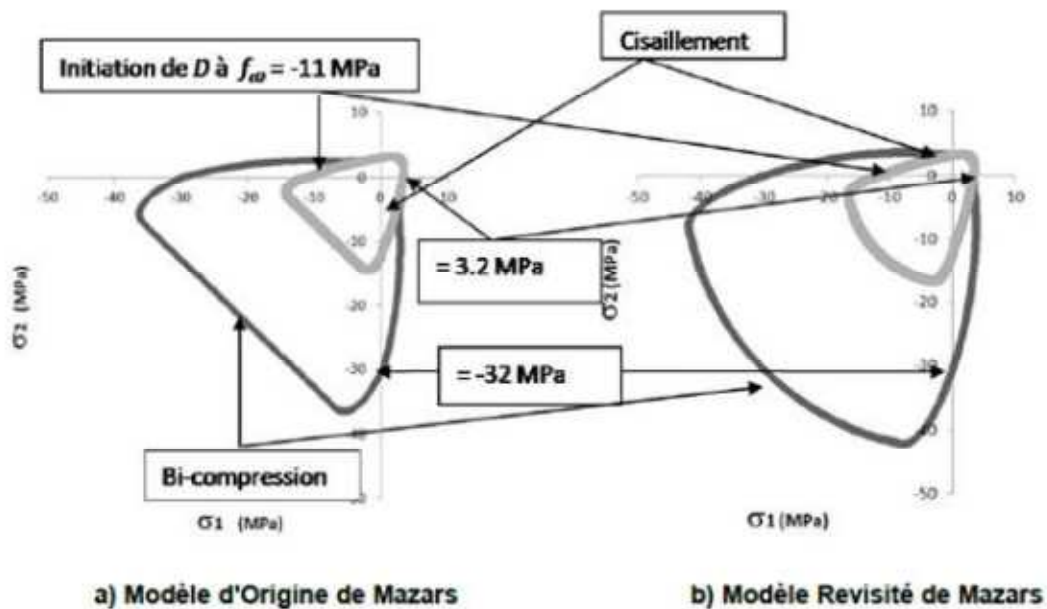


Figure. II.27. Comparaison des surfaces d'initiation d'endommagement et de rupture des modèles Mazars dans le plan $(\sigma_3 = 0)$ et un béton C30

V. Modélisation du comportement statique et monotone de l'acier

V.1. Les différents types d'aciers d'armatures [119]

On distingue quatre types d'acier pour armature (voir figure. II. 28), du moins au plus écroui :

1. Les aciers doux, sans traitement thermique ayant une valeur caractéristique de la limite élastique garantie de 125 ou 235MPa. Ce sont les ronds lisses (noté ϕ), qui ne sont plus utilisés que pour faire des crochets de levage en raison de leur très grande déformation à la rupture (allongement de 22%).
2. Les aciers laminés à chaud, naturellement durs, dit aciers à haute adhérence de type I. Ce type d'acier a une limite d'élasticité garantie de 400MPa et un allongement à la rupture de 14%.
3. Les aciers laminés à chaud et écrouis avec faible réduction de section (par traction-torsion), dits aciers à haute adhérence de type II. Ce type d'acier a une limite d'élasticité garantie de 500MPa et un allongement à la rupture de 12%.
4. Les aciers laminés à chaud par tréfilage (forte réduction de section), fortement écrouis, utilisés pour fabriquer les treillis soudés et fils sur bobines. Ce type d'acier a une limite d'élasticité garantie de 500MPa et un allongement à la rupture de 8%.

On pourra retenir que l'action de l'écrouissage est d'augmenter la limite d'élasticité en faisant disparaître le palier de plasticité, et de diminuer l'allongement à la rupture (plus fragile).

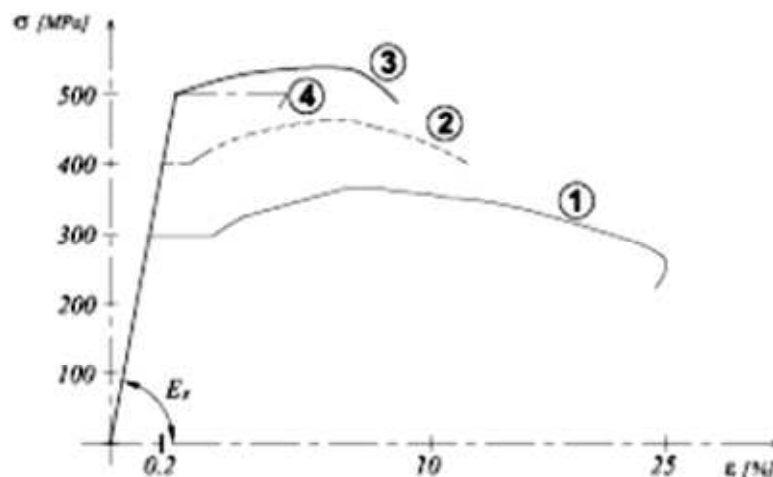


Figure. II.28. Diagrammes contrainte-déformation d'essais de traction sur les différents types d'aciers d'armature.

V.2.Modélisation du comportement de l'acier d'armature [42-119]

On notera que deux modèles sont utilisés pour décrire le comportement des quatre types d'aciers, un modèle idéalisé de type élasto-plastique parfait et un autre modèle plus réaliste qui tient compte de la partie écrouis de la loi de comportement, ces modèles étant fonction de la limite d'élasticité garantie f_e .

V.2.2. Modèle de calcul élasto- plastique parfait.

Le comportement des aciers pour les calculs à l'ELU vérifie une loi de type élasto-plastique parfait, comme décrit sur le diagramme contrainte-déformation de la Figure ou la

valeur de calcul de la limite d'élasticité garantie f_{su} est définie par : $f_{su} = \frac{\sigma_e}{\gamma_s}$

γ_s est un coefficient de sécurité partiel qui vaut 1.15 sauf pour les combinaisons accidentelles ou il vaut 1.

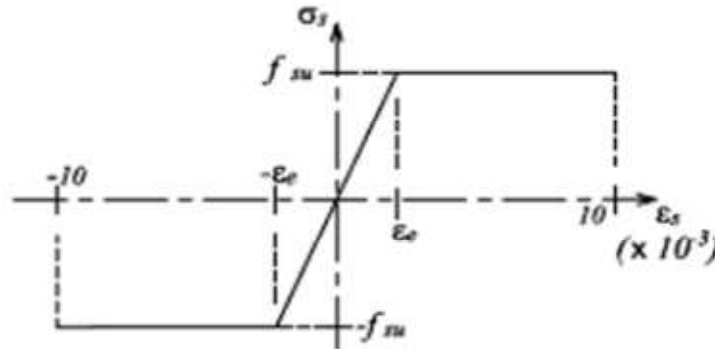


Figure. II.29. Diagramme contrainte-déformation de calcul de l'acier à l'ELU

$$\begin{aligned} \sigma &= E_a \varepsilon & \text{Pour } 0 \leq \varepsilon < \frac{\sigma_e}{\gamma_s E_a} & \quad (II.36) \\ \sigma &= \frac{\sigma_e}{\gamma_s} & \text{Pour } \varepsilon \geq \frac{\sigma_e}{\gamma_s E_a} & \end{aligned}$$

Les déformations extrêmes (ε_u) sont fixées par le règlement BAEL 91 à 10‰.

E_a : Module longitudinal de l'acier.

ε_e : Déformation limite - élastique de l'acier.

σ_e : Contrainte limite - élastique de l'acier.

V.2.2. Aciers écrouis.

Cette loi est issue de l'ancien règlement de béton armé BAEL83. Dans cette loi on conserve une zone élastique jusqu'à 70% de la limite élastique, au-delà et jusqu'à des déformations de 1%, on adopte une courbe de cinquième degré, et pour des déformations supérieures à 1%, on suppose que la déformation reste constante jusqu'à 4%. Cette loi a été développée initialement pour les aciers passifs. Le diagramme est symétrique par rapport au point O, et se décompose en partie linéaire et une partie non linéaire :

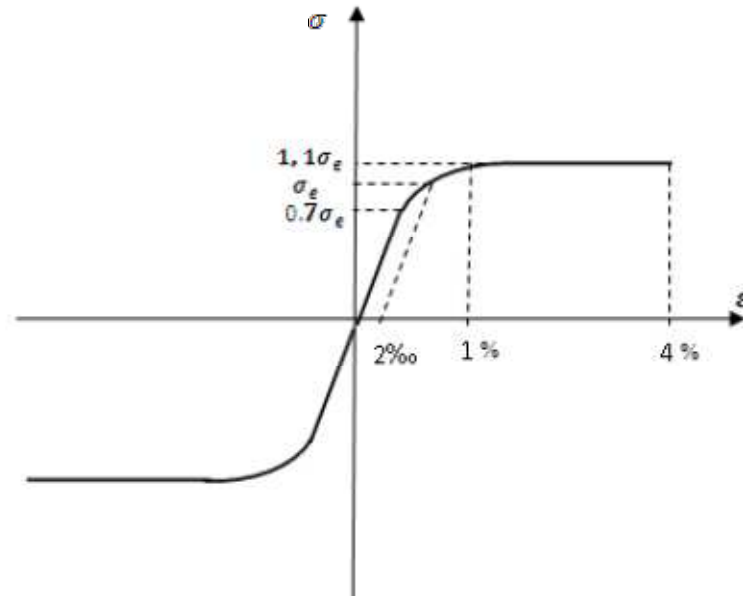


Figure. II.30. Comportement des aciers écrouis (BAEL83)

$$\sigma_s = E_a \varepsilon_s \quad \text{pour} \quad \sigma_s \leq 0,7\sigma_e$$

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_a} + 0,823 \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_e} - 0,7 \right)^5 \quad \text{pour} \quad 0,7\sigma_e < \sigma_s < 1,1\sigma_e \quad (\text{II.37})$$

$$\sigma_s = 1,1\sigma_e \quad \text{pour} \quad 1\% < \varepsilon_s \leq \varepsilon_u$$

E_a : est le module d'Young de l'acier à l'origine

σ_e : la limite élastique conventionnelle à 2‰,

$0,7\sigma_e$: est la contrainte où s'arrête le diagramme linéaire

VI. Modèle de comportement non linéaire du béton armé

VI.1. L'importance de la modélisation du comportement non linéaire du béton armé sous effort de cisaillement et de flexion

La rupture en cisaillement d'une poutre en béton armé est souvent sans signe précurseur; elle est soudaine et brutale, contrairement à son comportement en flexion. C'est pourquoi la conception devrait garantir une résistance en cisaillement supérieure à la résistance en flexion en tout point de la poutre (MacGregor et Bartlett, 2000) [120]. Il est alors essentiel de mieux comprendre les mécanismes du comportement en cisaillement afin de développer des modèles de calcul qui se veulent davantage rationnels.

La prédiction du comportement non linéaire d'un élément en béton armé nécessite non seulement des équations d'équilibre et de compatibilité, mais aussi des lois de comportement pour le béton et l'acier. La relation obtenue lors d'un essai de compression simple sur cylindre en béton a été utilisée par plusieurs scientifiques comme loi pour le béton. Néanmoins, les résultats numériques se trouvaient souvent loin des résultats expérimentaux.

La raison a été identifiée pour la première fois par Peter(1964)[121] qui a observé que le comportement d'un panneau en béton armé soumis à un effort de compression est adouci à cause de la traction dans la direction perpendiculaire. L'adoucissement serait donc causé par l'état triaxial de contraintes dans les bielles et la présence de traction perpendiculaire à leurs axes. Une fois l'adoucissement identifié plusieurs chercheurs ont travaillé pour le quantifier.

D'où l'introduction des modèles macroscopiques qui comptent entre autres la Théorie du champ de compression (Vecchio and Collins, 1986)[30], on évoque le Rotating-angle softened truss model (Belarbi and Hsu, 1994[122]; Pang and Hsu, 1995[123]), le Fixed-angle softened truss model (Hsu and Zhang, 1996[124]; Zhu et al., 2001[125]) ainsi que le Softened membrane model (Hsu and Zhu, 2002[126]).

Parmi ces modèles, celui proposé par Vecchio et Collins (1986) est considéré, selon Ohomori et coll. (1989)[127], comme très puissant pour sa rationalité et sa relative simplicité. Il est donc intéressant de s'y attarder davantage dans l'objectif de l'intégrer dans un modèle de prédiction du comportement d'éléments en béton armé cisailés.

VI.2.Choix du modèle du treillis adoucissant d'angle variable

Collins(1978)[128] Choisit la résistance en compression des bielles inférieure à la résistance en compression obtenue lors d'un essai de compression simple sur cylindre. Il postule que la résistance en compression diminue avec l'augmentation du diamètre du cercle des déformations principales ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2$).

Vecchio et Collins (1986)[30] effectuent une série d'essai sur des éléments de béton fissuré en diagonales de compression diminue avec l'augmentation des déformations de traction. Ils quantifient cette diminution à partir de leurs résultats expérimentaux et ils proposent une loi où l'adoucissement dépend de la proportion des deux déformations principales (Vecchio et Collins 1986).

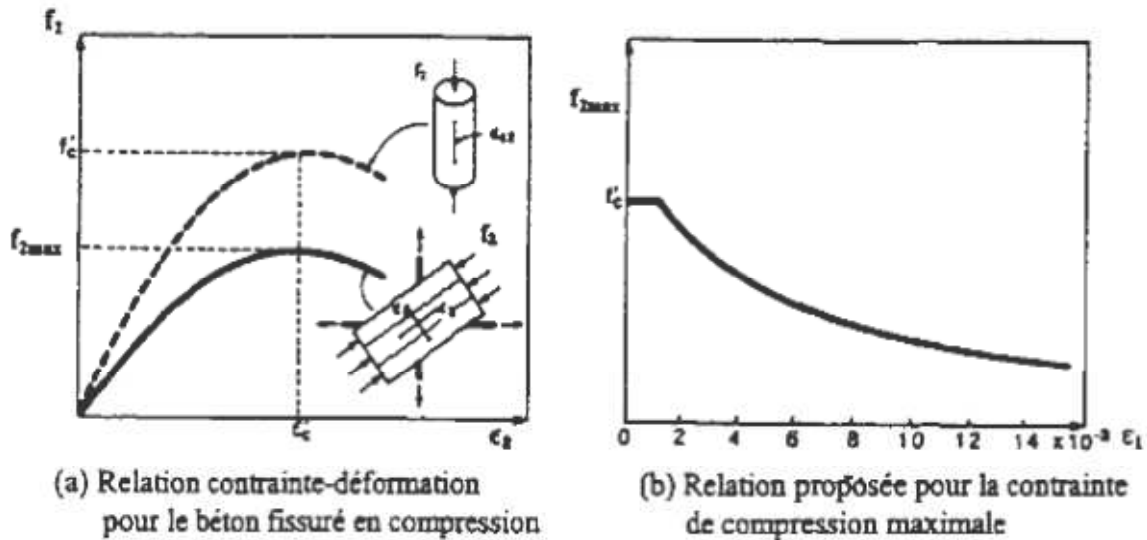


Figure. II.31.Relation contrainte-déformation dans un élément fissuré ((a), (b)).

La mise en équation de ce dernier point, en termes de relation contrainte-déformation du béton à l'état fissuré a été proposée par Vecchio et Collins (1986) :

$$f_d = f_{dmax} \left[2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_c} \right) - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_c} \right)^2 \right] \quad (II.38)$$

$$f_{dmax} = \frac{f_c}{0.8 + 170 \epsilon_1} \leq f_c$$

Avec :

f_d : Contrainte de compression dans les bielles de béton ;

f_{dmax} : Contrainte maximale de compression dans les bielles de béton ;

f_c : Résistance de béton en compression issue d'un essai de compression sur cylindre ;

ϵ_c : Déformation qui correspond à f_c lors d'un essai de compression sur cylindre ;

ϵ_1 : Déformation principale en traction ;

ϵ_2 : Déformation principale en compression.

En effet, plus la déformation principale de tension ϵ_1 est importante, moins le béton est résistant en compression. En partant du principe adopté par le modèle de Vecchio et Collins (1986)[30] et des équations élaborées (Equation. II.38) ; le modèle basée sur la théorie du treillis adoucissant « softened truss model theory », développée à l'université de Houston, est nommé ainsi pour mettre en avant l'importance du phénomène d'adoucissement dans les bielles diagonales. Le modèle de treillis adoucissant d'angle variable « Rotating angle softened truss model » RA-STM- Hus 1988[129]) a été développé pour la simulation du comportement des éléments en béton armé soumis à des efforts de cisaillement.

VI.3. Développement du modèle « softened truss model theory »

Les structures en béton armé peuvent être visualisées comme des assemblages d'éléments membranes. La prédiction du comportement de la structure est possible si on connaît le comportement de tous ces éléments membranes. La théorie du treillis adoucissant d'angle variable (Hus 1988)[129] est issue d'une combinaison des équations d'équilibre, de compatibilité et des lois de comportement des matériaux.

Un élément membrane de béton armé est représenté sur la figure. II.32. L'élément est sollicité en contraintes planes. σ_l, σ_t et τ_{lt} (contraintes normales et contraintes de cisaillement), ou (l et t) sont les directions des armatures longitudinales et transversales. Après le développement des fissures diagonales, les bielles de béton se mettent en compression et les barres d'acier en traction.

Les bielles de compression sont orientées selon l'axe d , qui est incliné d'un angle α par rapport à l'axe des barres horizontales. Cette direction est supposée coïncider avec la direction des contraintes et des déformations principales de compression.

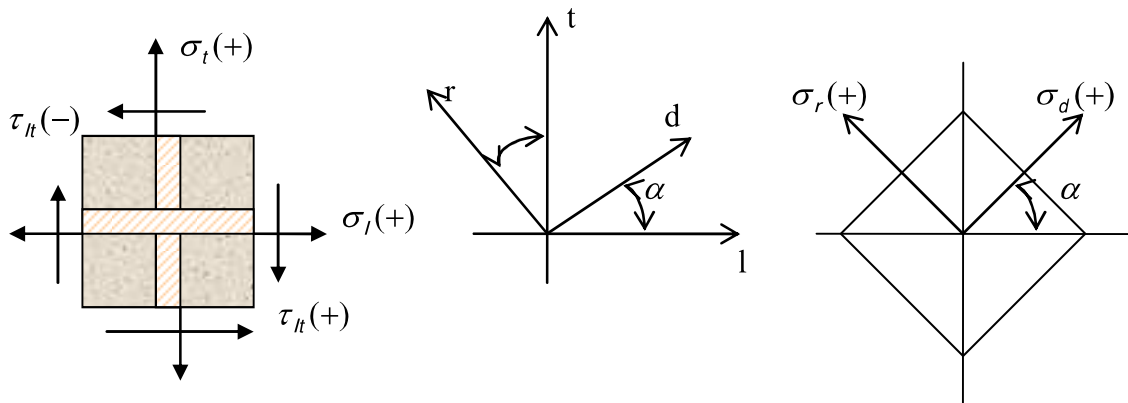


Figure. II.32. Élément membrane et contraintes selon RA-STM

VI.3. 1. Equations d'équilibre

La superposition du béton et de l'acier est décrite sur la figure. II.33.

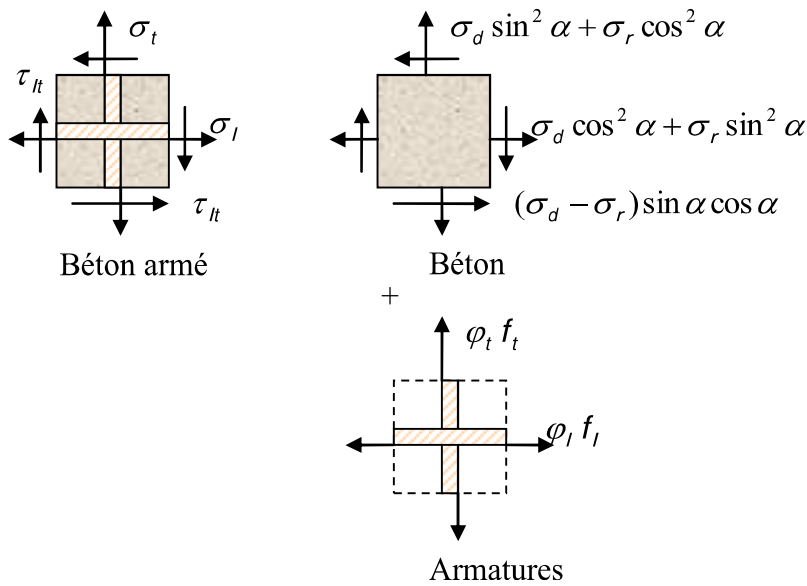


Figure. II.33. Superposition des contraintes du béton et des armatures

A partir du cercle de Mohr en contraintes, nous pouvons déduire les équations :

$$\begin{aligned}
 \sigma_l &= \sigma_d \cos^2 \alpha + \sigma_r \sin^2 \alpha + \varphi_l f_l \\
 \sigma_t &= \sigma_d \sin^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha + \varphi_t f_t \\
 \tau_{lt} &= (\sigma_d - \sigma_r) \sin \alpha \cos \alpha
 \end{aligned}
 \tag{II.39}$$

Avec :

- σ_l, σ_t : Contraintes normales selon l et t (positives en traction) ;
- τ_{lt} : Contraintes de cisaillement selon l et t (positives selon la figure. II.34) ;
- σ_d, σ_r : Contraintes principales selon d et r (positives en traction) ;
- φ_l, φ_t : Pourcentage volumique des armatures selon l et t ;
- f_l, f_t : Contraintes des armatures selon l et t ;
- d, r : Axes des contraintes principales ;
- l, t : Axes des armatures.

VI.3. 2. Equations de compatibilité

A partir du cercle de Mohr en déformations, nous pouvons déduire les équations :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_l &= \varepsilon_d \cos^2 \alpha + \varepsilon_r \sin^2 \alpha \\
 \varepsilon_t &= \varepsilon_d \sin^2 \alpha + \varepsilon_r \cos^2 \alpha \\
 \gamma_{lt} &= (\varepsilon_d - \varepsilon_r) \sin \alpha \cos \alpha
 \end{aligned}
 \tag{II.40}$$

Pour résoudre le système d'équations (II.39) et (II.40) on a besoin des lois de comportement des matériaux.

La loi de comportement du béton doit tenir compte du comportement adoucissant des bielles de compression. Dans la méthode de Hus (1988) l'auteur choisit d'utiliser la loi proposée par Vecchio et Collins (1986) en portant des modifications, qui prend ainsi la forme :

$$\begin{aligned}
 \sigma_d &= \xi f_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon_d}{\xi \varepsilon_c} \right) - \left(\frac{\varepsilon_d}{\xi \varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad \text{Si } |\varepsilon_d| \leq |\xi \varepsilon_c| \\
 \sigma_d &= \xi f_c \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_d / \varepsilon_c - \xi}{2 - \xi} \right)^2 \right] \quad \text{Si } |\varepsilon_d| > |\xi \varepsilon_c| \\
 \xi &= \sqrt{\frac{\varepsilon_d}{(1 - \nu) \varepsilon_d - \varepsilon_r}}
 \end{aligned}
 \tag{II.41}$$

Avec :

f_c : Contrainte maximale en compression issue d'un essai de compression sur cylindre ;

ε_c : Déformation qui correspond à f_c et qui peut être choisie égale à -0.002 ;

ξ : Coefficient d'adoucissement (inférieur à 1) ;

ν : Coefficient de Poisson égal à 0.3.

Le comportement du béton en traction est simulé par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= E_c \varepsilon_r \quad \text{si } \varepsilon_r \leq \varepsilon_{cr} \\
 \sigma_r &= \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_{cr}}{0.005}}} \quad \text{si } \varepsilon_r > \varepsilon_{cr}
 \end{aligned}
 \tag{II.42}$$

Avec :

E_c : Module de Young initial pour le béton, choisi égal à $-2 f_c / \varepsilon_c$ avec $\varepsilon_c = -0.002$;

ε_{cr} : Déformation au moment de la fissuration du béton, supposée égale à f_{cr} / E_c ;

f_{cr} : contrainte qui correspond au moment de la fissuration du béton, supposée égale à $4\sqrt{f_c}$.

VI.3. 3. Détermination de l'angle des bielles de compression

De nouveaux développements ont été proposés notamment pour le calcul de l'angle α et la contrainte principale de compression dans le béton σ_d .

En considérant les déformations du système (Figure. II.34), d'après Collins et Mitchell (1991)[130], en se servant des conditions de compatibilité (Equation : II.40).

En considérant que l'angle d'inclinaison des bielles coïncide avec la direction de la contrainte et de déformation principale de compression.

L'angle des bielles de compression est calculé par la formule :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_d}{\varepsilon_t - \varepsilon_d} \quad (\text{II.43})$$

De même par analogie au cercle de Mohr des contraintes on peut obtenir l'angle de la direction principale des contraintes α' par la formule :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha' = \frac{\sigma_l - \sigma_d}{\sigma_t - \sigma_d} \quad (\text{II.44})$$

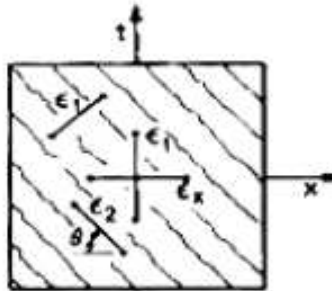


Figure. II.34. Les déformations dans un élément fissuré.(Tirée de Collins et Mitchell,1991)

VI.3. 4. Remarques

Des points importants peuvent être tirés après développement du modèle de (Hus 1988) :

- 1- La rupture en cisaillement d'une poutre en béton armé est souvent sans signe précurseur; elle est soudaine et brutale, contrairement à son comportement en flexion.
- 2- L'adoucissement serait causé par l'état triaxial de contraintes dans les bielles et la présence de traction perpendiculaire à leurs axes.
- 3- Cette adoucissement de la contrainte de compression en présence d'une traction dans l'axe perpendiculaire est une conséquence du comportement mécanique du béton dans un état de contrainte biaxial en traction-compression, tel qu'il a été constaté que plus la contrainte de

traction augmente dans un sens, plus la contrainte de compression diminue dans le sens qui lui est orthogonal.

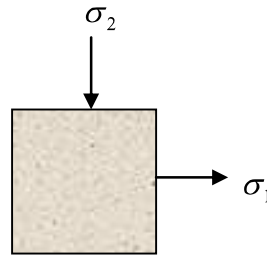


Figure. II.35. Etat de contrainte biaxial (traction- compression)

4- L'angle d'inclinaison des bielles coïncide avec la direction de la contrainte et de déformation principale de compression ceci impose de vérifier si :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha' \Rightarrow \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_d}{\varepsilon_t - \varepsilon_d} = \frac{\sigma_l - \sigma_d}{\sigma_t - \sigma_d} \quad (\text{II.45})$$

5- Pour déterminer l'angle d'inclinaison, il faut connaître la loi de comportement bidirectionnel ou du matériau béton et l'acier ($\sigma - \varepsilon$). Afin de déterminer les contraintes et les déformations principales.

VII. Conclusion

D'après les modèles traités dans cet exposé, on constate que ceux de la théorie des poutres (plasticité) sont plus simples et souples (utilise un nombre restreint de paramètres), que ceux de la théorie de l'endommagement.

Le modèle le plus approprié et qui présente l'avantage d'être souple d'utilisation et d'application numérique est celui de SARGIN. Contrairement aux modèles de la théorie des poutres, le modèle de Mazars introduit le facteur d'endommagement dans la loi de HOOKE généralisée.

Le modèle de Mazars qui est le plus utilisé dans le milieu scientifique, utilise plusieurs paramètres, malgré les dernières modifications apporté à celui-ci (Mazars, 2013), d'où l'utilité de la recherche d'une modélisation plus simplifiée du comportement non linéaire du matériau béton et du béton armé.

Nous avons essayé d'analyser les non-linéarités à l'aide de modèles physiques simples. Si dans le cas de la traction l'accord est bon entre modèles et réalité cela n'est plus aussi vrai pour la compression, sans doute parce que les phénomènes mis en jeu sont plus complexes.

Dans notre modélisation du comportement en traction et en compression, on porte le choix sur la loi de comportement de Sargin pour la compression et le modèle de GRELAT pour la traction qui tient compte de la contribution du béton située entre deux fissure dans la rigidité de l'élément en béton armé.

La théorie des poutres étudie plus le comportement globale des éléments avant et après ruptures (apparition des fissures macroscopiques)sans tenir compte de l' amorçage de ces fissures à l'échelle microscopique ,bien avant la rupture (Principe de la mécanique de l'endommagement),d'où l'importance d'une étude locale avant l'étude globale de l'élément en béton et en béton armé.

La qualité d'un modèle de comportement est généralement évaluée autour de trois critères : sa capacité à reproduire des comportements élémentaires ou structurels représentatifs (traction, compression, flexion, cisaillement,...) tout en tenant du comportement multiaxial traction et compression biaxial ainsi, la traction-compression, tenir compte du comportement sous confinement du béton et de l'effet hydrostatique sur le béton ainsi que le comportement particulier du béton associé à l'acier qui nécessite une modélisation bien approprié vue la complexité et le rôle de ces structures dans le domaine de Génie civil (construction des bâtiments, ouvrages d'art ,centrales nucléaires,.....) et surtout de l'efficacité de son implémentation (algorithme de résolution, convergence) et la simplicité de calibrage des paramètres qu'il utilise (ou leur signification physique).

Dans ce sens, un nouveau modèle est introduit pour d'écrire le comportement non linéaire du béton et du béton armé qui utilise la théorie de la mécanique de l'endommagement tel que l'isotropie du dommage et son unicité impose une seul variable notée (D) décrivant l'état locale qui est une fonction de la déformation (ε) qui représente la seul variable observable.

Une modélisation du comportement non linéaire du béton armé en utilisant le modèle du treillis adoucissant d'angle variable « Rotating angle softened truss model » RA-STM-Hus (1988) développé précédemment, en tenant compte de l'endommagement locale définit par la variable de dommage adoptée dans notre modélisation pour le cas du béton seul, au lieu d'adopter des lois de comportement du béton armé (Vecchio et Collins (1986) - Hus (1988)...).

Dans la modélisation du comportement non linéaire du béton armé, deux points important doivent être décrit :

- Evaluation de la contrainte de cisaillement.
- Le comportement adoucissant des bielles de compression de l'élément en béton armé sous un effort de compression ou de flexion par présence de contraintes de traction perpendiculaire à leurs axes.



Chapitre.2

*Modélisation du comportement non linéaire du béton et du béton armé par la
mécanique de l'endommagement-
Introduction de la variable du dommage D_{tot}*



Chapitre.2. Modélisation du comportement non linéaire du béton et du béton armé par la mécanique de l'endommagement- Introduction de la variable de dommage D_{tot}

I. Introduction

Nombreux sont les travaux qui traitent du comportement des matériaux et structures en béton et béton armé par la mécanique de l'endommagement [5-131-132-133-...], Cette théorie permet en effet de prévoir l'amorçage et la progression des fissures ainsi que la rupture des structures. La mécanique continue de l'endommagement [6], [86] a en effet, acquis de plus en plus d'intérêts et est devenue un outil prometteur pour la description de la dégradation des matériaux. Elle utilise des variables d'état internes, scalaires ou tensorielles selon l'objectif à atteindre lors de la modélisation.

Il est question ici de développer un modèle de comportement non linéaire du béton sous chargement monotone croissant, basé sur les relations de Sargin en compression et Grelat en traction. Il s'agit de transformer ces relations, habituellement admises dans le calcul non linéaire des structures en génie civil, en un modèle de comportement du béton et ce dans le cadre des principes de la mécanique de l'endommagement et des concepts de la mécanique de la rupture tout en utilisant les fondements de la mécanique continue des matériaux [10,134].

II. Hypothèses

Une poutre est engendrée par une section droite plane dont le centre appartient à une courbe (C) appelée ligne moyenne du solide. La théorie des milieux curvilignes élastiques [135-136-137] adopte l'hypothèse selon laquelle la poutre peut-être modélisée par la courbe (C). L'ensemble des efforts appliqués sur la surface est reporté sur la ligne moyenne. Le calcul en est ainsi simplifié.

La statique des poutres [9],[10],[134],[138] permet d'accéder, moyennant quelques hypothèses, aux efforts locaux de cohésion dans le solide. Les équations de l'élasticité tridimensionnelle sont utilisées pour déterminer la distribution de ces efforts le long de la ligne moyenne précédemment définie.

Cette analyse tient compte d'un certain nombre d'hypothèses de RDM adoptées pour les poutres :

- Hypothèse des petites déformations. On suppose que les efforts sont appliqués sur la configuration déformée.
- Hypothèse du comportement élastique linéaire
- Principe de superposition des effets des forces. Les effets (contraintes, déformations et déplacements) en un point d'une poutre soumise à plusieurs forces extérieures sont la somme des contraintes, déformations, déplacements provoqués par ces sollicitations prises isolément.
- Principe de Saint Venant : Dans une section éloignée des points d'application des forces concentrées (forces données et réactions d'appuis), les contraintes et les

déformations ne dépendent que de la résultante et du moment du système de forces dans cette section. Ce principe signifie que si l'on est suffisamment éloigné du point d'application des efforts, les contraintes et les déformations et déplacements ne dépendent pas de la manière dont on les applique.

- Hypothèse de Navier-Bernouilli : Après déformation de la poutre, les sections droites normales à la fibre moyenne restent planes et orthogonales à la fibre moyenne déformée.

III. Application de la théorie des milieux continus et principe d'homogénéisation.

Afin de pouvoir s'appuyer sur la théorie des milieux continus, il est donc nécessaire de remplacer le matériau réel par un matériau fictif homogène équivalent tel que, à l'échelle des structures étudiées, les champs de contraintes et de déformations soient macroscopiquement les mêmes dans les structures réelles et homogénéisée [139-140-141-142]. Ceci implique la définition d'un volume élémentaire représentatif du matériau (particule de la mécanique des milieux continus).

Le milieu homogène est celui qui possède des propriétés identiques en chaque point. Pour l'ingénieur, le concept d'hétérogénéité intervient chaque fois que les propriétés varient en fonction du point. Cette variation peut être soit continue, soit discontinue, ce qui est le cas dans les matériaux composites. Pour un matériau composite, les propriétés ponctuelles subissent des discontinuités au passage des interfaces entre les différentes phases constituantes qui, par contre, sont généralement considérées comme homogènes et isotropes.

IV. Application du principe de déformation équivalente- Introduction d'une variable de dommage D_{tot}

IV.1. Critère de l'étude

- Considérons une poutre en béton, soit un élément de volume définissant un état plan de contraintes en un point (M) :
- Dans l'enchaînement qui suit, on tient compte de deux théories de base :

1-La théorie de l'endommagement isotrope basée sur la thermodynamique des processus irréversibles [5-6-85-87-140] : On définit ainsi une variable totale du dommage (D_{tot}), unique en un point (M), qui devra vérifier le second principe de la thermodynamique (Autrement dit cette variable devra être croissante) .

L'isotropie du dommage, nous emmène vers une variable locale, indépendante de la direction. Le plus important dans cette étude s'est de définir une fonction seuil, pour un état bidirectionnel, tri directionnel et pour un état unidirectionnel.

2- La mécanique continue des matériaux (MMC) [9-10-134-135-136-137-138]. Application de la loi de Hooke, définit pour un milieu homogène et isotrope.

Le but du modèle s'est d'imposée une variable de dommage locale D_{tot} unique, qui dépend uniquement de la seule variable observable, représentée par l'état de déformation ε , en un point (M). (Voir figure. A.1)



Figure.A.1. Application du principe de la déformation équivalente dans un état de contrainte biaxial.

IV.2.Principe de l'étude

Dans cette étude nous considérons que le coefficient de Poisson $\tilde{\nu}$ et le module de Coulomb \tilde{G} sont variables. (Variation imposée par l'état de contrainte équivalent - voir Figure .A.1).

D_{tot} : La variable d'endommagement relative à un état plan de contrainte ou tri directionnel.

\tilde{E} : Module d'élasticité équivalent.

\tilde{G} : Module de coulomb équivalent.

$\tilde{\nu}$: Coefficient de Poisson pris à l'état équivalent.

Pour cela le deuxième but rechercher, s'est de définir une équation qui représente cette variation du coefficient de Poisson est ceci quelque soit l'état de contraintes.

IV.3. Application de la loi de Hooke pour un état de déformation principal en tri directionnel

IV.3.1.Cas tri directionnel. La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857[143-144-145-146-147-148] qui a proposé d'exprimer chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. Si les déformations restent petites et élastiques, les déformations s'obtiennent par les simples superpositions linéaires de celles qui résulteraient de chacune des contraintes donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{\tilde{E}}[\sigma_x - \tilde{\nu}(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{\tilde{E}}[\sigma_y - \tilde{\nu}(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{\tilde{E}}[\sigma_z - \tilde{\nu}(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad \text{Eq.A1}$$

Ajoutant les expressions traduisant la loi de Hooke dans le cas des distorsions :

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\tilde{G}}, \quad 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{\tilde{G}}, \quad 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{\tilde{G}}$$

Si le tenseur de contrainte est principal : $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

L'hypothèse d'isotropie impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base. On passant donc d'un état quelconque de contraintes à un état principal, et on posons: $\tilde{E} = f(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3)$

$\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3$: Modules de Young effectifs ou équivalents suivant les trois directions principales de contraintes.

Alors que la loi de Hooke pour un état de déformation principal va s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{\tilde{E}}[\sigma_1 - \tilde{\nu}(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\tilde{E}}[\sigma_2 - \tilde{\nu}(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{\tilde{E}}[\sigma_3 - \tilde{\nu}(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\quad \text{Eq.A2}$$

Pour le même état de déformation principal, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{\tilde{E}_1} - \tilde{\nu} \left[\frac{\sigma_2}{\tilde{E}_2} + \frac{\sigma_3}{\tilde{E}_3} \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{\tilde{E}_2} - \tilde{\nu} \left[\frac{\sigma_1}{\tilde{E}_1} + \frac{\sigma_3}{\tilde{E}_3} \right] \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{\tilde{E}_3} - \tilde{\nu} \left[\frac{\sigma_1}{\tilde{E}_1} + \frac{\sigma_2}{\tilde{E}_2} \right]\end{aligned}\tag{Eq.A3}$$

A partir de l'égalité entre les équations (Eq.A2) et (Eq.A3), on peut écrire :

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\tilde{E}} = \frac{\sigma_1}{\tilde{E}_1} + \frac{\sigma_2}{\tilde{E}_2} + \frac{\sigma_3}{\tilde{E}_3} = \frac{\varepsilon_V}{(1 - 2\tilde{\nu})}\tag{Eq.A4}$$

Notant que l'équation (Eq.A4) reste valable quelque soit l'état de contrainte.

IV.3.2.Cas bidirectionnel : Pour un état de contrainte en bidirectionnel ($\sigma_3 = 0$) l'équation (Eq.A.2) va s'écrire :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\tilde{E}}{(1 - 2\tilde{\nu})(1 + \tilde{\nu})} [(1 - \tilde{\nu})\varepsilon_1 + \tilde{\nu}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)] \\ \sigma_2 &= \frac{\tilde{E}}{(1 - 2\tilde{\nu})(1 + \tilde{\nu})} [(1 - \tilde{\nu})\varepsilon_2 + \tilde{\nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{\tilde{\nu}}{(\tilde{\nu} - 1)} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\end{aligned}\tag{Eq.A5}$$

IV.3.3. Cas unidirectionnel

Pour un état de contrainte en unidirectionnel ($\sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$), L'équation (Eq. A.5) devient :

Avec : $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -2\tilde{\nu}\varepsilon_1$

$$\sigma_1 = \frac{\tilde{E}}{(1 - 2\tilde{\nu})(1 + \tilde{\nu})} [(1 - \tilde{\nu})\varepsilon_1 + \tilde{\nu}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)] = \tilde{E} \varepsilon_1\tag{Eq. A6}$$

Avec: $\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\tilde{\nu}}{(1 - 2\tilde{\nu})} \varepsilon_V ; \quad \varepsilon_3 = -\frac{\tilde{\nu}}{(1 - 2\tilde{\nu})} \varepsilon_V$$

IV.4. Introduction de la variable de dommage D_{tot} en multiaxial

La variable de dommage, dépend uniquement de la seule variable observable ε

On pose :

$D_{tot}(\varepsilon_1) = D_1(\varepsilon_1)$: Cas d'un état de contraintes unidirectionnel

$D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$: Cas d'un état de contraintes bidirectionnel

$D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$: Cas d'un état de contraintes tridirectionnel

La variable de dommage (D_{tot}) est unique en un point local (M). (Voir figure. A.2)

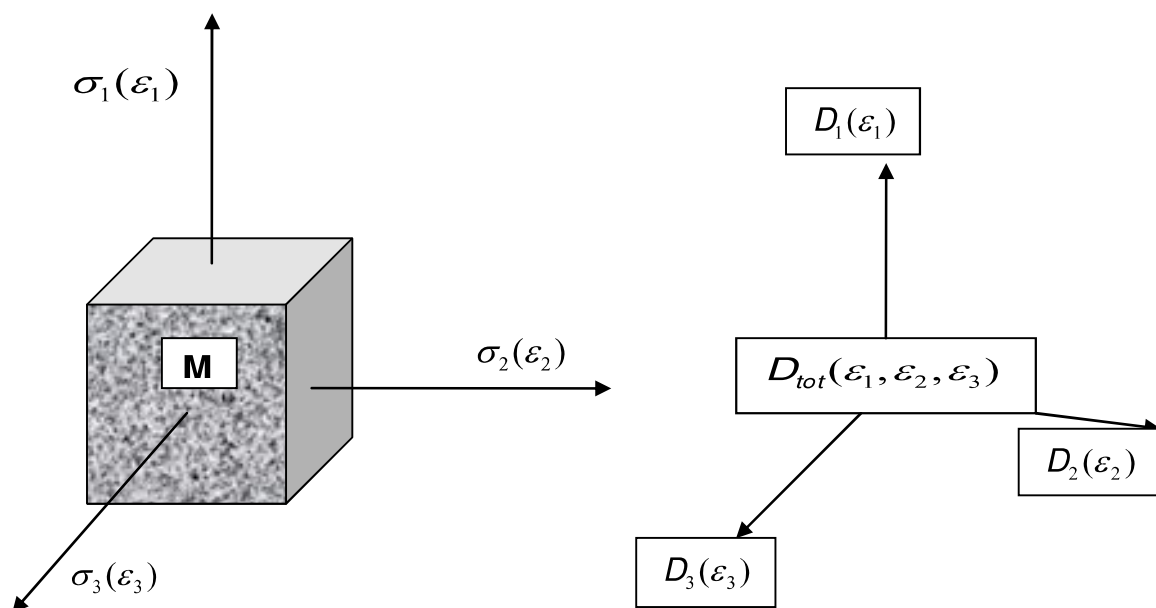


Figure. A.2. Description de la variable de dommage totale D_{tot}

IV.5. Bases du modèle : L'unicité du dommage en un point (M), nous impose de définir une variable de dommage unique en un point notée (D_{tot}); pour cela en démarrant d'un état particulier de contraintes pour le cas tri directionnel, on définit ainsi cette variable.

Soit l'état de contrainte définissant un état de cisaillement pur (Voir figure. A.3) tel que :

$$\sigma_1 = \sigma_0; \quad \sigma_2 = \sigma_0; \quad \sigma_3 = -\sigma_0; \quad \tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \quad \text{Eq.A7}$$

τ : Contrainte de cisaillement pur

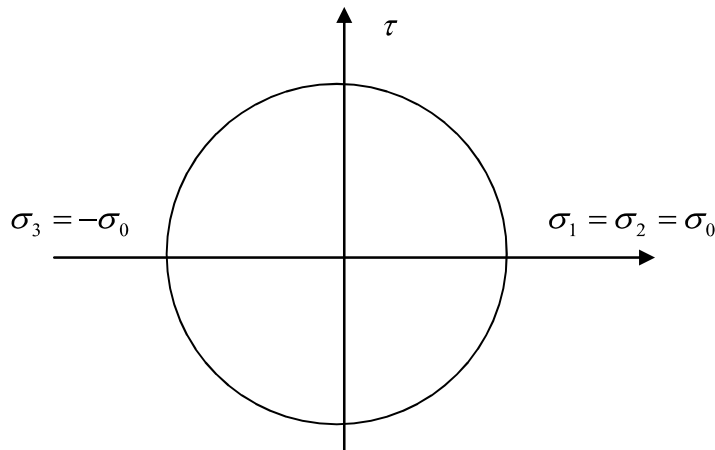


Figure. A.3. Etat de cisaillement pur

En remplaçant l'équation (Eq.A.7) dans ((Eq.A.4), on obtient :

$$\frac{\sigma_0}{\tilde{E}_1} + \frac{\sigma_0}{\tilde{E}_2} - \frac{\sigma_0}{\tilde{E}_3} = \frac{2\sigma_0 - \sigma_0}{\tilde{E}} \quad \text{Eq.A8}$$

D'où :

$$\frac{1}{\tilde{E}_1} + \frac{1}{\tilde{E}_2} - \frac{1}{\tilde{E}_3} = \frac{1}{\tilde{E}} \quad \text{Eq.A9}$$

On pose :

$$\tilde{E}_1 = E_{bo} \times (1 - D_1(\varepsilon_1))$$

$$\tilde{E}_2 = E_{bo} \times (1 - D_2(\varepsilon_2))$$

$$\tilde{E}_3 = E_{bo} \times (1 - D_3(\varepsilon_3))$$

$$\tilde{E} = E_{bo} \times (1 - D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3))$$

Eq.A10

D_1, D_2, D_3 : Variables de dommage suivant les trois directions principales de déformations.

On introduit les variables (Eq.A.10) dans (Eq.A.9) et après transformation, nous obtenons l'équation qui régit la variation du dommage en tridirectionnel qui s'écrit :

$$D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 1 - \frac{(1 - D_1(\varepsilon_1))(1 - D_2(\varepsilon_2))(1 - D_3(\varepsilon_3))}{(2 - D_1(\varepsilon_1) - D_2(\varepsilon_2))(1 - D_3(\varepsilon_3)) - (1 - D_1(\varepsilon_1))(1 - D_2(\varepsilon_2))} \quad \text{Eq.A11}$$

Avec : $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$

L'équation (Eq.A11), définit la variable de Dommage dans un état tridirectionnel.

Vérification : $0 \leq D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \leq 1$

Nous remarquons que si : $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ nous avons $D_{tot} = 0$ (a') (fin de la phase élastique)

Et si : $D_1 = 1$; ou : $D_2 = 1$; ou : $D_3 = 1$ nous avons $D_{tot} = 1$ (b') (limite ou fin du dommage locale donc rupture locale de l'élément)

Si : $D_1 \neq 0$; $D_2 = D_3 = 0$ d'où $D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = D_1(\varepsilon_1)$ (Etat de contrainte uni-axial)

Si : $D_1 \neq 0$; $D_2 \neq 0$; $D_3 = 0$ d'où $D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (Etat de contrainte bi-axial)

Notant que les équations (a') et (b') définissent les seuils du dommage, pour un état de contrainte tri-directionnel. La variable de dommage totale (D_{tot}) s'annule si seulement si toutes les variables de dommages principales s'annulent. (Autrement dit, pas de dommage suivant les directions des déformations principales). Cette variable est égale à l'unité, si au moins l'une des variables de dommages dans l'une des directions principales est égale à l'unité.

De plus : si $\varepsilon_i \geq 0$ on a $D_i(\varepsilon_i) = D_t(\varepsilon_i)$ ($i=1,3$)

si $\varepsilon_i \leq 0$ on a $D_i(\varepsilon_i) = D_c(\varepsilon_i)$ ($i=1,3$)

Avec : D_t, D_c : Variables de dommages en unidirectionnel respectivement en traction et en compression.

IV.6. Vérification de l'unicité de la variable de dommage D_{tot} en multidirectionnel.

IV.6.1. Cas unidirectionnel

Nous remarquons que si : $D_2 = D_3 = 0$ On a $D_{tot} = D_1$ (Vérifier)

Et si on revient à l'équation : $\frac{\sigma_1}{\tilde{E}_1} + \frac{\sigma_2}{\tilde{E}_2} + \frac{\sigma_3}{\tilde{E}_3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\tilde{E}}$

Il suffit de poser : $\sigma_1 \neq 0$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

On obtient $\tilde{E} = \tilde{E}_1$ ou $D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = D_1(\varepsilon_1)$

IV.6.2. Cas bidirectionnel

si : $D_3(\varepsilon_3) = 0$ on a :

$$D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1 - \frac{(1 - D_1(\varepsilon_1))(1 - D_2(\varepsilon_2))}{2 - D_1(\varepsilon_1) - D_2(\varepsilon_2) - (1 - D_1(\varepsilon_1))(1 - D_2(\varepsilon_2))}$$

Nous remarquons que : $0 \leq D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leq 1$

Tel que :

si : $D_1 = D_2 = 0$ on a $D_{tot} = 0$

si : $D_1 = 1$; ou : $D_2 = 1$ on a $D_{tot} = 1$

Tel que : $\tilde{\varepsilon} = E_0(1 - D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$

Notant que l'équation (Eq.A11) est introduite dans le logiciel de calcul, notant que les calculs se font à déplacement imposé.

IV.7. Fonction seuil du dommage pour un état bi axial et triaxial et critère de rupture. (Figure. A.6)

Il s'agit de limiter le domaine élastique et le domaine à la rupture, par une fonction qui sera défini comme suit :

$$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - K(D) \quad \text{Eq.A12}$$

$\tilde{\varepsilon}$: Déformation équivalente, qui représente une variable observable.

D : Variable d'endommagement, prise comme variable interne ou inconnue.

Cette dernière devra vérifier le critère suivant : $\dot{D} > 0$ (variable croissante).

Nous avons montré que : $0 \leq D_{tot} \leq 1$

et que :

$$\text{Si : } D_1 = D_2 = D_3 = 0 \quad \text{on a} \quad D_{tot} = 0 \quad \text{Eq.A13}$$

$$\text{Et si : } D_1 = 1; \text{ ou : } D_2 = 1; \text{ ou : } D_3 = 1 \quad \text{on a} \quad D_{tot} = 1$$

Plus explicitement :

Pour chaque état de déformation locale, on définit une fonction seuil $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, D_{tot})$ qui est une fonction de la variable observable ε et du dommage totale D_{tot} tel qu'on peut écrire :

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, D_{tot}) = f(\varepsilon_i, D_i) \quad \text{On pose} \quad \varepsilon_{ei} \leq f(\varepsilon_i, D_i) \leq \varepsilon_{ri} \quad \text{Eq.A14}$$

Avec : $i = 1, 2, 3$

$\varepsilon_{ei}, \varepsilon_{ri}$: Sont respectivement les deux limites élastique et de rupture dans un état de contrainte uniaxial.

V. Simulation numérique du modèle d'endommagement et algorithme de calcul.

V.1. Application de la méthode des éléments finis. [149-150-151-152-153-154-155-156-157-158]

Les débuts des méthodes de calcul par éléments finis remontent aux années 1950, avec l'apparition de l'ordinateur, outil indispensable pour effectuer la résolution des équations. C'est en 1956 que Turner et AL [in 155], introduisent le concept d'éléments finis, Dès lors, cette technique de calcul ne cessera de se perfectionner, aidée par l'évolution fulgurante de l'informatique.

Cette approche fait appel à des calculs de microstructures, dans lesquelles un élément de volume représentatif est discrétisé afin que sa réponse soit évaluée au moyen d'un calcul par élément finis.

V.2. Modélisation par éléments finis

Les conditions d'équilibre local d'un milieu continu s'écrit :

$$\partial\sigma_{ij,j} + f_{vi} = 0 \text{ sur } (\Omega) \quad (i,j=1,3) \quad \text{Eq.A15}$$

$$\sigma_{ij} \times n_j = f_{si} \text{ sur } (\Gamma) \quad \text{Eq.A16}$$

Ω : Domaine étudié.

Γ : Frontière du domaine.

f_{vi} : Force volumique.

f_{si} : Force surfacique.

n_j : Normale unitaire à la frontière.

Le théorème des travaux virtuels, définissant la conservation de l'énergie interne (traduit une condition d'équilibre énergétique) s'écrit sous la forme :

$$\int_{\Omega} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Gamma} \{\delta U\} \{f_s\} d\Gamma - \int_{\Omega} \{\delta U\}^T \{f_v\} dV = 0 \quad \text{Eq.A17}$$

Avec : $\{\sigma\} = [\tilde{\Lambda}]\{\varepsilon\}$: Représente la condition d'équilibre globale du domaine (Ω).

Pour le matériau béton :

$$[\tilde{\Lambda}]_B = (1 - D_{tot})[\Lambda]_B \quad \text{Eq.A18}$$

$[\Lambda]_B$: Matrice d'élasticité du béton sans endommagement ou intact.

$[\tilde{\Lambda}]_B$: Matrice d'élasticité du béton endommagé.

$\{U\}$: Vecteur de déplacement

Pour le cas du béton armé :

La matrice de rigidité élémentaire est définie par l'assemblage des deux matrices d'élasticité de l'acier et du béton.

$$\{\sigma\} = [\tilde{\Lambda}]_B \{\varepsilon\} + [\Lambda]_A \{\varepsilon\} = ([\tilde{\Lambda}]_B + [\Lambda]_A) \{\varepsilon\} \quad \text{Eq.A19}$$

$[\Lambda]_A$: Matrice d'élasticité de l'acier définie par :

$$[\Lambda]_A = \begin{bmatrix} \ell_L E_A & 0 & 0 \\ 0 & \ell_T E_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.A20}$$

(ℓ_L, ℓ_T) : Pourcentage mécanique d'aciers associé aux deux directions longitudinale et transversale.

E_A : Module de Young de l'acier

V.3. Modélisation du comportement non linéaire des structures en béton et en béton armé -Choix de la méthode de Newton Raphson modifiée (methode mixte) [160-161-162-163-164-165]

La méthode des éléments finis s'est imposée comme un outil numérique très utile pour l'analyse d'une grande variété de problèmes. Durant ces dernières décennies, le développement prodigieux des ordinateurs, a rendu possible l'analyse de comportement même fortement non linéaire. Ces sources de non linéarités peuvent être d'origine géométriques (grands déplacements) et/ou matérielles (plasticité, fissuration,.....etc.) et leur modélisation par éléments finis aboutit à un système d'équations non linéaires.

Avec l'événement des méthodes de calculs non linéaires, il est devenu possible de modéliser fidèlement le comportement d'une structure en béton ou en béton armé. La réponse quasi-statique est obtenue quand les charges ou les déplacements extérieurement imposés sont appliqués avec un taux de chargement suffisamment lent tels qu'ils n'induisent pas d'effets dynamiques. L'équation non-linéaire d'équilibre relative à la réponse quasi-statique peut être exprimée par :

$$\{F_{int}(U)\} = \{F_{ext}\} \quad \text{Eq.A21}$$

$\{F_{int}(U)\}$: Vecteur force de Résistance interne.

Notant que l'équation (Eq.A21) est non linéaire du fait de la relation non linéaire entre le vecteur force interne $\{F_{int}(U)\}$ et le vecteur déplacement nodal $\{U\}$.

$\{F_{ext}\}$: Vecteur chargement extérieur.

Dans le cas d'un système élastique linéaire, le problème statique se réduit à l'équation linéaire suivante :

$$[K]\{U\} = \{F_{ext}\}$$

$[K]$: Matrice de rigidité

$\{U\}$: Vecteur des déplacements nodaux.

Une stratégie d'analyse incrémentale itérative est nécessaire pour résoudre l'équation algébrique non linéaire du problème. L'équation non linéaire peut être linéarisée par la méthode conventionnelle de Newton- Raphson, qui constitue la base de diverses stratégies itératives, et qui peut être résolue par itération sur un pas de charge jusqu'à ce que la convergence soit atteinte.

L'équation incrémentale de l'équilibre est exprimée par:

$$\{ \Delta F_{int} \{ \Delta U \} \} = \{ \Delta F_{ext} \} \quad \text{Eq.A22}$$

L'équation est linéarisée pour un pas de charges arbitraire i ; exprimant ainsi l'équation de la première itération du pas de charge comme suit :

$$[K]_i^1 \{ \Delta U \} = \{ F_{ext} \}_i \quad \text{Eq.A23}$$

$[K]_i^1$: la matrice tangente du système au début du pas de charge.

Bien que la méthode de Newton-Raphson soit généralement rapide et efficace permettant ainsi la linéarisation de l'équation d'équilibre pour obtenir une solution itérative, cette méthode faisant intervenir un chargement fixe (constant), ne permet pas d'obtenir une solution aux points limites tels que les « pics », les points de retournement ou de bifurcation (« snap-through ou snap-back ») ; pour cela, et afin de fournir une base solide d'une stratégie itérative plus performante, dans notre modélisation on opte pour la méthode de Newton-Raphson modifiée (méthode mixte) [163], se basant sur le calcul de la rigidité sécante et variable pour chaque pas de chargement .

Le chargement est appliqué par incréments est la solution dans chaque étape est obtenue itérativement jusqu'à satisfaction de l'équilibre à une précision donnée. La méthode mixte combine les avantages des deux méthodes incrémentale et itérative et elle est la plus utilisée (Voir figure. A7).

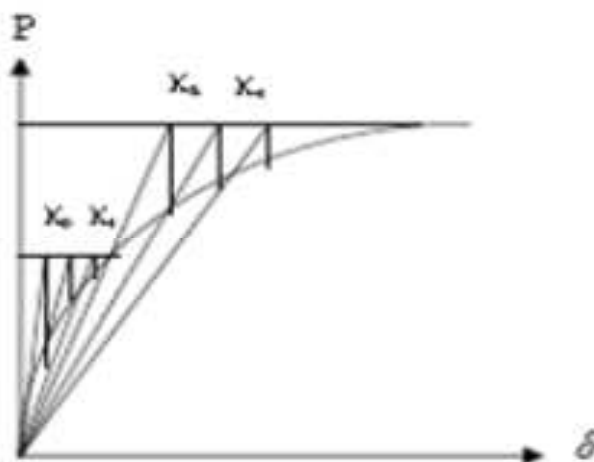


Figure. A7. Procédure de rigidité variable (Approche du module sécant)

V.4. Algorithme de calcul

un logiciel de calcul élément finis est introduit basé sur le code de calcul (D. R. J. Owen et al, 1980)[162], avec des modifications portées aux sousroutines, FLOWD, FLOWPL ,MODPS ,RESIDU ,OUTPUT. Pour chaque pas de chargement qui correspond à un pas de déplacement, l'adoption de l'algorithme de Newton - Raphson [162], qui consiste à calculer, la rigidité sécante (car l'endommagement affecte la valeur du module sécant), à chaque incrément de chargement (j) et pour chaque itération(i).

1. La charge est appliquée par incrément ; on définira :

λ : Facteur de charge, ou pas du chargement.

$$\text{Soit : } \{F\}_j = \lambda_j \times \{F_0\} = [K(U_j)]\{U_j\} \quad \text{Eq.A24}$$

Avec :

$\{F_0\}$: Charge initiale appliqué.

2. Application de la méthode des résidus pondérés [162] qui consiste à considérer : un résidu non nulle à chaque itération, tel que :

$\{U_j^i\}$: le déplacement globale est calculé à l'itération (i) et au pas (λ_j).

Pour un niveau donné de sollicitation on applique le processus itératif :

$$\{R_j^{i-1}\} = \{F\} - [K(U_j^{i-1})]\{U_j^{i-1}\} \quad \text{Eq.A25}$$

$$\{F\} = \lambda_j \{F_0\},$$

$$\{U_j^i\} = \{U_j^{i-1}\} + \{\Delta U_j^i\} \quad \text{Eq.A26}$$

3. Vérification de la convergence du processus itératif, à chaque itération (i) , et pour un pas de chargement (j).

Au cours du processus itératif de: $\{R(U)\} = [K(D_{tot})]\{U\} - \{F\}$.

On fait le test suivant à chaque itération (i).

$$\sqrt{\frac{\{R_i\}^T \{R_i\}}{\{F_i\}^T \{F_i\}}} \times 100 \leq \eta \quad \text{Eq.A27}$$

η : est une tolérance choisie par l'opérateur

VI. Conclusion

La Variable de dommage obtenue est unique en un point (M), valable quelque soit l'état de contrainte (uni-bi et tri directionnel) ; dépend de la seule variable Observable (ε) et dépend uniquement des différents dommages créés dans les trois directions principales de déformations.

S'est aussi une variable qui représente le dommage totale et ceci quelque soit l'état de contraintes appliquée en tri directionnel (cas hydrostatique, cas confinée, cas générales), ou bidirectionnel ou unidirectionnel).

Cette variable notée D_{tot} qui est un dommage de type déviatorique (défini à partir d'un état de cisaillement pur), unique en un point locale, influe directement sur la partie adoucissante de la courbe ($\sigma - \varepsilon$) de la loi de comportement du béton en traction ou en compression unidirectionnel, donné par la formule : $\tilde{E}(\varepsilon) = E_0 \times (1 - D_{tot}(\varepsilon))$

Dans le cas multiaxial, les différents dommages existants (D_1, D_2, D_3) en fonctions des déformations locales principales ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$), donne naissance à un seul dommage de type déviatorique, qui influe à lui seul sur le module de Young sécant \tilde{E} .

- Pour un élément en béton seul, la déformation en unidirectionnel, sera conditionner par la limite à la rupture (respectivement en traction et en compression), ε_{rt} , ε_{rc} .

Avec : $\varepsilon_{rc} = 3.5\%$ (valeur fixée par le BAEL 91[42])

$\varepsilon_{rt} = a \varepsilon_{ft}$ a : Valeur qui sera imposé par l'utilisateur, qui dépend de la nature du béton utiliser.

- Pour le cas de la présence de l'acier, avec la participation du béton en traction (notion de tension stiffening) : Le béton en traction pourra travailler jusqu'à la limite ultime de l'acier. $\varepsilon_{rt} = \varepsilon_{stu} = \varepsilon_{scu} = \varepsilon_{ra} = 10\%$. (Valeur fixée par le B.A.E.L 91[42])
- Comme critère de rupture locale: Le seuil du dommage locale et comme conséquence suffisante pour une rupture de l'élément de structure en béton et ceci, quelque soit

l'état de contraintes (uni ou bi ou tridirectionnel) et doit satisfaire à l'une des conditions :

$$D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) < 1 \text{ (Béton seul)}$$

Ou

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_{rA} \quad i = 1, 2, 3 \text{ (Béton armé-Condition suffisante, même si le béton est fissuré localement).}$$

- Plusieurs modèles ont fait leurs apparitions de nos jours [166-167-168-169-170-171-172-173-174-175-176-177-178-179-180.....], mais l'utilité d'introduire un modèle simple et qui prédit convenablement le comportement réel- non linéaire- des structures en béton et en béton armé sous chargement monotone, reste un sujet ouvert et d'actualité. Notre modèle vient ainsi s'ajouter à la liste et nous restons optimistes sur son utilisation future.



Chapitre.3

Introduction à la variation du coefficient de Poisson



Chapitre.3. Introduction à la variation du coefficient de Poisson

I. Un aperçut sur l'origine, et la définition du Coefficient de Poisson [181-182-183]

Le coefficient principal de Poisson permet de caractériser la contraction de la matière perpendiculaire à la direction de l'effet appliqué. Ce coefficient a été mis en évidence analytiquement par Denis Poisson, mathématicien Français (1781-1840), auteur de travaux sur la physique mathématique et la mécanique, qui en détermina la valeur à partir de la théorie moléculaire de la constitution de la matière.

Désigné par la lettre Grecque (ν), le coefficient de Poisson fait partie des constantes élastiques. Il est théoriquement égal à 0.25 pour un matériau parfaitement isotrope et est en pratique très proche de cette valeur.

Dans le cas d'un matériau isotrope, le coefficient de poisson permet de relier directement le module de cisaillement (G) au module de Young (E).

Le coefficient de poisson est toujours inférieur ou égal à (1/2), s'il est égal à 0.5, le matériau est parfaitement incompressible.

Notant seulement, que les matériaux structurellement complexe peuvent avoir des coefficients de Poisson supérieur à 0.5, s'est le cas des granulaires, des poreux, des textiles,.....

II. Compression isostatique - Module de compressibilité [184-185-186]

Une compression isostatique (Figure. B.1) est l'exercice d'une pression isotrope, c'est à dire qui a la même valeur dans toutes les directions. Si l'on désigne par (V) le volume de l'objet, la variation de volume relative est proportionnelle à la variation de la pression (P) :

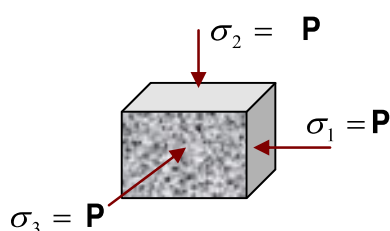


Figure .B.1. Elément de volume sous compression isostatique

$$\Delta P = -K_0 \frac{\Delta V}{V_0} \quad \text{Eq.B1}$$

Dans ce cas, il s'agit d'un changement de volume à forme constante.

Ou K_0 : est le module de compressibilité ou module d'élasticité.

Dans le cas d'un milieu isotrope, le module de compressibilité, K_0 le module d'Young

E_{b0} et le module de cisaillement G_0 , sont liés par la relation suivante :

$$\frac{1}{E_{b0}} = \frac{1}{9K_0} + \frac{1}{3G_0} \quad \text{Eq.B2}$$

La déformation se décompose en un changement de volume à forme constante et un changement de forme à volume constant : ces deux opérations seront caractérisées respectivement par les modules K_0 et μ_0 (coefficient de Lamé), dans le domaine linéaire :

$$\text{Avec : } K_0 = \frac{E_{b0}}{3(1-2\nu_0)} \quad \text{Eq.B3}$$

$$\mu_0 = \frac{E_{b0}}{2(1+\nu_0)} = G_0 \quad \text{Eq.B4}$$

Le changement de volume à forme constante est une déformation isotrope, le module K_0 établit la relation :

$$\sigma_m = K_0 \frac{dV}{V} \quad \text{Eq.B5}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{Tr(\bar{\sigma})}{3} \quad \text{Eq.B6}$$

$$\frac{dV}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_m = Tr(\bar{\varepsilon}) \quad \text{Eq.B7}$$

$Tr(\bar{\sigma})$, $Tr(\bar{\varepsilon})$: Sont respectivement la trace du tenseur des contraintes ($\bar{\sigma}$) et de déformation ($\bar{\varepsilon}$)

$$\sigma_m = 3K_0\varepsilon_m \quad \text{Eq.B8}$$

L'équation (Eq.B8), représente la loi d'évolution volumique à forme constante, d'un élément de volume sous un état de contrainte hydrostatique, dans le domaine linéaire.

III. Introduction à la variation du coefficient de Poisson

III.1. Comportement en compression uniaxiale du béton [3-15-32-33-37-38-39-40]

Dans toute les recherches entreprises pour l'étude expérimentale et numérique de la variation du coefficient de Poisson, l'essai de compression uniaxiale été primordial pour ce fait.

En raison de sa facilité de réalisation, sur des éprouvettes de béton, il reste aussi l'expérience la plus répandue pour estimer les caractéristiques générales de résistance du béton. Plusieurs études dans la littérature comme celles de Hsu (1963) [32] et

Benouniche(1978)[33] ont mis en évidence différentes phases de comportement du béton en compression uniaxiale en fonction du niveau de la contrainte appliquée (Figure .B.2).

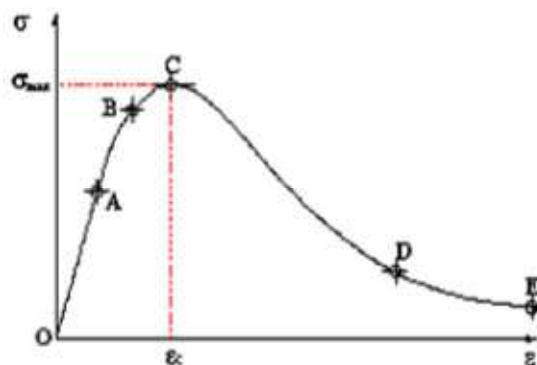


Figure. B.2. Phases du comportement en compression du béton

Sur la Figure .B.2, l'on représente généralement les phases de comportement:

- Comportement linéaire ou quasi-linéaire (OA), jusqu'à ce que $\sigma = (0.4-0.5) \sigma_{max}$. Cette phase est caractérisée par les valeurs du module d'élasticité E et du coefficient de Poisson du béton ν . La déformation résiduelle du béton est nulle durant cette phase de chargement.
- Apparition de microfissures (AB). On considère que cette phase correspond à $\sigma = (0.5-0.8) \sigma_{max}$. Le coefficient de Poisson reste constant, tandis que le module d'élasticité diminue légèrement. La déformation résiduelle longitudinale augmente, tandis que la déformation latérale reste nulle. L'endommagement débute par des dégradations diffuses du béton.
- Développement rapide des microfissures (BC), pour $\sigma = (0.8-1.0) \sigma_{max}$.
Le coefficient de Poisson et les déformations résiduelles augmentent rapidement, alors que l'on constate une forte diminution du module d'élasticité.
- Apparition et propagation de macro fissures due à la localisation de la déformation (CD). La déformation augmente fortement, tandis que le module d'élasticité diminue jusqu'à s'annuler.
- Augmentation très rapide de la déformation tandis que la contrainte diminue lentement (DE). La vitesse de propagation des fissures diminue suite à la friction entre les granulats. Cette friction transmet une résistance aux lèvres des fissures et empêche par conséquent la diminution de la contrainte.

III.2.Essais expérimentaux

L'étude bibliographique qui a été menée, montre bien l'existence d'une variation du Coefficient de Poisson dont l'étude expérimentale la plus ancienne a été réalisée par Sami A. Klink en 1975[16], tel que trois éléments en béton de forme prismatique de hauteur 40 cm et une section de 20x20 cm², ont été testés sur différents points de mesure avec des jauges

(Voir figure .B.3), prouve que la valeur du coefficient de Poisson dépend du point localisé (Voir Figure .B.4).

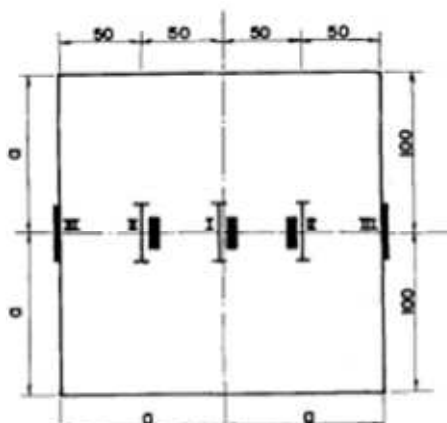


Figure. B.3. Position des différentes rosettes.

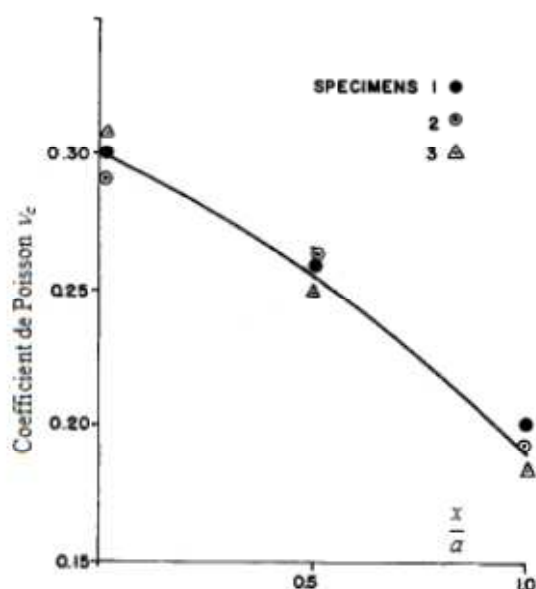


Figure. B.4. Variation du coefficient de Poisson dans le béton

- Une autre étude à été faite par Atheel E. Allos., L.H.Martin. (1981) [14] montrant les différents facteurs influençant sur la valeur initiale donnée pour le coefficient de Poisson dans on peut citer, l'âge du béton (Voir figure.B.5),la contrainte d'écrasement du béton f'_c (Figure .B.6),.....

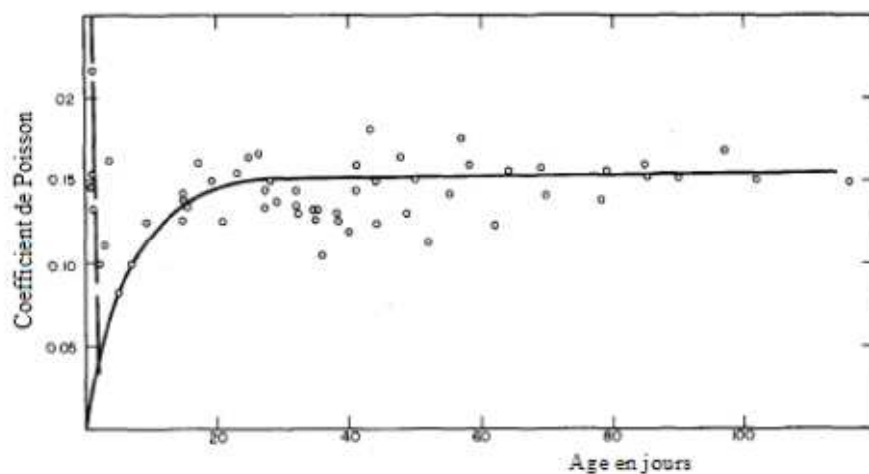


Figure.B.5. Effet de l'âge du béton sur la valeur du coefficient de Poisson

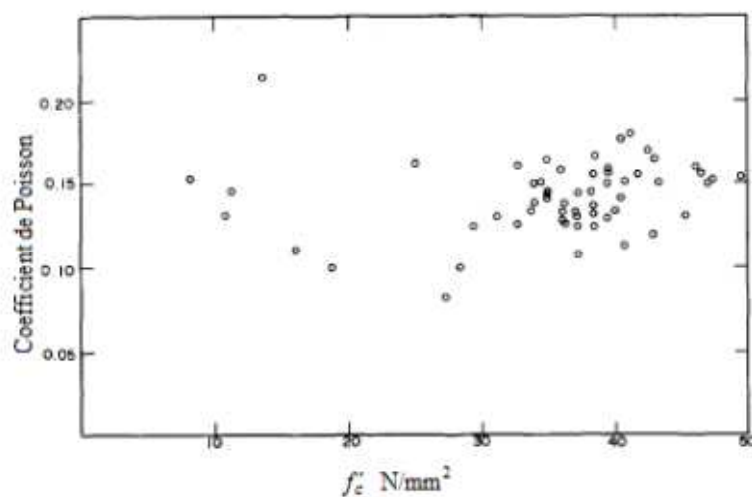


Figure.B.6. Effet de la contrainte d'écrasement sur la valeur du coefficient de Poisson

- De même, d'après Chen [15], En compression uniaxiale, le coefficient de Poisson ν varie entre 0,15 et 0,22. Il reste constant jusqu'à des contraintes avoisinant 80 % de la contrainte maximale f'_c , à partir de laquelle le coefficient de Poisson "apparent" commence à augmenter (voir figure B.7).

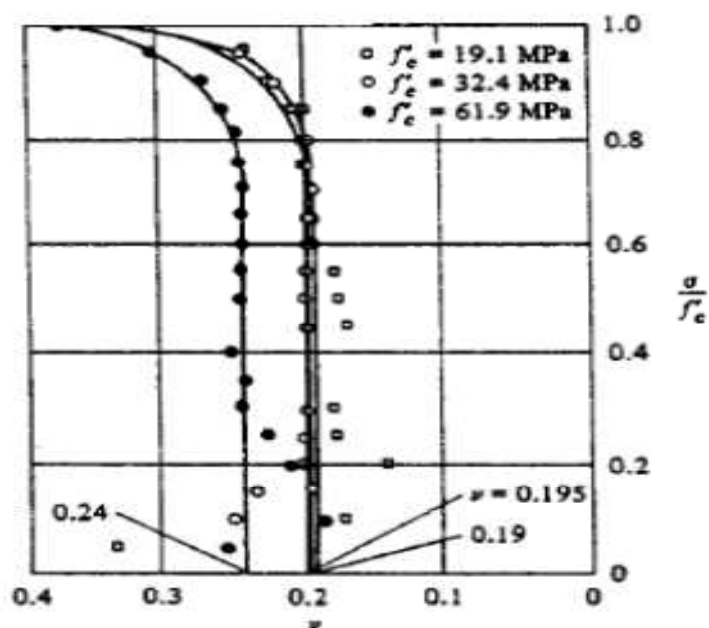


Figure .B.7. Variation du coefficient de Poisson avec le niveau de contrainte, d'après Chen [15]

- Expérimentalement vérifié, d'après S. Ramtani ,Y. Berthaud et J. Mazars [16] ,le module de Young E et le coefficient de Poisson ν ont été mesuré, dans un essai de compression uniaxiale et les résultats ont été reporté dans la figure B.8 et B.9 et ceci vient confirmé l'utilité de la prise en compte de l'évolution du coefficient de Poisson dans nos étude ainsi du comportement réel du béton.

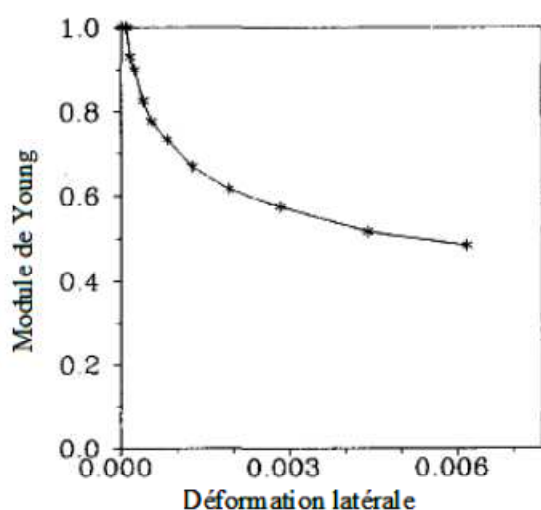


Figure.B.8. Evolution du Module de Young en fonction de la déformation latérale maximale

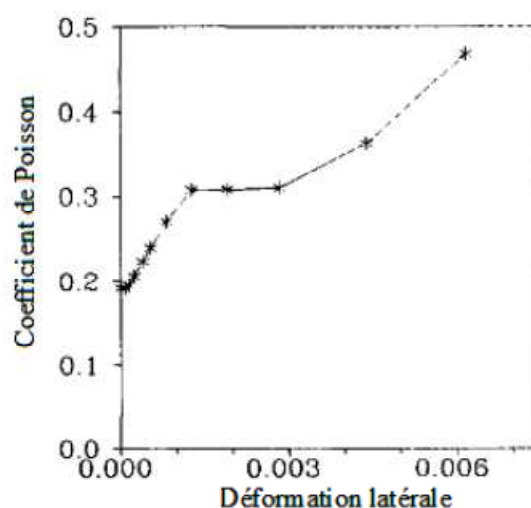


Figure.B.9. Evolution du coefficient de Poisson en fonction de la déformation latérale maximale

III.3. Différentes propositions des équations représentatives de la variation du coefficient de Poisson

III.3.1. Elwi, A. A. and Murray, D. W. (1979).[187], Murray D.W.(1979) [12] , Amir Mirmiran et Mohsen shahawy [18], ont pu représenter les valeurs du coefficient de Poisson, qui sont obtenues à partir des résultats d'essais de compression uniaxiale dus à Kupfer(1969) [59], par la fonction cubique suivante :

$$\nu = \nu_0 \left[1 + 1,3763 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right) - 5,3600 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right)^2 + 8,586 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right)^3 \right] \quad \text{Eq.B9}$$

$$\nu = \nu_0 f \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right)$$

ε : Déformation dans la direction uni axiale,

$\varepsilon_u = \varepsilon_{ic}$: Pour un essai uni axial (déformation limite),

ν_0 : Valeur initiale du coefficient de Poisson.

Pour l'extension au cas tridimensionnel le coefficient de Poisson correspondant à chaque direction est donné par la relation précédente dans laquelle il faut remplacer les grandeurs ε et ε_u par ε_{iu} et ε_{ic} . (voir figure .B.10)

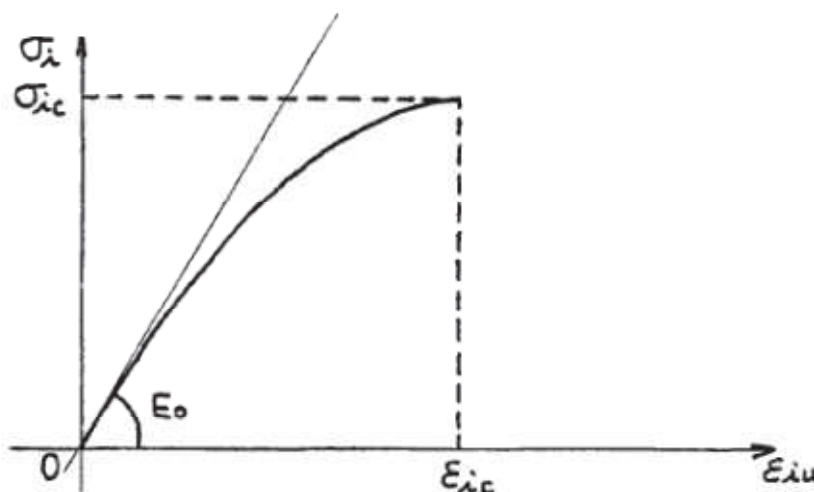


Figure. B.10. Formulation analytique de la relation entre contrainte et déformation uniaxiale équivalente

III.3.2. D'après Niels Saabye ottosen, (1980)[13], le comportement en compression uniaxial et triaxial, est influencé par la variation du coefficient de Poisson sécant qui suit l'équation suivante.

$$\begin{aligned}
 \nu_s &= \nu_i & \text{si } \beta &\leq \beta_a \\
 \nu_s &= \nu_f - (\nu_f - \nu_i) \sqrt{1 - \left(\frac{\beta - \beta_a}{1 - \beta_a}\right)^2} & \text{si } \beta &\geq \beta_a
 \end{aligned}
 \tag{Eq.B10}$$

ν_i : Coefficient de Poisson initial.

ν_f : Coefficient de Poisson à la rupture.

ν_s : Coefficient de Poisson sécant. (Voir figure.B.11)

Notant que $\nu_s < 0.5$ et que si $\beta_a = 0.8$ la valeur de $\nu_f = 0.36$

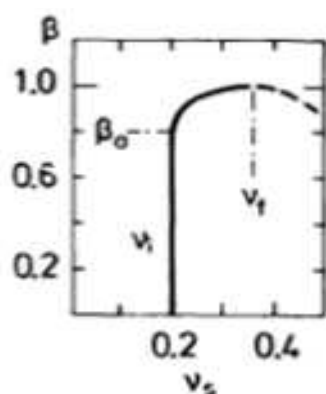


Figure. B.11. Variation du coefficient de Poisson sécant

III.3.3. Une autre étude à été faite par R.G. Selby et F.J. Vecchio [17] ainsi, le coefficient de Poisson dans le cas d'un béton confiné (Cas des éléments en béton armé), suit la loi :

$$\nu_{ij} = \begin{cases} \nu_0 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon_{ij} < \frac{K_\sigma \varepsilon_0}{2} & (i, j: 1,3) \\ \nu_0 [1 + 1.5 \left(\frac{2\varepsilon_j}{K_\sigma \varepsilon_0} - 1\right)^2] \leq 0.5 \Leftrightarrow \frac{K_\sigma \varepsilon_0}{2} > \varepsilon_j \end{cases}
 \tag{Eq.B11}$$

$$K_\sigma = -\frac{f_{c3}}{f'_c}$$

f'_c : Résistance caractéristique du béton.

f_{c3} : Contrainte limite du béton après confinement.

$$\varepsilon_0 = \frac{n}{n-1} \frac{f'_c}{E_c}, \quad n = 0.8 + \frac{f_p}{17}, \quad f_p = K_\sigma f'_c$$

III.3.4. Dans un état de contraintes tridimensionnel, Bouzaiene (1995) [188-189] a proposé d'exprimer les coefficients de Poisson effectifs ν_{ij} en fonction du paramètre d'endommagement λ et du gradient des contraintes principales.

$$\nu_{ij} = \nu_0 + \lambda(1 - \nu_0) \left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{\sigma_c} \right) \quad \text{si : } \sigma_i < 0 \text{ et } \sigma_i \leq \sigma_j \quad \text{Eq.B12}$$

Soit en chargement: $\nu_{ji} = \nu_0$

Si l'axe principal σ_i est en déchargement ou si les trois axes sont en traction. À ce moment, on utilise ν_0 qui est le module de Poisson initial, σ_i et σ_j étant les valeurs des contraintes principales.

III.3.5. L'essai en compression simple du béton (Voir figure.B.12), réalisée par Kupfer et AL(1973)[58-190] pour décrire l'expansion volumique ou le phénomène de Poisson est donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_0 [1 + (4 - 5\varepsilon / \varepsilon_c)^2], \quad \varepsilon_c \leq \varepsilon < 0.8\varepsilon_c, \\ \nu &= \nu_0 (3\varepsilon / \varepsilon_c + 2\varepsilon_f / \varepsilon_c - 5) / (\varepsilon_f / \varepsilon_c - 1), \quad \varepsilon_f \leq \varepsilon < \varepsilon_c. \end{aligned} \quad \text{Eq.B13}$$

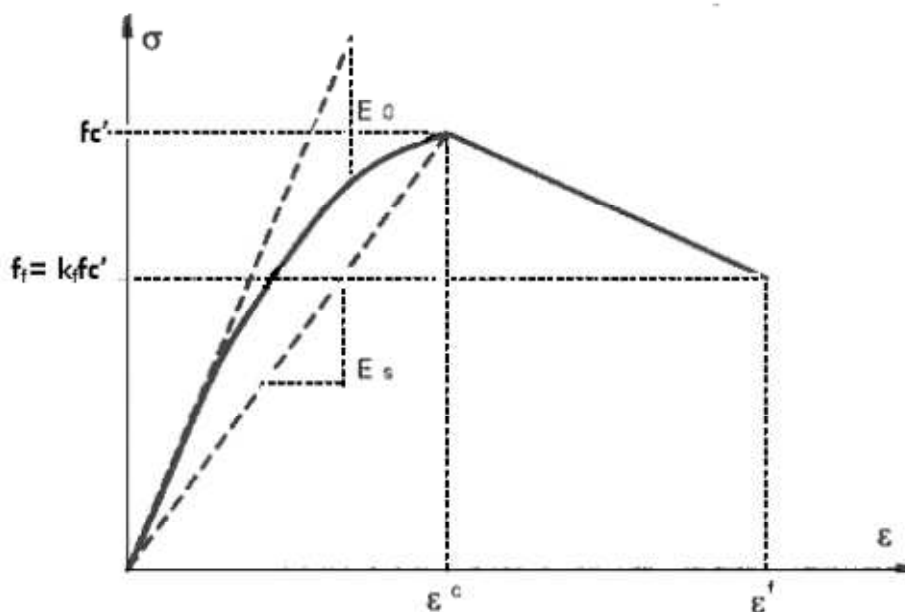


Figure.B.12. Comportement du béton en compression uniaxial (Kupfer et Al) [58-190]

III.3.6. Un modèle orthotropique élastique pour le béton (Voir figure.B.13) a été introduit par R.G. Selby et F.J.Vecchio (1997)[17], le but été de raffiner des programmes d'éléments finis basés sur la théorie du domaine de compression modifié (The modified compression field theory)[30-13-14], afin de considérer des problèmes dans lesquels le confinement et l'expansion latérale sont importants ou l'expansion volumique a été exprimer par une variation du coefficient de Poisson (Voir équation B. 9).

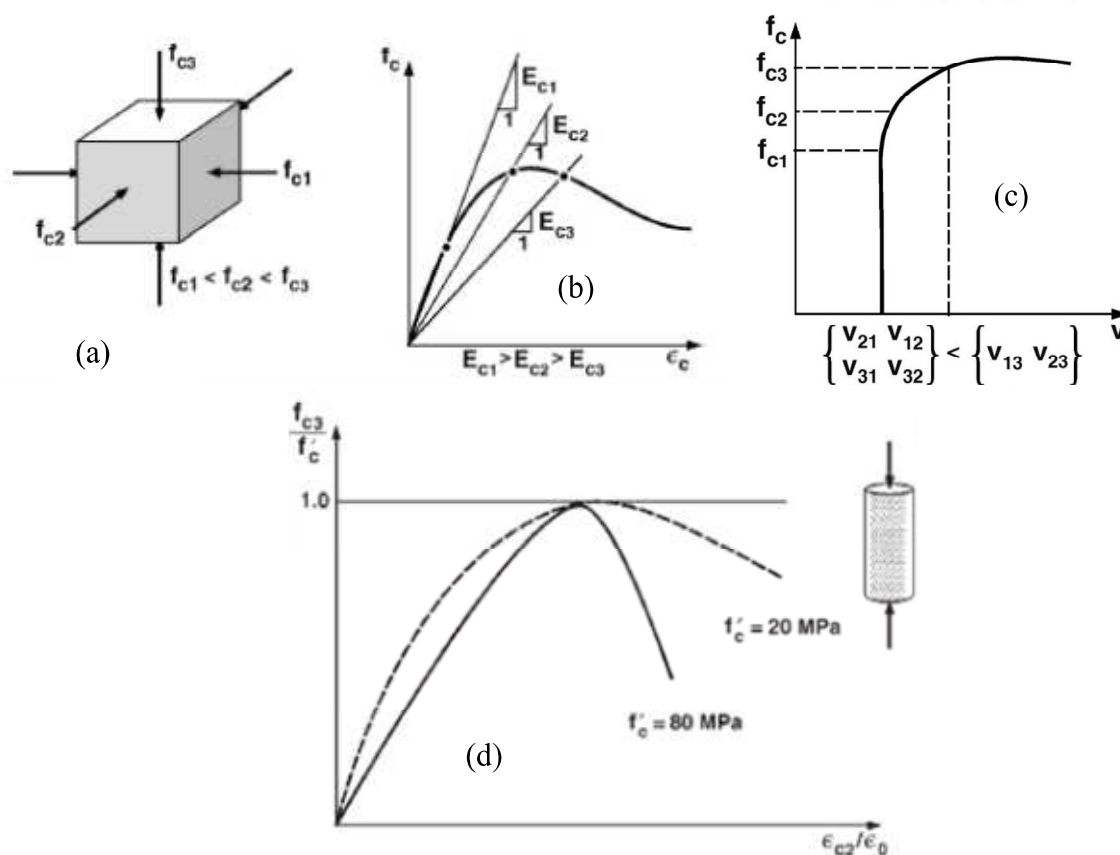


Figure. B.13. Modèle orthotropique du béton (a),(b),(c),(d).
 (Selby et F.J.Vecchio) (1997) [17]

Avec : f_{c3f} : Contrainte limite de rupture.

ν_{ij} : Coefficients de Poisson dans les trois directions.

$$K_{\sigma} = -\frac{f_{c3f}}{f'_c}$$

ϵ_j : Déformation suivant la direction j

$$\nu_{ij} = \begin{cases} \nu_o, & 0 > \epsilon_j > \frac{K_{\sigma}\epsilon_o}{2} \\ \nu_o \left[1 + 1.5 \left(\frac{2\epsilon_j}{K_{\sigma}\epsilon_o} - 1 \right)^2 \right] \leq 0.5, & \frac{K_{\sigma}\epsilon_o}{2} > \epsilon_j \end{cases} \quad \text{Eq. B.14}$$

On peut citer plusieurs autres articles ou l'utilité de varier la deuxième caractéristique mécanique du béton « Coefficient de Poisson » dans le domaine non linéaire du comportement mécanique du béton et du béton armé sous chargement monotone et ceci

quelque soit l'état de contraintes locales (uni, bi ou même tridirectionnel) est d'une grande importance, (Voir : [191],[22],[23],[24],[192]-[193],[21], ...).

Nous concluons que sa valeur influe directement sur les résultats locaux et globaux de l'élément en béton et en béton armé sous chargement monotone et dépend aussi de l'état de contrainte appliqué (uni bi et tri directionnel).

III.4. Proposition d'une équation de variation du coefficient de Poisson

III.4.1. Variation du coefficient de compressibilité et introduction d'une loi d'évolution du coefficient de Poisson en multiaxial

Le but donc de notre modélisation est l'étude du comportement réel (non linéaire) des structures en béton, ceci nous impose de rechercher une équation décrivant cette variation et son domaine d'évolution.

En étudiant le comportement hydrostatique du béton (Voir graphe.2), décrit par la loi $(\sigma - \varepsilon)$. Sous sollicitation hydrostatique, le béton présente un comportement non linéaire [37-194-195-196-197]. On peut distinguer trois phases : une phase élastique linéaire, une phase non linéaire avec perte de raideur du matériau correspondant à un effondrement progressif de la structure, la troisième phase correspondant à une consolidation et à l'augmentation des contacts au sein du matériau (Ramtami, 1990)[37].

III.4.2. Application de la loi de Hooke généralisée pour un état hydrostatique dans le domaine non linéaire

En considérant le coefficient de compressibilité \tilde{K} variable dans le domaine non linéaire (voir figure B.14).

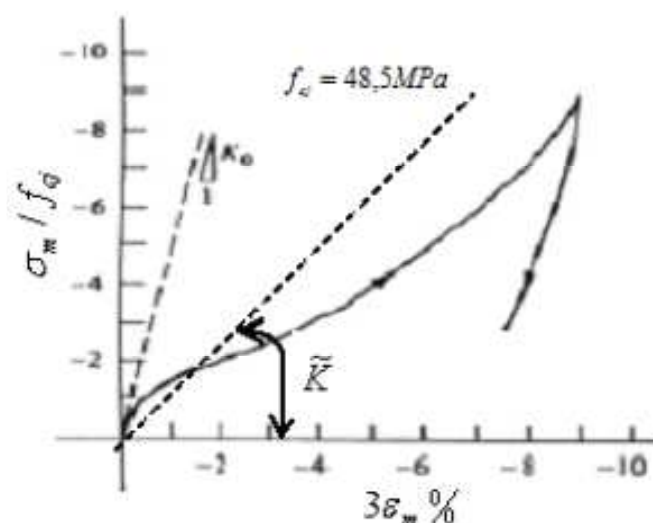


Figure. B.14. Essai de compression hydrostatique du béton [15]

Soit le système d'équation définissant la loi de Hooke généralisée pour un état hydrostatique tel que :

$$\sigma_m = 3\tilde{K}\varepsilon_m \quad \text{Eq.B15}$$

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \quad \text{et :} \quad \varepsilon_m = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$$

σ_i (i=1,3): Contraintes principales, $\varepsilon_{1,2,3}$ (i=1,3): Déformations principales

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{E}}{3(1-2\tilde{\nu})} \quad \text{Eq.B16}$$

On définit une variable de dommage du type volumique: D_v , affectant ainsi la troisième caractéristique mécanique définit qui est le module de compressibilité.

$$\tilde{K} = K_0(1 - D_v) \quad (\text{cas uniaxial}) \quad \text{Eq.B17}$$

$$\tilde{K} = K_0/(1 - D_v) \quad (\text{cas biaxial}) \quad \text{Eq.B18}$$

$$\tilde{E} = E_{b0}(1 - D_{tot})$$

Avec: $K_0 = \frac{E_{b0}}{3(1-2\nu_0)}$, on aura deux équations de l'évolution du coefficient de Poisson

dépendant de l'état de contrainte appliqués :

$$\tilde{\nu} = 0.5 - 0.5 \times \frac{(1-2\nu_0)(1 - D_{tot})}{(1 - D_v)} \quad (\text{Cas uniaxial}) \quad \text{Eq.B19}$$

$$\tilde{\nu} = 0.5 - 0.5 \times (1 - 2\nu_0)(1 - D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \times (1 - D_v(\varepsilon_m)) \quad (\text{cas biaxial}) \quad \text{Eq.B20}$$

Nous constatons que : $\tilde{\nu} = \nu_0$ si $D_v = D_{tot} = 0$

Et que si: $D_v = 1$ ou $D_{tot} = 1$ on a $\tilde{\nu} = 0.5$ (pour le cas biaxial)

Et que si: $D_v < 1$ et $D_{tot} = 1$ on a $\tilde{\nu} = 0.5$ (pour le cas uniaxial)

Le dommage volumique est directement lié à une évolution du coefficient de Poisson, provoquant une dégradation du module de compressibilité. Si l'isotropie du dommage, impose l'existence d'une variable de dommage unique, dépendante uniquement de la déformation, l'équation définissant la variable du dommage d'une manière générale s'écrivait initialement sous la forme (voir équation.(Eq.A.11), chapitre.2).

IV. Détermination de la contrainte de cisaillement τ_0 et de distorsion pur γ

L'état de contrainte pour un état de cisaillement pur (voir figure. B.15) en tridirectionnel est tel que :

$$\tau_0 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = \tau_0 \quad \text{Eq.B21}$$

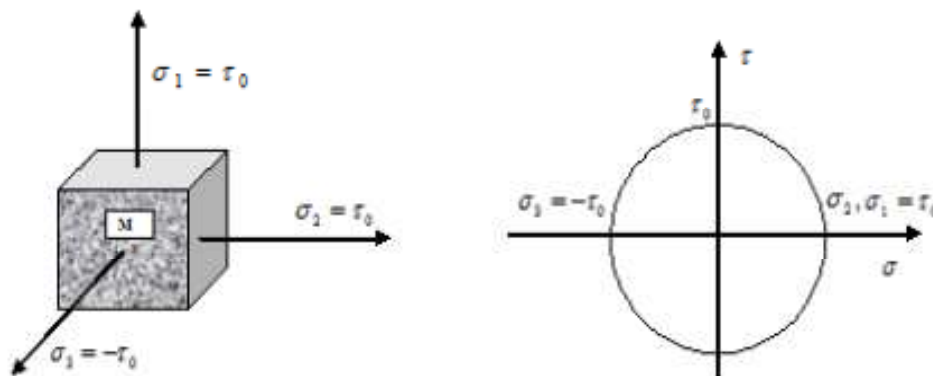


Figure.B.15.Cercle de Mhor – Cas d'un cisaillement pur

τ_0 : Contrainte de cisaillement pur

γ : Glissement pur

La loi de Hooke généralisée dans un état principal de déformation nous permet d'écrire(voir Eq.A.2 du chapitre.2):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\tilde{E}}(\sigma_1 - \tilde{\nu}(\sigma_2 + \sigma_3));$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\tilde{E}}(\sigma_2 - \tilde{\nu}(\sigma_1 + \sigma_3));$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\tilde{E}}(\sigma_3 - \tilde{\nu}(\sigma_1 + \sigma_2)).$$

Alors que :

$$\gamma_{Min}^{Max} = \pm(\varepsilon^{MAX} - \varepsilon^{MIN}) \quad \text{Eq.B22}$$

$$\varepsilon^{MAX} = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

$$\varepsilon^{MIN} = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

$$\tau_0 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \quad \text{Eq.B23}$$

$(\sigma_1 - \sigma_3)$: Déviateur de contrainte, représente le diamètre du cercle de Mohr

$$\tau_0 = \gamma \times \tilde{G}, \quad \tilde{G} = \frac{\tilde{E}}{2(1 + \tilde{\nu})} \quad \text{Eq.B24}$$

$$\gamma = \varepsilon^{Max} - \varepsilon^{Min} = \frac{\tau_0}{\tilde{G}} \quad \text{Eq.B25}$$

$\varepsilon_1 \succ \varepsilon_2 \succ \varepsilon_3$ et on posons :

$$\varepsilon^{Max} = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon^{Min} = \varepsilon_3 \quad \text{Eq.B26}$$

A partir des équations (Eq.B.26) , (Eq.B.22) et (Eq.B.25) nous obtenons :

$$\gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = (1 + \tilde{\nu}) \times \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\tilde{E}} = \frac{\tau_0}{\tilde{G}} \quad \text{Eq.B27}$$

La distorsion pure pour un état de contrainte quelconque est donnée par l'équation (Eq.B27).

V. Conclusion

D'après les résultats expérimentaux, montrant un coefficient de Poisson variable du béton, dans un état de compression uni axial, plusieurs auteurs ont proposé une loi de d'évolution de la deuxième caractéristique mécanique du matériau béton notée $\tilde{\nu}$.

Pour approcher au mieux le comportement réel du béton, nous considérons ici le coefficient de Poisson et le module d'Young dépendent du dommage. L'effet hydrostatique fait évoluer le module de compressibilité (Chen, 1982).

Ce dernier est donc en rapport avec la variation de volume et est indépendant de la variable qui affecte le module de Young ceci nous entraine vers une loi d'évolution du coefficient de Poisson. Notant que dans le règlement de calcul BAEL 91, le coefficient de Poisson dans la zone fissurée est considéré comme nul, (par le faite de la non contribution du béton tendu dans les calculs), alors que dans notre modélisation le béton tendue dans le domaine non linéaire est affecté par un coefficient de Poisson qui suit une loi d'évolution et ceci pour décrire au mieux le comportement du béton en traction.

On conclue qu'un dommage volumique noté D_v (définissant un changement de volume), vient s'ajouter au dommage D_{tot} , imposé par la non linéarité du comportement du béton dans le cas d'un chargement hydrostatique, induisant ainsi une variation du coefficient de compressibilité, Il apparait donc important d'introduire une autre condition, apporté au critère de rupture à noté : $D_v(\varepsilon_m) < 1$.



Chapitre.4 :

Partie.I. *Modélisation du comportement du béton en compression et en traction unidirectionnel par la mécanique de l'endommagement coefficient de Poisson variable ...*

Partie.II. *Modélisation du comportement biaxial du béton par la mécanique de l'endommagement
Coefficient de Poisson variable*

Partie.III. *Modélisation du comportement non linéaire par la mécanique de l'endommagement des Structures en béton-Armé*



Chapitre.4. Partie. I. Modélisation du comportement du béton en compression et en traction unidirectionnel par la mécanique de l'endommagement coefficient de Poisson variable ...

I. Introduction

En partant des relations de comportement en uni axial (Sargin et Grelat) [7], [8], on propose des relations d'évolution du dommage. Celui-ci évolue selon le signe de la déformation (compression ou traction). Deux variables de dommage (D_c en compression et D_t en traction) sont introduites pour décrire le comportement réel du béton sous sollicitation unidirectionnelle.

En considérant un dommage de type volumique, D_v , la variation de l'effet de Poisson est introduit sous une loi d'évolution. La ductilité du béton en traction, au-delà de la fissuration dans le cas où celui-ci est armé, est prise en compte par un paramètre a ($a = \frac{\varepsilon_{ft}}{\varepsilon_{rt}}$, où : ε_{ft} représente la déformation limite élastique ou à l'apparition de la première fissure ; ε_{rt} la déformation à la rupture totale du béton c'est-à-dire ; à la plastification des aciers tendus).

Si le BAEL91 impose une certaine limite de la déformation en compression de 3.5‰, nous constatons bien avec se modèle qu'il existe une marge de sécurité laissée avant la rupture réel de l'élément en béton. Prendre le coefficient de Poisson variable, influe directement sur la déformation latérale et volumique (simulation de l'essai de compression simple (Ramtani-1990))[37]. Les relations ainsi élaborées sont introduites dans un code en éléments finis.

II. Hypothèses

On adopte le principe de la déformation équivalente et l'hypothèse de l'isotropie du dommage (Figure.1); c'est-à-dire : « la même déformation (ε) provoquée par une contrainte (σ) pour un matériau endommagé peut être obtenue en appliquant une contrainte équivalente pour le même matériau sans endommagement ».

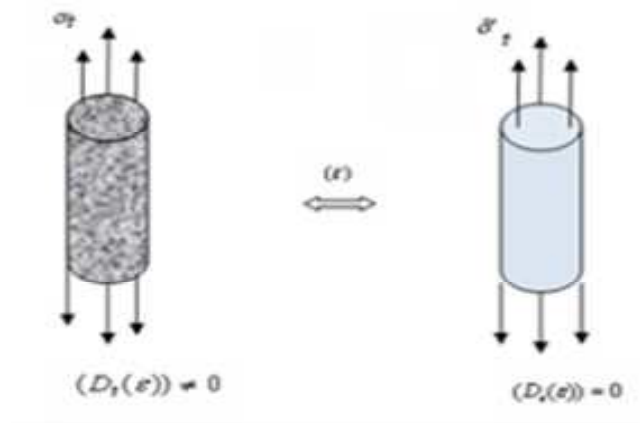


Figure.1. Représentation du principe de la déformation équivalente

On admet deux lois de comportement en unidirectionnel : les relations de Sargin [7], en compression simple et la relation de Grelat en traction simple [8] ;

- l'endommagement est isotrope et l'état d'endommagement est représenté par une seule variable scalaire (D) dite « variable d'endommagement » ou « variable interne » ;
- la fonction seuil du dommage (évolution de l'endommagement) est défini par l'équation :

$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - K(D) = 0$ où ; $\tilde{\varepsilon}$: est la déformation équivalente (variable observable) choisie en fonction de l'état de contrainte imposé. L'endommagement apparaît alors lorsque la déformation équivalente atteint un certain seuil $K(D)$ qui est une fonction de l'endommagement ;

- Le second principe de la thermodynamique qui impose une variable du dommage croissante ($\dot{D} > 0$) est appliqué.
- La méthode sécante est alors utilisée aux deux lois de comportement considérées en uni axial ;
- Enfin, l'évolution du coefficient de Poisson est prise en compte (Voir : Chapitre.3).

III. Variable de dommage en compression et en traction unidirectionnel

III.1. Application de la loi de Hooke généralisée et loi d'évolution du coefficient de Poisson

III.1.1. Loi de Hooke généralisée (Cauchy, 1789-1857 [10-134]) : exprime chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations (voir les équations (I.1)).

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\tilde{E}}{(1-2\tilde{\nu})(1+\tilde{\nu})} [(1-\tilde{\nu})\varepsilon_1 + \tilde{\nu}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)] ; \sigma_2 = \frac{\tilde{E}}{(1-2\tilde{\nu})(1+\tilde{\nu})} [(1-\tilde{\nu})\varepsilon_2 + \tilde{\nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)] ; \\ \sigma_3 &= \frac{\tilde{E}}{(1-2\tilde{\nu})(1+\tilde{\nu})} [(1-\tilde{\nu})\varepsilon_3 + \tilde{\nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]\end{aligned}\quad (I.1)$$

Avec : $\sigma_{i(i=1,2,3)}$: contraintes principales

$\varepsilon_{i(i=1,2,3)}$: Déformations principales

$\tilde{\nu}$: Coefficient de Poisson que l'on considère variable dans le domaine non linéaire

$\tilde{E} = E_{b0} \times (1 - D)$

\tilde{E} : Module d'Young sécant

D : Variable de dommage locale

E_{b0} : Module d'Young du béton instantané

Pour un état de contrainte principal unidirectionnel ($\sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$), les expressions (I.1)

$$\begin{aligned}\text{deviennent : } \sigma_1 &= \frac{\tilde{E}}{(1-2\tilde{\nu})(1+\tilde{\nu})} [(1-\tilde{\nu})\varepsilon_1 + \tilde{\nu}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)] ; \varepsilon_3 = \frac{\tilde{\nu}}{(\tilde{\nu}-1)} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) ; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\tilde{\nu}}{(\tilde{\nu}-1)} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)\end{aligned}\quad (I.2)$$

Avec : $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -2\tilde{\nu}\varepsilon_1$.

Et en remplaçant dans (I.1) on obtient : $\sigma_1 = \tilde{E}\varepsilon_1$; $\varepsilon_2 = \frac{\tilde{\nu}}{(\tilde{\nu}-1)} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$;

$$\varepsilon_3 = \frac{\tilde{\nu}}{(\tilde{\nu}-1)} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (I.3)$$

En introduisant la déformation volumique ($\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$), les équations (3) s'écrivent :

$$\varepsilon_2 = -\frac{\tilde{\nu}}{(1-2\tilde{\nu})} \varepsilon_V ; \varepsilon_3 = -\frac{\tilde{\nu}}{(1-2\tilde{\nu})} \varepsilon_V \quad (I.4)$$

Les équations (4) définissent un état de contrainte unidirectionnel. Nous remarquons aussi que ($\varepsilon_2 = \varepsilon_3$), ce qui nous donne :

$$\sigma_1 = \tilde{E}\varepsilon_1 ; \varepsilon_2 = -\tilde{\nu}\varepsilon_1 ; \varepsilon_3 = -\tilde{\nu}\varepsilon_1 \quad (I.5)$$

$$\text{Des équations (I.4) et (I.5) nous déduisons que : } \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_V}{(1-2\tilde{\nu})} \quad (I.6)$$

III.1.2. Introduction de la variation du coefficient de Poisson (voir chapitre.3).

On définit une variable de dommage du type volumique D_v affectant la troisième caractéristique mécanique ainsi défini qui est le module de compressibilité. On pose $D = D_1$ (Cas uni axial). L'équation d'écrivant la variation du coefficient de Poisson pour un état de contrainte uni axial est donnée sous la forme,

$$\tilde{\nu} = 0.5 - 0.5 \times \frac{(1 - 2\nu_0)(1 - D_1(\varepsilon))}{(1 - D_v(\varepsilon_m))} \quad (I.7)$$

Notant, que nous allons vérifier par plusieurs confrontations, avec des essais existants qu'on pratique les deux variables de dommage respectivement (D_c) et (D_v) ne peuvent pas être égales à 1 simultanément. La variable de dommage D_1 décrit un dommage de type déviatorique en unidirectionnel qui affecte la seule caractéristique mécanique qui est le module de Young \tilde{E} .

$$D_1 = D_c \quad (\text{cas de la compression uniaxial})$$

$$D_1 = D_t \quad (\text{cas de la traction uniaxial})$$

III.2.Variable de dommage en compression unidirectionnel

III.2.1. Introduction de la variable de dommage D_c

Les relations de Sargin [7] permettent de décrire le comportement du béton en compression et ce jusqu'à la rupture. Elles permettent de tenir compte de la ductilité du matériau en étant souples et adaptables à tout type de comportement. La contrainte est donnée par la relation suivante (voir Figure.2).

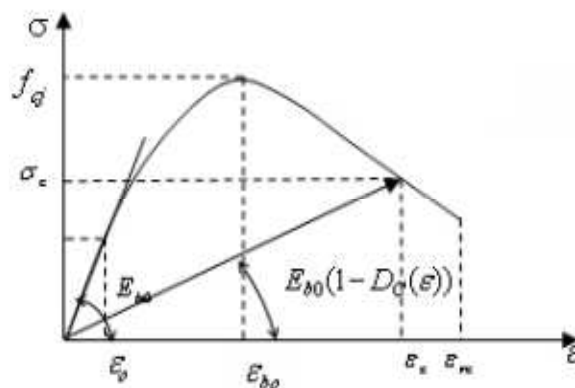


Figure.2. Représentation de la loi de Sargin

$$\sigma = f_{cj} \frac{K\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}\right) + (K'-1)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}\right)^2}{1 + (K-2)\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} + K'\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}\right)^2} \quad \text{et} \quad K = \frac{E_{bo} \times \varepsilon_{bo}}{f_{cj}} \quad (\text{I.8})$$

Avec : $K' = K-1$ pour $f_{cj} \leq 30 \text{ MPa}$
 $K' = 0$ pour $f_{cj} \geq 55 \text{ MPa}$
 $K' = (K-1) \times \left(\frac{55 - f_{cj}}{25}\right)$ pour $30 \text{ MPa} < f_{cj} < 55 \text{ MPa}$

K est le coefficient qui ajuste la branche ascendante de la loi de comportement et, K' est le coefficient permettant d'ajuster la branche descendante au diagramme réel expérimental ; f_{cj} est la résistance à la compression du béton à l'âge j ; E_{bo} est le module tangent à l'origine et ε_{bo} qui est la déformation au pic de contrainte. le BAEL propose les formules suivantes :

$$E_{bo} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}} \quad (\text{I.9})$$

$$\varepsilon_{bo} = 0,62 \times 10^{-3} \times \sqrt[3]{f_{cj}} \quad (\text{I.10})$$

En introduisant la variable du dommage D_c ($0 \leq D_c \leq 1$) dans le domaine d'évolution du dommage qui est défini dans l'intervalle de la déformation pour un état de compression, nous avons :

$$D_c(\varepsilon_o) \leq D_c(\varepsilon) \leq D_c(\varepsilon_{rc}) \quad \text{pour} \quad \varepsilon_o \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{rc} \quad (\text{I.11})$$

ε_o : est la déformation limite élastique du béton ; obtenue pour : $D_c(\varepsilon) = 0$

ε_{rc} : est la déformation de rupture du béton obtenue pour : $D_c(\varepsilon) = 1$

On peut écrire :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E_{bo} \times (1 - D_c(\varepsilon)) = \frac{f_{cj}}{\varepsilon} \times \frac{K\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}\right) + (K'-1)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}\right)^2}{1 + (K-2) \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} + K'\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}\right)^2} \quad (\text{I.12})$$

La variable de dommage en compression est alors donnée par l'équation suivante :

$$D_c(\varepsilon) = 1 - \frac{1 + \frac{(K'-1)}{K} \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}}{1 + (K-2) \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} + K'\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}\right)^2} \quad (\text{I.13})$$

III.2.2. Etude de la variable de dommage D_c

1. Cas ou $D_c(\varepsilon) = 0$

$$\frac{1 + \frac{(K'-1)}{K} \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}}{1 + (K-2) \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} + K' \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} \right)^2} = 1 \quad (I.14)$$

Cette égalité se réduit à :

$$\left(K' \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} + (K-2) - \frac{K'-1}{K} \right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} = 0 \quad (I.15)$$

Nous distinguons deux possibilités pour cette égalité

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} = 0 \quad (\varepsilon = \varepsilon_o = 0 \text{ quelque soit la valeur de } K \text{ et } K')$$

Ou:
$$\left(K' \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} + (K-2) - \frac{K'-1}{K} \right) = 0$$

Remarquons que si on considère le premier cas, nous supposons qu'il n'y'a aucune linéarité représentative du domaine élastique dans la loi de comportement du béton et ceci quelque soit la nature du béton (les deux paramètres K et K' non aucune influence sur l'initiation du dommage). Alors que, le deuxième cas est plus significatif, puisque réellement, le début du dommage doit dépendre de la nature du béton utilisé.

Pour ce dernier notant que si : $K' = 0$, nous obtenons $K = 1$

Autrement dit, la valeur de ($K = 1$) correspondant à ($f_{cj} = E_{bo} \times \varepsilon_{bo}$); nous renseigne sur le début du dommage relatif à une valeur de la déformation notée ($\varepsilon_o = \varepsilon_{bo}$), et ceci pour $K' = 0$. Alors que dans le cas ou ($K' \neq 0$), le début du dommage est pour une valeur de la déformation donnée par la formule suivante :

$$\varepsilon_o = \frac{\varepsilon_{bo}}{K'} \left(\frac{K'-1}{K} - K + 2 \right) \quad (I.16)$$

On conclue que l'initiation du dommage correspond à la valeur de la déformation ε_o .

Cas ou $D_c(\varepsilon) = 1$, Ce qui nous donne l'équation ci dessous :

$$\frac{1 + \frac{(K'-1)}{K} \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}}{1 + (K-2) \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} + K' \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} \right)^2} = 0$$

Nous remarquons que cette égalité est vérifiée si seulement si $K' \neq 1$ d'où la solution unique suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon_{rc} = \varepsilon_{bo} \left(\frac{K}{1-K'} \right) \quad (I.17)$$

De même on définit une valeur limite de la déformation ε_{rc} (déformation à la rupture), qui représente l'endommagement limite relative à $D_c(\varepsilon) = 1$.

Nous remarquons d'après la formule (I.17), plus la valeur de K' est proche de 1, plus la valeur de la déformation limite ne tend vers l'infini. Notant que ceci respecte la représentation de la loi de SARGIN. Avec $K' = 1$, on obtient des courbes avec une branche descendante assez plates qui correspondent à un béton ayant un comportement très ductile (plastique) [7].

On conclue que la variable de dommage définissant l'état de contrainte unidirectionnel est régit par les équations suivantes :

$$D_c(\varepsilon) = 1 - \frac{1 + \frac{(K'-1)}{K} \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}}{1 + (K-2) \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} + K' \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} \right)^2} ; \quad K = \frac{E_{bo} \times \varepsilon_{bo}}{f_{cj}} ;$$

- si: $K' \neq 0$ $\varepsilon_o = \frac{\varepsilon_{bo}}{K'} \left(\frac{K'-1}{K} - K + 2 \right)$
- si: $K' = 0$ $\varepsilon_o = \varepsilon_{bo}$

III.3. Variable de dommage D_t en traction unidirectionnel

III.3.1. loi de Grelat

Les relations $(\sigma - \varepsilon)$ proposées par Grelat [8] permettent de prendre en compte la contribution du béton tendu situé entre deux fissures successives de flexion encore resté « intact », adhérent aux aciers, dans le comportement global d'un tronçon de poutre. Ceci permet de mieux approcher le comportement réel (Voir figure.3).

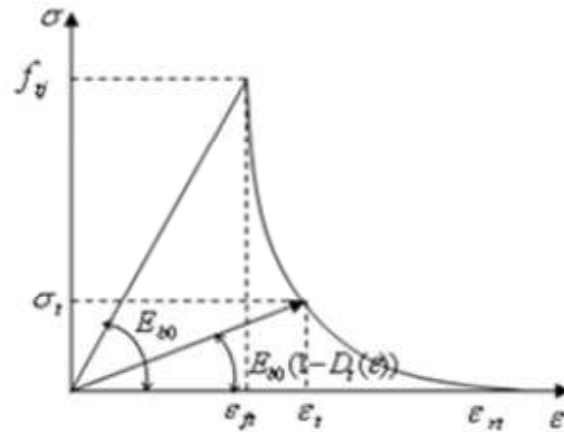


Figure. 3. Représentation de la loi de Grelat

Ces relations sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E_{b0} \times \varepsilon & \text{pour} & \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ft} \\
 \sigma &= \frac{f_{ij} \times (\varepsilon - \varepsilon_{ft})^2}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2} & \text{pour} & \quad \varepsilon_{ft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{rt} \\
 \sigma &= 0 & \text{pour} & \quad \varepsilon = \varepsilon_{rt}
 \end{aligned} \tag{I.18}$$

E_{b0} est le module d'élasticité du béton ; f_{ij} est la résistance caractéristique de traction du béton à l'âge j ; ε_{ft} est la déformation limite élastique ; ε_{rt} est la déformation de rupture. La variable d'endommagement en traction (D_t) est tel que : $0 \leq D_t \leq 1$ est introduite par application de la méthode sécante (voir Fig. 2) par la relation suivante.

$$\sigma_t / \varepsilon_t = E_{b0}(1 - D_t) \tag{I.19}$$

La variable du dommage en traction uni-axial est obtenue en combinant les relations (I.18) et (I.19), elle est exprimée par la relation (I.20).

$$D_t(\varepsilon) = 1 - \left[\frac{a}{(1-a)^2} \right] \times \left[\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{rt}} - 1 \right)^2}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{rt}}} \right] \quad \text{avec : } a = \frac{\varepsilon_{ft}}{\varepsilon_{rt}} \tag{I.20}$$

E_{b0} : Module d'élasticité du béton.

f_{ij} : Résistance caractéristique de traction du béton à l'âge (j).

ε_{ft} : Déformation limite élastique ; ε_{rt} : Déformation limite ou de rupture.

On définit D_t variable d'endommagement en traction tel que : $0 \leq D_t \leq 1$.

On définit la constante a comme caractéristique qui dépend du type ou de la nature du béton à considérer. Si on limite la déformation à la rupture ε_{rt} à 0.01 (limite à la rupture de l'acier d'après le BAEL 91). On fixe ainsi la valeur de a à $\varepsilon_{ft}/0.01$

Contrairement, si on fixe la valeur de a , on limite ainsi la déformation ultime à la rupture ε_{rt} .

$$\varepsilon_{rt} = \varepsilon_{ft} / a \tag{I.21}$$

Ceci nous impose d'effectuer une certaine analyse sur l'effet de cette valeur sur la loi de comportement du béton en traction. L'équation (20), ainsi établie est introduite dans un logiciel EL.F.

III.3.2. Fonction seuil du dommage, pour un état de traction unidirectionnel. L'endommagement est évolutif dans le domaine des déformations pour un état de traction unidirectionnel. La fonction seuil définit deux états limites : une limite élastique ε_{ft} et une limite à la rupture donnée par la valeur ε_{rt} .

$$\text{Si : } \varepsilon = \varepsilon_{ft} \quad D_t(\varepsilon_{ft}) = 0 \tag{I.22}$$

$$\text{Si : } \varepsilon = \varepsilon_{rt} \quad D_t(\varepsilon_{rt}) = 1$$

III.3.3. Influence du paramètre $a = \varepsilon_{ft} / \varepsilon_{rt}$

Prenons l'exemple d'un matériau béton, dont les caractéristiques mécaniques sont :

$$E_{bo} = 30000 \text{MPa} ; \varepsilon_{ft} = 0.000115 ; \varepsilon_{bo} = 0.002 ; \nu = 0.2 ; f_{ij} = 3.33 \text{MPa} ; f_{cj} = 33.3 \text{MPa}$$

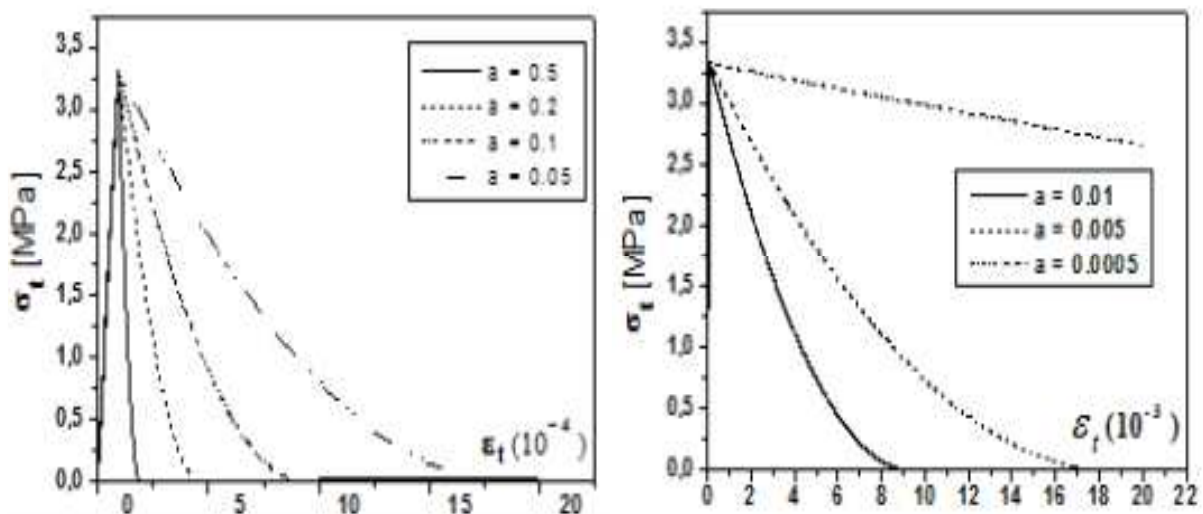


Figure. 4. Influence du paramètre a sur la loi d'évolution de la contrainte en traction.

Nous cherchons à connaître l'effet de la valeur de a dans le cas où elle est imposée par l'utilisateur sur la loi d'évolution ($\sigma - \varepsilon$), d'un élément de volume soumis à une traction pure (voir figure.4). Nous constatons que si la valeur de ε_{rt} tend vers ε_{ft} , a tend vers 1.

De même si ε_{rt} tend vers l'infini, a tend vers 0. Notant que $\varepsilon_{rt} = 0.01$, valeur représentant la limite à la rupture du béton armé en traction (d'après le BAEL91).

On conclue que le paramètre a , est relatif à la **ductilité** en traction du béton (La constante a , influe considérablement sur la partie représentant l'adoucissement de la loi de comportement en traction unidirectionnel).

IV. Application des deux variables de dommages D_c et D_t

IV.1. Application numérique de la loi de comportement ($\sigma - \varepsilon$) de SARGIN, et de la variable de dommage en compression unidirectionnel D_c .

Voici un tableau (Voir : Tab. II) qui donne les différentes caractéristiques mécaniques, pour des types de béton vérifiant les équations (I.9- I.10- I.13- I.16- I.17).

f_c [MPa]	25	30	40	45	55	60	80
E_{b0} [MPa]	32129.7	34140.8	37573.24	39076.24	41776.63	43004.81	47328.38
$\varepsilon_{b0} \times 10^{-3}$	1.81	1.9	2.12	2.2	2.35	2.42	2.67
K	2,332	2.19	1,994	1.91	1.79	1,74	1,58
K'	1,332	1.19	0,596	0.366	0	0	0
$\varepsilon_o \times 10^{-3}$	0,258	0.17	0,698	1.48	2.35	2.42	2.267
$\varepsilon_{rc} \times 10^{-3}$	12.7	21.69	10.4	6.6	4.22	4.22	4.22

Tab. II. Comparaison entre les paramètres du modèle ($K, K', \varepsilon_o, \varepsilon_{rc}$) en fonction des caractéristiques mécaniques du béton ($f_{cp}, E_{b0}, \varepsilon_{b0}$) en compression uniaxial.

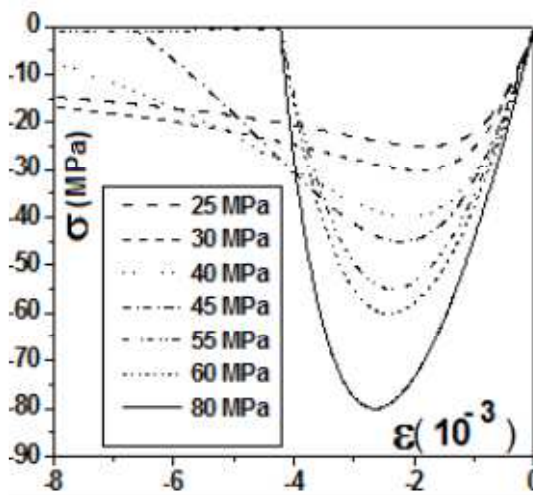


Figure.5. Comportement contrainte-déformation du béton
En compression pour différentes valeurs de f_{cj}

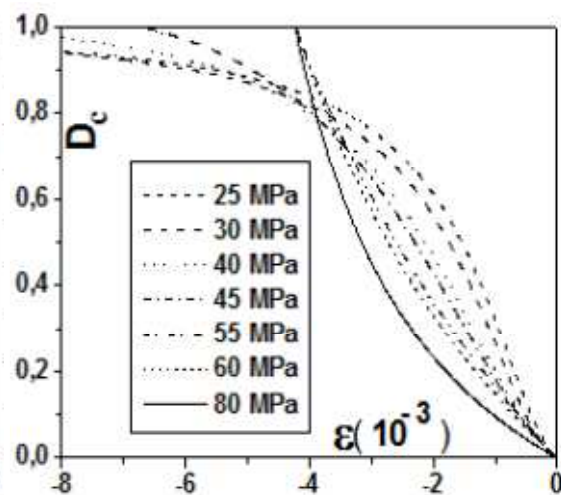


Figure.6. Evolution de la variable de dommage en
compression D_c pour différentes valeurs de f_{cj}

Donnons à titre indicatif, les différentes valeurs du dommage D_c relatif à une déformation de 3.5‰ (Voir : Tab. I2).

f_{cj} [MPa]	25	30	40	45	55	60	80
$D_c(3.5‰)$	0.80	0.74	0.72	0.62	0.78	0.75	0.73
$\epsilon_{rc} \times 10^{-3}$	12	21	10.4	6.6	4.2	4.22	4.22

Tab. I2. Comparaison entre les valeurs du dommage pour une déformation
limite de 3.5‰ en fonction de f_{cj}

Nous constatons bien que, la loi d'évolution du dommage et la loi de comportement du béton en compression unidirectionnel sont très représentatifs, et ceci quelque soit la valeur de la contrainte caractéristique en compression f_{cj} .

Les coefficients K' et K qui ajustent la partie descendante et ascendante de la loi de SARGIN sont très significative, jouant ainsi sur la ductilité ou non du béton utilisé. Nous remarquons que dans le cas des bétons de faible résistance la ductilité devient élevée et quand la valeur de K' se rapproche de zéro pour les bétons de forte résistance leurs ductilité est très faible, ceci donc est relatif aux matériaux fragiles (voir Tab .I1).

Nous constatons aussi que la valeur de $(\epsilon_0 = \epsilon_{bo})$ pour des valeurs de $f_{cj} \geq 55 \text{MPa}$, indique que pour des béton à haute résistance le seuil ou l'initiation du dommage est pour une

valeur de la déformation égale à la déformation élastique du béton noté ε_{b0} . Notant aussi que la rupture pour ces types de béton intervient pour une même limite de la déformation $\varepsilon_{rc} = 4.2\%$.

Une remarque importante peut être donnée pour la valeur du dommage relatif à une déformation de 3.5% , notant que cette valeur n'est pas représentatif, comme limite de dommage locale (voir Tab.I2).

$$f_{cj} = 30 \text{ MPa} \quad \text{On a} \quad \{D_C(3.5\%) = 0.8, \quad \varepsilon_{rc} = 21\% \} \quad (\text{Béton ductile})$$

Alors que pour:

$$f_{cj} = 80 \text{ MPa} \quad \text{On a} \quad \{D_C(3.5\%) = 0.73, \quad \varepsilon_{rc} = 4.22\% \} \quad (\text{Béton fragile})$$

On conclue que d'après le Tab.I1 :

$$K' = K - 1 \quad \text{Pour} \quad f_{cj} \leq 30 \text{ MPa} \quad (\text{Béton ductile})$$

$$K' = 0 \quad \text{Pour} \quad f_{cj} \geq 55 \text{ MPa} \quad (\text{Béton fragile})$$

$$K' = (K - 1) \times \left(\frac{55 - f_{cj}}{25} \right) \quad \text{Pour} \quad 30 \text{ MPa} < f_{cj} < 55 \text{ MPa} \quad (\text{Béton normal})$$

N.B : La valeur calculée de la déformation limite à la rupture notée ε_{rc} relative à un dommage limite de $D_C \approx 1$ est très représentatif de la nature du béton à utiliser, alors que la limite de dommage à 3.5% , n'est pas un facteur qui peut être utilisée comme un critère de rupture pour le béton en compression . Notant que nous conseillons d'utiliser des bétons avec des valeurs de $f_{cj} \leq 55 \text{ MPa}$.

IV.2. Simulation du comportement en compression unidirectionnel du béton, confrontation avec le modèle de Mazars (Mazars *et al.* (2006))[27]

Pour représenter le comportement dissymétrique du béton, Mazars (1984) [26] propose deux modes d'endommagement, D_t en traction et D_c en compression. La combinaison linéaire de ces deux endommagements donne l'endommagement global isotrope :

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c$$

Les coefficients α_t et α_c représentent respectivement le couplage traction-endommagement et compression-endommagement. En traction pure $\alpha_t = 1$, $\alpha_c = 0$ et en compression pure $\alpha_t = 0$, $\alpha_c = 1$. Avec les caractéristiques mécaniques suivantes on a pu simuler le modèle de Mazars (Tab. I3).

ε_o	ε_{b0}	ε_{ft}	$f_{ij} [MPa]$	$f_{cj} [MPa]$	K	K'
0.69×10^{-3}	0.0021	1.15×10^{-4}	3.74	40	1.99	0.59

Tab. I3. Les caractéristiques mécaniques du béton utilisé et les paramètres du modèle qui lui correspond.

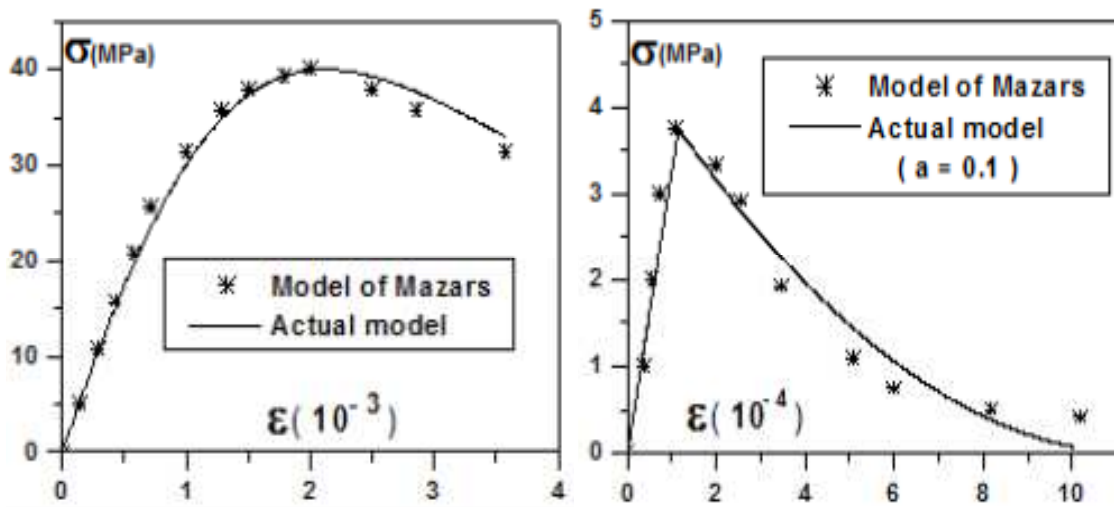


Figure.7. Simulation de la réponse du modèle d'endommagement de Mazars en traction et en compression

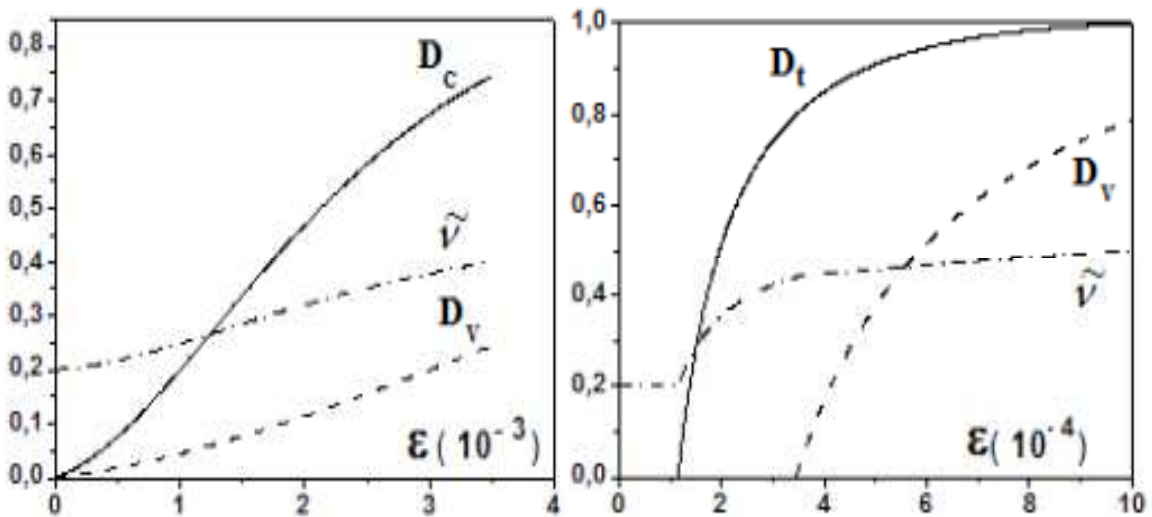


Figure.8. Evolution des dommages respectifs (en compression et traction) et le coefficient de Poisson.

- Nous donnons si après les résultats du modèle pour une limite à la rupture de 3.5‰

$D_C(3.5‰)$	$D_V(3.5‰)$	$\tilde{\nu}(3.5‰)$
0.74	0.24	0.39

Tab. I4. Valeurs du dommage et coefficient de Poisson à 3,5‰.

- Si le BAEL 91 impose une déformation limite pour le comportement du béton en compression unidirectionnel de l'ordre de $\varepsilon_{rc}=3,5‰$, ceci entraîne un dommage voisin de 0,8. Alors que le dommage volumique reste faible devant la valeur du dommage déviatorique pour une même valeur de la déformation qui est de 3,5‰.

Notant aussi que le dommage déviatorique est le seul responsable de la rupture locale dans un élément en béton soumis à la compression unidirectionnelle.

IV.3. Simulation de l'essai de traction uni axial [198]

La loi de comportement du béton en traction suit l'équation : $\sigma_t = E_{bo} \times (1 - D_t(\varepsilon)) \times \varepsilon_t$

Les caractéristiques mécaniques du béton, sont données dans le tableau suivant :

$\sigma_{ft}[MPa]$	$\varepsilon_{ft}(\times 10^{-4})$	$f_{cj}[MPa]$	$E_{bo}[MPa]$
2,74	2,0	35,71	36219

Tab. I5. Caractéristiques mécanique du béton [198]

Résultat de la simulation :

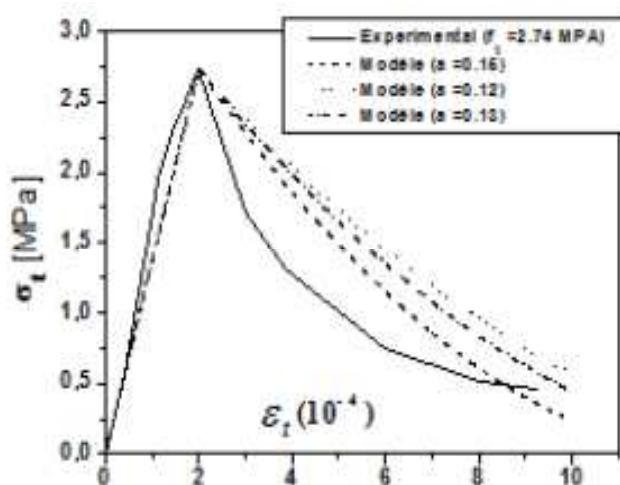


Figure.9 .Résultats du modèle $f_{ij} = 2.74 MPa$

Nous constatons que la loi de Grelat utilisée pour la simulation du béton en traction, est correctement choisie, tel que le pic de la contrainte et la partie non linéaire sont très bien décrits, et ceci pour une valeur de $a = 0.15; 0.13; 0.12$.

IV.4. Simulation du comportement latéral lors de l'essai de compression simple d'après Ramtani (Ramt-1990)[37]

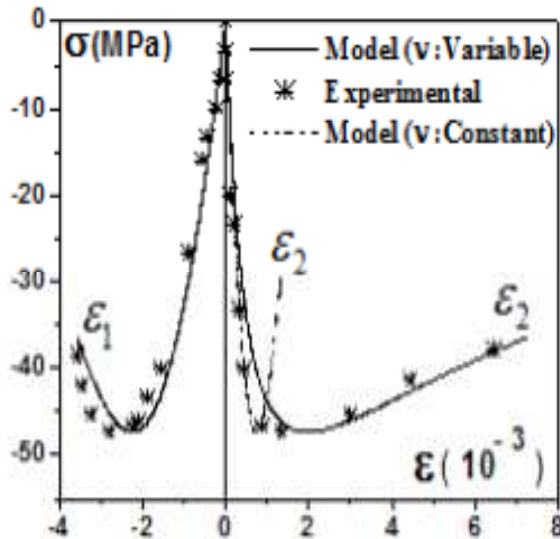


Figure.12. Simulation du comportement de béton en compression simple (Ramtani -1990)

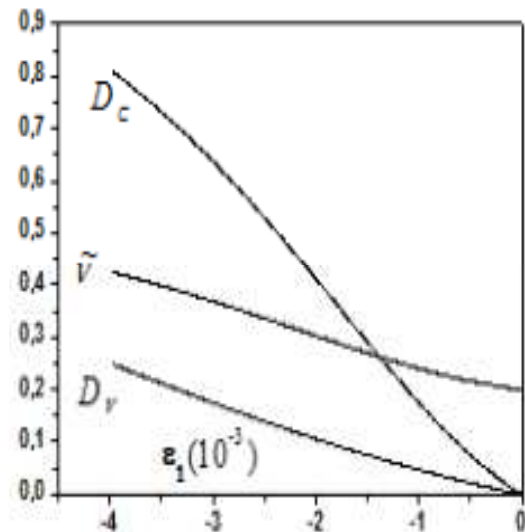


Figure.13. Variation du dommage volumique, déviation torique et du coefficient de Poisson

IV.5. Modélisation du comportement volumique du béton en compression uniaxial [199]

Il s'agit de modéliser le comportement volumique d'une éprouvette en béton cylindrique de diamètre 16 mm et de hauteur 32 mm, le but de ce test est de décrire le comportement volumique de l'éprouvette. Les paramètres utilisés dans cet article sont : $E_{b0} = 36000 \text{ MPA}$; $\nu_0 = 0.24$; $f_{cj} = 45 \text{ MPA}$.

Dans notre modélisation on utilise les équations suivantes :

$$f_{cj} = 45 \text{ MPA} ; E_{b0} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}} ; \varepsilon_{b0} = 0,62 \times 10^{-3} \times \sqrt[3]{f_{cj}} ; \nu_0 = 0.18 ;$$

$$\sigma(\varepsilon) = E_{b0} \times (1 - D_c(\varepsilon)).$$

Notant que les équations suivantes ont été utiles pour simuler ce comportement :

$$\text{Avec: } \varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_m ;$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\tilde{\nu}}{(1-2\tilde{\nu})} \varepsilon_v ; \quad \varepsilon_3 = -\frac{\tilde{\nu}}{(1-2\tilde{\nu})} \varepsilon_v ; \quad \tilde{\nu} = 0.5 - 0.5 \times \frac{(1-2\nu_0)(1-D_c(\varepsilon))}{(1-D_v(\varepsilon_m))}.$$

Résultat du modèle : Dans cette modélisation nous avons arrêté nos calcul à $\varepsilon_1 = 3.5\%$.

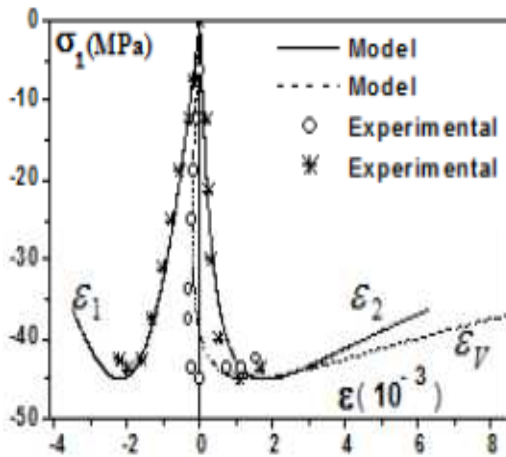


Figure.14. Simulation du comportement en compression triaxiale axisymétrique du béton $\tilde{\nu}$ variable.

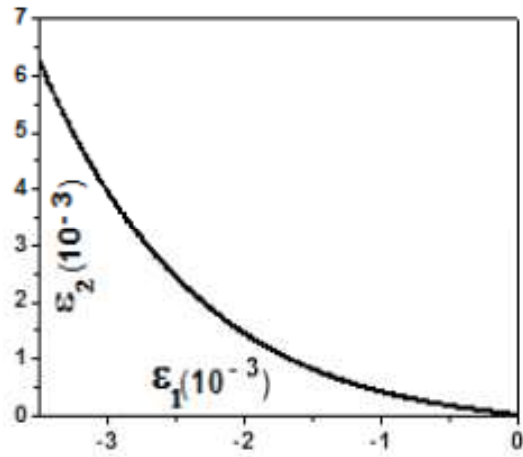


Figure.15. Evolution de la déformation latérale en fonction de la déformation axiale.

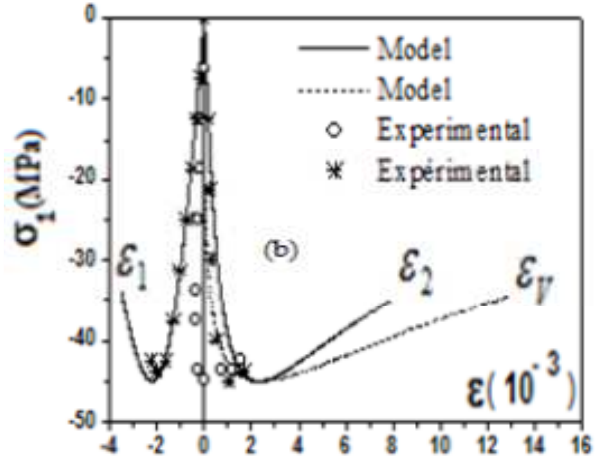
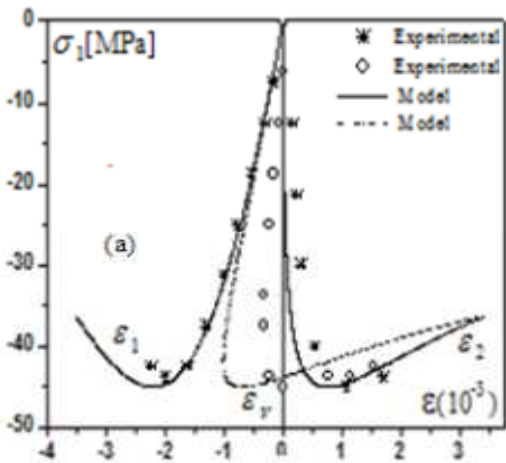


Figure.16. Comportement tri-directionnel du béton en traction uni-axiale (a : $\nu_0 = 0$) et (b : $\nu_0 = 0.24$)

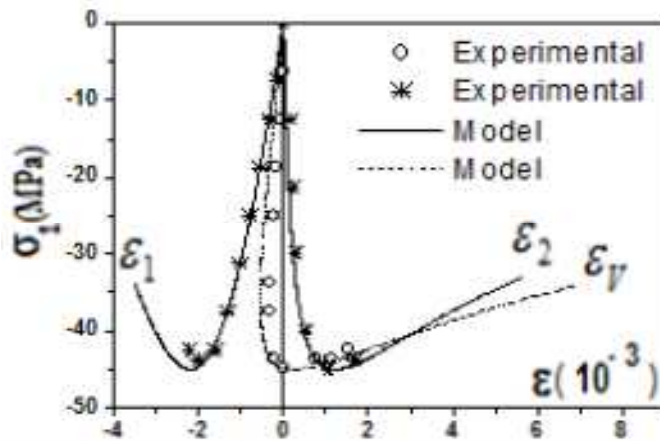


Figure.17. Comportement tri-directionnel du béton en compression uniaxiale ($\nu_0 = 0.15$)

Nous constatons bien que pour un coefficient de Poisson variable les résultats du modèle s'approchent des résultats expérimentaux. La variation du coefficient de Poisson en compression uni axiale n'influe pas sur la réponse ($\sigma_1 - \varepsilon_1$), alors qu'il a un effet direct sur la déformation latérale (ε_2) et la déformation volumique (figure.14-16-17). Notant que la valeur prise pour le coefficient de Poisson de $\nu_0 = 0.15$ (figure.17), donne des résultats très satisfaisant et ceci pour un béton de résistance caractéristique $f_{cj} = 45\text{MPa}$.

Notant aussi que le dommage volumique est faible devant le dommage déviatorique dans le cas d'une compression uni directionnel.

Nous concluons que notre modèle est performant pour décrire le comportement lateral et volumique de l'élément en béton soumis à une compression uni-directionnel.

V. Conclusion

La prise en compte de l'évolution du coefficient de Poisson et du dommage en unidirectionnel permet de décrire et de suivre correctement le comportement réel du béton et ce jusqu'à rupture. Les deux variables de dommage, respectivement, en compression et en traction, sont très représentatives du comportement non linéaire du béton pour un état unidirectionnel. A la valeur de la déformation de rupture en compression adoptée par le BAEL (3,5 %) correspond une valeur de dommage D voisine de 0,8 (< 1). La constante a permet de prendre en compte la ductilité du matériau en traction.

La mise en considération de la variation du coefficient de Poisson rend mieux compte du comportement réel et cette étude montre son influence directe sur la déformation latérale et sur la déformation volumique. Enfin, le dommage de type volumique (changement de volume) responsable de la variation du coefficient de compressibilité, reste faible devant le dommage de type déviatorique (changement de forme) : seul paramètre à affecter le module de Young.

Chapitre.4. Partie. II. Modélisation du comportement biaxial du béton par la mécanique de l'endommagement - coefficient de Poisson variable -

I. Introduction

Un nouveau modèle est introduit, pour prédire le comportement réel, non linéaire, du matériau béton et ce jusqu'à la rupture. Il permet de décrire le comportement non linéaire du béton sous chargement monotone vérifiant les principes de la mécanique de l'endommagement [5] et les concepts de la mécanique de la rupture tout en utilisant les fondements de la mécanique continue des matériaux [9]. Le comportement mécanique non linéaire du béton en unidirectionnel est décrit par deux lois (SARGIN [7] pour la compression et GRELAT [8] pour la traction). En introduisant deux variables de dommage appliquées en unidirectionnel notée respectivement D_t en traction et D_c en compression et la variation du coefficient de Poisson en uniaxial (Voir chap4.parte.I), leurs combinaison avec les lois de la mécanique des matériaux continus (loi de Hooke généralisée)[9], et la théorie de la mécanique de l'endommagement (théorie de l'isotropie du dommage, et principe de la déformation équivalente), nous amène à une loi de variation du dommage en tridirectionnel appliquée en bidirectionnel notée D_{tot} . Si la variation du coefficient de Poisson en compression uniaxial du béton a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs (Sami, A., Klink, 1975[11], Murray D.W. 1979[12], Niels Saabye ottosen, (1980)[13], Atheel E. Allos., L.H.Martin, (1981)[14], Ramtani.S, Y. Berthaud ,J. Mazars,(1992)[16] et Ferretti, E., (2004)[20]. Alors qu' en multiaxial on peut citer: Chen 1982[15], Guo 1997[200], Zhu 1998[201], Hyuk-Chun Noh , Hyo-Gyoung Kwak 2006[21] et Ding Faxing Yu Zhiwu 2006[22].

II. Base du Modèle

La définition d'une variable mécanique d'endommagement qui décrit correctement l'état locale et ceci quelque soit l'état de contrainte appliqué, pose un problème difficile dans la mesure où, presque rien ne distingue un élément de volume fortement endommagé d'un élément de volume vierge. On étant obligé d'imaginer une variable interne représentative de l'état de détérioration de la matière grâce à la notion de contrainte effective introduite par Rabotnov [5], approche la plus suivie, dans notre modélisation, on se basons sur le principe de la déformation équivalente et la notion de la contrainte effective, utilisons comme support les notions fondamentales de la mécanique continue de la matière [9], on introduit donc une variable de dommage interne notée D_{tot} qui est une fonction de la déformation (variable observable) et ceci quelque soit l'état de contrainte appliqué. Dans notre modélisation, nous considérons que la variation du module de compressibilité \tilde{K} en rapport avec le comportement non linéaire du béton en compression hydrostatique (Chen 1982 [15]) est imposé par l'existence d'un dommage volumique D_v . Si ce dernier est influencé par une variation de volume et son indépendance avec le module de Young \tilde{E} , ceci nous amène à extraire une loi d'évolution du coefficient de Poisson $\tilde{\nu}$ en uniaxial (Voir chap.3), et en multiaxial.

III. Critères de l'étude

La variable D_{tot} doit vérifier le second principe de la thermodynamique (autrement dit cette dernière doit être croissante $\dot{D}_{tot} > 0$). Le principe de la déformation équivalente et l'hypothèse de l'isotropie du dommage est appliqué [5]: *la déformation ε provoquée par une contrainte σ pour un matériau endommagé peut être obtenue en appliquant une contrainte équivalente pour le même matériau sans endommagement*. L'endommagement est isotrope et l'état d'endommagement est représenté par une seule variable scalaire D_{tot} dite *variable d'endommagement* ou *variable interne*. La fonction seuil du dommage (évolution de l'endommagement) est définie par l'équation :

$$f(\tilde{\varepsilon}, D_{tot}) = \tilde{\varepsilon} - K(D_{tot}) = 0.$$

où ; $\tilde{\varepsilon}$:est la déformation équivalente (variable observable) choisie en fonction de l'état de contrainte imposé. L'endommagement apparaît alors lorsque la déformation équivalente atteint un certain seuil $K(D_{tot})$ qui est une fonction de l'endommagement. L'évolution du coefficient de Poisson en multiaxial est prise en compte.

IV. Variable de dommage en bidirectionnel - Loi d'évolution du coefficient de Poisson en multiaxial

IV.1. Introduction de la variable de dommage en bidirectionnel

L'unicité du dommage en un point et sa dépendance avec la seule variable observable ε , nous impose de définir une variable de dommage unique en un point noté D_{tot} ; On considérons que le dommage est de type déviatorique et son influence sur la seule caractéristique mécanique \tilde{E} , ceci nous permet de débiter d'un état de cisaillement pur pour retrouver l'équation qui régit cette variable de dommage en tri-directionnel ,puis en bidirectionnel. On pose D_{tot} : variable d'endommagement totale. \tilde{E} : Module d'élasticité équivalent. $\tilde{\nu}$: Coefficient de Poisson équivalent.

$$E_{bo} = 11000\sqrt[3]{f_{cj}}, \quad \varepsilon_{bo} = 0,62 \times 10^{-3} \times \sqrt[3]{f_{cj}}. \quad (\text{d'après le BAEL 91 [42-43]})$$

$\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3$: Modules de Young effectifs ou équivalents suivant les trois directions principales de contraintes. D_1, D_2, D_3 : Variables de dommage suivant les trois directions principales des déformations. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$: Déformations principales. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Contraintes principales.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= E_{bo} \times (1 - D_1(\varepsilon_1)), \quad \tilde{E}_2 = E_{bo} \times (1 - D_2(\varepsilon_2)), \quad \tilde{E}_3 = E_{bo} \times (1 - D_3(\varepsilon_3)), \\ \tilde{E} &= E_{bo} \times (1 - D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)), \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_V \end{aligned}$$

La variable de dommage en multiaxial est donnée par l'équation (Voir: chapitre.2):

$$D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 1 - \frac{(1 - D_1(\varepsilon_1))(1 - D_2(\varepsilon_2))(1 - D_3(\varepsilon_3))}{(2 - D_1(\varepsilon_1) - D_2(\varepsilon_2))(1 - D_3(\varepsilon_3)) - (1 - D_1(\varepsilon_1))(1 - D_2(\varepsilon_2))}$$

Si: $\varepsilon_i > 0$ on a $D_i(\varepsilon_i) = D_t(\varepsilon_i)$ ($i=1,3$),

et si: $\varepsilon_i \leq 0$ on a $D_i(\varepsilon_i) = D_c(\varepsilon_i)$ ($i=1,3$).

D_t, D_c : Variables de dommages en unidirectionnels respectivement en traction et en compression.

La variable de dommage pour un état bidirectionnel va s'écrire.(on considérant que le dommage $D_3(\varepsilon_3) = 0$):

$$D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1 - \frac{(1 - D_1(\varepsilon_1))(1 - D_2(\varepsilon_2))}{(2 - D_1(\varepsilon_1) - D_2(\varepsilon_2)) - (1 - D_1(\varepsilon_1))(1 - D_2(\varepsilon_2))}$$

IV.2. Introduction des deux variables de dommage en traction et en compression uniaxial

Pour donner une suite à notre étude on propose deux variables de dommage qui sont illustrées (Voir chap4.parte.I) et déduites des deux lois de comportement en traction de Grelat et de compression de Sargin sont données par les équations suivantes : *Pour la compression uniaxiale.*

$$D_c(\varepsilon) = 1 - \frac{1 + \frac{(K'-1) \times \varepsilon}{K} \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}}}{1 + (K-2) \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} + K' \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} \right)^2}, \quad K = \frac{E_{bo} \times \varepsilon_{bo}}{f_{cj}}, \quad \varepsilon_{rc} = \varepsilon_{bo} \left(\frac{K}{1 - K'} \right)$$

$$si: K' \neq 0 \quad \varepsilon_o = \frac{\varepsilon_{bo}}{K'} \left(\frac{K'-1}{K} - K + 2 \right)$$

$$si: K' = 0 \quad \varepsilon_o = \varepsilon_{bo}$$

Avec: $D_c(\varepsilon_o) \leq D_c(\varepsilon) \leq D_c(\varepsilon_{rc})$ pour $\varepsilon_o \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{rc}$

ε_o : est la déformation limite élastique du béton ; obtenue pour : $D_c(\varepsilon) = 0$

ε_{rc} : est la déformation de rupture du béton obtenue pour : $D_c(\varepsilon) = 1$

K : Coefficient qui ajuste la branche ascendante de la loi de Sargin.

K' : Un coefficient permettant d'ajuster l'allure du début de la branche descendante au diagramme réel. Le coefficient K' peut être pris égal à $(K-1)$, dans le cas des bétons de faible résistance, qui sont assez ductiles. Il se rapproche de zéro pour les bétons de forte résistance, qui sont plus fragiles. *Pour la traction uniaxiale.*

$$a = \frac{\varepsilon_{ft}}{\varepsilon_{rt}}, \quad D_t(\varepsilon) = 1 - \left[\frac{a}{(1-a)^2} \right] \times \left[\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{rt}} - 1\right)^2}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{rt}}} \right].$$

f_{tj} : Résistance caractéristique de traction du béton à l'âge (j).

ε_{ft} : Déformation limite élastique. ε_{rt} : Déformation limite ou de rupture.

IV.3. Loi d'évolution du coefficient de Poisson en multiaxial (voir chapitre.3)

On considère un comportement non linéaire pour le béton dans un état de contrainte hydrostatique [15-202], lié à l'existence d'un dommage de type volumique ce qui impose une évolution du module de compressibilité, cela nous permet d'extraire une relation qui décrit l'évolution du coefficient de Poisson dans le domaine non linéaire dans un état multiaxial : à partir de l'équation définissant le coefficient de compressibilité.

$$\tilde{\nu} = 0.5 - 0.5 \times (1 - 2\nu_0)(1 - D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) \times (1 - D_V(\varepsilon_m)) ;$$

$$\varepsilon_m = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) / 3.$$

- Dans un comportement biaxial, le module de Young et le coefficient de Poisson sont donnés suivant l'équation:

$$\tilde{E} = E_{bo}(1 - D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)).$$

$$\tilde{\nu} = 0.5 - 0.5 \times (1 - 2\nu_0)(1 - D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \times (1 - D_V(\varepsilon_m)).$$

Alors que la déformation latérale ε_3 est donnée sous la forme:

$$\varepsilon_3 = \frac{\tilde{\nu}}{(\tilde{\nu} - 1)}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\text{Ou : } \varepsilon_3 = -\tilde{\nu} \frac{\varepsilon_V}{(1 - 2\tilde{\nu})}; \quad \text{Avec: } \varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

V. Application de la variable de dommage en bidirectionnel D_{tot} et du coefficient de Poisson $\tilde{\nu}$

V.1. Simulation du comportement biaxial –Coefficient de Poisson variable.

Dans le cas de la bi-compression la simulation est faite avec l'essai (Kupfer, 1969)[58-59]. Dans cette essai, les caractéristiques mécaniques de l'élément de volume en béton sont :

$$f_{ij} = 2.56 \text{ MPA} ; E_{b0} = 35207.36 \text{ MPA}; f_{cj} = 32,8 \text{ MPA}$$

V.1.1. Influence du dommage volumique sur les résultats du modèle.

Nous remarquons quant faisant varier le module de compressibilité inversement proportionnellement au dommage volumique (dans le cas uniaxial, voir figure.1.(a1)) ou proportionnel (cas adopté en biaxial, voir figure.1.(a), ou le considérons totalement indépendant de ce dernier (Voir, figure.1.(a2)), ceci influe sur l'équation décrivant l'évolution du coefficient de Poisson (Voir: Chapitre.3, Eq.B.19) et (Eq.II.1):

$$\tilde{\nu} = 0.5 - 0.5 \times (1 - 2\nu_0)(1 - D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) / (1 - D_v(\varepsilon_m)) \quad (\text{Cas uniaxial}) \quad (\text{Eq.B19})$$

$$\tilde{\nu} = 0.5 - 0.5 \times (1 - 2\nu_0)(1 - D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \quad (\text{sans contribution du dommage volumique}) \quad (\text{Eq.II.1})$$

L'existence du dommage volumique (Voir: Figure.1. (a)) et l'apport en contraintes qui est de 25%, nous renseigne sur l'utilité d'utiliser l'équation (Voir: Eq.B.20 du chapitre.3) pour décrire correctement le comportement du béton en compression biaxial, alors que prendre le coefficient de Poisson constant nous éloigne des résultats expérimentaux (Figure.1. (b)).

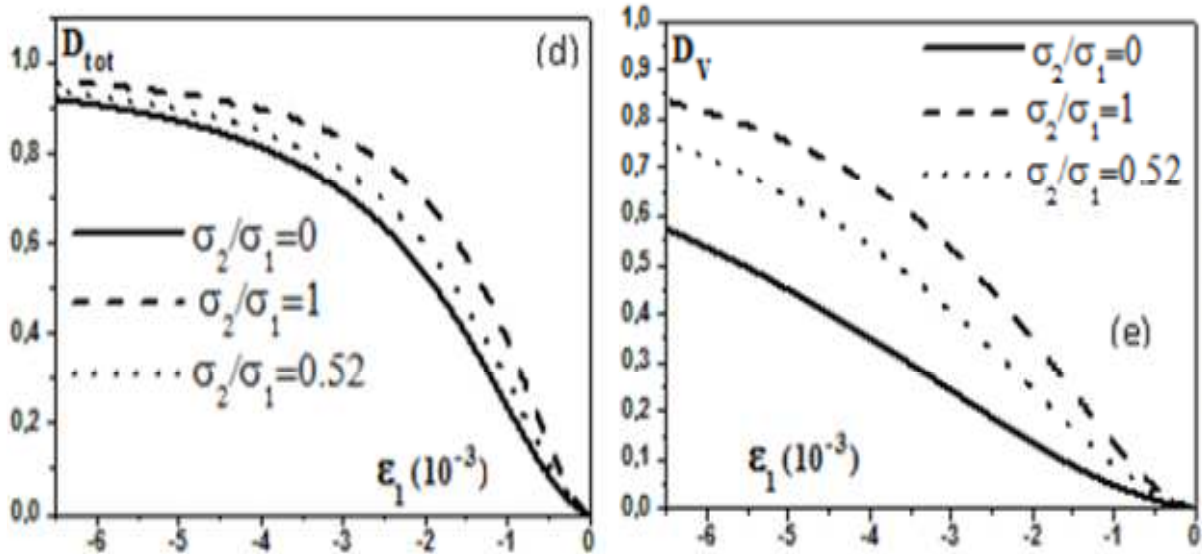
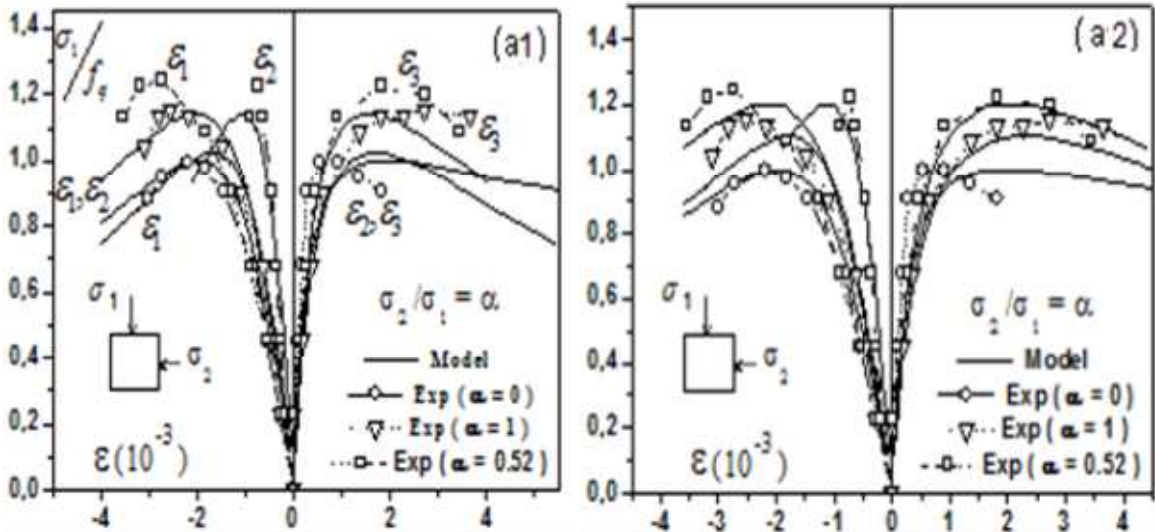
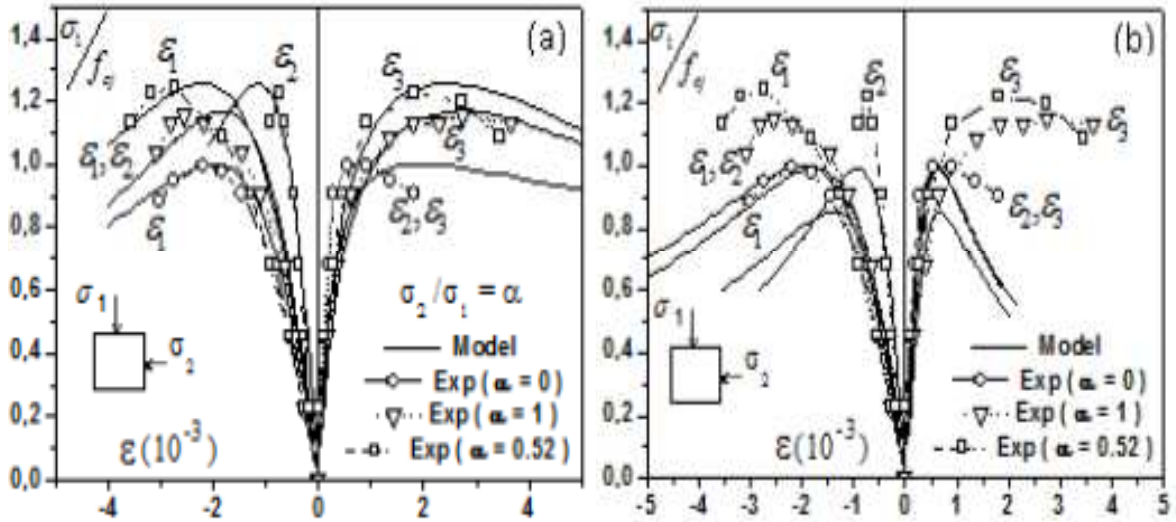
les résultats du modèle concernant l'évolution du coefficient de Poisson, le dommage volumique ainsi que le dommage déviatorique sont donnés en figures (Voir: figure.1 : (c) , (d) , (e)).

V.1.2. Confrontation du modèle en compression biaxial avec l'experimental et le modèle de Mazars

La comparaison entre le modèle élaboré et le modèle de Mazars [28-203] dans le cas de la bi compression, les caractéristiques mécaniques données sont :

$$f_{ij} = 3.27 \text{ MPA} ; E_{b0} = 34000 \text{ MPA}; f_{cj} = 32,7 \text{ MPA} ; \nu_0 = 0.19$$

et pour $\sigma_2 = 0.52\sigma_1$, nous fait remarquer que les résultats de notre modèle, sont très satisfaisants par comparaison avec ce dernier (voir: Figure.1.(f)). On donne aussi l'évolution des deux dommages (D_1, D_2) suivant les deux directions (Figure.1.(g)) et du dommage totale D_{tot} .



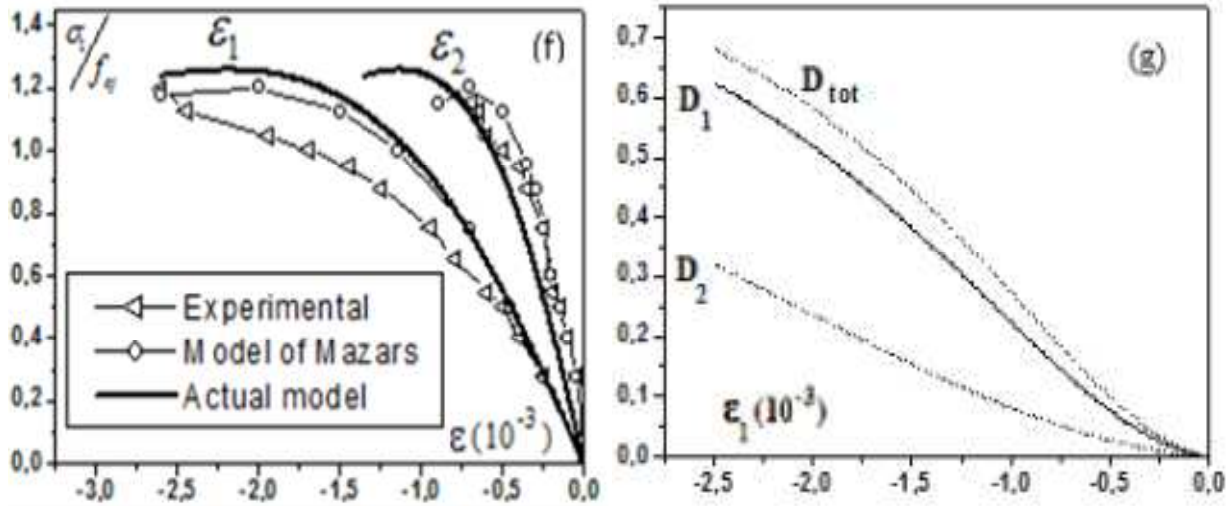


Figure.1. Réponse du modèle en compression biaxial.

V.1.3. Modélisation du comportement en traction bi axiale

La modélisation du comportement en traction bi axiale d'après Kupfer 1969 [58-59], (La contrainte de compression dans cet essai est égale à 27.6MPa) nous a permis de constater, que le gain en contrainte est peut significatif par apport à un état de traction uni axiale, par contre prendre le coefficient de Poisson constant ou variable n'a aucun effet sur la contrainte maximale de traction (Voir : Figure.2: (1), (2)), mais influe directement sur les déformations longitudinales et transversales.

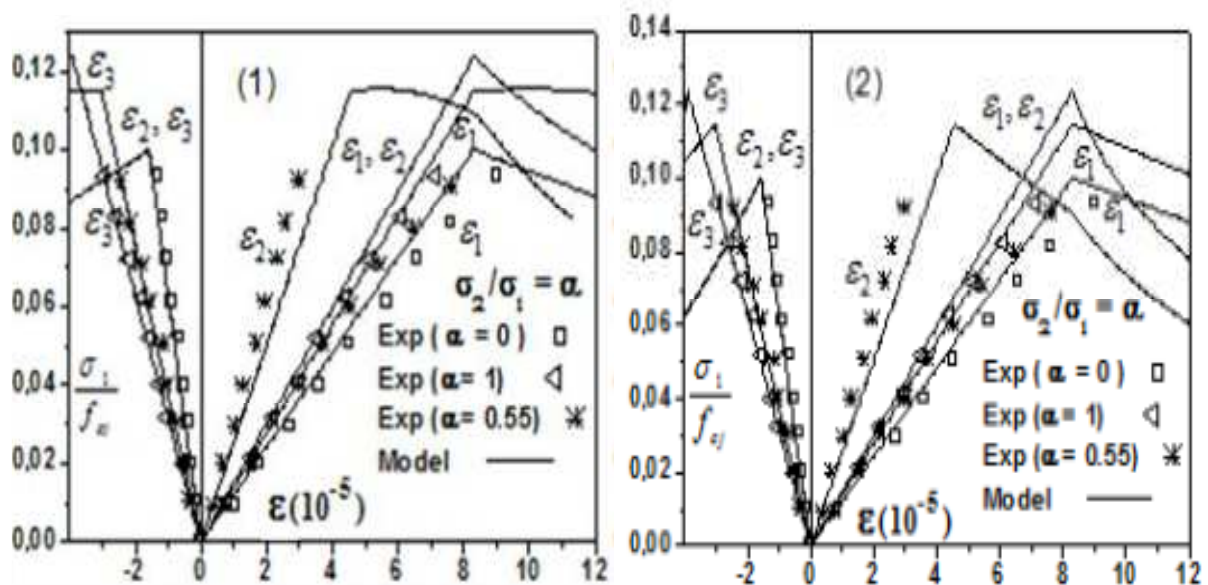


Figure.2. Réponse du modèle en traction biaxial.

V.2. Simulation du comportement d'une plaque entaillée en béton

L'état de contrainte locale dans cette plaque est bidirectionnel (l'épaisseur de la plaque est de l'ordre de 50mm) . Il s'agit de simuler le comportement d'une plaque en béton entaillée soumise un essai de flexion simple, inspiré des essais expérimentaux réalisés par Bazant 1990 [78].

Caractéristiques géométriques et conditions aux limites :

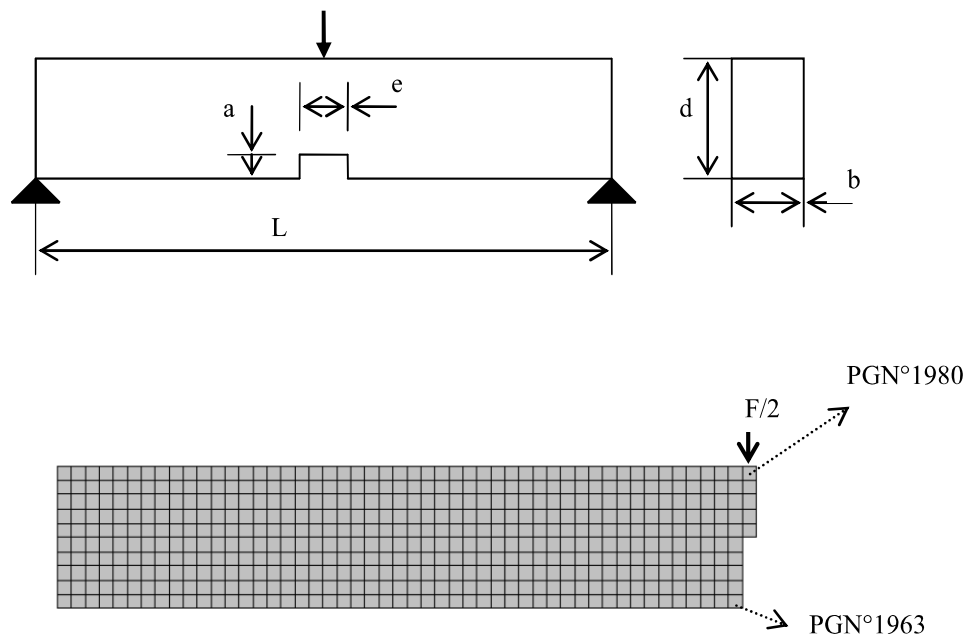


Figure.3. Géométrie, chargement et maillage de l'éprouvette.

La moitié de la poutre est subdivisée en 495 éléments rectangulaires à 8 nœuds (Voir figure. C) Les paramètres du matériau sont donnés dans le tableau suivant :

$a/d = 0.5$	$L = 2m$	$d = 0.2m$	$b = 0.05m$	$e = 0.04m$
$E_{bo} = 30000MPA$	$\varepsilon_{ft} = 0.000115$	$\nu = 0.2$	$f_{ij} = 3.33MPA$	$f_{cj} = 33.3MPA$

Tab.II.1. Caracteristiques geométriques et mécaniques

On simule ainsi les résultats de notre modèle avec des résultats expérimentaux réalisés par (ROTS, J.G., et al) [79] :

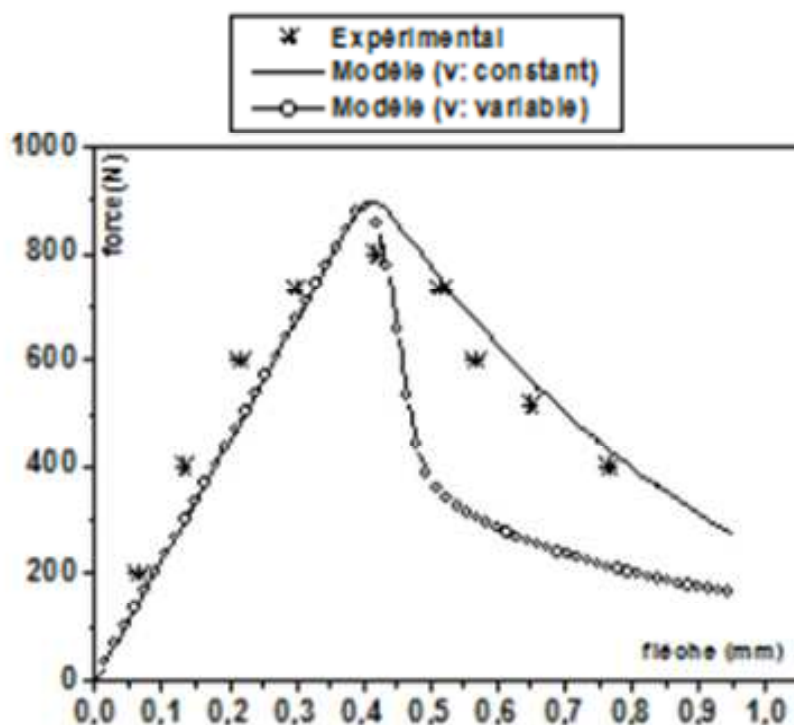


Figure.3. Résultat de la modélisation (Force-Flèche)

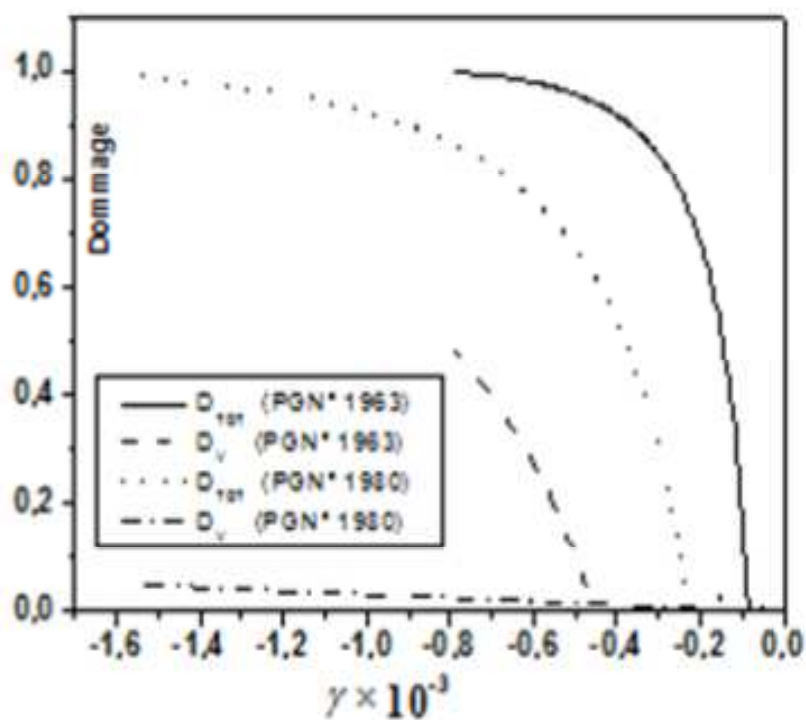


Figure.4. Evolution du dommage volumique et déviatorique en fonction de la distorsion pure γ aux points de Gauss (PGN°1963) et (PGN°1980) (Coefficient de Poisson constant)

Prendre Le coefficient de Poisson constant nous approche considérablement du résultat expérimental (force- flèche), ceci revient à dire que dans le cas des plaques le dommage volumique n'a aucun effet sur le comportement biaxial de l'élément en béton (Voir figure.3).

Des résultats locaux au point de gauss le plus sollicité en traction (PGN°1963) et en compression (PGN°1980) sont donnés pour un coefficient de Poisson constant (Figure.4).

Nous constatons bien que le dommage déviatorique atteint sa limite au point le plus sollicité en traction bien avant le dommage au point le plus sollicité en compression, alors que le dommage volumique est pratiquement nul dans la zone comprimée alors que, dans la zone de traction celui-ci est activé quant le dommage déviatorique atteint sa limite.

V.Conclusion

La Variable de dommage obtenue notée D_{tot} est valable quelque soit l'état de contrainte (uni-bi et tri directionnel) ; dépend de la seule variable observable ε et dépend uniquement des différents dommages créés dans les trois directions principales de déformations D_1, D_2, D_3 . S'est aussi une variable qui représente le dommage totale et ceci quelque soit l'état de contraintes. Cette variable définit un dommage de type déviatorique (obtenue à partir d'un état de cisaillement pur), tel que dans le cas multiaxial, les différents dommages existants en fonctions des déformations locales principales $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, donne naissance à un seul dommage de type déviatorique, qui influe à lui seul sur le module de Young \tilde{E} . Un dommage volumique noté D_V (définissant un changement de volume), vient s'ajouter au dommage D_{tot} , imposé par la non linéarité du comportement du béton dans le cas d'un chargement hydrostatique, induisant ainsi une variation du coefficient de compressibilité et entraînant une variation du coefficient de Poisson en multiaxial. Prendre le coefficient de Poisson comme variable et dépendant des deux dommages deviatorique D_{tot} et volumique D_V , donne des résultats très proches de l'expérimental pour un état de contrainte en compression biaxial.

Chapitre.4. Partie.III. Modélisation du comportement non linéaire par la mécanique de l'endommagement des Structures en béton-Armé

I. Introduction

Le matériau béton – par nature non homogène - associé à l'acier induit un comportement autrement plus complexe que ne peut le décrire les hypothèses très simplificatrices de la RdM. Afin de mieux exploiter les courbes expérimentales caractérisant le comportement mécanique du béton et du béton armé, des chercheurs ont élaboré plusieurs lois de comportement tenant compte de divers mécanismes, tel que la chute de la raideur liée à la fissuration, ductilité sous confinement du béton.....

Pour décrire convenablement le comportement non linéaire des structures en béton armé, on propose une variable de dommage notée D_{tot} appliquée aux éléments en béton pour décrire leurs comportements non linéaires en uni-bi et tridirectionnel, sous chargement mécanique statique et monotone, combinée avec le modèle du treillis adoucissant d'angle variable, proposée par VECCHIO et COLLINS (1986)[121-30] ,et en utilisant une loi élasto-plastique avec écrouissage pour l'acier.

Des confrontations des calculs aux résultats expérimentaux sont effectuées sur des structures en béton armé. Des applications des relations d'évolutions adoptées (loi d'évolution du coefficient de Poisson loi d'évolution du dommage en unidirectionnel, en bidirectionnel et en tri directionnel) pour des structures en béton armé, en introduisant l'effet du pourcentage d'acier, ont permis de décrire et de suivre le comportement réel de ces structures.

II. Hypothèses

- a- Adhérence parfaite acier - béton, permettant l'évaluation de la rigidité globale du matériau mixte.
- b- Les éléments de barre dans les éléments membranaires en béton sont principalement unidimensionnels, on porte le choix sur un comportement élasto- plastique de l'acier avec écrouissage.
- c- Répartition des aciers (longitudinaux et transversaux) d'une manière uniforme et sans aucune discontinuité pour que l'hypothèse des milieux continus soit applicable.
- d- Introduction du pourcentage d'aciers, ceci rend le squelette d'aciers sous forme d'un treillis soudé.
- e- Introduction de la variable de dommage D_{tot} et de la variable définissant le coefficient de Poisson et leurs applications pour décrire le comportement non linéaire des structures en béton armées.

III. Introduction de la variable de dommage D_{tot} et le coefficient de Poisson $\tilde{\nu}$

III.1. Introduction de la variable de dommage D_{tot} : (Voir : Chapitre.2)

La variable de dommage D_{tot} dépend uniquement de la seule variable observable (ε)
Tel que :

$$D_{tot} : \begin{cases} D_{tot}(\varepsilon_1) \dots \dots \dots (Unidirectionnel) \\ D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \dots \dots \dots (Bidirectionnel) \\ D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \dots \dots \dots (Tridirectionnel) \end{cases} \quad (III.1)$$

Appliquée et validée pour décrire le comportement locale et ce jusqu'à la rupture sur des structures en béton, Cette variable notée D_{tot} définit un dommage de type déviatorique (défini à partir d'un état de cisaillement pur), unique en un point locale, influe directement sur la partie adoucissante de la courbe ($\sigma - \varepsilon$) de la loi de comportement du béton en traction ou en compression unidirectionnel, par la formule :

$$\tilde{E}(\varepsilon) = E_0 \times (1 - D_{tot}(\varepsilon))$$

Dans le cas multiaxial, les différents dommages existants (D_1, D_2, D_3) en fonctions des déformations locales principales ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$), donne naissance à un seul dommage de type déviatorique, qui influe à lui seul sur le module de Young sécant par la formule (voir chapitre.2):

$$\tilde{E}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = E_0 \times (1 - D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3))$$

$$D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 1 - \frac{(1 - D_1(\varepsilon_1))(1 - D_2(\varepsilon_2))(1 - D_3(\varepsilon_3))}{(2 - D_1(\varepsilon_1) - D_2(\varepsilon_2))(1 - D_3(\varepsilon_3)) - (1 - D_1(\varepsilon_1))(1 - D_2(\varepsilon_2))}$$

Selon le signe des déformations principales on introduit deux variables l'une en traction, l'autre en compression notées D_t, D_c (Voir : Partie. I. chapitre.4).

Notant que ces variables déduites des deux lois de comportement en traction de Grelat et de compression de Sargin données par les équations :

III.2. Introduction de l'équation de variation du coefficient de Poisson $\tilde{\nu}$

Un dommage volumique noté D_v (définissant un changement de volume), vient s'ajouter au dommage D_{tot} , imposé par la non linéarité du comportement du béton dans le cas d'un chargement hydrostatique, induisant ainsi une variation du coefficient de compressibilité et entraînant une variation du coefficient de Poisson, qui est donné par l'équation (Voir chap3):

$$\tilde{\nu} = 0.5 - 0.5 \times (1 - 2\nu_0)(1 - D_{tot}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \times (1 - D_V(\varepsilon_m))$$

Avec :

$$\varepsilon_m = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) / 3 ; \quad \nu_0 : \text{Coefficient initial de Poisson}$$

IV. Modèle analytique d'un élément en B.A

L'idée a été tirée du modèle analytique « Modèle du treillis adoucissant d'angle variable : Rotating angle softened truss model » (RA-STM-HSU 1988, [204] , [121]- [30] - [116]). Appliquer sur des structures en béton armé avec effort tranchant

La théorie du treillis adoucissant d'angle variable est issue d'une combinaison des équations d'équilibres, de compatibilité et des lois de comportement des matériaux.

IV.1. Principe de la méthode

Un élément membrane de béton armé est représenté sur la figure.1. L'élément est sollicité en contraintes planes (σ_x, σ_y et τ_{xy}) contraintes normales et contraintes de cisaillement).

Ou X et Y sont les directions des armatures longitudinales et transversales.

Après le développement des fissures diagonales, les bielles de béton se mettent en compression et les barres d'aciers en traction.

Les bielles de compression sont orientées selon l'axe, qui est incliné d'un angle α par rapport à l'axe des barres horizontales. Cette direction est supposée coïncider avec la direction des contraintes et des déformations principales de compression.

Si dans ce modèle, une loi de comportement en compression bidirectionnel est appliquée, proposée par VECCHIO et COLLINS (1986) [30].

Dans l'application de ce modèle, on introduit la loi d'évolution du dommage adoptée, qui est appliquée aux structures en béton sous chargement monotone.

Le coefficient de Poisson est considéré comme variable. Si dans ce modèle, est adoptée l'hypothèse que le béton travail en compression et les aciers en traction, dans notre application de ce modèle, on considère que l'adhérence parfaite acier- béton est seule responsable d'imposer un comportement pour l'acier et le béton.

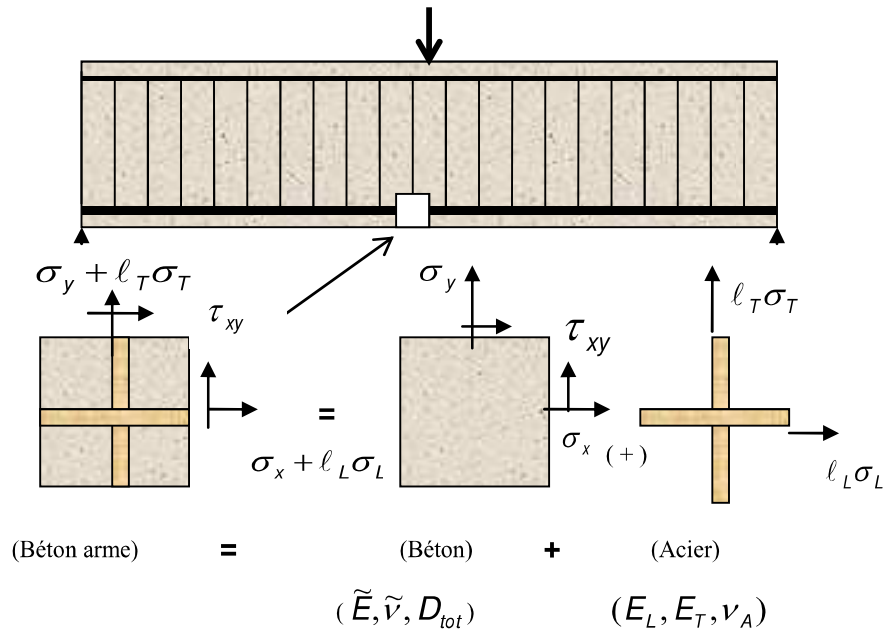


Figure.1. Interprétation du principe adopté par Vecchio et Collins (1986)

Soit :

L'état de contrainte en bidirectionnel pour l'élément en béton armé au point (M) est défini par le système d'équations :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma_x + l_L \sigma_L && \text{(Contrainte totale suivant la direction x-x)} \\
 \sigma_y &= \sigma_y + l_T \sigma_T && \text{(Contrainte totale suivant la direction y-y)} \\
 \tau_{xy} &= \tau_{xy} && \text{(Contrainte de cisaillement du béton seul)}
 \end{aligned}
 \tag{III.2}$$

$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$: Représente l'état de contrainte du béton endommagé.

(σ_L, σ_T) : Représente les contraintes longitudinale et transversale provoqué par les deux armatures se trouvant dans les deux directions respectives.

(l_L, l_T) : Pourcentage mécanique d'aciers associé aux deux directions, tel que :

$l_L = 0$ Ou $l_T = 0$: si aucune présence d'aciers longitudinaux ou transversaux n'est à considérer au point locale étudié. Le pourcentage mécanique est donné par l'équation :

$$l = \frac{Af_e}{bdf_{cj}} \quad \text{(Cas d'une poutre fléchis) [205]}
 \tag{III.3}$$

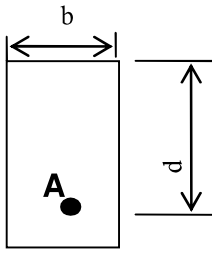


Figure. 2. Section rectangulaire d'une poutre en béton armé

f_e et f_{cj} sont respectivement la contrainte d'élasticité de l'acier et du béton en compression.

$E_L = E_T = E_A$: Module de Young de l'acier qui est le même quelque soit la direction.

L'adhérence parfaite acier- béton impose un état de déformation identique pour les deux matériaux assemblés. La matrice de rigidité élémentaire est défini par l'assemblage des deux matrices d'élasticité de l'acier et du béton.

$$\{\sigma_B\} = [\tilde{\Lambda}]_B \{\varepsilon\} + [\Lambda]_A \{\varepsilon\} = ([\tilde{\Lambda}]_B + [\Lambda]_A) \{\varepsilon\} \quad (III.4)$$

Avec : $[\tilde{\Lambda}]_B$: Matrice d'élasticité du béton endommagé.

$[\Lambda]_A$: Matrice d'élasticité de l'acier défini par :

$$[\Lambda]_A = \begin{bmatrix} \ell_L E_A & 0 & 0 \\ 0 & \ell_T E_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (III.5)$$

IV.2. Base de la modélisation de l'élément en béton armé

2.1. Nous considérons que le comportement du béton est tri directionnel, par le faite de son confinement par les armatures transversales.

2.2. la loi de comportement de l'acier utilisée dans le modèle est élasto-plastique avec écrouissage (Voir : Figure.2. FIG.1 et FIG.2) pour :

$$E_A = 210000 \text{ MPa}; \quad \nu_A = 0.18; \quad f_e = 240 \text{ MPa}; \quad \sigma_r = 1,1 \times f_e = 264 \text{ MPa}.$$

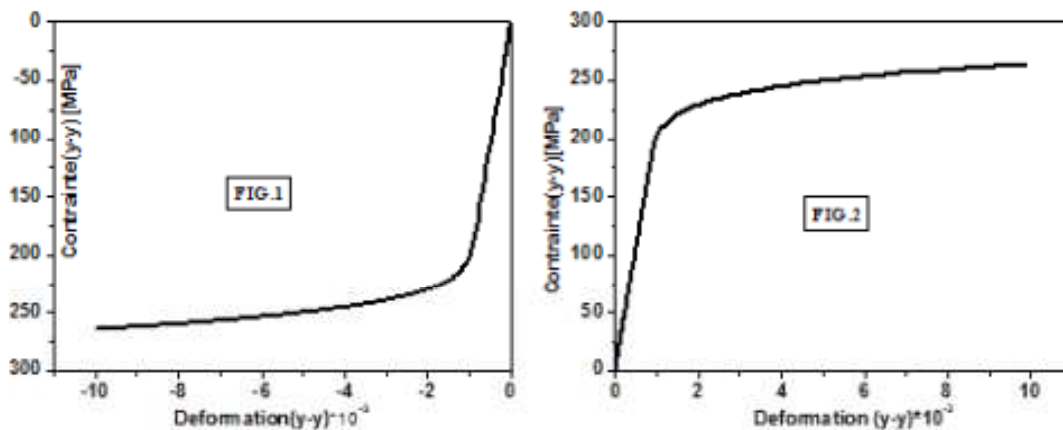


Figure.3.Comportement en compression et en traction d'un acier écroui (FIG1, FIG2).

V. Simulation du comportement non linéaire des structures en béton armé

Dans tout les exemples traités, on impose que la déformation limite ultime de l'acier est de 10‰ (d'après le BAEL91 [42-43]) ; qui correspond à la rupture totale de l'élément en béton armé.

V.1. Cas test C du projet MECA. [206]

Il s'agit d'une poutre en béton armé en flexion simple : Les dimensions de la poutre sont 5000x500x200mm³. Le pourcentage mécanique d'aciers pour ce cas de poutre sera calculé par la formule suivante :

$$\ell = \frac{Af_e}{bdf_{cj}} \approx 0.179$$

La moitié de la poutre est discrétisée en 250 éléments rectangulaires à 8 nœuds (béton). L'acier en éléments linéiques à 3 nœuds. (Voir figure .4)

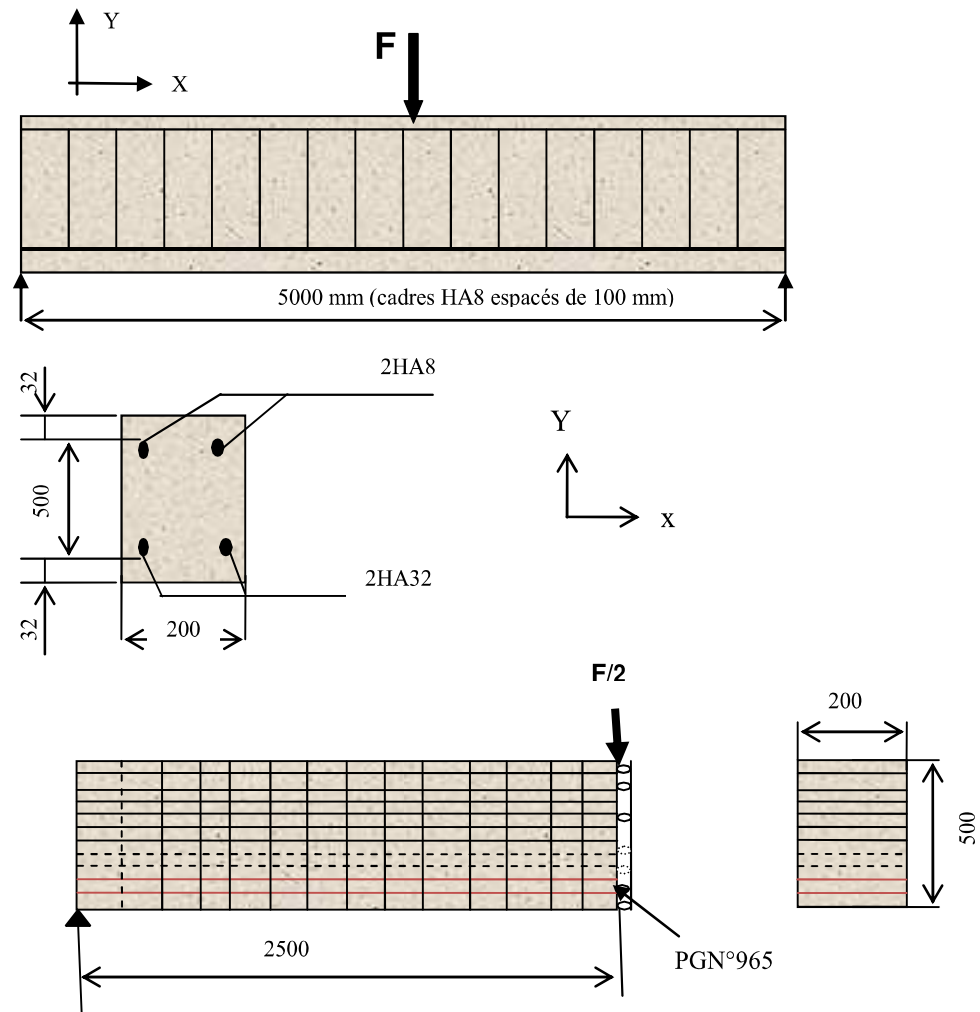


Figure .4. Maillage et caractéristiques géométriques de la poutre MECA [206]

	Caractéristiques du béton	Caractéristiques de l'acier
Résistance en traction	3.9 MPa	400 MPa
Résistance en compression	38.3 MPa	400 MPa
Module de Young	37372 MPa	200000 MPa
Coefficient de Poisson	0.2	0.0

Tab.4. Caractéristiques mécaniques de la poutre MECA [206]

Résultat du modèle : Les résultats locaux sont donnés au point de Gauss le plus sollicité en traction (PGN°965).

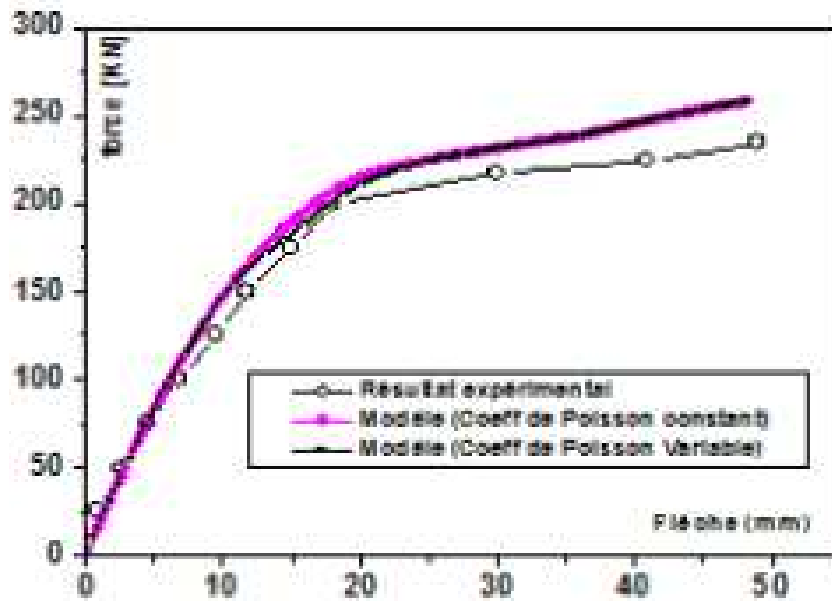


Figure .5. Résultat du modèle (Force-Flèche)

Nous remarquons que les résultats du modèle sont très proches, des résultats expérimentaux et ceci quelque soit la valeur du coefficient de Poisson (constant ou variable) et que seul le dommage volumique est responsable de la rupture locale au point de gauss le plus sollicité en traction (PGN°965), alors que le dommage deviatorique reste faible (Voir figure.5.2) et ceci avant plastification de l'acier (figure.5.1).

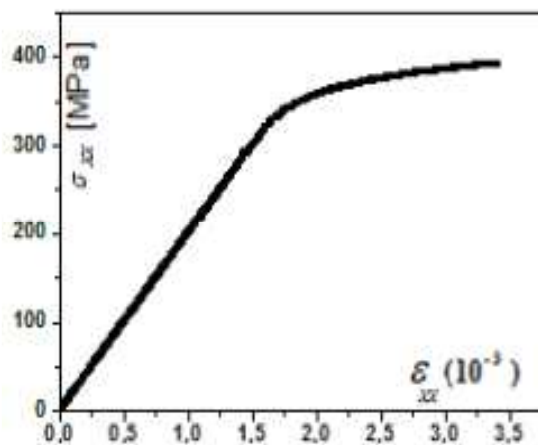


Figure .5.1. Résultat du modèle (contrainte-déformation dans l'acier) Au PGN°965

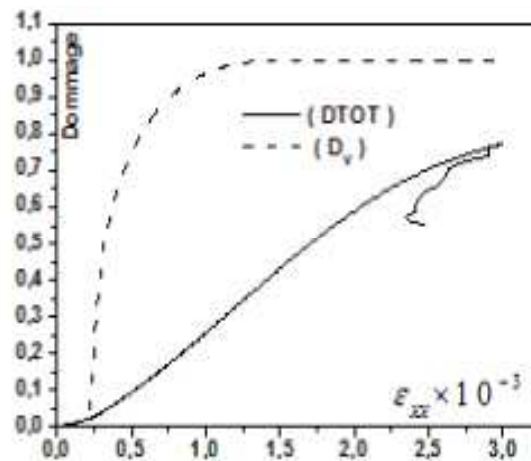


Figure .5.2 .Evolution des deux dommages (deviatorique et volumique) Au PGN°965 (Coefficient de Poisson constant)

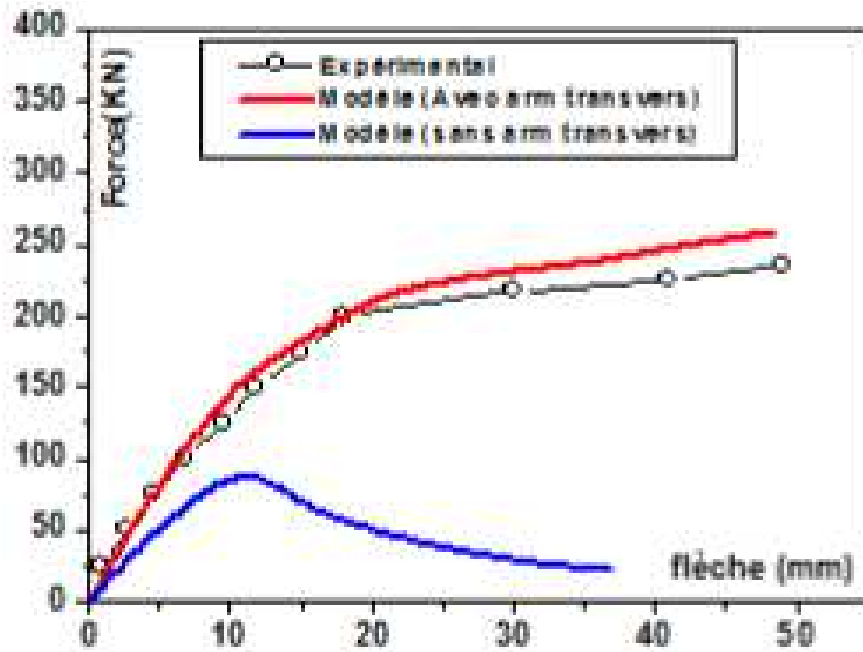


Figure .6. L'effet des armatures transversales sur le comportement force-flèche.
(Coefficient de Poisson variable)

V.2. Simulation d'un essai de flexion 4 points [207]

Cet exemple traite le cas statique d'une poutre en béton armé présentant un faible pourcentage d'acier (1.09%) soumise à une flexion 4 points (Varastehpour , 1996)[208]. Les données géométriques de la poutre et du ferrailage sont indiquées à la (figure.7).

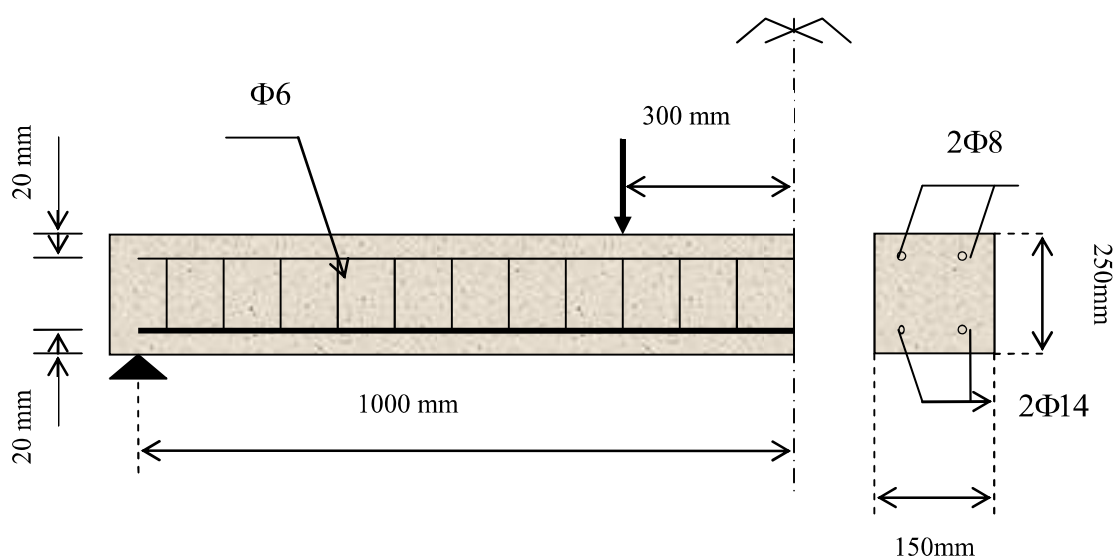


Figure.7. Caractéristiques géométriques (Varastehpour , 1996)

De même que la poutre Méca, la moitié de la poutre est discrétisée en 200 éléments rectangulaires à 8 nœuds (béton). L'acier en éléments linéiques à 3 nœuds. Toute en respectant la position des armatures longitudinales et transversales (espace et enrobage).

Propriétés matérielles :(Voir le tableau ci-dessous)

Le pourcentage mécanique d'aciers est calculé par la formule :

$$\ell = \frac{Af_e}{bdf_{c_j}} \approx 0.1327$$

	Caractéristiques du béton	Caractéristiques de l'acier
Résistance en traction	3.9 MPA	580 MPA
Résistance en compression	39 MPA	580 MPA
Module de Young	37600 MPA	210900 MPA
Coefficient de Poisson	0.2	0.0

Tab.2. Caractéristiques mécaniques (Varastehpour, 1996)

Résultats du modèle : Les résultats locaux sont donnés au point de Gauss le plus sollicité en traction (PGN°765).

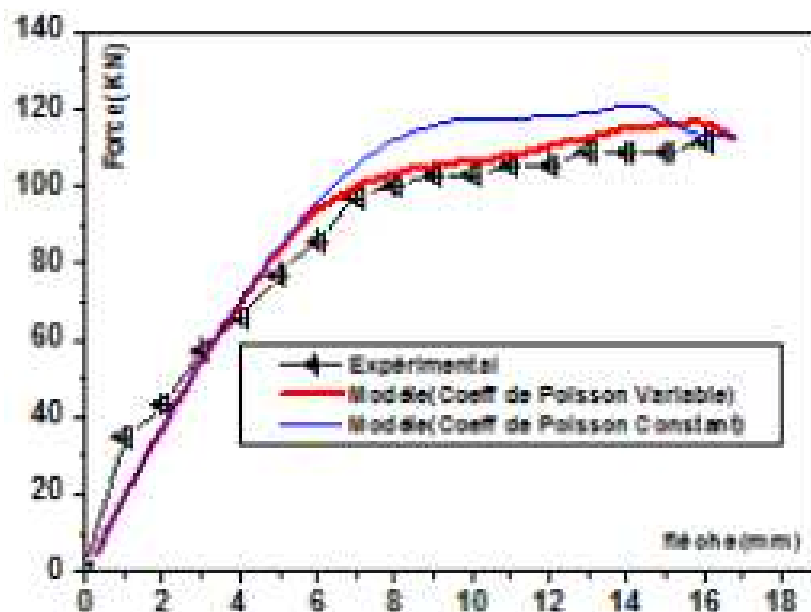


Figure .8.Résultat force-Flèche

Contrairement à la poutre MECA, dans cet essai les résultats expérimentales sont plus proches des résultats du modèle et ceci pour un coefficient de Poisson variable.

V.3. Simulation de l'essai testé par Bresler et Scordelis [209]

Les caractéristiques géométriques de la poutre sont données : (Voir : figure.9)

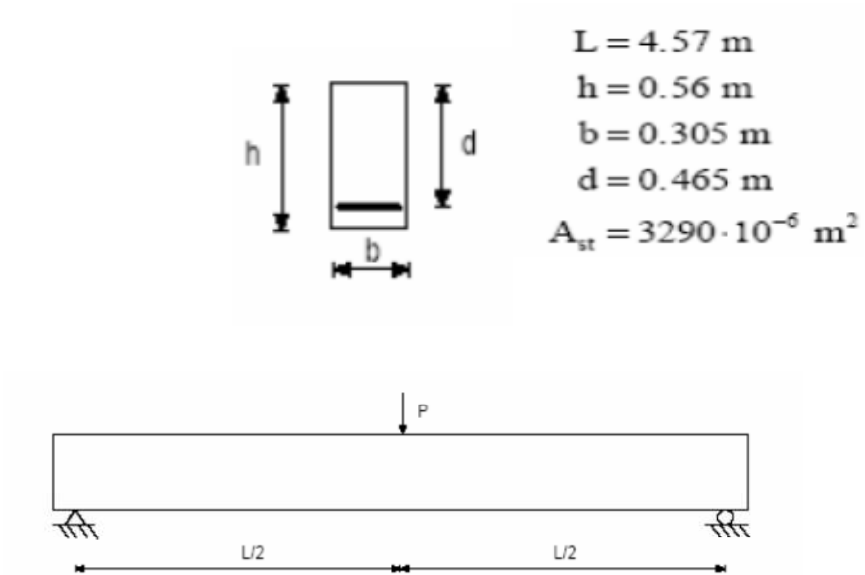


Figure .9. Caractéristiques géométriques, Bresler et Scordelis [209]

- Les caractéristiques mécaniques sont classées dans le tableau suivant :

	Caractéristiques du béton	Caractéristiques de l'acier
Résistance en traction	4.33 MPA	555 MPA
Résistance en compression	23.7 MPA	555 MPA
ε_{b0}	0.0022	
Module de Young	28700 MPA	218000 MPA
Coefficient de Poisson	0.2	0.0

Tab.3. Caractéristiques mécaniques de la poutre, Bresler et Scordelis [209]

Résultat du modèle :

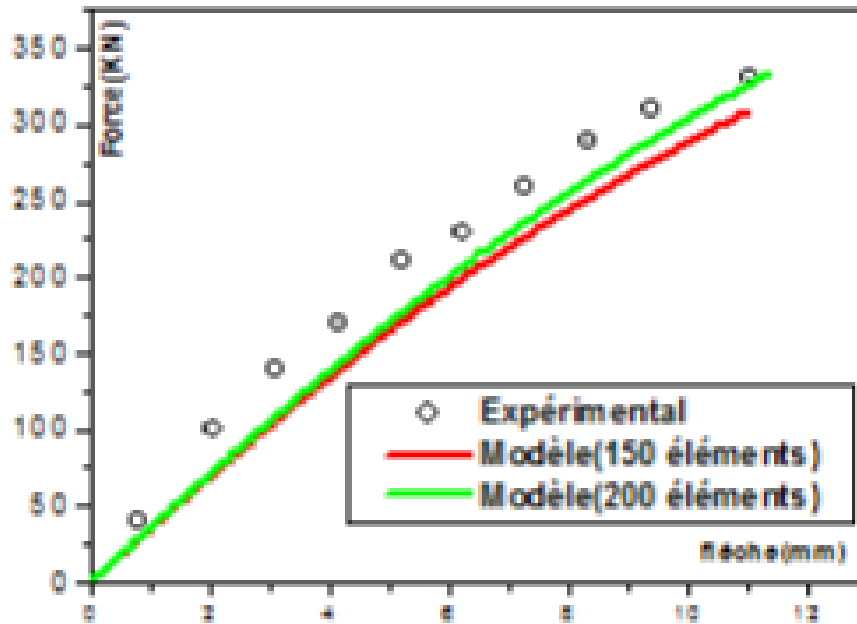


Figure .10. Résultat force-Flèche

V.4. Simulation de l'essai (Ng et al ,2011) [210]

- Les caractéristiques géométriques sont illustrées dans la figure.11 :

Dans cette simulation, on maille la moitié de la poutre en 360 éléments (30×12) rectangulaires à 8 nœuds, l'acier est maillé en élément linéique à 3 nœuds. Les résultats de notre modèle (Force-Flèche) sont comparés aux résultats expérimentaux tel que dans cette essai le pourcentage d'acier longitudinales est de l'ordre de 0.5%, ainsi le pourcentage mécanique d'acier est calculé par la formule :

$$\ell = \frac{Af_e}{bdf_{cj}} = 0.005 \times \frac{f_e}{f_{cj}} = 0.076$$

Les résultats du modèle sont donnés pour trois cas :

Cas (a) : le pourcentage d'acier longitudinal est égal au pourcentage d'acier transversal.

$$\ell = \ell_x = \ell_y = 0.076$$

Cas (b) :le pourcentage d'acier transversale est de $\ell_y = \ell / 2$

Cas (c) :le pourcentage d'acier transversale est de $\ell_y = 0.05$

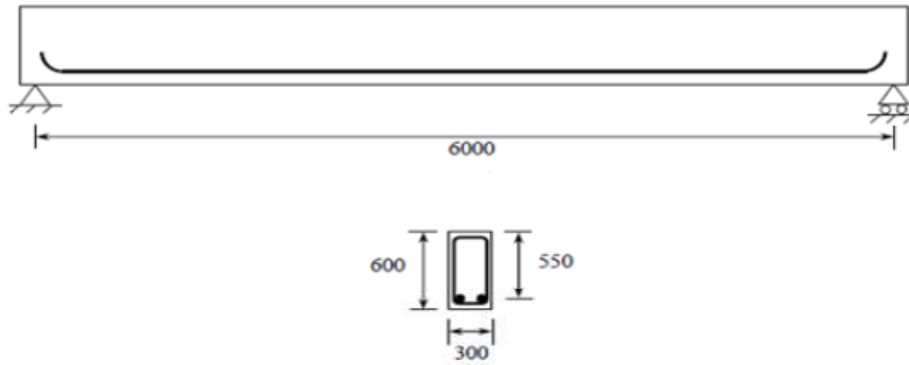


Figure.11. Caractéristiques géométriques (Ng et al ,2011).

Les caractéristiques mécaniques de la poutre étudiée sont données dans le tableau suivant :

	Caractéristiques du béton	Caractéristiques de l'acier
Résistance en traction	3 MPA	460 MPA
Résistance en compression	30 MPA	460 MPA
Module de Young	30000 MPA	200000 MPA
Coefficient de Poisson	0.2	0.0

Tab.4. Caractéristiques matérielles. (Ng et al ,2011)

Résultat du modèle :

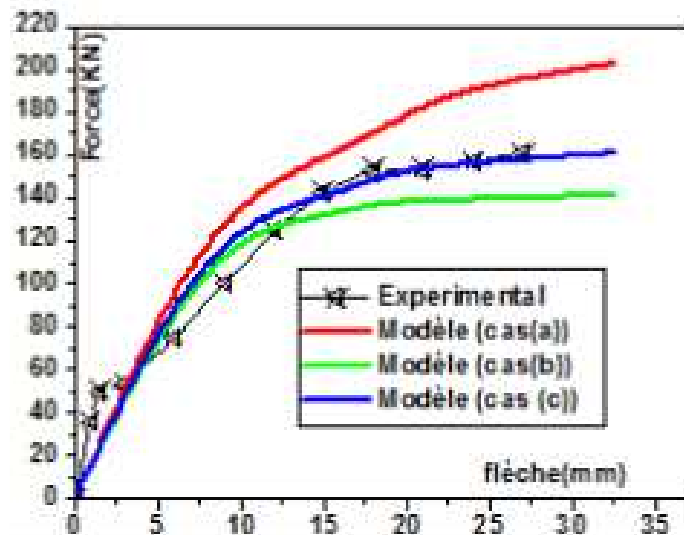


Figure .12 .Résultat force-Flèche

V.5. Simulation de l'essai réalisé par Hyo- Gyoung Kwak et Sun- Pil Kim, 2000 [211]

Il s'agit de simuler un essai de flexion quatre points de longueur : $3b = 270\text{cm}$ (voir figure .13), dans les caractéristiques mécaniques et géométriques sont donnés dans le tableau.5.

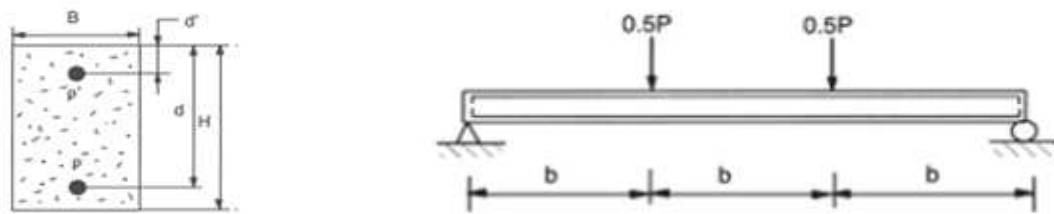


Figure .13. Caractéristique géométriques (Hyo- Gyoung Kwak et Sun- Pil Kim, 2000).

$E_c(\text{Kg/cm}^2)$	$E_s(\text{Kg/cm}^2)$	$f_c(\text{Kg/cm}^2)$	$f_y(\text{Kg/cm}^2)$	$\rho = A_{st}/Bd$	$\rho' = A_{st}'/Bd$	B(cm)
271578.6	1984067.4	323.6	3230.4	0.0062	0.0	15.24

H(cm)	d(cm)
30.48	27.23

Tab.5. Caractéristiques matérielles et géométriques

Résultat du modèle :

Le pourcentage mécanique d'aciers pour cet essai est de : $0.0062 \times \frac{f_y}{f_{cj}} = 0.062$

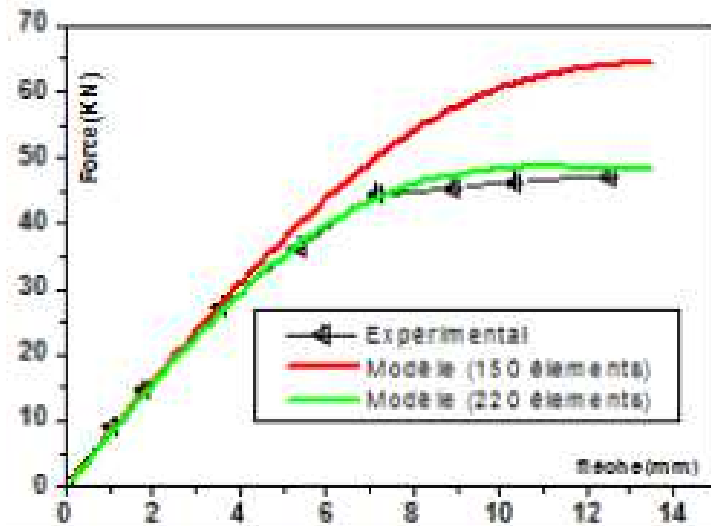


Figure .14 .Résultat force-Flèche

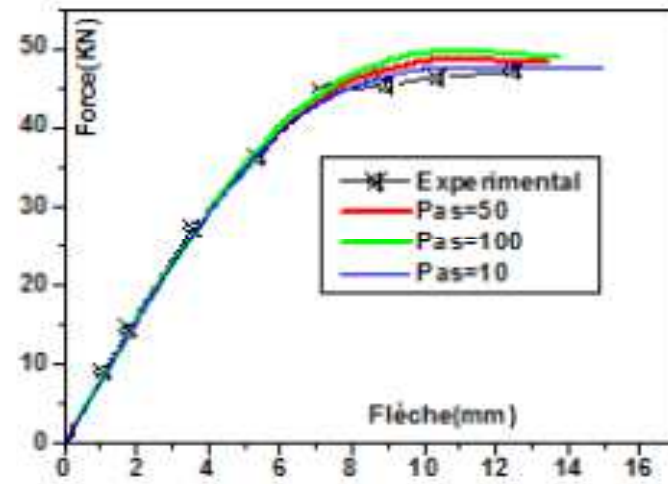


Figure.15. Effet du pas de chargement sur les résultats du modèle.

V.6. Poutre testée par Gaston J. R. et al (1972) [212-213]

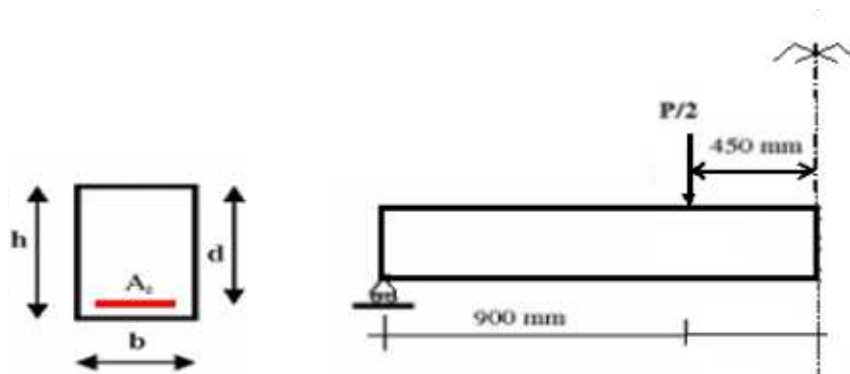


Figure.16. Caractéristiques géométriques (Gaston J. R. et al (1972)).

Les propriétés matérielles et géométriques utilisées sont données par les deux tableaux suivant:

Epaisseur	Hauteur	Hauteur utile	Longueur
$b = 152.40 \text{ mm}$	$H = 304.80 \text{ mm}$	$d = 272.30 \text{ mm}$	$L = 2.70 \text{ m}$

Tab.6. Propriétés géométriques (Gaston J. R. et al (1972)).

Module d'élasticité du béton	Coefficient de Poisson	Résistance du béton en traction
$E_c = 27100 \text{ MPA}$	$\nu = 0.167$	$f_t = 3.23 \text{ MPA}$
Module de Young des barres d'acier.	Contrainte d'écoulement des aciers	Pourcentage de ferrailage
$E_s = 1.98 \cdot 10^5 \text{ MPA}$	$f_Y = 323.6 \text{ MPA}$	$\rho_s = 0.0062$

Tab.7. Les propriétés matérielles (Gaston J. R. et al (1972)).

Résultat du modèle:

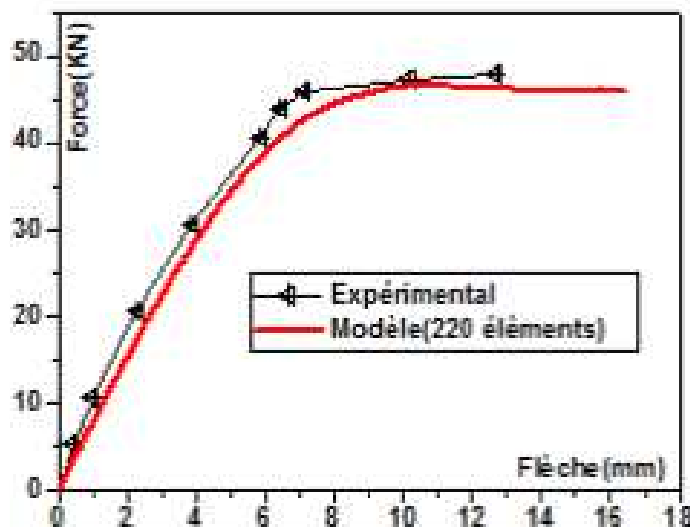


Figure .17 .Résultat force-Flèche

Nous constatons que notre modèle qui tient compte de l'adhérence parfaite entre l'acier et le béton donne des résultats proches de l'expérimental.

V.7. Simulation de l'essai de flexion 4 points [214-215]

Le but de cette simulation, est de connaitre l'effet du pourcentage d'acier longitudinal sur le comportement d'une poutre en flexion quatre points.

Les caractéristiques géométriques de la poutre sont illustrés dans la figure ci après (les dimensions sont données en centimètre).

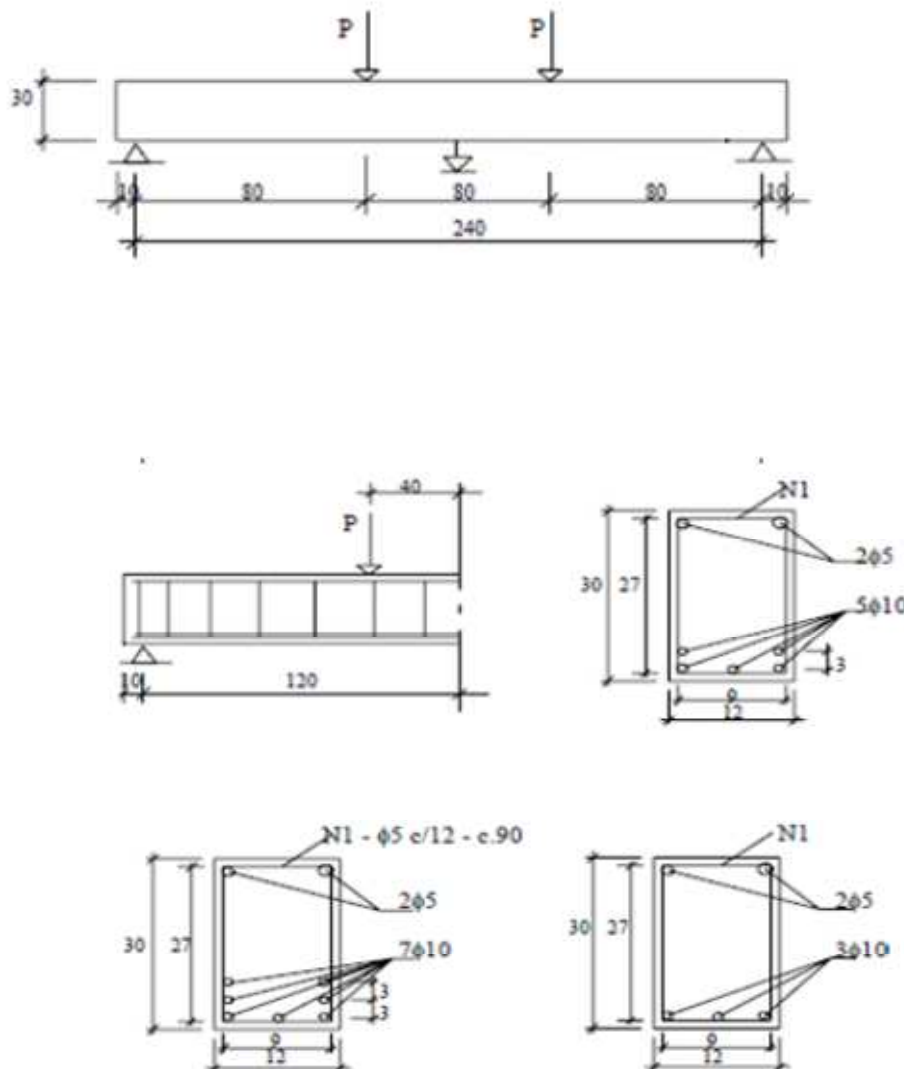


Figure.18. Caractéristiques géométriques [214-215]

Les caractéristiques mécaniques sont illustrées dans le tableau suivant :

	Caractéristiques du béton	Caractéristiques de l'acier
Résistance en compression	18.7 MPA	420 MPA
Module de Young	29200 MPA	196000 MPA
Coefficient de Poisson	0.2	0.0

Tab.8. Caractéristiques matérielles [214-215]

Les pourcentages mécaniques des trois poutres sont : $\ell_{3\phi 10} = 0.163$; $\ell_{5\phi 10} = 0.272$;

$\ell_{7\phi 10} = 0.381$.

V.8. Résultat du modèle :

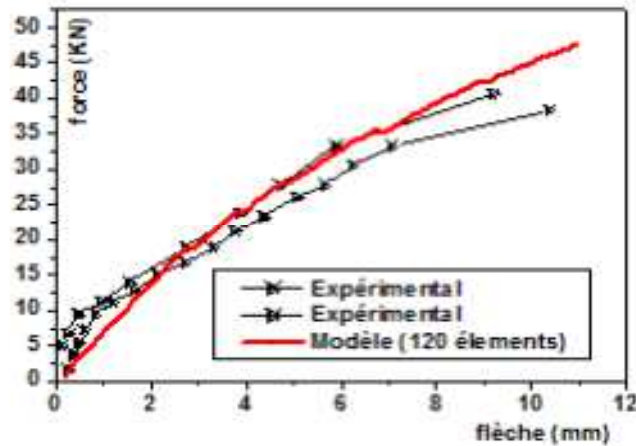


Figure .19 .Résultat force-Flèche (Poutre (3φ10))

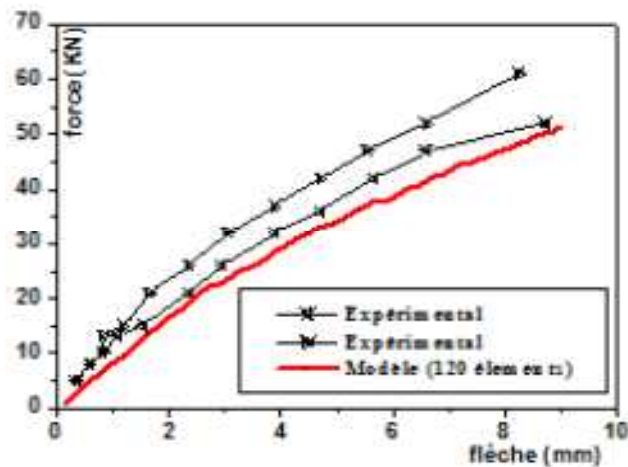


Figure. 20 .Résultat force-Flèche (Poutre (5φ10))

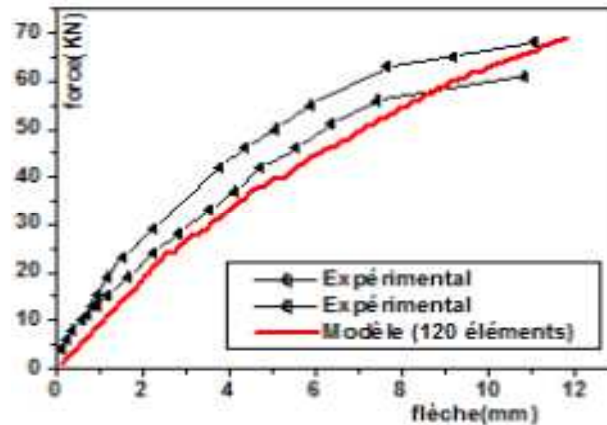


Figure .21.Résultat force-Flèche (Poutre (7φ10))

VI. Conclusion

- Le modèle adopté pour décrire le comportement non linéaire des structures en béton armé est très représentatif comparativement aux résultats expérimentaux (localement et globalement). Après avoir porté certaines remarques sur chaque simulation réalisée, une conclusion vient résumer les points essentiels de notre étude à savoir:
- Le coefficient de Poisson étant pris variable, n'influe au aucun cas sur les résultats force-flèche.
- Le pas de chargement aussi, n'a aucun effet sur les résultats, par contre l'effet du maillage influe considérablement sur la réponse (Force-Flèche).
- Le maillage dépend des dimensions de l'élément étudié, il reste comme perspective et un point important à définir. Le pourcentage d'acier transversal, influe directement sur les résultats.
- Le paramètre $a = \frac{\varepsilon_{ft}}{\varepsilon_{rt}}$ est en rapport avec la ductilité de l'élément déjà défini dans la

Partie. I. du chapitre.4 et il est aussi un facteur agissant sur la ductilité de l'élément fléchi. Notant que la limite à la rupture de l'acier agit aussi comme un point important dans la modélisation du comportement non linéaire des éléments fléchis en béton armé et ce jusqu'à la rupture.



CONCLUSION GENERALE



Conclusion générale

La mécanique de l'endommagement permet une modélisation fine des phénomènes liés à la dégradation du béton et en particulier, du béton armé. Les études numériques effectuées sur le comportement d'endommagement isotrope conduisent à des résultats assez satisfaisants aussi bien dans la description du comportement local que dans celle du comportement global. La mécanique de l'endommagement permet la description de l'ensemble de ces phénomènes par le biais des variables internes et permet donc de prédire les causes d'endommagement.

Pour prédire de façon réelle le comportement des structures, en général, le chargement appliqué est de type incrémental. Ce mode de chargement permet non seulement à la compréhension de la réponse structurale mais de connaître plusieurs phénomènes qui peuvent être envisagés au cours de ce chargement.

Lorsque ce chargement augmente, les microfissures se développent et se propagent en se connectant éventuellement entre elles pour former une macro-fissure au sein du matériau béton entraînant la rupture du celui-ci. Ce phénomène physique peut engendrer à l'échelle macrostructurale une diminution des contraintes accompagnée d'une augmentation des déformations. Cependant, pour la plupart des auteurs, on peut considérer à l'échelle macroscopique, que le matériau est initialement homogène et isotrope.

La variable de dommage proposée notée D_{tot} appliquée aux éléments en béton pour décrire leurs comportements non linéaires en uni-bi et tri-directionnel, sous chargement mécanique statique et monotone, combiné avec le modèle à treillis adoucissant d'angle variable, proposée par VECCHIO et COLLINS (1986), et en utilisant une loi élasto-plastique avec écrouissage de l'acier, nous a permis de décrire convenablement le comportement non linéaire des structures en béton armé.

La variable de dommage obtenue est unique en un point, valable quelque soit l'état de contrainte (uni-bi et tri directionnel) ; dépend de la seule variable Observable (ε) et dépend uniquement des différents dommages créés dans les trois directions principales de déformations. S'est aussi une variable qui représente le dommage totale et ceci quelque soit l'état de contraintes appliqué.

Pour approcher au mieux le comportement réel du béton, nous considérons ici le coefficient de Poisson et le module d'Young dépendant du dommage. L'effet de la contrainte hydrostatique fait évoluer le module de compressibilité. Le module de compressibilité est donc en rapport avec la variation de volume et qu'il est indépendant de la variable qui affecte le module de Young. La loi d'évolution du coefficient de Poisson est imposée par l'existence d'un dommage volumique.

La simulation faite sur des éléments en béton et en béton armé sous chargement monotone pour décrire le comportement réel du matériau béton, et par comparaison avec les résultats expérimentaux d'une part et avec le modèle le plus rependu qui est celui de MAZARS, vient de prouver la performance de notre modèle dans sa simplicité d'utilisation, moins de paramètres et plus réaliste (introduction de la variation des caractéristiques mécaniques du matériau dans le domaine non linéaire).

Enfin, nous considérons que l'application du modèle est à son premier pas et donne plusieurs perspectives pour l'avenir à savoir :

- Une étude paramétrique et expérimentale reste très utile pour fixer les valeurs du paramètre $\alpha = \varepsilon_{rt} / \varepsilon_{ff}$, valeur à introduire dans le logiciel de calcul est qui dépend de la ductilité du béton armé en traction (essais sur tirants).
- Introduction de la contrainte de cisaillement dans la simulation du comportement locale des structures en béton et en béton armé.
- Remédier à l'effet du maillage, imposer par le code élément fini utilisé.
- Application du modèle pour montrer son efficacité de décrire le comportement unilatéral du béton, ainsi que le comportement hydrostatique et sous confinement, aussi on peut envisager de décrire les phénomènes qui se produisent à long terme à savoir : le retrait, le fluage et d'autre comportement, comme sous haute température ou dégradation de ce dernier sous corrosion des armatures ou sous attaque chimique.....
- Enfin, application du modèle sur des structures en matériaux composites.



Bibliographie



Bibliographie

- [1] Wei CHEN. *Etude expérimentale de la perméabilité du béton sous conditions thermiques et hydriques variables*. Thèse de doctorat (L'école centrale de Lille). (2011).
Guide pratique du béton Concevoir et mettre en œuvre des bétons durables
- [2] Holcim (Suisse) SA. *Guide pratique du béton Concevoir et mettre en œuvre des bétons durables*. Marketing et Support Technique, 5 édition 2009.
- [3] F. de Larrard,(2000). *Structures granulaires et formulation des bétons. Laboratoire central des ponts et chaussées*, Paris cedex 15- Ouvrage d'art OA 34- ISSN 1161-02AX.
- [4] Thomas de Larrard. *Variabilité des propriétés du béton : Caractérisation expérimentale et modélisation probabiliste de lixiviation*. Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur de l'école normale supérieure de Cachan, soutenue le 27 septembre 2010.
- [5] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, A. Benallal, R.Desmorat : *Mécanique des matériaux solides*, (cours Masters – Ecoles d'ingénieurs- Troisième édition), Dunod, Paris, ISBN 978- 2 -10-051623- 0.(2009)
- [6] Jacques Besson, Georges cailletaud, Jean-louis chaboche, Samuel Forest. *Mécanique non linéaire des matériaux* (Mai 2001).
- [7] M. Sargin. *Stress-Strain relationship for concrete and the analysis of structural concrete sections*. Solid Mechanics division. University of Waterloo Canada, (1971).
- [8] A. Grelat. *Comportement non linéaire et stabilité des ossatures en béton armé*.Annales de l' I.T..B.T.P. N° 234,(1978).
- [9] P. Royis. *Mécanique des milieux continus (cours, exercices et problèmes)*.Presses universitaires de Lyon,(2005). -349p.
- [10] Coirier, Jean. *Mécanique des milieux continus* - Paris : Dunod,(2001). - 301p.
- [11] Sami, A., Klink, (1975).*Poisson's Ratio Variations in Concrete*. In Experimental Mechanics, pp. 139-141.
- [12] Murray D.W. *Octahedral based incremental stress-strain matrices*. J . Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 105 EM4, PP 623-641,(1979).
- [13] Niels Saabye ottosen, (1980). *Non linear finite element analysis of concrete structures*, Riso-R- 411. National laboratory, Denmark. ISBN 87-550-0649-3.ISSN 0106- 2840.
- [14] Atheel E. Allos., L.H.Martin, (1981). *Factors Affecting Poisson's Ratio for Concrete*. Building and Environment, Vol. 16, No. 1, pp. 1 9. Pergamon press Ltd.Printed in Great Britain.
- [15] Chen, W.F. 1982. *Plasticity in reinforced concrete*. Book published by McGraw-Hill, New York, 474 pp.

Bibliographie

- [16] Ramtani,S, Y. Berthaud and J. Mazars. *Orthotropic behavior of concrete with directional aspects: modeling and experiments*. Nuclear Engineering and Design 133(1992) 97-111. North-Holland.
- [17] Selby R.G, Vecchio F.J. *A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids*. Revised manuscript accepted December 11.Can.J. Civ. Eng.24; 460-470 (1997).
- [18] Mirmiran, A., Shahawy, M. *Dilation characteristics of confined concrete*. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, vol. 2, pp. 237-249,(1997).
- [19] Syed Ishtiaq Ahmed, Tada-aki Tanabe. *Development of concrete constitutive Lawesbased on 3D Lattice equivalent continuum*. J.Materials. Conc. Struct. Parements. JSCE,No.725/V-58,293-304, (2003).
- [20] Ferretti, E., (2004). *On Poisson's ratio and volumetric strain in concrete*. International Journal of Fracture, vol. 126, pp. 49-55.
- [21] Hyuk-Chun Noh , Hyo-Gyoung Kwak. *Response variability due to randomness in Poisson's ratio for plane-strain and plane-stress states*. International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 1093–1116.
- [22] Ding Faxing Yu Zhiwu. *Strength criterion for plain concrete under multiaxial stress based on damage Poisson's ratio*. Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 19, No. 4, December, (2006).
- [23] Hui Song , Jiankang Chen. *Effect of damage evolution on Poisson's,ratio of concrete under sulfat attack*. Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 24, No. 3, ISSN 0894-9166,(2011).
- [24] Alliche,A, Dumontet.H. *Anisotropic model of damage for geomaterials and concrete*, International journal for numerical and analytical methods in geomechanics. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech, 35 :969-979.(2011)
- [25] Reynouard, J.M.,Cabot,G.P, (2005).*Comportement mécanique du béton*. Publication *Hermes science*. Lavoisier, Paris. ISBN 2-7462-0980-2. Ouvrage 382 p
- [26] Mazars J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, France, (1984).
- [27] Mazars, J., Kotronis, P., Ragueneau, F. et Casaux, G. (2006). *Using multifiber beams to account for shear and torsion : Applications to concrete structural elements*. International Journal of Solids and Structures, 195:7264–7281.
- [28] F. Hamon, J. Mazars: *Modèle d'endommagement 3D Pour le béton sous chargement cyclique* (XXXe Rencontres AUGC-IBPSA Chambéry, Savoie, 6 au 8 juin 2012).

Bibliographie

- [29] Christian La Borderie,(2003). *Stratégies et Modèles de Calculs pour les Structures en Béton*. Thèse présentée pour l'obtention de l'habilitation à diriger les recherches, université de Pau et des Pays de l'Adour, France.
- [30] Frank J. Vecchio, Michael P. Collins. *The Modified compression – field theory for reinforced concrete elements subjected to shear*. ACI Journal, technical paper (March – April 1986),title n° 83-22.
- [31] CEB. *High Performance concrete : Recommended extensions to the Model Code 90- Research needs* . Bulletin d'information N° 228-July 1995.
- [32] Hsu, T.C., and others (1963). *Microcracking of plain concrète and the shape of the stress strain curve*. Journal of American concrete institute, proceedings, Vol. 60, 209-224.
- [33] Benouniche, S.(1979). *Modélisation de l'endommagement du béton hydraulique par microfissuration en compression*. Thèse de 3 ème cycle. Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).
- [34] Bischoff, P. H. et Perry, S. H. (1991). Compressive behaviour of plain concrete loaded in uniaxial compression. *Materials and Structures*, 24:425–450.20
- [35] D. J. HAN , W. F. CHEN ; " Strain - space plasticity formulation for hardening - softening materials with elastoplastic coupling " , *International Journal of Solid Mechanics* , Vol.22, N°8, 1986 .
- [36] M.D.Kotsovos (1983), *Effect of testing techniques on the post – ultimate behavior of concrete in compression* .*Matériaux et construction* volume 16, issue 1, pp 3- 12.
- [37] Ramtani, S., (1990).*Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. Thèse de doctorat, University of Paris 6, France.
- [38] ERIK VAN GEEL, (1998), *Concrete behavior in multiaxial compression . Experimental research*. ISBN 90- 6814 – 548 -7
- [39] J.M. Torrenti, G.P.Cabot, J.M. Reynouard,(2010). *Mechanical behavior of concrete*. ISBN: 9781848211780, Hardback 448 pp
- [40] M.D.Kotsovos, (2013). *Compressive force -Path method- (Unified ultimate limite – state , Design of concrete structures)*. Springer science of business media- Bilding construction- 237 pages.
- [41] Hung Ung Quoc. *Théorie de dégradation du béton et développement d'un nouveau modèle d'endommagement en formulation incrémentale tangente*. Doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2003.

Bibliographie

- [42] BAEL 91 révisées 99, *Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et construction en béton armé suivant la méthode des états limites*. CD-DTU V2 - Edition 150 - Décembre 2007.
- [43] BPEL 91 révisées 99 : *Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites*. Décret n° 99-28 du 15 février 1999.
- [44] Terrien. M. *Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction*, Bulletin de liaison Ponts et Chaussées, N° 105, pp. 65- 72, (1980).
- [45] Peterson P.E. , *Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials*. Report TVBM- 1006; Lund institute of technology, Sweden, (1981).
- [46] Hughes, B. P., and Chapman, G. P. (1966): *The complete stress- strain curve for concrete in direct tension*. Rilem Bull. 30, pp. 95-97.
- [47] C. GIRY, M. BOTTONI, F. DUFOUR, P. KOTRONIS, J. MAZARS. *Endommagement et fissuration du béton armé : passage continu – discret*. 19 ème Congrès Français de Mécanique Marseille, 24-28 (aout 2009).
- [48] K. Malkawa, A. Pimammas, H. Okamura (2003). *Nonlinear mechanics of reinforced concrete*. Kindle edition – London and New York -768 pages.
- [49] CHRISTIAN LA BORDERIE, OLIVIER MAUREL, MOHAMMED MATAALLAH, *Couplage endommagement fissuration : applications aux calculs de structures en béton armé* 19 ème Congrès Français de Mécanique Marseille, 24-28 (aout 2009).
- [50] Saad .M. (2011). *Influence du pourcentage d'acier sur le comportement post- fissuration du béton- armé en traction*. Thèse de Doctorat, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [51] Chang-Koon Choi and Sung-Hoon Cheung. *Tension Stiffening Model For Planar Reinforced Concrete Members*. Computers et structures. Vol. 59. No. 1, pp. 179- 190, (1996).
- [52] Norberto Dominguez Ramirez, *Etude de la liaison acier-béton : de la modélisation du Phénomène à la formulation d'un élément fini enrichi "Béton arme"*, thèse de Doctorat de l'école normale supérieur de Cachan (2005),
- [53] Tran The Truyen. *Contribution à l'étude du comportement mécanique et hydromécanique du béton*. Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en sciences de l'Ingénieur. Faculté des sciences appliquées, Université de Liège(2009).
- [54] L'Hermite, R. (1973). *Influence de la dimension absolue sur la résistance à la flexion*, annales ITBTP, n° 309-310, p. 39-41.

Bibliographie

- [55] Bazant, Z. P. et Prat, P. C. (1987). *Microplane model for brittle-plastic material*, Report n° 87-7/498, Center for concrete and geomaterials, Northwestern university, Evanston.
- [56] Rachid Berdaoui. *Identification et analyse de l'endommagement par fatigue des matériaux granulaires à base polymère*. Thèse présentée pour obtenir le grade de docteur de l'université du MAINE (2010).
- [57] José Ramon Orengo. *Modélisation numérique des structures en béton armé*. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées (1990).
- [58] Kupfer, H.B.; Gerstle, K.H., (1973), *Behaviour of brittle material under biaxial stresses*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.99, n°4, pp. 853-866.
- [59] H. Kupfer, H.K. Hilsdorf, H. Rüsçh: *Behavior of concrete under biaxial stresses*. Journal of the American Concrete Institute 66, 656–666. (1969)
- [60] Fib Fédération internationale du béton. *Code-type models for concrete behaviour: State-of-the-art Report*. (2013) - Concrete - 196 pages
- [61] Richart, F. E., Brandtzaeg, A., and Brown, R. L. (1928). *A study of the failure of concrete under combined compressive stresses*. Bulletin 185 Univ. of Illinois Engineering Experimental Station, Urbana-Champaign, IL
- [62] Balmer, G. G. (1949). *Shearing strength of concrete under high triaxial stress-computation of Mohr's envelope as a curve*. Struct. Res. Lab. Rep. SP-23, Denver, Colo., October.
- [63] Jan G.M Van Mier (2012). *Concrete Fracture : A Multiscale approach*. CRC Press, Oct 25, 2012- Technology and Engineering, 379 pages.
- [64] B.M. Luccioni, V.C. Rougier: *A plastic damage approach for confined concrete*. Computers and Structures 83 (2005) 2238–2256.
- [65] Tao. Xiaoya, Phillips. David V: *A simplified isotropic damage model for concrete under bi-axial stress states*. Department of Civil Engineering, University of Glasgow, Glasgow G12 8LT, UK. Cement et Concrete Composites 27 (2005) 716–726.
- [66] LAM L., TENG J.G., *Design- Oriented stress- strain model for FRP- Confined concrete in rectangular columns*. Journal of reinforced Plastics and composites (2003): 22; pp 1149-1186.
- [67] Patrick Paulte. *Structures en béton armé* . Presses inter polytechnique, (2011) – reinforced concrete- 897 pages.
- [68] Zdenek P. Bazant, J. Planes. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. Technology et engineering, 640 pages (1997).

Bibliographie

- [69] Xuan Hong Vu, Yann Malecor, Laurent Daudeville, Eric Buzaud(2008). *Comportement du béton sous fort confinement : effet du rapport eau /ciment*. Laboratoire Sols, Solides, Structures-Risques. Université de Grenoble. B.P.53-384041 Grenoble Cedex 9, France.
- [70] Thomas Gabet, Yann Malécot, Laurent Daudeville. *Triaxial behaviour of concrete under high stresses: Influence of the loading path on compaction and limit states*. Laboratoire Sols, Solides, Structures - Risques, Université de Grenoble, CNRS,BP53, F-38041 Grenoble cedex 9, France(Mars 2007.)
- [71] Van Tieng TRAN. *Structures en béton soumises à des chargements mécaniques extrêmes : Modélisation de la réponse locale par la méthode des éléments discrets*. Thèse de Doctorat de l'université de Grenoble. (juillet 2011).
- [72] Gabet Thomas (2006). *Comportement triaxial du béton sous fortes contraintes : influence du trajet de chargement*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier.
- [73] Baris Binici. *An analytical model for stress–strain behavior of confined concrete*. Engineering Structures 27 (2005) 1040–1051.
- [74] E. Montoya, F.J. Vecchio, S.A. Sheikh. *Numerical evaluation of the behaviour of steel- and FRP-confined concrete columns using compression field modeling*. Engineering Structures 26 (2004) 1535–1545.
- [75] Charles Savard (2002). *Détermination du taux d'armature de confinement pour les poteaux en béton ordinaire et en béton à haute performance*. Mémoire de maîtrise des sciences appliquées (Génie- Civil). Sherbrooke (Quebec), Canada.
- [76] Zhong Tao, Zhi-Bin Wang, Qing Yu. *Finite element modelling of concrete-filled steel stub columns under axial compression*. Journal of Constructional Steel Research 89 (2013) 121–131.
- [77] Heon-Soo Chung , Keun-Hyeok Yang , Young-Ho Lee , Hee-Chang Eun. *Stress–strain curve of laterally confined concrete*. Engineering Structures 24 (2002) 1153–1163.
- [78]BAZANT, Z.P., OZBOLT, J. Nonlocal microplane model for fracture, damage, and size effect in structures. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1990, vol. 116, n°11, pp. 2485-2505.
- [79] ROTS, J.G., NAUTA, P., KUSTERS, G.M.A., BLAAUWENDRAAD, J. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. *Heron*, 1985, vol. 30, n° 1, pp. 1-48.
- [80] Zdenek P. Bazant, Pere C. Prat. (1987). *Microplane model for brittle- plastic material : I. Theory*. Journal of engineering mechanics, vol. 114, paper N° 22823.
- [81] Mazars J. *L'effet d'échelle dans les structures en béton*. Revue française de géotechnique (1989), PP 15-24 (ISSN : 0181- 0529).

Bibliographie

- [82] VonK ,R.A. (1993). *A micromechanical investigation of softening of concrete loaded in compression*, Heron publication, Delft university of technology, the netherland, vol.38,N°3.
- [83] Hermite, R. (1973). *Influence de la dimension absolue sur la résistance à la flexion*, annales ITBTP, n° 309-310, p. 39-41.
- [84] ZdeneK P Bazant , (2004). *Introduction aux effets d'échelle sur la résistance des structures*. Lavoisier, 2004. ISBN 2-7462-0904-7.
- [85] G. CAILLETAUD, M. TIJANI, M. BLETRY, E. HERIPRE, A.ROUABHI. *Mécanique des matériaux solides*. Notes de cours (Mars 2007).
- [86] Dominique Francois, André Pineau, André Zaoui. *Comportement Mécanique des matériaux. Viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact*. Hermès, Paris, (1993).
- [87] J.Lemaitre, J.L.Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*.Paris (Juin 1985).
- [88] G. KOENIG , H. DUDA ; *Concrete in tension* , CEB, Bulletin d'information. N°210, V.1 .(Juillet 1991)
- [89] Base G. D. (1978), *Short Course on Design of Concrete Structures for Serviceability*, Lecture Notes, Concrete Institute of Australia, Sydney.
- [90] Loo, Yew Chaye, (1990). *Reinforced Concrete Analysis and Design with Emphasis on the application of AS3600* , University of Wollongong Press, Wollongong, Australia
- [91] Warner, R. F., Rangan, B. V., Hall, A. S., and Faulkes, K. A.(1998). *Concrete structures*, Addison–Wesley Longman, Australia Pty Lim-ited, Melbourne, Australia.
- [92] Tania CROSTON.*Etude expérimentale du comportement d'une poutre en béton armé en flexion 3 points réparée par matériaux composites (Approche probabiliste)*. Thèse de doctorat, spécialité mécanique, Ecole nationale supérieure d'arts et métiers, centre de Bordeaux.(2006)
- [93] Martin LAVICTOIRE. *Comportement en effort tranchant des poutres en béton armé de grandes dimensions renforcées de fibres*.Mémoire de maitrise des sciences appliquées (Génie-Civil). Université de SHERBROOKE.
- [94] NAWY R,(1988). *Concreto reforzado Un enfoque basico*, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., Mexico, 743 p. ISBN 968, 880-075-9.
- [95] GONZALES CUEVAS O., ROBLES F. *Aspectos fundamentales del concreto reforzado*, Editorial LIMUSA S. A., Mexico, 2002, p.757. ISBN968-18-4981-7.

Bibliographie

- [96] ENV 1992-1-1 (norme NF P 18-711). Eurocode 2, *calcul des structures en béton*, document d'application nationale, partie 1-1 : règle générales et règles pour les bâtiments, AFNOR, décembre 1992.
- [97] Popovics, S., 1973, "A Numerical Approach to the Complete Stress-Strain Curve of Concrete", *Cement and Concrete Research*, V. 3, No. 4, pp. 583-599.
- [98] Desayi, P. and Krishnan, S., Equation for The Stress-Strain Curve of Concrete, *ACI Journal, Proc.*61(3): 345-350 (1964)
- [99] Neville, A.M., *Properties of Concrete*, 4th Edition, Pearson Education Limited, 1995, 844 p.
- [100] MacGregor, J.G., *Reinforced concrete: Mechanics and design*, 3rd Edition, 1997, 393 p.
- [101] Nawy, E.G., *Prestressed Concrete, A Fundamental Approach*, 4th Edition, Prentice Hall, 2003. 939 p.
- [102] VIRLOGEUX M. *Justification réglementaire des pièces soumises aux effets du second ordre selon les principes de calculs aux états limites* : problèmes liés à la sécurité. Annales de l'ITBTP, Série Méthodes de Calcul, Mars 1978.
- [103] VIRLOGEUX M., M'RAD A. *Etude d'une section en élasticité non linéaire. Application aux sections en béton armé ou précontraint et aux sections mixtes*, Annales de l'ITBTP, n°444, pp 3.73, 1986.
- [104] VIRLOGEUX M., *Second order analysis of concrete cables stayed bridges*, Seminar on cable stayed bridges, India, 1988.
- [105] Rüsç H., "Research toward a general flexural theory for structural concrete", *ACI Journal* vol. 57, n° 1, p. 1-28, 1960.
- [106] Quast U., "Rechenansätze in Formeiner Spannungsdehnungsbeziehung für das Mitwirken des Betons in der gerissenen Zugzone von Stahlbeton querschnitten", Bericht aus dem Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der T.U Braunschweig, 64pp., 1980
- [107] Espion B., «*Contribution à l'analyse non linéaire des ossatures planes. Application aux structures en béton armé*», Thèse de Doctorat ès sciences, vols I et II, Université libre de Bruxelles, Belgique, 1986.
- [108] Zhen-Hai G. and Xiu-Qin Z., «*Investigation of complete stress-deformation curves for concrete in tension*», *ACI Materiel Journal*, July – August, 1987
- [109] Scanlon A., «*Time-Dependent Deflexion Concrete Slabs*», thesis presented to the University of Alberta, at Edmonton, Alberta, Canada, in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, in 1971.

Bibliographie

- [110] Scanlon A., Murray D.W., «*Time-dependent reinforced concrete slab deflections*», A.S.C.E, Journal of Structural Division, Vol 100 NoST9, pp 1911-1924, September 1974.
- [111] Gilbert R.I., Warner R.F., «*Tension stiffening in reinforced concrete slabs*», A.S.C.E., Journal of Structural Division, V. 104, ST12, pp.1885-1900, Dec. 1978.
- [112] Lin C. S., Scordelis A. C., «*Nonlinear analysis of R.C shells of General Form*», A.S.C.E., Journal of Structural Division, Vol. 101, No ST3, pp 523-538, Mar. 1975.
- [113] Bergan P. G., Holland I., “*Non linear finite element analysis of concrete structures*”, Comp. Meth. App. Mech. Engng. , 17/18, 443-467, 1979.
- [114] Kulicki J. M., Kostem C. N., «*Inelastic response of prestressed concrete beams*», Mem. A.I.P.C., 35(II), 101-112, 1975
- [115] Gilbert R.I., Warner R.F., «*Tension stiffening in reinforced concrete slabs*», A.S.C.E., Journal of Structural Division, V. 104, ST12, pp.1885-1900, Dec. 1978.
- [116] Belarbi A., Hsu T. T. C., «*Constitutive laws of concrete in tension and reinforced bars stiffened by concrete*», ACI Structural Journal, pp.465-474, July-August 1994
- [117] Chang, G. A., and J. B. Mander. 1994. *Seismic energy based fatigue damage analysis of bridge columns: Part I — evaluation of seismic capacity*. NCEER Technical Report. No. NCEER– 94 – 0006. State University of New York. Buffalo, New York.
- [118] Francois Hamon, (2013). *Modèle d'endommagement de Mazars*, Fascicule r7.01,Code_Aster (Modélisation pour le genie-Civil et les géomatériaux).
- [119] Olivier Gagliardini. *Cours de Béton Armé*. ;IUP Génie Civil et Infrastructures, UJF-Grenoble I (Année 2004/05)
- [120] J. G. MacGregor, Fred Michael Pearce Bartlett , (2000),*Reinforced concrete: Mechanics and Design*. Prentice Hall Canada, 1042 pages.
- [121] Peter J. 1964. "Zur Bewehrung von Scheiben und Schalen fur Hauptspannungen Schiefwinklig zur Bewehrungsrichtung". Dr. Ing. Dissertation, T.H. Stuttgart.
- [122] HSU.Thomas T.C. “*Non linear Analysis of concrete membrane elements*”. ACI structural journal / Septembre – October 1991 .
- [123] Pang, X.B. and Hsu, T.T.C. (1995). *Behavior of reinforced concrete membrane elements in shear*. Structural Journal of the American Concrete Institute, 92-6, 665-679.
- [124] Hsu, T.T.C. and Zhang, L.X. (1996). *Tension stiffening in reinforced concrete membrane elements*. Structural Journal of the American Concrete Institute. 93-1.

Bibliographie

- [125] Zhu, R.R. H.; Hsu, T.T.C.; Lee, J.Y. *Rational shear modulus for smeared crack analysis of reinforced concrete*. *ACI Struct. J.* 2001, 98, 443–450.
- [126] Hsu, T.T.C.; Zhu, R.R.H. *Poisson effect in reinforced concrete membrane elements*. *ACI Struct. J.* 2002, 99, 631–640.
- [127] Ohomori, N., Tsubota, H., Inoue, N., Kurihara K. and Watanabe, S., *Reinforced concrete membrane elements subjected to reversed cyclic in-plane shear stress*, Nuclear Engineering and Design, Vol. 115, 1989, pp. 61-72.
- [128] Collins M.P. 1978. "Toward a rational theory for RC members in shear". *J. Struct. Eng.*, ASCE, 104(4), 649-666.
- [129] Hsu T.T.C. 1988. "Softened truss model theory for shear and torsion". *ACI Structural Journal*, November-December, pp 624-635
- [130] Collins, M. P., and Mitchell, D., 1991. *Prestressed Concrete Structures*, Prentice- Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 766 pp.
- [131] P. Wriggers, S.O. Moftah . "Mesoscale models for concrete: Homogenisation and damage behaviour". *Finite Elements in Analysis and Design* 42 (2006) 623 – 636.
- [132] Piti Sukontasukkul, Pichai Nimityongskul, Sidney Mindess . "Effect of loading rate on damage of concrete". *Cement and Concrete Research* 34 (2004) 2127–2134.
- [133] Claudia Comi, Umberto Pergo . "Fracture energy based bi- dissipative damage model for concrete". *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001) 6427-6454.
- [134] Serge Dubigeon. « *Mécanique des milieux continus* », second édition 1998. Ecole Centrale De Nantes, ISBN : 2-912985-00-5, 524 pages.
- [135] Francois Sidoro. *Mécanique des milieux continus*. Ecole d'ingénieur. Ecole Centrale de Lyon, 1980, pp.166.
- [136] Nicolas MOËS. *Cours de mécanique des milieux continus*. École Centrale de Nantes, Septembre 2003.
- [137] S. Drapier, *Mécanique des Structure et Approximations Numériques*, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, février 2014.
- [138] Jean Coirier, Carole Nadot-Martin. *Mécanique des milieux continus, Cours et exercices corrigés*, 4^{ème} édition. Collection: Sciences Sup, Dunod, 2013 - 512 pages
- [139] Francisco DOS REIS, *Homogénéisation automatique de milieux discrets périodiques. Applications aux mousses polymères et aux milieux auxétiques*. Thèse Présentée pour l'obtention du grade de Docteur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 2010.

Bibliographie

- [140] Cailletaud. G, Tijani. M, Bletry. M, Heripre. E, Rouabhia. A. « *Mécanique des matériaux solides* ». Notes de cours, école nationale supérieure des mines de Paris, Mars 2007.
- [141] Sylvain Drapier. *Méthodes de Changement d'Échelle : principe de l'homogénéisation et méthodologie*. Ecole national supérieur des mines, Saint-Étienne. Mécanique et Procédés d'Elaboration directe, centre SMS.
- [142] Francois Frey et Jaroslav , Jirousek. « Analyse des structures et milieux continus , Méthode des éléments – finis » (volume 6 – USA – 1999).
- [143] Daniel Choi, *Méthode des éléments-finis par l'exemple*. LMNO. Groupe Mécanique Modélisation Mathématique et Numérique, Université de Caen, Cedex, France. Version Avril 2010.
- [144] Jean-Louis Batoz, G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis: Solides élastiques*, Presses Université Laval, 1990, 458 pages, ISBN : 2763772528, 9782763772523.
- [145] Alexandre Ern, *Aide- mémoire éléments finis*, éditeur : Dunod, (2006) ; ISBN : 9782100073030
- [146] Vincent Manet, *Méthode des éléments finis, Vulgarisation des aspects mathématiques et illustration de la méthode*.(2013)
- [147] Ammar Khenane . « *Méthode des éléments finis* (Enoncé des principes de base) ». Edition (1997)
- [148] Roland Fortunier, *Comportement Mécanique des Matériaux*, Ecole Nationale Supérieure des Mines 158 cours Fauriel 42023 Saint-Etienne cedex 2.
- [149] William A.Nash, *Résistance des matériaux*. Editeur : Mc Graw Hill, 01/01/2000 (4e édition), EAN13 : 9782704213344, 474 pages
- [150] Arnaud Delaplace, Fabrice Gatuingt, Frédéric Ragueneau. *Aide –mémoire, Mécanique des structures, Résistance des matériaux*.Sciences sup, Dunod, Paris, 2008, ISBN 978-2-10-053958-1.
- [151] G.R. Nicolet, *Résistance des matériaux en conception mécanique*, Ecole d'ingénieurs de Fribourg (2007).
- [152] M. Olagnon Christian , *Cours élasticité et résistance des matériaux*, Version 2009,cours 4SGM.
- [153] Guilhem MOLLON, *Mécanique des milieux continus*, séance 6 : Contraintes, Polytech Grenoble, GEO3 2012-2013.

Bibliographie

[154] Thomas , *GMÜR* . « *Méthode des éléments finis : en mécanique des structures* ».PPUR Presses polytechniques et universitaires romandes, 2000, 252 pages. ISBN 288074461X, 9782880744618.

[155] Karl-Eugen Kurrer, *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, 2012, 848 pages.

[156] Jean-Christophe Cuillière, *Introduction à la méthode des éléments finis - Cours et exercices corrigés: Cours et exercices corrigés*, Dunod, 2011, 296 pages.

[157] Alexandre Ern, Jean-Luc Guermond, *Éléments finis: théorie, applications, mise en œuvre*, Springer Science & Business Media, 2002, 430 pages.

[158] Gouri Dhatt, Gilbert Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Presses Université Laval, 1981, 543 pages.

[159] Takéo Takahash, *Analyse Numérique*, Polycopié rédigé par Michel Pierre et Antoine Henrot, Cours électif CE33, Semestre S7 : 2013-2014 Année 2013-2014, Ecole des Mines de Nancy.

[160] Kjell Magne Mathisen, *Solution Methods for Nonlinear Finite Element Analysis*, Norwegian University of Science and Technology, Lecture 11: Geilo Winter School - January, 2012.

[161] David Dureisseix, *Méthodes numériques appliquées à la conception par éléments finis*. DEA. ENS cachan - Université de Montpellier 2, 2008, pp.98.

[162] D. R. J. Owen, E. Hinton, *Finite elements in plasticity, theory and practice*, ed. Pineridge Press Limited, 1980.

[163]- Mathies, H. and Strang, G. « *the solution of non linear finite element equations* ». International journal for numerical methods in engineering, vol.14, 1979, PP1613-1626.

[164] Vladimir Ivančo. “*Nonlinear finite element analysis*”, Technical University of Košice, Slovakia, June 2011.

[165] K. Veroy-Grepl, *Numerical Methods for Engineers*, Achen Institute for Advanced Study in Computational Engineering Science. Winter Semester 2010/11.

[166] Appelet L2-2/1. « *Etude bibliographique sur la modélisation de l'endommagement des bétons* ». Agence nationale de la recherche (ANR).Date des versions révisées (26/06/2009).

[167] R. Ince , A. Arslan , B.L. Karihaloo . “*Lattice modelling of size effect in concrete strength*”. Engineering Fracture Mechanics 70 (2003) 2307–2320.

[168] Peter Grassl , Milan Jirasek . “*Damage-plastic model for concrete failure*”. *International Journal of Solids and Structures*. 43 (2006) 7166–7196.

Bibliographie

- [169] Jie Li , Xiaodan Ren . “*Stochastic damage model for concrete based on energy equivalent strain*”. International Journal of Solids and Structures 46 (2009) 2407–2419.
- [170] Alain Sellier, Benoit Bary . “*Coupled damage tensors and weakest link theory for the description of crack induced anisotropy in concrete*”. Engineering Fracture Mechanics 69 (2002) 1925–1939.
- [171] Halina Kuna-Ciskal , Jacek J. Skrzypek. Institute of Mechanics and Machine Design, Cracow University of Technology, 31-864 Krakow, Poland. “*CDM based modelling of damage and fracture mechanisms in concrete under tension and compression*”. Engineering Fracture Mechanics 71 (2004) 681–698.
- [172] M. Matallah , C. La Borderie. LaSaGeC. “*Inelasticity–damage-based model for numerical modelling of concrete cracking*”. Engineering Fracture Mechanics 76 (2009) 1087–1108.
- [173] Benjamin Richard , Frederic Ragueneau , Christian Cremona , Lucas Adelaide . “*Isotropic continuum damage mechanics for concrete under cyclic loading: Stiffness recovery, inelastic strains and frictional sliding*”. Engineering Fracture Mechanics 77 (2010) 1203–1223.
- [174] Rashid K. Abu Al-Rub , Sun-Myung Kim. “*Computational applications of a coupled plasticity-damage, constitutive model for simulating plain concrete fracture*”. Engineering Fracture Mechanics 77 (2010) 1577–1603
- [175] M.G.D. Geers^{a,b}, R. de Borst^c, R.H.J. Peerlings^a. “*Damage and crack modeling in single-edge and double-edge notched concrete beams*”. Engineering Fracture Mechanics 65 (2000) 247±261
- [176] Afsin Saritas , Filip C. Filippou. “*Numerical integration of a class of 3d plastic-damage concrete models and condensation of 3d stress_strain relations for use in beam finite elements*”. Engineering Structures 31 (2009) 2327- 2336
- [177] Pierre Badel , Vincent Godard , Jean-Baptiste Leblond. “*Application of some anisotropic damage model to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure*” . International Journal of Solids and Structures 44 (2007) 5848–5874
- [178] Jian Ying Wu , Jie Li , Rui Faria . “*An energy release rate-based plastic-damage model for concrete*”. International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 583–612.
- [179] Ludovic Jason , Antonio Huerta , Gilles Pijaudier-Cabot , Shahrokh Ghavamian . “*An elastic plastic damage formulation for concrete: Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model*”. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 7077–7092.

Bibliographie

- [180] Gianluca Cusatis; Zdenek P. Bazant, F.ASCE; and Luigi Cedolin, M.ASCE. . "Confinement-Shear Lattice Model for Concrete Damage in Tension and Compression: II. Computation and Validation". 10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:12(1449).
- [181] Jean – claude charmet, notes de cours : *Mécanique du solide et des matériaux (Elasticité)*. Laboratoire PMMH (Physique et Mécanique des milieux hétérogènes – UMR 7636).
- [182] Michel Dupeux, *Aide mémoire science des matériaux*, sciences sup, écoles d'ingénieurs. Dunod, Paris, 2004, ISBN 2 10 005458 9.
- [183] Samuel Forest, Michel Amestoy, Gilles Damamme, Serge Kruch, Vincent Maurel, Matthieu Mazière, *Mécanique des milieux continus*. Ecole des mines de Paris. 2009/2010, Ecole des mines de Paris.
- [184] Germain, Paul. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. 2 éd. rév. et compl.. - Paris : Masson, 1995. - 467p. ; 24 cm. ISBN 2-225-82964-0
- [185] Bellet, Didier. *Problèmes d'élasticité*. - Toulouse : Cépaduès, 1990. - 339p. (La chevéche). ISBN 2-85428-256-6.
- [186] Duvaut, G. *Mécanique des milieux continus*. Paris : Masson, 1990. - 292p. ISBN 2-225-81658-1.
- [187] Elwi, A. A., and Murray, D. W. (1979). "A 3D hypoelastic concrete constitutive relationship." J. Engng. Mech. Div., ASCE, 105(4), 623-641.
- [188] A. H. Bouzaiene, 1995. *Caractérisation et modélisation du comportement non linéaire d'éléments en béton armé et non armé sous sollicitations multiaxiales*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal. 271 p.
- [189] Claire Girard, *Modélisation de colonnes de pont en béton armé sous sollicitations cycliques*. Thèse présentée à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval pour l'obtention du de Philosophiae Doctor (Ph. D.), juin 2000.
- [190] Chang-Geun Cho, Moon- Ho Park , *A3-D Finite Element Model for R/C Structures Based On Orthotropic Hypoelastic Constitutive Law*, KCI Concrete Journal, Vol.13 No. 1, pp. 19- 25, January 2001.
- [191] Evan C. Bentz, Frank J. Vecchio, and Michael P. Collins. *Simplified Modified Compression Field Theory for Calculating Shear Strength of Reinforced Concrete Elements*. ACI Structural Journal, V. 103, No. 4, July-August 2006.
- [192] Dat Duthinh, Nicholas J. Carino, *Shear Design of High- Strength Concrete Beams: A Review of the State- of- the – Art*. August 1996, Building and Fire Research Laboratory. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899.

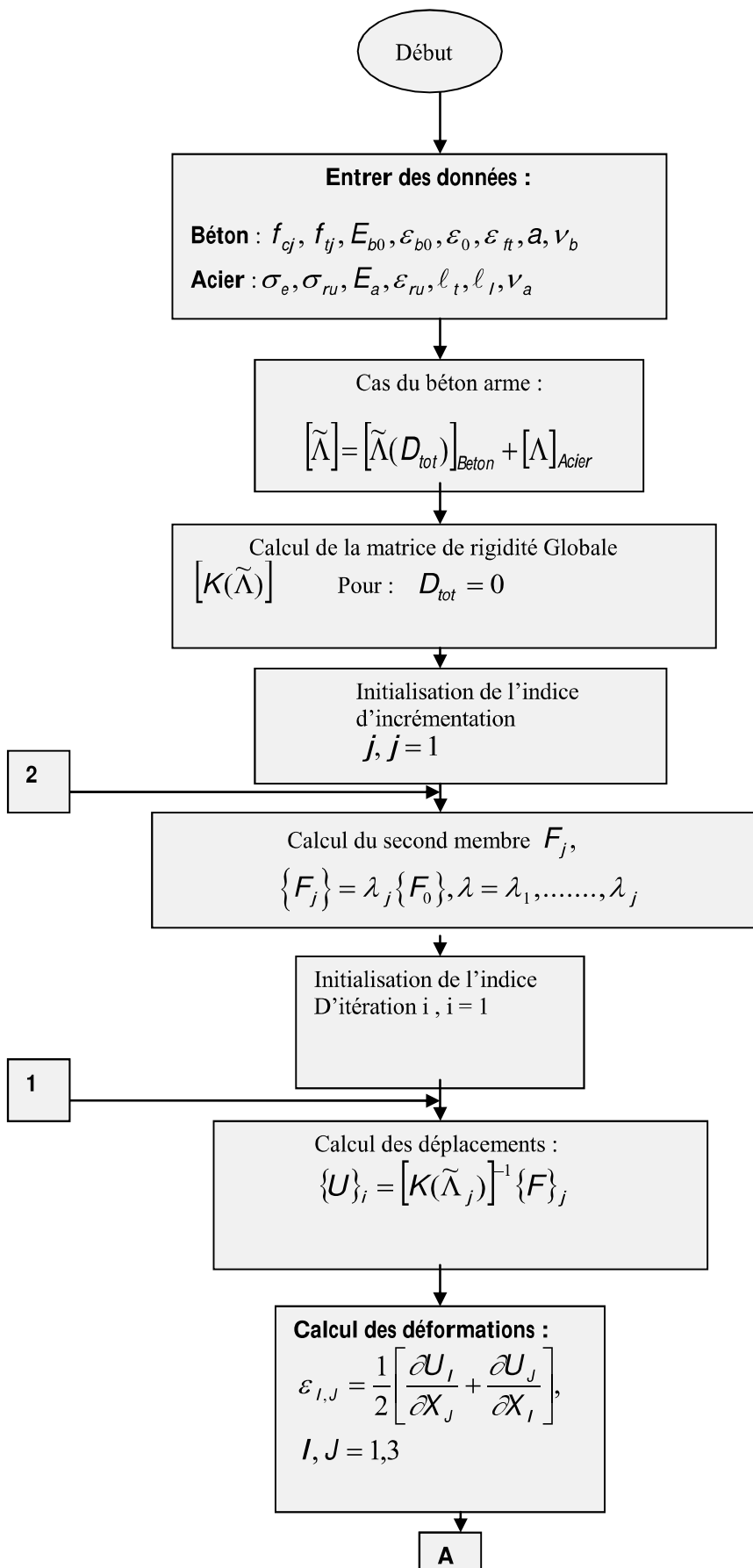
Bibliographie

- [193] Bertil Persson « *Poisson's ratio of high-performance concrete* » *Cement and Concrete Research* 29 (1999) 1647–1653. Lund Institute of Technology, Division of Building Materials, Lund University.
- [194] Z.X. Li, J.C. Qian. *A creep model for concrete with damage in the axial and lateral directions*. *Theoretical and applied fracture mechanics* 17(1992) 115-120. Elsevier.
- [195] Y. Xiaoping, N.S. Ottosen, S. Thelandersson, M.P. Nielsen, *Review of Constructive Models for Concrete*. Commission of the European Communities, Nuclear Science and Technology . 1989. ISBN 92-826-0765-8, Catalogue number: CD-NA-12394-EN-C. ECSC - EEC - EAEC, Brussels-Luxembourg, 1989
- [196] Fabrice Dupray, Yann Malécot, Eric Buzaud et Laurent Daudeville. *Comportement du béton sous fort confinement : expérience et modélisation à l'échelle mésoscopique*. 18^{ème} Congrès Français de Mécanique Grenoble, 27-31 août 2007.
- [197] Jean-Michel Torrenti , *Comportement multiaxial du béton : aspects expérimentaux et modélisation, Méchanics*. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1987. French.
- [198] Bouafia Y. « *Résistance à l'effort tranchant des poutres en béton à précontrainte extérieure-Etude expérimentale et calcul à la rupture* ». Thèse de Doctorat, E.C.P. Novembre 1991.
- [199] Frederic Ragueneau , Fabrice Gatuingt.. “*Inelastic behavior modelling of concrete in low and high strain rate dynamics*”. *Computers and Structures* 81 (2003) 1287–1299.
- [200] Z. Guo. *Strength and Deformation of Concrete — Experimental Principles and Constitutive Law*. (Chinese Edition), Tsinghua University Press House, Beijing, P.R. China. (1997).
- [201] B. Zhu: *The Finite Element Method Theory and Applications* (Chinese Edition), The Water Resources Publishing House of China, Beijing, P.R. China. (1998).
- [202] BAEL-1991: *Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites*. Ed Eyrolles, p. 309, France.
- [203] J. Mazars, F. Hamon, S. Grange, A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. *Materials and Structures* , (2014). DOI 10.1617/s11527- 014- 0439- 8.
- [204] HYO-GYOUNG KWAK , SUN-PIL KIM. « *Bond–slip behavior under monotonic uniaxial loads* ». *Engineering Structures*. Volume 23, Issue 3, March 2001, Pages 298–309
- [205] Fouré B., « *Béton à haute résistance- Rapport sur les essais de poteaux et poutres (OG)* ». Contrat SETRA- CEBTP 84- 40- 020 ,rapport interne, Avenant n°1, Index S.E.S. OG, phase D, Novembre 1985.

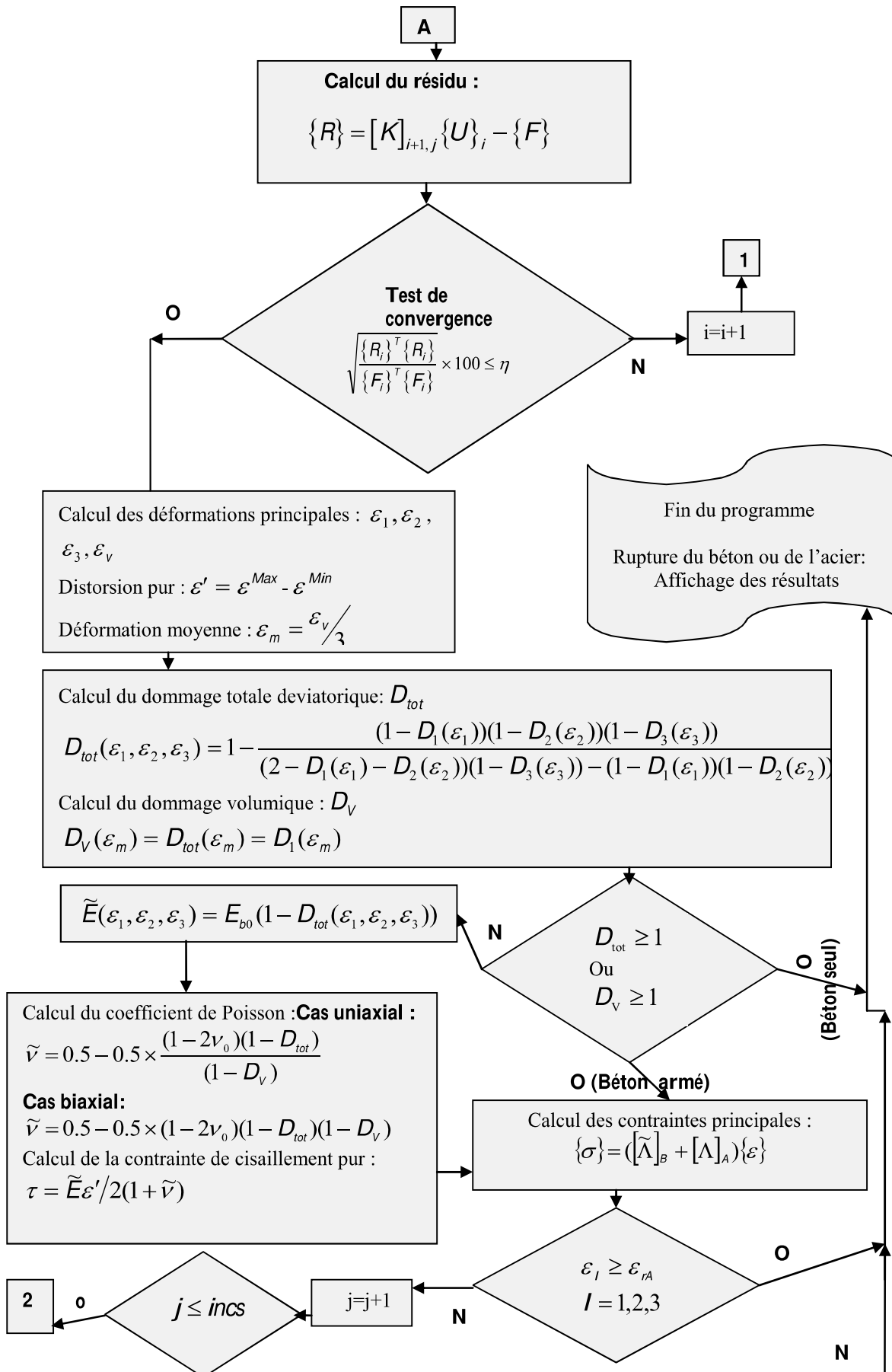
Bibliographie

- [206] Jean – louis Tailhan – Horacio colina – Jean – Luc Clément. « *Test d'évaluation de modèles de comportement non linéaires pour le béton fissuré* ».Participation du laboratoire central des ponts et chaussées. Projet MECA–EDF/R & D (RFGC – 7 / 2003).
- [207] W. Nechnech. « *Contribution à l'étude numérique du comportement du béton et des structures en béton armé soumises à des sollicitations thermiques et mécaniques couplées : Une approche thermo- élasto-plastique endommageables* ». Institut national des sciences appliquées de Lyon .Thèse de doctorat soutenu, Décembre 2000.
- [208] H. Varastehpour. (1996). « *Optimisation du renforcement des ouvrages en béton arme par des matériaux composites* ». Thèse de Génie Civil : Université Claude Bernard-Lyon, 1996. 216p.
- [209] Technical paper. Journal of the south African Institution of civil Engineering volume 55 number 3 october 2013, ISSN 1021- 2019.
- [210] P.L. Ng , J.Y.K. Lam, A.K.H. Kwan.” *Effects of Concrete-to-Reinforcement Bond and Loading Conditions on Tension Stiffening*”. Procedia Engineering, Volume 14, 2011, Pages 704–714. The Proceedings of the Twelfth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction — EASEC12
- [211] Hyo- Gyoung Kwak, Sun- Pil Kim. « *Bond–slip behavior under monotonic uniaxial loads* ». Journal: Engineering Structures - ENG STRUCT , vol. 23, no. 3, pp. 298-309, 2001.
- [212] Gaston J. R., Siess C. P., Newmark N. M., *A Layered finite element nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells*. Civil engineering studies, SRS N° 389, University of Illinois, Urbana, 1972.
- [213] Salah Khalfallah (2008), *Tension stiffening bond modelling of cracked flexural reinforced concrete beams*, Journal of Civil Engineering and Management, 14:2, 131-137
- [214] José Julio de Cerqueira Pituba, ”*Anisotropic damage model on the effects of damage process due to shearing stress in concrete*”. Acta Scientiarum. Technology . Maringá, v. 35, n. 2, p. 227-236, Apr.-June, 2013.
- [215] PITUBA, J. J. C.; FERNANDES, G. R. An anisotropic damage model for concrete. Journal of Engineering Mechanics, v. 137, n. 9, p. 610-624, 2011.

Organigramme de calcul



Organigramme de calcul



Notice d'utilisation du logiciel de calcul

NPOIN :	Nombre de nœuds
NELEM :	Nombre d'éléments
NGAUS :	Nombre de points de gauss
KGAUS :	Point de gauss à l'itération K
NPROP :	Nombre de propriétés matérielles
DT:	Variable de dommage en traction uni axiale
DC:	Variable de dommage en compression uni axiale.
DTOT:	Variable de dommage dans un état bi axial ou triaxial
DIS:	Distortion pure.
DISA:	Déformation suivant l'axe X-X.
DISB:	Déformation suivant l'axe Y-Y.
DISC:	Déformation suivant l'axe Z-Z.
YOUNG:	Module de Young.
YOUNGA	Module de Young de l'acier utilisée dans la Soubroutine FLOWPL.
YOUNGL	Module de Young des armatures longitudinales.
YOUNGT	Module de Young des armatures transversales.
UNIAX	Contraintes dans l'acier.
POISSO:	Variable définissant le coefficient de poisson
DISRC:	Limite à la rupture en compression.
DISRT:	Limite à la rupture en traction.
Kb:	Paramètre ajustant la branche ascendante de la loi de SARGIN.
K1b:	Paramètre ajustant la forme de la branche décroissante par extrapolation.
FCJ:	Résistance caractéristique du béton en compression.
FTJ:	Résistance caractéristique du béton en traction.
EPB0:	Déformation relative à la résistance caractéristique en compression FCJ.
EBO:	Seuil du dommage en compression.
EPFT:	Seuil du dommage en traction.
DS :	Déformation volumique.
G :	Module de coulomb ou de cisaillement.
TER :	Contrainte de cisaillement pur.
EP :	Déformation principale.
EPSG :	Déformation suivant une direction quelconque.
STRSP:	Contrainte principale
STRSG:	Contrainte suivant une direction quelconque.
NCHOI:	Variable introduite par l'utilisateur sur le choix du calcul :
	NCHOI = 11 : Traction uni axial
	NCHOI = 12 : Compression uniaxial
	NCHOI = 22 : Etat de contrainte biaxial.
	NCHOI = 23 : Etat de contrainte triaxial.

Résumé. Un nouveau modèle est introduit, pour prédire le comportement réel, non linéaire, du matériau béton et ce jusqu'à la rupture. Il permet de décrire le comportement non linéaire du béton sous chargement monotone vérifiant les principes de la mécanique de l'endommagement et les concepts de la mécanique de la rupture tout en utilisant les fondements de la mécanique continue des matériaux. Le comportement mécanique non linéaire du béton en unidirectionnel est décrit par deux lois (SARGIN pour la compression et GRELAT pour la traction). En introduisant deux variables de dommage appliquées en unidirectionnel respectivement en traction et en compression et la variation du coefficient de Poisson en uniaxial. Leur combinaison avec les lois de la mécanique des matériaux continue (loi de Hooke généralisée), et la théorie de la mécanique de l'endommagement (théorie de l'isotropie du dommage, et principe de la déformation équivalente), nous amène à une loi de variation du dommage en tridirectionnel appliquée en bidirectionnel. La variation du coefficient de Poisson en compression uniaxial du béton a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs : Sami, A., Klink, (1975), Murray D.W. (1979), Niels Saabye ottosen, (1980), Atheel E. Allos., L.H.Martin,(1981), Ramtani.S, Y. Berthaud ,J. Mazars,(1992) et Ferretti, E.,(2004). Alors qu' en multiaxial on peut citer: Chen (1982), Guo, (1997), Zhu, (1998), Hyuk-Chun Noh , Hyo-Gyoung Kwak, (2006) et Ding Faxing Yu Zhiwu, (2006). Une modélisation du comportement non linéaire du béton armé on utilisant le modèle du treillis adoucissant d'angle variable « Rotating angle softened truss model » RA-STM-Hus 1988) développé précédemment, en tenant compte de l'endommagement locale définit par la variable de dommage adoptée dans notre modélisation pour le cas du béton seul. Des confrontations des calculs aux résultats expérimentaux et par comparaison au modèle de MAZARS (Applications des relations d'évolutions adoptées-loi d'évolution du coefficient de Poisson, loi d'évolution du dommage en uni-bidirectionnel), tout en considérant l'effet du pourcentage d'aciers, ont permis de décrire et de suivre le comportement réel du béton (béton armé) et ce jusqu'à la rupture.

Mots- clés : Béton, Endommagement, Non linéaire, Rupture, Statique, Coefficient de Poisson, Loi de Hooke généralisée, Eléments finis, Isotrope, Dommage volumique, Dommage deviatorique, Biaxial, béton armé, pourcentage d'acier.

Abstract. A new Model is introduced, for predicting the nonlinear behavior of the concrete until the rupture. The non-linear behavior of the concrete is taken into account under monotonic load verifying the principles of the mechanics damage and the concepts of the mechanics of the fracture, using the foundations of the continuum mechanics of materials. The nonlinear mechanical behavior of the concrete in unidirectional is described by two laws (Sargin for the compression and Grelat on the tension). By introducing two variables of damage applied in unidirectional respectively in tension and in compression. Their combination with the laws of the continuum mechanics of materials (Hooke's law generalized) and the theory of the mechanics damage (theory of the isotropy of the damage, and principle of the equivalent deformation), brings us to a law of variation of the damage in three-directional applied in bidirectional. In addition, The variation of the Poisson's ratio of concrete in unidirectional compression has attracted the interest of several researchers we can cite: Sami, A., Klink, (1975), Murray D.W. (1979), Niels Saabye ottosen, Atheel E. Allos., L.H.Martin, Ramtani.S, Y. Berthaud, J. Mazars, (1992) and Ferretti, E., (2004). For the three-dimensional, we can mention: Chen (1982), Guo (1997), Zhu (1998), Hyuk-Chun Noh, Hyo-Gyoung Kwak (2006) and Ding Faxing Yu Zhiwu, (2006). A modelling of the non-linear behavior of the reinforced concrete one using the Rotating angle softened truss model (RA-STM-Hus on 1988) developed previously, by taking into account the damage local defines by the variable of damage adopted in our modelling for the concrete. Confrontations of the calculations with experimental results (behavior of the concrete in biaxial compression and tension) have allowed to describe and to follow the real behavior of the concrete. The comparison of model calculations with experimental results presented in one hand, and with the results of calculation with the model of Mazars in the other hand, is very satisfactory. Applying relations changes adopted (evolution of Poisson's ratio, the damage evolution in uni and bidirectional) While considering the effect of the ratio of steels has correctly describe and track the actual behavior of concrete (reinforced concrete) and up to rupture.

Keywords: Concrete, damage, Nonlinear calculation, Rupture, Static, Poisson's ratio, Hooke's law generalized, Finite element, Isotropy, Volumetric damage, Deviatoric damage, Biaxial, Reinforced concrete, Steel ratio.

