

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme

De Master en Automatique
Spécialité : Génie Electrique
Option : commande des Systèmes

Thème

**Application des équations aux dérivées
partielles en traitement d'image**

Proposé par : M^{elle} DORBANE.F.

Présenté par :

Dirigé par :

TOUCHERIFT Souad
AOUIMEUR Kahina

Soutenu le : 12 / 07 /2011

Promotion 2011



sommaire

Introduction générale	(1)
------------------------------------	------------

Chapitre I : Les équations aux dérivées partielles

I. Introduction.....	(2)
II- Définition d'une Equation aux dérivées partielle.....	(2)
III- Classification des équations aux dérivées partielles et exemples classiques.....	(3)
III-1 Problèmes elliptiques.....	(4)
III-2 Problèmes paraboliques.....	(4)
III-3. Problèmes hyperboliques.....	(5)
IV- Méthodes de résolution d'une équation aux dérivées par.....	(5)
IV-1 méthodes des éléments finis	(6)
IV-2Méthode de volumes finis.....	(6)
IV-3Méthodes spectrales.....	(6)
IV-4 Méthodes des différences finis	(6)
IV-4-1 Formule de Taylor	(7)
IV-4-2 Schéma numérique de la dérivée première.....	(7)
IV-4-3 Schéma numérique de la dérivée deuxième.....	(8)
IV-4-4 Schéma numérique de la dérivée croisée.....	(8)
V- Applications des équations aux dérivées partielles en traitement d'images	(12)
VI-Conclusion.....	(13)

CHAPITRE II : Filtrage des images par EDPs

II.1.Introduction.....	(14)
II.2. Méthodes de filtrage	(14)
II.2.1. Filtre linéaires.....	(14)
II.2.1.1. Filtre globale.....	(15)
II-2-1-2 Filtre local	(15)
II-2-2 Filtres non linéaires (adaptatifs)	(16)
II-2-2-1 Filtre d'ordre.....	(17)
II-2-2-2 Filtre de position	(18)

II-2-3 Filtres dérivateurs	(18)
II-2-3-1 Dérivées directionnelles d'ordre 1.....	(19)
II-2-3-2 Dérivée directionnelle d'ordre 2.....	(20)
II-2-3 Filtrage à base des équations aux dérivées partielles	(20)
II.3. Equation de chaleur.....	(20)
II-2-3-2 Fondement physique de l'équation de la chaleur	(20)
II-2-3-3 Diffusion isotrope.....	(21)
II-2-3-4 Diffusion anisotrope.....	(23)
II-2-3-5 Diffusion anisotrope régularisée.....	(26)
Conclusion.....	(26)

Chapitre III : Tests et résultats

I-

Introduction.....	(27)
II- Choix des paramétrées.....	(27)
III- Tests et résultats.....	(27)
III-1 Tests de la diffusion isotrope.....	(27)
III-2 Tests de la diffusion anisotrope	(29)
III-3 Tests de la diffusion anisotrope régularisée.....	(32)
IV- Conclusion.....	(32)
Conclusion générale.....	(33)
Bibliographie	

Introduction générale

Introduction générale

Depuis quelques temps les méthodes non-linéaires sont considérées comme des outils puissants dans le domaine de traitement d'image et du signal. Les raisons d'un tel intérêt sont multiples : les effets non-linéaires inclus dans le système visuel humain (SVH), le comportement fortement non-linéaire des systèmes optiques d'acquisition d'images.

Bien que les filtres linéaires occupent encore un rôle important dans le traitement des images, étant intrinsèquement très faciles à implanter, les limitations de ce type de filtres sont bien connues, en général, ne respectent pas les hypothèses de stationnarité, les filtres linéaires sont incapables d'éliminer des bruits impulsionnels sans rendre les contours flous. Les avancées technologiques en termes de puissance, vitesse de calcul et coût ont permis l'implantation pratique d'algorithmes plus complexes. Ces algorithmes, issus des approches non-linéaire, peuvent s'affranchir des limitations citées plus haut, l'application de ces méthodes au lissage avec préservation des contours, au rehaussement des contours ou encore à la segmentation des images montre de façon évidente leur supériorité.

Une étude des articles les plus récents qui illustrent cette nouvelle tendance montre qu'une grande partie de ces techniques s'appuient sur l'utilisation des équations aux dérivées partielles (EDP).

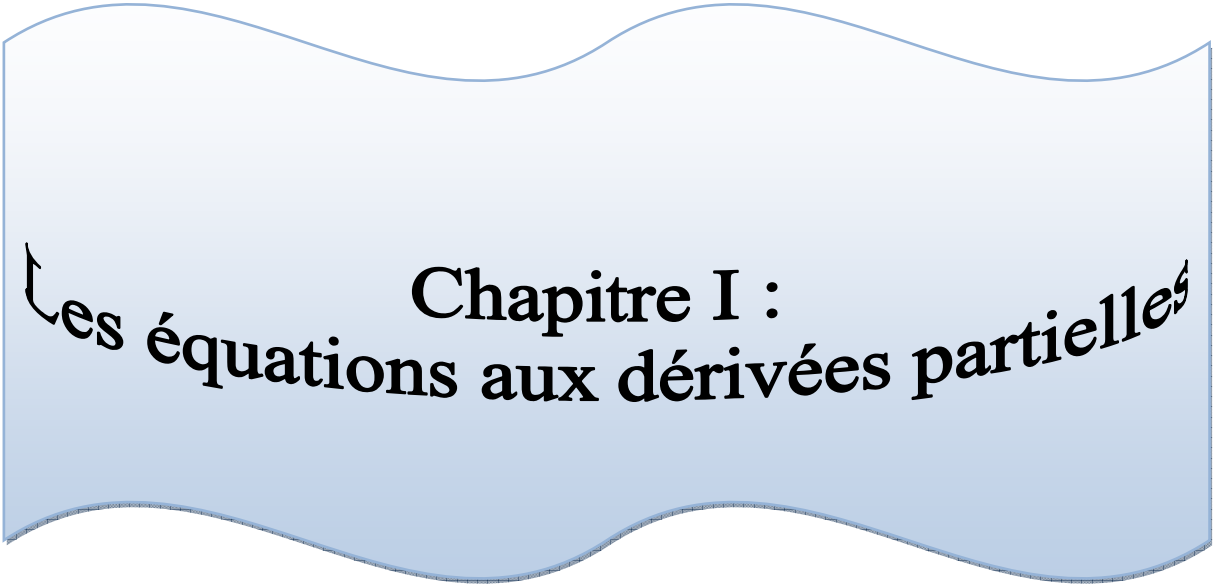
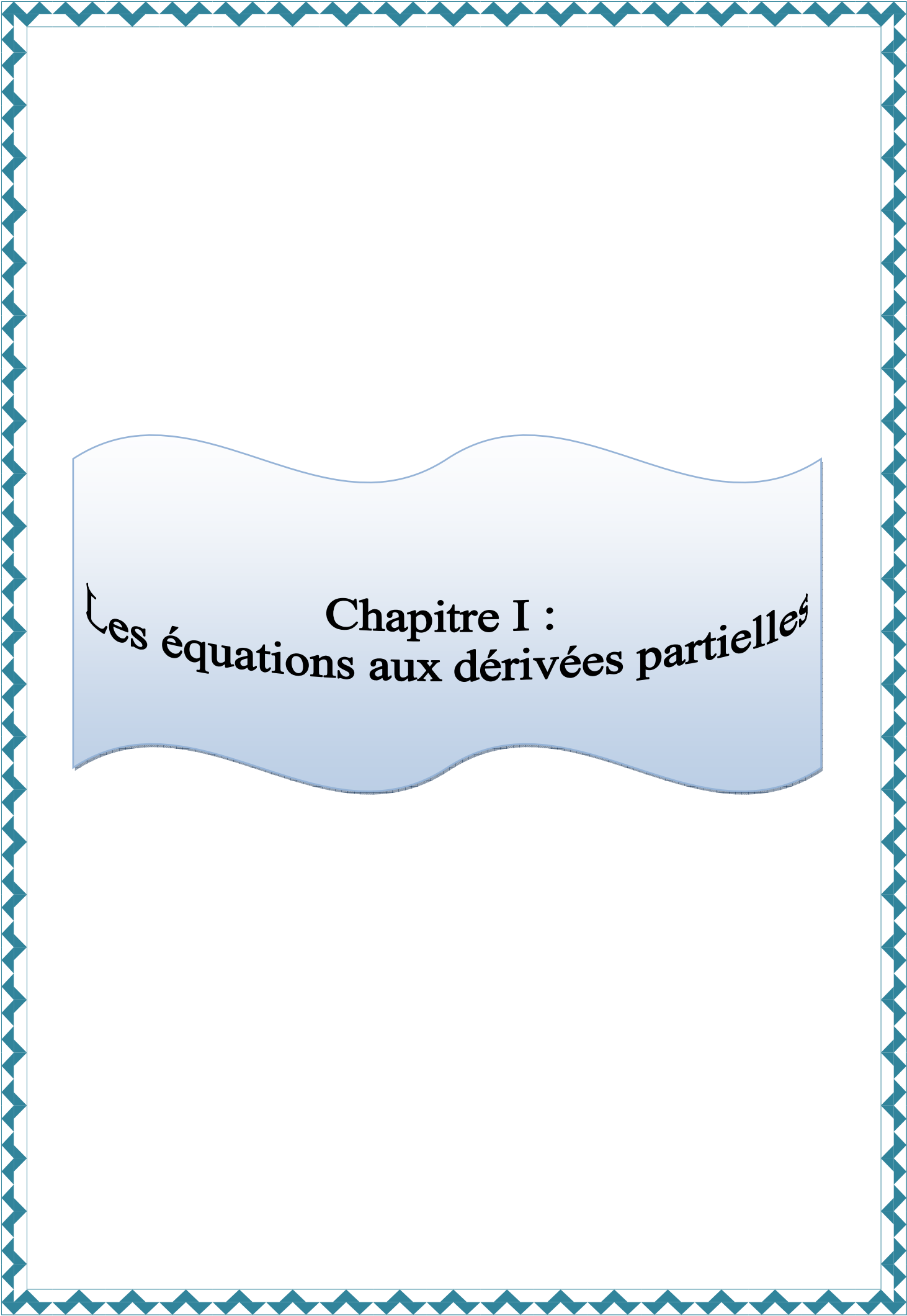
La méthodologie adoptée tout au long de ce mémoire est concentrée autour de l'utilisation des EDPs qui deviennent des outils classiques est très utiles en traitement d'images.

Le mémoire est organisé en trois chapitres.

Le chapitre 1 traite de manière unitaire les principaux types d'EDP utilisées actuellement en traitement d'images pour la restauration ou l'amélioration, le chapitre inclut aussi les différentes méthodes utilisées afin de discrétiser les EDP.

Le chapitre 2, nous allons présenter les méthodes les plus récentes fondées sur les EDPs en traitement des images, en particulier celles fondées sur la diffusion linéaire (diffusion isotrope) et non-linéaire (diffusion anisotrope).

La partie finale de la thèse -Chapitre 3- est orientée essentiellement vers les applications de la méthode proposée pour la restauration et l'amélioration des images c'est-à-dire l'application de la diffusion isotrope et anisotrope sur des images aux niveaux de gris afin de les filtrées, et avoir l'avantage de la diffusion anisotrope pour l'amélioration et la restauration d'images en préservant les contours.



Chapitre I : **Les équations aux dérivées partielles**

I- Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons certaines généralités simples concernant les équations aux dérivées partielles (EDP), nous visons essentiellement les équations linéaires et spécialement les équations linéaires du second ordre.

Nous énumérons les équations les plus importantes parmi les EDPs du second ordre, chacune de ces équations joue un rôle fondamental dans les théories physiques les plus diverses.

II- Définition d'une Equation aux Dérivées Partielles

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation qui contient des dérivées partielles, si dans les équations aux dérivées ordinaires (EDO), la fonction inconnue u dépend que d'une seule variable, dans les EDPs, la fonction inconnue dépend de plusieurs variables.

Dans notre travail, nous utilisons les abréviations suivantes pour les dérivées :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$$

Une équation aux dérivées partielles pour la fonction u est une relation entre u , les variables $x_1, x_2, \dots, x_d$ et un nombre fini de dérivées partielles de u , cette équation est de la forme :

$$F(x_1, \dots, x_d, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_d}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

Où :

u une fonction inconnue définie sur R^d à valeur dans R de variables $x_1, \dots, x_d$, qui est une fonction à déterminer.

F est une fonction donnée.

L'équation (1.1) est dite linéaire si F est une fonction linéaire des quantités $u_{x_1}, \dots, u_{x_d}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots$, par exemple, une EDP linéaire du premier ordre (en deux variables réelles indépendantes x_1, x_2) s'écrit comme suit :

$$a(x_1, x_2) u_{x_1} + b(x_1, x_2) u_{x_2} + c(x_1, x_2) u = f(x_1, x_2) \quad (1.2)$$

De même, la forme générale de l'EDP linéaire du second ordre en deux variables indépendantes x_1, x_2 est

$$a(x_1, x_2) u_{x_1 x_1} + b(x_1, x_2) u_{x_1 x_2} + c(x_1, x_2) u_{x_2 x_2} + d(x_1, x_2) u_{x_1} + e(x_1, x_2) u_{x_2} + g(x_1, x_2) u = f(x_1, x_2) \quad (1.3)$$

Où : a, b, c, d, e, f, g sont des coefficients à variables x_1, x_2 .

La linéarité des équations (1.2) et (1.3) est caractérisées par le fait que ces équations sont de la forme

$Lu=f$ Lu est un opérateur linéaire [1].

L'équation (1.1) est d'ordre n en d variables $x_1, \dots, x_d$ où l'ordre signifie l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé qui apparaît dans la fonction F .

Un système d'équations aux dérivées partielles est formé de plusieurs équations aux dérivées partielles impliquant une ou plusieurs fonctions inconnues u_i [6].

Exemple :

$$\begin{cases} E_t = \text{rot}(H) \\ H_t = -\text{rot}(E) \\ \text{div}(E) = \text{div}(H) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Équations de Maxwell pour le champ électrique E et le champ magnétique H .

III- Classification des équations aux dérivées partielles et exemples classiques

Les EDP sont classées en fonction de cinq critères. Des théories de résolution sont données en fonction du type d'EDP [5].

- *L'ordre de l'EDP* : L'ordre de l'EDP est l'ordre de la plus haute dérivée partielle présente dans l'équation. L'équation (1.5) est une équation de second ordre et l'équation (1.6) est de troisième ordre.

$$u_t = u_{xx} \quad (1.5)$$

$$u_t = u_{xxx} \sin x \quad (1.6)$$

- *Le nombre de variables* : Le nombre de variables est le nombre de variables indépendantes. L'équation (1.7) est en fonction de deux variables t et x .

$$u_t = u_{xx} \quad (1.7)$$

- *Linéarité* : Les EDP sont linéaires ou non-linéaires. Pour qu'elle soit linéaire, il faut que la variable u ne soit pas multipliée ou élevée à une puissance par elle-même ou par une de ses dérivées. Ainsi, une équation linéaire du second ordre avec deux variables s'écrit sous la forme :

$$a(t, x)u_{tt} + b(t, x)u_{tx} + c(t, x)u_{xx} + d(t, x)u_t + e(t, x)u_x f(t, x) = g(t, x) \quad (1.8)$$

Où a, b, c, d, e, f, g peuvent être des constantes ou des fonctions.

Un exemple d'EDP linéaire est donné par l'équation (1.9) et non linéaire par l'équation (1.10).

$$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t \quad (1.9)$$

$$uu_{tt} + u_t = 0 \quad (1.10)$$

- *Homogénéité* : L'équation (1.8) est homogène si le terme $g(t, x)$ est zéro pour tout t, x .
- *Type de coefficients* : si les coefficients a, b, c, d, e, f sont constants, alors l'équation est dite à coefficients constants.

Dans notre travail on s'intéressera seulement aux EDP linéaires du second ordre, Pour chaque type de problème : elliptique, parabolique, hyperbolique, on donne un exemple classique ainsi qu'un phénomène physique qu'il modélise.

- Les équations paraboliques décrivent les procédés de diffusion et satisfont la propriété :

$$b^2 - 4ac = 0$$

- Les équations hyperboliques décrivent les systèmes oscillants et les mouvements d'ondes et satisfont la propriété :

$$b^2 - 4ac > 0$$

- Les équations elliptiques décrivent les régimes permanents et satisfont la propriété :

$$b^2 - 4ac < 0$$

III-1 Problèmes elliptiques

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. L'équation elliptique modèle est l'équation de Poisson. Celle-ci s'écrit

$$\Delta u = f \tag{1.11}$$

Où $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_dx_d}$ est le laplacien.

Dans le cas particulier $f = 0$, l'équation (1.11) est appelée équation de Laplace et ses solutions sont appelées fonctions harmoniques.

III-2 Problèmes paraboliques

Un exemple de problème parabolique est l'équation de la chaleur. Elle était initialement conçue pour décrire le phénomène de conduction thermique. Elle définit la diffusion de la température d'un point d'un matériau donné à travers ses voisins. Ramené à l'imagerie numérique, on interprète la température comme étant la valeur d'un pixel diffusant sa valeur à ses voisins [2].

$$u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x) \tag{1.12}$$

Où :

t est la variable en temps ;
 x est la variable en espace.

III-3 Problèmes hyperboliques

L'exemple classique que l'on étudiera est l'équation d'advection (ou de transport)

$$u_t(t, x) + au_x(t, x) = f(t, x) \quad (1.13)$$

Où $a \in \mathbb{R}$ est la vitesse de transport.

Comme il existe un autre exemple qui modélise cette catégorie de problèmes hyperboliques qui est l'équation des ondes. On considère une corde fixée à ses deux extrémités, représentée par l'intervalle $[0, 1]$.

Sous l'action d'une force normale $f = f(t, x)$, la corde se déforme et son déplacement normal est noté $u = u(t, x)$. Alors u est solution de l'équation des ondes.

$$u_{tt} - u_{xx} = f \quad (1.14)$$

L'équation des ondes et de la chaleur sont dites d'évolution car elles modélisent en général un phénomène instationnaire, évoluant avec le temps t . L'équation de Poisson est dite stationnaire elles modélisent en général un phénomène à l'équilibre dans l'espace $\mathbb{R}^d$.

Les trois équations sont linéaires, c'est-à-dire qu'elles dépendent linéairement de l'inconnue u . Les équations de Poisson et de la chaleur modélisent des phénomènes de diffusion.

L'équation de Poisson pour f , aussi appelée équation de Laplace, peut être vue comme un cas particulier d'équation de la chaleur lorsque l'équilibre est atteint, c'est-à-dire lorsque l'inconnue u ne dépend plus de t . L'équation des ondes modélise des phénomènes de propagation, comme celle du son, de la lumière.

IV Méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles

La discrétisation est le passage d'un problème exact continu régi par une EDP au problème approché discret, il existe quatre grandes familles de méthodes :

- Les différences finies.
- Les éléments finis.
- Les volumes finis.
- La méthode spectrale.

IV-1 Méthodes d'éléments finis

On met le problème d'équations aux dérivées partielles sous forme variationnelle :

$$\forall v \in H, u \in H \quad a(u, v) = (f, v)_H$$

Où H est un espace de Hilbert bien choisi (par exemple parce qu'il y a existence et unicité de la solution dans cet espace), $(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire sur H et a une forme bilinéaire sur H . La discrétisation consiste à remplacer H par un sous espace de dimension finie H_k . [8]

IV-2 Méthode de volumes finis

La méthode des volumes finis intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatrices et est donc particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides, équation de conservation de la masse, équation de conservation de la quantité de mouvement et équation de conservation de l'énergie.

Sa mise en œuvre est simple si les volumes élémentaires sont des rectangles (ou des parallélépipèdes rectangle en dimension 3). Cependant la méthode des volumes finis permet d'utiliser des volumes élémentaires de forme quelconque, donc de traiter des géométries complexes, ce qui est un avantage sur les différences finies. Par contre, on dispose de peu de résultats théoriques de convergence.

IV-3 Méthodes spectrales

L'idée de ces méthodes est de chercher une solution approchée sous forme d'un développement sur une certaine famille de fonctions. On peut par exemple écrire la solution approchée sous la forme : $u = \sum_{i=1}^n a_i(u) p_i$ fonction polynomiales, on choisit la base p_i de manière à ce que a_i' et p_i' soient faciles à calculer. Ces dernières méthodes sont réputées coûteuses, mais précises. Elles sont le plus souvent utilisées comme aide à la compréhension des phénomènes physiques [8].

IV-4 Méthodes des différences finis

Parmi les méthodes de résolution couramment utilisée, la méthode des différences finis est la plus facile d'accès. L'approximation des dérivées partielles par les différences finis se fait en considérant un développement en série de Taylor de la variable considérée au voisinage d'un point.

IV-4-1 Formule de Taylor

Soit $u(x, y, z, t)$ une fonction de l'espace (x, y, z) et du temps t . par définition de la dérivée on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} \quad (1.15)$$

Si Δx est petit, un développement de Taylor de $u(x + \Delta x, y, z, t)$ au voisinage de x donne :

$$u(x + \Delta x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y, z, t) + \dots \quad (1.16)$$

en tronquant la série au premier ordre en Δx , on obtient :

$$\frac{u(x+\Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} + \phi(\Delta x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) \quad (1.17)$$

IV-4-2 Schéma numérique de la dérivée première

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \phi(\Delta x) \quad (1.18)$$

Ce schéma est dit *avant* ou *décentré avant*.

Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1 appelé *arrière*:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \phi(\Delta x) \quad (1.19)$$

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de x_i , on écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u(i) + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \phi(\Delta x^3) \quad (1.20)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u(i) - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \phi(\Delta x^3) \quad (1.21)$$

La soustraction de ces deux relations donne l'égalité suivante :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2 \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \phi(\Delta x^3) \quad (1.22)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit 'centré' pour approximer la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \phi(\Delta x^2) \quad (1.23)$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs nœuds voisins de x_i .

Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + \phi(\Delta x^3) \quad (1.24)$$

IV-4-3 Schéma numérique de la dérivée deuxième

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i . Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde, on écrit :

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (1.25)$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (1.26)$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à :

$$u_{i+1} - u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (1.27)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit *centré* pour approximer la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (1.28)$$

Il existe aussi une formulation *avant* (équation (1.29)) et *arrière* (équation (1.30)) pour la dérivée seconde, toute d'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (1.29)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (1.30)$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxièmes, troisièmes, etc....

IV-4-4 Schéma numérique de la dérivée croisée

Déterminons une approximation de la dérivée croisée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ de la fonction de deux variables $f(x, y)$. La discrétisation du domaine de calcul est bidimensionnelle et fait intervenir deux pas d'espace supposés constants Δx et Δy dans les directions x et y .

$$f(x_{i+l}, y_{j+m}) = f(x_i, y_j) + L\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + m\Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_j + \frac{(L\Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{(m\Delta y)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_j + \frac{2ml\Delta x \Delta y}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} + \dots \quad (1.31)$$

Au voisinage du point (i, j) :

$$f(i+1, j+1) = f(i, j) + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_j + \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \dots \quad (1.32)$$

$$f(i-1, j-1) = f(i, j) - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i - \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_j + \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_j + \dots \quad (1.33)$$

$$f(i+1, j-1) = f(i, j) + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i - \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_j - \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_j + \dots \quad (1.34)$$

$$f(i-1, j+1) = f(i, j) - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_j + \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_j + \dots \quad (1.35)$$

Les tableaux ci-dessous regroupent la discrétisation des dérivées premières, secondes, troisièmes et quatrièmes de la fonction f , en utilisant les différences finies avant, arrière et centrées.

	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	f_{j+4}
hf'_j	-1	1			
$h^2 f''_j$	1	-2	1		
$h^3 f'''_j$	-1	3	-3	1	
$h^4 f^{(4)}_j$	1	-4	6	-4	1

Tableau 1-1 : les dérivées à l'ordre 1 à partir des différences finies avant

	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_{j-3}	f_{j-4}
hf'_j	1	-1			
$h^2 f''_j$	1	-2	1		
$h^3 f'''_j$	1	-3	3	-1	
$h^4 f^{(4)}_j$	1	-4	6	-4	1

Tableau 1-2 : les dérivées à l'ordre 1 à partir des différences finies arrière

	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	f_{j+4}	f_{j+5}
$2hf'_j$	-3	4	-1			
$h^2 f''_j$	2	-5	4	-1		

$2h^3 f_j'''$	-5	18	-24	14	-3	
$h^4 f_j^4$	3	-14	26	-24	11	-2

Tableau 1-3 : les dérivées au 2^{ème} ordre à partir des différences finies avant

	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_{j-3}	f_{j-4}	f_{j-5}
$2hf_j'$	3	-4	1			
$h^2 f_j''$	2	-5	4	-1		
$2h^3 f_j'''$	5	-18	24	-14	3	
$h^4 f_j^4$	3	-14	26	-24	11	-2

Tableau 1-4 : les dérivées au 2^{ème} ordre à partir des différences finies arrière

	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}
$2hf_j'$		-1	0	1	
$h^2 f_j''$		1	-2	1	
$2h^3 f_j'''$	-1	2	0	-2	1
$h^4 f_j^4$	1	-4	6	-4	1

Tableau 1-5 : les dérivées au 2^{ème} ordre à partir des différences finies centrées

	f_{j-3}	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}
$12hf_j'$		1	-8	0	8	-1	
$12h^2 f_j''$		-1	16	-30	16	-1	
$8h^3 f_j'''$	1	-8	13	0	-13	8	-1
$6h^4 f_j^4$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

Tableau 1-6 : les dérivées au 4^{ème} ordre à partir des différences finies centrées**Quelques opérateurs usuels**

- *Gradient* : le gradient est un vecteur qui indique la direction et l'intensité de la plus grande variation d'un scalaire f , il est noté comme suit :

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (f_x, f_y) \quad (1.36)$$

La norme du gradient est donnée par la relation suivante :

$$\|\nabla f\| = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}} \quad (1.37)$$

L'orientation du gradient est donnée par la relation suivante :

$$\varphi(\text{grad } f) = \arctan \left(\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (1.38)$$

- *Laplacien* :

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \quad (1.39)$$

- *Divergence d'un vecteur* :

$$\text{div } \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.40)$$

Propriétés :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}}(g) + g \overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

$$\text{div}(f\vec{u}) = f \text{div}(\vec{u}) + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{u}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \Delta f$$

V- Applications des équations aux dérivées partielles en traitement d'images

L'application des EDPs en traitement d'images attire depuis quelques années l'attention de plusieurs chercheurs en vision par ordinateur. Ceci est dû surtout au formalisme mathématique qui encadre approche à base d'EDP et qui permet de donner une bonne interprétation des résultats.

Les EDPs trouvent leurs applications dans la segmentation, l'inpainting et le filtrage des images.

- *Segmentation d'image* : un objectif important en traitement d'images est de pouvoir déterminer les contours d'objets 2 dimensions ou 3 dimensions. Pour cela, un moyen efficace consiste à utiliser la méthode des contours actifs. On fait évoluer une courbe (un snake) autour ou à l'extérieur de l'objet à détecter. Ce snake se déforme progressivement jusqu'à épouser la forme de l'objet. L'idée fondamentale, introduite par Osher et Sethian, est de considérer le snake comme la courbe de niveau zéro d'une fonction u .

L'évolution de la courbe dans le temps est régit par l'EDP suivante :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial s} \right) - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\beta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) - \frac{\partial E_{ext}}{\partial s} = 0 \quad (1.41)$$

- *L'inpainting d'images* : l'inpainting est un nom artistique du processus de l'interpolation des images, il désigne la reconstruction de données manquantes dans une image en appliquant des algorithmes pour récupérer les parties détériorées (rayures sur des films anciens et des taches sur des photographies), une application dérivée intéressante consiste en la suppression d'objets réels dans des images. Plusieurs méthodes ont été proposées pour l'interpolation d'images. Certaines se basent sur des méthodes d'interpolation classiques (Newton, Lagrange,...), d'autres sont celles qui mettent l'accent sur la reconstruction de la géométrie globale de l'image qui utilise des modèles des EDP. Il existe d'autres méthodes qui combinent ces dernières et la synthèse de la texture. Parmi ces méthodes, on cite la méthode basée sur la variation totale [] régit par l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \nabla \cdot \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] \quad (1.42)$$

stockage.

Filtrage d'images : le filtrage d'image consiste à réduire les variations brusques d'intensité dans une même région homogène de l'image tout en préservant les transitions entre ces différentes régions. Les bruits sont ainsi réduits, les pixels parasites éliminés, et les contours plus définis. Parmi les grandes familles de filtres utilisées dans ce but on trouve les filtres basés sur l'utilisation des EDPs citons par exemple : filtre de choc, le principe de ce filtre est de rehausser le contour dans la direction de gradient de l'image. Une formulation des filtres de choc en vectoriel est donc :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\text{sign}(I_{nn}) I_n \quad (1.43)$$

Cela revient à rehausser chaque composante dans une direction commune n .

Conclusion

La connaissance et la compréhension des différentes méthodes de résolution des différentes EDPs est d'une grande importance et nécessité pour les utilisées des dans divers domaines, et on particulier dans le domaine de traitement d'images.



Chapitre II

Le filtrage des images par EDE

II-1 Introduction

En analyse d'image, il arrive souvent de se retrouver confronté à un phénomène de bruit sur les images, ce qui rend le traitement des données difficile. Le phénomène de bruit peut être soit d'origine externe, perturbation du système d'acquisition de l'image par des facteurs tel que la luminosité, la pollution, soit d'origine interne au signal du fait des fluctuations spontanées des grandeurs électriques mises en œuvre dans l'acquisition de l'image.

Afin de minimiser ce phénomène de bruitage de l'image plusieurs techniques ont été développées. Les plus intuitives consistent à remplacer la valeur d'un pixel d'une image par la valeur moyenne de son voisinage (filtre moyen) ou la valeur médiane (filtre médian). Ces techniques de traitement du bruit par des processus linéaires présentent souvent des insuffisances et se révèlent inefficaces dans le cadre des images fortement bruitées. L'application d'équation aux dérivées partielles semble par contre une approche relativement efficace contre le bruit que peuvent subir les images [2].

II-2 Méthodes de filtrage

Le filtrage des images a pour but : d'atténuer l'effet du bruit d'acquisition sur une image, extraire des caractéristiques de l'image (contours), ou améliorer le contraste d'une image. En termes de filtrage, on distingue 4 grandes familles de filtres [11]:

- les filtres linéaires ;
- les filtres adaptatifs ;
- les filtres dérivatifs;
- les filtres à base des équations aux dérivées partielles.

II-2-1 Filtres linéaires

Le filtrage linéaire d'une image consiste à faire le produit de convolution de cette image $I(x,y)$ par la réponse impulsionnelle $f(x,y)$ d'un filtre choisi [12].

Dans le cas continu, l'image filtré U est donnée par la relation suivante :

$$U(x, y) = (f * I)(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \cdot I(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1 \quad (2.1)$$

Le filtrage linéaire consiste donc à remplacer chaque niveau de gris par une combinaison linéaire des niveaux de gris des ces voisins, les coefficients de cette combinaison sont définis par la réponse impulsionnelle du filtre. Il existe deux méthodes utilisées pour ce type de filtrage :

- ✓ Filtrage linéaire global.
- ✓ Filtre linéaire local.

II-2-1-1 Filtre global

Dans le filtre global, chaque pixel de la nouvelle image est calculé en prenant en compte la totalité des pixels de l'image de départ. On fait le produit de convolution de la transformée de fourrier de l'image par la fonction de transfert de filtre (gain complexe du filtre) [12].

Ce filtre présente l'avantage d'être global, c'est-à-dire : l'image est traitée en une seule fois, on applique à l'image la transformée de fourrier discrète à deux dimensions, on effectue ensuite le produit de convolution par f , et enfin la transformée de fourrier inverse, on obtient l'image filtrée. Cette méthode est complexe et assez longue.

II-2-1-2 Filtre local

Le filtre local consiste à effectuer le produit de convolution de l'image par une fonction de voisinage, généralement de taille 3x3. Parmi les différents types de filtrage local on distingue [12]:

➤ **Filtre passe-bas (lissage)**

Comme son nom l'indique, ce type de filtres atténue les composantes de haute fréquence telle que les bruits et les irrégularités de l'image. Elle peut être répétée plusieurs fois, ce qui crée un effet de flou. En pratique il faut choisir un compromis entre l'atténuation du bruit et la conservation des détails et des contours significatifs.

La fonction de voisinage dans ce type de filtre est définie généralement par :

$$H = \left[\frac{1}{b+2} \right]^2 \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & b^2 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}$$

Où $\left[\frac{1}{b+2} \right]^2$ est le facteur de normalisation.

Exemple :

- **b=1(filtre moyenneur)**

$$H = \left[\frac{1}{9} \right] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Le niveau de gris de pixel central de la fenêtre prédéfinie par le filtre est remplacé par la moyenne des niveaux de gris des pixels voisins. La figure II-1 montre les résultats d'application de ce filtre.



Image original



Filtre moyennneur 3*3



Filtre moyennneur 5*5



Filtre moyennneur 7*7

Figure II-1 : filtrage d'une image par un filtre moyennneur avec différentes fenêtres de voisinage

Les effets du filtre moyennneur varient avec la taille du noyau : plus les dimensions du noyau seront importantes, plus le bruit sera éliminé ; mais en contrepartie, les détails fins seront eux-aussi effacés et les contours étalés.

- **b=2**

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

C'est le filtre passe bas le plus utilisé, il affecte au pixel central un poids plus grand par rapport à son voisinage.

De façon générale, les filtres passe-bas sont caractérisés par des coefficients de fenêtres positifs avec un coefficient de valeur maximale pour le point central. Ils éliminent les bruits de fond de l'image mais ont pour conséquence l'adoucissement.

➤ **Filtres passe-haut**

Comme le cas des filtres passe haut on peut attribuer à chaque poids du voisinage d'une fenêtre passe haut, des poids statistiques différents, mais choisis de telle sorte que leur somme soit toujours égale à zéro. Ce type de filtre n'élimine pas le bruit, bien au contraire, plus qu'une augmentation du contraste de l'image, ils permettent la mise en évidence de contours entre des plages de niveaux de gris différents :

Exemple de masques :

$$H = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

II-2-2 Filtres non linéaires (adaptatifs)

Dans ce type de filtrage, le calcul de la nouvelle valeur de pixel central est obtenue par un calcul qui exclu toute relation linéaire entre le pixel et son voisinage. Les principaux filtres sont : filtre d'ordre et filtre de position.

II-2-2-1 Filtre d'ordre

Il sélectionne parmi le voisinage un ou plusieurs niveaux de gris et les combine d'une certaine façon, dans ce type de filtre on trouve :

➤ Filtre médian

Le filtrage par la médiane est le filtre d'ordre le plus connu. Il produit un adoucissement de l'image puisque la valeur du point centrale d'une fenêtre est affectée par celle de ses voisins.

A la différence du filtre linéaire classique, on n'effectue pas une moyenne, mais on prend la valeur médiane, c'est-à-dire celle qui par classement en valeur croissante, se trouve au milieu. Remplacer le pixel central (sur lequel est positionnée la fenêtre) par la valeur médiane des pixels inclus dans la fenêtre comme le montre la figure suivante :

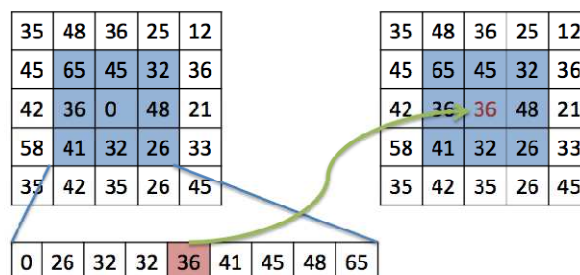


Figure II-2 : principe du filtre médian

La valeur du pixel central qui est 0 deviendra 36. Les résultats du filtrage médian sont illustrés ci-dessous.

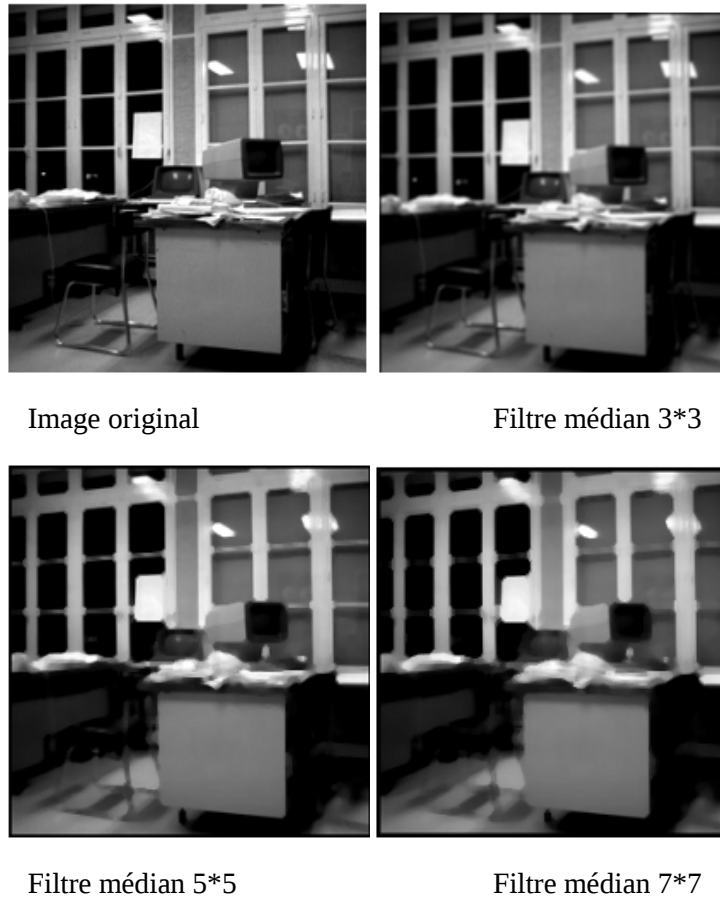


Figure II-3 : filtrage d'une image par un filtre médian avec différentes fenêtres de voisinage



Figure II-4 : Exemple un filtrage médian sur une image bruitée.

➤ Le plus proche voisin radio métrique

On attribut au pixel central la valeur de la moyenne des k pixels voisins dont les valeurs (en niveau de gris) sont les plus proche de la sienne. Dans l'exemple précédent, pour $k=4$, les 4 valeurs les plus proches du pixel central (3) sont : 1, 3, 4 et 4, la nouvelle valeur est donc $(1+3+4+4)/4=3$.

II-2-2-2 Filtre de position

Dans ce type de filtres, le voisinage le plus homogène est sélectionné, et son niveau de gris moyen est affecté au pixel central.

Exemple :

$$\begin{bmatrix} \overline{3} & \overline{3} & \overline{4} & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 8 & 3 \\ 9 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

La valeur du point central passera de 4 à 3.

II-2-3 Filtres dérivateurs

II-2-3-1 Dérivées directionnelles d'ordre 1

A ce niveau, les filtres utilisés sont des filtres de dérivée première et l'on cherche alors le maximum de la réponse. Le prototype de cette méthode est le filtre gradient. Cependant, la dérivation avec ce dernier accentuant le bruit.

Le gradient est une dérivation au première ordre est donnée par la relation :

$$\nabla f[i, j] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}[i, j], \frac{\partial f}{\partial y}[i, j] \right) \quad (2.2)$$

A coté de ces approches très inspirées du signal. Des filtres de dérivation plus empiriques ont été proposés à partir d'estimateurs locaux de l'image f ou de ses dérivées. Ces dérivées estimées sont obtenues à l'aide de masques appliqués sur des fenêtres de 2x2 ou 3x3 pixels. Les filtres les plus utilisés : Sobel, Robert, Prewitt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Robert

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prewit

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sobel

La figure suivante illustre le principe d'application de filtre Sobel

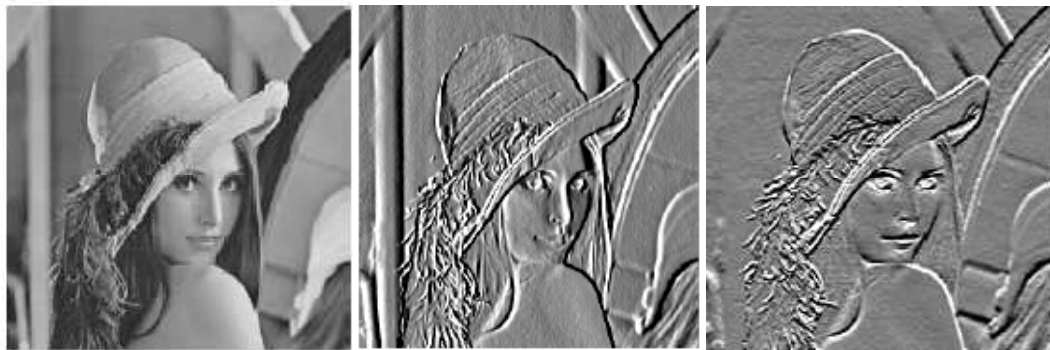


Image original

Gradient horizontal

Gradient vertical

Figure II-5: Exemple d'application de filtre sobel sur l'image Lenna.

II-2-3-2 Dérivée directionnelle d'ordre 2

Après avoir vu des filtres basés sur la recherche de maximum de la dérivée première, nous étudierons des filtres larges qui se chargent de rechercher les zéros de la dérivée seconde, ou plus précisément, du laplacien qui est une dérivation de deuxième ordre.

$$\Delta f[i, j] = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[i, j] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[i, j] \right) \quad (2.3)$$

II-2-3 Filtrage à base des équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles (EDP) ont été introduites en traitement d'images il y a environ une quinzaine d'années. Partant de l'équation classique de la chaleur nous montrerons comment une grande variété d'EDPs peut être utilisée pour résoudre quelques problèmes de base en traitement d'images tels que la restauration d'images dégradées ou la segmentation d'images en régions d'intérêt.

II-2-3-1 Equation de la chaleur

L'une des premières idées est d'établir une analogie entre la restauration et un phénomène physique, la diffusion de la chaleur. De la même façon que dans un matériau, la chaleur diffuse d'un point à un autre, de proche en proche, et tend ainsi à se répartir uniformément au fur et à mesure que le temps s'écoule, on peut imaginer faire diffuser de proche en proche les niveaux de gris. Ainsi, les irrégularités des niveaux de gris diminueront et l'on retrouve un niveau de gris uniforme.

II-2-3-2 Fondement physique de l'équation de la chaleur

On suppose Ω le domaine occupé par un matériau homogène, isotrope et conducteur de la chaleur (plaque de métal par exemple). On note x la variable d'espace (un point de Ω) et t la variable de temps. Les sources de chaleur à l'instant $t \geq 0$ et au point $x \in \Omega$ sont notées $f(t, x)$ et la température $u(t, x)$.

La quantité de chaleur est cu où c est la chaleur spécifique (constante dépendant du matériau). D'après la loi de conservation de l'énergie, pour tout volume élémentaire V , la variation en temps de la quantité de chaleur est le bilan de ce qui est produit par les sources ou rentre à travers les parois [3]. Autrement dit, on a

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V cu \, dx \right) = \int_V f \, dx - \int_{\partial V} q \cdot \nu \, d\sigma \quad (2.4)$$

Où ∂V est le bord de V , ν la normale extérieure unitaire au bord ∂V , q le vecteur flux de chaleur et $\cdot$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^d$ et ∂ c'est la variance. D'après le théorème de Gauss (ou théorème de la divergence), on a

$$\int_{\partial V} q \cdot \nu \, d\sigma = \int_V \operatorname{div}(q) \, dx \quad (2.5)$$

où la divergence de la fonction vectorielle $q = (q_1, \dots, q_d)^T$ est donnée par

$$\operatorname{div}(q) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (2.6)$$

Le terme $\operatorname{div}(q)$ représente la diffusion de la chaleur à travers le matériau.

D'après (2.1) et (2.2), on obtient

$$cu_t = f - \operatorname{div}(q) \quad (2.7)$$

De plus, d'après la loi de Fourier, on a

$$q = -k \nabla u$$

Où k est la conductivité thermique du matériau (constante) et le gradient de la fonction scalaire u est défini par $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_d})^T$

On en déduit

$$Cu_t - \operatorname{div}(k \nabla u) = f \quad (2.9)$$

Puisque k est constante et $\operatorname{div}(\nabla \cdot) = \Delta$ on obtient l'équation de la chaleur

$$Cu_t - k \Delta u = f \quad (2.10)$$

II-2-3-3 Diffusion isotrope

Une approche classique développée dans le domaine de la restauration des images utilise une opération de convolution linéaire (lissage) afin de réduire l'effet du bruit, considéré comme étant un signal haute fréquence.

Soit l'image $u(x, y) = u$, qu'on définit comme une application bornée de $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe au pixel $(x, y) \in \Omega$ son niveau de gris $u(x, y)$; Ω est le domaine de l'image. Notons $u_0(x, y) = u_0$ l'image bruitée et t un paramètre qui contrôle l'importance du lissage de l'opérateur $G(x, y, t)$.

Une approche classique en restauration consiste à considérer le bruit comme un signal haute fréquence. Dans ce contexte, la méthode la plus souvent utilisée est l'opération de convolution :

$$u(x, y, t) = \int G(x - \xi, y - \eta, t) u_0(\xi, \eta) d\Omega \quad (2.14)$$

Un exemple d'opérateur souvent utilisé de par ses performances, ses propriétés de séparabilité et d'isotropie est l'opérateur Gaussien G donné par :

$$G(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}} \quad (2.15)$$

Une opération de convolution d'une image par un opérateur gaussien peut être réécrite sous la forme d'un processus de diffusion, dont l'équation est la suivante :

$$\begin{cases} u_t(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (2.16)$$

Cette équation de diffusion connue sous le nom d'équation de la chaleur peut être interprétée comme un processus de diffusion de l'intensité lumineuse d'un pixel $(x; y)$ autour des pixels voisins $(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y)$, durant un temps t ($t \in [0; T]$), en relation directe avec la variance spatiale de l'opérateur gaussien (σ) .

On peut noter que cette équation de diffusion peut être réécrite sous la forme divergence suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \text{div}(\nabla(u(x, y, t))) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (2.17)$$

L'EDP parabolique linéaire (2.14) permet une diffusion isotrope. Cette diffusion s'opère ainsi de manière identique dans toutes les directions et ne possède aucune direction privilégiée.

Pour des tâches de restauration d'images bruitées, ceci présente clairement des inconvénients. En effet, dans des régions d'intensité homogène, ce processus permettra de réduire effectivement l'effet du bruit mais dans des régions présentant des discontinuités au niveau de l'intensité en niveau de gris, celles-ci seront aussi lissées et le contraste visuel de ces parties sera sensiblement réduit, diminuant en conséquence l'intérêt qualitatif et visuel d'un tel processus.

Le lissage par diffusion linéaire régularise l'image et élimine le bruit. En même temps il introduit également du flou car aucune contrainte sur la préservation des contours n'est imposée. De même, ce type de lissage cause un décalage des contours. La préservation et le non-déplacement des contours représentent l'intérêt des modèles non linéaires [4].

Le schéma numérique de l'équation de diffusion isotrope

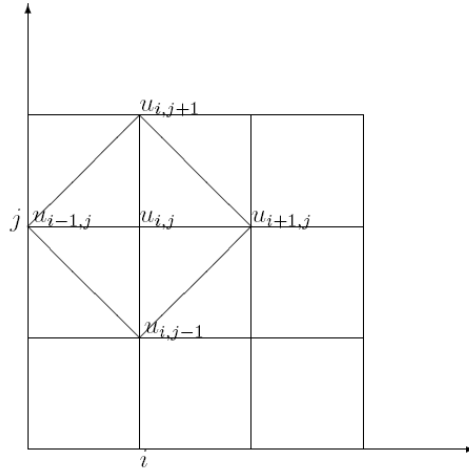


Figure II-6 : la grille des différences finies bidimensionnelles

$$u_t(x, y, t) = \Delta u = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) \quad (2.18)$$

$$u_t = u_{ii} + u_{jj} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{(t+1)} - u_t}{\Delta t} = \frac{u(i,j)^{t+1} - u(i,j)^t}{\Delta t} \quad (2.20)$$

$$u_{ii} = \frac{u(i-1,j) - 2u(i,j) + u(i+1,j)}{h^2} \quad (2.21)$$

Dans l'image $h=1$.

$$\begin{cases} u_{ii} = u(i-1, j) - 2 * u(i, j) + u(i+1, j) \\ u_{jj} = u(i, j-1) - 2 * u(i, j) + u(i, j+1) \end{cases} \quad (2.22)$$

La discrétisation de Laplacien

$$\Delta u = u(i-1, j) + u(i+1, j) + u(i, j-1) + u(i, j+1) - 4u(i, j) \quad (2.23)$$

$$u(i, j)^{t+1} = u^t + \Delta t * (u(i-1, j) + u(i+1, j) + u(i, j-1) + u(i, j+1) - 4u(i, j)) \quad (2.24)$$

II-2-3-4 Diffusion anisotrope

Comme nous avons pu le constater la diffusion des pixels par équation de la chaleur présente un défaut majeur pour l'analyse et la classification d'images : les contours sont endommagés par la diffusion des pixels avoisinants. Le problème qui se pose est donc : comment conserver les contours d'une image tout en éliminant le bruit sur une image? L'algorithme de Perona-Malik répond à ce problème par une prise en compte du gradient [2].

La diffusion anisotrope a été introduite par Perona et Malik en 1990. Son fondement est de considérer l'intensité de l'image comme une concentration de fluide, qui évolue vers un équilibre. Elle repose sur l'utilisation de l'équation classique de diffusion de la chaleur. La

diffusion est un phénomène physique qui équilibre les différences de concentration sans créer ni détruire de masse. Perona y introduit un coefficient de diffusion dépendant de la position du pixel dans l'image, de la direction et de l'amplitude du gradient en ce point [10]. La diffusion anisotrope réduit la diffusion dans les zones à fort gradient, ainsi l'EDP qui régit ce phénomène s'écrit alors avec une fonction décroissante qui varie en fonction de la valeur du gradient comme suit :

$$\begin{cases} u_t = \text{div}(c(|\nabla u|) \cdot \nabla u) \\ u(x, y, 0) = u_0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Où :

∇ est l'opérateur de gradient,
 div l'opérateur de divergence,
 $|\cdot|$ exprime l'amplitude,
 $c(x)$ le coefficient de diffusion,
 u_0 l'image initiale.

Le coefficient de diffusion permet de contrôler l'effet de la diffusion en fonction d'appartenance ou non du pixel courant à un contour :

- Si le pixel appartient à un contour (gradient local élevé) alors $c(\cdot)$ renvoie une valeur proche de zéro, il n'y a pas de diffusion ;
- Si le pixel n'appartient pas à un contour (gradient local faible) alors $c(\cdot)$ renvoie cette fois-ci une valeur importante non nulle, il y a diffusion.

Les fonctions de diffusions proposées par Perona et Malik sont [10] :

$$\begin{cases} c(u) = \frac{1}{1 + (\frac{u}{k})^2} \\ c(u) = \exp\left(-(\frac{u}{k})^2\right) \end{cases} \quad (2.26)$$

Elles sont représentées dans la figure II.

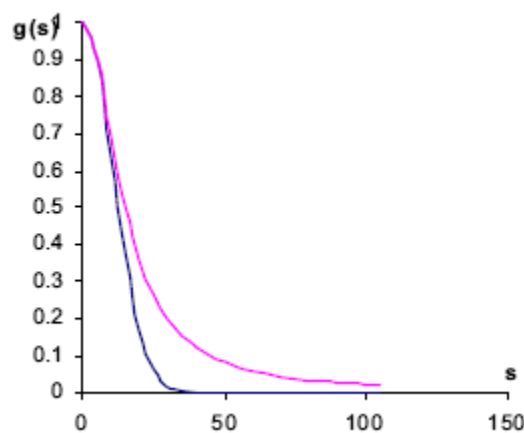


Figure II- : la fonction $c(s)$

A partir de cette figure, on déduit que dans les zones à faible gradient, la fonction $c(s)$ tend vers 1 et on aura une diffusion isotrope et dans des zones à fort gradient, la fonction $c(s)$ tend vers 0 et y aura pas de diffusion.

Le paramètre k permet de régler la sélectivité de la fonction $c(\cdot)$:

- Si $|\nabla \mathbf{u}| \gg k$ alors $c(|\nabla \mathbf{u}|) \cong 0$ donc l'équation annule alors toute diffusion ;
- Si $|\nabla \mathbf{u}| \ll k$ alors $c(|\nabla \mathbf{u}|) \cong 1$ donc l'équation (2.25) se réduit alors au processus de diffusion isotrope.

Le schéma numérique de l'équation de diffusion anisotrope

$$\begin{cases} u_t = \text{div}(c(|\nabla u|) \cdot \nabla u) \\ u_t = \nabla g(|\nabla u|) * \nabla u + g(|\nabla u|) * \Delta u \end{cases} \quad (2.27)$$

Remarque :

- ∇g et ∇u sont discrétisé par différences avant.
- $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ est discrétisé par point central.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= g(|\nabla u|) \Delta u + \nabla g(|\nabla u|) \nabla u = g(i, j) (u(i-1, j) + u(i+1, j) + u(i, j-1) + u(i, j+1) - \\ &4u(i, j)) + (g(i+1, j) - g(i, j)) (u(i+1, j) - u(i, j)) + (g(i, j+1) - g(i, j)) (u(i, j+1) - \\ &u(i, j)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} \nabla g(i, j) = \begin{pmatrix} g(i+1, j) - g(i, j) \\ g(i, j+1) - g(i, j) \end{pmatrix} \\ \nabla u(i, j) = \begin{pmatrix} u(i+1, j) - u(i, j) \\ u(i, j+1) - u(i, j) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= g(i, j) (u(i-1, j) - u(i, j)) + g(i, j) (u(i, j-1) - u(i, j)) \\ &+ g(i+1, j) (u(i+1, j) - u(i, j)) + g(i, j+1) (u(i, j+1) - u(i, j)) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} u(i, j)^{n+1} &= u(i, j)^n + \Delta t (g(i, j) (u(i-1, j) - u(i, j)) + g(i, j) (u(i, j-1) - u(i, j)) \\ &+ g(i+1, j) (u(i+1, j) - u(i, j)) + g(i, j+1) (u(i, j+1) - u(i, j))) \end{aligned} \quad (2.31)$$

II-2-3-5 Diffusion anisotrope régularisée

Il a été prouvé toutefois que la méthode de diffusion anisotrope possède plusieurs inconvénients dont le premier est son inefficacité dans les zones où le bruit présente de grosses discontinuités.

Le second inconvénient est d'ordre théorique pour les fonctions $g(\cdot)$ précédentes car on peut montrer qu'il n'existe pas de solution à l'équation anisotrope.

En effet, pour obtenir en même temps l'existence et l'unicité d'une solution pour une telle EDP, il a été montré que la fonction $g(|\nabla u|)$ doit respecter la condition que $|\nabla u|g(|\nabla u|)$ soit non décroissante.

Si cette condition n'est pas vérifiée, on peut observer une solution instable se former, impliquant la génération de résultats qui peuvent être très différents si de petits changements affectent l'image originale.

Plus précisément, on peut démontrer que cette méthode agit comme une équation de la chaleur inverse près de très fortes discontinuités, ce qui rend le processus instable même si l'image initiale est assez lisse.

Une solution pour résoudre le problème de l'instabilité est de travailler avec une version régularisée de l'équation impliquant le gradient $g(|\nabla(G_\sigma * u)|)$ [9].

$$(2.32) \quad \begin{cases} u_t = \text{div}(c(|\nabla(G_\sigma * u)|) \cdot \nabla u) \\ u(x, y, 0) = u_0 \end{cases}$$

$$G_\sigma = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right)} \quad (2.33)$$

σ : c'est la variance

Conclusion

L'existence d'une multitude d'approches de filtrages en traitement d'image, permet d'éliminer l'effet de bruit subi par l'image, ou on trouve chaque type de bruit à son propre filtre. Mais de manière générale on trouve que le filtrage par les EDPs est le moyen le plus exacte pour éliminer le bruit.



Chapitre III : Tests et résultats

I- Introduction

Dans ce chapitre nous mettrons en pratique l'étude théorique que nous avons abordée dans les chapitres précédents. En effet, nous appliquerons la diffusion isotrope, anisotrope et anisotrope régularisée pour l'élimination du bruit que nous avons obtenue précédemment après discrétisation des EDPS correspondantes à ces méthodes. L'implémentation de notre application se fera avec le langage de programmation Matlab sur un compac (Processeur 794 de fréquence et de 1Go RAM).

Nos tests vont se porter sur l'étude de l'influence de certains paramètres et les performances de l'application des trois méthodes pour le filtrage d'images.

II- Choix des paramétrées

Les différents paramètres de la diffusion (décrits en chapitre II) différents d'une image à une autre. Ils sont déterminés à travers une série de tests, en s'appuyant sur les caractéristiques de l'image.

III- Tests et résultats

Pour effectuer nos tests, nous avons choisi l'image de la figure III-1. Nous varions les valeurs des paramètres k , Δt et le nombre d'itérations N .



Image cameramen

Figure III-1 : Images utilisées dans nos tests

III-1 Tests de la diffusion isotrope

Nous avons utilisé l'image cameramen, nous avons appliqué le bruit gaussien et le bruit sel et poivre. Cette méthode dépend de deux paramètres qui sont Δt et le nombre d'itérations N .

- 1^{er} cas on fixe $\Delta t = 0.25$ et on fait varier N



Image original



Image bruitée (bruit gaussien)



N=5



N=10



N=30



N=60



Image bruitée (bruit sel et poivre)



N=5



N=20

Figure III-2 : Résultats de la diffusion isotrope ($\Delta t = 0.25$, varier N)

Interprétation des résultats

On constate que pour des images bruitées, la diffusion isotrope permet effectivement d'éliminer le bruit en augmentant le nombre des itérations, mais les zones présentant des discontinuités au niveau de gris sont aussi lissées.

- 2^{ème} cas on fixe $N=5$ et on fait varier δt



delt t=0.25



delt t=0.5



delt t=0.75



delt t=5

Figure III-3 : Résultats de la diffusion isotrope (on fixe N , varier δt)

Interprétation des résultats

L'augmentation de δt déstabilise l'image

Les résultats obtenus par ce lissage, dit "isotrope", sont peu satisfaisants. Il opère en effet de manière identique dans toutes les directions, et ne possède aucune direction privilégiée, atténuant ainsi bruit et contours sans distinction. Cette méthode engendre une disparition des contours et rend l'image de plus en plus floue. Afin de préserver les contours, des idées de diffusion anisotrope ont été proposées.

III-2 Tests de la diffusion anisotrope

Nous avons utilisé les deux images, nous avons appliqué le bruit gaussien et le bruit sel et poivre. Cette méthode dépend de trois paramètres qui sont δt , le nombre d'itérations N et k .

- 1^{er} cas on fixe $\Delta t=0.25$, $k=20$ et on fait varier N



Image original



Image bruitée (bruit gaussien)



N=10



N=30



N=80

Figure III-4 : Résultats de la diffusion anisotrope (on fixe Δt , k et varier N)

- 2^{ème} cas on fixe $\Delta t=0.25$, $N=10$ et on fait varier k



k=5



k=30



k=50

Figure III-4 : Résultats de la diffusion anisotrope (on fixe Δt , N et varier k)

- 3^{ème} cas on fixe $\Delta t=0.25$, $N=5$ et on fait varier k



Image bruitée (bruit sel et poivre)



k=10



k=20



K=40

Figure III-5 : Résultats de la diffusion anisotrope (on fixe Δt , N et varier k)

Interprétation des résultats

En comparaison avec la méthode de diffusion isotrope, nous pouvons constater que la diffusion anisotrope est efficace pour restaurer l'image originale en supprimant le bruit tout en préservant les contours. L'augmentation du N et du k rend l'image floue.

La diffusion anisotrope présente un défaut majeur, le bruit correspond à une forte variation dans une zone uniforme, donc il y a risque que celui-ci interprété comme un contour dans une image fortement bruitée (bruit sel et poivre), l'augmentation du paramètre k permet de limiter ceci mais l'image s'en retrouve grandement altérée.

III-3 Tests de la diffusion anisotrope régularisée



Image bruitée (bruit sel et poivre)



N=10, k=10, delt t=0.25



N=10, k=20, delt t=0.25

Figure III-6 : Résultats de la diffusion anisotrope régularisée

Interprétation des résultats

En comparaison avec la méthode de diffusion anisotrope, nous pouvons constater que la diffusion anisotrope régularisée est efficace où le bruit correspond à une forte variation dans une zone uniforme, donc il n'y a pas de risque d'interpréter le bruit comme un contour dans une image fortement bruitée (bruit sel et poivre).

IV- Conclusion

On déduit que les trois méthodes de diffusion précédentes permettent d'améliorer les images telles que chaque méthode a des avantages et des inconvénients.

La diffusion anisotrope nécessite le réglage de deux paramètres libres k et Δt , dans le cadre de la restauration d'images, Δt est choisi plus faible, la solution souhaitée étant proche de l'image originale. Il n'existe pas de critère universel pour déterminer Δt de manière optimale.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'élaboration du présent travail, nous a permis d'approfondir et d'enrichir nos connaissances théoriques sur l'utilisation des Equations aux Dérivées Partielles dans le domaine de traitement d'images.

Nous avons, dans ce projet, présenté une méthode de restauration d'images par Equations aux Dérivées Partielles. Nous l'avons utilisée dans le but de réduire les effets du bruit.

On a proposé dans notre travail une approche classique du problème de la réduction de bruit en traitement d'images. Ceci va nous permettre d'introduire les notions de diffusions isotrope et anisotrope.

La diffusion isotrope engendre une disparition des contours et rend l'image de plus en plus floue.

La diffusion anisotrope s'agit d'un lissage conditionnel, dont le comportement est fonction de la norme du gradient de l'image, grâce à la fonction $c(\cdot)$. Le principe est de diffuser fortement dans les zones à faibles gradients (zones homogènes), et faiblement dans les zones à forts gradients (contours).

La méthode de diffusion anisotrope possède plusieurs inconvénients dont le premier est son inefficacité dans les zones où le bruit présente de fortes discontinuités. Une solution pour résoudre le problème est de travailler avec une version régularisée de l'équation impliquant le gradient

Nous espérons que ce travail sera d'un apport considérable pour les promotions à venir, ce qui enrichira la documentation universitaire.

Bibliographie

- [1] : Srishtid.Chatterji, cour d'analyse 3'équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, presses polytechniques et universitaires romandes.
- [2] : Florin BLANC, Clément RAMEL, Julien SOLEILHAVOUP, lissage d'images par équations à dérivées partielles projet semestriel Master 1 spécialité imagerie numérique.
- [3] : David Manceau, résolution pratique des EDP.
- [4] : Eva DEJNOZKOVA, Architecture dédiée au traitement d'image basé sur les EDP, Ecole des mines de paris collège doctorat (9 mars 2004).
- [5] : Meriem Macini, filtrage anisotropique et segmentation par level sets : Application aux images médicales, université Constantine, faculté des sciences de l'Ingénieur, Département d'Electronique, 25-11-2009.
- [6] : Georges Koepfler, EDP, université René des cartes.
- [7] : BENZARTI Faouzi, les EDP et leurs applications en traitement d'images, université de Tunis, école supérieure des sciences et techniques de Tunis (2008 /2009).
- [8] : David Hilbert, principales méthodes de discrétisation, Analyse numérique II, télé-enseignement, université Aix- Marseille, 27septembre 2010.
- [9] : Rachid Deriche et Olivier Faugeras, les EDPs en traitement des images et vision par ordinateur, unité de recherche INRIA Sophia Antipolis.
- [10] : C Ramber, H Batatia, A Ayache, coefficient de variation, diffusion anisotrope et B-spline snakes.
- [11] : TREMBLAIS Bnoit, la résolution numérique des EDP à l'extraction de caractéristiques linéiques dans les images, Université de piotiers (Faculté des sciences fondamentales et appliquées, 30 mars 1992)
- [12] : BENAMROUZ Saïd (ELN), KETTANE Siham, segmentation d'image par méthode adaptative basée sur les matrices de cooccurrences, UMMTO, 2009.

Résumé de thèse

Les méthodes de traitement d'images fondées sur les (EDP) bénéficient d'une attention particulière de la part de la communauté scientifique. Le nombre d'applications a considérablement augmenté après la formulation du problème sous forme d'ensembles de niveaux.

Les EDPs s'appliquent dans de nombreux domaines tels, les contours actifs utilisés pour la segmentation des images statiques, aussi bien que des séquences d'images (suivi d'objets), ainsi pour le filtrage d'image (diffusion isotrope et anisotrope).

Dans notre travail on s'intéresse au filtrage d'image, parmi les méthodes utilisées pour résoudre ce problème, on trouve les EDPs basées sur la diffusion isotrope et anisotrope. Chaque méthode a ces avantages et ces inconvénients tel que, la diffusion isotrope élimine le bruit, engendre une disparition des contours et rend l'image de plus en plus floue, la diffusion anisotrope s'agit d'un lissage conditionnel, dont le comportement est fonction de la norme du gradient de l'image, grâce à la fonction $c(\cdot)$. Le principe est de diffuser fortement dans les zones à faibles gradients (zones homogènes), et faiblement dans les zones à forts gradients (contours). La méthode de diffusion anisotrope possède plusieurs inconvénients dont le premier est son inefficacité dans les zones où le bruit présente de fortes discontinuités. Une solution pour résoudre le problème est de travailler avec une version régularisée de l'équation impliquant le gradient.

Nous espérons que ce travail sera d'un apport considérable pour les promotions à venir, ce qui enrichira la documentation