

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de fin de cycle

En vue d'obtention de diplôme de master en Mathématiques

Option: Probabilités et Statistique

Thème intitulé :

Copules de valeurs extrêmes

Réalisé par:

HOCINI Dyhia

Soutenu le : 02/11/2021

Devant le jury composé de :

Mme. ATIL Lynda	MCA	UMMTO	Présidente
Mme. BOUALAM Karima	MCB	UMMTO	Promotrice
Mme. MERABET Dalila	MCB	UMMTO	Examinatrice

Remerciements

Avant tout, je remercie ALLAH tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience pour réaliser ce modeste travail.

*Je tiens à remercier Madame **BOUALAM**, Maître de Conférence B, à l'Université de Mouloud MAMMERY (UMMTO), pour m'avoir guidée et accompagnée dans l'accomplissement de ce travail. Pour ses conseils et ses avis qui m'ont été d'une grande aide au cours de la réalisation de ce mémoire.*

*J'adresse mes grands remerciements à Madame **ATIL**, Maître de Conférence A, à l'Université de Mouloud MAMMERY (UMMTO), d'avoir présidé le jury, qu'elle trouve, ici, l'expression de mes respects et mes considérations.*

*Je tiens aussi à remercier Madame **MERABET**, Maître de Conférence B, à l'Université de Mouloud MAMMERY (UMMTO), d'avoir accepté de lire, d'examiner et juger ce manuscrit. Ses précieuses remarques et ses conseils seront d'une efficacité certaine.*

Je tiens également à remercier toute l'équipe de formation pour leur disponibilité au cours de ces années de ma formation en Mathématiques, pour leurs efforts à transmettre le savoir.

Je remercie, infiniment, mes très chers parents dont le sacrifice, la tendresse, l'amour et la patience sont l'essence de ma réussite, et toute personne ayant contribué à réaliser ce travail.

Dédicace

JE DÉDIE CET OUVRAGE

*A MES PARENTS QUI M'ONT SOUTENUE ET ENCOURAGÉE DURANT CES
ANNÉES D'ÉTUDES.*

*QU'ILS TROUVENT, ICI, LE TÉMOIGNAGE DE MA PROFONDE
RECONNAISSANCE.*

*A MES SŒURS, MA GRAND-MÈRE ET CEUX QUI ONT PARTAGÉ AVEC MOI
TOUS LES MOMENTS D'ÉMOTION LORS DE LA RÉALISATION DE CE
TRAVAIL. ILS M'ONT CHALEUREUSEMENT SUPPORTÉE ET ENCOURAGÉE
TOUT AU LONG DE MON PARCOURS.*

*A MA FAMILLE, MES PROCHES ET A CEUX QUI ME DONNENT DE L'AMOUR
ET DE LA VIVACITÉ.*

*A MES COPINES AVEC QUI J'AI PARTAGÉ LES MEILLEURS MOMENTS DE LA
RÉSIDENTENCE, AINSI QUE MES AMIES AVEC QUI J'AI PARTAGÈ MES ANNÉES
DE FORMATION, ET À QUI JE SOUHAITE BEAUCOUP DE SUCCÈS.*

AUX FUTURS LECTEURS.

Table des matières

Table des matières	2
Introduction générale	6
1 Copules	8
1.1 Introduction	8
1.2 Généralités sur les copules	9
1.2.1 Définitions et propriétés	9
1.2.2 Théorème de Sklar	11
1.2.3 Bornes de Fréchet-Hoeffding	13
1.2.4 Copules et mesures de dépendance	14
1.3 Copules usuelles	17
1.3.1 Copule d'indépendance	17
1.3.2 Copules Elliptiques	18
1.3.2.1 Copule Gaussienne	18
1.3.2.2 Copule de Student	20
1.3.3 Copules Archimédiennes	22
1.3.3.1 Copule de Frank	22
1.3.3.2 Copule de Clayton	24
1.3.3.3 Copule de Gumbel	26
1.4 Copules multidimensionnelles	28
1.4.1 Théorème de Sklar	29
1.4.2 Bornes de Fréchet-Hoeffding	30
2 Théorie des valeurs extrêmes	31
2.1 Introduction	31

2.2	Valeurs extrêmes univariées	32
2.2.1	Théorème de Fisher-Tippett	32
2.2.2	Caractérisation des domaines d'attraction	34
2.2.3	La distribution de valeurs extrêmes généralisée	36
2.2.4	Estimation de l'indice des valeurs extrêmes	36
2.2.4.1	Estimateur de Pickands	36
2.2.4.2	Estimateur de Hill	38
2.2.4.3	Estimateur des moments	38
2.3	Valeurs extrêmes bivariées	39
2.3.1	Distribution de valeurs extrêmes bivariées	40
2.3.2	Modèles de distribution BEV	43
2.3.2.1	La famille mixte	43
2.3.2.2	La famille logistique	44
3	Copules de valeurs extrêmes	46
3.1	Introduction	46
3.2	Caractérisation des copules de valeurs extrêmes	46
3.3	Dépendance de queue de distribution	48
3.4	Familles des copules de valeurs extrêmes	50
3.4.1	Copule de Marshall-Olkin	50
3.4.2	Copule de Hüsler-Reiss	51
3.4.3	Copule t-EV	52
3.4.4	Copule logistique	53
3.4.5	Copule de Tawn	53
3.4.6	Copule de Galambos	54
3.4.7	Copule de Joe	54
3.4.8	Copule BB5	54
3.5	Copule archimax	55
3.6	Estimation de la fonction de dépendance	56
3.6.1	Méthode d'estimation de Capéraà, Fougères et Genest	56
3.6.2	Méthode du seuil de Khoudradji	57
3.7	Application	58

Conclusion et perspectives	65
Bibliographie	65

Introduction générale

Au cours de ces dernières années, l'étude des événements extrêmes conjoints a envahi le champ de la recherche scientifique pour leur caractère imprévisible et leur impact sur l'être humain ainsi que sur son environnement. Certains de ces événements peuvent présenter des données multivariées, ce qui entraîne l'apparition des formes de dépendance entre les différentes variables extrêmes. Beaucoup de travaux ont été menés, dans plusieurs domaines, dont l'objet est l'étude de cette dépendance et sa modélisation. En finance, *Stărică* [52] analysait l'apparition des rendements extrêmes conjoints dans des paires de taux de change de devises européennes par rapport au dollar américain. Tandis que Longin et Solnik [42] ont étudié la dépendance entre les marchés boursiers internationaux en période de forte volatilité. En hydrologie, Gumbel et Goldstein [31] ont mené une recherche sur les débits maximaux de la rivière Ocmulgee en Géorgie, à deux stations distinctes situées en amont et en aval. Coles et Tawn [9] ont entrepris une analyse spatiale des précipitations extrêmes quotidiennes, dans le sud de l'Angleterre, dans le contexte de l'évaluation des risques sur les structures hydrologiques telles que les réservoirs, les réseaux d'inondations des rivières et les systèmes de drainage. Quant à De Haan et De Ronde [14], De Haan et al.[15], ils ont pu estimer la probabilité qu'une tempête provoque l'effondrement d'une certaine digue près de la ville de Petten, aux Pays-Bas, en raison d'une combinaison dangereuse du niveau de la mer et de la hauteur des vagues. Aldama et Ramirez [2] ont effectué des prévisions des crues décennales et centennales et hauteurs maximales des barrages et digues susceptibles de les contenir. Enfin, on peut marquer une étude, en assurance, par le travail de Cebrián et al.[7].

Les copules se sont avérées le moyen le plus utilisé pour la modélisation de la dépendance en question. Leur importance est due à leur propriété d'invariance aux transformations strictement croissantes ainsi que leur insensibilité aux lois marginales.

Une classe particulière de copules a été introduite dont l'objectif est la modélisation de la structure de dépendance des événements extrêmes multivariés. Il s'agit des copules de valeurs extrêmes. Cette classe est caractérisée par une fonction convexe appelée fonction

de dépendance de Pickands.

A travers ce travail, dans un premier chapitre, nous définissons la notion de la copule bivariée tout en montrant son rôle dans la modélisation de la structure de dépendance entre deux variables aléatoires, en s'appuyant sur son fondement théorique et quelques résultats importants. Dans le deuxième chapitre, nous faisons appel aux résultats fondamentaux de la théorie de valeurs extrêmes, en commençant, dans un premier temps, par le cas univarié, où nous définissons la loi asymptotique du maximum d'un échantillon, appelée distribution de valeurs extrêmes. Dans un deuxième temps, les résultats établis, dans le cas univarié, seront énoncés sous une extension bivariée en considérant l'étude de la loi asymptotique d'un copule de maxima, ou encore, la caractérisation de la distribution de valeurs extrêmes bivariées. Enfin, dans le dernier chapitre, nous allons définir les copules de valeurs extrêmes, citer leurs propriétés puis donner leur caractérisation par la fonction de dépendance extrême dont l'estimation fut l'objet de plusieurs études. Nous terminons ce chapitre par un exemple d'application qui illustre l'adéquation de ces copules à la modélisation des données extrêmes bivariées, et ce en s'appuyant sur l'estimation de la fonction de dépendance.

Chapitre 1

Copules

1.1 Introduction

La copule (un mot latin "copulae" désignant, au sens figuré, le lien entre différentes parties) est une classe de fonctions de répartition multivariées de marginales uniformes sur $[0, 1]$, adoptées par les statisticiens, au cours de ces dernières décennies, afin de modéliser les distributions multivariées, en tenant compte du comportement marginal, d'une manière assez simple. Cette classe fut aussi appelée par Deheuvels [16] "fonction de dépendance".

La théorie des copules est introduite par Abe Sklar [51], en 1959, en réponse à la question posée par Maurice Fréchet [24], sur les espaces métriques probabilisés. Son étude systématique a été menée, par Christian G enest [27] et son équipe, en 1980.

Puisque les autres mesures de dépendance (coefficient de corrélation linéaire, le tau de spearman et le tau de kendall) ne sont pas toujours significatives, les copules sont devenues un outil incontournable dans la modélisation de la structure de dépendance de la fonction de répartition conjointe et ses fonctions de répartition marginales, ce qui justifie le développement d'applications de cette théorie enregistr e depuis les années 90. Il est à noter que le nombre de résultats trouv es à la recherche du mot "copule" est de plus en plus grand, ce qui montre l'attention pr et ee à cette théorie qui apparaît dans plusieurs travaux de divers domaines, notamment en finance, elle est appliquée par Embrechts et al. [19], en Analyse de survie, par Lakhal-Chaieb et al. [41], comme elle trouve sa place en Hydrologie avec Favre et al. [21].

1.2 Généralités sur les copules

Dans cette section, nous définissons, dans un premier temps, la fonction de répartition conjointe d'un couple de variables aléatoires et en donner les propriétés essentielles pour, ensuite, définir la fonction copule et en donner les propriétés. Puis, nous allons énoncer le théorème fondamental de cette théorie qui est le théorème de Sklar [51] ainsi que le résultat qui permet de donner une méthode pour construire une copule. Ensuite, nous citerons les familles paramétriques construites à partir de cette méthode. Enfin, nous présenterons une extension de quelques résultats fondamentaux au cas multivarié.

1.2.1 Définitions et propriétés

Dans toute la suite, nous allons considérer le cas bidimensionnel.

Définition 1.1. Soient X et Y deux variables aléatoires, la fonction de répartition conjointe (bivariée) du couple (X, Y) est définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$H(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \quad (1.1)$$

A partir de la fonction de répartition conjointe, on peut retrouver les fonctions de répartition marginales F et G des variables aléatoires X et Y respectivement. En effet :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} H(x, y) \quad (1.2)$$

$$G(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x, y). \quad (1.3)$$

De plus, si X et Y sont continues, alors elles possèdent des densités marginales, notées f et g respectivement, données par :

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x};$$

$$g(y) = \frac{\partial G(y)}{\partial y}.$$

Dans ce cas, le couple aléatoire (X, Y) admet une densité conjointe h donnée par :

$$h(x, y) = \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (1.4)$$

Proposition 1.1. La fonction de répartition conjointe H vérifie les propriétés suivantes :

1. H est continue à droite.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} H(x, y) = 0$

3. H est doublement croissante, i.e., pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ avec : $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ on a :

$$H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) + H(x_1, y_1) \geq 0$$

Définition 1.2. Une copule bivariée est une fonction de répartition définie sur $[0, 1]^2$ dans $[0, 1]$ dont les lois marginales sont uniformes sur $[0, 1]$.

Proposition 1.2. Une copule $C : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall u \in [0, 1]$,

$$C(u, 0) = C(0, u) = 0 \quad (1.5)$$

2. $\forall u \in [0, 1]$,

$$C(u, 1) = C(1, u) = u \quad (1.6)$$

3. C est doublement croissante, i.e., $\forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in [0, 1]$, avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a :

$$C(u_1, v_1) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_2, v_2) \geq 0 \quad (1.7)$$

Les propriétés (1.5) et (1.6) confirment le fait qu'une copule C est une distribution bivariée dont les lois marginales sont uniformes sur $[0, 1]$.

Quant à la propriété (1.7), qui est une extension bidimensionnelle de la notion utilisée pour la croissance d'une fonction univariée, elle traduit le fait que la densité c d'une copule C est positive, i.e.,

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \geq 0, \forall (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (1.8)$$

Théorème 1.1. Toute copule C est uniformément continue sur son domaine, i.e.,

$\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$, on a :

$$|C(u_1, v_1) - C(u_2, v_2)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \quad (1.9)$$

En d'autres termes, la copule C vérifie l'inégalité de Lipschitz.

Théorème 1.2. Les dérivées partielles $u \mapsto \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$ et $u \mapsto \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$ d'une copule C existent presque sûrement et on a :

$$0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \leq 1;$$

$$0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \leq 1.$$

L'existence des dérivées partielles découle immédiatement du fait que la copule est une fonction continue et monotone.

Définition 1.3. Une copule C est dite symétrique si on a :

$$C(u, v) = C(v, u), \forall (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (1.10)$$

Une copule C est dite asymétrique si elle n'est pas symétrique, i.e., $\exists (u, v) \in [0, 1]^2$ telle que

$$C(u, v) \neq C(v, u) \quad (1.11)$$

1.2.2 Théorème de Sklar

La théorie des copules est fondée sur le théorème de Sklar [51] qui précise le lien, défini par la copule C , entre la fonction de répartition jointe et les fonctions de répartition marginales associées.

Théorème 1.3. (Sklar [51]) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, soit H la fonction de répartition conjointe du couple (X, Y) dont les fonctions de répartition marginales sont F et G associées respectivement à X et Y , alors il existe une copule C telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (1.12)$$

Si de plus F et G sont continues alors C est unique.

Par ce théorème, Sklar [51] met en relief le fait que toute fonction de répartition conjointe H de deux variables aléatoires X et Y est composée de ses distributions marginales F et G qui sont liées par une copule C .

Et de manière réciproque, si on a une copule C , et on connaît les distributions marginales F et G , alors la fonction H est une fonction de répartition jointe du couple (X, Y) et peut être représentée par la copule C et les marginales F et G . Cependant, nous nous posons la question suivante : Comment retrouver cette copule pour donner cette représentation ? Pour répondre à cette question, on définit d'abord l'inverse généralisé d'une fonction de distribution.

Définition 1.4. Soit F une fonction de distribution associée à une variable aléatoire X , alors l'inverse généralisé de F , notée F^{-1} , est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$F^{-1}(t) = \inf \{x \mid F(x) \geq t\}, t \in [0, 1]$$

L'inverse généralisé nous permet de calculer l'image réciproque de tout point x même si F n'admet pas de réciproque.

Corollaire 1.1. *Si H est une fonction de répartition conjointe de marges continues F et G de fonctions inverses respectivement F^{-1} et G^{-1} , alors $\forall(u, v)$ dans $[0, 1]^2$, on a :*

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \quad (1.13)$$

Ce résultat nous permet de trouver la copule C pour ensuite construire plusieurs familles de copules bivariées. On peut l'illustrer par l'exemple de construction suivant.

Exemple

Soit la fonction de répartition conjointe $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$H(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y}}$$

Les fonctions de répartition marginales sont données par :

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} H(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$G(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}$$

Les fonctions inverses de F et G sont respectivement F^{-1} et G^{-1} et sont données par :

$$F^{-1}(u) = -\ln\left(\frac{1}{u} - 1\right)$$

$$G^{-1}(v) = -\ln\left(\frac{1}{v} - 1\right)$$

Par application de la formule (1.13), on aura,

$$C(u, v) = H\left(-\ln\left(\frac{1}{u} - 1\right), -\ln\left(\frac{1}{v} - 1\right)\right)$$

Donc,

$$C(u, v) = \frac{uv}{u + v - 1}, \forall(u, v) \in [0, 1]^2$$

Théorème 1.4. *(Invariance) Soit le couple de variables aléatoires continues (X_1, X_2) de fonction de répartition conjointe H associée à une copule C , et soient T_1, T_2 deux fonctions strictement croissante, alors la fonction de répartition jointe du couple aléatoire $(T_1(X_1), T_2(X_2))$ est aussi associée à la même copule C .*

La copule C est dite invariante par les transformations strictement croissantes de variables aléatoires.

Cette propriété est de grande utilité dans la pratique. En effet, les statisticiens sont amenés parfois à transformer les données pour une meilleure exploitation.

Définition 1.5. (*Copule de survie*) Soit \bar{H} la fonction de survie d'un couple (X, Y) définie par :

$$\bar{H}(x, y) = P(X > x, Y > y),$$

telles que les fonctions de survie marginales sont définies par :

$$\bar{F}(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \bar{H}(x, y)$$

$$\bar{G}(y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{H}(x, y)$$

Alors on a :

$$\bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)) \tag{1.14}$$

\hat{C} est appelée copule de survie.

1.2.3 Bornes de Fréchet-Hoeffding

Par le résultat suivant, nous allons définir les bornes de Fréchet-Hoeffding [34] qui permettent d'encadrer toute copule C .

Proposition 1.3. (*Bornes de Fréchet-Hoeffding*) Pour toute copule C , on a :

$\forall u, v \in [0, 1]$

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \tag{1.15}$$

Où

$$M(u, v) = \min\{u, v\} \tag{1.16}$$

$$W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\} \tag{1.17}$$

M est appelée copule maximale de Fréchet-Hoeffding ou copule comonotone.

Quant à W , elle est appelée copule minimale de Fréchet-Hoeffding ou copule contramonotone.

1.2.4 Copules et mesures de dépendance

Le coefficient de corrélation de Pearson est l'une des premières mesures classiques introduites dans la mesure de dépendance entre deux variables aléatoires. Son utilité est très limitée. D'une part, son existence est liée aux moments d'ordres 1 et 2 qui ne sont pas définis pour certaines distributions de probabilité comme la distribution de Cauchy. D'autre part, il ne mesure que les corrélations linéaires. En d'autres termes, en exception de cas de deux variables gaussiennes, la corrélation nulle n'indique pas l'indépendance de ces variables. Enfin, le coefficient de corrélation de Pearson n'est pas invariant par transformations monotones, c'est à dire que la corrélation entre deux variables X et Y n'est pas la même que celle des variables $\log X$ et $\log Y$. Par ailleurs, deux autres mesures sont introduites pour remédier à ces inconvénients ; le coefficient de corrélation de Spearman et le tau de Kendall.

Définition 1.6. *Soient X et Y deux variables aléatoires de variances finies. Le coefficient de corrélation linéaire des variables X et Y , noté ρ , est défini par :*

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \quad (1.18)$$

Où :

$$\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$\text{Var}(X)$ et $\text{Var}(Y)$ sont les variances respectives de X et Y .

Si $\rho_{X,Y} = \pm 1$, alors on a une dépendance linéaire parfaite.

La corrélation nulle n'implique pas une indépendance sauf dans le cas de variables aléatoires gaussiennes.

Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont définis relativement à la notion de concordance.

Définition 1.7. *Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux observations issues du vecteur aléatoire (X, Y) , alors (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont dites :*

1. *Concordantes si :*

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2, y_1 < y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2, y_1 > y_2) \quad (1.19)$$

2. *Discordantes si :*

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2, y_1 > y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2, y_1 < y_2) \quad (1.20)$$

Définition 1.8. (Le tau de Kendall) Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple aléatoire dont les fonctions de répartition marginales sont continues, le tau de Kendall, appelé aussi coefficient de corrélation de rangs de Kendall, noté τ , est défini par :

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (1.21)$$

$Y = (Y_1, Y_2)$ est un couple aléatoire indépendant de $X = (X_1, X_2)$ et de même loi.

Le tau de Kendall est donc la différence entre la probabilité de la concordance et la probabilité de discordance.

Proposition 1.4. τ vérifie les propriétés suivantes :

1. τ est symétrique, i.e.,

$$\tau(X, Y) = \tau(Y, X)$$

2. $-1 \leq \tau \leq 1$

3. Si X et Y sont comonotones, alors $\tau = 1$. C'est le cas de concordance la plus solide.

4. Si X et Y sont antimonotones, alors $\tau = -1$. C'est le cas de discordance la plus solide.

5. Si X et Y sont indépendantes, alors $\tau = 0$.

6. τ est invariant par transformations non linéaires strictement croissantes, i.e., si a et b sont deux fonctions strictement croissantes, on a :

$$\tau(a(X), b(Y)) = \tau(X, Y)$$

Le tau de Kendall τ s'exprime en terme de la copule.

Théorème 1.5. Soient X et Y deux variables aléatoires continues de copule C . Alors le tau de Kendall τ est donné par :

$$\tau = 4 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 = 1 - 4 \int_{[0,1]^2} \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) dudv \quad (1.22)$$

Définition 1.9. (Le rho de Spearman) Soient $X = (X_1, X_2)$ un couple aléatoires dont les fonctions de répartition marginales sont continues, le rho de Spearman, appelé aussi coefficient de corrélation de rangs de Spearman, noté ρ_s , est défini par :

$$\rho_s = 3P[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0] \quad (1.23)$$

$Y = (Y_1, Y_2)$ est un couple aléatoire indépendant de $X = (X_1, X_2)$ et de même loi.

Le rho de Spearman est proportionnel à la différence entre la probabilité de concordance et la probabilité de discordance.

Proposition 1.5. ρ_s vérifie les propriétés suivantes :

1. ρ_s existe toujours.
2. $-1 \leq \rho_s \leq 1$
3. Si X et Y sont comonotones, alors $\rho_s = 1$. C'est le cas de concordance la plus solide.
4. Si X et Y sont antimonotones, alors $\rho_s = -1$. C'est le cas de discordance la plus solide.
5. Si X et Y sont indépendantes, alors $\rho_s = 0$.
6. ρ_s est invariant par transformations non linéaires strictement croissantes, i.e., si a et b sont deux fonctions strictement croissantes, on a :

$$\rho_s(a(X), b(Y)) = \rho_s(X, Y)$$

Le rho de Spearman ρ_s s'exprime en terme de la copule.

Théorème 1.6. Soient X et Y deux variables aléatoires continues de copule C . Alors le rho de Spearman ρ_s est donné par :

$$\rho_s = 12 \int_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3 = 12 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dudv - 3 \quad (1.24)$$

Le théorème suivant décrit la relation entre le tau de Kendall et le rho de Spearman.

Théorème 1.7. Soient X et Y deux variables aléatoires continues, τ et ρ_s désignent le tau de Kendall et le rho de Spearman respectivement, alors

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho_s \leq 1 \quad (1.25)$$

$$\frac{1 + \rho_s}{2} \geq \left(\frac{1 + \tau}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \rho_s}{2} \geq \left(\frac{1 - \tau}{2}\right)^2 \quad (1.26)$$

Dans la section suivante, nous allons voir des exemples d'application des formules (1.22) et (1.24) au calcul des mesures de dépendance associées aux couples paramétriques qu'on va présenter dans la section suivante.

1.3 Copules usuelles

La formule (1.13) a permis de construire plusieurs familles paramétriques de copules qu'on peut répartir en deux types : Les copules elliptiques et les copules archimédiennes. Dans cette section nous allons présenter ces deux types et en donner les différentes familles pour chacun ainsi que leurs propriétés.

1.3.1 Copule d'indépendance

Définition 1.10. *On appelle une copule d'indépendance toute copule $\Pi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que :*

$$\Pi(u, v) = u.v \quad (1.27)$$

La copule d'indépendance appelée aussi "Copule produit" est une caractérisation de l'indépendance entre deux variables aléatoires. En effet, si X et Y sont deux variables aléatoires et C est la copule associée, alors X et Y sont indépendantes si et seulement si $C(u, v) = \Pi(u, v)$.

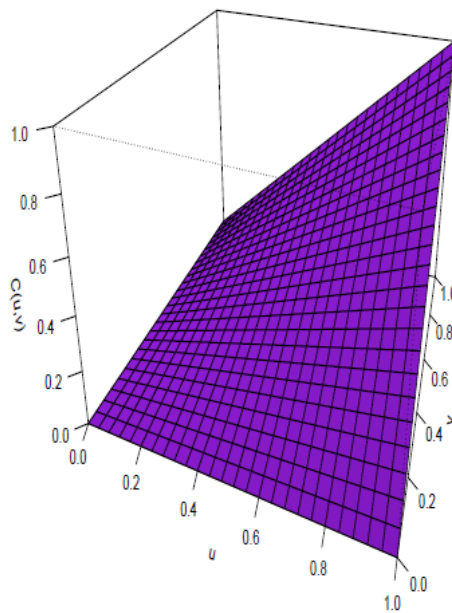


FIG. 1.1: Représentation de la copule d'indépendance

1.3.2 Copules Elliptiques

La copule elliptique est la copule associée à la distribution elliptique qui est une transformation affine d'une loi sphérique.

Un couple de variables aléatoires (X, Y) est distribué selon une loi sphérique si X a la même loi que QY , avec Q est une matrice orthogonale dont l'inverse est sa transposée (i.e. $Q^T Q = Q Q^T = I_2$). En d'autres termes, cette loi est invariante par rotation.

On peut distinguer deux familles de copules elliptiques, la copule Gaussienne et la copule de Student.

1.3.2.1 Copule Gaussienne

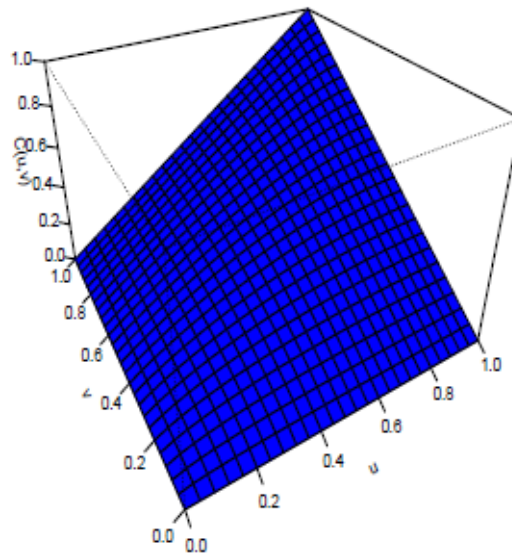
L'importance de cette copule réside dans le fait qu'elle est sous-jacente à la distribution normale multidimensionnelle. En effet, modéliser la structure de dépendance d'un échantillon par une copule gaussienne est cohérent avec la mesure de cette dépendance par le coefficient de corrélation.

Définition 1.11. Soit $\rho \in]-1, 1[$, le coefficient de corrélation, et soient Φ la fonction de répartition d'une loi normale centrée et réduite et Φ_ρ la distribution normale de matrice de corrélation Σ associée à ρ . La copule gaussienne notée C_ρ est définie par :

$$C_\rho(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{2(1-\rho^2)}\right\} ds dt \quad (1.28)$$

Où

$$\Phi_\rho(u, v) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{2(1-\rho^2)}\right\} ds dt \quad (1.29)$$

FIG. 1.2: Représentation de la copule gaussienne ($\rho = 0.6$)

Les cas limites de la copule gaussienne sont donnés comme suit :

1. Si $\rho = 0$ alors C est une copule d'indépendance Π .
2. Si $\rho = -1$ alors C est une copule minimale W.
3. Si $\rho = 1$ alors C est une copule maximale M.

Proposition 1.6. *La densité conjointe de la copule gaussienne qu'on note c_ρ est définie par :*

$$c_\rho(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{\Phi^{-1}(u)^2 + \Phi^{-1}(v)^2 - 2\rho\Phi^{-1}(u)\Phi^{-1}(v)}{2(1-\rho^2)} + \frac{\Phi^{-1}(u)^2 + \Phi^{-1}(v)^2}{2} \right\} \quad (1.30)$$

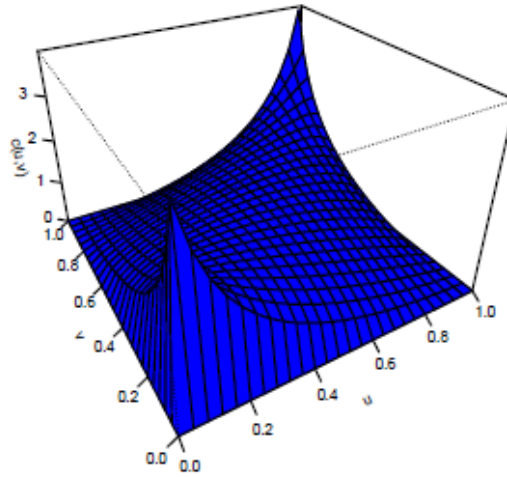


FIG. 1.3: Représentation de la densité de la copule gaussienne ($\rho = 0.6$)

Le coefficient de corrélation de Spearman ρ_s et le tau de Kendall τ associés à la copule gaussienne sont donnés, respectivement, par

$$\rho_s = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$$

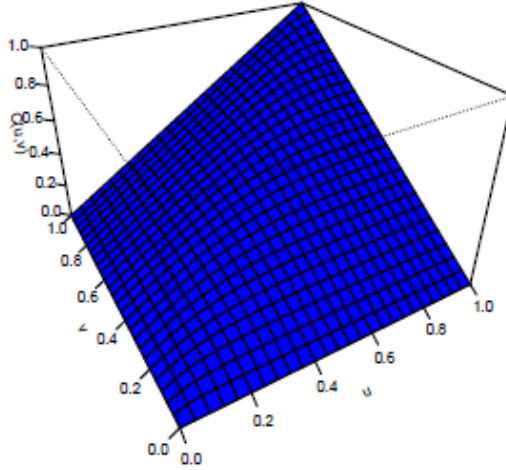
1.3.2.2 Copule de Student

Définition 1.12. La copule de Student, de paramètre ρ et de degré de liberté d , est définie par :

$$C_{\rho,d}(u, v) = \int_{-\infty}^{t_{\rho,d}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\rho,d}^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{d(1-\rho^2)} \right\}^{-\frac{(d+2)}{2}} ds dt \quad (1.31)$$

Où

$$t_{\rho,d}(u, v) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{d(1-\rho^2)} \right\}^{-\frac{(d+2)}{2}} ds dt \quad (1.32)$$


 FIG. 1.4: Représentation de la copule de Student ($\rho = 0.8, d = 4$)

Définition 1.13. La densité conjointe de la copule de student qu'on note $c_{\rho,d}$ est définie par :

$$c_{\rho,d}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left\{1 + \frac{t_u^2 + t_v^2 - 2\rho t_u t_v}{d(1-\rho^2)}\right\}^{-\frac{(d+2)}{d}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^2 \left\{\left(1 + \frac{t_u^2}{d}\right) \left(1 + \frac{t_v^2}{d}\right)\right\}^{-\frac{(d+1)}{2}}} \quad (1.33)$$

$$t_u = t_d^{-1}(u), \quad t_v = t_d^{-1}(v)$$

Le coefficient de corrélation de Spearman ρ_s et le tau de Kendall τ associés à la copule de Student sont donnés, respectivement, par

$$\rho_s = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$$

Par construction, la copule gaussienne et celle de Student sont proches dans leurs parties centrales, et se rapprochent dans leurs queues seulement lorsque le degré de liberté de la copule de Student augmente. Ce qui les rend difficiles à distinguer. Néanmoins, ces deux familles de copules sont symétriques et simples à utiliser du fait que l'on connaît les distributions qui leur sont associées. De plus, la copule de Student, contrairement à la copule Gaussienne, elle réussit à bien capter les dépendances aux extrêmes, tant positives que négatives.

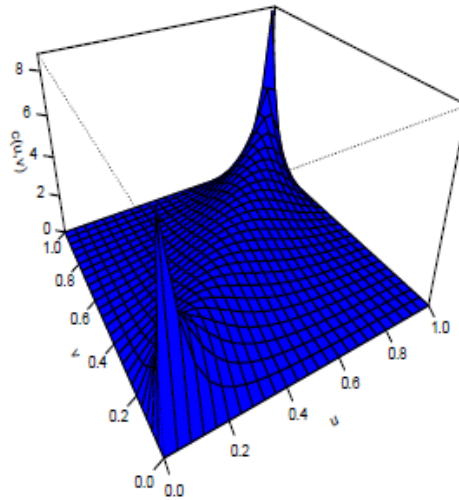


FIG. 1.5: Représentation de la densité de la copule de Student ($\rho = 0.8, d = 4$)

1.3.3 Copules Archimédiennes

Cette classe est définie par Genest et MacKay [27], en 1986 . Elle englobe un très grand nombre de copules ayant des propriétés intéressantes. Comme l'ont souligné Frees et Valdez [25], la modélisation de la structure de dépendance entre des différentes sources de risques dans la théorie de l'assurance mènent à des copules Archimédiennes.

Définition 1.14. Soit $\Psi : [0, 1] \longrightarrow [0, \infty]$ une fonction convexe strictement décroissante telle que

$\Psi(1) = 0$. On appelle une copule Archimédienne de générateur Ψ , la copule définie, $\forall u, v \in [0, 1]$, par :

$$C(u, v) = \Psi^{-1}(\Psi(u) + \Psi(v)) \quad (1.34)$$

Si $\Psi(0) = \infty$, alors on dit que Ψ est un générateur strict.

En choisissant certains générateurs, on obtient les grandes familles de copules archimédiennes que nous citons dans la sous-section suivante.

1.3.3.1 Copule de Frank

La copule de Frank [23] est populaire car, contrairement à d'autres copules, elle permet une dépendance négative entre les marginales. Cette dépendance est symétrique dans les deux queues de la distribution.

Définition 1.15. En posant $\Psi(x) = -\ln \left\{ \frac{e^{-\theta x} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right\}$, pour $\theta \in [0, -1[\cup] - 1 + \infty[$, dans (1.34), on obtient la copule de Frank définie par :

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right\} \quad (1.35)$$

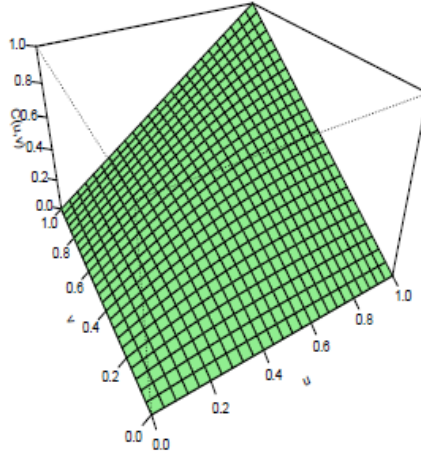


FIG. 1.6: Représentation de la copule de Frank

Les cas limites de la copule de Frank sont les suivants :

1. $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} C_\theta(u, v) = M(u, v)$
2. $\lim_{\theta \rightarrow -1} C_\theta(u, v) = W(u, v)$
3. $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(u, v) = \Pi(u, v)$

On peut conclure que la famille de Frank est complète du fait qu'elle contient la copule d'indépendance Π et les bornes de Fréchet W et M .

Définition 1.16. La fonction de densité d'une copule de Frank est définie, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, par :

$$c_\theta(u, v) = \frac{\theta - 1}{\ln(\theta^{u+v})} (\theta - 1 + (\theta^u - 1)(\theta^v - 1))^2 \quad (1.36)$$

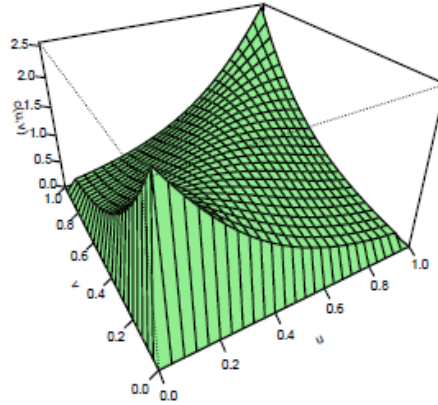


FIG. 1.7: Représentation de la densité de la copule de Frank

Le tau de Kendall τ associé à une copule archimédienne de générateur Ψ est donné par

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\Psi(t)}{\Psi'(t)} dt \quad (1.37)$$

Ψ' est la dérivée de Ψ .

Le tau de Kendall associé à la copule de Frank est donné par

$$\tau = 1 - \frac{4}{\theta}(1 - D_1(\theta))$$

Tandis que le coefficient de corrélation de Spearman associé est donné par

$$\rho_s = 1 - \left[\frac{12(D_1(\theta) - D_2(\theta))}{\theta} \right]$$

$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt$, $k > 0$ est appelée la fonction de Deybe.

1.3.3.2 Copule de Clayton

La copule de Clayton [8] est construite en 1978. Son étude initiale a été menée par Kimeldorf et Sampson [40], et elle a été discutée par Clayton [8], Cook et Johnson [10] et Oakes [45].

Définition 1.17. En posant $\Psi(x) = \theta^{-1}(t^{-\frac{1}{\theta}} - 1)$ dans (1.34), avec $\theta \in]-1 + \infty[\setminus \{0\}$, on obtient la copule de Clayton qu'on définit comme suit :

$$C_\theta(u, v) = \max \left\{ \left(u^{-\frac{1}{\theta}} + v^{-\frac{1}{\theta}} - 1 \right)^{-\theta}, 0 \right\} \quad (1.38)$$

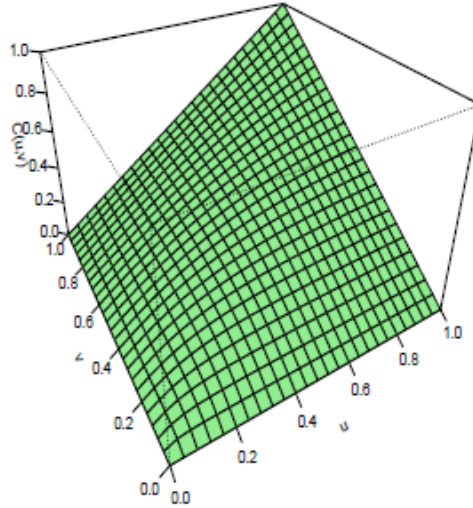


FIG. 1.8: Représentation de la copule de Clayton

Les cas limites de la copule de Clayton sont comme suit :

1. $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} C_\theta(u, v) = M(u, v)$
2. $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(u, v) = \Pi(u, v)$
3. $\lim_{\theta \rightarrow -1} C_\theta(u, v) = W(u, v)$

Comme la famille de Frank, la famille de Clayton est complète.

Définition 1.18. *La fonction de densité de la copule de Clayton est définie, pour tout $\theta > 0$, comme suit :*

$$c_\theta(u, v) = (\theta + 1) (uv)^{-\theta-1} (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}-2} \quad (1.39)$$

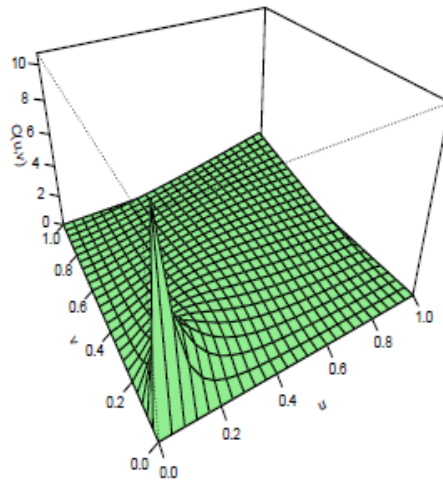


FIG. 1.9: Représentation de la densité de la copule de Clayton

Le tau de Kendall associé à la copule de Clayton est donné par

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}$$

1.3.3.3 Copule de Gumbel

Nous allons définir ci-après la copule de Gumbel.

Définition 1.19. Si on prend comme générateur $\Psi(x) = (-\ln(x))^\theta$, dans la formule (1.34), avec $\theta \geq 1$, on obtient la copule de Gumbel définie comme suit :

$$C_\theta(u, v) = \exp \left\{ - \left[-\ln(u)^\theta + -\ln(v)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (1.40)$$

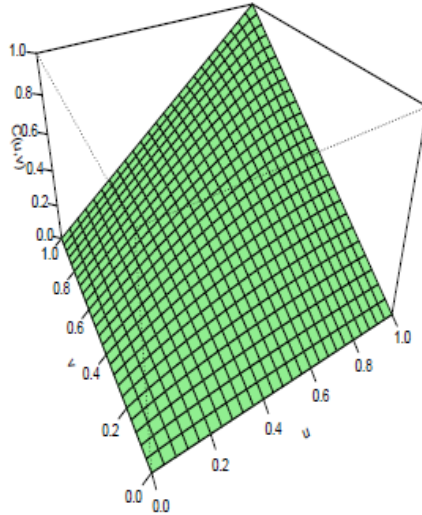


FIG. 1.10: Représentation de la copule de Gumbel

Les cas limites de la copule de Gumbel sont :

1. $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} C_\theta(u, v) = M(u, v)$
2. $\lim_{\theta \rightarrow 1} C_\theta(u, v) = \Pi(u, v)$

Cette copule n'atteint pas la borne inférieure de Fréchet.

Définition 1.20. La fonction de densité de la copule de Gumbel est définie, pour tout $\theta > 0$, par :

$$c_\theta(u, v) = C_\theta(u, v) \{\Psi_\theta(u) + \Psi_\theta(v)\}^{\frac{1}{\theta}-2} \left\{ \theta - 1 + (\Psi_\theta(u) + \Psi_\theta(v))^{\frac{1}{\theta}} \right\} \left\{ \frac{\Psi_{\theta-1}(u)\Psi_{\theta-1}(v)}{u.v} \right\} \quad (1.41)$$

Où : $\Psi_\theta(u) = (-\ln(u))^\theta$

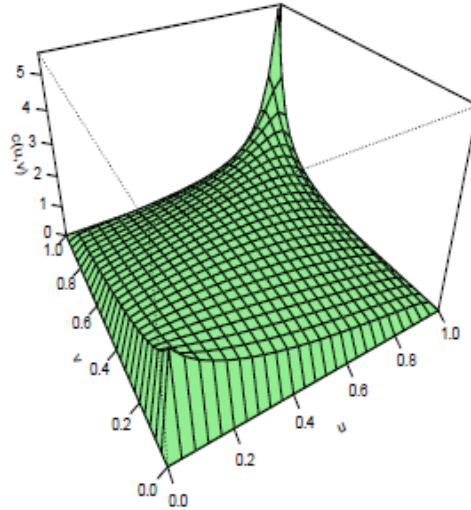


FIG. 1.11: Représentation de la densité de la copule de Gumbel

Le tau de Kendall associé à la copule de Gumbel est donné par

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$$

1.4 Copules multidimensionnelles

Toutes les propriétés citées dans la section précédente peuvent être étendues au cas multidimensionnel.

Définition 1.21. (*Fonction de répartition multivariée*) Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire de dimension d . La fonction de répartition conjointe de X est la fonction à d variables définie par :

$$H(x_1, \dots, x_d) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$$

Proposition 1.7. La fonction H vérifie les propriétés suivantes :

1. H est continue à droite.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x_1, \dots, x_d) = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x_1, \dots, x_d) = 1$
4. $\forall (a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$, tels que $a_i \leq b_i$, on a :

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} H(x_{1_{i_1}}, \dots, x_{d_{i_d}}) \geq 0,$$

avec : $x_{j_1} = a_j$ et $x_{j_2} = b_j, \forall j$, et $x_{jk} \in [0, 1], \forall j$ et k .

Définition 1.22. Une copule d -dimensionnelle $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ est une fonction de répartition multivariée dont les lois marginales sont uniformes sur $[0, 1]$:

$$C(U_1, \dots, U_d) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d)$$

Proposition 1.8. Toute copule C vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall u \in [0, 1]^d$, on a : $C(u) = 0$ si au moins une coordonnée de u est nulle.
2. $\forall u_i \in [0, 1], \forall i = 1, \dots, d$, on a : $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$.
3. C est d -croissante.

Proposition 1.9. Toute copule d -dimensionnelle C vérifie l'inégalité de Lipschitz, i.e., $\forall u, v \in [0, 1]^d$, on a :

$$|C(u_1, \dots, u_d) - C(v_1, \dots, v_d)| \leq \sum_{i=1}^d |u_i - v_i|$$

Cette propriété implique que la copule C est uniformément continue sur son domaine.

Proposition 1.10. Soit C une d -copule. Pour presque tout $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$, la dérivée partielle de C par rapport à u_i existe et :

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_d) \leq 1$$

1.4.1 Théorème de Sklar

Théorème 1.8. (Sklar [51]) Soit F une fonction de répartition d -dimensionnelle de fonctions de répartition marginales F_1, \dots, F_d , alors \exists une copule C telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

Si les fonctions F_1, \dots, F_d sont continues, alors C est unique.

Corollaire 1.2. Si F est une fonction de répartition conjointe des marges F_1, \dots, F_d de fonctions inverses respectivement $F_1^{-1}, \dots, F_d^{-1}$, alors $\forall (u_1, \dots, u_d)$ dans le domaine de C , on a :

$$C(u_1, \dots, u_d) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))$$

1.4.2 Bornes de Fréchet-Hoeffding

Les bornes de Fréchet-Hoeffding dans les cas multidimensionnel est une extension du cas bidimensionnel.

Théorème 1.9. (*Bornes de Fréchet-Hoeffding [34]*) *Pour toute copule d-dimensionnelle C, on a : $\forall(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$,*

$$W(u_1, \dots, u_d) \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq M(u_1, \dots, u_d)$$

M est la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding, ou la copule maximale, définie par :

$$M = \min \{u_1, \dots, u_d\}$$

W est la borne inférieure de Fréchet-Hoeffding définie par :

$$W = \max \{0, u_1 + \dots + u_d - d + 1\}$$

Dans le cas d-dimensionnel, contrairement à M, W n'est pas une copule.

Chapitre 2

Théorie des valeurs extrêmes

2.1 Introduction

Les tremblements de terre, les accidents nucléaires, crises monétaires ou financières et mêmes les krachs boursiers font partie des événements rares ayant une faible probabilité d'apparition. Leur étude domine l'actualité quotidienne, et cela est dû à leur caractère imprévisible lié au hasard. La théorie des valeurs extrêmes (TVE) est une branche des statistiques introduite dans le but de modéliser et de décrire la survenue de ce genre d'évènements.

La théorie statistique classique, notamment le théorème bien connu de la limite centrale, permet de faire de l'inférence sur les valeurs centrales d'un échantillon mais ne donne que très peu d'informations sur la queue de distribution. La particularité de la théorie des valeurs extrêmes est qu'elle se concentre sur la queue de distribution engendrant les divers phénomènes extrêmes étudiés.

La TVE, développée par Fisher et Tippett [22], a trouvé sa place en :

- Climatologie : Etude des évènements climatiques extrêmes (précipitations, températures, chutes de neige), modélisation des grands feux de forêt ;
- Hydrologie : Crues consécutives à des pluies torrentielles : Au Sénégal (inondation de 1994 et celle de 2003 entraînant l'ouverture de la Brèche) ; aux Pays-Bas, digues menacées par l'effet conjoint des grandes marées et des conditions climatiques en Mer du Nord (Inondation de 1953)
- Assurance : Survenue des sinistres d'intensité exceptionnelle (Ouragan Katrina en 2005, importants incendies en risques industriels, sinistres graves en responsabilité civile automobile) qui peuvent avoir des conséquences négatives sur les résultats et la solvabilité des organismes d'assurance.

- Finance : Etude des fortes variations du cours d'actifs financiers, gestion du risque opérationnel des banques (crise des subprimes, fin des années 2000).

2.2 Valeurs extrêmes univariées

La théorie des valeurs extrêmes a été développée en parallèle avec la théorie de la limite centrale. Le lien entre ces deux théories a été décrit par Heyde [32] dans son théorème sur les grandes déviations, qui montre que, pour un nombre entier n grand, la probabilité pour que la somme de réalisations d'une suite de n variables aléatoires iid soit supérieure à un seuil x assez grand est proche de la probabilité pour que la plus grande des réalisations de cette suite soit supérieure à x . Cette réalisation est l'événement extrême dont on cherche à estimer la distribution.

2.2.1 Théorème de Fisher-Tippett

On considère un échantillon de variables aléatoires iid X_1, \dots, X_n réparties selon une distribution commune F . La fonction de distribution de $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ est donnée par

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = F^n(x) \quad (2.1)$$

La loi de M_n nous informe au sujet des événements extrêmes. Or, M_n tend vers un nombre réel, appelé "point terminal", qui peut être infini, quand $n \rightarrow \infty$.

Définition 2.1. *On appelle le point terminal ou le point le plus à droite d'une fonction de répartition F , noté x_F , la borne supérieure du support de F défini par*

$$x_F = \sup\{x \in \mathbb{R}, F(x) < 1\} \leq \infty$$

La proposition suivante montre la convergence presque sûre de la suite des maximums $\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$ vers le point terminal.

Proposition 2.1. *La suite des maximums $\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$, converge presque sûrement vers le point terminal x_F , quand $n \rightarrow \infty$, i.e.,*

$$M_n \xrightarrow{p.s.} x_F, n \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

Puisqu'on a la convergence presque sûre de $\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$, on aura automatiquement la convergence en loi, d'où le résultat suivant.

Corollaire 2.1. *La suite des maximums $\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge en loi vers une variable aléatoire dégénérée concentrée en x_F , en effet :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_F; \\ 1, & x \geq x_F. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les convergences données par les équations (2.2) et (2.3) présentent un intérêt limité, et elle n'apportent pas beaucoup d'information sur les événements extrêmes. De plus, Le calcul de ces distributions n'est pas toujours facile car la loi de la variable parente est rarement connue avec précision, comme dans le cas d'une variable aléatoire normale dont la fonction de distribution ne possède pas une expression analytique. D'où l'intérêt de l'étude du comportement asymptotique du maximum M_n normalisé. Alors, peut-on trouver des suites de normalisation $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ et une loi non dégénérée H telle que

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right\} = F^n(a_n x + b_n) \longrightarrow H(x), n \longrightarrow \infty$$

Fisher et Tippett [22] ont répondu à cette question, par un théorème fondamental de la TVE et qui porte leur nom et celui de Gnedenko [29] à qui la preuve rigoureuse a été attribuée. Ce théorème indique que quelque soit la loi de la variable parente X , la loi limite possible des extrêmes est toujours de la même forme.

Théorème 2.1. *(Fisher-Tippett) Soit X_1, X_2, \dots, X_n une suite de variables aléatoires iid. S'il existe des constantes normalisantes $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ et une loi non dégénérée H telle que*

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{L} H$$

Alors H est l'une des trois lois limites suivantes :

1. *Fréchet*

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0, \alpha > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

2. *Weibull*

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{-\alpha}}, & x \leq 0, \alpha < 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

3. *Gumbel*

$$\Theta(x) = e^{-e^{-x}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

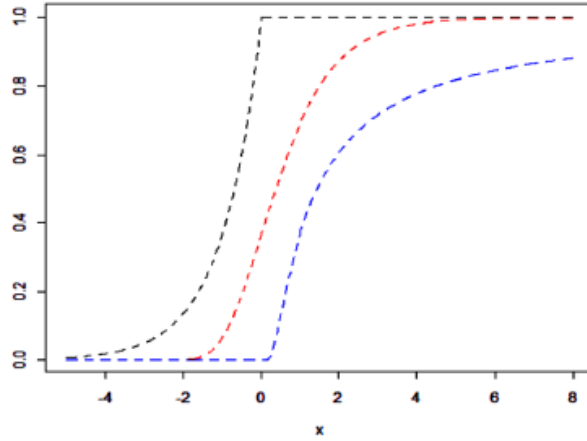


FIG. 2.1: Représentation des distributions de valeurs extrêmes pour $\alpha = 1$: le bleu pour le type de Fréchet, le rouge pour le type de Gumbel et le noir pour le type de Weibull

2.2.2 Caractérisation des domaines d'attraction

On considère que H est une distribution de valeurs extrêmes, c'est à dire que H est la fonction de distribution de la loi de probabilité limite de M_n . Le problème consiste à répondre à la question suivante : Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance d'une distribution F de la variable X au domaine d'attraction de H ? La réponse à cette question est contenue dans les travaux de De Haan et Ferreira [13], Resnick [48], qui ont proposé des caractérisations qui font appel à la notion de fonction à variation régulière qu'on va définir par la suite.

Définition 2.2. On dit qu'une distribution F appartient au domaine d'attraction de H , et on note $F \in DA(H)$, s'il existe des constantes $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x)$$

Définition 2.3. Une fonction F est dite à variation régulière d'indice α si, $\forall t > 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = t^\alpha$$

Si $\alpha = 0$, on dit que F est à variation lente.

Théorème 2.2. [13] On dit que F appartient au domaine d'attraction de Fréchet ($\alpha > 0$) si et seulement si $x_F = \sup\{x, F(x) < 1\} = \infty$ et la fonction $\bar{F} = 1 - F$ est à variations

régulières, i.e., $\forall x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(t)} = x^{-\alpha},$$

Dans ce cas, les suites de normalisation sont données par :

$$b_n = 0; a_n = F^{-1} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Ce résultat assure que toute fonction appartenant au domaine de Fréchet est à variations régulières.

Parmi les distributions qui appartiennent à ce domaine d'attraction on peut citer les distributions de Pareto et de Cauchy.

Théorème 2.3. [13] On dit que F appartient au domaine d'attraction de Weibull ($\alpha < 0$) si et seulement si $x_F = \infty$ et $\forall x > 0$ on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - F(x - tx)}{1 - F(x_F - t)} = x^{-\alpha},$$

Dans ce cas, les constantes de normalisation sont données par :

$$b_n = x_F; a_n = x_F - F^{-1} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Les distributions de ce domaine sont à support borné. On peut citer à titre d'exemple les distributions Uniforme et Beta.

Théorème 2.4. [13] On dit que F appartient au domaine d'attraction de Gumbel si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow x_f} \frac{\overline{F}(t + xf(t))}{\overline{F}(t)} = e^{-x}$$

Où

$$f(t) = \frac{\int_t^{x_F} 1 - F(s) ds}{1 - F(t)}$$

Dans ce cas, les constantes de normalisation sont données par :

$$b_n = F^{-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right); a_n = F^{-1} \left(1 - \frac{1}{ne} \right) - F^{-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Le domaine d'attraction de Gumbel regroupe une grande variété de lois usuelles (la loi normale, exponentielle, gamma, log-normale).

Les trois types de distribution des valeurs extrêmes ont des expressions différents. Cependant, chacune peut conduire à une autre par une transformation fonctionnelle. En effet

$$X \sim \Phi_\alpha \iff \ln X^\alpha \sim \Theta \iff -\frac{1}{X} \sim \Psi_\alpha$$

2.2.3 La distribution de valeurs extrêmes généralisée

On a vu dans la section précédente que les trois types de distribution de valeurs extrêmes se comportent différemment, bien que des transformations fonctionnelles permettent de choisir l'un de ces types adéquat aux données qu'on a. Une approche meilleure est donnée grâce aux travaux de Von Mises [54], de Jekinson [36] et Gnedenko [29] qui ont donné une représentation à la distribution des valeurs extrêmes qui combine les trois types.

Définition 2.4. *On appelle une distribution de valeurs extrêmes généralisée (Generalized Extreme Value Distribution GEVD), notée H_γ , toute fonction de répartition qui a, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'expression suivante :*

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}), & \text{si } \gamma \neq 0 \text{ et } 1 + \gamma x > 0; \\ \exp(-e^{-x}) & \text{si } \gamma = 0. \end{cases}$$

Le paramètre γ , appelé "Indice des valeurs extrêmes", contrôle la lourdeur (l'épaisseur) de la queue de la distribution, plus γ est grand, plus la queue de H_γ est épaisse et par conséquent, le poids des événements extrêmes contenue dans la distribution F est important, d'où l'intérêt de l'étude de son signe. On peut donc distinguer les trois cas suivants :

- Si $\gamma > 0$, alors la distribution a une queue lourde.
- Si $\gamma < 0$, alors la distribution a une queue fine.
- Si $\gamma = 0$, alors la distribution a une queue intermédiaire.

2.2.4 Estimation de l'indice des valeurs extrêmes

Vu l'importance de l'indice des valeurs extrêmes γ dans l'application de la TVE, plusieurs chercheurs se sont intéressés à donner une estimation à ce paramètre, on peut citer, à titre d'exemple, Pickands [46], Hill [33] et Dekkers et al. [18].

On considère un échantillon ordonné de variables aléatoires iid $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ et $k = (k_n)_n$ une suite d'entiers vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = \infty, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = 0$$

2.2.4.1 Estimateur de Pickands

L'estimateur de Pickands est le premier estimateur proposé pour l'indice des valeurs extrêmes γ .

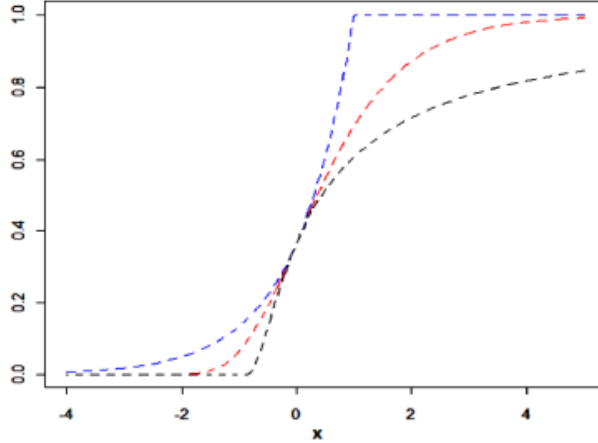


FIG. 2.2: Représentation de GEVD pour différentes valeurs de γ : Le tracé bleu : $\gamma = 1$, le tracé noir : $\gamma = -1$ et le tracé rouge : $\gamma = 0$.

Définition 2.5. *L'estimateur de Pickands, noté $\hat{\gamma}_P$, est défini par*

$$\hat{\gamma}_P = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X_{(n-k,n)} - X_{(n-2k,n)}}{X_{(n-2k,n)} - X_{(n-4k,n)}}, k = 1, \dots, \frac{n}{4}$$

Le théorème suivant donne les propriétés asymptotiques de l'estimateur de Pickands.

Théorème 2.5. *Supposons que $F \in DA(H_\gamma)$ pour $\gamma \in \mathbb{R}$, alors :*

1. $\hat{\gamma}_P$ est faiblement consistant, i.e.,

$$\hat{\gamma}_P \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma, n \longrightarrow \infty$$

2. Si $\frac{k}{\ln \ln(n)} \longrightarrow \infty$, $\hat{\gamma}_P$ est fortement consistant, i.e.,

$$\hat{\gamma}_P \xrightarrow{p.s} \gamma, n \longrightarrow \infty$$

3. Sous certaines conditions sur k et F , $\hat{\gamma}_P$ est asymptotiquement normal, i.e.,

$$\sqrt{k}(\hat{\gamma}_P - \gamma) \xrightarrow{L} N(0, \eta^2), n \longrightarrow \infty$$

$$\eta^2 = \frac{\gamma \sqrt{(2^{2\gamma+1} + 1)}}{2(2^\gamma - 1) \ln 2}$$

Pickands [46] démontre la consistance faible de son estimateur. Cependant, la consistance forte et la normalité asymptotique ont été démontrées par Dekkers et al. [18].

2.2.4.2 Estimateur de Hill

Cet estimateur est introduit par Hill [33] pour estimer l'indice de queue des lois appartenant au domaine de Fréchet.

Définition 2.6. *L'estimateur de Hill, noté $\hat{\gamma}_H$, est défini par*

$$\hat{\gamma}_H = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln X_{n-i+1,n} - \ln X_{n-k,n}$$

Le théorème suivant établit les propriétés asymptotiques de l'estimateur de Hill.

Théorème 2.6. *Supposons que $F \in DA(H_\gamma)$ pour $\gamma > 0$, alors :*

1. $\hat{\gamma}_H$ est faiblement consistant, i.e.,

$$\hat{\gamma}_H \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma, n \longrightarrow \infty$$

2. Si $\frac{k}{\ln \ln(n)} \longrightarrow \infty, \hat{\gamma}_H$ est fortement consistant, i.e.,

$$\hat{\gamma}_H \xrightarrow{p.s} \gamma, n \longrightarrow \infty$$

3. Sous certaines conditions sur k et F , $\hat{\gamma}_H$ est asymptotiquement normal, i.e.,

$$\sqrt{k}(\hat{\gamma}_H - \gamma) \xrightarrow{L} N(0, \gamma^2)$$

Mason [44] a démontré que l'estimateur de Hill est faiblement consistant. Deheuvels et al.[17], ont établi la consistance forte de cet estimateur. Quant à la normalité asymptotique, elle est démontrée par Davis et Resnick [11].

2.2.4.3 Estimateur des moments

Cet estimateur introduit par Dekkers et al.[18] est une généralisation de l'estimateur de Hill pour

$\gamma \in \mathbb{R}$.

Définition 2.7. *L'estimateur des moments, noté $\hat{\gamma}_M$, est défini par :*

$$\hat{\gamma}_M = M_1 + 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(M_n^{(1)})^2}{M_n^{(2)}} \right)^{-1}$$

Où

$$M_n^{(r)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\ln X_{n-i+1,n} - \ln X_{n-k,n})^r, r = 1, 2.$$

On énonce dans le théorème suivant les propriétés asymptotiques de l'estimateur des moments.

Théorème 2.7. *Supposons que $F \in DA(H_\gamma)$ pour $\gamma > 0$, alors :*

1. $\hat{\gamma}_M$ est faiblement consistant, i.e.,

$$\hat{\gamma}_M \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma, n \longrightarrow \infty$$

2. Si $\frac{k}{(\ln(n))^\lambda} \longrightarrow \infty, \lambda > 0$, alors $\hat{\gamma}_H$ est fortement consistant, i.e.,

$$\hat{\gamma}_M \xrightarrow{p.s} \gamma, n \longrightarrow \infty$$

3. Sous certaines conditions sur k et F , $\hat{\gamma}_M$ est asymptotiquement normal, i.e.,

$$\sqrt{k}(\hat{\gamma}_M - \gamma) \xrightarrow{L} N(0, \eta^2)$$

Où

$$\eta^2 = \begin{cases} 1 + \gamma^2, & \gamma \geq 0; \\ (1 - \gamma)^2(1 - 2\gamma) \left[4 - 8 \frac{(1 - 2\gamma)(5 - 11\gamma)(1 - 2\gamma)}{(1 - 3\gamma)(1 - 3\gamma)(1 - 4\gamma)} \right], & \gamma < 0. \end{cases}$$

Les propriétés citées dans le théorème ci-dessus ont été étudiées par Dekkers et al.[18].

2.3 Valeurs extrêmes bivariées

L'étude du comportement asymptotique des extrêmes bivariés revient à trouver la distribution limite possible d'un couple de maxima. Pour ce faire, nous présentons l'extension bidimensionnelle des notions qu'on a vu dans la théorie univariée. Dans un premier temps, nous donnons une caractérisation à la distribution limite des extrêmes bivariés ainsi que ses propriétés essentielles. Ensuite, nous énonçons un résultat qui permet de caractériser le domaine d'attraction de cette distribution. Nous terminons par l'estimation paramétrique de la fonction de dépendance de Pickands.

On considère alors n couples aléatoires iid $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ de fonction de répartition conjointe F . Soit $(M_{X,n}, M_{Y,n})$ le couple de maxima $(M_{X,n}, M_{Y,n})$, avec $M_{X,n} = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$ et $M_{Y,n} = \max_{1 \leq i \leq n} \{Y_i\}$ de fonction de répartition conjointe associée donnée par :

$$\mathbb{P} [M_{X,n} \leq x, M_{Y,n} \leq y] = F^n(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

2.3.1 Distribution de valeurs extrêmes bivariées

Comme dans le cas univarié, afin d'obtenir une distribution limite au couple de maxima qu'on appelle distribution bivariée de valeurs extrêmes "BEV", on doit d'abord normaliser $M_{X,n}$ et $M_{Y,n}$. Le théorème suivant nous permet de définir la distribution BEV.

Théorème 2.8. *S'il existe des suites de nombres réels $a_n, c_n \in \mathbb{R}$, $b_n, d_n > 0$ et une fonction non-dégénérée H telles que*

$$\mathbb{P} \left(\frac{M_{X,n} - a_n}{b_n} \leq x, \frac{M_{Y,n} - c_n}{d_n} \leq y \right) = F^n(a_n + b_n x, c_n + d_n y) \longrightarrow H(x, y), n \longrightarrow \infty \quad (2.4)$$

Alors H est une distribution bivariée des valeurs extrêmes (BEV).

On dit que F appartient au domaine d'attraction de H et on note $F \in DA(H)$.

Le résultat suivant, démontré par Galambos [26], résume les propriétés essentielles d'une distribution BEV.

La notion de divisibilité max-infinie a été introduite par Balkema et Resnick [3].

Proposition 2.2. *Si H est une distribution BEV, alors elle est :*

1. *Continue et ses distributions marginales qu'on note H_X et H_Y sont non-dégénérée, en d'autre termes, elle appartient à l'un des types Fréchet, Weibull ou Gumbel cités dans le théorème 2.1.*
2. *H est max-stable, i.e., il existe des suites $a_n, c_n > 0$ et $b_n, d_n \in \mathbb{R}$ telles que :*

$$H^n(a_n x + b_n, c_n x + d_n) = H(x, y) \quad (2.5)$$

3. *Divisible max-infiniment (max-id), i.e., Pour tout entier n , il existe une distribution H_n telle que $H = (H_n)^n$, c'est à dire que $H^{\frac{1}{n}}$ est une fonction de distribution.*

Le résultat suivant, démontré par Resnick [48], établit l'équivalence entre les distributions BEV et les distributions max-stables.

Théorème 2.9. *La classe des distributions des valeurs extrêmes bivariées coïncide avec la classe des distributions max-stables.*

Lorsque l'équation (2.4) est vérifiée, on pense à la caractérisation de la distribution BEV et de son domaine d'attraction. Le résultat suivant, qu'on peut trouver dans le travail de Resnick [48], ou même dans le livre de

Beirlant et al. [4], permet de caractériser le domaine d'attraction de H , en d'autres termes, il établit les conditions que doit satisfaire la fonction de distribution F associée à (X, Y) pour qu'elle appartienne au domaine d'attraction de H .

Théorème 2.10. *Soient F la fonction de répartition conjointe du couple (X, Y) , et H la distribution BEV. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $F \in DA(H)$

Il existe des constantes $a_n, c_n > 0$, $b_n, d_n \in \mathbb{R}$ telles que

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{M_{X,n} - a_n}{b_n} \leq x, \frac{M_{Y,n} - c_n}{d_n} \leq y \right\} = H(x, y)$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n, c_n x + d_n) = H(x, y)$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(a_n x + b_n, c_n x + d_n) = (-\ln[H(x, y)])$

Le résultat suivant illustre un exemple de la condition que doit vérifier une distribution bivariée F pour qu'elle appartienne au domaine d'attraction d'une distribution BEV H de marginales de Fréchet.

Corollaire 2.2. *Soit H une distribution des extrêmes bivariés de marges de H_X et H_Y dans le domaine d'attraction de Fréchet. La fonction bivariée F est dite dans le domaine d'attraction de H , et on écrit $F \in DA(H)$ si et seulement si*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - F[tx, \bar{F}_2^{-1}(\bar{F}_1(t))]}{1 - F_1(t)} = -\ln H(x, y)$$

F_1 et F_2 sont les distributions marginales de F . La distribution bivariée de Paréto vérifie la condition ci-dessus.

Maintenant qu'on a vu la caractérisation des domaines d'attraction d'une distribution BEV, on passe à la caractérisation de cette dernière. Dans le cas univarié, on a vu que la distribution limite des valeurs extrêmes est représentée par une famille paramétrique. Cette représentation ne peut pas être généralisée dans le cas bivarié. Cependant, Beirlant et al. [4] ont montré que les distributions de valeurs extrêmes multivariées (bivariées dans notre cas) sont caractérisées par une classe de mesures appelées "mesures exponentielles". D'où l'écriture suivante.

$$H(x, y) = \exp \{-V(x, y)\} \tag{2.6}$$

Avec V est une mesure exponentielle qui est définie par :

$$V(x, y) = 2 \int_{[0,1]} \max \left\{ \frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y} \right\} d\mu(\omega) \tag{2.7}$$

Où

μ est une mesure positive, appelée "mesure spectrale", qui est une distribution de probabilités vérifiant les conditions suivantes :

$$\int_{[0,1]} d\mu(\omega) = 1, \int_{[0,1]} \omega d\mu(\omega) = \frac{1}{2}$$

Si μ est continue de densité h , l'expression (2.7) devient alors :

$$V(x, y) = 2 \int_{[0,1]} \max \left\{ \frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y} \right\} h(\omega) d\omega$$

La mesure spectrale μ est l'une des fonctions qui permet de décrire la structure de dépendance extrême de la distribution H .

Définition 2.8. *La fonction de dépendance de queue stable, notée l , est définie, pour tous $v_1, v_2 > 0$, par :*

$$l(v_1, v_2) = V \left(\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2} \right) \quad (2.8)$$

La proposition suivante établit les propriétés de la fonction l .

Proposition 2.3. *La fonction l vérifie les propriétés suivantes :*

1. l est homogène d'ordre 1, i.e.,

$$l(av_1, av_2) = al(v_1, v_2)$$

2. $\max \{v_1, v_2\} \leq l(v_1, v_2) \leq v_1 + v_2$

l est une fonction convexe qui, comme la mesure spectrale, permet de structurer la dépendance de H . Cependant, il existe encore une autre fonction, introduite par Pickands [47], qui s'est avérée beaucoup plus pratique dans la caractérisation de cette dépendance.

Définition 2.9. *La fonction de dépendance de Pickands, appelée aussi "fonction de dépendance extrême", est définie, pour tout $(v_1, v_2) \in [0, \infty]^2 \setminus (0, 0)$, par :*

$$A(w_1, w_2) = \frac{l(v_1, v_2)}{v_1 + v_2} \quad (2.9)$$

Avec

$$w_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2}, w_2 = \frac{v_2}{v_1 + v_2}$$

La fonction A est convexe et elle vérifie : $\max \{w_1, w_2\} \leq A(w_1, w_2) \leq 1$.

Segers [50] admet qu'il est courant de supprimer un argument de cette fonction A , en

posant $w_1 = 1 - t$ et $w_2 = t$. Il est à noter qu'il est plus pratique de travailler avec $w_2 = t$. La fonction A est liée à la mesure spectrale μ par la relation suivante

$$A(w) = \int_0^1 \max \{w(1-t), (1-w)t\} d\mu(w) \quad (2.10)$$

Le résultat suivant établit la caractérisation d'une distribution BEV par la fonction de dépendance de Pickands A .

Théorème 2.11. *Soit H une distribution bivariée dont les distributions marginales sont notées par H_X et H_Y . Alors, H est une distribution BEV si et seulement si, $\forall x, y > 0$, H admet l'écriture suivante.*

$$H(x, y) = \exp \left\{ \ln (H_X(x)H_Y(y)) A \left(\frac{\ln (H_Y(y))}{\ln (H_X(x)H_Y(y))} \right) \right\} \quad (2.11)$$

Le choix des marges H_X et H_Y n'affecte pas la caractérisation de la distribution H . Si, par exemple, on choisit les marges de Fréchet unitaires (i.e., $H_X(t) = H_Y(t) = e^{-\frac{1}{t}}$, $t > 0$), alors l'expression (2.11) devient :

$$H(x, y) = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) A \left(\frac{y}{x+y} \right) \right\} \quad (2.12)$$

2.3.2 Modèles de distribution BEV

On a vu, dans la section précédente, que la représentation pratique de la distribution BEV a été donnée en termes de la fonction de dépendance de Pickands A . Plusieurs modèles paramétriques ont été conçus et sont répartis en deux familles : famille mixte et famille logistique. Nous présenterons, ci-après, les différents modèles de chacune de ces familles ainsi que les fonctions de dépendance de Pickands associées.

2.3.2.1 La famille mixte

Dans cette famille, on cite le modèle mixte à un paramètre qui est conçu par Tawn [53], qui a ensuite développé des extensions asymétrique et symétrique de cette famille.

1. Le modèle mixte à paramètre.

– Sa distribution est définie par :

$$H_\theta(x, y) = \exp \left\{ - \left(x + y - \frac{\theta xy}{x+y} \right) \right\}, \theta \in [0, 1]$$

– Sa fonction de dépendance est définie par :

$$A_\theta(t) = \theta t^2 - \theta t + 1$$

Si $\theta = 0$, on obtient le modèle indépendant.

2. Le modèle mixte asymétrique.

– Sa distribution est définie par :

$$G_{\theta,\delta}(x, y) = \exp \left\{ -(x + y) + xy \{ x(\theta + \delta) + y(2\delta + \theta) \}^{-2} \right\}$$

– Sa fonction de dépendance est définie par :

$$A_{\theta,\delta}(t) = \theta t^3 + \theta t^2 - (\theta + \delta)t + 1$$

3. Le modèle mixte symétrique généralisé.

– Sa distribution est définie par :

$$G_{\theta,\delta}(x, y) = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{\delta}{(x^\theta + y^\theta)^{\frac{1}{\theta}}} \right) \right\}$$

– Sa fonction de dépendance est définie par :

$$A_\theta(t) = 1 - \delta [t^\theta + (1 - t)^\theta]^{-\frac{1}{\theta}}$$

2.3.2.2 La famille logistique

Dans cette famille, on distingue le modèle logistique conçu par Gumbel [30] et ses extensions symétriques et asymétriques, et on va en citer quelques unes.

1. Le modèle logistique.

– Sa distribution est définie, pour tous $x, y > 0$ par :

$$G_\theta(x, y) = \exp \left\{ -(x^{-\theta} + y^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}} \right\},$$

– Sa fonction de dépendance est définie par :

$$A_\theta(t) = [t^\theta + (1 - t)^\theta]^{-\frac{1}{\theta}}$$

Avec $\theta \geq 1$

2. Le modèle logistique généralisé.

– Sa distribution est définie par :

$$G_{\theta,\delta}(x, y) = \exp \left\{ - \left(x^{-\theta} + x^{-\theta} + \delta(xy)^{-\frac{\theta}{2}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}$$

avec $0 < \delta \leq 2(\theta - 1), \theta \geq 2$

– Sa fonction de dépendance est définie par :

$$A_{\theta,\delta}(t) = \left[t^\theta + (1 - t)^\theta + \delta((1 - t)t)^{\frac{\theta}{2}} \right]^{\frac{1}{\theta}}$$

3. Le modèle logistique asymétrique généralisé.

– Sa distribution est définie par :

$$G_{\theta,\delta,\lambda}(x,y) = \exp \left\{ -\frac{(1-\delta)}{x} - \frac{(1-\theta)}{y} - \left[\left(\frac{\theta}{x}\right)^\lambda + \left(\frac{\delta}{y}\right)^\lambda \right]^{\frac{1}{\lambda}} \right\}$$

Avec $\theta \geq 0, \delta \leq 1, \lambda \geq 1$

– Sa fonction de dépendance est définie par :

$$A_{\theta,\delta,\lambda}(t) = 1 + (\theta - \delta)t - \theta + [\theta^\lambda(1-t)^\lambda + \delta^\lambda t^\lambda]^{\frac{1}{\lambda}}$$

Chapitre 3

Copules de valeurs extrêmes

3.1 Introduction

On a vu, dans le chapitre 1, la notion de la copule et on l'a définie comme étant une fonction de répartition conjointe de lois marginales uniformes, et on a établi ses propriétés, comme on a donné leur caractérisation par le théorème de Sklar ainsi que quelques familles usuelles de cette fonction. Dans cette section, nous allons voir une autre famille particulière qui est la famille des copules de valeurs extrêmes. En d'autres termes, nous allons présenter la copule associée à un couple de maxima de distribution limite H .

3.2 Caractérisation des copules de valeurs extrêmes

Dans cette section, nous allons définir la copule de valeurs extrêmes et en donner ses propriétés ainsi que sa caractérisation par la fonction de dépendance de Pickands.

Définition 3.1. *Soit alors un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la copule associée est notée par C_F . La copule C_{M_n} associée à $M_n = (M_{X,n}, M_{Y,n})$ est définie par :*

$$C_{M_n}(u, v) = C_F^n(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}}) \quad (3.1)$$

La recherche de la distribution limite de M_n est équivalente à l'étude de la convergence de la copule C_{M_n} vers une copule C , cette copule limite est appelée **Couple de valeurs extrêmes**.

Définition 3.2. *C est une copule de valeurs extrêmes s'il existe une copule C_F telle que,*

pour tous

$u, v \in [0, 1]$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_F^n \left(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}} \right) = C(u, v) \quad (3.2)$$

On dit que C_F appartient au domaine d'attraction de C

La max-stabilité est l'une des propriétés qui caractérisent les copules de valeurs extrêmes.

Définition 3.3. Une copule bivariée C est dite max-stable si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall [u, v] \in [0, 1]^2$, on a :

$$C(u, v) = C^n(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}}) \quad (3.3)$$

Ou encore

$$C(u^n, v^n) = C^n(u, v) \quad (3.4)$$

Le résultat suivant décrit le lien entre la classe des copules de valeurs extrêmes et la classe de copules max-stables.

Théorème 3.1. Une copule C est dite à valeur extrêmes si et seulement si elle est max-stable.

On peut illustrer par la copule de Galambos définie par

$$C_\delta(u, v) = uv \exp \left\{ - \left[(-\ln(u))^{-\delta} + (-\ln(v))^{-\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\}, \delta > 0$$

Cette copule vérifie la condition de max-stabilité, en effet

$$\begin{aligned} C_\delta(u^n, v^n) &= u^n v^n \exp \left\{ - \left[(-\ln(u^n))^{-\delta} + (-\ln(v^n))^{-\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\} \\ &= u^n v^n \exp \left\{ - \left[(-n \ln(u))^{-\delta} + (-n \ln(v))^{-\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\} \\ &= u^n v^n \exp \left\{ -n \left[(-\ln(u))^{-\delta} + (-\ln(v))^{-\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\} \\ &= \left(uv \exp \left\{ - \left[(-\ln(u))^{-\delta} + (-\ln(v))^{-\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\} \right)^n \\ C_\delta(u^n, v^n) &= C_\delta^n(u, v) \end{aligned}$$

Donc C_δ est une copule de valeurs extrêmes. Une copule max-stable est dans son propre domaine d'attraction.

Les copules de valeurs extrêmes sont représentées par la fonction de dépendance de queues stables l . La représentation est donnée dans le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Une copule C est dite copule de valeurs extrêmes si et seulement si, $\forall (u, v) \in [0, 1]^2$,*

on a :

$$C(u, v) = \exp \{-l(-\ln u, -\ln v)\} \quad (3.5)$$

La copule de valeurs extrêmes est représentée par la fonction de dépendance de Pickands avec un seul argument (comme on l'a déjà mentionné dans le chapitre 2). On obtient cette représentation en remplaçant l'expression de l , dans l'équation (3.5). D'où le résultat suivant.

Théorème 3.3. *Une copule bivariée C est une copule de valeurs extrêmes si et seulement si*

$$C(u, v) = \exp \left[-\ln(u) + \ln(v)A \left(\frac{\ln u}{\ln(u) + \ln(v)} \right) \right] \quad (3.6)$$

Les dérivées partielles d'une copule de valeurs extrêmes C sont définies, en termes de la fonction A , par

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u, v) = \frac{C(u, v)}{u} \left[A(t) + (1-t)A'(t) \right] \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} C(u, v) = \frac{C(u, v)}{v} \left[A(t) - tA'(t) \right] \quad (3.8)$$

Avec

$$t = \frac{\ln(u)}{\ln(uv)}$$

3.3 Dépendance de queue de distribution

Dans le chapitre 1, on a vu trois mesures de dépendances (le coefficient de corrélation linéaire ρ , le coefficient de corrélation de Spearman ρ_s et le tau de Kendall τ). Dans ce qui suit, nous présenterons deux coefficients qui mesurent la dépendance au niveau des queues de la distribution.

Définition 3.4. *Soient X et Y deux variables aléatoires continues de distributions F_X et F_Y respectivement. Si les limites suivantes existent, alors le coefficient de dépendance de queue supérieure λ^u et le coefficient de dépendance de queue inférieure λ^l sont définis par*

$$\lambda^u = \lim_{t \rightarrow 1} \mathbb{P}(X > F_X^{-1}(t) \mid Y > F_Y^{-1}(t)) \quad (3.9)$$

$$\lambda^l = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(t) \mid Y \leq F_Y^{-1}(t)) \quad (3.10)$$

Les coefficients définis par les formules (3.9) et (3.10) mesurent la probabilité conditionnelle que des valeurs extrêmes se réalisent simultanément au niveau des queues de la distribution. Ils peuvent être écrites en termes de copules. Le résultat suivant le montre.

Théorème 3.4. *Soit C la copule de valeurs extrêmes associée au couple de variable aléatoires continue (X, Y) , de fonction de dépendance extrême A et de fonction de dépendance de queues l . Si les limites (3.9) et (3.10) existent, alors*

$$\lambda^u = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t - 1 + C(1 - t, 1 - t)}{t} = l(1, 1) = 2(1 - A(\frac{1}{2})) \quad (3.11)$$

$$\lambda^l = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(t, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{2A(\frac{1}{2})-1} = \begin{cases} 1, & A(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Remarques

1. Si $\lambda^l \in]0, 1]$, alors la copule C a une dépendance de queue inférieure.
2. Si $\lambda^l = 0$, alors C n'a pas de dépendance de queue inférieure.
3. Si $\lambda^u \in]0, 1]$, alors la copule C a une dépendance de queue supérieure.
4. Si $\lambda^u = 0$, alors C n'a pas de dépendance de queue supérieure.

Les formules (3.11) et (3.12) permettent de calculer, plus facilement, les coefficients de dépendance de queues supérieure et inférieure associés à une copule C quelconque. On peut illustrer par un tableau qui donne ces coefficients associés aux copules paramétriques vues dans le chapitre 1.

<i>Copule</i>	λ^l	λ^u
<i>Indépendance</i>	0	0
<i>Maximale</i>	1	1
<i>Minimale</i>	0	0
<i>Gaussienne</i>	0	0
<i>Student</i>	$2\bar{t}_{d+1} \left(\frac{\sqrt{(d+1)(1-\rho)}}{\sqrt{(\rho+1)}} \right)$	$2\bar{t}_{d+1} \left(\frac{\sqrt{(d+1)(1-\rho)}}{\sqrt{(\rho+1)}} \right)$
<i>Gumbel</i>	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$
<i>Frank</i>	0	0
<i>Clayton</i>	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0

Coefficients de dépendance de queue inférieure λ^l et de queue supérieure λ^u associés aux copules paramétriques.

On peut voir que la copule de Clayton a une dépendance de queue inférieure ($\lambda^l \in]0, 1]$) et que la copule de Gumbel a une dépendance de queue supérieure ($\lambda^u \in]0, 1]$), et elle n'a la dépendance de queue inférieure que dans le cas $\theta = 1$. Tandis que la copule maximale et la copule de Student ont toutes les deux une dépendance de queue supérieure et de queue inférieure. Enfin, la copule minimale, la copule gaussienne et la copule de Frank n'ont ni la dépendance de queue inférieure ($\lambda^l = 0$) ni la dépendance de queue supérieure ($\lambda^u = 0$).

3.4 Familles des copules de valeurs extrêmes

Dans le chapitre 1, on a consacré la section (1.4) à la présentation des familles paramétriques de copules bivariés en donnant leurs définitions formelles, leurs densités ainsi que les mesures de dépendance qui leurs sont associées. Dans cette section, nous allons présenter les familles paramétriques qui surgissent des copules de valeurs extrêmes. La plupart de ces dernières présentent des copules limites de certaines de copules bivariées, c'est ce que nous allons détailler ci-après.

Le tau de Kendall τ et le rho de Spearman ρ_s associés aux copules de valeurs extrêmes sont donnés, en termes de la fonction de dépendance A , respectivement par

$$\tau = \int_0^1 \frac{(1-t)}{A(t)} dA'(t) \quad (3.13)$$

$$\rho_s = 12 \int_0^1 \frac{1}{(1+A(t))^2} dt - 3 \quad (3.14)$$

3.4.1 Copule de Marshall-Olkin

La copule de Marshall-Olkin, introduite par Marshall et Olkin [43], est considérée comme une copule de valeurs extrêmes et elle satisfait la condition de max-stabilité. Elle est fréquemment utilisée dans les applications financières.

Définition 3.5. *La copule de Marshall-Olkin, qu'on note $C_{MO,\alpha,\beta}$, de paramètres $\alpha, \beta \in [0, 1]$, est définie par :*

$$C_{MO,\alpha,\beta}(u, v) = u^{1-\alpha}v^{1-\beta} \min \{u^\alpha, v^\alpha\} = \begin{cases} u^{1-\alpha}v, & u^\alpha > v^\beta; \\ uv^{1-\beta}, & u^\alpha < v^\beta. \end{cases} \quad (3.15)$$

La densité de cette copule est donnée par :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{MO,\alpha,\beta}(u, v) = \begin{cases} u^{-\alpha}, & u^\alpha > v^\beta; \\ v^{-\beta}, & u^\alpha < v^\beta. \end{cases}$$

La fonction de dépendance extrême associée est définie par :

$$A(t) = l(1-t, t) = \max \{1 - \alpha t, 1 - \beta(1-t)\}$$

Remarques

1. On obtient la borne supérieure de Fréchet M dans le cas $\alpha = \beta = 1$.
2. Si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, on est dans le cas d'indépendance.
3. si $\alpha = \beta$, on dit que la copule $C_{MO, \alpha, \beta}$ est symétrique.

Les mesures de dépendances associées à la copule $C_{MO, \alpha, \beta}$ sont les suivants.

1. $\tau = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta}$
2. $\rho_s = \frac{3\alpha\beta}{2\alpha + 2\beta - \alpha\beta}$
3. $\lambda^u = \min \{\alpha, \beta\}$

3.4.2 Copule de Hüsler-Reiss

Cette copule est introduite Hüsler-Reiss [35].

Définition 3.6. *La copule de Hüsler-Reiss est définie par*

$$C_{HR, \lambda} = \exp \left\{ -\ln(u)\phi \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\lambda \ln \left(\frac{\ln(u)}{\ln(v)} \right) \right] - \ln(v)\phi \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\lambda \ln \left(\frac{\ln(v)}{\ln(u)} \right) \right] \right\} \quad (3.16)$$

ϕ est la distribution normale standard.

La fonction de dépendance extrême de la copule $C_{HR, \lambda}$ est donnée par

$$A(t) = (1-t)\phi(z_{1-t}) + t\phi(z_t)$$

Où

$$z_t = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} \ln \left\{ \frac{t}{1-t} \right\} \right), t \in [0, 1]$$

Remarques

1. Si $\lambda \rightarrow 0$, alors A converge vers sa borne supérieure $A(t) = 1$, ce qui correspond au cas d'indépendance.

2. Si $\lambda \rightarrow \infty$, alors A converge vers sa borne inférieure qui représente le cas de dépendance.

Soit C_ρ une copule Gaussienne définie, dans le chapitre 1, par l'équation (1.28), avec ρ le coefficient de corrélation linéaire. Considérons le cas où ρ dépend de la taille de l'échantillon (i.e., $\rho = \rho_n$) tel que $\rho_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors si

$$(1 - \rho_n) \ln(n) \rightarrow \lambda^2, n \rightarrow \infty$$

La copule C_{ρ_n} appartient au domaine d'attraction de la copule de Hüsler-Reiss qu'on note $C_{HR,\lambda}$ de paramètre $\lambda \in [0, \infty]$.

3.4.3 Copule t-EV

La copule t-EV (t-Extreme Value), qu'on note $C_{EV,\rho,d}$ est la limite asymptotique d'un couple de maxima de variables aléatoires iid suivant une loi de Student bivariée. La copule de Student définie, dans le chapitre 1, par l'équation (1.31), appartient au domaine d'attraction de la copule t-EV de mêmes paramètres

($\rho \in [-1, 1], d > 0$).

Définition 3.7. *La copule t-EV est définie par*

$$C_{EV,\rho,d}(u, v) = \int_{-\infty}^{t_d^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_d^{-1}(v)} \frac{1}{\pi d} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} \left(1 + \frac{x^t \Sigma x}{d}\right)^{-\frac{d}{2}+1} dx \quad (3.17)$$

t_d est la fonction de répartition de la loi de Student.

Σ est la matrice de corrélation.

La fonction de dépendance extrême associée à la copule $C_{EV,\rho,d}$ est donnée par

$$A(t) = (1 - t)t_{d+1}(z_{1-t}) + t.t_{d+1}(z_t)$$

Où

$$z_t = (1 + d)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{t}{1-t} \right)^{\frac{1}{d}} - \rho \right] (1 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}}$$

On remarque que la forme de la fonction de dépendance extrême de la copule t-EV est similaire à celle de la fonction de dépendance associée à la copule de Hüsler-Reiss.

On sait que la distribution de Student converge vers la distribution normale lorsque $d \rightarrow \infty$, et dans ce cas, la copule t-EV converge vers la copule de Hüsler-Reiss. Tandis que lorsque $d \rightarrow 0$, on obtient la copule de Marshall-Olkin symétrique de paramètres

$$\alpha = \beta = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

3.4.4 Copule logistique

La copule logistique, appelée aussi copule de Gumbel [30], est la limite asymptotique des maxima du couple de variables aléatoires dont la copule associée est la copule archimédienne définie par l'expression (1.34).

La copule de Gumbel est déjà définie, dans le chapitre 1, par l'expression (1.40) comme une copule archimédienne de paramètre $\theta > 1$. Mais elle est en même temps une copule de valeurs extrêmes, et elle est l'unique copule ayant cette caractéristique. La fonction de dépendance extrême associée est donnée par

$$A(t) = [t^\theta + (1-t)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}, \theta > 1$$

Remarques

1. Si $\theta = 1$ alors la copule de Gumbel se réduit à la copule d'indépendance Π .
2. Si $\theta \rightarrow \infty$, on obtient la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding M équivalente à la copule de Marshall-Olkin de paramètres $\alpha = \beta = 1$.

3.4.5 Copule de Tawn

La copule de Tawn, appelée aussi copule logistique asymétrique, est une extension de la copule de Gumbel qui est symétrique.

Définition 3.8. *La copule de Tawn, notée $C_{T,\theta,\lambda_1,\lambda_2}$, $\theta \in [1, +\infty[$, $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$, est définie par*

$$C_{T,\theta,\lambda_1,\lambda_2}(u, v) = uv \exp \left\{ -(1 - \lambda_1) - (\theta - \lambda_1) \ln(u) + [(-\theta \ln(u))^{\lambda_2} + (-\lambda_1 \ln(v))^{\lambda_2}]^{\frac{1}{\lambda_2}} \right\} \quad (3.18)$$

La fonction de dépendance associée à la copule $C_{T,\theta,\lambda_1,\lambda_2}$ est donnée par

$$A(t) = (1 - \lambda_1) + (\lambda_1 - \theta)t + [(\theta t)^{\lambda_2} + (\lambda_1(1-t))^{\lambda_2}]^{\frac{1}{\lambda_2}}$$

Remarques

1. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, on obtient la copule de Gumbel.
2. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, on dit que la copule de Tawn est symétrique.
3. Le cas de dépendance ($A(t) = 1$) est obtenu si $\theta = 1$ ou $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$.
4. Lorsque $\theta \rightarrow \infty$, on obtient la copule de Marshall-Olkin de paramètres (λ_1, λ_2) .

3.4.6 Copule de Galambos

Définition 3.9. La copule de Galambos, qu'on note $C_{G,\delta}$, est définie par

$$C_{G,\delta}(u, v) = uv \exp \left\{ - \left[-(\ln(u))^{-\delta} + (-\ln(v))^{-\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\}, \delta > 0 \quad (3.19)$$

Soient C_{Ψ} la copule archimédienne définie par la formule (1.34), et \hat{C}_{Ψ} la copule de survie associée, alors si la limite

$$-\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi(s)}{s\Psi(s)} = \delta, \delta > 0 \quad (3.20)$$

existe, alors la copule \hat{C}_{Ψ} appartient au domaine d'attraction de la copule de Galambos de paramètre $\delta > 0$.

La fonction de dépendance extrême associée à la copule $C_{G,\delta}$ est donnée par

$$A(t) = 1 - \left[t^{-\delta} + (1-t)^{-\delta} \right]^{-\frac{1}{\delta}}$$

3.4.7 Copule de Joe

La copule de Joe, appelée aussi copule asymétrique négative logistique, est une extension de la copule de Galambos $C_{G,\delta}$ aux paramètres (λ_1, λ_2) , $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$.

Définition 3.10. La copule de Joe, qu'on note $C_{J,\lambda_1,\lambda_2,\delta}$, est définie par

$$C_{J,\lambda_1,\lambda_2,\delta} = uv \exp \left\{ - \left[(-\lambda_1 \ln(u))^{-\delta} + (-\lambda_2 \ln(v))^{-\delta} \right]^{-\frac{1}{\delta}} \right\} \quad (3.21)$$

Sa fonction de dépendance extrême est donnée par

$$A(t) = 1 - \left\{ [\lambda_1(1-t)]^{-\delta} + (\lambda_2 t)^{-\delta} \right\}^{-\frac{1}{\delta}}$$

Remarques

1. Le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ correspond à la copule de Galambos.
2. La copule de Joe est symétrique si $\lambda_1 = \lambda_2 \in [0, 1]$.
3. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ou $\delta \rightarrow 0$, alors on obtient la copule d'indépendance Π .
4. Si $\delta \rightarrow \infty$, alors on obtient la copule de Marshall-Olkin de paramètres (λ_1, λ_2) .

3.4.8 Copule BB5

La copule BB5 a été introduite par Joe [37]. Contrairement aux familles de copule introduites dans les sous-sections précédentes, cette copule n'est pas une fonction limite d'un couple de maxima d'une copule usuelle. Il s'agit plutôt d'un cas particulier de la copule de Gumbel et la copule de Galambos à la fois.

Définition 3.11. La copule BB5, qu'on note $C_{B,\theta,\delta}$, est définie par

$$C_{B,\theta,\delta}(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta - \left[(-\ln u)^{-\theta\delta} + (-\ln v)^{-\theta\delta} \right]^{-\frac{1}{\delta}} \right]^{-\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (3.22)$$

Sa fonction de dépendance extrême est donnée par

$$A(t) = \left\{ t^\theta + (1-t)^\theta - \left[(1-t)^{-\theta\delta} + t^{-\theta\delta} \right]^{1-\delta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}$$

Pour $t \in [0, 1]$, $\theta > 1$ et $\delta > 0$.

Remarques

1. Si $\theta = 1$, alors on obtient la copule de Galambos, ce cas ne correspond pas à la dépendance.
2. La copule de Gumbel est obtenue pour $\delta \rightarrow 0$.

3.5 Copule archimax

Cette classe de copule est introduite par Capéraà et al.[6]. Les copules Archimax sont construites à partir d'une fonction décroissante convexe et continue $\Theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\Theta(1) = 0$, appelée générateur.

Définition 3.12. Une copule Archimax est définie, pour tous $u, v \in [0, 1]$, par :

$$C_\Theta(u, v) = \Theta^{-1} (\Theta(u) + \Theta(v)) A \left(\frac{\Theta(u)}{\Theta(u) + \Theta(v)} \right) \quad (3.23)$$

A est la fonction de dépendance de Pickands.

Si $A(t) = 1$, alors la copule obtenue est Archimédienne, et on écrit :

$$C_\Theta(u, v) = \Theta^{-1} \{ \Theta(u) + \Theta(v) \} \quad (3.24)$$

La copule de Clayton définie par (1.38) et la copule de Frank définie par (1.35) sont des copules archimax.

L'ensemble des copules archimax contient des copules archimédiennes et des copules de valeurs extrêmes. En effet, si on pose $\Theta(t) = \ln \left(\frac{1}{t} \right)$, la copule C_Θ est de valeurs extrêmes, par conséquent, elle admet l'écriture (3.6). De même, si $A(t)=1$, on obtient la copule archimédienne définie par (1.34).

Le résultat suivant décrit le lien entre la fonction de dépendance de la copule archimax et son attracteur.

Proposition 3.1. *Soit C_Θ une copule bivariée de fonction de dépendance A et de générateur Θ , tel que $\Theta(1-\frac{t}{i})$ est à variations régulières d'indice $-\alpha$, $\alpha \geq 1$. Alors C_Θ appartient au domaine d'attraction d'une copule de valeur extrêmes de fonction de dépendance A^* telle que, pour $t \in [0, 1]$, on a*

$$A^*(t) = (t^\alpha + (1-t)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{t^\alpha}{t^\alpha + (1-t)^\alpha} \right) \quad (3.25)$$

L'expression de A est extraite de l'équation précédente, et on a :

$$A(t) = \left(t^{\frac{1}{\alpha}} + (1-t)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^m \left(A^* \left(\frac{t^{\frac{1}{m}}}{t^{\frac{1}{m}} + (1-t)^{\frac{1}{m}}} \right) \right)^m \quad (3.26)$$

3.6 Estimation de la fonction de dépendance

On a vu, dans la section 3.2, la représentation de la copule de valeurs extrêmes en termes de la fonction de dépendance de Pickands. Dans la section précédente, nous avons vu des modèles paramétriques de cette fonction associés aux copules de valeurs extrêmes. Maintenant, nous allons nous intéresser à l'estimation non-paramétrique de cette fonction et en présenter deux estimateurs ; le premier a été proposé par Capéraà, Fougères et Genest [5]. Cet estimateur est appliqué aux données bivariées de valeurs extrêmes. Tandis que l'autre, proposé par Khoudradji [39], est appliqué à des lois bidimensionnelles qui ne représentent pas un échantillon de valeurs extrêmes. Ce dernier s'appuie sur une approche de l'étude des lois de valeurs extrêmes multivariées basées sur les processus ponctuel. Un troisième estimateur est proposé par Joe, Smith et Weissman. Pour avoir plus de détail sur celui-ci, on peut se référer à l'ouvrage [38].

3.6.1 Méthode d'estimation de Capéraà, Fougères et Genest

Cette méthode est introduite par Capéraà et al.[5]. Elle est définie à partir d'un échantillon d'une loi bivariée de valeurs extrêmes dont les marges sont connues. On considère alors l'échantillon $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n$, de loi bivariée de maxima ayant H comme fonction de répartition de marginales H_X et H_Y connues. On sait que la fonction H s'exprime sous la forme

$$H(x, y) = C(H_X(x), H_Y(y))$$

Où C est la copule de valeurs extrêmes définie par la formule (3.6).

Si on pose $Z = \frac{\ln(X)}{\ln(XY)}$. La loi de la variable Z est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Soit C une copule de valeurs extrêmes de fonction de dépendance A . La fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = \frac{\ln(X)}{\ln(XY)}$ est donnée, pour tout $z \in [0, 1]$, par*

$$M(z) = z + z(1 - z)D(z) \quad (3.27)$$

Où

$$D(z) = \frac{A'(z)}{A(z)}$$

De l'expression (3.27), on obtient l'expression suivante de la fonction A en termes de la fonction de répartition M .

$$A(t) = \exp \left\{ \int_0^t \frac{M(z) - z}{z(1 - z)} dz \right\} = \exp \left\{ - \int_t^1 \frac{M(z) - z}{z(1 - z)} dz \right\} \quad (3.28)$$

En remplaçant la fonction M dans l'équation (3.28) par sa fonction de répartition empirique M_n , on obtient deux estimateurs pour la fonction A donnés par

$$A_n^0(t) = \exp \left\{ \int_0^t \frac{M_n(z) - z}{z(1 - z)} dz \right\} \quad (3.29)$$

$$A_n^1(t) = \exp \left\{ - \int_t^1 \frac{M_n(z) - z}{z(1 - z)} dz \right\} \quad (3.30)$$

Lorsque les pseudo-observations z_i sont toutes distinctes, Capéraà et al.[5] ont proposé une expression explicite à l'estimateur de la fonction A , en termes des statistiques d'ordre $Z_{1,n}, \dots, Z_{n,n}$, en posant $p(t)=1-t$, d'où la formule suivante

$$A_n(t) = \begin{cases} (1 - t)Q_n^{1-p(t)}, & 0 \leq t \leq Z_{(1)}; \\ t^{\frac{i}{n}}(1 - t)^{1-\frac{i}{n}}Q_n^{1-p(t)}Q_i^{-1}, & Z_{(i)} < t \leq Z_{(i+1)}, i = 1, \dots, n - 1; \\ tQ_n^{-p(t)}, & Z_{(n)}t \leq 1. \end{cases} \quad (3.31)$$

Où

$$Q_i = \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{Z_{(k)}}{(1 - Z_{(k)})} \right\}^{\frac{1}{n}}, 1 \leq i \leq n.$$

3.6.2 Méthode du seuil de Khoudradji

Cette méthode est introduite par Khoudradji [39]. Elle est définie à partir d'un échantillon d'une loi bidimensionnelle F .

Considérons un échantillon $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n$, d'une loi bidimensionnelle F , de marginales F_1 et F_2 de Fréchet unités, avec F appartenant au domaine d'attraction d'une loi de valeurs extrêmes bivariée H . Considérons les variables $R_i = X_i + Y_i$ et $W_i = \frac{X_i}{R_i}, i = 1, \dots, n$. On a vu, dans le chapitre 2, que la fonction A est liée à la mesure

spectrale μ par la relation (2.10). C'est à partir de cette relation que Khoudradji [39] ait défini son estimateur.

Le résultat suivant, dû à De Haan [12] , sera utile dans la méthode d'estimation de Khoudradji, plus précisément dans le choix du seuil u .

Proposition 3.3. *Soit le couple de variables aléatoires (X, Y) de loi F appartenant au domaine d'attraction d'une loi H , dont les lois marginales sont de Fréchet unités. Alors*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{W \leq w \mid R > u\} = \frac{\mu(w)}{2} \quad (3.32)$$

Avec

$$R = X + Y \text{ et } W = \frac{X}{R}$$

$\frac{\mu}{2}$ est la fonction de répartition conditionnelle de la variable W , sachant que la variable R est supérieur à u assez grand.

L'approche par cette méthode tient compte du choix du seuil u qui doit être choisi de telle manière est ce que les variables W et R soient indépendantes pour $R > u$, et ce afin d'avoir assez d'observations pour estimer convenablement A . Le seuil choisi par Khoudradji dépend de la taille de l'échantillon.

En remplaçant la fonction μ par sa fonction de répartition empirique μ_n dans l'expression (2.10), on obtient l'estimateur suivant

$$\hat{A}_n(t) = \int_0^1 \max \{wt, (1-w)(1-t)\} d\mu_n(w) = \frac{2}{n^*} \sum_{i=1}^{n^*} \max \{W_i t, (1-W_i)(1-t)\} \quad (3.33)$$

n^* représente le nombre de W_i correspondant aux $R_i > u(n)$ pour $u(n)$ assez grand.

3.7 Application

L'application a été faite par Patrick Eschenburg [20], sur un ensemble de données disponibles sur R, dans le package copula, sous le nom "Uranium".

1. Vérifier si les données présentent une dépendance de queue inférieure qui peut être repérée graphiquement (sur le nuage de points). Dans ce cas, on travaille avec la copule de survie associée au pseudo-échantillon $1 - \hat{U}_1, \dots, 1 - \hat{U}_n$. Par conséquent, la dépendance de queue inférieure se transforme en une dépendance de queue supérieure qui peut être modélisée par les copules de valeurs extrêmes.

2. Vérifier si les données présentent une structure de dépendance de valeurs extrêmes en utilisant le test d'hypothèse de Ghoudi et al.[28] ou celui de Yan et Kojadinovic [55]. Les hypothèses sont comme suit :

$$H_0 : C \in EV \text{ vs } H_1 : C \notin EV \quad (3.34)$$

EV est la classe de copules de valeurs extrêmes.

3. Symétrie des données : Pour évaluer la symétrie des données, on peut se fier à l'intuition graphique ou tester formellement l'hypothèse de symétrie.
4. Estimation des copules : Une fois le groupe de copules est choisi, on estime leurs paramètres par les méthodes d'estimation classique (Méthode du Maximum de vraisemblance, méthode des moments,... etc). Une fois les paramètres sont estimés, les critères AIC (Akaike Information Criterion, introduit par Akaike [1]) et BIC (Bayesian Information Criteria, introduit par Schwartz[49]) sont calculés, et ce dans le but de sélectionner les copules adéquates pour modéliser les données.

L'AIC et le BIC sont définis respectivement par

$$AIC = -2 \ln L + 2k \quad (3.35)$$

$$BIC = -2 \ln L + k \ln(n) \quad (3.36)$$

L est la fonction de vraisemblance maximisée.

k est le nombre de paramètres de la copule.

La copule sélectionnée est celle qui possède l'AIC et le BIC les plus faibles.

5. Evaluation : Après avoir estimé paramétriquement les copules données, on vérifie quelle est la copule adéquate aux données.

Exemple d'application

On considère un ensemble de couples d'éléments chimique. Les données représentent les concentrations logarithmiques de sept éléments chimiques dans 655 échantillons d'eau prélevés près de la Grande Junction, Colorado. La simulation a été faite sur le couple (C_s, S_c) de Cesium et de Scandium respectivement. Les données se sont transformées en pseudo-observations $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$.

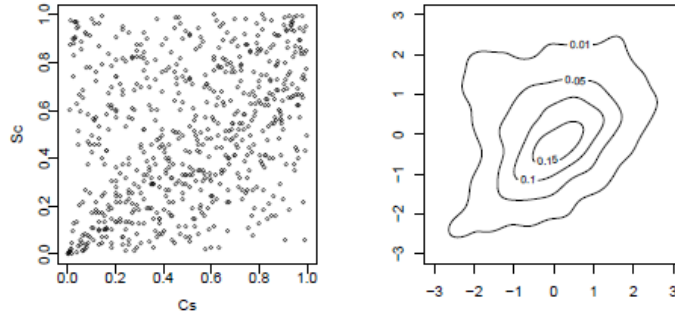


FIG. 3.1: Sur la gauche : Le nuage de points du couple (C_s, S_c) . Sur la droite : Le tracé de contour du couple (C_s, S_c)

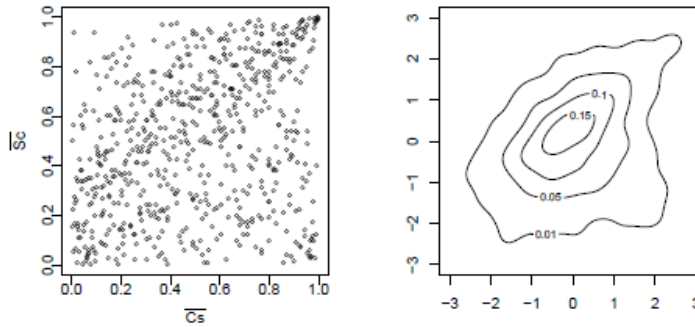


FIG. 3.2: Sur la gauche : Le nuage de points du couple $(\overline{C}_s, \overline{S}_c)$. Sur la droite : Le tracé de contour du couple $(\overline{C}_s, \overline{S}_c)$

On a vérifié la présence de la dépendance de queue inférieure. En effet, la figure (3.1) montre que le couple (C_s, S_c) présente une concentration des observations sur le coin inférieur gauche, ceci implique la présence de la dépendance de queue inférieure. Les résultats de l'estimation ont révélé que les estimateurs des coefficients de queue inférieure et de queue supérieure sont donnés respectivement par

$$\hat{\lambda}^l(C_s, S_c) = 0.63 \quad \hat{\lambda}^u(C_s, S_c) = 0.04 \quad (3.37)$$

En s'appuyant sur les résultats présentés par les équations de (3.37) et sur les graphiques (3.1) et (3.2) ont montré que les copules de valeurs extrêmes ne sont pas adéquates à la paire (C_s, S_c) mais plutôt à la paire $(\overline{C}_s, \overline{S}_c) = (1 - C_s, 1 - S_c)$ dont les estimateurs

des coefficients de queue inférieure et de queue supérieure associés sont donnés par

$$\hat{\lambda}^l(\bar{C}_s, \bar{S}_c) = 0.04 \quad \hat{\lambda}^u(\bar{C}_s, \bar{S}_c) = 0.36 \quad (3.38)$$

Tester la présence de la structure de dépendance de valeurs extrêmes : Pour ce, deux tests ont été introduits, le test de Ghoudi et al. [28] et le test de Yan et Kojadinovic [55]. Les résultats sont présentés par le tableau ci-après.

Statistique du test	Valeurs du test statistique	p-value
S_n	0.569	0.57
T_n	0.0184	0.426

Résultats des tests de Ghoudi et al. (Statistique du test S_n) et de Yan et Kojadinovic (Statistique de test T_n) sur la présence d'une structure de dépendance de valeurs extrêmes.

Les deux tests ont apporté une grande p-value, ce qui a justifié l'adéquation des copules de valeurs extrêmes à la paire (\bar{C}_s, \bar{S}_c) .

Pour vérifier la symétrie des données, on a effectué un test d'hypothèse de symétrie basé sur la densité d'une fonction de distribution $H(t) = P(T \leq t)$, avec $T = \frac{\ln U_2}{\ln U_1 U_2}$.

L'estimation empirique de cette densité h est obtenue en calculant les valeurs

$$t_i = \frac{\ln \hat{U}_{i2}}{\ln \hat{U}_{i1} \hat{U}_{i2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

La densité empirique des valeurs t_i associées à la paire (\bar{C}_s, \bar{S}_c) est présentée dans la figure ci-dessous.

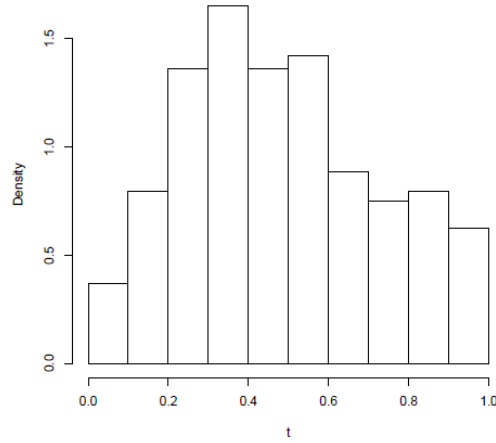


FIG. 3.3: Estimation de la densité empirique de t pour la paire $(\overline{C}_s, \overline{S}_c)$

On peut voir qu'elle n'est pas symétrique, ce qui nie la présence de la symétrie des données.

Partant de l'asymétrie des données, on a pu restreindre l'analyse aux copules de valeurs extrêmes asymétriques, les résultats présentés dans le tableau ci-après sont les estimations paramétriques (obtenues avec la méthode du maximum de vraisemblance) des copules de valeurs extrêmes et d'autres copules qui ne sont pas extrêmes.

<i>Copule</i>	<i>Paramètre estimé</i>	<i>log de vraisemblance</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
<i>Hüsler – Reiss</i>	0.92	49.51	−97.02	−92.53
<i>t – EV</i>	(0.11, 1.1)	64.72	−125.45	−116.48
<i>Gumbel</i>	1.32	58.12	−114.24	−104.76
<i>Tawn</i>	(2.06, 0.43, 0.87)	81.54	−157.08	−143.62
<i>Galambos</i>	0.57	53.42	−104.85	−100.37
<i>Joe</i>	(1.4, 0.42, 0.85)	81.7	−157.4	−143.94
<i>BB5</i>	(1.32, 0.05)	58.12	−112.24	−103.28
<i>Gaussienne</i>	0.34	29.36	−56.72	−52.24
<i>Frank</i>	2.19	38.03	−74.06	−69.58
<i>Clayton</i>	0.36	23.77	−45.54	−41.06
<i>Claytondesurvie</i>	0.57	50.96	−99.92	−95.43
<i>Student</i>	(0.35, 4)	58.58	−115.16	−110.68

Résultats de l'estimation paramétriques du couple $(\overline{C}_s, \overline{S}_c)$.

Les résultats des critères AIC et BIC ont montré que les copules de valeurs extrêmes sont toutes adéquates à la paire (\bar{C}_s, \bar{S}_c) par rapport aux autres types. En exception de la copule de Student qui a un AIC inférieur à certain copules symétriques de valeurs extrêmes et la copule de Clayton qui semble être supérieure à la copule de Hüsler-Reiss. Cependant, globalement, on a déduit que les deux copules asymétriques (Tawn et Joe) présentent des valeurs beaucoup plus petites des deux critères AIC et BIC, que les copules symétriques de valeurs extrêmes. Ces deux copules ont été choisies pour la modélisation. Enfin, on a évalué l'adéquation des copules estimées en comparant l'estimateur non-paramétrique de la fonction de dépendance de Pickands avec les fonction de dépendance de Pickands des copules de valeurs extrêmes estimées.

La figure (3.4) présente les fonctions de dépendance de Pickands théoriques des copules de valeurs extrêmes asymétriques comparées à l'estimateur non paramétrique défini par (3.31), construit par Fougères et al., de la fonction de dépendance de Pickands. Tandis que la figure (3.5) présente l'estimateur non paramétrique de la fonction de dépendance de Pickands comparé aux fonctions de dépendance de Pickands théoriques associées aux copules de valeurs extrêmes symétriques.

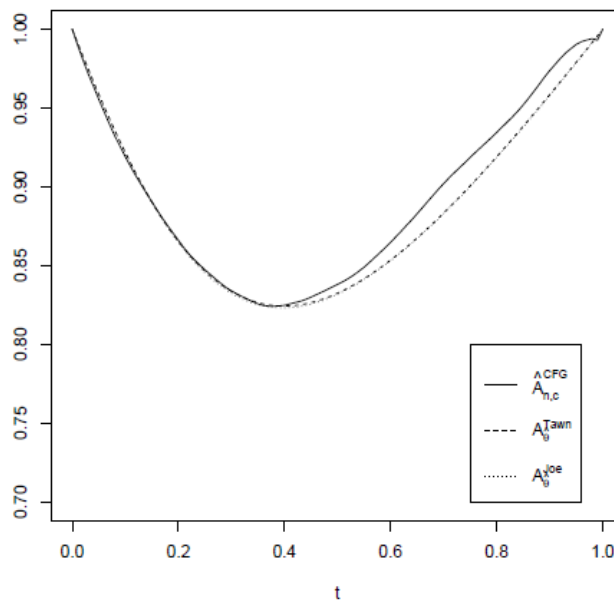


FIG. 3.4: L'estimateur non paramétrique de la fonction de dépendance de Pickands (CFG) comparé aux fonctions de dépendance théoriques associées aux copules estimées de Tawn et Joe.

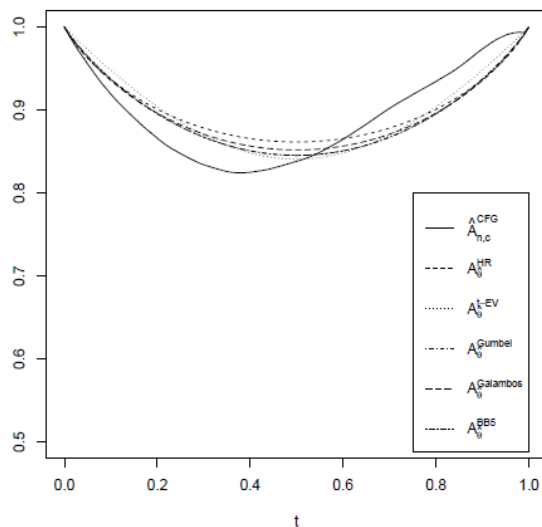


FIG. 3.5: L'estimateur non paramétrique de la fonction de dépendance de Pickands (CFG) comparé aux fonctions de dépendance théoriques associées aux copules symétriques.

On peut voir, dans la figure (3.5), que les fonctions de dépendance de Pickands associées aux copules symétriques estimées sont très proches. Cependant, la figure (3.4) illustre que les fonctions de dépendance associées aux deux copules asymétriques estimées sont difficiles à distinguer. Par conséquent, les deux copules asymétriques de Joe et de Tawn offrent un meilleur ajustement aux données.

Conclusion et perspectives

A travers ce travail, nous avons traité le concept de la copule et ses diverses propriétés comme une fonction de répartition conjointe qui lie une distribution bivariée à ses marginales. Nous avons également mis le point sur la théorie des valeurs extrêmes, univariée et bivariée, ce qui a permis d'introduire les copules de valeurs extrêmes que nous avons définies, et par la suite, caractérisées par la fonction de dépendance de Pickands dont l'estimation paramétrique et l'estimation non-paramétrique ont permis de sélectionner et définir le modèle de copules adéquat aux données étudiées. Cette sélection tient également compte de la présence de la dépendance de queue supérieure qui peut être modélisée par une copule de valeurs extrêmes. Et encore, le test de la symétrie des données a son poids dans la sélection. D'ailleurs, dans notre exemple d'application, pour la modélisation des données asymétriques, les copules asymétriques de valeurs extrêmes se sont avérées le meilleur modèle.

Il est donc convenable de dire que la copule est un moyen incontournable dans la modélisation de la structure de dépendance entre deux variables aléatoires. En particulier, les copules de valeurs extrêmes présentent le moyen le plus adéquat à la modélisation de la structure de dépendance d'une distribution conjointe de deux variables extrêmes et ses marginales.

Dans le cadre de l'étude des événements extrêmes, il est intéressant d'étendre ce travail à plusieurs perspectives, à savoir, l'étude des copules des extrêmes multivariés ($n > 2$) ainsi que l'étude de leur estimation paramétrique et non-paramétrique ou encore la modélisation des données réelles par des copules de survie multivariées.

Bibliographie

- [1] AKAIKE, H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. *In B.N. Petrov and F. Czàke, editors, Proceedings of the Second International Symposium on Information Theory* (1973), 267–281.
- [2] ALDAMA, A., AND RAMIREZ, A. Dam design flood estimation based on bivariate extreme value distributions. *In extremes of the extremes : Extraordinary floods Walling ford, IAHS Press Vol.1* (2002), 257–262.
- [3] BALKEMA, A., AND RESNICK, S. Max-infinite divisibility. *Journal of Applied Probability, Vol.14(2)* (1977), 309–319.
- [4] BEIRLANT, J., GOEGEBEUR, Y., SEGERS, J., AND TEUGELS, J. Statistics of extremes : Theory and applications. *John Wiley and Sons,Ltd.* (2004).
- [5] CAPÉRAÀ, P., FOUGÈRES, A. L., AND GÉNEST, C. A nonparametric estimation procedure for bivariate extreme value copulas. *Biometrika Vol.84(3)* (1997a), 567–577.
- [6] CAPÉRAÀ, P., FOUGÈRES, A. L., AND GÉNEST, C. Bivariate distributions with given extreme value attractor. *Journal of Multivariate Analysis Vol.72* (1997b), 30–49.
- [7] CEBRIÁN, A., DENUIT, M., AND LAMBERT, P. Analysis of bivariate tail dependence using extreme values copulas : An application to the soa medical large claims database. *Belgian Actuarial Journal, Vol.3(1)* (2003), 33–41.
- [8] CLAYTON, D. G. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika Vol.65* (1978), 141–151.
- [9] COLES, G., AND TAWN, J. A bayesian analysis of extreme rainfall data. *Journal of the Royal Statistical Society series C Vol.45(4)* (1996), 463–478.
- [10] COOK, R., AND JOHNSON, M. A family of distributions for modelling non-elliptically symmetric multivariate data. *Journal of the Royal Statistical Society Ser B43* (1981), 210–218.
- [11] DAVIS, R., AND RESNICK, S. Tail estimates motivated by extreme value theory. *The Annals Of Statistics Vol.12(4)* (1984), 1467–1487.

-
- [12] DE HAAN, L. Extremes in higher dimensions : The model and some statistics. *Proceedings of the 47th Session of the International Statistical Imtitute, Amsterdam, Holland* (1985), 1–16.
- [13] DE HAAN, L., AND FERREIRA, A. Extreme value theory : An introduction. *Springer series in operations reseach and financial engeneering, New York Inc* (2006).
- [14] DE HAAN, L., AND RONDE, J. Sea and wind : Multivariate extremes at work. *Extremes Vol.1(1)* (1998), 7–45.
- [15] DE HAAN, L., SINHA, A. K., AND EINMAHL, J. Estimating the spectral measure of an extreme value distribution. *Stochastic processes and their applications, Vol.70(2)* (1997), 143–171.
- [16] DEHEUVELS, P. La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique Vol 65.* (1979), 274–292.
- [17] DEHEUVELS, P., HAEUSLER, E., AND MASSON, D. Almost sure convergence of the hill estimator. *Mathematical proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol.104(2).* Cambridge University Press (1988), 371–381.
- [18] DEKKERS, A., EINMAHL, J., AND DE HAAN, L. A moment estimator for the index of an extrem value distribution. *Annals Of Statistics Vol.17* (1989), 1833–1855.
- [19] EMBRECHTS, P., MCNEIL, E., AND STRAUMANN, D. Correlation : Pitfalls and alternatives. *Risk Magazine Vol.12* (1999), 69–71.
- [20] ESCHENBURG, P. Properties of extreme-value copulas. *Technische universität, München, Fakultät für mathematik* (2013).
- [21] FAVRE, A., ELADLOUNI, S., PERRAULT, L., THIÉMONGE, N., AND BOBÉE, B. Multivariate hydrological frequency analysis using copulas. *Water Resources Research Vol.40* (2004), 1–12.
- [22] FISHER, R., AND TIPPETT, L. Limiting forms of frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society Vol.24(2)* (1928), 180–190.
- [23] FRANK, M. On the simultaneous associativity of $f(x,y)$ and $x+y+f(x,y)$. *Aequationes Mathematicae Vol.19(1).* (1979), 194–226.
- [24] FRÉCHET, M. Sur les tableaux de corrélation dont les marges et bornes sont données. *Annales de l'Université de Lyon. Sciences Mathématiques et Astronomie.* (1951), 53–77.
- [25] FREES, E.W. VALDEZ, E. Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial journal. Vol.2.* (1998), 1–15.
- [26] GALAMBOS, J. The asymptotic theory of extreme order statistics-. *2nd ed. Krieger, Malabar.* (1987).

-
- [27] GENEST, C., AND MACKAY, R. Copules archimédienne et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *Canadian journal of statistics Vol.14(2)* (1986), 145–159.
- [28] GHOUDI, K., KHOUDRAJI, A., AND RIVEST, E. L.-P. Propriétés statistiques des copules de valeurs extrêmes bidimensionnelles. *Canadian Journal of Statistics Vol.26(1)* (1998), 187–197.
- [29] GNEDENKO, B. Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire. *Annals Of Mathematics* (1943), 423–453.
- [30] GUMBEL, E. Bivariate logistic distributions. *Journal of the American Statistical Association Vol.56(294)* (1961), 335–453.
- [31] GUMBEL, E., AND GOLDSTEIN, N. Analysis of emperique bivariate extremal distributions. *Journal of the American Statistical Association Vol.59(307)* (1964), 794–816.
- [32] HEYDE, C. C. A contribution to the theory of large deviations for sums of independent random variabbles. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeits theorie und verwandte Gebiete Vol.7* (1967), 303–308.
- [33] HILL, B. A simple general approach to inference about the tail of distribution. *Annals of statistics Vol.3(5)* (1975), 1163–1174.
- [34] HEFFDING, W. Masstabinvariante korrelations theorie. *Schriften des Matematischen Ins-tituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin 5 Heft.* (1940), 179–233.
- [35] HÜSLER, J., AND REISS, R. Maxima of normal random vectors : Between independence and complete dependence. *Statistics and Probability Letters, Vol.7(4)* (1989), 283–286.
- [36] JENKINSON, A. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly J.R.Methodol.Soc. Vol.81* (1955), 158–171.
- [37] JOE, H. Multivariate models and dependence concepts. *LONDON : Chapman and Hall* (1997).
- [38] JOE, H., SMITH, R., AND WEISSMAN, I. Bivariate threshold methods for extremes. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol.54* (1992), 171–183.
- [39] KHOUDRADJI, A. Contributions à l’étude des copules et à la modélisation de valeurs extrêmes bivariées. *Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, Canada.* (1995).
- [40] KIMELDORF, G., AND SAMPSON, A. One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals. *Comm. Statist. A - Theory methods Vol.4* (1975), 293–301.
- [41] LAKHAL-CHAIEB, M., RIVEST, L., AND ABDOUS, B. Estimating survival and association in a semicompeting risks model. *Biometricks Vol.64(1)* (2008), 180–188.
- [42] LONGIN, F., AND SOLNIK, B. Extreme correlation of international equity markets. *Journal of Finance N°56* (2001), 651–678.

-
- [43] MARSHALL, A., AND OLKIN, I. A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, Vol.62(317) (1967), 30–44.
- [44] MASON, D. Laws of large numbers for sums of extreme values. *The Annals of Probability* Vol.10(3) (1982), 754–764.
- [45] OAKES, D. A model for association in bivariate survival data. *Journal of the Royal Statistical Society Ser B*. 44(3) (1982), 414–422.
- [46] PICKANDS, J. Statistical inference using extreme order statistics. *Annals of statistics* Vol.3(1) (1975), 119–131.
- [47] PICKANDS, J. Multivariate extreme values distributions. *Bulletin of International Statistical Institute, Proceedings of the 43 rd Session, Buenos Aires 1981* (1981), 859–878.
- [48] RESNICK, S. Extreme values, regular variation and point processes. *Springer verlag, New york* (2013).
- [49] SCHWARTZ, G. Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, Vol.6(2) (1978), 461–464.
- [50] SEGERS, J. Max-stables models for multivariate extremes. *Preprint arXiv :1204.0332* (2012).
- [51] SKLAR, A. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ.Inst.Statist.Univ.Paris Vol.8* (1959), 229–231.
- [52] STĀRIČA, C. Multivariate extremes for models with constant conditional correlations. *Journal of empirical finance*. Vol.6(5) (1999), 515–553.
- [53] TAWN, J. Bivariate extreme value theory : Models and estimation. *Biometrika* (1988), 397–415.
- [54] VON MISES, R. La distribution de la plus grande de n valeurs. *Rev.Math.Union Interbalcanique Vol.1* (1936), 141–160.
- [55] YAN, J., AND KOJADINOVIC, I. Copula : Multivariate dependence with copulas. *R package version 0.8-12*. (2008).