REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINESTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

En vue d'obtention du Diplôme Master II en
Spécialité : **RECHERCHE OPERATIONNELLE**

Thème

Théorie du contrôle optimal

et Application

Soutenu le : 02/11/2021

Présenté par :

Ben Abderrahmane Yahia

Devant le jury :

Encadreur : Mr. Aidene Mohamed

Présidente : Mme. Rezki Fariza

Examinateur : Mr. Akkouche Abderrahmane

Année universitaire : 2020 /2021

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que j'exprime ma gratitude et mes sincères remerciements à mon promoteur : **Mr Aidene Mohamed** pour son orientation et encadrement dans l'élaboration de ce mémoire de fin d'études.

Je remercie également les membres de jury, pour avoir accepter de juger ce travail.

Je remercie aussi tous les enseignants qui m'ont donné des connaissances tout au long de mon cursus, particulièrement ceux du département de mathématiques.

Je remercie énormément mes parents qui ont été toujours ma source d'inspiration, je leur dois d'être arrivé là, qu'ils trouvent ici une sorte de récompense.

Sans oublier tous mes amis qui m'ont aidé de prés ou de loin, surtout Rahmoune, Rabah, Amar et Nadir.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :
A mes chers parents et grands-parents.
A mes frères Fodil, Ibrahime, Hamid et Menouar.
A mon cousin Rafik.
A mes oncles Hocine et Karim.
A mon ami Amer Hami, paix à son âme.
A tous mes amis qui m'ont aidé de prés ou de loin.
A toute la promotion Recherche Opérationnelle.

Table des matières

Table des figures

Notations

X : Ensemble des états.

U : Ensemble des commandes admissibles.

x_0 : État initial.

x_1 : État final.

M_0 : L'ensemble de départ.

M_1 : L'ensemble d'arrivé.

t_0 : Temps initial, $t_0 \geqslant 0$.

T : Temps final.

T_* : Temps optimal.

$T_{\min}$: Temps minimal.

u, v : Commandes optimales.

$x(t)$: Vecteurs des états.

K : La matrice de Kalman (système linéaire autonome).

$C(.)$: La matrice de Kalman (système linéaire non-autonome).

$det(.)$: Déterminant.

$\mathcal{V}$: Voisinage.

$\mathcal{A}_{cc}(.,.)$: Ensemble des points accessibles.

H : Fonction Hamiltonien.

p_0 : une constant sur $[0, T]$.

$p(t)$: État adjoint, (Vecteur adjoint).

F, f : Fonctions.

$\varphi(T, x(T))$: coût terminal.

f_0 : fonction objective.

$Cste$: Constant.

Introduction générale

L'optimisation est une branche mathématique qui cherche à analyser et à résoudre les problèmes qui consistent à déterminer le meilleur élément d'un ensemble, au sens d'un critère donné.

Les systèmes dynamiques étant représentés par un modèle mathématique décrivant son état et son contrôle à l'aide de variables. Le problème consiste à trouver des solutions qui satisfont un certain objectif quantitatif, tout en respectant d'éventuelles contraintes. La modélisation d'un phénomène, est une démarche visant à représenter par un moyen adéquat le plus fidèlement possible, le comportement de ce phénomène. Dans les sciences, la modélisation permet de comprendre les variables qui agissent sur ce comportement, afin de simuler des situations à venir.

La théorie du contrôle est l'un des domaines les plus en vue dans le champ d'application des mathématiques. Historiquement, le problème de contrôle optimal est apparu après la seconde guerre mondiale dans le cadre de calcul des variations, répandant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique de vol. La formalisation de cette théorie a posé des questions nouvelles, par exemple dans la théorie des équations différentielles ordinaires, et a motivé un concept de solution généralisé et a engendré de nouveaux résultats d'existence de trajectoires optimales.

La théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années cinquante, avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcule des variations. Dès lors, la théorie a connu un essor spectaculaire, ainsi que de nombreuses applications. De nos jours, les systèmes automatisés, font complètement partie de notre quotidien, ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches : systèmes de freinage, assistance à la conduite, servomoteur, thermostats, circuits frigorifiques, contrôle des flux routiers, circuits électriques, électroniques, télécommunications en général, contrôle des procédés chimiques, chaînes industrielles,...etc, les applications concernent tout système sur lequel on peut avoir une action, avec une notion de rendement optimal.

Le contrôle optimal sert à trouver une loi de commande pour un système donné de telle sorte qu'un certain critère d'optimalité soit atteint. Un problème de commande comprend donc un coût à optimiser, une fonction d'état et une variable de contrôle. Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. En suite il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût minimum (ou maximum). Pour la résolution du problème de contrôle optimal, on dispose de deux grandes classes de méthodes : les méthodes indirectes et les méthodes directes. Les méthodes indirectes impliquent l'utilisation du principe du maximum de Pontryagin, tandis que l'autre fait usage à des techniques de discrétisation pour aboutir à un problème d'optimisation non linéaire.

Ce présent manuscrit est composé de trois chapitres :

-Dans le premier chapitre, on présente les notions de base de la théorie du contrôle optimal, avec notamment la contrôlabilité des systèmes linéaires et non-linéaires. Et le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) dans toute sa généralité.

-Dans le second chapitre, on présente une application d'un procédé de fermentation.

-Dans le dernier chapitre, un exemple numérique pour illustrer les principaux résultats.

Ce travail se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

Théorie du contrôle optimal

Introduction

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-a-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but alors est d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec retard...etc, leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie...etc, l'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à perturbations (stabilisations), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastique...etc. pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion nombreux domaines mathématiques,les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

1.1 Position du problème

Avant de commencer la résolution d'un problème de contrôle optimal, on doit d'abord déterminer la modélisation mathématique de ce dernier. un système peut avoir plusieurs variables (paramètre), nécessaires pour décrire son comportement, l'identification de ces variables (paramètres) et la description du système qui évolue dans le temps est une tache très importante.

La modélisation Mathématique, nous conduit à connaitre la fonction à optimiser, l'état, le modèle et les variables du système.

1.2 Système de contrôle optimal

Définition 1.1

Un système de contrôle optimal, est un système dynamique qui dépend d'un paramètre appelé contrôle (commande). les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Mathématiquement, un système de contrôle optimal s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t,x(t),u(t)) \\ x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \\ t \in [t_0,T] \end{cases} \tag{1.1}$$

l'équation (1.1) décrit la loi d'évolution.

Remarque

- Le vecteur des état $x(t)$ appartient à une variété différentielle X de dimention n. (on suppose que X est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$).
- $u(t)$ appartient à l'ensemble des commandes admissibles U, qui est un ensemble de fonctions localement mesurables, intégrables, définies sur $[0,+\infty[$ à valeur dans $U \subset \mathbb{R}^m$.
- f est une application de C^1, de sorte que pour toute condition initiale

$x_0 \in X$ et tout contrôle admissible $u(.)$, le système définit ci-dessus admet une unique solution $x(t)$.
– La complexité du système de contrôle dépend de la complexité des espace X et U et la nature de l'équation dévolution.

1.2.1 Condition initiale du système

Définition 1.2

La condition initiale du système, $x_0 = x(t_0)$ *est un vecteur donnée dans un plan de phase. En réalité, la position initiale* x_0 *peut mesurer la vitesse, la température et d'autres paramètres mesurables.*

1.2.2 Objectif de contrôle optimal

L'objectif d'un problème de contrôle est d'amener le système d'un état initial donné $x_0 = x(t_0)$, $(x_0 \in M_0)$ à un état final souhaité $x_1 = x(T)$, $(x_1 \in M_f)$ en respectant certaines contraintes, tel que M_0 est l'ensemble de départ et M_f est l'ensemble d'arrivée, tout en minimisant (maximisant) un certain coût, ou bien déstabiliser un système pour le rendre insensible à certaines perturbations.

1.3 Quelque problèmes de contrôle optimal

Dans cette session, nous étudions une catégorie de problème de contrôle optimal, régie par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad \forall t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.2}$$

Tel que : $x(t_0)$ est une condition initial donné.

1.3.1 Problème de Lagrange

Étant donné une fonction

$$f_0 : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

on définit le problème d'optimisation :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, x(t), u(t)) \longrightarrow opt \tag{1.3}$$

Ainsi la formulation (1.3) est appelée problème de Lagrange.

1.3.2 Problème de Mayer

On considère le système (1.2) et soit la fonction

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

, on définie le problème d'optimisation :

$$J(u(t)) = \varphi(T, x(T)) \longrightarrow opt \tag{1.4}$$

Ce problème est appelé problème de Mayer.

1.3.3 Problème de Bolza

Le problème de Bolza, est un problème qui regroupe le précédentes formulations à savoir les formulations de Lagrange et Mayer.

soit le système dynamique (1.2), et soit la fonction :

$$f_0 : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R} \quad et \quad \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

et on définit le problème d'optimisation :

$$J(u(t)) = \varphi(T, x(T)) + \int_{t_0}^{T} f_0(t, x(t), u(t)) \longrightarrow opt \tag{1.5}$$

Ce problème est appelé problème de Bolza (Mayer-Lagrange).

1.4 Classe des commandes admissibles

Définition 1.3

La classe des commandes admissibles U est constituée de fonction mesurable $u(t)$, $U = \{u(t),\ t \in [t_0, T]\}$. l'ensemble des commandes admissibles peut être borné ou de type Bang-Bang défini ci-dessous.

1.4.1 Commande bornée

La commande $u(t)$ est dite commande bornée si elle peut être minorée et majorée par des constantes a_j et b_j sous la forme suivante :

$$a_j \leq u_j(t) \leq b_j, \quad j = \overline{1,m}, \quad t \in [t_0, T].$$

Si de plus,on peut remplacer u_j par v_j en posent

$$u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j + b_j)v_j$$

Ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq +1$.

Donc lorsque U est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et $+1$.

1.4.2 Commande Bang-Bang

Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = \overline{1,m}$ on a :

$$|u_j(t)| = 1.$$

1.5 Contrôlabilité

Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener (en temps fini) d'un point initial arbitraire vers un point final prescrit au moyen d'un contrôle. cette notion à été introduite par Kalman en 1960 pour des systèmes linéaires de la forme $\dot{x} = Ax + Bu + r$.

Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut vouloir passer de l'état initial à l'état final en optimisant un certain critère, on parle alors d'un problème de contrôle optimal.

1.5.1 Contrôlabilité des système linéaires

La formulation mathématique d'un système de contrôle linéaire est la suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), & \forall t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

Où A, B et r sont trois applications localement intégrables sur I à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. l'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur $[t_0, T]$ à valeurs dans un sous ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$.

Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que pour tout contrôle u du système (1.2) admet une unique solution $x(.) : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, cette solution est donnée par :

$$x(t) = F(t)x_0 + \left[\int_{t_0}^{t} \Big(F(t)F(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s)) \Big) ds \right].$$

Soit $F(.) : [t_0, T] \longrightarrow F_n(\mathbb{R})$ la résolvent du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ définie par :

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t), \quad F(0) = Id.$$

Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la solution du système s'écrit comme suit :

$$x(t) = F(t)\left[\int_{t_0}^{t} \Big(F(s)^{-1}(B(s)u(s)) \Big) ds \right]$$

Elle est linéaire en u.

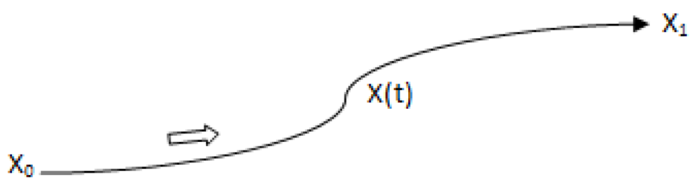


Figure 1.1 – Contrôlabilité.

1.5.1.1 Contrôlabilité des système linéaires autonomes

a) Cas sans contrainte sur le contrôle : condition de Kalman

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t.

Théorème 1.5.1 *[2]*

Le système autonome

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , \ t \in [t_0, T],$$

est dit contrôlable si la matrice

$$K = \left(B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right),$$

et de rang n.

Remarque

- K est une matrice à n lignes et $n \times m$ colonnes,elle est appelée matrice de Kalman, et la condition $rg(K) = n$ et appelée condition de Kalman.
- La condition de Kalman ne dépend ni de t ni de $x(t)$. Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_0 depuis x_0, alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.
- Dans le cas d'un système linéaire autonome, la solution $x(t)$ du système associé au contrôle u s'écrit :

$$x(t) = e^{At}\left(x_0 + \int_0^t e^{-At}\left(B(s)u(s) + r(s)\right)ds\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

b) Cas avec contrainte sur le contrôle

Théorème 1.5.2 *[1]*

Soit $b \in \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 dans son intérieur.
Considérons le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

avec $u(t) \in U$. *Alors tout point de* $\mathbb{R}$ *peut être conduit à l'origine en temps finis si et seulement si la pair (A,B) vérifie la conditions de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.*

Exemple 1.5.1

Considérons le système dynamique linéaire autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1 - u \end{cases} \Leftrightarrow \quad \dot{x} = Ax + Bu.$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour vérifier la contrôlabilité de ce système, il suffit de calculer le déterminant de la matrice de Kalman par conséquent, la matrice de Kalman K est donnée par

$$K = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

le déterminant de K et égal à : $\det(K) = -1 \neq 0$, *donc le* $rg(K) = 2$ *et le système est contrôlable.*

1.5.1.2 Contrôlabilité des système linéaires non-autonomes

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas non-autonome.

Théorème 1.5.3 *[5]*

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ *est contrôlable en temps* T *si et seulement si la matrice de contrôlabilité suivant :*

$$C(t) = \int_0^T F(t)^{-1} B(t) B(t)' (F(t)^{-1'}) \, dt,$$

est inversible.

Remarques

– $F(t) = e^{At}$ et la résolvante solution de $\dot{F}(t) = AF(t)$.

- Cette condition dépend de t, mais ne dépends pas du point initial x_0. Autrement dit, si un système linéaire non-autonome est contrôlable en temps t de puis x_0, alors il est contrôlable en temps t de puis tout point.
- On a $C(t) = C(t)'$, $x'C(t)x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,(i,e $C(t)$ est une matrice carrée symétrique positive).

Exemple 1.5.2

Considérons le système dynamique linéaire non-autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + u(t)\cos(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1 + u(t)\sin(t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t).$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \ , \ r(t) = 0.$$

La résolution du système $\dot{F}(t) = AF(t)$, avec $F(0) = I_2$ est :

$$\begin{pmatrix} \dot{f}_1(t) & \dot{f}_2(t) \\ \dot{f}_3(t) & \dot{f}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_3(t) & f_4(t) \end{pmatrix}, F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{f}_1(t) = -f_3(t), \\ \dot{f}_2(t) = -f_4(t), \\ \dot{f}_3(t) = f_1(t), \\ \dot{f}_4(t) = f_2(t). \end{cases}$$

La résolution de ce système revient à résoudre :

$$\begin{cases} \ddot{f}_1(t) = -\dot{f}_3(t) = -f_1(t), \\ \ddot{f}_2(t) = -\dot{f}_4(t) = -f_2(t). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(t) = \alpha_1\cos(t) + \alpha_2\sin(t) \ , \quad f_1(0) = 1, \\ f_2(t) = \alpha_3\cos(t) + \alpha_4\sin(t) \ , \quad f_2(0) = 0. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix} \; et \; (F(t))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix},$$

la matrice de contrôlabilité C est donné par :

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_0^T (F(t))^{-1} B(t) B(t)' (F(t)')^{-1} dt \\ &= \int_0^T \left(\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix} \right) dt \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice C est égal à : $\det(C) = 0$ *donc la matrice n'est pas inversible. par conséquent, le système n'est pas contrôlable.*

1.5.2 Contrôlabilité des systèmes non-linéaires

Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires, on a tendance à utiliser le système linéarisé partant du fait que la contrôlabilité des systèmes linéarisés implique celle du système non linéaire d'une manière locale.

Contrôlabilité local des systèmes non-linéaire

Définition 1.4

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)) \\ x(t) \in X \\ u(t) \in U \\ t \in [t_0, T] \end{cases} \tag{1.7}$$

On dit que le système non-linéaire est localement contrôlable au point x_0, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que pour tout $x_1 \in \mathcal{V}$, il existe un temps *fini T et un contrôle admissible $u(.) : [t_0, T] \longrightarrow U$ tel que $x_1 = x(t, x_0, u(.))$.*

Théorème 1.5.4 *[1]*

Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que u et un voisinage de u_0 et $f(x_0, u_0) = 0$.

Soient

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) \text{ et } B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0).$$

Si le rang de la matrice $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ est égal à n (le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ est contrôlable), alors le système non-linéaire (1.7) est localement contrôlable en x_0.

1.5.3 Ensemble accessible

Étant donnée l'état initial x_0, nous étudions l'ensemble $\mathcal{A}_{cc}(x_0, T)$ de tous les points de $\mathbb{R}^n$ aux quels x_0 peut être transféré par les contrôleurs u(t), sur 0<t<T.

Considérons le système de contrôle linéaire (1.7).

Définition 1.5

L'ensemble des point accessible à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est définit par :

$$\mathcal{A}_{cc}(x_0, T) = [x_u(T) / u \in U]$$

où $x_u(.)$ est la solution du système contrôlé (1.7) associée au contrôle u.

Autrement dit $\mathcal{A}_{cc}(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système contrôlé (1.7) au temps T, lorsqu'on fait varier le contrôle u.

Pour la cohérence on pose $\mathcal{A}_{cc}(x_0, 0) = \{x_0\}$.

Théorème 1.5.5 *[1]*

Considérons le système de contrôle linéaire dans $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

ou $U \in \mathbb{R}^m$ *est compacte. Soient* $T > 0$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*. Alors pour tout* $t \in [0,T]$, $\mathcal{A}_{cc}(x_0,T)$ *est compact, convexe et varie continument avec* t *sur* $[0,T]$.

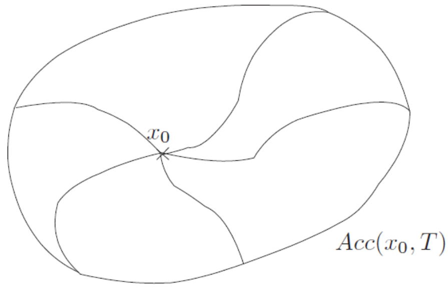


FIGURE 1.2 – Ensemble accessible.

Définition 1.6

Le système (1.7) *est dit contrôlable en temps* T *si*

$$\mathcal{A}_{cc}(x_0,T) = \mathbb{R}^n$$

Il est dit contrôlable en temps quelconque t *de puis* x_0 *si*

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{t \geqslant 0} \mathcal{A}_{cc}(x_0,t)$$

Exemple 1.5.3

Considérons le système (D) *:*

$$(D) : \begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ |u_i(t)| \leqslant 1,\ i = \overline{1,2}\ ;\ t \in [0,T]. \end{cases}$$

L'ensemble accessible :

$$\mathcal{A}_{cc}(x_0,t) = \{x_u(t) | x_u(t) \text{ la solution du système } (D)\}$$

Le système (D) *est un système linéaire équivalent au système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Alors la solution de (D) s'écrit sous la forme :

$$x(t) = F(s)x(0) + F(s)\int_0^t F(s)^{-1}Bu(s)ds.$$

Ou F est la solution du système :

$$\begin{cases} \dot{F} = AF, \\ F(0) = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; \dot{F} = AF = 0,$$

$$\Rightarrow \; F = Cste,$$

$$\Rightarrow \; F(t) = F(0) = Id,$$

Alors

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} dt,$$

$$\Rightarrow \; \begin{cases} x_1(t) = -1 + \int_0^t u_1(t)dt, \\ x_2(t) = 0 + \int_0^t u_2(t)dt. \end{cases}$$

Alors

$$\mathcal{A}_{cc}(x_0, t) = \left\{ \begin{array}{ll} (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2 | & x_1(t) = -1 + \int_0^t u_1(t)dt, \\ & x_2(t) = 0 + \int_0^t u_2(t)dt, \\ & ou \; |u_1(t)| \leqslant 1, |u_2(t)| \leqslant 1. \end{array} \right\}.$$

Par intégration on trouve :

$$\begin{cases} -1-t \leqslant -1+\int_0^t u_1(t)dt \leqslant t-1, \\ -t \leqslant \int_0^t u_2(t)dt \leqslant t. \end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{A}_{cc}(x_0,t) = \left\{ \begin{array}{ll} (x_1(t),x_2(t)) \in \mathbb{R}^2 | -1-t & \leqslant -1+\int_0^t u_1(t)dt \leqslant t-1, \\ & -t \leqslant \int_0^t u_2(t)dt \leqslant t. \end{array} \right\}.$$

1.6 Existence de trajectoire optimales

L'existence de trajectoire optimale d'un problème de contrôle optimal revient à vérifier certaines conditions, qui sont généralement formulées sans recourir à l'hypothèse usuelle de convexité du domaine des valeurs de commande.

Le théorème suivant garantit l'existence de trajectoires optimales pour le problème de Bolza.

Théorème 1.6.1 *[4]*

Considérons le système de contrôle

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right),$$

où $f : \mathbb{R}^{m+n+1}$ dans $\mathbb{R}^n$ est une application de C^1 et les contrôles u sont à valeurs dans un compact $U \subset \mathbb{R}^m$.

Soient f_0 une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{m+n+1}$, et φ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. Considérons la fonctionnelle :

$$J(u) = \varphi(T_*, x(T_*)) + \int_0^{T_*} f_0\left(t, x(t), u(t)\right),$$

où $T_* \geqslant 0$ tel que $x(T_*) = M_1$ on suppose que :

– *Il existe un réel positifs tel que toute trajectoire associée à un contrôle*

$u \in U$ est uniformément bornée par s sur $[0,T_*]$, i.e.

$$\exists s > 0 \mid \forall u \in U, \forall t \in [0,T_*], \|x_u(t)\| \leqslant s.$$

– *Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}$, l'ensemble des vecteurs vitesses augmentés :*

$$\overline{V}(t,x) = \{f_0(t,x,u), \quad f(t,x,u) | \; u \in U\}$$

est convexe.

Alors, il existe un contrôle optimal u sur $[0,T_*]$, optimisons $J(u)$.

1.7 Problème en temps optimal

Un problème en temps minimal consiste à minimiser le temps final qui représente le critère du problème avec les contraintes standard du problème.

Il s'agit de trouver, parmi l'ensemble des trajectoires reliant x_0 et x_1 en temps fini, celle ayant le temps le plus petit.

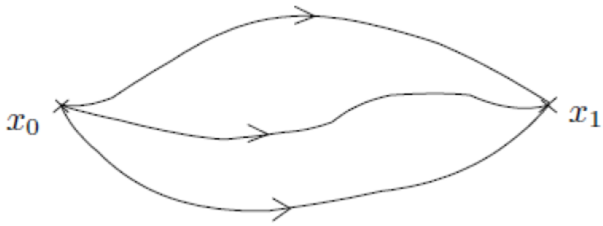


FIGURE 1.3 – Trajectoire temps optimal.

Par conséquent le problème en temps minimal est de la forme :

$$\begin{cases} \int_0^T dt \quad \longrightarrow \quad \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) \in U, \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{1.8}$$

Remarque

On parle d'un problème en temps minimal lorsque $f_0(t,x(t),u(t)) = 1$ et $\varphi(T,x(T)) = 0$.

1.7.1 Existence d'une trajectoire temps minimal

Supposons que x_1 soit accessible depuis x_0, c'est-à-dire qu'il existe au moins une trajectoire reliant x_0 et x_1, on aimerait caractériser celles qui le fant en temps minimal $T_{\min}$. (voir figure (1.3))

Si $T_{\min}$ est le temps minimal, alors tout $t < T_{\min}$, $x(t) \notin \mathcal{A}_{cc}(x_0, t)$ (en effet sinon x_1 serait accessible à partir de x_0 en un temps inférieur à $T_{\min}$). Par conséquent,

$$T_{\min} = inf\,\{t > 0 \backslash x_1 \in \mathcal{A}_{cc}(x_0, t)\}\,.$$

Ce temps $T_{\min}$ est bien défini car, d'après le théorème(1.5.5), $\mathcal{A}_{cc}(x_0, t)$ varie continument avec t, donc l'ensemble $\{t > 0 \backslash x_1 \in \mathcal{A}_{cc}(x_0, t)\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$. En particulier cette borne inférieure est atteinte.

Le temps $t = T_{\min}$ est le premier temps pour lequel $\mathcal{A}_{cc}(x_0, t))$ contient x_1. (voir la figure (1.4)).

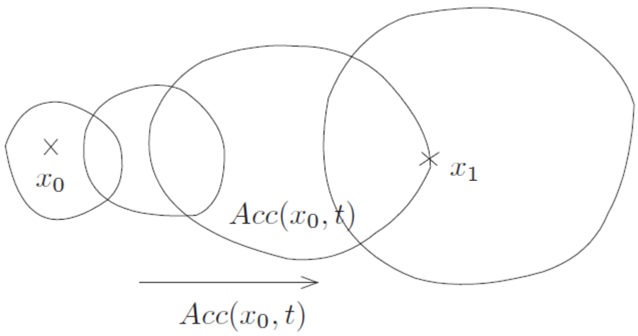


FIGURE 1.4 – Temps minimal

Théorème 1.7.1 *[1] **(Condition d'existence)***

Si le point x_1 est accessible de puis x_0 alors il existe une trajectoire temps-minimale reliant x_0 à x_1.

1.8 Principe du Maximum

En 1962, Lev Pontryagin et ses collègues ont développé le principe du Maximum. Ce résultat mathématique est appelé principe, car il peut être transformé en de nombreux théorèmes différents en fonction des contraintes du problème considéré.

Ce principe est difficile à démontrer. En revanche lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la preuve est simple, et on arrive au principe du maximum faible. C'est à cette version plus simple que nous allons d'abord nous intéresser, puis nous passerons au cas général.

Définition 1.7

Le contrôle u est dit extrémal sur $[0,T]$ *si la trajectoire associée à u du système (1.2) du problème de contrôle (1.5) vérifie :*

$$x(t) \in \partial\mathcal{A}_{cc}(x_0,t), \quad t \in [0,T].$$

Définition 1.8

Un contrôle $u^*(t)$, $t \in [0,T]$ *est dit optimal si* $u^*(.)$ *est extrémal et* $J(u^*(t)) < J(u(t))$ *pour tout contrôle extrémal* $u(t)$, $t \in [0,T]$.

1.8.1 Cas sans contrainte sur le contrôle : Principe du maximum faible

1.8.1.1 problème de Lagrange

Théorème 1.8.1 *[1]*

Si le contrôle u associé au système (1.2),est optimal pour le coût

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{T} f_0(t,x(t),u(t))dt, \tag{1.9}$$

alors il existe une application $p(.)$ *absolument continue sur* $[0,T]$, *à valeur dans* $\mathbb{R}^n$ *appelée vecteur adjoint, et un réel* $p_0 \leqslant 0$, *tels que le couple* $(p(.),p_0)$ *est non trivial, et les equations suivantes sont vérifiées pour presque tout* $t \in [0,T]$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t,x(t),p(t),p_0,u(t)) \tag{1.10}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t,x(t),p(t),p_0,u(t)) \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t,x(t),p(t),p_0,u(t)) = 0 \tag{1.12}$$

où H est le Hamiltonien associé au système (1.2) et au coût (1.7)

$$H(t,x,p,p_0,u) = p_0 f_0(t,x,u) + \langle p, f(t,x,u) \rangle .$$

1.8.1.2 Problème de Bolza (Mayer-Lagrange)

En réécrivant la fonction coût associe au problème de Bolza (Mayer-Lagrange) :

$$J(u(t)) = \varphi(T,x(T)) + \int_0^T f_0(t,x(t),u(t)) \tag{1.13}$$

où le temps final T, n'est pas fixé.

Soit M_1 une variété de $\mathbb{R}^n$, le problème de contrôle optimal est alors de déterminer une trajectoire solution de système (1.1),où les contrôles $u(.)$ sont dans U des contrôles admissibles sur $[0,T]$ telle que $x(T) \in M_1$ et de plus $u(t)$ minimise sur $[0,T]$ le coût (1.13).

Supposons que la variété M_1 est donnée par

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash F(x) = 0\} ,$$

oû

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est une fonction de classe C^1,

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_p(x)\} ,$$

de la , l'espace tangent à M_1 en un point $x \in M_1$ est :

$$T_x M_1 = \{v \in \mathbb{R}^n \backslash \nabla F_i(x).\ v = 0, i = \overline{1,p}\} \tag{1.14}$$

Théorème 1.8.2 *[1]*

Si le contrôle u est optimal sur $[0,T]$ alors il existe une application $p : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n_*$ absolument continue, et un réel $p_0 \leqslant 0$, tels que le couple $(p(.), p_0)$ est non trivial, et

$$\dot{x}\ (t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t,x(t),p(t),p_0,u(t)) \tag{1.15}$$

$$\dot{p}\ (t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = 0 \tag{1.17}$$

où

$$H(t, x, p, p_0, u) = p_0 f_0(t, x, u) + \langle p, f(t, x, u) \rangle .$$

Si de plus la cible M_1 est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que l'on a au point final (T, x_1)

$$p(T) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla F_i + p_0 \frac{\partial \varphi(T, x(T))}{\partial x(T)}$$

De plus si le temps final n'est pas fixé dans le problème de contrôle optimal, et si u est continue au temps T, alors on a au temps final T

$$H(x(T), p(T), p_0, v(T), T) = -p_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T, x(T))$$

1.8.2 Principe du Maximum de Pontryagin

Énoncé général

Soit la fonctionnelle à optimiser :

$$J(u(t)) = \varphi(T, x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt \quad \longrightarrow \ min \tag{1.18}$$

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \ , \ x(T) = x_1 \end{cases} \tag{1.19}$$

Où

$u \in U \subset \mathbb{R}^m$: ensemble des commandes admissibles bornées et continues par morceaux sur $[0, T]$.

f_0 : fonction coût.

$x_0 \in M_0$: état initial du système à l'instant t_0.

$x_1 \in M_1$: état final du système à l'instant T.

Le problème consiste à déterminer un contrôle optimal $u \in U$ et sa trajectoire x associée, qui optimise la fonctionnelle J

Définition 1.9

Le système d'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p,u) = f(t,x,u) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t,x,p,u) = -\left(p_0\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}(t,x,u)\right) + p\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,u)\right)\right) \end{cases} \tag{1.20}$$

est dit système Hamiltonien, qui vérifie :

$$H(x,p,p_0,u,t) = \underset{v \in U}{Max} H(x,p,p_0,v,t),$$

dite condition de maximisation presque partout sur $[0,T]$.

Remarque

- Si f et f_0 ne dépendent pas de t (*i.e.* le système augmenté est autonome), alors H ne dépende pas de t, et on a :

$$\forall t \in [0,T] \ , \ \underset{v \in U}{Max} H(x(t),p(t),p_0,v) = Cste.$$

- Si le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\underset{v \in U}{Max} H(x(T),p(T),p_0,v,T) = -p_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T,x(T))$$

  la fonction H ne dépend pas de x_0 d'où $\dot{p}\ (t) = 0$ c'est à dire $p_0(t)$ est constant sur $[0,T]$

- la convention $p_0 \leq 0$ conduit au principe du maximum, tandis que $p_0 \geq 0$ conduit au principe du minimum .

Définition 1.10

La fonction P découle de la résolution du système d'équation aux variables auxiliaires $p_1, p_2, \ldots, p_n$ suivant :

$$\dot{p}_i = -\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x^i}(t,x,u)\right) \times p_j, \quad i = \overline{0,n}$$

$p(t)$ est appelé état adjoint (vecteur adjoint), solution du système $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$.

1.8.2.1 Contrôle optimal linaire

Théorème 1.8.3 *[1]*

Considérons le système (1.6).

Supposons que le domaine des contraintes noté U est compact, soit $T > 0$, le contrôle u est extrémal sur $I = [0,T]$ si et seulement si il existe une solution non trivial $p(t)$, $t \in I$ de l'équation $\dot{p} = -p(t)A(t)$, telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in U}(p(t)B(t)v(t)) \tag{1.21}$$

pour presque tout $t \in [0,T]$.

Remarque

– Si $U = [-a,a]$, $a \in \mathbb{R}_+$, la condition (1.21) signifie que

$$u(t) = a(signe\,(p(t)B(t))),.$$

On dit que $u(t)$,$t \in [0,T]$ est Bang-Bang.

– Dans ce cas, la fonction $\gamma(t) = p(t)B(t)$ est appelé fonction de commutation.

– le temps t_c auquel le contrôle $u(t)$, $t \in [0,T]$ change de signe est appelé temps de commutation.

1.8.3 Condition de transversalité

La condition de transversalité est une contrainte supplémentaire (ou une condition finale).

1) La condition de transversalité sur le vecteur adjoint :

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0 \tag{1.22}$$

et

$$p(T) - p_0 \frac{\partial \varphi(T, x(T))}{\partial x(T)} \perp T_{x(T)} M_1. \tag{1.23}$$

2) La condition de transversalité sur la Hamiltonien :

$$\underset{v \in U}{Max} H(T, x(T), p(T), p_0, v) = -p_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T, x(T)). \tag{1.24}$$

1.8.3.1 Cas particulier de la condition de transversalité

a) **Transversalité sur le vecteur adjoint**

(1). **Cas du problème de Lagrange**

Dans le problème de Lagrange le coût s'écrit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, x(t), u(t))$$

($i.e.$ $\varphi = 0$), les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint (1.22) et (1.23) s'écrivent alors :

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0 \ , \ p(T) \perp T_{x(T)} M_1.$$

(2). **Cas du problème de Mayer**

Dans le cas de problème de Mayer le coût s'écrit :

$$J(u(t)) = \varphi(T, x(T))$$

($i.e.$ $f_0 = 0$), les conditions de transversalité ne simplifient pas a priori.

Mais dans le cas où $M_1 = \mathbb{R}^n$, autrement dit le point final $x(T)$ est libre, alors la condition (1.23) devient :

$$p(T) = p_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, x(T))$$

b) **Transversalité sur l'hamiltonien**

La condition (1.24) n'est valable que si le temps final pour atteindre la cible n'est pas fixé.

Dans le cas contraire, la seule simplification notable de cette condition est le cas où la fonction φ ne dépend pas du temps t (ce qui est vrai par exemple pour le problème de Lagrange), et la condition de transversalité sur le Hamiltonien (1.24) devient alors :

$$\underset{v \in U}{Max} H(T, x(T), p(T), p_0, v) = 0,$$

ou encore, si u est continu au temps T,

$$H(T, x(T), p(T), p_0, u(T)) = 0,$$

Autrement dit le Hamiltonien s'annule au temps final.

Remarque

- Si M_0 (respectivement M_1) est réduit à un seul élément cela n'impose aucune condition de transversalité sur $p(0)$ (respectivement $p(T)$).
- Si $M_0 = \mathbb{R}^n$ (respectivement $M_1 = \mathbb{R}^n$) alors $p(0) = 0$ (respectivement $p(T) = 0$).

Théorème 1.8.4 *[3]*

Toute commande optimale d'un problème terminal de contrôle optimal vérifie le principe du maximum.

Exemple 1.8.1

Considérons le problème (P) suivant :

$$(P) : \begin{cases} J(u(t)) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T (x^2 + u^2)dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = -ax(t) + u(t), \quad x(0) = x_0. \end{cases}$$

x_0, a, T données.

- *Le but est de résoudre (P) par le Principe du Maximum de Pontryagin.*

On a

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) = -ax(t) + u(t),$$

et

$$f_0(x(t), u(t), t) = \tfrac{1}{2}(x^2 + u^2),$$

et

$$p_0 = -1 \quad \textit{(cas de la minimisation)}$$

L'hamiltonien du problème :

$$\begin{aligned} H(x(t), p(t), p_0, u(t), t) &= p_0 f_0(x(t), u(t), t) + p(t) f(x(t), u(t), t) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + u^2) + p(t)(-ax(t) + u(t)) \end{aligned}$$

et le système hamiltonien est égal à :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = x(t) + ap(t). \\ \frac{\partial H}{\partial u} = -u + p = 0 \ \Rightarrow u(t) = p(t) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = -ax(t) + u(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) &= -a\dot{x}(t) + \dot{u}(t), \qquad \textit{on a } (u(t) = p(t)), \\ &= -a\dot{x}(t) + \dot{p}(t), \quad \textit{on a aussi } (\dot{p}(t) = x(t) + ap(t)), \\ &= -a\dot{x}(t) + x(t) + ap(t), \\ &= -a\dot{x}(t) + x(t) + a\dot{x}(t) + a^2 x(t), \\ &= x(t) + a^2 x(t), \\ \Rightarrow \ddot{x}(t) &= (1 + a^2) x(t), \\ \Rightarrow \ddot{x}(t) &- (1 + a^2) x(t) = 0 \qquad \ldots . \ (1) \end{aligned}$$

la solution de l'équation différentielle (1) *et :*

$$x(t) = \alpha_1 e^{\sqrt{1+a^2}t} + \alpha_2 e^{-\sqrt{1+a^2}t} \qquad \textit{avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

pour $t = 0$ *on a :*

$$
\begin{aligned}
x(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = x_0 \\
\Rightarrow \qquad \alpha_2 = x_0 - \alpha_1
\end{aligned}
$$

Alors

$$x(t) = \alpha_1 e^{\sqrt{1+a^2}t} + (x_0 - \alpha_1)e^{-\sqrt{1+a^2}t},$$

on pose $\lambda = \sqrt{1+a^2}$.

De là le contrôle optimal u sera le suivant :

$$
\begin{aligned}
u(t) = p(t) &= \dot{x}(t) + ax(t), \\
&= \alpha_1 \lambda e^{\lambda t} - \lambda \alpha_2 e^{-\lambda t} + a\alpha_1 e^{\lambda t} + a\alpha_2 e^{-\lambda t}, \\
&= \alpha_1(\lambda + a)e^{\lambda t} + \alpha_2(a - \lambda)e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$u(t) = \alpha_1(\lambda + a)e^{\lambda t} + \alpha_2(a - \lambda)e^{-\lambda t}.$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressé à la théorie du contrôle optimal où nous avons développé certains éléments de base de cette théorie, en portant intérêt à la contrôlabilité et au Principe de Maximum du Pontryagin.

Chapitre 2

Application

2.1 La fermentation

La fermentation est un processus métabolique convertissant généralement des glucides en acides, en gaz ou en alcools, pour extraire une partie de l'énergie chimique tout en ré-oxydant les coenzymes réduites par ces réactions.

La fermentation permet de produire de l'énergie (sous forme d'ATP) même en absence d'oxygène, mais avec un rendement plus faible. Elle est utilisée par un très grand nombre d'organismes, depuis la bactérie jusqu'à l'être humain.

2.2 La fermentation alcoolique

L'homme a utilisé la fermentation alcoolique par exemple dans la fabrication de la bière ou celle du vin depuis des millénaires, sans connaitre les processus biologiques précis.

La fermentation alcoolique est un processus biochimique par lequel des sucres (glucides, principalement le glucose) sont transformés en alcool (éthanol) dans un milieu liquide privé d'air (d'oxygène).

Au cours de la fermentation alcoolique, le glucose est converti en gaz carbonique et en éthanol(alcool éthylique).

$$\begin{array}{ccccccc} C_6H_{12}O_6 & \rightarrow & 2CO_2 & + & 2C_2H_5OH & + & \acute{E}nergie. \\ Sucre(Glucose) & \rightarrow & Gaz\ carbonique & + & \acute{E}thanol & + & \acute{E}nergie. \end{array}$$

2.3 Contrôle optimal d'un procédé de fermentation

Dans ce qui suit on va traiter un modèle de Contrôle optimal d'un procédé de fermentation.

La rédaction de ce travail a pour base le livre du mathématicien français Emmanuel Trélat. [1]

2.3.1 Position du problème

Considérons le procédé de fermentation suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t)\,(1 - x(t))\,, & x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = x(t) - u(t)y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$$

$x(t)$: la concentration de sucre.

$y(t)$: la concentration d'éthanol.

$u(t)$: le taux d'évaporation.

On suppose $0 \leqslant u(t) \leqslant M$, et $0 < x_0 < 1$.

Soit y_1 tel que $y_1 > \frac{1}{M}$ et $y_1 > x_0$.

On veut résoudre le problème du temps minimal pour rejoindre $y(T) = y_1$.

2.3.2 Les questions au quelle il faut répondre

1. Montrer que $x_0 e^{-t} \leqslant x(t) < 1$, pour tout $t \in [0,T]$.
2. a. Écrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal et les équation des extrémales.

   b. Écrire les condition de transversalité sur le vecteur adjoint et sur le temps. Montrer que $p_y(T) \neq 0$.
3. a. Pour tout $t \in [0,T]$, soit $\phi(t) = p_x(t)(1 - x(t)) - p_y y(t)$. Calculer $\dot{\phi}(t)$ et $\ddot{\phi}(t)$. Montrer que ϕ est strictement monotone.

b. En déduire que les contrôles optimaux sont bang-bang avec au plus une commutation, et préciser leur expression.
c. Montrer que $\dot{y}(T) \geqslant 0$.
d. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u(t) = 0$, pour presque tout $t \in [T-\varepsilon, T]$.
e. Conclure sur la structure du contrôle optimal.

2.3.3 Réponses

1. On a

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) = -x(t) + u(t)(1-x(t)), \\ \Leftrightarrow\ & \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) - u(t)x(t), \\ \Leftrightarrow\ & \dot{x}(t) = -x(t)(1+u(t)) + u(t). \end{aligned}$$

Pour montrer que $x_0 e^{-t} \leqslant x(t) < 1$, on a pour tout $t \in [0,T]$, $0 \leqslant u(t) \leqslant M$. Alors pour $u(t) \geqslant 0$:

$$\dot{x}(t) = -x(t)(1+u(t)) + u(t) \Rightarrow \qquad \dot{x}(t) \geqslant -x(t)(1+u(t)),$$

et on a aussi : $u(t) \geqslant 0 \Rightarrow 1 + u(t) \geqslant 1$.
Alors

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) \geqslant -x(t)(1+u(t)), \\ \Rightarrow\ & \dot{x}(t) \geqslant -x(t), \\ \Rightarrow\ & x(t) \geqslant e^c e^{-t}, \\ \Rightarrow\ & x(0) = x_0 \geqslant e^c. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [0,T]$:

$$x(t) \geqslant x_0 e^{-t}. \qquad (1)$$

On a aussi $u(t) \leqslant M$ avec $M > 0$, alors $x(t) \geqslant x_0 e^{-t} > 0$, et aussi valable pour $u(t) \leqslant M$, et

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) = -x(t) + u(t)(1 - x(t)), \\ \Rightarrow \quad & \dot{x}(t) \leqslant -x(t) + M(1 - x(t)), \\ \Rightarrow \quad & \dot{x}(t) + x(t) \leqslant M(1 - x(t)), \end{aligned}$$

et on a vu que pour $u(t) \geqslant 0$, $x(t) > 0$ et $\dot{x}(t) + x(t) > 0$.

Alors

$$\begin{aligned} & 0 < \dot{x}(t) + x(t) \leqslant M(1 - x(t)), \\ \Rightarrow \quad & M(1 - x(t)) > 0, \\ \Rightarrow \quad & (1 - x(t)) > 0, \\ \Rightarrow \quad & x(t) < 1. \qquad (2) \end{aligned}$$

Donc de (1) et (2) on a

$$x_0 e^{-t} \leqslant x(t) < 1$$

2. a. La fonction Hamiltonien :

$$\begin{aligned} H(t, x(t), y(t), p(t), p_0, u(t)) &= \langle p(t) f_0(t, x(t), u(t)) \rangle + p_0 f(t, x(t), u(t)), \\ &= p_x(t)\dot{x}(t) + p_y(t)\dot{y}(t) + p_0, \\ &= p_x(t)\left(-x(t) + u(t)\left(-x(t)\right)\right) + \\ &\qquad p_y(t)(x(t) - u(t)y(t)) + p_0, \\ &= -p_x(t)x(t)(1 + u(t)) + p_x(t)u(t) + \\ &\qquad p_y(t)x(t) - p_y(t)u(t)y(t) + p_0, \\ &= u(t)(-p_x(t)x(t) + p_x(t) - p_y(t)y(t)) \\ &\qquad - p_x(t)x(t) + p_y(t)x(t) + p_0. \end{aligned}$$

Les équations des extrémales :

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)}(t, x(t), y(t), p(t), p_0, u(t)), \\ \dot{p}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y(t)}(t, x(t), y(t), p(t), p_0, u(t)), \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{p}_x(t) = -(-p_x(t)(1+u(t)) + p_y(t)), \\ \dot{p}_y(t) = -(-p_y(t)u(t)), \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{p}_x(t) = p_x(t)(1+u(t)) - p_y(t), \\ \dot{p}_y(t) = p_y(t)u(t). \end{cases}$$

b. Les conditions de transversalités :

$$\begin{cases} p_x(T) = p_0 \frac{\partial \varphi(T, x(T))}{\partial x(T)}, & (*_1) \\ \underset{0 \leqslant u \leqslant M}{Max} H(T, x(T), y(T), p(T), p_0, u) = -p_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T, x(T)), & (*_2) \end{cases}$$

$*_1$: La condition de transversalité sur le vecteur adjoint.

$*_2$: La condition de transversalité l'hamiltonienne.

$$\Rightarrow \begin{cases} p_x(T) = 0, \\ \underset{0 \leqslant u \leqslant M}{Max} H(T, x(T), y(T), p(T), p_0, u) = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_x(T) = 0, \\ (-p_x(T)x(T)(1+u(T)) + p_x(T)u(T) + p_y(T)x(T) \\ \qquad -p_y(T)u(T)y(T) + p_0) = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_x(T) = 0, \\ p_y(T)(x(T) - u(T)y(T)) + p_0 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_x(T) = 0, \\ p_y(T)(x(T) - u(T)y(T)) = -p_0, \quad (p_0 \neq 0), \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_x(T) = 0, \\ p_y(T) \neq 0. \end{cases}$$

Et on a

$$\begin{aligned}
&\underset{0\leqslant u(t)\leqslant M}{Max} H(t,x(t),y(t),p(t),p_0,u(t)),\\
\Leftrightarrow &\underset{0\leqslant u(t)\leqslant M}{Max}((p_x(t)(1-x(t))-p_y(t)y(t))u(t))-p_x(t)x(t)+p_0,\\
\Leftrightarrow &\underset{0\leqslant u(t)\leqslant M}{Max}((p_x(t)(1-x(t))-p_y(t)y(t))u(t)).
\end{aligned}$$

Alors soit

$$\phi(t) = p_x(t)(1-x(t))-p_y(t)y(t), \quad t\in[0,T].$$

3. a. Calculer de $\dot{\phi}(t)$ et $\ddot{\phi}(t)$:
   Alors

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(t) &= (p_x(t)(1-x(t))-p_y(t)y(t))',\\
&= \dot{p}_x(t)-\dot{p}_x(t)x(t)-\dot{x}(t)p_x(t)-\dot{p}_y(t)y(t)-\dot{y}(t)p_y(t),\\
&= (p_x(t)(1+u(t))-p_y(t))-(p_x(t)(1+u(t))-p_y(t))x(t)-\\
&\qquad (-x(t)+u(t)(1-x(t)))p_x(t)-(p_y(t)u(t))y(t)-\\
&\qquad\quad (x(t)-u(t)y(t))p_y(t),\\
&= p_x(t)-p_y(t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi}(t) &= \dot{p}_x(t)-\dot{p}_y(t)\\
&= p_x(t)(1+u(t))-p_y(t)-p_y(t)u(t)\\
&= p_x(t)(1+u(t))-p_y(t)(1+u(t)),\\
&= (p_x(t)-p_y(t))(1+u(t)),\\
&= \dot{\phi}(t)(1+u(t)).
\end{aligned}$$

- L'étude de la monotone de $\phi(t)$:
  on a $\ddot{\phi}(t)=\dot{\phi}(t)(1+u(t))$, et comme $(1+u(t))>0$
  alors $signe(\ddot{\phi}(t)) = signe(\dot{\phi}(t))$.
  Supposons que $\phi(t)$ n'est pas monotone sur $[0,T]$ donc on aura deux cas possible :

<u>1^{er} Cas :</u>

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) > 0, & t \in [0, t_c] \\ \dot{\phi}(t) < 0, & t \in [t_c, T] \end{cases}$$

Alors $\phi(t)$ est croissante sur $[0, t_c]$, et $\phi(t)$ et décroissante sur $[t_c, T]$. Autrement dit $\phi(t)$ et concave sur $[0, T]$,

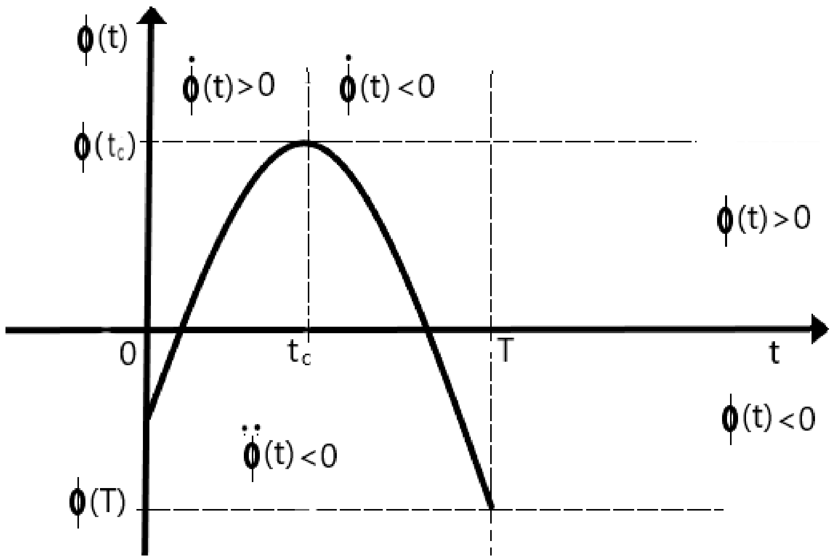


FIGURE 2.1 – $\phi(t)$ est concave.

Alors on remarque que pour $t \in [0, t_c]$, $\dot{\phi}(t) > 0$ et $\ddot{\phi}(t) < 0$.
Donc $signe(\ddot{\phi}(t)) \neq signe(\dot{\phi}(t))$

<u>2^{eme} Cas :</u>

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) < 0, & t \in [0, t_c] \\ \dot{\phi}(t) > 0, & t \in [t_c, T] \end{cases}$$

Alors $\phi(t)$ est décroissante sur $[0, t_c]$, et $\phi(t)$ est croissante sur $[t_c, T]$. Autrement dit $\phi(t)$ est convexe sur $[0, T]$,

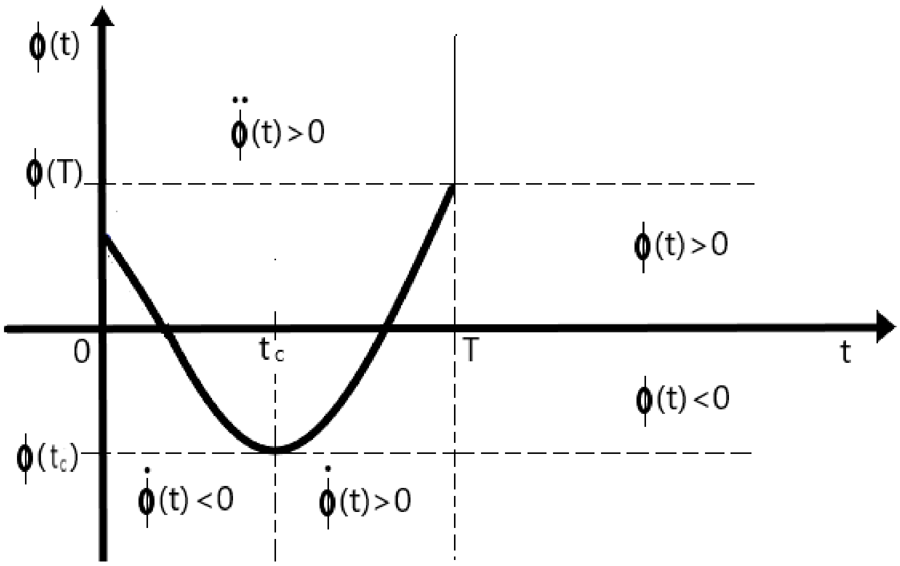


FIGURE 2.2 – $\phi(t)$ est convexe.

Alors on remarque que pour $t \in [0,t_c]$, $\dot{\phi}(t) > 0$ et $\ddot{\phi}(t) < 0$.
Donc $signe(\ddot{\phi}(t)) \neq signe(\dot{\phi}(t))$
Alors dans les deux cas la condition $signe(\ddot{\phi}(t)) = signe(\dot{\phi}(t))$ est impossible pour $t \in [0,t_c]$.
Alors $\dot{\phi}(t)$ est soit positive ou négative sur tout l'intervalle $[0,T]$.
Et si $\dot{\phi}(t)$ s'annule en temps t, alors $\dot{\phi}(t)$ s'annule sur $[0,T]$ tout entier

$$\begin{aligned}
&\dot{\phi}(t) = 0,\\
\Rightarrow & p_x(t) - p_y(t) = 0,\\
\Rightarrow & p_x(T) - p_y(T) = 0,\\
\Rightarrow & p_x(T) = p_y(T), \qquad avec\ (p_x(T) = 0),\\
\Rightarrow & p_y(T) = 0,\ qui\ est\ une\ contradiction\ avec\ les\ résulta\ d'avent.
\end{aligned}$$

Alors $\dot{\phi}(t) \neq 0$.
Donc $\phi(t)$ est strictement monotone sur $[0,T]$.
Si $\dot{\phi}(t) > 0$, alors $\phi(t)$ est strictement croissante :
on a

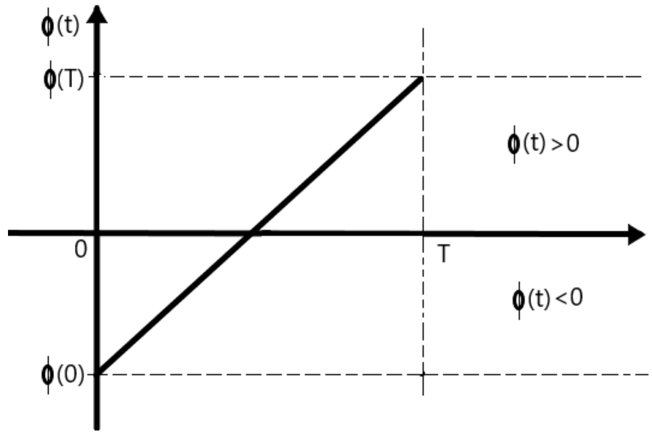


FIGURE 2.3 – La stricte croissance.

Si $\dot{\phi}(t) < 0$, alors $\phi(t)$ est strictement décroissante :
on a

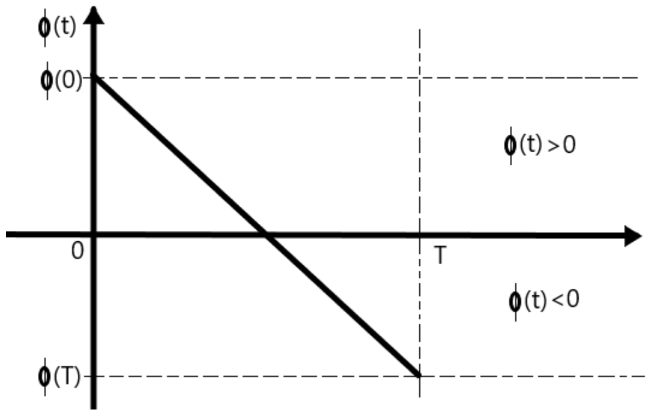


FIGURE 2.4 – La stricte décroissance.

b. on a :

$$\begin{aligned} & \underset{0 \leqslant u(t) \leqslant M}{Max} H(t, x(t), y(t), p(t), p_0, u(t)), \\ \Leftrightarrow & \underset{0 \leqslant u(t) \leqslant M}{Max} (\phi(t) u(t)) - p_x(t) x(t) + p_0, \\ \Leftrightarrow & \underset{0 \leqslant u(t) \leqslant M}{Max} (\phi(t) u(t)). \end{aligned}$$

Alors : $u(t) \equiv signe(\phi(t))$, avec $\phi(t)$ est strictement monotone, qui ne s'annule qu'au plus une fois.
Donc u est bang-bang avec au plus une commutation.
Alors on a plusieurs cas possible :
- $u(t) = 0$ si $\phi(t) < 0$ sur $[0, T]$.
- $u(t) = M$ si $\phi(t) > 0$ sur $[0, T]$.

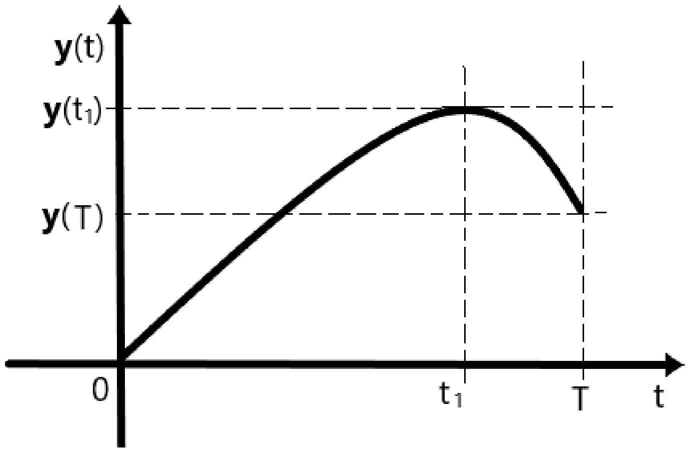
-

$$u(t) = \begin{cases} 0 \quad si \quad \phi(t) < 0, \;\; t \in [0, t_c[\\ M \quad si \quad \phi(t) > 0, \;\; t \in [t_c, T] \end{cases}$$

-

$$u(t) = \begin{cases} M \quad si \quad \phi(t) > 0, \;\; t \in [0, t_c[\\ 0 \quad si \quad \phi(t) < 0, \;\; t \in [t_c, T] \end{cases}$$

c. Dans notre application, on veut passe de $y(0) = 0$ à $y(T) = y_1 > 0$ en temps minimal, donc forcément au temps minimal T on a $\dot{y}(T) \geqslant 0$.
En effet sinon, y serait strictement décroissante sur un intervalle $[T - \eta, T]$, et puisque $y(0) = 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait $t_1 < T$ tel que $y(t_1) = y_1$.



Et ça contredit le fait que T est le temps minimal.
Donc y est strictement croissante au voisinage de T.

d. Montrons que $p_y(T) > 0$.
Par l'absurde, si $p_y(T) < 0$, alors $\phi(T) > 0$, donc pour tout $t \in \mathbf{V}(T)$ on a $\phi(t) > 0$, alors $\phi(t) > 0$ à la fin, donc $u = M$.
Donc

$$\begin{aligned} \dot{y}(T) &= x(T) - u(T)y(T), \\ &= x(T) - My(T). \end{aligned}$$

on a $x(t) < 1 \quad \Rightarrow \quad x(T) < 1, \quad \Rightarrow \quad x(T) - My(T) < 1 - My(T)$.
et on a aussi dans les donnée de l'application que :

$$\begin{aligned} y(T) > \frac{1}{M} &\Rightarrow My(T) > 1, \\ &\Rightarrow 1 - My(T) < 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \dot{y}(T) = x(T) - u(T)y(T), \\ \Rightarrow \quad & \dot{y}(T) < 1 - My_1, \\ \Rightarrow \quad & \dot{y}(T) < 0. \end{aligned}$$

ce qui contredit la question précédente.
Donc $p_y(T) > 0$, et $\phi(t) < 0$ au voisinage de T, *i.e.*, u(t)=0 à la fin.
Alors ils nous restes deux cas possible
1)- Si u ne commute pas alors : $u(t) = 0$, sur tout $t \in [0, T]$.
2)- Si u commute une fois, alors il existe temps t_c tel que :

$$\begin{cases} u(t) = M, & t \in [0, t_c[, \\ u(t) = 0, & t \in [t_c, T]. \end{cases}$$

e. Si u ne commute pas alors $u(t) = 0$, pour tout $t \in [0, T]$.
Donc

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t)\left(1 - x(t)\right), & x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = x(t) - u(t)y(t), & y(0) = 0, \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t), & x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = x(t), & y(0) = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t}, \quad x(0) = x_0, \\ y(t) = -x_0 e^{-t} + c, \quad (c \in \mathbb{R}),\ y(0) = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t}, \quad x(0) = x_0, \\ y(t) = -x_0 e^{-t} + x_0, \quad y(0) = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t}, \quad x(0) = x_0. \\ y(t) = x_0(1 - e^{-t}), \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

En particulier, $y(t) < x_0$ et donc $y_1 > x_0$ est inatteignable.
Donc u commute une fois, et passe de M à 0.
Alors il existe $t_c \in [0, T]$ tel que

$$\begin{cases} u(t) = M,\ t \in [0, t_c[\\ u(t) = 0,\ t \in [t_c, T] \end{cases}$$

2.4 Le vecteur adjoint

Le vecteur adjoint et la solution de système suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = p_x(t)(1 + u(t)) - p_y(t), \\ \dot{p}_y(t) = p_y(t)u(t). \end{cases}$$

Pour $t \in [0, t_c[$, $u(t) = M$

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = p_x(t)(1 + M) - p_y(t), \\ \dot{p}_y(t) = p_y(t)M. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_x(t) = p_x(t)(1 + M) - p_y(t), \\ p_y(t) = \lambda e^{Mt}. \quad (\lambda = e^c > 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_x(t) = p_x(t)(1 + M) - \lambda e^{Mt}, \\ p_y(t) = \lambda e^{Mt}. \end{cases}$$

Et pour $N=(1+M)$

$$\dot{p}_x(t)=p_x(t)N-\lambda e^{Mt} \tag{2.1}$$

la solution de l'équation homogène associé :

$$\begin{aligned}\dot{p}_{x_h}(t)&=p_x(t)N\\ \Rightarrow p_{x_h}(t)&=\lambda_1 e^{Nt}, \qquad \lambda_1\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

On suite on pose la solution particulière

$$\begin{aligned}p_{x_p}(t)&=\lambda_1(t)e^{Nt}\\ \Rightarrow \dot{p}_{x_p}(t)&=\dot{\lambda}_1(t)e^{Nt}+Ne^{Nt}\lambda_1(t).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\dot{p}_{x_p}(t)=&p_{x_p}(t)N-\lambda e^{Mt}=\dot{\lambda}_1(t)e^{Nt}+Ne^{Nt}\lambda_1(t)\\ &\Rightarrow \lambda_1(t)e^{Nt}N-\lambda e^{Mt}=\dot{\lambda}_1(t)e^{Nt}+Ne^{Nt}\lambda_1(t)\\ &\Rightarrow \dot{\lambda}_1(t)e^{Nt}=-\lambda e^{Mt}\\ &\Rightarrow \dot{\lambda}_1(t)=-\lambda e^{Mt}e^{-Nt}\\ &\Rightarrow \dot{\lambda}_1(t)=-\lambda e^{M-Nt}, \quad \textit{avec } (N=(1+M))\\ &\Rightarrow \dot{\lambda}_1(t)=-\lambda e^{-t}\\ &\Rightarrow \lambda_1(t)=\lambda e^{-t}+c, \quad (c\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}p_{x_p}(t)&=\lambda_1(t)e^{Nt}\\ &=(\lambda e^{-t}+c)e^{Nt}\\ &=\lambda e^{-t}e^{Nt}+ce^{Nt}, \quad \textit{avec } (N=(1+M))\\ &=\lambda e^{Mt}+ce^{Nt}.\end{aligned}$$

La solution de l'équation (1.1) est

$$\begin{aligned} p_x(t) &= p_{x_p}(t) + p_{x_h}(t) \\ &= \lambda e^{Mt} + ce^{Nt} + \lambda_1 e^{Nt} \\ &= \lambda e^{Mt} + (c+\lambda_1)e^{Nt} \\ &= \lambda e^{Mt} + \lambda_2 e^{Nt}, \qquad (\lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda > 0) \end{aligned}$$

Alors pour $t \in [0, t_c[$

$$\begin{cases} u(t) = M, \\ p_x(t) = \lambda e^{Mt} + \lambda_2 e^{Nt}, \qquad (\lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda > 0) \\ p_y(t) = \lambda e^{Mt} \end{cases}$$

Et pour $t \in [t_c, T]$ on à $u(t) = 0$. Alors

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dot{p}_x(t) = p_x(t)(1+u(t)) - p_y(t), \\ \dot{p}_y(t) = p_y(t)u(t). \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \dot{p}_x(t) = p_x(t) - p_y(t), \\ \dot{p}_y(t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\dot{p}_y(t) = 0 \\ \Rightarrow &p_y(t) = c_1 \end{aligned}$$

et on à montré que $p_y(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 > 0$ donc

$$\begin{aligned} p_y(t_c) = &c_1 = \lambda e^{Mt_c} \\ &\Rightarrow p_y(t) = \lambda e^{Mt_c}. \end{aligned}$$

Et l'équation

$$\dot{p}_x(t) = p_x(t) - \lambda e^{Mt_c}, \tag{2.2}$$

et une équation différentielle de premier ordre.
L'équation homogène associer et :

$$\begin{aligned} &\dot{p}_{x_h}(t) = p_x(t) \\ \Rightarrow &p_{x_h}(t) = \lambda_3 e^t, \quad (\lambda_3 > 0) \end{aligned}$$

on pose la solution particulière

$$\begin{aligned} &p_{x_p}(t) = \lambda_3(t)e^t, \\ \Rightarrow &\dot{p}_{x_p}(t) = \dot{\lambda}_3(t)e^t + \lambda_3(t)e^t, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} &\dot{p}_{x_p}(t) = \dot{\lambda}_3(t)e^t + \lambda_3(t)e^t = \lambda_3(t)e^t - \lambda e^{Mt_c}, \\ \Rightarrow &\dot{\lambda}_3(t)e^t = -\lambda e^{Mt_c}, \\ \Rightarrow &\dot{\lambda}_3(t) = -\lambda e^{Mt_c}e^{-t}, \\ \Rightarrow &\lambda_3(t) = \lambda e^{Mt_c}e^{-t} + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} p_{x_p}(t) &= (\lambda e^{Mt_c}e^{-t} + c_2)e^t, \\ &= c_2 e^t + \lambda e^{Mt_c}, \quad (c_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Alors la solution de (1.2) et

$$\begin{aligned} p_x(t) &= p_{x_h}(t) + p_{x_p}(t), \\ &= \lambda_3 e^t + c_2 e^t + \lambda e^{Mt_c}, \\ &= \lambda_4 e^t + \lambda e^{Mt_c}, \quad \textit{avec } (\lambda_4 = (\lambda_3 + c_2) \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_x(t_c) =&\lambda_4 e^{t_c} + \lambda e^{Mt_c} = \lambda e^{Mt_c} + \lambda_2 e^{(M+1)t_c},\\ \Rightarrow&\lambda_4 e^{t_c} = \lambda_2 e^{(M+1)t_c},\\ \Rightarrow&\lambda_4 = \lambda_2 e^{Mt_c}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} p_x(t) &= \lambda_2 e^{Mt_c} e^t + \lambda e^{Mt_c},\\ \Rightarrow &= e^{Mt_c}(\lambda_2 e^t + \lambda). \end{aligned}$$

Et on a aussi $p_x(T) = 0$, alors

$$\begin{aligned} p_x(T) = e^{Mt_c}&(\lambda_2 e^T + \lambda) = 0,\\ \Rightarrow \quad &(\lambda_2 e^T + \lambda) = 0,\\ \Rightarrow \quad &\lambda = -\lambda_2 e^T. \end{aligned}$$

Donc pour $t \in [t_c, T]$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u(t) = 0,\\ p_x(t) = e^{Mt_c}(\lambda_2 e^t - \lambda_2 e^T), \quad (\lambda_2 < 0)\\ p_y(t) = \lambda e^{Mt_c}, \quad (\lambda > 0) \end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases} u(t) = 0,\\ p_x(t) = \lambda_2 e^{Mt_c}(e^t - e^T).\\ p_y(t) = \lambda e^{Mt_c}. \end{cases} \end{aligned}$$

2.5 Le temps minimal pour rejoindre y_1

Pour trouvé le temps minimal qui permet de rejoindre $y(T) = y_1$, il faut d'abord résoudre le système d'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t)\,(1 - x(t))\,, & x(0) = x_0. \\ \dot{y}(t) = x(t) - u(t)y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$$

2.5.1 Résolution des systèmes d'équations différentielles

pour $u(t) = M$, $t \in [0, t_c[$:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t)\,(1 - x(t))\,, & x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = x(t) - u(t)y(t), & y(0) = 0, \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + M(1 - x(t)), & x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = x(t) - My(t), & y(0) = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

En doit résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + M(1 - x(t)), \\ &= -x(t)(1 + M) + M. \end{aligned}$$

On pose $N = (1 + M)$

$$\dot{x}(t) = -x(t)N + M. \qquad .\;.\;.\;.\;(3)$$

1). La solution homogène associé

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + x(t)N = 0, \\ \Rightarrow x_h(t) = \lambda e^{-Nt}. \end{aligned}$$

2). La solution particulier

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \lambda(t)e^{-Nt}, \qquad .\;.\;.\;.\;(4) \\ \Rightarrow \dot{x}_p(t) &= \dot{\lambda}(t)e^{-Nt} - N\lambda(t)e^{-Nt}, \qquad .\;.\;.\;.\;(5) \end{aligned}$$

En remplace (4) et (5) dans (3)

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}(t)e^{-Nt} - N\lambda(t)e^{-Nt} = -(\lambda(t)e^{-Nt})N + M,\\
\Rightarrow &\dot{\lambda}(t)e^{-Nt} = M,\\
\Rightarrow &\dot{\lambda}(t) = Me^{Nt},\\
\Rightarrow &\lambda(t) = \frac{M}{N}e^{-Nt} + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= \lambda(t)e^{-Nt},\\
&= \left(\frac{M}{N}e^{Nt} + c_1\right)e^{-Nt},\\
&= \frac{M}{N} + c_1e^{-Nt}.
\end{aligned}$$

Donc la solution de (3) est :

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_h(t) + x_p(t),\\
&= \lambda e^{-Nt} + \frac{M}{N} + c_1e^{-Nt},\\
&= (\lambda + c_1)e^{-Nt} + \frac{M}{N}, \qquad (k = (\lambda + c_1) \in \mathbb{R})\\
&= ke^{-Nt} + \frac{M}{N}
\end{aligned}$$

On a $x(0) = x_0$ alors :

$$\begin{aligned}
x_0 &= k + \frac{M}{N},\\
\Rightarrow \quad k &= x_0 - \frac{M}{N}.
\end{aligned}$$

Donc

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{M}{N}\right)e^{-Nt} + \frac{M}{N}.$$

La résolution de la deuxième équation

$$\begin{aligned}
&\dot{y}(t) = x(t) - My(t),\\
\Leftrightarrow \quad &\dot{y}(t) + My(t) = x(t), \qquad .\ .\ .\ .\ (6).
\end{aligned}$$

qu'est une équation différentielle avec second membre.

1). la solution homogène :

$$\begin{aligned}
&\dot{y}(t)+My(t)=0,\\
\Rightarrow &y_h(t)=e^{c}e^{-Mt},\\
\Rightarrow &y_h(t)=\lambda_1 e^{-Mt}. \qquad \textit{avec } (\lambda_1=e^{c}\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

2). La solution particulier :

$$\begin{aligned}
&y_p(t)=\lambda_1(t)e^{-Mt}, \quad \ldots \quad (7).\\
\Rightarrow &\dot{y}_p(t)=\dot{\lambda}_1(t)e^{-Mt}-M\lambda_1 e^{-Mt}. \quad \ldots \quad (8).
\end{aligned}$$

En remplace (7) et (8) dans (6) :

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1(t)e^{-Mt}-M\lambda_1 e^{-Mt}=x(t)-M\lambda_1(t)e^{-Mt},\\
\Rightarrow\ &\dot{\lambda}_1(t)e^{-Mt}=x(t),\\
\Rightarrow\ &\dot{\lambda}_1(t)=x(t)e^{Mt},\\
&=\left(\left(x_0-\frac{M}{N}\right)e^{-Nt}+\frac{M}{N}\right)e^{Mt},\\
&=\left(x_0-\frac{M}{N}\right)e^{(M-N)t}+\frac{M}{N}e^{Mt}, \quad (M-N=-1),\\
\Rightarrow\ &\dot{\lambda}_1(t)=\left(x_0-\frac{M}{N}\right)e^{-t}+\frac{M}{N}e^{Mt}. \quad \ldots \quad (9).
\end{aligned}$$

en cherche une primitive, solution de (9) qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t)&=\int\left(x_0-\frac{M}{N}\right)e^{-t}+\frac{M}{N}e^{Mt}dt,\\
&=\int\left(x_0-\frac{M}{N}\right)e^{-t}dt+\int\frac{M}{N}e^{Mt}dt,\\
&=\left(-\left(x_0-\frac{M}{N}\right)e^{-t}+c_1\right)+\left(\frac{M}{N}\left(\frac{1}{M}e^{Mt}\right)+c_2\right),\\
&=-\left(x_0-\frac{M}{N}\right)e^{-t}+\frac{1}{N}e^{Mt}+(c_1+c_2),\\
\lambda_1(t)&=\left(-x_0+\frac{M}{N}\right)e^{-t}+\frac{1}{N}e^{Mt}+c_3, \qquad ((c_1+c_2)=c_3\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \left(\left(-x_0+\frac{M}{N}\right)e^{-t}+\frac{1}{N}e^{Mt}+c_3\right)e^{-Mt}, \\ &= \left(-x_0+\frac{M}{N}\right)e^{-(1+M)t}+\frac{1}{N}+c_3e^{-Mt}, \\ &= \left(-x_0+\frac{M}{N}\right)e^{-Nt}+\frac{1}{N}+c_3e^{-Mt} \end{aligned}$$

Alors la solution de (6) est :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t)+y_p(t), \\ &= \lambda_1 e^{-Mt}+\left(-x_0+\frac{M}{N}\right)e^{-Nt}+\frac{1}{N}+c_3e^{-Mt}, \\ &= (\lambda_1+c_3)e^{-Mt}+\left(-x_0+\frac{M}{N}\right)e^{-Nt}+\frac{1}{N}. \end{aligned}$$

En pose $((\lambda_1+c_3)=c_4\in\mathbb{R})$, alors

$$y(t)=c_4e^{-Mt}+\left(-x_0+\frac{M}{N}\right)e^{-Nt}+\frac{1}{N}.$$

Avec

$$\begin{aligned} y(0)=0 \ &\Rightarrow c_4+\left(-x_0+\frac{M}{N}\right)+\frac{1}{N}=0, \\ &\Rightarrow c_4=x_0-\frac{(M+1)}{N}, \\ &\Rightarrow c_4=x_0-\frac{N}{N}, \\ &\Rightarrow c_4=(x_0-1). \end{aligned}$$

Donc

$$y(t)=(x_0-1)e^{-Mt}+\left(-x_0+\frac{M}{N}\right)e^{-Nt}+\frac{1}{N}.$$

Ce qui nous donne au final :

$$\begin{cases} x(t) = \left(x_0 - \frac{M}{N}\right)e^{-Nt} + \frac{M}{N}, \\ y(t) = (x_0 - 1)e^{-Mt} + \left(-x_0 + \frac{M}{N}\right)e^{-Nt} + \frac{1}{N}, \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-(M+1)t} + \frac{M}{(M+1)}. \\ y(t) = (x_0 - 1)e^{-Mt} + \left(-x_0 + \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-(M+1)t} + \frac{1}{(M+1)}. \end{cases}$$

Et pour $t \in [t_c, T]$ on à $u(t) = 0$

Alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t)(1 - x(t)), \\ &= -x(t) + 0(1 - x(t)), \\ &= -x(t), \\ \Rightarrow x(t) &= e^c e^{-t}, \qquad (\lambda_2 = e^c \in \mathbb{R}) \\ \Rightarrow x(t) &= \lambda_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Et on a dans les questions précédentes

$$x(t_c) = \left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-(M+1)t_c} + \frac{M}{(M+1)} = \lambda_2 e^{-t_c},$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_2 = \left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)}e^{t_c}.$$

Donc

$$x(t) = \left(\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)}e^{t_c}\right)e^{-t}.$$

Et on à aussi

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= x(t) - u(t)y(t),\\
&= x(t) - (0)y(t),\\
&= x(t),\\
\Rightarrow y(t) &= \int x(t)dt,\\
\Rightarrow y(t) &= -\left(\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)}e^{t_c}\right)e^{-t} + c_5, \quad (c_5 \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
y(t_c) = -\left(\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)}e^{t_c}\right)e^{-t_c} + c_5 =\\
(x_0-1)e^{-Mt_c} + \left(-x_0 + \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-(M+1)t_c} + \frac{1}{(M+1)},\\
\Rightarrow \quad c_5 = (x_0-1)e^{-Mt_c} + \frac{M}{M+1} + \frac{1}{M+1},\\
\Rightarrow \quad c_5 = (x_0-1)e^{-Mt_c} + 1.
\end{aligned}$$

Alors

$$y(t) = -\left(\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)}e^{t_c}\right)e^{-t} + (x_0-1)e^{-Mt_c} + 1.$$

Alors il existe un $t_c \in [0, T]$ tel que

Pour $t \in [0, t_c[$

$$\begin{cases}
u(t) = M,\\
x(t) = \left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-(M+1)t} + \frac{M}{(M+1)}.\\
y(t) = (x_0-1)e^{-Mt} + \left(-x_0 + \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-(M+1)t} + \frac{1}{(M+1)}.
\end{cases}$$

Et pour $t \in [t_c, T]$

$$\begin{cases} u(t) = 0, \\ x(t) = \left(\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right) e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)} e^{t_c}\right) e^{-t}. \\ y(t) = -\left(\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right) e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)} e^{t_c}\right) e^{-t} + (x_0 - 1)e^{-Mt_c} + 1. \end{cases}$$

On a dans la premier question $0 < x_0 e^{-t} \leqslant x(t) < 1$.

Donc $x(t) > 0 \Rightarrow x(T) > 0$.

Posent $x(T) = x_1$

$$x(T) = \left(\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right) e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)} e^{t_c}\right) e^{-T} = x_1.$$

$$y(T) = -\left(\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right) e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)} e^{t_c}\right) e^{-T} + (x_0 - 1)e^{-Mt_c} + 1 = y_1,$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad -x_1 + (x_0 - 1)e^{-Mt_c} + 1 = y_1, \\ &\Rightarrow \quad (x_0 - 1)e^{-Mt_c} > y_1 - 1, \quad avec\ (0 < e^{-Mt_c} < 1) \\ &\Rightarrow \quad x_0 - 1 < y_1 - 1, \\ &\Rightarrow \quad y_1 > x_0. \end{aligned}$$

Donc $y_1 > x_0$ est atteignable, pour u qui commute une fois, et passe de M à 0.

$$\begin{aligned} & -x_1 + (x_0 - 1)e^{-Mt_c} + 1 = y_1, \\ \Rightarrow\ & (x_0 - 1)e^{-Mt_c} + 1 = y_1 + x_1, \\ \Rightarrow\ & (x_0 - 1)e^{-Mt_c} = (y_1 + x_1) - 1 < 0, \\ \Rightarrow\ & (1 - x_0)e^{-Mt_c} = 1 - (y_1 + x_1), \\ \Rightarrow\ & e^{-Mt_c} = \frac{1 - (y_1 + x_1)}{(1 - x_0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow e^{Mt_c} = \frac{(1-x_0)}{1-(y_1+x_1)},\\
&\Rightarrow Mt_c = \ln\left(\frac{(1-x_0)}{1-(y_1+x_1)}\right),\\
&\Rightarrow t_c = \frac{\ln((1-x_0)) - \ln(1-(y_1+x_1))}{M}.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
x(T) &= \left(\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)}e^{t_c}\right)e^{-T} = x_1,\\
\Rightarrow \quad e^{-T} &= \left(\frac{x_1}{\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)}e^{t_c}}\right),\\
\Rightarrow \quad e^{T} &= \left(\frac{\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)}e^{t_c}}{x_1}\right),\\
\Rightarrow \quad T &= \ln\left(\frac{\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)}e^{t_c}}{x_1}\right),\\
\Rightarrow \quad T &= \ln\left(\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)}e^{t_c}\right) - \ln(x_1).
\end{aligned}$$

Donc le temps minimal pour rejoindre $y(T) = y_1$ est :

$$T = \ln\left(\left(x_0 - \frac{M}{(M+1)}\right)e^{-Mt_c} + \frac{M}{(M+1)}e^{t_c}\right) - \ln(x_1).$$

Chapitre 3

Exemple numérique

Dans ce chapitre on va refaire la même application que le chapitre 2, mais avec des données numériques.

Et pour ça on a :

Une concentration initiale de sucre(glucose) $x(0) = x_0 = 400g = 0.40kg$, qui se transforme en éthanol après fermentation, et a la fin on aura une concentration finale d'éthanol $y(T) = y_1 = 600g = 0.60kg$, et une concentration finale de sucre $x(T) = x_1 = 40g = 0.04kg$, avec un taux d'évaporation $0 \leqslant u(t) \leqslant 11$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t)\left(1 - x(t)\right), & x(0) = x_0 = 0.40, \\ \dot{y}(t) = x(t) - u(t)y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$$

On cherche à résoudre le problème du temps minimal pour rejoindre $y(T) = y_1 = 0.60$.

3.1 Résolution

tous les résultats trouvés dans le chapitre 2, sont toujours valables pour cet exemple.

Alors sans refaire les calcules on a :

- $0 < (0.40)e^{-t} \leqslant x(t) < 1$.
- La fonction Hamiltonien :

$$H(t,x(t),y(t),p(t),p_0,u(t)) = -p_x(t)x(t)(1+u(t))+p_x(t)u(t)+ \\ p_y(t)x(t)-p_y(t)u(t)y(t)+p_0,$$

avec $p_0 = 1$ cas de minimisation, alors

$$H(t,x(t),y(t),p(t),p_0,u(t)) = -p_x(t)x(t)(1+u(t))+p_x(t)u(t)+ \\ p_y(t)x(t)-p_y(t)u(t)y(t)+1.$$

– les équations des extrémales :

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = p_x(t)(1+u(t))-p_y(t), \\ \dot{p}_y(t) = p_y(t)u(t). \end{cases}$$

– Les conditions de transversalités :

$$\begin{cases} p_x(T) = p_0\frac{\partial\varphi(T,x(T))}{\partial x(T)}, \\ \underset{0\leqslant u\leqslant M}{Max} H(T,x(T),y(T),p(T),p_0,u) = -p_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}(T,x(T)), \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} p_x(T) = 0, \\ p_y(T) \neq 0. \end{cases}$$

–

$$\underset{0\leqslant u(t)\leqslant 11}{Max}(u(t)(p_x(t)(1-x(t))-p_y(t)y(t)))-p_x(t)x(t)+1.$$

– On pose

$$\phi(t) = p_x(t)(1-x(t))-p_y(t)y(t), \quad t\in[0,T].$$

Qui est strictement monotone (Démonstration dans le chapitre 2 (p34 - p37)), ce qui implique que u est bang-bang avec au plus une commutation.

– On a aussi montré que $\dot{y}(T) > 0$ et $p_y(T) > 0$

– Et au final on trouve que ,u commute une fois, et passe de M à 0.

Donc il existe $t_c \in [0,T]$ tel que :
Pour $t \in [0,t_c[$

$$\begin{cases} u(t) = 11, \\ \dot{x}(t) = -x(t) + 11\,(1 - x(t))\,, \quad x(0) = x_0 = 0.40, \\ \dot{y}(t) = x(t) - 11y(t), \qquad y(0) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t) = 11, \\ x(t) = \big((0.40) - (\tfrac{11}{12})\big)\, e^{(-12)t} + (\tfrac{11}{12}), \\ y(t) = ((0.40) - 1)e^{(-11)t} - \big((0.40) - (\tfrac{11}{12})\big)\, e^{(-12)t} + (\tfrac{1}{12}). \end{cases}$$

Et pour $t \in [t_c, T]$

$$\begin{cases} u(t) = 0, \\ \dot{x}(t) = -x(t), \quad x(0) = x_0 = 0.40, \\ \dot{y}(t) = x(t), \qquad y(0) = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t) = 0, \\ x(t) = \Big(\big((0.40) - (\tfrac{11}{12})\big)\, e^{(-11)t_c} + (\tfrac{11}{12})e^{t_c}\Big)\, e^{-t}, \\ y(t) = -\Big(\big((0.40) - (\tfrac{11}{12})\big)\, e^{(-11)t_c} + (\tfrac{11}{12})e^{t_c}\Big)\, e^{-t} + ((0.40) - 1)e^{(-11)t_c} + 1. \end{cases}$$

Alors

$$-\left(\left((0.40) - (\frac{11}{12})\right) e^{(-11)t_c} + (\frac{11}{12})e^{t_c}\right) e^{-T} + ((0.40) - 1)e^{(-11)t_c} + 1 = y_1,$$

$$\Rightarrow -x_1 + ((0.40) - 1)e^{(-11)t_c} + 1 = y_1,$$

$$\Rightarrow ((0.40) - 1)e^{(-11)t_c} + 1 = (0.60) + (0.04),$$

$$\Rightarrow ((0.40) - 1)e^{(-11)t_c} = ((0.60) + (0.04)) - 1,$$

$$\Rightarrow (1 - (0.40))e^{(-11)t_c} = (1 - (0.64)),$$

$$\Rightarrow (0.60)e^{(-11)t_c} = (0.36),$$

$$\Rightarrow e^{(-11)t_c} = \frac{(0.36)}{(0.60)},$$

$$\Rightarrow e^{(11)t_c} = \frac{(0.60)}{(0.36)},$$

$$\Rightarrow 11t_c = \ln\left(\frac{0.60}{0.36}\right),$$
$$\Rightarrow t_c = \frac{\ln(0.60) - \ln(0.36)}{11},$$
$$\Rightarrow t_c = 0.046 \ mois.$$

Donc

$$\begin{aligned}
x(T) = &\left(\left((0.40) - (\frac{11}{12})\right) e^{(-11)t_c} + (\frac{11}{12}) e^{t_c}\right) e^{-T} = (0.04),\\
\Rightarrow \quad e^{-T} = &\left(\frac{(0.04)}{\left((0.40) - (\frac{11}{12})\right) e^{(-11)(0.046)} + (\frac{11}{12}) e^{(0.046)}}\right),\\
\Rightarrow \quad e^{T} = &\left(\frac{\left((0.40) - (\frac{11}{12})\right) e^{(-11)(0.046)} + (\frac{11}{12}) e^{(0.046)}}{(0.04)}\right),\\
\Rightarrow \quad T = \ln &\left(\frac{\left((0.40) - (\frac{11}{12})\right) e^{(-11)(0.046)} + (\frac{11}{12}) e^{(0.046)}}{(0.04)}\right),\\
\Leftrightarrow \quad T = \ln &\left(\left((0.40) - (\frac{11}{12})\right) e^{(-11)(0.046)} + (\frac{11}{12}) e^{(0.046)}\right) - \ln(0.04),\\
\Leftrightarrow \quad T = &\ 2.786 \ mois.
\end{aligned}$$

Alors le temps minimal pour rejoindre $y_1 = 0.60kg$ et

$$\begin{aligned}
T &= 2.786 \ mois,\\
&= 2 \ mois \ et \ 23 \ jours \ et \ 13 \ heures \ et \ 55 \ minute \ et \ 12 \ seconde.
\end{aligned}$$

Conclusion générale

L'objectif de ce travail est de résoudre un problème de contrôle optimal.

Dans le premier chapitre, on a présenté les aspects fondamentaux de la formulation d'un problème de contrôle optimal, et les différents éléments qui le composent en proposant une formulation générale de celui-ci contenant tous les types de contraintes pouvant être imposées aux variables d'état et de contrôle. On a aussi abordés la notion de contrôlabilité d'un système de contrôle dans le cas linéaire et non linéaire, et à la fin on a présenté le principe du maximum de Pontryagin avec ces deux énoncés : Celui du principe du maximum faible, et un énoncé général du principe du maximum de Pontryagin.

Dans le deuxième chapitre, on s'est intéressé à l'étude et à la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un procédé de fermentation, qui à pour but de trouver le temps minimal pour rejoindre une concentration finale d'éthanol fixée.

Et dans le troisième chapitre, un exemple numérique pour mieux expliqué les résultats trouvés auparavant.

L'utilisation des techniques du contrôle optimal et notamment le choix pertinent de la fonctionnelle à minimiser on permis de mettre en évidence des contrôles possibles de type "bang-bang". Ces résultats encouragent les recherches des spécialistes du domaine de la biologie alimentaire, pour améliorer d'avantage leurs produits.

Bibliographie

[1] Emmanuel Trélat, Contrôle optimal : théorie et application. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France. 2013.

[2] Nacima Moussoni Dehbi, Contrôle optimal : optimisation d'une production céréalière. Mathématique générales [math.GM]. Université d'Orléans. 2012.

[3] M^{me} Kahina LOUADJ, Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal. THESE DE DOCTORAT, UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU. 2012.

[4] Mlle Ouazna OUKACHA, Méthode directe d'optimisation de problèmes de contrôle.THESE DE DOCTORAT, UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU. 2017.

[5] Mme Kara Fadila, Problème de contrôle optimal d'une commande polyèdrale.THESE DE DOCTORAT, UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU. 2018.