

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université MOULOUD MAMMERRI de Tizi-Ouzou



Faculté de Génie de la Construction

Département de Génie Mécanique



Mémoire de Magister

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Mécanique Appliquée

THÈME

*Détection et localisation
d'endommagements des structures
mécaniques linéaires par mesures vibratoires*

Présenté par :
BOUMRAR Akli

Devant le jury composé de :

| | | | |
|--------------------------------|-------------------------|-------|------------|
| M ^r DJEBBAR Arezki | Professeur | UMMTO | Président |
| M ^r BOUAZZOUNI Amar | Professeur | UMMTO | Rapporteur |
| M ^r BILEK Ali | Maitre de conférences A | UMMTO | Examineur |
| M ^r ASMA Farid | Maitre de conférences A | UMMTO | Examineur |

Soutenu le : 25 /02 /2014

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université MOULOUD MAMMERRI de Tizi-Ouzou



Faculté de Génie de la Construction

Département de Génie Mécanique



Mémoire de Magister

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Mécanique Appliquée

THÈME

*Détection et localisation
d'endommagements des structures
mécaniques linéaires par mesures vibratoires*

Présenté par :
BOUMRAR Akli

Devant le jury composé de :

| | | | |
|--------------------------------|-------------------------|-------|------------|
| M ^r DJEBBAR Arezki | Professeur | UMMTO | Président |
| M ^r BOUAZZOUNI Amar | Professeur | UMMTO | Rapporteur |
| M ^r BILEK Ali | Maitre de conférences A | UMMTO | Examineur |
| M ^r ASMA Farid | Maitre de conférences A | UMMTO | Examineur |

Soutenu le : 25 /02 /2014

Table des matières

| | |
|---|----------|
| Table des matières | i |
| Liste des figures | v |
| Nomenclature | viii |
| Dédicace | xi |
| Remerciements | xii |
| Introduction générale | 1 |
| Chapitre I. Rappels de dynamique des structures | 5 |
| I.1. Introduction | 5 |
| I.2. Etudes des systèmes à un degré de liberté | 5 |
| I.2.1. Système libre non amorti | 6 |
| I.2.2. Système libre amorti | 6 |
| I.2.2.1. Cas sous-amorti (sous-critique) : $\xi < 1$ | 7 |
| I.2.2.2. Cas sur-amorti (sur-critique) : $\xi > 1$ | 7 |
| I.2.2.3. Cas critique $\xi = 1$ | 7 |
| I.2.3. Réponse forcée..... | 8 |
| I.2.3.1. Réponse d'un système à une excitation harmonique | 9 |
| I.2.3.1.a. Réponse d'un système conservatif | 9 |
| I.2.3.1.b. Réponse d'un système amorti | 10 |
| I.2.3.2. Réponse à une excitation périodique | 11 |
| I.3. Etude des systèmes à plusieurs degrés de liberté | 12 |

| | |
|---|----|
| I.3.1. Réponse transitoire du système libre non amorti | 12 |
| I.3.2. Réponse forcée du système libre non amorti dans le cas d'une excitation harmonique | 14 |
| Chapitre II. Modélisation par éléments finis des poutres composites . 15 | |
| II.1. Introduction | 15 |
| II.1.1. Définition d'un matériau composite | 15 |
| II.1.2. Constituants d'un matériau composite | 15 |
| II.1.3. Architectures des matériaux composites | 16 |
| II.1.3.1. Stratifiés | 16 |
| II.1.3.1.1. Stratifié à base de fils ou tissus unidirectionnels | 16 |
| II.1.3.1.2. Code de représentation d'un stratifié | 16 |
| II.1.3.2. Composites sandwiches..... | 17 |
| II.2. Théorie de Timoshenko | 18 |
| II.2.1. Energie de déformation | 19 |
| II.2.2. Energie cinétique | 21 |
| II.3. Définition des éléments finis SI12 et SI20 | 23 |
| II.3.1. Élément fini SI12 | 23 |
| II.3.1.1. Calcul de la matrice de rigidité..... | 23 |
| II.3.1.2. Calcul de la matrice de masse | 26 |
| II.3.2. Élément fini SI20 | 27 |
| II.3.2.1. Calcul de la matrice de rigidité..... | 27 |
| II.3.2.2. Calcul de la matrice de masse | 30 |
| II.3.3. Élément fini SIM12 | 31 |
| II.3.3.1. Calcul de la matrice de rigidité | 31 |
| II.3.3.2. Calcul de la matrice de masse | 32 |
| II.4. Calcul analytique des fréquences propres des poutres composites | 33 |

| | |
|--|-----------|
| Chapitre III. Transformée en ondelettes | 37 |
| III.1. Introduction | 37 |
| III.2. Transformée de Fourier | 37 |
| III.2.1. Transformée de Fourier à fenêtre glissante | 38 |
| III.2.2. Transformée de Gabor | 38 |
| III.3. Plans temps-fréquence | 39 |
| III.4. Principe d'incertitude d'Heisenberg | 39 |
| III.5. Transformée en ondelettes | 40 |
| III.5.1. Définition d'une ondelette | 40 |
| III.5.2. Transformée en ondelettes continue | 42 |
| III.5.3. Transformée en ondelettes discrète..... | 42 |
| III.5.4. Analyse multirésolution | 43 |
| III.5.5. Les paquets d'ondelettes | 44 |
| | |
| Chapitre IV. Définition du seuil d'endommagements par la méthode d'analyse en paquets d'ondelettes..... | 47 |
| IV.1. Indicateur de variation d'énergie <i>MEV</i> | 47 |
| IV.2. Validation numérique de la procédure de définition du seuil de déteçtabilité d'endommagement | 48 |
| IV.2.1. Cas de poutre encastree-libre | 49 |
| IV.2.2. Cas d'une poutre doublement appuyée | 53 |
| IV.3. Discussion des résultats | 55 |
| IV.4. Conclusion | 56 |
| | |
| Chapitre V. Localisation d'endommagements par la méthode d'analyse en paquets d'ondelettes | 57 |
| V.1. Présentation de la méthode | 57 |
| V.2. Cas tests de simulation numérique | 59 |

| | | |
|--|-----------------------------------|-------------|
| V.2.1 | Cas de deux endommagements | 60 |
| V.2.2. | Cas de trois endommagements | 61 |
| V.3 | conclusion | 62 |
| Conclusion générale | | 63 |
| Annexe A | | 64 |
| Annexe B..... | | 66 |
| Références bibliographiques | | xiii |

Liste des figures

| | |
|--|-----------|
| Figure I.1. Composants d'un système à un degré de liberté (modèle de Voigt)..... | 5 |
| Figure I.2. Réponse typique d'un système à un degré de liberté libre amorti (a) : système sous amorti ; (b):système sur-amorti; (c) : système critique | 8 |
| Figure I.3. Amplitudes de la réponse fréquentielle avec et sans amortissement | 10 |
| Figure II.1. Stratifié croisé : $[0_2/90_2]_s$ | 17 |
| Figure II.2. Stratifié unidirectionnel : $[0]_8$ | 17 |
| Figure II.3. Stratifié quasi-isotrope : $[0_2/+45_2/90_2/-45_2]$ | 17 |
| Figure II.4. Structure sandwich | 17 |
| Figure II.5. Déformation d'une poutre (théorie de Timochenko et de Bernoulli)..... | 18 |
| Figure II.6. Élément fini SI12..... | 23 |
| Figure II.7. Fonctions d'interpolation de Lagrange d'ordre 3..... | 25 |
| Figure II.8. L'élément fini SI20 à gauche et ses déformations à droite..... | 27 |
| Figure III.1. Pavage du plans temps-fréquence dans les cas: a) Transformée en ondelettes et b) Transformée de Fourier à fenêtre glissante..... | 40 |
| Figure III.2. Ondelettes dilatées et translitées | 41 |
| Figure III.3. Schémas des arbres de décomposition dans les cas: a) analyse multi-résolution et b) paquets d'ondelettes | 46 |

| | |
|---|----|
| Figure IV.1. <i>Poutre stratifiée $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ encastrée-libre</i> | 49 |
| Figure IV.2. <i>Choix des pulsations d'excitation</i> | 50 |
| Figure IV.3. <i>Histogramme MEV-numéro de l'élément endommagé dans le cas de la poutre castrée-libre endommagée à 40%</i> | 50 |
| Figure IV.4. <i>MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 6</i> | 51 |
| Figure IV.5. <i>MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 12</i> | 52 |
| Figure IV.6. <i>MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 18</i> | 52 |
| Figure IV.7. <i>MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 38</i> | 52 |
| Figure IV.8. <i>MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 48</i> | 52 |
| Figure IV.9. <i>Histogramme MEV-numéro de l'élément endommagé dans le cas de la poutre doublement appuyée endommagée à 40%</i> | 53 |
| Figure IV.10. <i>MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 46 dans le cas de la poutre doublement appuyée</i> | 53 |
| Figure IV.11. <i>MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 4</i> | 54 |
| Figure IV.12. <i>MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 24</i> | 54 |
| Figure IV.13. <i>MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 38</i> | 54 |
| Figure IV.14. <i>MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 56</i> | 54 |
| | |
| Figure V.1. <i>Système de notation des DDL verticaux</i> | 58 |
| Figure V.2. <i>Poutre stratifiée $[0^\circ/(90^\circ)_2/0^\circ]$ doublement appuyée</i> | 59 |
| Figure V.3. <i>Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 23 et 24</i> | 60 |
| Figure V.4. <i>Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 11 et 32</i> | 60 |
| Figure V.5. <i>Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 6 et 37</i> | 60 |
| Figure V.6. <i>Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 10, 13 et 22</i> | 61 |

Figure V.7. *Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 7, 10 et 35*61

Figure V.8. *Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 11, 14 et 32*61

Tableaux

Tableau II.1. *Fréquences propres de la poutre stratifiée sur des appuis simples calculées par voix analytique et par éléments finis*35

Tableau II.2. *Fréquences propres de la poutre sandwich sur des appuis simples calculées par voix analytique et par éléments finis*35

Nomenclature

| | |
|------------------------------|--|
| a_0, a_n, b_n | : coefficients de la décomposition en série de Fourier |
| a | : facteur d'échelle de la famille d'ondelettes |
| A_i | : rigidité en traction |
| $A_m(t)$ | : approximation du niveau m de l'analyse multirésolution |
| b | : facteur de translation de la famille d'ondelettes |
| b ou B | : largeur de la poutre |
| B | : matrice des déformations |
| $[C]$ | : matrice d'amortissement de la structure |
| $C_w(a, b)$ | : coefficients d'ondelettes |
| $C_{k,l}^j$ | : coefficients des paquets d'ondelettes |
| $D_j(t)$ | : détails de l'analyse multirésolution en ondelettes |
| $D^{(k)}$ | : matrice d'élasticité |
| $\Delta\omega_\psi$ | : résolution fréquentielle |
| Δt_ψ | : résolution temporelle |
| E_i | : module de Young dans la direction i |
| $E_x^{(k)}$ | : module de Young de la $k^{\text{ème}}$ couche dans la direction de l'axe x |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | : vecteur des déformations |
| $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ | : déformation relative dans la direction j |
| $f(t)$ | : signal temporel |
| F_0 | : amplitude maximale de la force excitatrice |
| $F(\omega)$ | : transformée de Fourier du signal $f(t)$ |
| $F_w(t, \omega)$ | : transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal $f(t)$ |
| $F_G(t, \omega)$ | : transformée de Gabor du signal $f(t)$ |
| Fr | : fréquence propre [Hz] |

| | |
|------------------------------|---|
| F_1, F_2, F_3, F_4 | : facteurs de dépendance de la couche du milieu |
| $[\Phi]$ | : matrice modale |
| gn | : pourcentage du bruit introduit |
| G_c | : module de cisaillement de l'âme du sandwich |
| G_{ij} | : module de cisaillement dans le plan correspondant |
| $G_{xz}^{(k)}$ | : module de cisaillement transversal de la $k^{\text{ème}}$ couche de la poutre |
| $\gamma(x)$ | : déplacement de rotation |
| γ_{ij} | : glissement de cisaillement dans le plan correspondant |
| h | : épaisseur |
| $H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(3)}$ | : matrices de passage |
| k | : facteur de correction du cisaillement ; numéro de la couche |
| $[K]$ | : matrice de rigidité globale |
| L | : operateur de dérivations ; longueur totale de la poutre |
| $[\Lambda]$ | : matrice spectrale du système |
| $[M]$ | : matrice de masse globale |
| M_e | : matrice de masse d'un élément fini |
| M_i | : moments de flexion |
| μ_{ij} | : coefficient de Poisson dans le plan correspondant |
| N | : matrice des fonctions de forme |
| N_i | : effort dans la direction i (effort normal) |
| N_i, N_j, N_k, N_l | : fonctions d'interpolation |
| v_i | : vecteur déplacements de nœud i |
| v_m^T | : déplacements des nœuds ($m = i, j, k, l$) |
| Q_{ij}, B_{ij} et D_{ij} | : coefficients de rigidité de la poutre |
| Q_x | : effort tranchant |
| r | : racine de l'équation caractéristique |
| $rand(nn,1)$ | : vecteur de distribution uniforme de nombres entre 0 et 1 |
| $rank$ | : rang d'une matrice |
| R_0 | : matrice des densités généralisées |
| ρ_0, ρ_1 et ρ_2 | : densités massiques généralisées |
| ρ_k | : masse volumique de la $k^{\text{ème}}$ couche |
| σ_i | : contrainte dans la direction i (contrainte normale) |
| T | : énergie cinétique ; période d'un signal |

| | |
|---------------------------------------|--|
| $u_l(x), u_s(x)$ | : déplacement longitudinal et transversal |
| U | : énergie de déformation ; énergie totale du signal |
| U_k^j | : énergie emmagasinée dans le sous-signal $y_k^j(t)$ |
| w_i , et γ_x^j | : déplacements nodaux |
| ω_0 | : pulsation propre de système |
| ω_n | : $n^{\text{ème}}$ pulsation propre [rad/s] |
| Ω | : pulsation de la force d'excitation |
| X^n | : $n^{\text{ème}}$ vecteur propre |
| ξ | : coefficient d'amortissement |
| Y_{bt} | : vecteur déplacement bruité au $i^{\text{ème}}$ capteur |
| $y_{yv}^{(m)}, i = 1:m$ | : sous vecteurs propres non observés |
| $Y_{Cy}^{(FE)} \in \mathbb{R}^{C,np}$ | : sous matrice modale du modèle éléments finis correspondant aux <i>DDL</i> observés ; $i \geq np$ de rang maximal |
| y_i | : vecteur déplacement simulé au $i^{\text{ème}}$ capteur |
| $\psi_{a,b}(t)$ | : famille d'ondelettes analysantes |
| $y_k^j(t)$ | : sous signal de la décomposition par paquets d'ondelettes |
| $\psi_{j,k}^i(t)$ | : fonction de l'analyse par paquets d'ondelettes |
| z_k | : ordonnée de la $k^{\text{ème}}$ couche |
| $Z_i^{(ef)}$ | : ligne de $Y^{(ef)}$ correspondant au $j^{\text{ème}}$ <i>DDL</i> potentiel |
| $\{ \}_c \text{ou} \{ \}^c$ | : désignation du cœur (âme) du sandwich |
| $\{ \}_e \text{ou} \{ \}^e$ | : cas d'endommagement (structure susceptible) |
| $\{ \}_f \text{ou} \{ \}^f$ | : désignation des peaux du sandwich |
| $\{ \}_s \text{ou} \{ \}^s$ | : cas d'une structure saine |
| $\{ \}^T$ | : indice de la transposée |

Abréviations

| | |
|--------------|--|
| <i>abs</i> | : valeur absolue |
| <i>diag</i> | : diagonal |
| <i>DDL</i> | : Degré De Liberté |
| <i>FOSDT</i> | : First Order Shear Deformation Theory |
| <i>MEF</i> | : Méthode des Eléments Finis |
| <i>MEV</i> | : Maximum Energy Variation |
| <i>IVEPO</i> | : Indicateur de Variation d'Énergie basée sur les Paquets d'Ondelettes |

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A ma mère et ma grand-mère ;

A mes chers frères et sœurs ;

A ma famille et tous mes amis.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadreur Monsieur BOUAZZOUNI Amar pour sa qualité d'encadrement, ces conseils et sa disponibilité constante.

Je tiens à remercier également messieurs le président et les membres de jury pour m'avoir fait l'honneur de lire et de juger ce mémoire.

Que toute l'équipe dynamique des structures du laboratoire de Mécanique, Structures et Energétique trouve ici mes vifs remerciements pour toute l'aide qu'elle m'a apportée, en particulier Monsieur BEHTANI Amar qui m'a été d'une certaine aide dans ce travail.

Enfin, j'adresse mes remerciements à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Introduction générale

Les composites sont des matériaux nouveaux, introduits dans l'industrie seulement durant la deuxième guerre mondiale. Présentement ils coexistent et entrent en concurrence avec les matériaux classiques connus par l'homme depuis l'Antiquité. Ce sont des matériaux formés par l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes, élaborés au gré et à volonté du concepteur, pour acquérir des caractéristiques spécifiques souhaitées. Ainsi, une multitude de matériaux a été développée, des plus nobles tels que le carbone/époxyde en aéronautique et aérospatial aux plus abondants tels que le Verre/polyester d'utilisation courante, pour pallier aux inconvénients des matériaux conventionnels, notamment le poids et le faible rapport rigidité/poids. Toutefois, pour la prédiction du comportement des composites, il est nécessaire de généraliser les mécaniques à leurs cas. D'autre part, l'appréhension des défauts dans des structures conçues à base de tels matériaux constitue un souci permanent tant pour la communauté scientifique que pour les industriels.

Les défauts peuvent surgir à plusieurs niveaux du cycle de vie de composites : lors de leur élaboration, leur mise en service ou pendant leur maintenance. Leur présence se manifeste sous plusieurs formes : rupture des fibres, rupture de la matrice, délaminage ou une combinaison de plusieurs de ces défauts. Généralement, les défauts s'initient par des microfissures dans la matrice, qui se développent pour atteindre l'interface fibre/matrice, entraînant ensuite la rupture des fibres, puis elles se propagent rapidement jusqu'à la ruine totale du matériau. Par conséquent, la découverte de l'endommagement dans son stade prématuré de développement est d'un intérêt capital.

Les recherches sur les diagnostics des défauts ont conduit à une variété de techniques telles que : le contrôle non destructif par ultrason, par radiologie, par thermographie, etc. Ces techniques sont coûteuses, lentes et nécessitent une connaissance à priori du lieu de défaut. De plus, l'application de ces techniques du contrôle non destructif aux structures composites s'avère plus compliquée, vu leur anisotropie et la complexité de leurs structures internes. Des méthodes basées sur mesures vibratoires ont été également développées. Elles sont basées sur le fait que les paramètres modaux (fréquence, coefficients d'amortissement et déformées propres) mesurés sont fonctions des propriétés physiques de la structure (rigidité, masse et amortissement). Présentement les mesures vibratoires sont les données les plus indicatrices de l'état de structures et les mieux adaptées à la détection d'endommagements, particulièrement dans les structures en matériaux composites.

En général, les essais dynamiques comprennent deux étapes : les mesures in situ et le traitement des données. A la première étape, on cherche à avoir de bonnes données de mesure. Pour cela, il nous faut faire des choix convenables concernant le type d'essai, le positionnement des capteurs et des excitateurs, etc. Dans la deuxième étape, ces mesures brutes sont traitées par des techniques de traitement du signal afin d'accéder à des informations pertinentes qui permettent d'évaluer ensuite les caractéristiques mécaniques et la performance de la structure.

L'objectif de ce document est d'utiliser une méthode basée sur des données vibratoires, à savoir la méthode des ondelettes, pour la détection et la localisation de petits endommagements dans les structures mécaniques (nous nous limiterons au cas des structures poutres composites).

Parmi les travaux réalisés touchant à cette thématique, M. M. et F. Yuen [1], ont utilisé une approche numérique pour la localisation de défauts dans les structures poutres en exploitant les variations des paramètres propres de la structure. Le maillage en éléments finis et le taux d'endommagement étaient grossiers mais la variation de leur indicateur n'a pas été significative.

Zhong-Xian Li et Xiao-Ming Yang [2], ont utilisé une méthode basée sur des données statistiques (variances et covariances) de la réponse structurelle, comme première étape, pour définir un indicateur d'endommagement. Puis ils utilisent cet indicateur comme entrée d'un réseau neurone artificiel, qui aura pour sortie la localisation la plus probable et la

quantification des défauts. Dans la première étape de leur investigation, ils ont constaté que la variation de l'indicateur est fonction de la position et de la taille du défaut. Sur une poutre continue à 3 travées, discrétisée en 30 éléments, ils remarquent que la réduction de la rigidité d'un élément jusqu'à 60% n'a pas une grande influence sur l'indicateur et qu'une réduction de plus de 70% va altérer plus les performances de la poutre et le défaut sera donc plus facilement détectable.

Les ondelettes ont été largement investies pour la détection de défauts de structures mécaniques. Dans le travail de Cary Smith et al. [3], il s'agit de la détection de vibration (vibrations nocives au fonctionnement des machines) en utilisant l'analyse en ondelettes. Un signal vibratoire complètement noyé dans un bruit blanc Gaussien à été simulé. Les auteurs ont utilisé trois ondelettes, une continue de Morlet et deux discrètes de Haar et de Daubéchies en moyennant différents types de seuillage pour isoler les fréquences vibratoires contenues dans ce signal. La simulation est suivie d'une application expérimentale sur une structure réelle d'avion. Des comparaisons ont été faites pour ressortir l'ondelette la plus avantageuse. Les auteurs J. M. Machorro-Lopez et al. [4] ont utilisé une approche numérique et une validation expérimentale pour la localisation d'endommagement de poutres sujettes à un chargement mobile, en appliquant la transformée en ondelette continue « chapeau mexicain ».

Concernant les travaux dédiés au diagnostique de défauts de structure par l'analyse en paquets d'ondelettes, nous constatons que la quasi totalité de ceux-ci n'exploitent pas directement les coefficients de décomposition, mais plutôt l'énergie des signaux décomposés par paquets d'ondelettes. LING Tong-hua et LI Xi-bin [5] ont exploité les énergies des signaux vibratoires, issus de tests expérimentaux de vibration de structures soumises à une explosion ou rafale de vent pour déterminer la bande de fréquences de vibration les plus excitées par une explosion. L. H. Yam et al. [6-9] ont consacré une bonne part de leurs travaux pour la détection d'endommagement dans les structures plaques composites par le biais de la décomposition en paquets d'ondelettes. Ils définissent des indicateurs d'endommagement basés sur la variation de l'énergie des spectres des sous-signaux d'un certain niveau dans la décomposition par paquets d'ondelettes entre la structure saine et celle endommagée. Y. J. Yan et al. [9] définissent l'indicateur dénommé *MEV* (*Maximum Energy Variation*). En faisant varier expérimentalement le taux d'endommagement d'un élément, ils calculent à chaque fois la valeur de cet indicateur. Ils tracent alors le graphe de *MEV* en fonction du taux d'endommagement et à partir de ce graphe ils fixent un seuil de détectabilité.

Pour ce seuil fixé à 20% ils ont constaté que la déviation entre la simulation et l'expérience est inférieure à 5%. Quant à l'ampleur de l'endommagement, leur méthode peut être beaucoup plus sensible que toutes celles qui existent déjà. Néanmoins, il est à remarquer que l'efficacité de cette méthode dépend de plusieurs facteurs tels que le choix de la position du capteur et de l'actionneur, le choix de la force excitatrice, etc.

Dans la première partie de ce travail, nous nous intéressons à utiliser cet indicateur d'endommagement pour une structure poutre stratifiée discrétisée en un certain nombre d'éléments finis afin de définir un seuil global de détectabilité de défaut quelque soit sa position sur la structure. Ensuite, pour la localisation d'endommagement, nous proposons un indicateur basé sur la décomposition en paquets d'ondelettes. Celui-ci consiste en une différence des énergies totales des réponses des structures saine et endommagée. Un indicateur apparenté à celui-ci a été proposé par Jian-Gang Han [10]. Mais, ce dernier est égal à la somme des différences des énergies des sous-signaux du niveau considéré de la décomposition en paquets d'ondelettes.

La structure du mémoire comprend une introduction générale, cinq chapitres et une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacré au rappel de notions de base sur le comportement vibratoires des systèmes à un et plusieurs degrés de libertés.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons de brefs aperçus sur les matériaux composites et la modélisation par élément finis pour le calcul dynamique des poutres composites. Dans le troisième chapitre, nous rappelons les fondements théoriques de la transformée de Fourier, la transformée de Fourier à fenêtre glissante et des transformées en ondelettes.

Au chapitre quatre est présentée la méthode proposée définissant le seuil global de détectabilité des défauts dans les structures poutres multicouches. La méthode se base sur la décomposition du signal de la réponse dynamique de la structure par paquets d'ondelettes.

Dans le dernier chapitre, nous proposons une autre méthode basée sur l'analyse par paquets d'ondelettes pour la localisation des endommagements dans les poutres composites stratifiées. Nous devons préciser que pour l'implémentation de tous les programmes effectués dans ce mémoire, il a été utilisé le logiciel *MATLAB* version 7.14.

Chapitre I

Rappels de dynamique des structures

I.1. Introduction

Dans ce premier chapitre nous intéressons aux notions de base des vibrations, en commençant par l'étude des systèmes linéaires à un degré de liberté, afin de définir les principales caractéristiques des phénomènes vibratoires. Ensuite, nous élargissons le champ à l'étude des systèmes à N degrés de libertés où d'autres concepts seront ajoutés.

I.2. Etude des systèmes à un degré de liberté

Le système à un degré de liberté constitue le modèle de vibration le plus élémentaire, mais il est à la base de compréhension des systèmes à plusieurs degrés de liberté. La modélisation d'un tel système se fait par la caractérisation de ses éléments constitutifs qui sont : une masse m (corps rigide), un ressort k (élément élastique) et un amortisseur c (élément dissipatif). Ce modèle est appelé aussi le modèle de Voigt. Le ressort et l'amortisseur sont reliés en une extrémité à un support fixe et à l'autre à la masse. Sur la masse est exercée une force extérieure $F(t)$ dans la direction x qui est la direction de son mouvement (figure I.1). Le problème consiste à déterminer la position x du solide en fonction du temps.

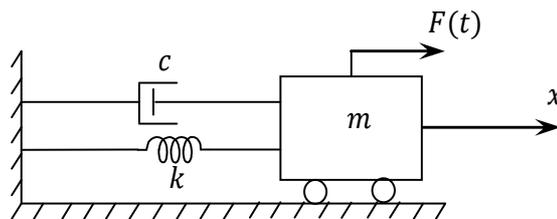


Figure I.1. Composants d'un système à un degré de liberté (modèle de Voigt)

L'équation du mouvement d'un système à un degré de liberté dans le cas général est donnée par:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (\text{I.1})$$

L'équation (I.1) s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique ou par l'équation de Lagrange. Le problème ici se ramène alors à la résolution d'une équation différentielle de second ordre linéaire à coefficients constants.

I.2.1. Système libre non amorti (conservatif)

Le régime libre décrit le comportement d'un système après un lâcher initial, sans fourniture d'une énergie ultérieure par une force extérieure. Dans le cas d'un système conservatif l'équation du mouvement est:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (\text{I.2})$$

sa solution sera de la forme:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (\text{I.3})$$

La solution (I.3) peut se mettre sous la forme complexe $x(t) = Ce^{\omega_0 t + \varphi}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre du système, C et φ sont des constantes à déterminer par le biais des conditions initiales de position et de vitesse.

I.2.2. Système libre amorti

L'équation du mouvement de ce système est :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (\text{I.4})$$

La résolution de cette équation revient à résoudre une équation différentielle homogène à coefficients constants. En divisant les termes de cette équation par m , elle deviendra :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{I.5})$$

avec $\lambda = \frac{c}{2m}$ est le coefficient d'amortissement. On définit aussi le facteur d'amortissement par $\xi = \frac{\lambda}{\omega_0}$.

La solution est de la forme :

$$x(t) = Ae^{rt} \quad (\text{I.6})$$

Son équation caractéristique,

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{I.7})$$

dépend de la valeur de ξ , qui peut prendre trois valeurs $\xi < 1$, $\xi = 1$ ou $\xi > 1$.

I.2.2.1. Cas sous-amorti (sous-critique) : $\xi < 1$

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes $r_{1,2} = -\xi \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ et le déplacement du système est périodique. En remplaçant r_1 et r_2 par leurs valeurs dans l'équation (I.6) on obtient :

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left[A \cos(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t) + B \sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t) \right] \quad (\text{I.8})$$

A et B sont à déterminer par les conditions initiales de déplacement et de vitesse.

I.2.2.2. Cas sur-amorti (sur-critique) : $\xi > 1$

Dans ce cas les racines de l'équation caractéristique sont réelles : $r_{1,2} = -\xi \pm \omega_0\sqrt{\xi^2-1}$ et le déplacement n'est plus périodique. La solution de l'équation différentielle du mouvement est :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad (\text{I.9})$$

I.2.2.3. Cas critique $\xi = 1$

L'équation caractéristique aura une racine double : $r_1 = r_2 = -\xi\omega = -\omega_0$ et la solution de l'équation du mouvement aura la forme :

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_0 t} \quad (\text{I.10})$$

Les constantes A_1 et A_2 sont identifiées par le biais des conditions initiales.

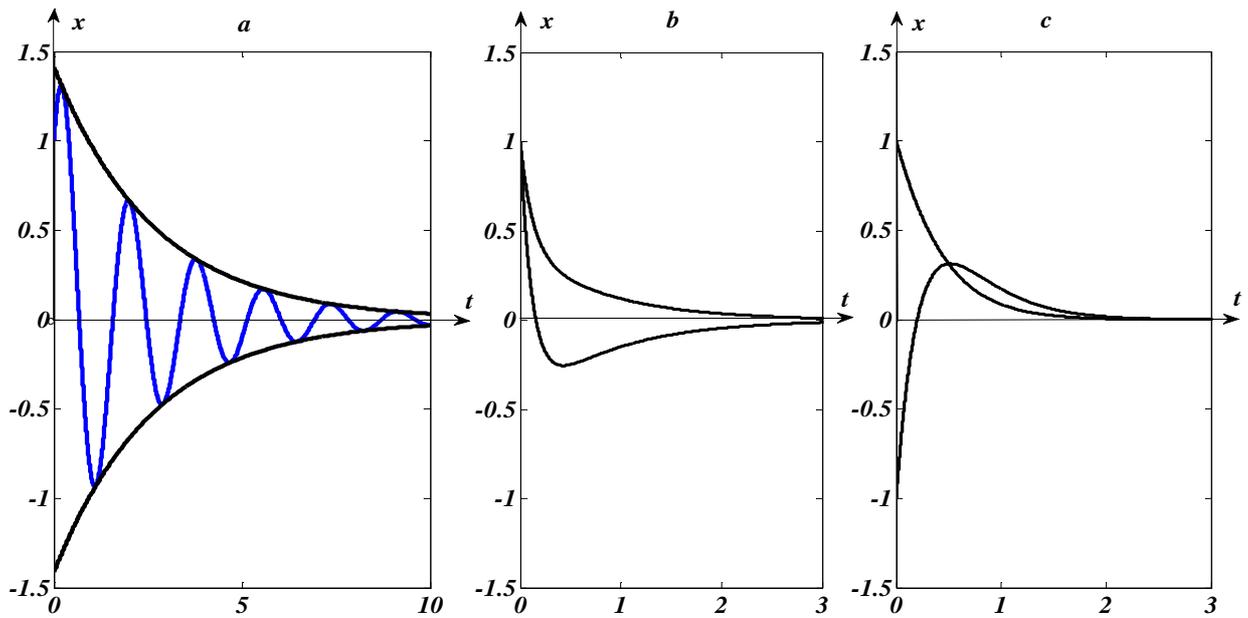


Figure I.2. Réponse typique d'un système à un degré de liberté libre amorti

a) : système sous amorti ; b) : système sur-amorti ; c) : système critique

Remarque:

L'allure de la réponse d'un système sur-amorti et d'un système critique est approximativement la même [11]; la différence réside dans le temps de retour à la position d'équilibre, qui est plus petit dans le cas du système critique.

I.2.3. Réponse forcée

La solution de l'équation du mouvement se compose de deux solutions : une homogène indépendante de l'excitation, correspondante aux oscillations libres, et une autre particulière qui dépend directement de la fonction du chargement. Le chargement est une force extérieure qui peut prendre différentes formes. Il peut être de deux types : le chargement déterministe et le chargement non déterministe. Ce dernier ne peut pas être défini par une fonction mathématique connue, mais par un processus aléatoire. Cependant, pour le cas déterministe, l'évolution du chargement en fonction du temps est parfaitement connue. Le chargement déterministe lui-même peut être subdivisé en deux types : le chargement périodique et non périodique. Dans notre cas, nous nous intéresserons seulement au cas de chargement périodique.

I.2.3.1. Réponse d'un système à une excitation harmonique

I.2.3.1.a. Réponse d'un système conservatif

Soit une excitation harmonique de la forme : $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$. L'équation du mouvement normalisée s'écrit :

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = A_0 \sin(\Omega t) \quad (\text{I.11})$$

où $A_0 = \frac{F_0}{m}$ l'amplitude de la force excitatrice par unité de masse.

La solution de l'équation (I.11) est la solution de l'équation de l'équation (I.2) (solution homogène ou transitoire) augmentée par une solution particulière qu'on appelle aussi solution permanente.

La solution permanente suit la forme la forme de la force excitatrice soit :

$$x(t) = X \sin(\Omega t) \quad (\text{I.12})$$

En substituant l'équation (I.12) dans l'équation (I.11), on obtient:

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)X \sin(\Omega t) = A_0 \sin(\Omega t) \quad (\text{I.13})$$

En divisant les deux membres de cette équation par $\sin(\Omega t)$ (supposé non nul), on peut facilement identifier la valeur de X:

$$X = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (\text{I.14})$$

La solution complète sera donc :

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left[A \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + B \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \right] + \left(\frac{A_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) \sin(\Omega t) \quad (\text{I.15})$$

Bien que théoriquement le système va osciller indéfiniment suivant les deux solutions, la première solution va disparaître au cours d'un nombre fini de cycles et ne restera que la solution permanente du fait de la présence d'un amortissement inné aux systèmes dans le cas réel.

I.2.3.1.b. Réponse d'un système amorti

Dans le cas où le système est sous amorti, l'équation du mouvement normalisée par rapport à la masse s'écrit :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = A_0 \sin(\Omega t) \quad (\text{I.16})$$

La réponse transitoire de cette équation étant celle d'un système libre amorti, tandis que sa réponse permanente est à chercher sous la forme :

$$x(t) = X_1 \sin(\Omega t) + X_2 \cos(\Omega t) \quad (\text{I.17})$$

En substituant cette expression dans l'équation du mouvement (I. 16), on obtient le système algébrique de deux équations suivant :

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \Omega^2)X_2 + 2\xi\omega_0\Omega X_1 = 0 \\ (\omega_0^2 - \Omega^2)X_1 - 2\xi\omega_0\Omega X_2 = A_0 \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

La résolution de système d'équation (I.18) nous permet d'évaluer les valeurs de X_1 et X_2

$$\text{comme suit : } \begin{cases} X_1 = \frac{-(\omega_0^2 - \Omega^2)A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\Omega^2} \\ X_2 = \frac{2\xi\omega_0 A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\Omega^2} \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

La connaissance des valeurs de X_1 et X_2 nous permet de calculer l'amplitude maximale des oscillations $D = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$. Le graphe donnant la valeur de D pour chaque fréquence d'excitation est appelé la courbe des amplitudes de la réponse fréquentielle.

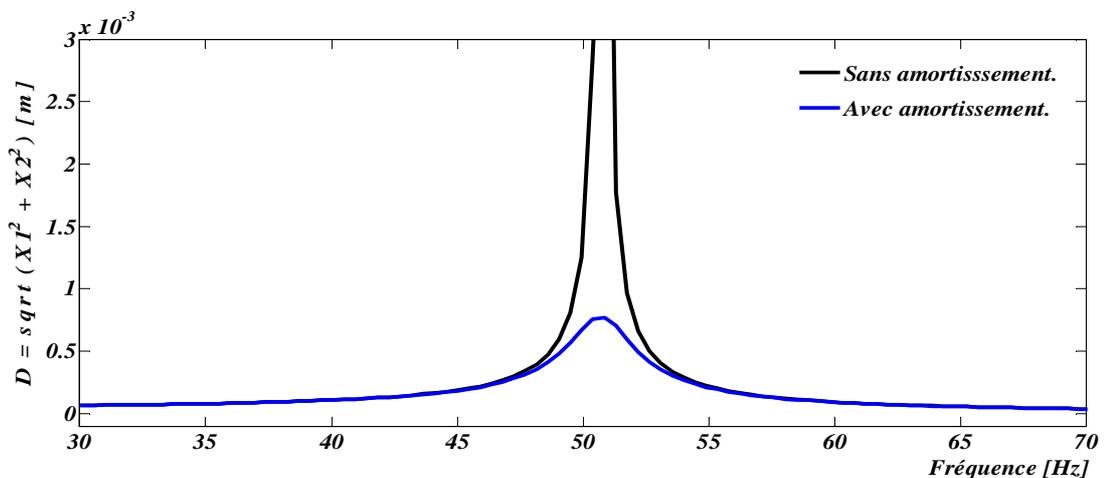


Figure I.3. Amplitudes de la réponse fréquentielle avec et sans amortissement

I.2.3.2. Réponse à une excitation périodique

D'après l'analyse de Fourier, toute fonction périodique peut être représentée par une combinaison linéaire d'un ensemble d'harmoniques multiples d'une harmonique dite fondamentale de période égale à la période de la fonction à décomposer.

Soit une fonction périodique $F(t)$ de période T et de pulsation $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Sa décomposition en série de Fourier est donnée par :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)) \quad (\text{I.20})$$

Les coefficients a_0 , a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier et s'expriment par :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\Omega t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\Omega t) dt \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

Remarque : la forme complexe de la décomposition en série de Fourier est donnée par :

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\Omega t} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-in\Omega t} dt \quad (\text{I.22})$$

La réponse à une excitation périodique est égale la somme des réponses à chaque terme de la série pris séparément (cela est dû au fait qu'on est dans le cas des vibrations linéaires et que le principe de superposition est applicable). Ce qui nous conduit à écrire la réponse permanente d'un système non amorti à une excitation périodique comme suit:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{(\omega_0^2 - n^2\Omega^2)} \cos(n\Omega t) + \frac{b_n}{(\omega_0^2 - n^2\Omega^2)} \sin(n\Omega t) \right] \quad (\text{ici } a_0 \text{ est supposé nul}) \quad (\text{I.23})$$

La réponse permanente d'un système sous-amorti à une excitation périodique :

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(\omega_0^2 - n^2\Omega^2)a_n - 2\xi\omega_0 n\Omega b_n}{(\omega_0^2 - n^2\Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2 n^2\Omega^2} \cos(n\Omega t) + \frac{(\omega_0^2 - n^2\Omega^2)b_n + 2\xi\omega_0 n\Omega a_n}{(\omega_0^2 - n^2\Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2 n^2\Omega^2} \sin(n\Omega t) \right] \quad (\text{I.24})$$

I.3. Etude des systèmes à plusieurs degrés de liberté

L'étude des systèmes à plusieurs degrés de liberté est la généralisation de celle d'un système à un degré de liberté en faisant les analogies suivantes :

La masse m se généralise à la matrice de masse $[M]$; l'amortissement c à la matrice $[C]$; la rigidité k à la matrice de rigidité $[K]$; le déplacement x au vecteur déplacements $\{x\}$ et la force F au vecteur forces $\{F\}$.

Pour une structure ayant n éléments discrets, les matrices M , C et K sont données par les formules ci-dessous:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i^{(e)}, \quad C = \sum_{i=1}^n C_i^{(e)} \quad \text{et} \quad K = \sum_{i=1}^n K_i^{(e)} \quad (\text{I.25})$$

avec $M_i^{(e)}$, $C_i^{(e)}$ et $K_i^{(e)}$ sont respectivement, les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de l'élément i . Elles seront développées en détails par la méthode des éléments finis dans le chapitre qui suit.

I.3.1. Réponse transitoire du système libre non amorti

L'équation du mouvement se résume en :

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = 0. \quad (\text{I.26})$$

Par analogie au comportement d'un système à un seul degré de liberté, on suppose que la solution est harmonique ; il s'exprime sous la forme :

$$\{x(t)\} = \{X\} e^{j\omega t} \quad (\text{I.27})$$

En remplaçant l'expression (I.27) et sa dérivée seconde dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$[K - \omega^2 M] \{X\} e^{j\omega t} = 0 \quad (\text{I.28})$$

Comme $e^{j\omega t}$ est non nul, la solution de (I.28) devient en simplifiant par $e^{j\omega t}$:

$$[K - \omega^2 M] \{X\} = 0 \quad (\text{I.29})$$

L'équation (I.29) est dite problème aux valeurs propres. Son équation caractéristique est donnée par :

$$\det [K - \omega^2 M] = 0 \quad (I.30)$$

La solution de l'équation (I.30) fournit N valeurs ω_n^2 , $n = 1, 2, \dots, N$ qui sont les carrés des pulsations propres du système. Pour chaque valeur propre ω_n , on résout l'équation (1.29) pour trouver le vecteur propre $\{X^n\} = \{X_1^n, \dots, X_i^n, \dots, X_N^n\}^T$.

Les valeurs de ω_n^2 sont regroupées dans une matrice diagonale $[\Lambda] = \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2, \dots, \omega_N^2\}$ appelée matrice spectrale et les vecteurs propres $\{X^n\}$ sont regroupés dans une matrice $[\Phi] = [X^1 | \dots | X^n | \dots | X^N]$ appelée matrice modale.

La donnée du couple $(\omega_n^2, \{X^n\})$ définit la $n^{\text{ème}}$ solution propre de vibration du système considéré.

La solution du système (I.26) est donnée par :

$$\{x(t)\} = [\Phi] \begin{bmatrix} \sin(\omega_1 t) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sin(\omega_n t) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sin(\omega_N t) \end{bmatrix} \{a\} + [\Phi] \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \cos(\omega_n t) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \cos(\omega_N t) \end{bmatrix} \{b\} \quad (I.31)$$

Les vecteurs $\{a\}$ et $\{b\}$ sont obtenus à partir des conditions initiales sur les déplacements et les vitesses. Soient $\{x\}_0$ et $\{\dot{x}\}_0$ les conditions initiales de déplacement et de vitesse respectivement.

$$\text{Alors : } \{b\} = [\Phi]^{-1} \{x\}_0 \quad \text{et} \quad \{a\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\omega_n} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{\omega_N} \end{bmatrix} \{\dot{x}\}_0 \quad (I.32)$$

I.3.2. Réponse forcée d'un système libre non amorti dans le cas d'une excitation harmonique

L'équation du mouvement s'écrit :

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{F_0\} \sin(\Omega t). \quad (\text{I.33})$$

La solution particulière de l'équation (1.33) s'écrit sous la forme:

$$x(t) = \{A\} \sin(\Omega t) \quad (\text{I.34})$$

On effectue le changement de base :

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{D\} \sin(\Omega t) \quad (\text{I.35})$$

où $\{D\}$ représente le vecteur des projections modales.

On remplace l'expression (I.35) et de sa deuxième dérivé par rapport au temps dans l'équation du mouvement et on prémultiplie par $[\Phi]^T$, on obtient :

$$-\Omega^2 [\Phi]^T [M] [\Phi] \{D\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{D\} = [\Phi]^T \{F_0\} \quad (\text{I.36})$$

En appliquant les propriétés d'orthogonalité de la matrice modale $[\Phi]$:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I_N] \quad \text{et} \quad [\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Lambda] \quad (\text{I.37})$$

L'équation (1.36) deviendra alors :

$$[\Lambda - \Omega^2 I] \{D\} = [\Phi]^T \{F_0\} \quad (\text{I.38})$$

On tire l'expression de D comme suit :

$$\{D\} = [\Lambda - \Omega^2 I]^{-1} [\Phi]^T \{F_0\} \quad (\text{I.39})$$

Finalement, la solution de l'équation (I.33) est :

$$\{x(t)\} = [\Phi] [\Lambda - \Omega^2 I]^{-1} \Phi^T \{F_0\} \sin(\Omega t) \quad (\text{I.40})$$

Cette méthode de résolution est appelée « la méthode de la transformée modale ».

Chapitre II

Modélisation par éléments finis de poutres composites

II.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques notions sur les matériaux composites, puis nous nous intéresserons à la modélisation, par éléments finis, du comportement dynamique des poutres composites monocouches et stratifiées ainsi que celui des poutres sandwichs.

II.1.1. Définition d'un matériau composite

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

II.1.2. Constituants d'un matériau composite

Un matériau composite est composé d'une matrice et d'un renfort. La matrice elle-même est constituée d'une résine, ayant pour rôle d'assurer un transfert adéquat des contraintes au renfort et la protection de ce dernier des agressions extérieures, et des charges qui améliorent les caractéristiques de la résine tout en facilitant sa mise en œuvre, voir réduire son coût de production. Quant au renfort, il est constitué de fibres qui forment l'armature du matériau composite. Il apporte au matériau composite ses caractéristiques mécaniques élevées de rigidité, de résistance à la rupture, de dureté, etc., qui vont exercer une influence primordiale sur les propriétés globales du composite.

Les fibres du renfort se présentent sous diverses formes commerciales: sous une forme linéique (fils, mèches, etc.), sous forme de tissage de fils ou de mèches à deux ou à plusieurs dimensions.

II.1.3. Architectures d'un matériau composite

Les définitions suivantes sont utilisées pour comprendre les différentes architectures des composites

-*Renforts unidirectionnels* : fibres disposées dans une seule direction.

-*pli* : nappe élémentaire dans la construction d'un stratifié.

-*couche* : ensemble de plis identiques empilés de même direction.

II.1.3.1. Stratifiés

Les stratifiés sont constitués de couches successives de renforts imprégnés de résine, orientées de façon quelconque les unes par rapport aux autres.

Les avantages des stratifiés résident dans la possibilité d'adopter et contrôler l'orientation des fibres pour que le matériau résiste à des sollicitations déterminées dans des meilleures conditions.

Suivant l'orientation des renforts et leur nature, plusieurs types de stratifiés peuvent être constitués (stratifié hybride, stratifié à base de fils ou de tissus unidirectionnels, etc.). Néanmoins, l'étude de tout stratifiés peut se ramener en théorie à celle d'un stratifié à base de fils ou tissus unidirectionnels.

II.1.3.1.1. Stratifié à base de fils ou tissus unidirectionnels

Ces stratifiées sont constitués de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche.

II.1.3.1.2. Code de représentation d'un stratifié

La désignation d'un stratifié est généralement effectuée selon le code suivant : depuis son pli extrême inférieur jusqu'au pli extrême supérieur.

1. Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe x de référence.

2. Les couches successives sont séparées par un / si leurs angles sont différents.
3. Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique.
4. Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre. Des crochets (ou parenthèses) indiquent le début et la fin du code.
5. Si le stratifié est symétrique il est désigné seulement par la moitié de ses couches plus l'indice S à l'extérieure du crochet.

II.1.3.2. Composites sandwichs

Ce sont des matériaux composés de deux semelles, appelées *peaux* ayant de bonnes caractéristiques en traction et une faible épaisseur, qui enveloppent une âme (ou cœur), possédant de bonnes caractéristiques en compression et une faible masse. L'ensemble âme et peaux forme un matériau à la fois rigide et léger.

Les figures ci-dessus montrent quelques types de structures stratifiées usuelles à base de fibres ou tissus unidirectionnels et leurs codes de désignation ainsi que la structure d'un sandwich.

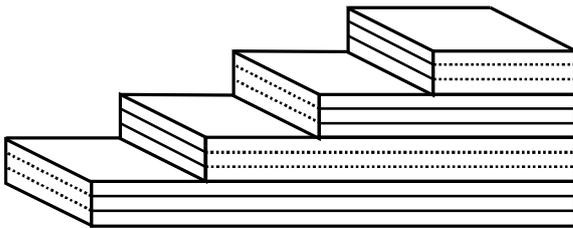


Figure II.1. Stratifié croisé : $[0_2/90_2]_S$

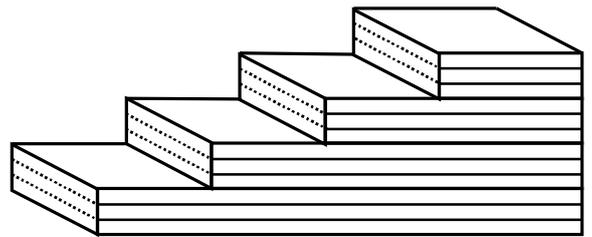


Figure II.2. Stratifié unidirectionnel : $[0]_8$

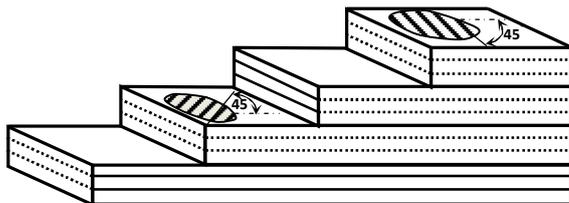


Figure II.3. Stratifié quasi-isotrope :
 $[0_2/+45_2/90_2/-45_2]$

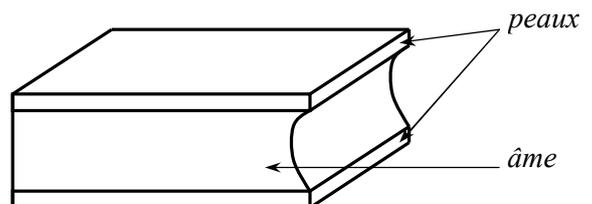


figure II.4. Structure sandwich

II.2. Théorie de Timoshenko

Il est bien connu qu'en raison de leur rigidité transversale, les composites stratifiés et sandwichs ne peuvent pas être analysés en employant la théorie de Bernoulli-Euler.

Beaucoup de théories ont été proposées pour l'analyse des poutres stratifiées et sandwichs. La théorie la plus simple est celle proposée par Timoshenko en 1921 théorie de déformation de cisaillement d'ordre un [13]. Dans cette théorie, le déplacement en un point arbitraire le long de la poutre peut être exprimé par un déplacement longitudinal $u_1(x)$ suivant l'axe de la poutre ; un transversal $u_3(x)$ suivant l'axe z et une rotation $\gamma_x(x)$ caractérisant la rotation autour de l'axe y (voir figure II. 5).

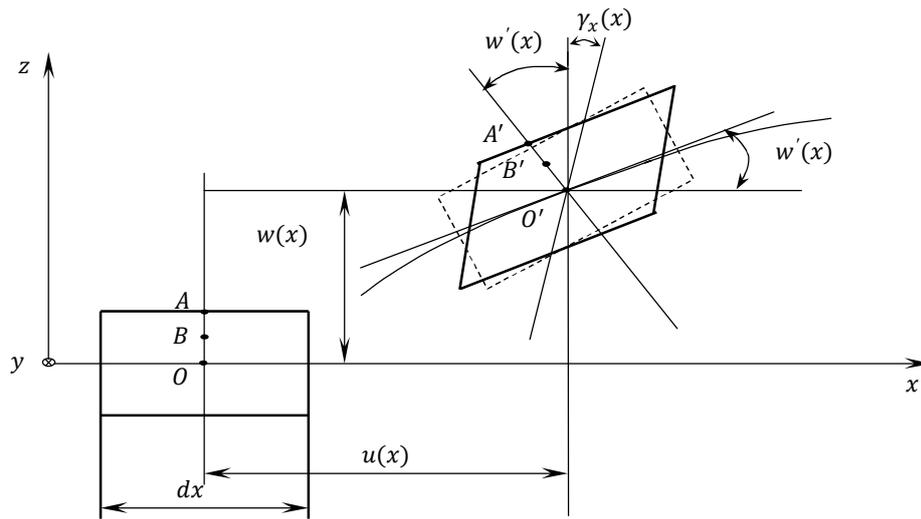


Figure II.5. Déformation d'une poutre (— théorie de Timochenko, - - - théorie de Bernoulli)

Les déplacements sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) &= u(x) + z\gamma_x(x) \\ u_3(x) &= w(x) \end{aligned} \right\} \tag{II.1}$$

où u est le déplacement longitudinal à $z = 0$ et w est la flèche de l'axe de la poutre.

En raison de l'approximation linéaire du déplacement $u_1(x,z)$, la théorie de poutre de Timoshenko est appelée la théorie de déformation en cisaillement d'ordre un (*First Order Shear Deformation Theory FOSDT*). Notons que cette approximation simple peut être appliquée aux poutres homogènes et aux poutres multicouches.

Dans la théorie de poutre de Timoshenko, on trouve deux contraintes nulles ; dans le cas général on a :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (\text{II.2})$$

Dans notre cas, le champ de déformations est donné par :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (\text{II.4})$$

En substituant les relations (II.1) dans (II.4), on obtient les relations suivantes :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x + z\kappa_x \quad \gamma_{xz} \equiv 2\varepsilon_{xz} = \gamma_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (\text{II.5})$$

avec : ε_x , ε_{xz} et κ_x sont respectivement des déformations et courbure.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \kappa_x = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \quad (\text{II.6})$$

II.2.1. Energie de déformation

L'énergie potentielle de la poutre de Timoshenko est donnée par la relation suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (\text{II.7})$$

En substituant l'expression (II.5) dans (II.7), on aura :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (N_x \varepsilon_x + M_x \kappa_x + 2Q_x \varepsilon_{xz}) dx \quad (\text{II.8})$$

Où L : longueur de la poutre.

La résultante des forces est donnée par :

$$N_x = \int_F \sigma_x dS, \quad M_x = \int_F \sigma_x z dS, \quad Q_x = \int_F \sigma_{xz} dS \quad (\text{II.9})$$

S : section transversale de la poutre et $dS = dydz$.

En substituant dans (II.9) la loi de Hooke, et en tenant compte de (II.5) on peut obtenir la relation efforts contraintes de la poutre de Timoshenko.

$$N_x = Q_{11}\epsilon_x + B_{11}\kappa_x, \quad M_x = B_{11}\epsilon_x + D_{11}\kappa_x, \quad Q_x = 2kQ_{55}\epsilon_{xz} \quad (\text{II.10})$$

où k est un facteur de correction de cisaillement, qui est présenté pour la correction de la contrainte de cisaillement transverse.

Dans les expressions (II.10), les coefficients de rigidité de la poutre Q_{ij} , B_{ij} et D_{ij} sont calculées en utilisant les rigidités $A_{ij}^{(k)}$ des couches de la poutre :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= b \sum_{k=1}^K A_{11}^{(k)} [z_k - z_{k-1}] \\ Q_{55} &= b \sum_{k=1}^K A_{55}^{(k)} [z_k - z_{k-1}] \\ B_{11} &= b \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K A_{11}^{(k)} [z_k^2 - z_{k-1}^2] \\ D_{11} &= b \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K A_{11}^{(k)} [z_k^3 - z_{k-1}^3] \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

où b est la largeur de la poutre et z_{k-1} l'ordonnée de la $k^{\text{ème}}$ couche (Figure II. 8)

Étant donné que les déformations de la poutre ne sont pas limitées dans les directions transversales dans les formules (II.11), le coefficient de rigidité $A_{ij}^{(k)}$ des couches peut être exprimé par l'ingénieur en tant que constantes élastiques comme suit :

$$A_{11}^{(k)} = E_x^{(k)}, \quad A_{55}^{(k)} = G_{xz}^{(k)} \quad (\text{II.12})$$

$E_x^{(k)}$ est le module de Young de la $k^{\text{ème}}$ couche dans la direction de l'axe de la poutre et $G_{xz}^{(k)}$ est le module de cisaillement transverse de la $k^{\text{ème}}$ couche de la poutre.

En substituant l'équation (II.10) dans les expressions (II.8) et en tenant compte des équations (II.5) et (II.6), l'énergie de déformation peut être exprimée en fonction des trois fonctions inconnues $u(x)$, $w(x)$ et $\gamma_x(x)$ comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[Q_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right)^2 + kQ_{55} \left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (\text{II.13})$$

Dans le cas de la flexion pure (sans chargement axial), d'une poutre composite sandwich ou stratifié avec un ordre d'empilement symétrique, le coefficient de couplage de la matrice est nul ($B_{11} = 0$) [12] et l'énergie de déformation fonctionnelle (II.13) de la poutre de Timoshenko peut être simplifiée comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[D_{11} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right)^2 + kQ_{55} \left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (\text{II.14})$$

II.2.2. Energie cinétique

L'énergie cinétique T de la poutre est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2) dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u}^2 + 2z\dot{u}\dot{\gamma}_x + z^2\dot{\gamma}_x^2) dx dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_0 (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + 2\rho_1 \dot{u}\dot{\gamma}_x + \rho_2 \dot{\gamma}_x^2 \right] dx \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

ρ_0, ρ_1 et ρ_2 sont les densités massiques généralisées du matériau de la poutre.

Dans le cas d'une poutre stratifiée, elles sont données par les formules :

$$\begin{aligned} \rho_0 &= b \sum_{k=1}^K \rho_k [z_k - z_{k-1}] \\ \rho_1 &= \frac{1}{2} b \sum_{k=1}^K \rho_k [z_k^2 - z_{k-1}^2] \\ \rho_2 &= \frac{1}{3} b \sum_{k=1}^K \rho_k [z_k^3 - z_{k-1}^3] \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

où ρ_k est la masse volumique de la couche k .

Après avoir définie les énergies de déformation et cinétique, nous allons s'en servir pour la construction de 3 modèles éléments finis dénommés : *SI12*, *SI20* et *SIM12*. Les notations utilisées ont les significations suivantes :

- *SI* : pour la désignation d'un élément fini poutre.
- *M* : signifie que l'état de contraintes est membranaire.
- Les chiffres 12 et 20 désignent le nombre de *DDL* de l'élément considéré.

Pour chacun des 3 éléments nous calculons les matrices de rigidité et de masse en adoptant la même procédure. Les étapes de calcul sont les mêmes pour les trois éléments. Les détails de calculs sont présentés dans les sections qui viennent.

➤ **Pour la matrice de rigidité :**

1. Nous mettons la formule de l'énergie de déformation de l'élément sous sa forme matricielle :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon^T D \varepsilon dx \quad D \text{ matrice contenant des coefficients d'élasticité} \quad (\text{II.17})$$

2. Nous écrivons les déformations ε en fonction des déplacements u

$$\varepsilon = Lu \quad L \text{ est un opérateur de dérivation} \quad (\text{II.18})$$

3. Nous approchons les déplacements u par les déplacements nodaux v_e

$$u = Nv_e \quad N \text{ est une matrice des fonctions de formes} \quad (\text{II.19})$$

4. En remplaçant l'approximation (II.19) dans l'équation (II.18), puis (II.18) dans (II.17), nous obtenons l'expression de l'énergie de déformation en fonction des déplacements nodaux :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^l v_e^T (LN)^T D (LN) v_e dx = \frac{1}{2} v_e^T K_e v_e \quad (\text{II.20})$$

De cette dernière expression, en posant $B = LN$ (appelée matrice de déformations), on peut facilement obtenir l'expression de la matrice de rigidité de l'élément :

$$K_e = \int_0^l B^T D B dx \quad (\text{II.21})$$

➤ Pour la matrice de masse :

1. Nous mettons l'expression de l'énergie cinétique de l'élément à une forme matricielle

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{u}^T R_0 \dot{u} dx \quad \text{où } R_0 \text{ est la matrice des densités généralisées du matériau} \quad (\text{II.22})$$

2. Nous approchons les vitesses \dot{u} par les vitesses nodales \dot{v}_e

$$\dot{u} = N \dot{v}_e \quad N \text{ Matrice des fonctions de forme} \quad (\text{II.23})$$

3. Nous substituons l'approximation (II.23) dans la fonctionnelle d'énergie cinétique (II.22), il vient :

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{v}_e^T N^T R_0 N \dot{v}_e dx \quad (\text{II.24})$$

La matrice de masse se déduit alors simplement de la relation (II.24) et s'écrit :

$$M_e = \int_0^l N^T R_0 N dx \quad (\text{II.25})$$

II.3. Définition des éléments finis *SI12* et *SI20*

Dans ce qui suit, nous définissons au préalable l'élément fini *SI12* qui nous permettra ensuite de définir l'élément *SI20* composé de trois éléments *SI12* pour la poutre à trois strates.

II.3.1. Élément fini *SI12*

II.3.1.1. Calcul de la matrice de rigidité

Considérons une poutre en flexion d'un matériau composite stratifié, avec des séquences d'empilement symétriques. L'élément fini de Lagrange au 3^{ème} ordre possède 4 nœud, ayant chacun 3 degrés de liberté ; ce qui fait en tout 12 degrés de liberté.

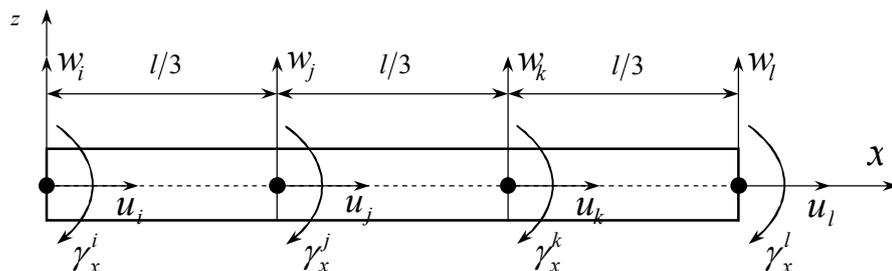


Figure II.6. Élément fini *SI12*

L'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l (Q_{11} \varepsilon_x^2 + D_{11} k_x^2 + kQ_{55} \gamma_{xz}^2) dx \quad (\text{II.26})$$

Cette énergie peut s'écrire sous la forme matricielle comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon^T D \varepsilon dx \quad (\text{II.27})$$

où le vecteur ε des déformations et la matrice D d'élasticité sont définis comme suit :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ k_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & kQ_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

Les relations contraintes-déformations sont données sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon = Lu \quad (\text{II.29})$$

Avec le vecteur u des déplacements et l'opérateur L de dérivations sont donnés par:

$$u = [u, w, \gamma_x]^T, \quad L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

Les déplacements nodaux du nœud i sont définis par : $v_i = [u_i, w_i, \gamma_x^i]^T$

Le vecteur global des déplacements nodaux v_e est défini comme suit:

$$v_e = \{v_i^T, v_j^T, v_k^T, v_l^T\}^T \quad (\text{II.31})$$

L'approximation des déplacements le long de l'élément fini est donnée par la formule :

$$u = Nv_e \quad (\text{II.32})$$

où N est la matrice des fonctions d'interpolation. Elle s'exprime comme suit :

$$N = [N_i I_3, N_j I_3, N_k I_3, N_l I_3] \quad (II.33)$$

où I_3 est la matrice identité d'ordre 3 et N_i, N_j, N_k et N_l sont les fonctions d'interpolation de Lagrange d'ordre 3 [14]. Ces fonctions sont représentées sur la figure II.7. Elles ont des valeurs de 1 au nœud m ($m = i, j, k, l$) et 0 pour les autres nœuds; elles sont définies par:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{3x}{l} - 1 \right) \left(\frac{3x}{l} - 2 \right) \left(\frac{x}{l} - 1 \right); & N_j &= \frac{9}{2} \left(\frac{x}{l} \right) \left(\frac{3x}{l} - 2 \right) \left(\frac{x}{l} - 1 \right); \\ N_k &= -\frac{9}{2} \left(\frac{x}{l} \right) \left(\frac{3x}{l} - 1 \right) \left(\frac{x}{l} - 1 \right); & N_l &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right) \left(\frac{3x}{l} - 1 \right) \left(\frac{3x}{l} - 2 \right). \end{aligned} \quad (II.34)$$

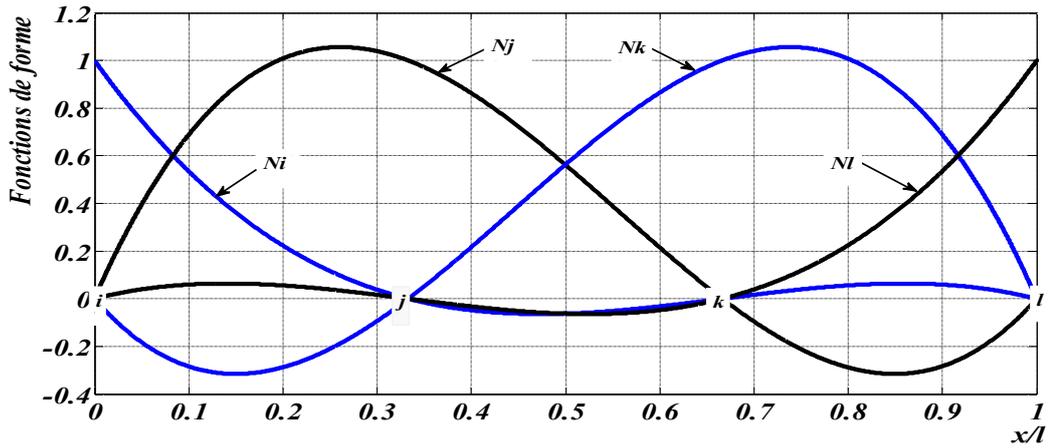


Figure II.7. Fonctions d'interpolation de Lagrange d'ordre 3

En substituant les approximations (II.32) dans la relation déformations-déplacements (II.29), on obtient :

$$\varepsilon = B v_e \quad (II.35)$$

Avec $B = LN$ appelée matrice de déformations.

L'injection de l'équation (II.35) dans l'expression de l'énergie de déformation, mène vers l'expression (II.36) :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon^T D \varepsilon dx = \frac{1}{2} v_e^T K_e v_e \quad (II.36)$$

D'où on tire l'expression de la matrice de rigidité K_e :

$$K_e = \int_0^l B^T D B dx \quad (II.37)$$

II.3.1.2. Calcul de la matrice de masse

Dans le cas d'une poutre monocouche les densités ρ_0 , ρ_1 et ρ_2 sont données par :

$$\rho_0 = b\rho h; \quad \rho_1 = 0 \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{1}{3}b\rho \left(\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right) = \frac{b\rho h^3}{12}. \quad (\text{II.38})$$

Où b et h sont la largeur et l'épaisseur de l'élément respectivement.

L'énergie cinétique de l'élément se réduit alors à :

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^l [\rho_0 (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \rho_2 \dot{\gamma}_x^2] dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[b\rho h (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{b\rho h^3}{12} \dot{\gamma}_x^2 \right] dx \quad (\text{II.39})$$

Sous la forme matricielle :

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{u}^T R_0 \dot{u} dx \quad (\text{II.40})$$

Avec la matrice R_0 est définie par:

$$R_0 = \begin{bmatrix} \rho_0 & 0 & \rho_1 \\ 0 & \rho_0 & 0 \\ \rho_1 & 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

En substituant les approximations (II.32) dans la relation (II.40), on obtient :

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{v}_e^T N^T R_0 N \dot{v}_e dx \quad (\text{II.42})$$

D'où on peut tirer l'expression de la matrice de masse :

$$M_e = \int_0^l N^T R_0 N dx \quad (\text{II.43})$$

Après avoir calculé les matrices de rigidité K_e et de masse M_e de tous les éléments de la poutre il est nécessaire de les assembler afin d'obtenir les matrices globales de rigidité K et de masse M de toute la poutre.

Il est à noter que cet élément peut être utilisé pour l'analyse des poutres homogène comme pour les multicouches. Pour ce dernier cas, il faut d'abord introduire le coefficient de correction de cisaillement pour calculer la rigidité transverse réduite.

II.3.2. Élément fini *SI20*

II.3.2.1. Calcul de la matrice de rigidité

Considérons l'élément poutre constitué de trois couches (voir figure II.8). Chacune de ces couches peut être représentée par un élément poutre *SI12* étudié dans la section précédente.

Dans ce présent modèle les déplacements dans chaque couche sont représentés par les approximations (II.1).

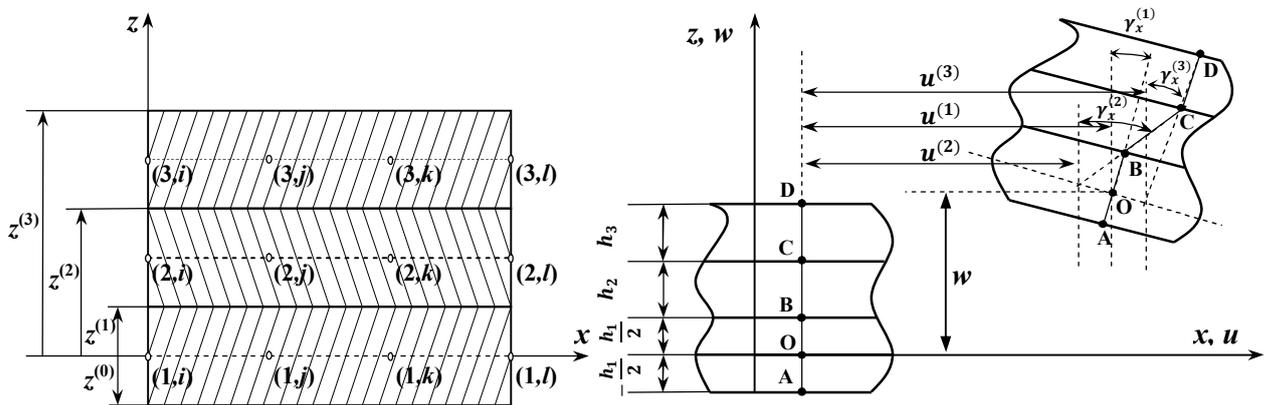


Figure II.8. L'élément fini *SI20* à gauche et ses déformations à droite

Du fait que les rotations dans les trois couches sont différentes, ce modèle est appelé le modèle zigzag. Les déplacements des nœuds de chaque couche sont donnés par les expressions :

$$u_1^{(k)}(x, z) = u_{(k)}(x) + z\gamma_x^{(k)}, \quad u_3^{(k)}(x, z) = w(x), k=1, 2 \text{ et } 3. \quad (\text{II.44})$$

Les calculs sont effectués en prenant comme axe de référence l'axe de la première couche (couche inférieure). Ainsi, pour la première couche $-h_1/2 \leq z \leq h_1/2$, pour la deuxième $h_1/2 \leq z \leq h_1/2 + h_2$ et pour la troisième $h_1/2 + h_2 \leq z \leq h_1/2 + h_2 + h_3$.

Les conditions de continuité de déplacements entre les couches peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)}(x, z) = u_1^{(2)}(x, z) \Big|_{z=z_1} \quad , \quad u_1^{(2)}(x, z) = u_1^{(3)}(x, z) \Big|_{z=z_2} \\
u_3^{(1)}(x, z) = u_3^{(2)}(x, z) \Big|_{z=z_1} \quad , \quad u_3^{(2)}(x, z) = u_3^{(3)}(x, z) \Big|_{z=z_2}
\end{aligned} \tag{II.45}$$

En tenant compte de ces conditions de continuité, les déplacements de la couche du milieu sont données par :

$$u_1^{(2)}(x, z) = u_2(x) + z\gamma_x^{(2)}(x), \quad u_3^{(2)}(x, z) = w(x). \tag{II.46}$$

Dans les équations (II.47) $u_{(2)}$ et $\gamma_x^{(2)}$ sont définies comme des variables dépendantes:

$$\begin{aligned}
u_{(2)} &= F_1 u_{(1)} + F_2 u_{(3)} + F_3 \gamma_x^{(1)} - F_3 \gamma_x^{(3)}, \\
\gamma_x^{(2)} &= -F_4 u_{(1)} + F_4 u_{(3)} + F_2 \gamma_x^{(1)} + F_1 \gamma_x^{(3)}
\end{aligned} \tag{II.47}$$

avec:

$$F_1 = 1 - F_2, \quad F_2 = -\frac{h_1}{2h_2}, \quad F_3 = F_1 \frac{h_1}{2}, \quad F_4 = \frac{1}{h_2} \tag{II.48}$$

Le macroélément *SI20* est composé de 3 éléments *SI12*, chacun ayant 12 *DDL*, ce qui donne au total 36 *DDL*. En tenant compte de conditions de continuité (II.45), et de fait que le déplacement transversal w soit le même pour les trois couches (n'est pas fonction de la coordonnée z), le nombre de *DDL* se réduit au 20 *DDL* indépendants. Ainsi, on peut définir une nouvelle base de déplacements indépendants.

$$u^T = [u^{(1)}, w, \gamma_x^{(1)}, u^{(3)}, \gamma_x^{(3)}] \tag{II.49}$$

Ici u désigne le vecteur de déplacements de base.

Le vecteur de déplacements nodaux de tout l'élément est défini par :

$$v_e^T = [v_i^T, v_j^T, v_k^T, v_l^T] \tag{II.50}$$

Avec v_m représente les déplacements du nœud m ($m = i, j, k, l$)

$$v_m^T = [u_m^{(1)}, w_m, \gamma_x^{(1)m}, u_m^{(3)}, \gamma_x^{(3)m}] \tag{II.51}$$

L'approximation des déplacements dans l'élément *SI20* est effectuée en utilisant les mêmes fonctions de forme que celle définies pour l'élément *SI12*.

$$u = Nv_e \quad (\text{II.52})$$

Où N est la matrice des fonctions de forme. Elle est définie comme suit :

$$N = [N_i I_5, N_j I_5, N_k I_5, N_l I_5] \quad (\text{II.53})$$

I_5 est la matrice identité d'ordre 5.

Une fois que les déplacements de tout l'élément sont déterminés, on peut déterminer ceux de chaque couche par le biais des matrices de passage $H^{(k)}$, comme suit :

$$u^{(k)} = [u_{(k)}, w, \gamma_x^{(k)}]^T = H^{(k)} u \quad (\text{II.54})$$

Les matrices $H^{(k)}$ ($k=1, 2$ et 3) sont données par :

$$H^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H^{(2)} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & F_3 & F_2 & -F_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -F_4 & 0 & F_2 & F_4 & F_1 \end{bmatrix}; \quad H^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

L'énergie de déformation U_e de l'élément fini *SI20* est la somme des énergies de déformation $U_e^{(k)}$ de chacune des trois couches :

$$U_e = \sum_{k=1}^3 U_e^k = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon^{(k)T} D^{(k)} \varepsilon^{(k)} dx \quad (\text{II.56})$$

Le vecteur de déformations $\varepsilon^{(k)}$ est donné pour chaque couche par la relation (II.28). Egalement, la matrice d'élasticité $D^{(k)}$ est calculée pour chaque couche par la relation (II.28) en prenant comme axe de référence celui de la couche inférieure.

Les déformations sont calculées pour chaque couche par la formule :

$$\varepsilon^{(k)} = L u^{(k)} \quad (\text{II.57})$$

L et $u^{(k)}$ sont donnés par les relations (II.30) et (II.54) respectivement.

En remplaçant les expressions (II.52) et (II.54) dans (II.57), on obtient :

$$\varepsilon^{(k)} = Lu^{(k)} = LH^{(k)}u = LH^{(k)}Nv_e = B^{(k)}v_e \quad (\text{II.58})$$

Le remplacement de l'expression (II.58) dans celle de l'énergie de déformation nous donne :

$$U_e = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \int_0^l v_e^T B^{(k)T} D^{(k)} B^{(k)} v_e dx \quad (\text{II.59})$$

La matrice de rigidité de l'élément se déduit :

$$K_e = \sum_{k=1}^3 \int_0^l B^{(k)T} D^{(k)} B^{(k)} dx \quad (\text{II.60})$$

II.3.2.2. Calcul de la matrice de masse

La matrice de masse se calcule de la même manière que celle de rigidité. L'énergie cinétique du macroélément se calcule comme la somme des énergies de chacune des couches prise individuellement.

$$T_e = \sum_{k=1}^3 T_e^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_0^l \dot{u}^{(k)T} R_0^{(k)} \dot{u}^{(k)} dx \quad (\text{II.61})$$

Le vecteur $\dot{u}^{(k)}$ est donné par la dérivation de la formule (II.54) par rapport au temps. La matrice $R_0^{(k)}$ est calculée pour chaque couche par la formule (II.41) en prenant l'axe de la couche inférieure comme axe de référence.

En substituant les expressions (II.52) dans la fonction de l'énergie cinétique (II.61), on obtient :

$$T_e = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \int_0^l \dot{v}_e^T N^T H^{(k)T} R_0^{(k)} H^{(k)} N \dot{v}_e dx \quad (\text{II.62})$$

D'où l'expression de la matrice de masse :

$$M_e = \sum_{k=1}^3 \int_0^l N^T H^{(k)T} R_0^{(k)} H^{(k)} N dx \quad (\text{II.63})$$

II.3.3. Élément fini *SIM12*

L'élément *SIM12* est développé dans le but d'analyser les poutres sandwichs ayant des peaux de très faibles épaisseurs et une âme très douce. Deux hypothèses sont posées : d'une part, on suppose qu'il n'y a pas de contraintes de flexion dans les peaux du sandwich, mais seulement des contraintes membranaires. D'autre part, qu'il n'y a pas de contraintes axiales dans l'âme de l'élément, mais seulement des contraintes du cisaillement (théorie des sandwichs).

L'étude de cet élément se divise en deux parties :

- calcul des matrices de masse et de rigidité de l'âme. Cette dernière sera affectée par l'indice "c".
- calcul des matrices de masse et de rigidité des peaux. Les deux peaux sont supposées constituées du même matériau et ayant une même épaisseur. Elles seront affectées par l'indice "f". (f et c sont utilisés indifféremment comme indice ou comme exposant).

Même ordonnancement de calculs que celui des éléments *SI12* et *SI20* est adoptée pour le calcul des matrices de masse et de rigidité de l'élément *SIM12*

II.3.3.1. Calcul de la matrice de rigidité de l'élément *SIM12*

Les déplacements dans un nœud *i* sont donnés par :

$$v_i = [u_i, w_i, \gamma_x^i]^T \quad (\text{II.64})$$

Les déplacements dans tout l'élément sont donnés par :

$$v_e = [v_i^T, v_j^T, v_k^T, v_l^T]^T \quad (\text{II.65})$$

L'approximation des déplacements dans l'élément fini est exprimée par la relation :

$$u = Nv_e \quad (\text{II.66})$$

L'expression des contraintes dans l'âme et les peaux du sandwich sont données par les formules (II.67) et (II.68) respectivement

$$\gamma_{xz} = L^c u = B^c v_e \quad (\text{II.67})$$

$$\varepsilon_x^f = \frac{\partial u}{\partial x} + h^f \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} = L^f u \quad (\text{II.68})$$

avec :

$$L^c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial w}{\partial x} & 1 \end{bmatrix}, \quad B^c = L^c N, \quad L^f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & h^f \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.69})$$

En substituant l'approximation (II.66) dans l'équation (II.68), on obtient :

$$\varepsilon_x^f = B^f v_e = [B_i^f, B_j^f, B_k^f, B_l^f] v_e \quad (\text{II.70})$$

$$\text{où} \quad B_m^f = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 & h^f \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \quad m=i, j, k, l. \quad (\text{II.71})$$

L'énergie de déformation du sandwich est égale à l'énergie de déformation de l'âme plus celle des deux peaux :

$$U_e = U_e^c + U_e^f = \frac{1}{2} \int_0^l v_e^T (B^{cT} Q_{55}^c B^c + 2B^{fT} E^{fT} B^f) v_e dx \quad (\text{II.72})$$

La matrice de rigidité se déduit à partir de la relation (II.72) comme suit :

$$K_e = K_e^c + K_e^f = \int_0^l (B^{cT} Q_{55}^c B^c + 2B^{fT} E^{fT} B^f) dx \quad (\text{II.73})$$

II.3.3.2. Calcul de la matrice de masse de l'élément *SIM12*

Comme pour l'énergie de déformation, l'énergie cinétique de l'élément *SIM12* est égale à la somme des énergies cinétique de l'âme et celle des deux peaux

$$T_e = T_e^c + T_e^f = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{u}^T (R^c + 2bh^f \rho^f R^f) \dot{u} dx \quad (\text{II.74})$$

Avec :

$$R^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0^c & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2^c \end{bmatrix}; \quad R^f = \begin{bmatrix} R_1^f & 0 & R_2^f \\ 0 & R_1^f & 0 \\ R_2^f & 0 & R_3^f \end{bmatrix}; \quad (\text{II.75})$$

$$\rho_0^c = bh^c \rho^c, \quad \rho_2^c = \frac{b(h^c)^3}{12}, \quad R_1^f = h^f, \quad R_2^f = h^f \frac{h^f + h^c}{2}, \quad R_3^f = h^f \frac{(h^f + h^c)^2}{4} \quad (\text{II.76})$$

En substituant les approximations des déplacements dans l'expression de l'énergie cinétique (II.74), on aura:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{v}_e^T N^T (R^c + 2bh^f \rho^f R^f) N \dot{v}_e dx \quad (\text{II.77})$$

Finalement, la matrice de masse de l'élément *SIMI2* s'obtient par :

$$M_e = \int_0^l N^T (R^c + 2bh^f \rho^f R^f) N dx \quad (\text{II.78})$$

II.4. Calcul analytique des fréquences propres des poutres composites

La première étape dans l'analyse des vibrations de structures est l'étude des vibrations libres ; calcul des fréquences propres de la structure et leurs modes propres correspondants.

L'expression de la $n^{\text{ème}}$ pulsation propre d'une poutre stratifiée, supportée par deux appuis simples est donnée par [12, 13]:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{D_{11} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4}{\rho_0}}{\left[1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{D_{11}}{kQ_{55}}\right]}} \quad (\text{II.79})$$

où D_{11} , Q_{55} et ρ_0 sont donnés respectivement par les formules (II.11) et (II.16)

L : longueur de la poutre k : coefficient de correction du cisaillement.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour le calcul du coefficient k . Ces méthodes sont basées sur des approches différentes, mais les résultats obtenus restent tous proches l'un de l'autre. Par exemple, selon Reissner le coefficient k se calcul comme suit :

$$k = \frac{1}{Q_{55} b \sum_{k=1}^K \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{g_k^2(z)}{G_{xz}^{(k)}} dz} \quad (\text{II.80})$$

Avec :

$$g_k(z) = \frac{1}{D_{11}} \left\{ A_{11}^{(k)} \frac{z^2}{2} + \sum_{j=1}^k [A_{11}^{(j)} - A_{11}^{(j-1)}] \frac{z_j^2}{2} \right\} \quad (\text{II.81})$$

Remarques :

1. Pour le calcul de $g_k(z)$, la valeur de $A_{11}^{(0)}$ doit être prise égale à zéros ($A_{11}^{(0)} = 0$).
2. Ici pour le calcul des côtes z_i , utilisées par la suite pour calculer les quantités Q_{55} , D_{11} et ρ_0 , l'axe de référence est celui de la couche du milieu.

Dans le cas d'une poutre sandwich, les quantités kQ_{55} , D_{11} et ρ_0 valent :

$$kQ_{55} = bh_c G_c \quad \rho_0 = b(\rho_c h_c + 2\rho_f h_f) \quad D_{11} = 2b \frac{1}{4} (h_c + h_f)^2 E_f \quad (\text{II.82})$$

En substituant les expressions (II.82) dans la formule (II.80), la $n^{\text{ème}}$ pulsation propre de la poutre sandwich se calcule directement par :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{2h_f \frac{1}{4} (h_c + h_f)^2 E_f \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4}{\rho_c h_c + 2\rho_f h_f}}{1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{2h_f \frac{1}{4} (h_c + h_f)^2 E_f}{h_c G_c}}} \quad (\text{II.83})$$

Pour tester la consistance de l'analyse dynamique des poutres avec les modèles *SI20* et *SIM12*, nous allons comparer les six premières fréquences obtenues par ces éléments à celles obtenues analytiquement.

Après avoir assemblé les matrices de rigidité et celles de masse par les formules (I.25), nous les injectons dans le problème aux valeurs propres (I.30) et nous obtenons alors les pulsations propres de chacun de ces deux modèles respectifs. De l'autre part, les pulsations propres sont calculées analytiquement ; soient par la formule (II.79) pour la poutre stratifiée et par la formule (II.83) pour celle sandwich.

Les caractéristiques mécaniques et la géométrie de la poutre stratifiée sont données par :

$$E_1 = 144.8 \text{ GPa}; \quad E_2 = 9.65 \text{ GPa}; \quad G_{13} = 4.14 \text{ GPa}; \quad G_{23} = 3.45 \text{ GPa}; \\ \mu_{12} = 0.25; \quad \rho = 1390 \text{ kg/m}^3. \quad (\text{II.84})$$

$$L = 15 \text{ m}, \quad h_1 = h_3 = 0.25 \text{ m}; \quad h_2 = 0.5 \text{ m}; \quad b = 1 \text{ m}.$$

Les caractéristiques mécaniques et géométriques d'une structure poutre sandwich des lames très fines et une âme très souple sont données ci-dessous :

$$E_f = 710 \text{ GPa} ; \quad E_c = 22 \text{ MPa} ; \quad \mu_c = 0,315 ; \quad G_c = \frac{E_c}{2(1 + \mu_c)} = 8,4 \text{ MPa} ;$$

$$\rho_f = 2700 \text{ kg/m}^3 ; \quad \rho_c = 40 \text{ kg/m}^3. \quad (\text{II.85})$$

$$L = 1,08 \text{ m} ; \quad b = 0,1 \text{ m} ; \quad h_f = 2,15 \text{ mm} ; \quad h_c = 80,2 \text{ mm}.$$

Le tableau (II.1) illustre les fréquences propres de la poutre stratifiée calculées à base de l'élément fini *SI20* et celle celles trouvées par le calcul analytique de la formule (II.79).

| Fréquences [Hz] | <i>Fr1</i> | <i>Fr2</i> | <i>Fr3</i> | <i>Fr4</i> | <i>Fr5</i> | <i>Fr6</i> |
|--------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <i>Analytique</i> | 18,02 | 61,17 | 113,63 | 168,01 | 222,15 | 275,64 |
| <i>MEF SI20</i> | 20,14 | 62,17 | 111,37 | 167,39 | 219,50 | 271,50 |
| <i>Différence relative (%)</i> | 15,09 | 1,63 | -1,98 | -0,36 | -1,19 | 1,50 |

Tableau II.1. Fréquences propres de la poutre stratifiée sur des appuis simples calculées par voix analytique et par éléments finis

D'après les résultats de ce tableau, on remarque que la première fréquence prédites par l'élément fini *SI20* est relativement éloignée des la fréquence calculée par la méthode analytique, une différence qui peut être due à la modélisation des conditions aux limites qui influencent généralement les premières fréquences. A partir de la deuxième fréquence, la différence reste moins de 2%.

Dans le tableau suivant, nous représentons les fréquences propres de la poutre sandwich, décrite par les caractéristiques (II.85), calculées à l'aide de l'élément fini *SIM12* plus celles calculées par la formule analytique (II.83).

| Fréquence [Hz] | <i>Fr1</i> | <i>Fr2</i> | <i>Fr3</i> | <i>Fr4</i> | <i>Fr5</i> | <i>Fr6</i> |
|--------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <i>Analytique</i> | 93,9 | 198 | 301 | 402 | 504 | 602,64 |
| <i>MEF SIM12</i> | 91,9 | 193,7 | 293,6 | 393 | 492,1 | 591 |
| <i>Différence relative (%)</i> | -2,12 | -2,17 | -2,45 | -2,23 | -2,55 | 2,50 |

Tableau II.2. Fréquences propres de la poutre sandwich sur des appuis simples calculées par voix analytique et par éléments finis

Les résultats de ce tableau montrent que les fréquences calculées en utilisant l'élément fini *SIM12* sont dans l'ordre de 2% inférieurs du calcul analytique.

D'après les résultats des deux tableaux ci-dessus, on peut s'engager à utiliser les deux modèles éléments finis *SI20* et *SIM12* pour l'analyse dynamique des structures poutre stratifiées, qui peuvent se ramener à trois couches d'empilement symétrique, et des poutres sandwichs avec une bonne marge de confiance.

Chapitre III

Transformée en ondelettes

III.1. Introduction

Le domaine du traitement du signal connaît une progression importante liée à l'évolution des technologies de l'information et de la communication. L'objectif est de passer d'un signal réel, qui est souvent complexe, à un signal simple facile à interpréter ou à manipuler. Pour ce faire, plusieurs techniques d'analyse ont été développées, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients [15]. Nous donnons dans ce chapitre quelques notions théoriques sur la transformée de Fourier et celle des ondelettes.

III.2. Transformée de Fourier

On a vu dans le chapitre I que toute fonction périodique peut être décomposée sur un ensemble des signaux de base tels que les cosinus et sinus ayant des périodes multiples de la période de la fonction à décomposer (Equations (I.20-I.22)).

La transformée de Fourier est une extension des séries de Fourier pour les fonctions non périodiques en faisant tendre la période vers l'infini et en remplaçant la somme par l'intégrale dans l'équation (I.22). Ainsi la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ notée $F(\omega)$ se définit comme suit:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{III.1})$$

III.2.1. Transformée de Fourier à fenêtre glissante

D'après la définition de la transformée de Fourier [16], on remarque que l'intégrale s'effectue de moins l'infini à plus l'infini, et toute notion de localisation temporelle disparaît dans l'espace de Fourier ; il faut donc trouver un compromis, une fonction qui renseigne sur le contenu fréquentiel, tout en gardant la localisation temporelle afin d'obtenir une bonne représentation temps/fréquence du signal.

La solution consiste à limiter le domaine d'intégration temporel à l'aide d'une fonction fenêtre que l'on pourra faire glisser pour explorer le signal; on obtient ainsi la transformée de Fourier à fenêtre glissante (c'est-à-dire l'observation à court terme d'un signal à travers une fenêtre plus une analyse spectrale locale) :

$$F_w(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) w(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{III.2})$$

ou $f(\tau)$: signal à traiter et $w(\tau - t)$: fonction introduisant la notion de fenêtre.

L'équation (III.2) peut être interprétée comme la projection de f sur une base de fonctions fenêtres glissantes ψ définie par :

$$\psi_{t,\omega}(\tau) = w(\tau - t) e^{-j\omega\tau} \quad (\text{III.3})$$

III.2.2. Transformée de Gabor

La transformée de Gabor est une transformée à fenêtre glissante avec la fonction d'analyse « Gabarotte » définie par une Gaussienne :

$$g(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\text{III.4})$$

La transformée de Gabor s'écrira alors:

$$F_G(t, \omega) = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{(\tau-t)^2}{2}} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{III.5})$$

L'étude d'un signal avec la transformée de Gabor permet d'obtenir à la fois sur le comportement fréquentiel du signal en fonction du temps, la résolution d'analyse étant déterminée au préalable par le choix de la taille de la fenêtre d'analyse ; si elle est trop petite, les basses fréquences n'y seront pas bien présentées, et si, par contre, elle est trop grande, l'information sur les hautes fréquences sera noyée dans l'information concernant la totalité de l'intervalle contenu dans la fenêtre.

III.3. Plans temps-fréquence

Pour conserver les informations locales, on prend une fonction analysante ψ qui doit être bien localisée à la fois en temps et en fréquence et on décompose ainsi un signal en "atome" temps-fréquence. Chaque atome se représente symboliquement, sur le plan temps-fréquence, par un rectangle dont l'abscisse est l'intervalle temporel et l'ordonnée est l'intervalle fréquentiel [17].

Soit ψ une fonction analysante, la localisation en temps et en fréquence de cette fonction se définit par le centre temporel t_ψ , le centre fréquentiel ω_ψ , la résolution temporelle Δt_ψ et la résolution fréquentielle $\Delta \omega_\psi$.

$$\text{Temps et fréquences moyens : } \begin{cases} t_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2} dt \\ \omega_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\hat{\psi}\|_2^2} d\omega \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

$$\text{Résolutions temps-fréquence : } \begin{cases} \Delta t_\psi = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_\psi)^2 \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ \Delta \omega_\psi = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_\psi)^2 \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\hat{\psi}\|_2^2} d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Ainsi, le rectangle de localisation temps-fréquence de la fonction $\psi(t)$ a le centre au point (t_ψ, ω_ψ) avec les arêtes de $2\Delta t_\psi$ et $2\Delta \omega_\psi$ (Figure III. 1)

III.4. Principe d'incertitude de Heisenberg

Le principe stipule que nous ne pouvons pas avoir au même temps une bonne résolution fréquentielle et une bonne résolution temporelle. En effet, pour les hautes fréquences une résolution temporelle élevée est nécessaire, par contre aux basses fréquences une résolution fréquentielle plus grande est suffisante. Le principe permet de poser une condition minorant le produit de la résolution temporelle Δt_ψ et de la résolution fréquentielle $\Delta \omega_\psi$ par 1/2.

$$\mu_\psi = \Delta t_\psi \Delta \omega_\psi \geq \frac{1}{2} \quad (\text{III.8})$$

III.5. Transformée en ondelettes

Le principe de la transformée de Fourier à court terme consiste à découper la fonction $f(t)$ en intervalles réguliers et à appliquer la transformée de Fourier sur chacune d'elles. Cela permet de connaître les composantes fréquentielles de chaque morceau de signal à analyser. Cependant, la largeur de la fenêtre est fixe peu importe les variations du signal, ce qui fait que la méthode ne peut pas s'adapter aux irrégularités qui peuvent surgir dans le signal. Il est donc commode de trouver une méthode capable de faire varier la résolution de l'analyse en fonction des caractéristiques du signal afin de s'adapter à celui-ci. Cela dit, on n'a pas besoin d'un très haut niveau de résolution lorsque le signal est constitué uniquement de basses fréquences, et il serait dommage d'étudier un signal comportant beaucoup de hautes fréquences avec une résolution basse. Ainsi, plutôt que de choisir à l'avance une résolution adaptée à un type de signal donnée, il serait préférable de disposer d'une méthode d'analyse dont la résolution, aussi bien qu'en temps qu'en fréquence, s'adapte au signal en fonction de ses particularités. Les ondelettes ont été développées pour palier à ces problèmes.

La figure III.1 nous donne un aperçu sur la représentation temps-fréquence dans le cas de la transformée de Fourier à fenêtre glissante et dans celui de la transformée en ondelettes.

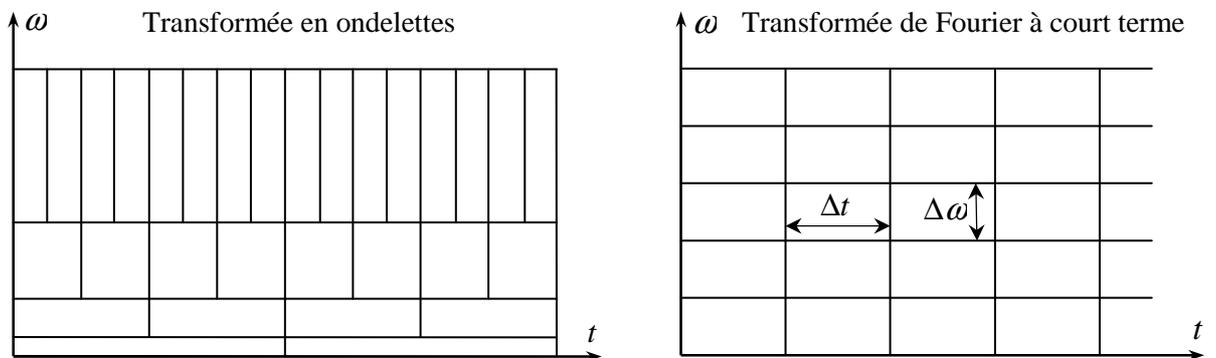


Figure III.1. Pavage du plan temps-fréquence dans les cas: a) Transformée en ondelettes et b) Transformée de Fourier à fenêtre glissante

III.5.1. Définition d'une ondelette

Une Ondelette est une oscillation en forme d'onde, d'une durée limitée et dont la représentation graphique est telle que les aires positive et négative sont égales (moyenne nulle).

Elle est localisée à la fois en temps et en fréquence et permet de définir par translation en temps et dilatation en échelle, une famille de fonctions analysantes :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (\text{III.9})$$

avec :

a : facteur d'échelle. b : facteur de translation (ou de position).

Le facteur d'échelle mesure l'étirement ou la contraction de l'ondelette mère ψ . Une faible valeur de a signifie une ondelette contractée temporellement, une grande valeur signifie une ondelette étendue (Figure III.2). Le facteur de translation est tel qu'en déplaçant son support d'analyse, on déplace l'ondelette dans le temps.

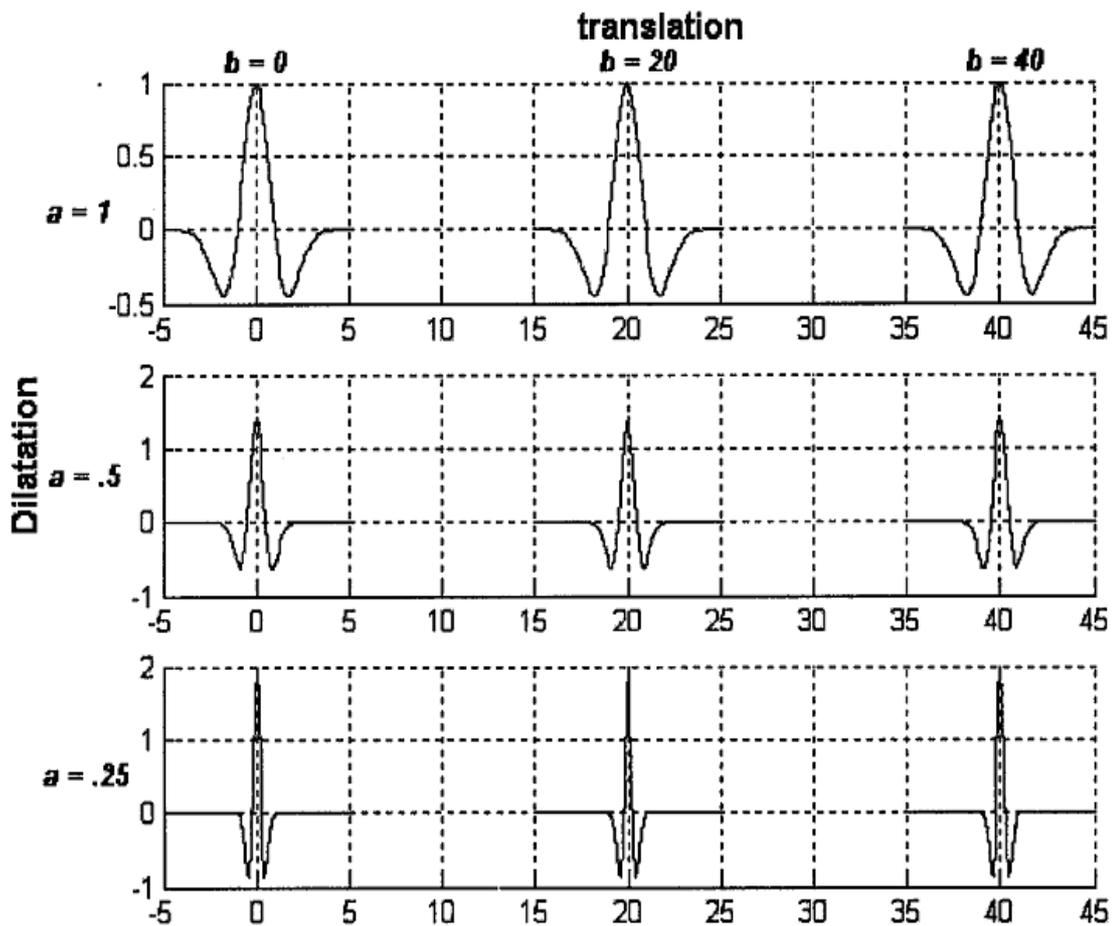


Figure III.2. Ondettes dilatées et translées [tirée de 15]

III.5.2. Transformée en ondelettes continue

De l'analyse de Fourier ressortent des coefficients qui, multipliés par des sinusoides de fréquences appropriées, permettent de reconstituer le signal initial. Pour l'analyse par ondelettes, les coefficients d'ondelettes pour une transformation sont déterminés par :

$$C_w(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (\text{III.10})$$

où $\psi_{a,b}^*$: représente le complexe conjugué de $\psi_{a,b}$. $f(t)$: signal à analyser.

La reconstruction du signal $f(t)$ se calcule comme suit :

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{a,b} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dad b}{a^2} \quad (\text{III.11})$$

où C_ψ est un nombre constant qui ne dépend que de l'ondelette choisie ψ et est défini par

l'équation : $C_\psi = \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$ avec $\hat{\psi}(\omega)$: la transformée de Fourier de $\psi(t)$.

III.5.3. Transformée en ondelettes discrète

Le facteur d'échelle a et le pas de translation b étant des réels, la transformation en ondelettes continue est redondante. Etant parcouru continûment, l'espace temps-fréquence est sur-analysé du fait que les coefficients d'ondelettes voisins contiennent des informations communes. En outre, la transformation occasionne un volume important de calculs, vue la quantité des coefficients. Toutefois, il est possible de réduire cette redondance en discrétisant les paramètres a et b . une manière permettant de réduire au maximum la redondance et de reconstruire correctement le signal d'origine ; elle consiste à choisir $a = 2^{-j}$ et $b = k 2^{-j}$ (j et $k \in \mathbb{Z}$), ce qui est appelé « échantillonnage dyadique » [18] et l'équation de la transformée en ondelettes discrète s'écrira alors comme suit :

$$d(j, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2^{-j/2} \psi^*(2^{-j} t - k) dt \quad (\text{III.12})$$

$d(j, k)$ est connu sous le nom coefficient (ou détail) d'ondelette à l'échelle j et à la position k .

III.5.4. Analyse multirésolution

L'approche multirésolution par ondelette est devenue fondamentale en théorie de signal. Une analyse multirésolution définit des opérateurs linéaires (projecteurs) permettant d'analyser un signal à différentes échelles. L'analyse se construit des sous-espaces emboîtés les uns dans les autres, tels que le passage de l'un à l'autre soit le résultat de changement d'échelle (zoom). Ce zoom est effectuée à l'aide d'une fonction d'échelle ϕ qui se dilate à travers les échelles. Cette fonction et ses versions translatées dans le temps engendrent un espace appelé espace des approximations. Le signal est également projeté sur un espace perpendiculaire afin de conserver toute l'information. La fonction générant ce deuxième espace vectoriel est la fonction d'ondelette ψ générant ainsi les coefficients de détails et permettant de récupérer l'information perdue lors de la première projection.

Une analyse multirésolution est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les 4 propriétés suivantes :

1. $\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_{j+1} \subset V_j,$
2. $\forall j \in \mathbb{Z}, \quad f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1},$
3. $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
4. Il existe ψ_0 tel que $\{\psi_0(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0 ; ψ_0 est appelé « fonction d'échelle ».

L'analyse multirésolution d'un signal f consiste à réaliser des projections orthogonales successives du signal sur les espaces V_j ce qui conduit à des approximations de plus en plus grossières de f au fur et à mesure que j croît. L'expression de l'approximation au niveau m est donnée par :

$$A_m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{m,k} 2^{-m/2} \phi(2^{-m}t - k) \quad (\text{III.13})$$

ou $a_{m,k}$ représentent les coefficients d'approximation au niveau m qui sont obtenus par la projection de f sur les fonctions d'échelles $\phi_{m,k}$.

La différence entre deux approximations consécutives représente l'information de « détail » qui est perdue au passage d'une échelle à l'autre ; cette information est contenue dans le sous-espace W_j orthogonal à V_j tel que :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j$$

Les signaux de détail s'obtiennent également par la projection du signal f sur les fonctions d'ondelettes $\psi_{j,k}$ présentées par l'équation (III.9) :

$$D_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{j,k} 2^{-j/2} \psi(2^{-j} - k) \quad (\text{III.14})$$

L'analyse multirésolution reformule ainsi un signal $f(t)$ sous la forme de la somme des tous les détails plus l'ultime approximation [21] (voir figure III. 3) :

$$f(t) = A_m(t) + \sum_{j=-\infty}^m D_j(t) \quad (\text{III.15})$$

III.5.5. Les paquets d'ondelettes

Les paquets d'ondelettes sont une généralisation de la décomposition en ondelettes qui offre une analyse plus riche [5, 10 et 20]. Ils ont été introduits dans le début des années 90 pour palier le manque de la résolution fréquentielle de l'analyse en ondelettes. Dans le cas de transformation en ondelettes (Analyse multi-résolution), le signal est décomposé en deux vecteurs, le vecteur des détails et celui des approximations. Ce dernier est ensuite décomposé en détail et en approximation et ainsi de suite jusqu'au niveau désiré. Ainsi, en allant d'un niveau à un autre, la décomposition s'effectue uniquement sur le vecteur d'approximation. A partir de cette structure de décomposition, on peut remarquer qu'en allant vers les hautes fréquences, la résolution fréquentielle de l'analyse se réduit considérablement. Les paquets d'ondelettes quant à eux décomposent chacun des deux vecteurs de détail et d'approximation en deux sous-vecteurs de détail et d'approximation et ainsi de suite. L'arbre de décomposition en paquets d'ondelettes offre alors une bonne résolution aussi bien en basses qu'en hautes fréquences. La figure III.3 schématise les arbres de décomposition dans le cas de l'analyse multirésolution et dans cas des paquets d'ondelettes.

Le paquet d'ondelette $\psi_{j,k}^i(t)$ est une fonction à trois indices i, j et k qui sont les paramètres de modulation, d'échelle et de translation respectivement.

$$\psi_{j,k}^i(t) = 2^{j/2} \psi^i(2^j t - k) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.16})$$

Les fonctions d'ondelettes ψ^j sont engendrés par les formules récursives (III.17):

$$\begin{aligned} \psi^{2j}(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \psi^j(2t - k) \\ \psi^{2j+1}(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \psi^j(2t - k) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$g(k)$ et $h(k)$ sont des filtres discrets associés à l'ondelette mère ψ et à la fonction d'échelle φ , issues d'une analyse multirésolution.

L'algorithme récursif qui relie les deux niveaux de décomposition j et $(j+1)$ est donné par :

$$\begin{aligned} y_j^i(t) &= y_{j+1}^{2i-1}(t) + y_{j+1}^{2i}(t) \\ y_{j+1}^{2i-1}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(2t - k) y_j^i(t) \\ y_{j+1}^{2i}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(2t - k) y_j^i(t) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Après j niveaux de décomposition, le signal original peut être exprimé comme suit :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2^j} y_j^i(t) \quad (\text{III.19})$$

Les sous-signaux de décomposition $y_j^i(t)$ peuvent être représentés par une combinaison linéaire des fonctions des paquets d'ondelettes $\psi_{j,k}^i(t)$ comme suit :

$$y_j^i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{j,k}^i \psi_{j,k}^i(t) \quad (\text{III.20})$$

où $C_{j,k}^i$ sont des coefficients des paquets d'ondelettes. Ils sont obtenus par la formule :

$$C_{k,l}^j = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k,l}^j y(t) dt \quad (\text{III.21})$$

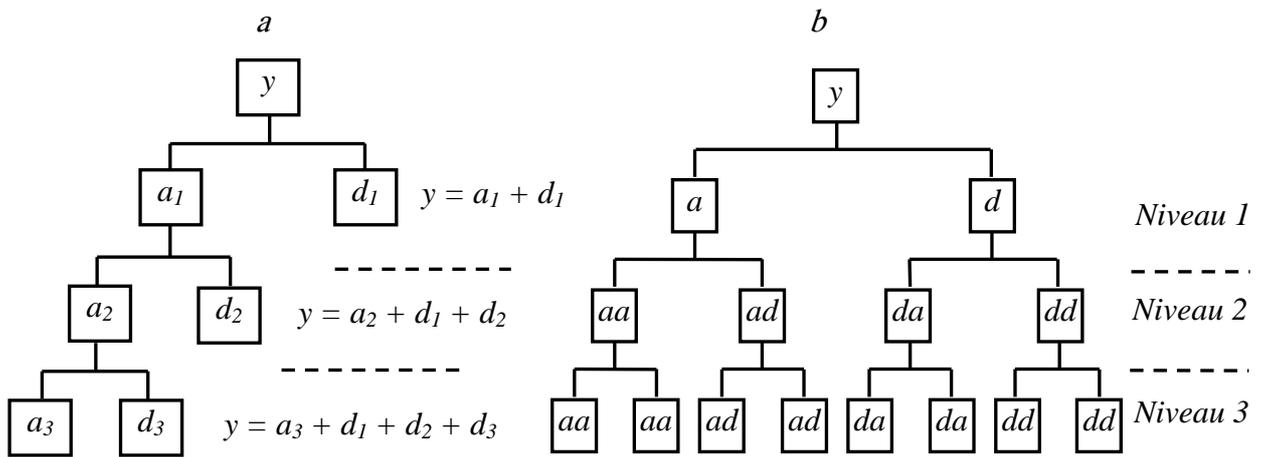


Figure III.3. Schémas des arbres de décomposition dans les cas: a) analyse multi-résolution et b) paquets d'ondelettes

Chapitre IV

Définition du seuil d'endommagements par l'analyse en paquets d'ondelettes

Dans ces deux chapitres suivants, nous proposons une stratégie de détection-localisation de défauts dans les structures se décomposant en deux étapes : la première étape concerne la définition a priori du seuil minimal de détectabilité des défauts et la seconde a trait à la localisation des défauts. Ces méthodes exploitent la décomposition en paquets d'ondelettes du signal réponse temporelle de la structure. Nous proposons donc d'abord une méthode permettant de fixer un seuil global de détectabilité de défauts, avant de procéder à toute expérimentation. Celle-ci est basée sur la variation de l'énergie du signal de la réponse dynamique décomposée par paquets d'ondelettes. Procédant ensuite toujours à l'aide de la décomposition en paquets d'ondelettes, nous proposons une méthode de localisation de défauts. Les deux procédures sont considérées dans le cas des structures poutres composites.

IV.1. Indicateur de variation d'énergie *MEV*

Soit $y(t)$ le signal de la réponse dynamique d'une structure donnée. L'analyse de ce signal par paquets d'ondelettes, au $k^{\text{ème}}$ niveau, permet de le représenter par la somme des sous-signaux $y_k^j(t)$ issus des branches terminales de l'arbre de décomposition selon l'équation (III.18):

$$y(t) = \sum_{j=1}^{2^k} y_k^j(t) \quad (\text{IV.1})$$

L'énergie U_k^j emmagasinée dans un sous-signal $y_k^j(t)$ se calcule par :

$$U_k^j = \int_{-\infty}^{+\infty} y_k^j(t)^2 dt \quad (\text{IV.2})$$

Du moment que le signal $y(t)$ peut se décomposer en somme de sous-signaux, sans perte d'information, son énergie totale U est également égale à la somme des énergies de ceux-ci :

$$U = \sum_{j=1}^{2^k} U_k^j \quad (\text{IV.3})$$

Nous considérons les réponses de deux structures : une saine affectée par l'indice s et une autre endommagée indiquée e . Nous définissons les vecteurs V_s et V_e , ayant pour composantes le rapport entre l'énergie de chaque signal de décomposition, au niveau retenu, et l'énergie totale du signal.

$$V_s = \{Cs_k^1, Cs_k^2, Cs_k^3, \dots, Cs_k^{2^k}\} = \left\{ \frac{Us_k^1}{Us}, \frac{Us_k^2}{Us}, \frac{Us_k^3}{Us}, \dots, \frac{Us_k^{2^k}}{Us} \right\} \quad (\text{IV.4})$$

$$V_e = \{Ce_k^1, Ce_k^2, Ce_k^3, \dots, Ce_k^{2^k}\} = \left\{ \frac{Ue_k^1}{Ue}, \frac{Ue_k^2}{Ue}, \frac{Ue_k^3}{Ue}, \dots, \frac{Ue_k^{2^k}}{Ue} \right\} \quad (\text{IV.5})$$

Nous définissons encore le vecteur de variation d'énergie EV comme la différence relative entre les vecteurs V_e et V_s :

$$EV = \left\{ \left(\frac{Cs_k^1 - Ce_k^1}{Cs_k^1} \right), \left(\frac{Cs_k^2 - Ce_k^2}{Cs_k^2} \right), \left(\frac{Cs_k^3 - Ce_k^3}{Cs_k^3} \right), \dots, \left(\frac{Cs_k^{2^k} - Ce_k^{2^k}}{Cs_k^{2^k}} \right) \right\} \times 100\% \quad (\text{IV.6})$$

Le MEV est défini comme étant le maximum en valeur absolue de EV .

IV.2. Validation numérique de la procédure de définition du seuil de détectabilité d'endommagement

Dans ce qui suit, nous appliquons l'indicateur de variation d'énergie sur une structure poutre stratifiée croisée à trois couches, telle qu'elle la montre la figure IV.1. La poutre est discrétisée en 60 éléments finis $S120$.

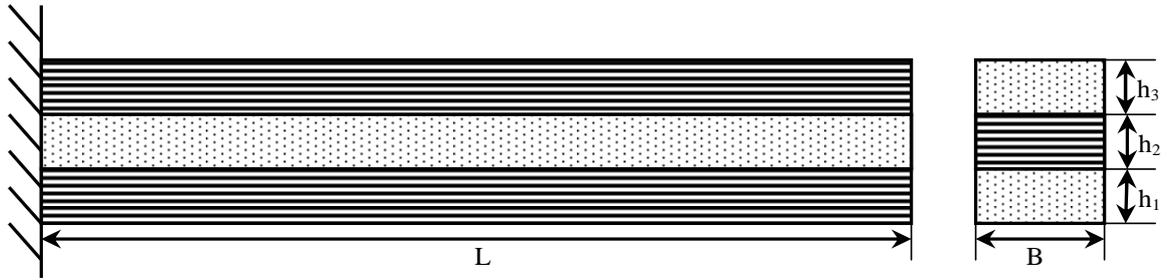


Figure IV.1. Poutre stratifiée $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ encastée-libre

Les propriétés mécaniques du matériau de la poutre sont données par:

Les modules d'élasticité: $E_1 = 47.518$ GPa; $E_2 = 4.588$ GPa; $G_{12} = 2.201$ GPa;

Les coefficients de poisson : $\mu_{12} = 0.0419$; $\mu_{21} = 0.434$;

La masse volumique : $\rho = 1850$ kg/m³.

La géométrie de la poutre est caractérisée par :

La longueur : $L = 360$ mm ;

Les hauteurs des couches : $h_1 = h_2 = h_3 = 4$ mm,

La largeur : $B = 30$ mm.

Afin de mieux connaître l'efficacité de la méthode, nous allons considérer deux types de conditions aux limites: la première poutre est encastée-libre tandis que la deuxième est doublement appuyée.

IV.2.1. Cas de poutre encastée-libre

Dans le but de mieux ressortir la différence entre la réponse de la structure saine et celle de la structure endommagée nous avons jugé utile de jouer sur la position de l'application de la force ainsi que sur sa forme. En effet, d'une part, la position de l'excitation est choisie en sorte que les amplitudes des vibrations soient plus grandes, puisque le *MEV* est directement lié à ces amplitudes; la position choisie pour ce cas est le premier nœud à compter de l'extrémité libre de la poutre. D'autre part, afin d'exciter plus de modes de la structure, nous avons choisi une force excitatrice comportant trois composantes sinusoïdales de forme:

$F_e(t) = A_0(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_3 t))$. Pour les pulsations ω_i , $i = 1, 2$ et 3 , elles sont a priori choisies proches des pulsations propres de la structure telles qu'elles les montre la figure IV.2.

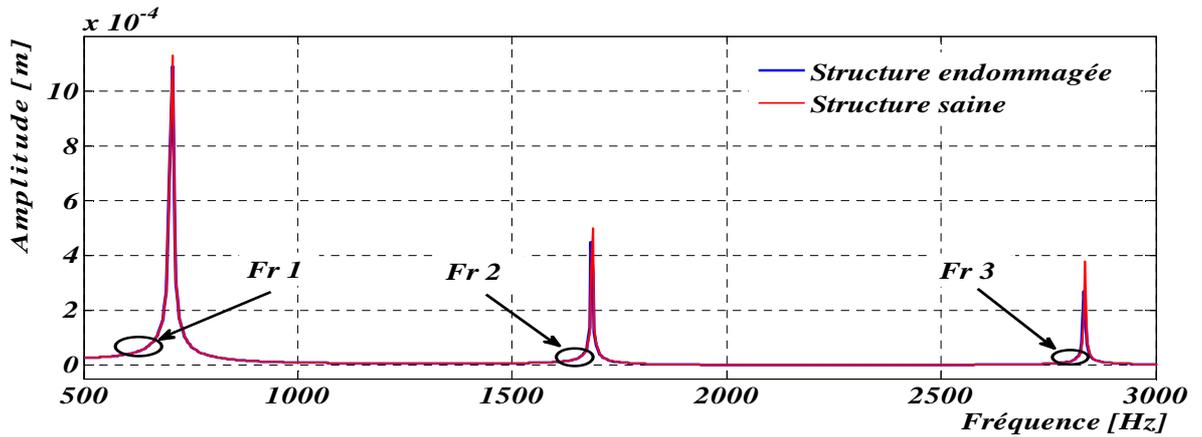


Figure IV.2. Choix des pulsations d'excitation (avec $\omega_i = 2\pi Fr_i$ pour $i = 1, 2$ et 3)

La simulation de la réponse dynamique de la structure est effectuée par la relation (I.40). Ainsi, la réponse totale de la structure est égale la somme des réponses dues à chacune des composantes de la force excitatrice, vu que nous sommes dans le cas des vibrations linéaires.

Une fois que les réponses des deux structures sont obtenues, elles seront décomposées par paquets d'ondelettes de Daubechies «db4» au 4^{ème} niveau, nous calculerons alors les vecteurs V_s et V_e , puis nous déterminerons le MEV .

Dans une première étape de cette procédure, nous endommageons de 40% successivement chacun des éléments de la structure et nous traçons la courbe de MEV en fonction du numéro de l'élément endommagé sur la structure (Figure IV.3).

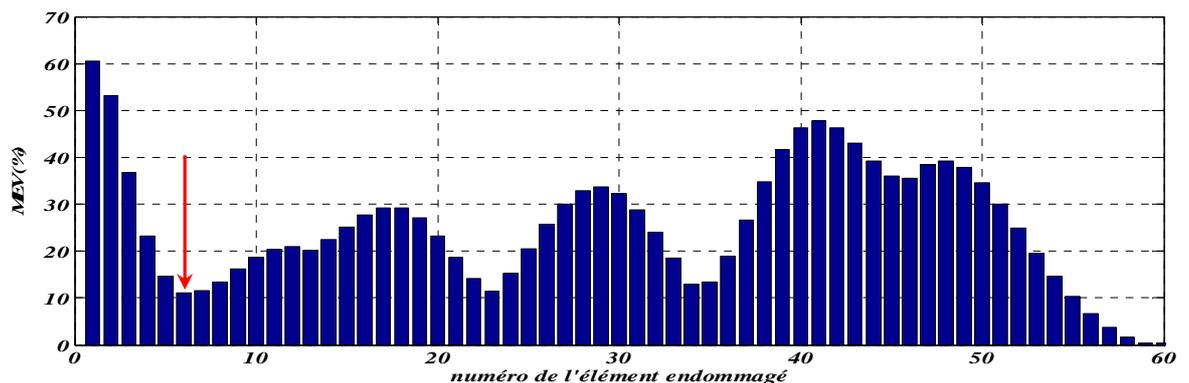


Figure IV.3. Histogramme MEV -numéro de l'élément endommagé dans le cas de la poutre encastrée-libre endommagée à 40%

D'après la figure IV.3, on remarque que la sensibilité de cet indicateur est variable selon l'endroit de présence du défaut. En particulier, sa valeur est plus élevée plus près de

l'encastrement et presque nulle à l'extrémité libre, qui est une zone peu sollicitée. Nous choisissons sur la figure IV.3 l'élément à plus faible valeur de MEV en l'occurrence l'élément 6 (sans considérer les éléments qui sont près de l'extrémité libre), nous l'endommageons à des différents taux et nous cherchons dans la bande de fréquences une combinaison des composantes de la force excitatrice qui nous donne la courbe représentative de MEV en fonction du taux d'endommagement ayant un changement de sens d'évolution (présentant un point anguleux). Cette forme de la courbe nous permet de fixer a priori un seuil de détectabilité de défauts à la position choisie (Figure IV.4).

Le seuil inférieur du MEV est fixé juste en dessous de point Anguleux de la courbe à 60%, qui correspond à un taux d'endommagement d'environ de 22%. On dit alors que le seuil de détectabilité de défauts pour l'élément 6 est de 22%.

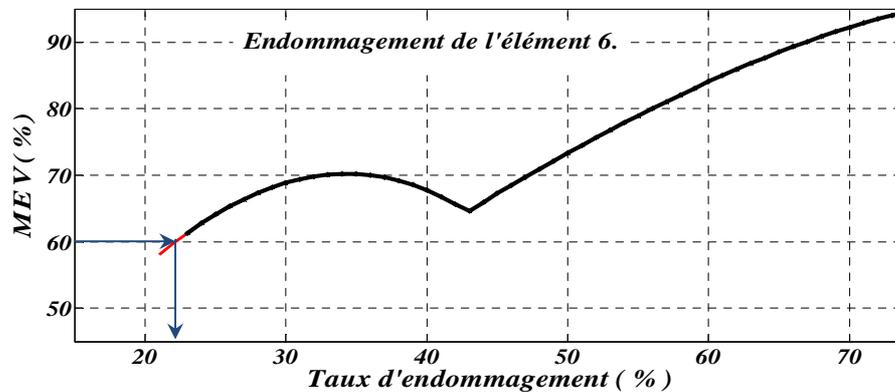


Figure IV.4. MEV -Taux d'endommagement pour l'élément 6

Nous retiendrons le même MEV seuil de 60 % et en gardant les mêmes conditions d'excitation. Pour chaque élément de la poutre, nous faisons varier le taux d'endommagement et nous traçons le graphe du MEV -taux d'endommagement. Nous remarquons que tous les graphes ont la même allure que celle de l'élément 6 (Voir figures (IV.5-IV.8)). De cette manière, nous pouvons fixer à priori un seuil de détectabilité de défauts pour chaque position de l'élément endommagé. Nous représentons ci-dessus pour quelques éléments les graphes de MEV en fonction du taux d'endommagement.

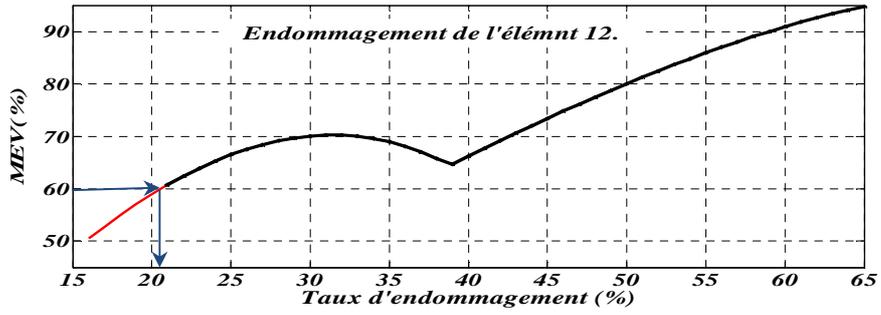


Figure IV.5. MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 12

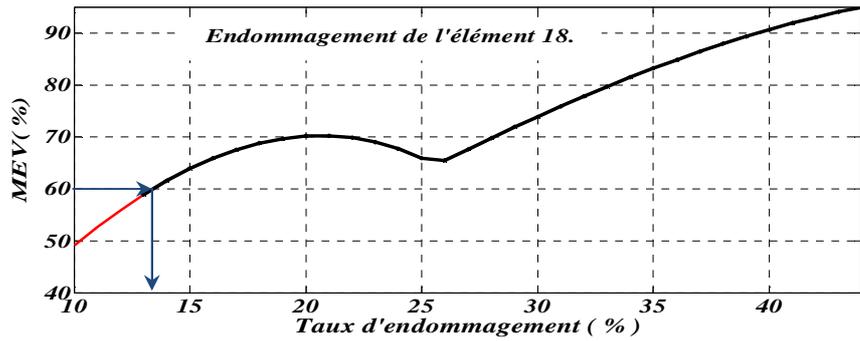


Figure IV.6. MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 18

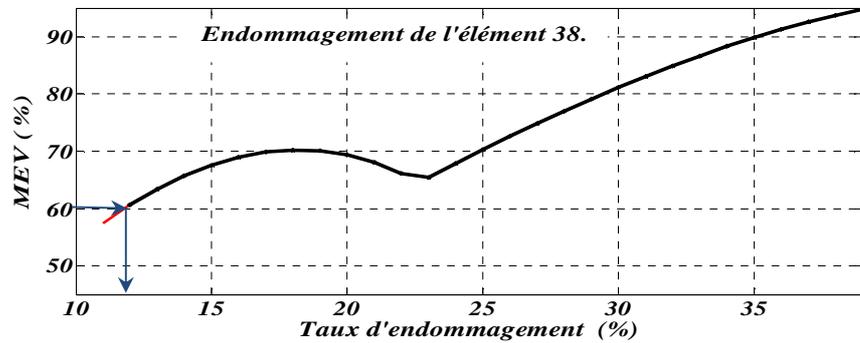


Figure IV.7. MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 38

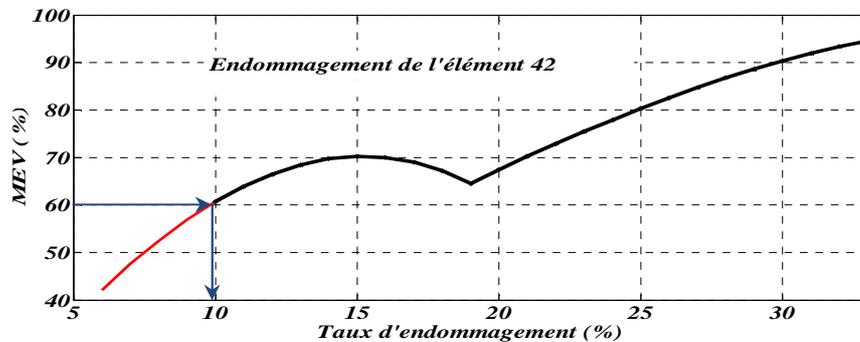


Figure IV.8. MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 42

IV.2.2. Cas d'une poutre doublement appuyée

Dans ce cas la poutre est fixée par un appui double à son extrémité droite et un appui simple à l'autre extrémité. Le principe du choix de la forme et la position de la force excitatrice est le même avec celui de la première poutre; nous avons gardé la même forme de l'excitation, et par rapport à la position, nous l'avons appliqué verticalement en au 25^{ème} nœud à partir de l'extrémité gauche de la poutre.

Nous endommageons de 40 % successivement chacun des éléments de la structure. L'histogramme représentatif de *MEV* en fonction du numéro de l'élément endommagé est donné par la figure IV.9.

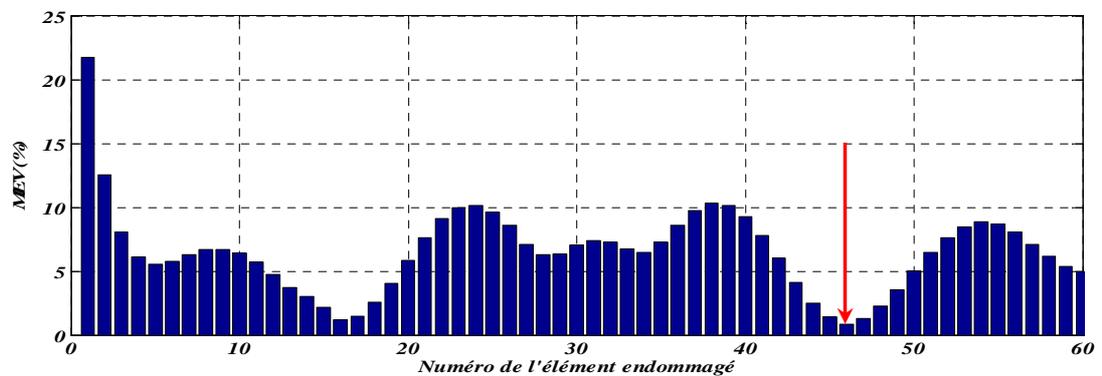


Figure IV.9. Histogramme *MEV*-numéro de l'élément endommagé dans le cas de la poutre doublement appuyée endommagée à 40%

Sur l'histogramme, nous choisissons l'élément à plus faible valeur de *MEV*, à savoir, l'élément 46 ; nous l'endommageons à différents taux et nous cherchons dans la bande

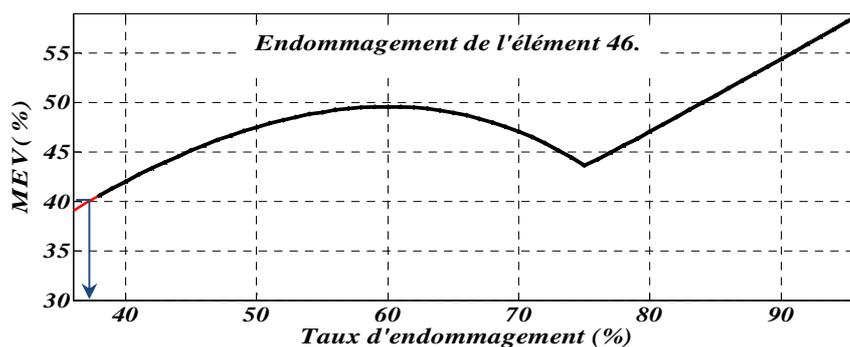


Figure IV.10. *MEV*-Taux d'endommagement pour l'élément 46 dans le cas de la poutre doublement appuyée

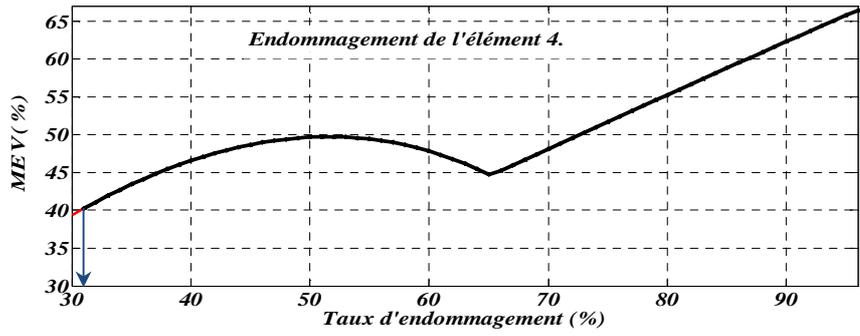


Figure IV.11. MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 4

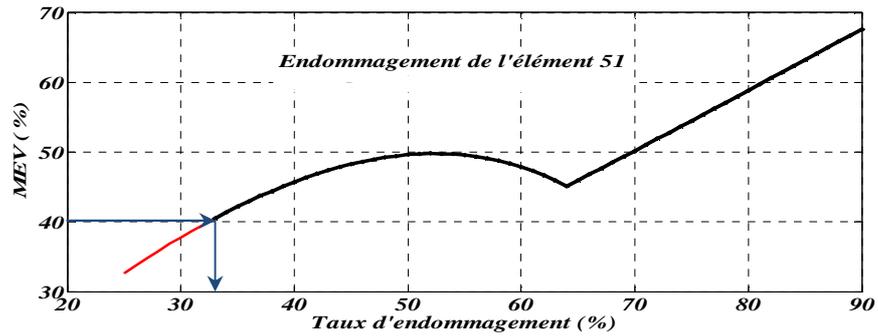


Figure IV.14. MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 51

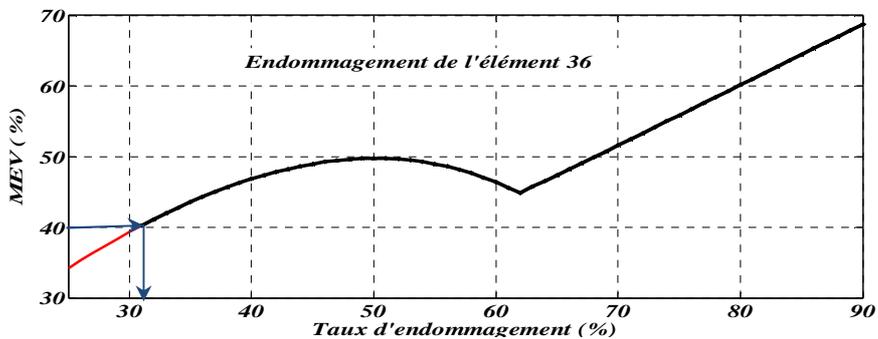


Figure IV.13. MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 36

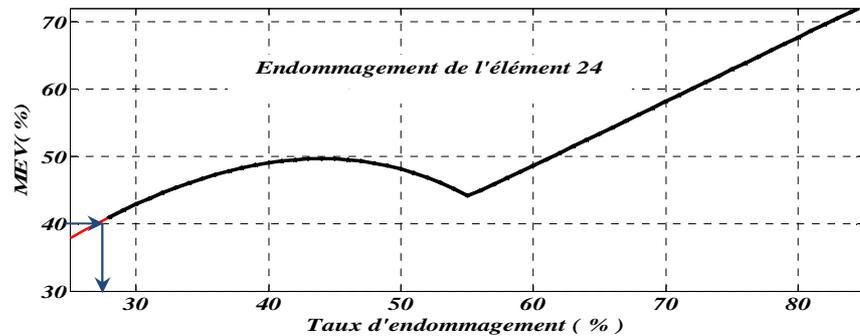


Figure IV.12. MEV-Taux d'endommagement pour l'élément 24

fréquentielle une combinaison des composantes de la force excitatrice qui nous donne la courbe représentative de *MEV* en fonction du taux d'endommagement similaire à celles obtenues précédemment.

Pour toutes les structures le seuil de *MEV* est fixé à 40%. De chaque courbe nous relevons l'ampleur détectable minimum de défaut. Quelques courbes sont présentées dans les figures IV.11-IV.14.

IV.3. Discussion des résultats

Les histogrammes (IV.3) et (IV.9) nous renseignent sur la sensibilité de cet indicateur à la présence d'un défaut en fonction de son lieu d'apparition sur la structure, tout en gardant la même excitation, le même degré de liberté de mesure de la réponse temporelle et une même taille du défaut. Ils nous donnent une information grossière sur les éléments sensibles aux défauts.

Les FIGS (IV.5-IV.8) et (IV.11-IV.14) nous donnent des informations détaillées sur la variation de *MEV* en fonction de la taille du défaut pour chaque cas d'élément endommagé de la structure pris séparément, et nous permettent de situer un seuil de détectabilité pour chacun d'eux.

Nous constatons une correspondance entre les données des histogrammes et celles des figures *MEV-Taux d'endommagement*, c'est-à-dire que les éléments ayant les faibles valeurs de *MEV* sur les histogrammes auront un seuil de détectabilité plus élevé et vice versa. Les correspondances sont :

➤ Cas de la poutre encastree-libre

Sur l'histogramme (IV.3), la valeur de *MEV* pour l'élément 6 est de 11% ; pour l'élément 12, elle est de 21%; pour l'élément 18, elle est de 33%; pour l'élément 38, elle est de 42%. Sur les FIGS (IV.5-IV.8), les plus petits défauts détectables sont : 22% pour l'élément 6; 20% pour l'élément 12; 14% pour l'élément 18 et 12% pour le 38^{ème} élément.

➤ Cas de la poutre doublement appuyée

Sur l'histogramme (IV.9) les valeurs de *MEV* sont : 1% pour l'élément 46; 8% pour l'élément 56 et 10% pour l'élément 24. Sur les Figures (IV.11-IV.14) les plus petits défauts détectables

sont comme suit : 37% pour l'élément 46; 32% pour l'élément 51 et 27% pour le 24^{ème} élément.

Remarque : les pulsations d'excitation utilisées pour l'obtention des histogrammes (IV.3) et (IV.9) et celles utilisées pour l'obtention des autres courbes *MEV-taux d'endommagement* ne sont pas les mêmes; les premières sont arbitrairement choisies au voisinage des pulsations propres de la structure, tandis que les secondes sont adéquatement choisies pour avoir l'allure voulue de la courbe *MEV-taux d'endommagement*.

IV.4. Conclusion

L'application de la méthode sur les deux types de conditions aux limites nous donne des résultats similaires.

La méthode utilisée nous permet d'estimer un seuil de détectabilité d'un défaut quelque soit sa position sur la structure avant de procéder à toute expérimentation pour la détection-localisation de défauts éventuels dans la structure.

La méthode proposée est également destinée à déceler des défauts locaux à leur stade de développement le plus précoce. De plus, elle ne nécessite qu'un seul capteur de mesure.

Bien que le *MEV* est un bon candidat pour la détection de défauts, son application directe pour la localisation n'a pas donné de résultats. C'est pourquoi nous avons opté à une autre méthode pour la localisation d'endommagements, tout en exploitant la réponse de la structure.

Chapitre V

Localisation d'endommagements par la méthode d'analyse en paquets d'ondelettes

V.1. Présentation de la méthode

Dans ce chapitre nous proposons une méthode de localisation de défauts en utilisant toujours l'énergie du signal de la réponse dynamique de la structure.

Soit $y(t)$ le signal de la réponse dynamique de la structure reconstruit, après décomposition par paquets d'ondelettes, selon la formule (III.19). Son énergie totale U est donnée par la formule (IV.3). Les énergies totales des structures, saine et endommagée, sont désignées par U^s et U^e respectivement.

En premier lieu, nous définissons le $VEPO_{nq}$ par la valeur absolue de la variation relative entre l'énergie totale de la structure saine U^s et celle de la structure endommagée U^e , mesuré à partir du nœud nq .

$$VEPO_{nq} (\%) = \frac{|U^s - U^e|}{U^s} = \frac{\left| \sum_{j=1}^{2^k} U_k^{j(s)} - \sum_{j=1}^{2^k} U_k^{j(e)} \right|}{\sum_{j=1}^{2^k} U_k^{j(s)}} \times 100\% \quad (V.1)$$

où U_k^j est l'énergie du $j^{\text{ème}}$ sous-signal dans la décomposition de la réponse de la structure par paquets d'ondelettes au $k^{\text{ème}}$ niveau.

La réponse de la structure est mesurée en un seul *DDL*. Le principe de notre procédure est de calculer le $VEPO_{nq}$ pour deux *DDL* appartenant à un même élément, et de calculer la différence relative entre eux.

Sur les 20 *DDL* qui contient l'élément fini *SI20*, nous avons choisi les deux *DDL* verticaux des extrémités de chaque élément comme deux points de mesure de $VEPO_{nq}$. La mesure prise par le premier *DDL* de l'élément q est affectée par l'indice q et la deuxième par l'indice $q + 1$ (figure V.1)

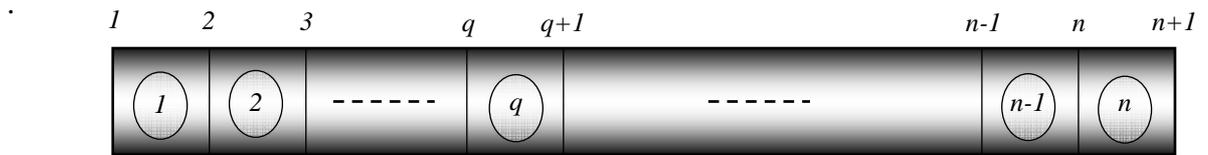


Figure V.1. Système de notation des *DDL* verticaux

Nous calculons alors, pour chaque élément q , un indicateur *IVEPO* (*Indicateur de Variation d'Energétique basée sur les Paquets d'Ondelettes*) défini par :

$$IVEPO(\%) = \left| \frac{VEPO_{nq+1} - VEPO_{nq}}{VEPO_{nq}} \right| \times 100(\%) \quad (V.2)$$

L'application de notre indicateur pour la localisation de défauts sur une structure nécessite autant de capteurs que le nombre d'éléments de discrétisation. Cela, du point de vue pratique, est une surcharge encombrante pour la structure et occasionne des coûts de réalisation onéreux.

Une alternative à ces contraintes est d'utiliser une méthode permettant l'optimisation du nombre de capteurs utilisés et leur positionnement des sur la structure. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode (Annexe A) présentée par H. Amdriambolona pour la sélection des *DDL* capteurs, et pour la reconstitution des *DDL* non observés, nous avons utilisé la méthode d'expansion (Annexe B), présentée par le même auteur.

V.2. Cas tests de simulation numérique

Nous considérons la structure poutre composite en graphite / époxy de la figure V.2 ayant la configuration $[0^\circ/(90^\circ)_2/0^\circ]$. Elle est discrétisée en 40 éléments finis *SI20*, numérotés de 1 à 40 de la gauche vers la droite.

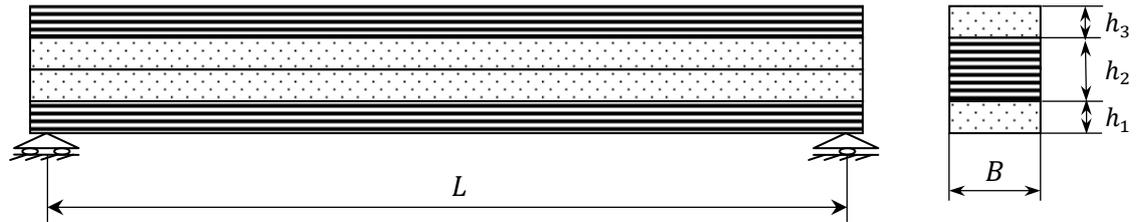


Figure V.2. Poutre stratifiée $[0^\circ/(90^\circ)_2/0^\circ]$ doublement appuyée

Les caractéristiques mécaniques du matériau de la poutre sont données par :

$$E_1 = 144.8 \text{ GPa}; E_2 = 9.65 \text{ GPa}; G_{13} = 4.14 \text{ GPa}; G_{23} = 3.45 \text{ GPa}; \mu_{12} = 0.25; \rho = 1390 \text{ kg/m}^3.$$

Sa géométrie est caractérisée par :

$$L = 15 \text{ m}, h_1 = h_3 = 0.25 \text{ m}; h_2 = 0.5 \text{ m}; B = 1 \text{ m}.$$

Dans les tests de simulation numérique qui suivent, nous examinons la sensibilité de l'indicateur dans le cas de la présence de deux et trois défauts.

Dans tous les tests, nous avons adopté la même démarche :

- la simulation de l'endommagement d'un élément est réalisée par une réduction de 20% du module d'Young longitudinal de sa deuxième couche (E_2) et de 5% de son module de cisaillement transversal (G_{23}).
- Nous avons sollicité toutes les structures dans la même position (excitation verticale au 20^{ème} nœud à partir de l'extrémité droite), avec une force mono-excitatrice de la forme : $F_e(t) = A_0(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_3 t))$. La réponse dynamique est calculée pour les deux structures, saine et endommagée, par la formule (I.40).
- Sur les 40 DDL verticaux de translation, nous avons sélectionné 23 capteurs. Nous avons ajouté du bruit aléatoire pour simuler la mesure aussi bien sur la structure saine que celle endommagée selon le modèle : $Y_{bt} = Y(1 + gn \times rand)$.
- Une fois obtenues, les réponses des structures saine et endommagée sont décomposées par paquets d'ondelette de Daubechies d'ordre 4 «db4» au 5^{ème} niveau. Ensuite, nous calculons le IVEPO pour chaque élément et nous représentons les courbes IVEPO-Numéro de l'élément de chaque test.

V.2.1. Cas de deux endommagements

Nous examinons trois structures contenant chacune deux éléments endommagés; La première structure est endommagée en ses éléments 23 et 24 ; la deuxième aux éléments 11 et 33 et la troisième comporte les éléments endommagés 6 et 37. Les histogrammes représentatifs sont donnés sur les figures suivantes :

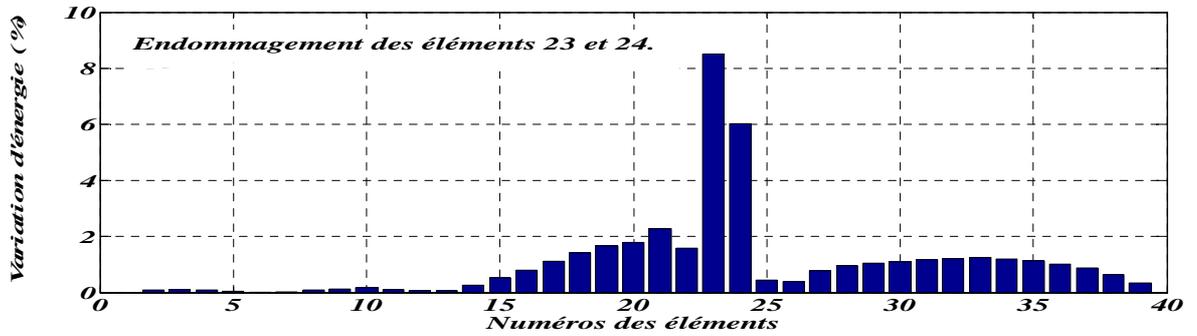


Figure V.3. Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 23 et 24

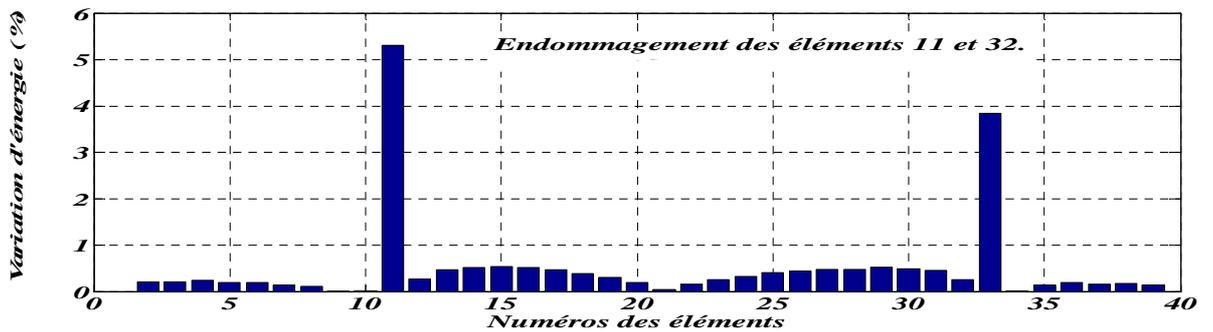


Figure V.4. Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 11 et 32

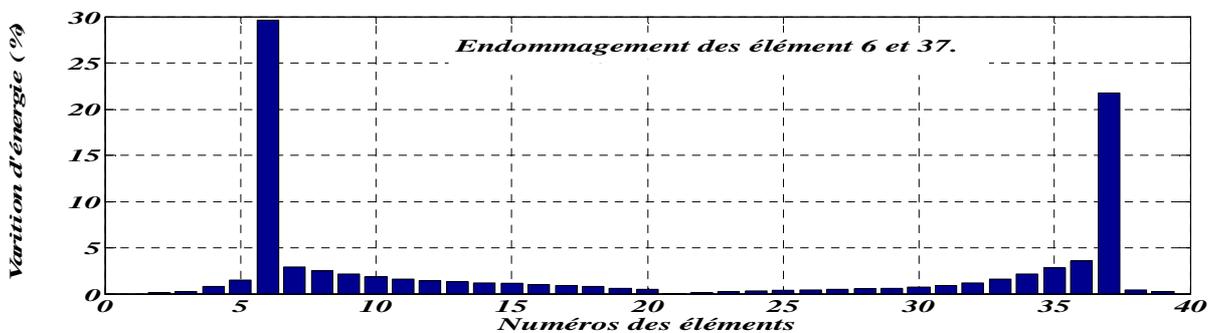


Figure V.5. Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 6 et 37

V.2.2. Cas de trois endommagements

De même que pour le premier cas, nous simulons trois structures endommagées, mais cette fois avec trois endommagements chacune. Pour la première, elle est endommagée en ses éléments 10, 13 et 22; la deuxième, aux éléments 7, 10 et 35 et enfin, sur la troisième, nous simulons l'endommagement du 11^{ème}, du 14^{ème} et du 32^{ème} élément.

Les résultats obtenus de ces tests sont représentés sur les figures ci-dessous.

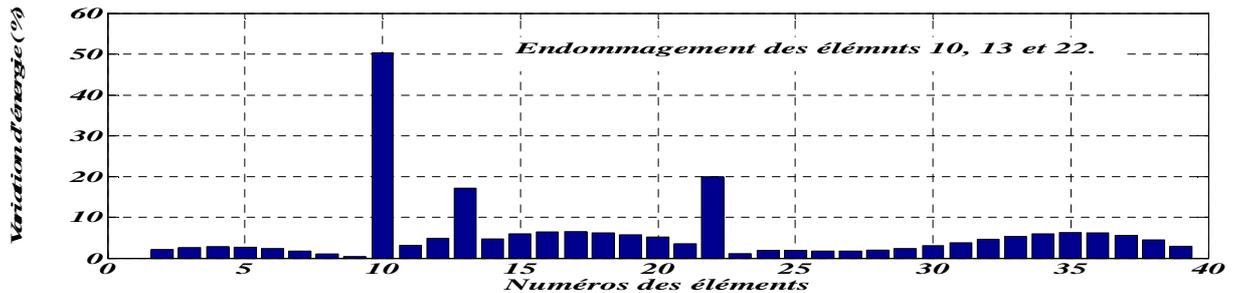


Figure V.6. Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 10, 13 et 22

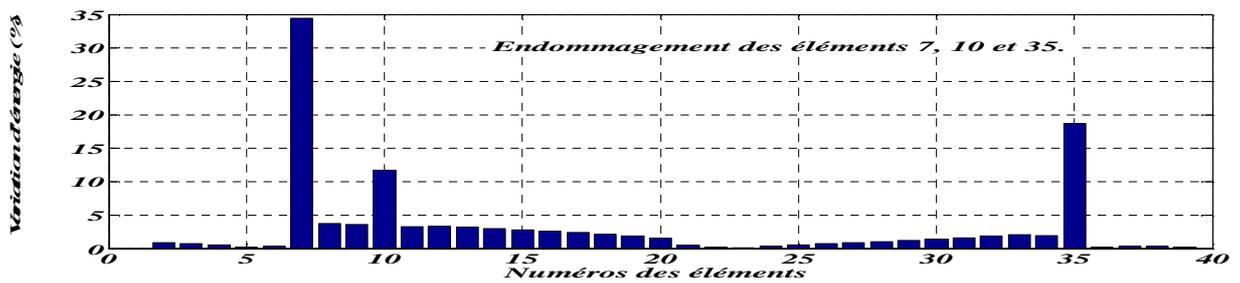


Figure V.7. Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 7, 10 et 35

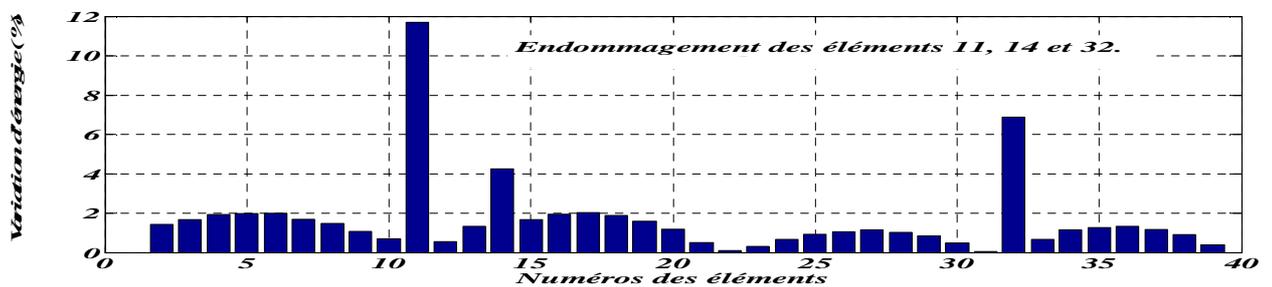


Figure V.8. Histogramme IVEPO-Numéro de l'élément dans le cas de l'endommagement des éléments 11, 14 et 32

V.3 Conclusion

A partir des graphes ci-dessus, nous pouvons tirer quelques remarques :

La localisation se constate par le fait que les éléments affectés ont toujours des valeurs de *IVEPO* plus élevés par rapport aux éléments non affectés. Notamment, cette supériorité est nettement apparente dans le cas de deux endommagements.

Quoique la modélisation de l'endommagement soit faite par la réduction de la rigidité de l'élément concerné, d'un même taux, l'indicateur d'endommagement ne manifeste pas une même valeur pour ces éléments. Cela dit que l'indicateur est sensible à l'endroit de la survenue du défaut.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons présenté deux méthodes utilisant l'énergie du signal décomposé par paquets d'ondelettes pour l'identification de défauts dans les structures. Les méthodes ont été validées par des tests de simulation numérique, appliqués sur des structures poutres composites stratifiées, discrétisées en un certain nombre d'éléments finis.

La première méthode est développée permet de définir a priori le seuil de détectabilité de défaut qui serait présent en tout élément de la structure. La méthode est capable de déceler les défauts locaux dans leur stade avancé de développement sans autant utiliser un nombre superflu de capteurs. Toutefois, il est à noter que cette méthode est appliquée dans des conditions idéales, sur le modèle éléments finis, sans tenir compte de l'effet de l'amortissement et en négligeant les incertitudes dues aux mesures et à l'environnement.

Quant à la deuxième méthode, elle concerne la détection-localisation d'un ou plusieurs défauts. Deux difficultés d'ordre pratique ont été introduites dans la simulation afin de mieux se rapprocher des conditions réelles de tests : la première est l'optimisation du maillage capteur ainsi que la reconstitution des *DDL* non mesurés et la seconde concerne l'introduction du bruit de mesure. L'efficacité de la méthode a été testée dans le cas des poutres composites avec respectivement deux et trois endommagements. Les résultats de tests montrent que les éléments endommagés sont discernés sans aucune ambiguïté.

La méthode est en cours de perfectionnement pour permettre de déterminer l'ampleur de chacun des défauts.

Références bibliographiques

- [1] M. M. F. Yuen. *A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever*. Journal of sound and vibration (1985) 103(3), 303-310.
- [2] Zhong-Xian Li, Xiao-Ming Yang, *Damage identification for beams using ANN based of statistical property of structural responses*, computers and structures 86 (2008) 64-71.
- [3] Cary Smith, Kajetan M. Akujuobi, Phil Hamry, Kurt Kloesel, *An approach to vibration analysis using wavelets in an application of aircraft health monitoring*, Mechanical systems and signal processing 21 (2007) 1255-1272.
- [4] J. M. MACHORO-LOPEZ, A. BELINO, S. MARCHESIELLO, L. GARIBALDI, *Wavelets-based damage localization on beams under the influence of moving loads*, 3^{ième} colloque “Analyse vibratoire Expérimentale” Blois, novembre 2012.
- [5] LING-Tang-hua, LI Xi-bing, DAI Ta-gen, PENG Zhen-ben. *Features of energy distribution for blast vibration signals based on wavelet packet decomposition*. J. CENT. SOUTH UNIV. TECHNOL. 1005-9784(2005)S1-0135-06.
- [6] Z. Wei, L. H. Yam. L. Cheng. *Detection of internal delamination in multi-layer composites using wavelet packets combined with modal parameter analysis*. [J] composite structures 64 (2004) 377-387.
- [7] Y. J. Yan, L. H. Yam. *Online detection of crack damage in composite plates using embedded piezoelectric actuators/sensors and wavelet analysis*. [J] composite structures 58 (2002) 29-38.
- [8] Y. J. Yan, H.N. Hao, L. H. Yam. *Vibration-based construction and extraction of structural damage feature index*. International Journal of Solids and Structures 41 (2004) 6661–6676.

- [9] Y. J. Yan, L. H. Yam. *Detection of delamination damage in composite plates using energy spectrum of structural dynamic responses decomposed by wavelet analysis*. [J] computers and structures 82 (2004) 347-358.
- [10] Jian-Gang Han, Wei-Xin Ren, Zeng-Shou Sun. *Wavelet packet based damage identification of beam structures*. International journal of solids and structures 42 (2005) 6610-6627.
- [11] Jean-Marie Berthlot. *Dynamics of composite materials and structures*. Le Mans, Janvier 2008.
- [12] Jean-Marie Berthlot. *Mécanique des matériaux et structures composites*. Le Mans, Novembre 2010.
- [13] Rolands Rikards. *Analysis of laminated structures course of lectures*. Riga T. University 1999.
- [14] Alexandre Ern. *Aide mémoire Elément finis*. Dunod, Paris, 2005.
- [15] Abdelkrim Lallouani. *Débruitage d'un signal de la parole corrompu par un bruit coloré utilisant la transformée en ondelettes et implantation sur un processeur de traitement numérique des signaux*. Thèse de Docteur, Ecole de technologie supérieure. Montreal, Septembre 2004.
- [16] A. Cohen. *Ondelettes et traitement numérique du signal*. Edition Masson, Paris 1992.
- [17] Thien-Phu Le. *Auscultation dynamique des structures à l'aide de l'analyse continue en ondelettes*. Thèse de Docteur, Ecole national des ponts et chaussées. Novembre 2003.
- [18] Hakan Gokdag, Osman Kopmaz. *A new damage detection approach for beam-type structures based on the combination of continuous and discrete wavelet transforms*. Journal of Sound and Vibration 324 (2009) 1158–1180.
- [19] A.V. Ovanesova, L.E. Suarez. *Applications of wavelet transforms to damage detection in frame structures*. Engineering Structures 26 (2004) 39–49.
- [20] Xue-Lin Peng, Hong Hao, Zhong-Xian Li. *Application of wavelet packet transform in subsea pipeline bedding condition assessment*. Engineering Structures 39 (2012) 50–65.
- [21] H. Amdriambolona. *Optimisation des essais de recalage des modèles structuraux*. thèse de doctorat en sciences pour l'ingénieur, université de Franche-comté, Basançon, 1990.
- [22] Francis Cottet, *Aide mémoire Traitement du signal*, Dunod, Paris, 2000.
- [23] André Quinquis. *le traitement du signal sous Matlab :pratiques et applications*. Edition Hermes, Octobre 2007.

Annexe A

Méthode de sélection des *DDL* à mesurer (capteurs) et reconstitution des *DDL* non mesurés

Le principe de la méthode consiste à sélectionner un par un les *DDL* de manière à construire pas à pas une matrice $Y_C^{(m)}$ de rang maximal et de conditionnement minimal. Les *DDL* non instrumentales (*DDL* intérieurs, *DDL* de rotations) ainsi les *DDL* à faibles déplacements (pour les np modes choisis) ou associés à des régions spatialement non significatives sont éliminés avant la sélection.

A défaut d'un ou plusieurs *DDL* imposé (s), le premier *DDL* est sélectionné parmi les *DDL* potentiels par la condition :

$$\| Z_{1,j}^{(m)} \| = \max_j \| Z_j^{(m)} \| \quad j = 1:L \quad (\text{A.1})$$

Où : $Z_j^{(m)} \in \mathbb{R}^{1,np}$ est la ligne de la sous-base modale $Y_C^{(m)} \in \mathbb{R}^{L,np}$ correspondant au $j^{\text{ème}}$ *DDL* potentiel et L : Nombre de *DDL* potentiels.

Nous évaluons le nombre de conditionnement et le rang de toutes les matrices définies comme suit :

$$Z_{2,j}^{(m)} = [Z_{1,j}^{(m)} | Z_j^{(m)}]^T \in \mathbb{R}^{2,np}; \quad j = 1:L \text{ et } j \neq (1,j). \quad (\text{A.2})$$

Où : $(1,j)$ désigne le numéro du *DDL* sélectionné après la première itération.

Le deuxième *DDL* j sélectionné est celui maximisant le rang de la matrice $Z_2^{(m)}$ et minimisant son nombre de conditionnement. La même procédure est répétée pour sélectionner les autres *DDL*. En effet, pour sélectionner le $p^{\text{ème}}$ *DDL*, nous conservons les *DDL* déjà sélectionnés et nous construisons la matrice $Z_{p,j}^{(m)}$ définie par :

$$Z_{p,j}^{(m)} = [Z_{p,j}^{(m)} | Z_j^{(m)}]^T \in \mathbb{R}^{p,np}; j = 1: L \text{ et } j \neq (p-1, j). \quad (\text{A.3})$$

Où $(p-1, j)$: dénote les numéros des *DDL* sélectionnés après la $(p-1)^{\text{ème}}$ itération.

Le $p^{\text{ème}}$ *DDL* sélectionné est celui maximisant le rang de la matrice $Z_{p,j}^{(m)}$ et minimisant son nombre de conditionnement.

L'évolution du rang et du conditionnement des matrices $Z_{p,j}^{(m)}$ en fonction du nombre de *DDL* p sélectionnés est donné sur la figure A.1.

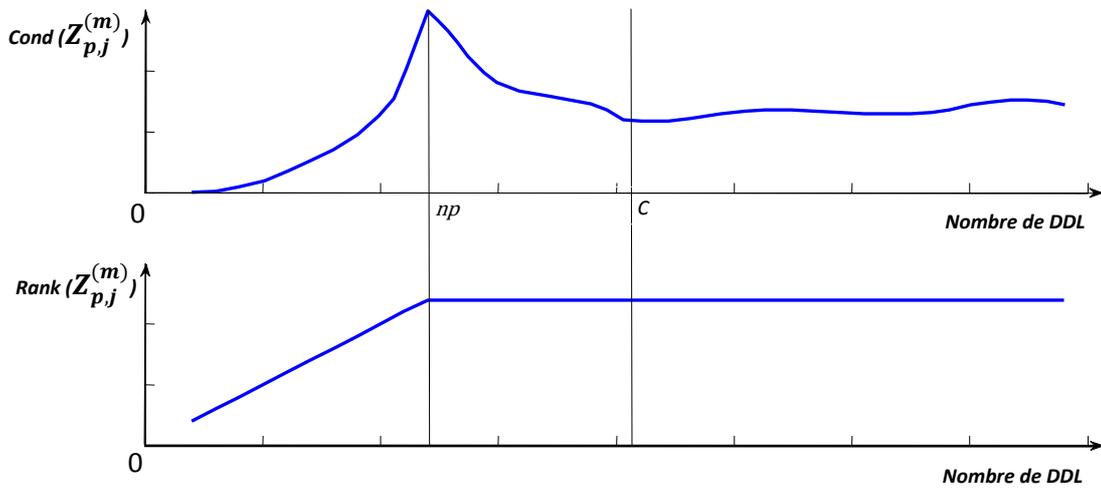


Figure A.1. le Conditionnement et le rang de la matrice $Y_C^{(m)}$ en fonction du nombre de *DDL* choisis

Le nombre de *DDL* optimum C est celui pour le quel le nombre de conditionnement passe par un minimum local. Cette détermination de C permet simultanément d'obtenir une matrice de rang le plus élevé et de nombre de conditionnement le plus faible.

Méthode de reconstitution des *DDL* non mesurés

La méthode d'expansion retenue utilise une base modale du modèle éléments finis. Nous admettons que les déplacements modaux de la structure peuvent être représentés par une combinaison linéaire de déplacements modaux de même nature du modèle éléments finis :

$$y_{yV}^{(m)} \approx Y_{npY}^{(FE)} C_{yV} \quad (\text{A.4})$$

Le vecteur de projection $C_{y\nu} \in \mathbb{C}^{np,1}$ est évalué, au sens des moindres carrés, à partir des *DDL* observés :

$$C_{y\nu} = [Y_{Cy}^{(FE)}]^\dagger y_{Cy\nu}^{(m)} = [Y_{Cy}^{(FE)T} Y_{Cy}^{(FE)}]^{-1} Y_{Cy}^{(FE)T} y_{Cy\nu}^{(m)} \quad (\text{A.5})$$

Où :

$y_{Cy\nu}^{(m)} \in \mathbb{R}^{C,1}$ est le vecteur propre de la structure correspondant aux DDL de déplacements observés dans la direction y .

$Y_{Cy}^{(FE)} \in \mathbb{R}^{C,np}$ est la sous matrice modale du modèle éléments finis correspondant aux DDL de déplacements observés dans la direction y .

Les déplacements reconstitués de la structure relatifs à l'ensemble des DDL, se présente sous la forme :

$$y_{y\nu}^{(m)} = Y_{np}^{(FE)} C_{y\nu}; y_{y\nu}^{(m)} \in \mathbb{C}^{N,1} \quad (\text{A.7})$$

avec $\nu = 1 : m$ (m est le nombre de vecteurs propres mesurés).

Annexe B

Modèle de bruit ajouté

Du bruit aléatoire est e ajouté à la mesure prise de la structure endommagée selon le modèle.

$$Y_{bt} = Y(1 + gn \times rand). \quad (\text{B.1})$$

où : Y_{bt} le signal bruité ; Y le signal sans bruit ;

gn est le taux de bruit ; $rand$ est une valeur aléatoire comprise entre 0 et 1.