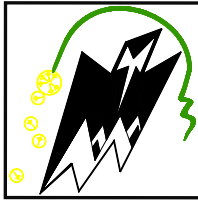


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou  
Faculté du Génie de la Construction  
Département de Génie Mécanique



## Thème

Analyse statique et cinématique d'un  
réducteur épicycloïdal plan

# Mémoire de fin d'études

*Présenté et soutenu publiquement le 26 octobre 2016*

en vue de l'obtention

du diplôme de *Master Académique en Génie Mécanique*

Option : *Construction mécanique*

Proposé et dirigé par :

*M<sup>r</sup> ZIANI Hocine*

Réalisé par :

**BOUDJAHROUNE MADJID**

PROMOTION 2015/2016

# *Remerciements*



*Je tiens à remercier notre promoteur Monsieur **ZIANI HOCINE** pour son aide, sa disponibilité et les conseils qu'il n'a cessé de nous prodiguer pour l'aboutissement de ce modeste travail, qu'il trouve ici mon profonde gratitude et toute mes reconnaissance et mon respect.*

*Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner ce travail et de l'enrichir par leurs propositions.*

*Enfin à toutes et tout ceux qui ont contribué au déroulement de ce travail.*

*Que tout les enseignants ayant contribués et participés à notre formation trouvent ici notre profond respect.*

*Madjid*

# *Dédicaces*



*Ce travail, et bien au-delà, je le dois à mes très chers parents qui m'ont fourni au quotidien un soutien et une confiance sans faille et de ce fait, je ne saurais exprimer ma gratitude seulement par des mots. Que dieu vous protège et vous garde pour nous.*

*A mes sœurs*

*A mes frères*

*A la mémoire de mes grands parents*

*A mes beaux frères*

*A mes neveux*

*A mes nièces*

*Enfin a tout(e)s mes ami(e)s et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin*

# SOMMAIRE

Introduction générale .....	01
<b>Chapitre I : Généralités sur les mécanismes</b>	
<b>I.1 Introduction.....</b>	<b>03</b>
<b>I.2 Définition d'un mécanisme.....</b>	<b>03</b>
<b>I.3 Notion de degré mobilité d'un mécanisme.....</b>	<b>04</b>
<b>I.4 Modélisation.....</b>	<b>05</b>
<b>I.4.1 Modélisation d'un mécanisme.....</b>	<b>05</b>
<b>I.4.2 Modélisation des pièces mécaniques.....</b>	<b>06</b>
<b>I.4.3 Modélisations des contacts.....</b>	<b>06</b>
<b>I.5 Chaîne cinématique (ou graphe des liaisons).....</b>	<b>06</b>
<b>I.6 Schéma cinématique.....</b>	<b>07</b>
<b>I.7 Méthode pour représenter un schéma cinématique.....</b>	<b>08</b>
<b>I.8 Notions de degrés d'hyper statisme (ou d'hyperstaticité) d'un mécanisme.....</b>	<b>09</b>
<b>I.8.1 Pour une chaîne fermée.....</b>	<b>09</b>
<b>I.8.2 Pour une chaîne complexe.....</b>	<b>10</b>
<b>I.9 Torseur.....</b>	<b>10</b>
<b>I.9.1 Quelques opérations sur les torseurs.....</b>	<b>10</b>
<b>I.9.2 Torseur statique.....</b>	<b>12</b>
<b>I.9.3 Torseur cinématique.....</b>	<b>13</b>
<b>I.10 Liaisons.....</b>	<b>14</b>
<b>I.10.1 Liaisons parfaites.....</b>	<b>14</b>
<b>I.10.1.1 Liaison ponctuelle.....</b>	<b>14</b>
<b>I.10.1.2 Liaison linéaire rectiligne.....</b>	<b>16</b>

I.10.1.3 Liaison linéaire annulaire.....	17
I.10.1.4 Liaison rotule.....	18
I.10.1.5 Liaison appui plan.....	19
I.10.1.6 Liaison pivot glissant.....	20
I.10.1.7 Liaison pivot.....	21
I.10.1.8 Liaison glissière.....	22
I.10.1.9 Liaison hélicoïdale.....	23
I.10.1.10 Liaison encastrement.....	24
I.11 Les liaisons normalisées entre solides.....	25
I.12 Conclusion.....	25
 Chapitre II : Engrenages et réducteurs de vitesses	
II.1 Les engrenages.....	27
II.1.1 Introduction.....	27
II.1.2 Définition d'un engrenage.....	27
II.1.3 Différentes types d'engrenages.....	28
II.1.3.1 Les engrenages coniques.....	29
II.1.3.2. Les engrenages gauches (à vis sans fin).....	29
II.1.3.3 Les engrenages à axes parallèles à denture droite ou à denture hélicoïdal.....	29
II.1.4. Fonctionnement des engrenages.....	29
II.2 Les réducteurs de vitesses.....	30
II.2.1 Définition.....	30
II.2.2 Rôle d'un réducteur de vitesse.....	30
II.2.3 Quelque exemple de réducteur.....	31
II.2.3.1 Réducteur élémentaires.....	31

II.2.3.2 Réducteur à engrenage cylindrique extérieur.....	32
II.2.3.3 Réducteur à engrenage cylindrique intérieur.....	33
II.2.3.4 Réducteur à engrenage conique.....	33
II.2.3.5 Réducteur à roue et vis sans fin.....	34
II.2.3.6 Réducteur élémentaires dérivés.....	34
II.2.3.7 Réducteur à roue intermédiaire (ou à roue parasite).....	35
II.2.3.8 Réducteur coaxial à arbre intermédiaire.....	35
II.2.3.9 les réducteurs (train) épicycloïdal.....	36
II.2.4 Différents types de trains épicycloïdaux.....	37
II.2.4.1 les types des trains épicycloïdaux plans.....	38
II.2.4.1.1 Formules de Willis.....	38
II.2.4.1.2 Trains épicycloïdaux de types 2,3 et 4.....	40
II.2.4.2 Conditions de montage des trains épicycloïdaux.....	41
II.2.4.3 Condition de non contact des satellites (condition 4).....	42
II.2.4.4 Marge permise sur la valeur de $k$ d'un train épicycloïdale de type 1.....	43
II.3	
Conclusion.....	43

### Chapitre III : Analyse statique et cinématique de réducteur épicycloïdal plan

III.1 Introduction.....	42
III.2. Analyse de réducteur épicycloïdal.....	42
III.2.1 Identification des liaisons.....	43
III.3. Analyse statique de réducteur.....	44
III.3.1 Analyse du système linéaire statique et résultats.....	47

<b>III.4. Analyse cinématique du réducteur.....</b>	<b>52</b>
<b>III.4.1 Définition des cycles indépendants.....</b>	<b>52</b>
<b>III.4.2 Analyse du système linéaire cinématique et résultats.....</b>	<b>55</b>
<b>III.5. Conclusion.....</b>	<b>59</b>

# Liste des figures

N° de la figure	Nomination de la figure	N° de page
-----------------	-------------------------	------------

## Chapitre I : Généralités sur les mécanismes

<b>Fig I.1</b>	: comportement globale d'un mécanisme.....	<b>04</b>
<b>Fig I.2</b>	: schéma représentatif des différentes étapes d'étudié un mécanisme.....	<b>05</b>
<b>Fig I.3</b>	: les chaînes cinématiques ou graphe des liaisons.....	<b>07</b>
<b>Fig I.4</b>	: Image du torseur cinématique.....	<b>13</b>
<b>Fig I.5</b>	: liaison ponctuelle représentée par le contact d'une sphère ou d'un cône sur un plan.....	<b>15</b>
<b>Fig I.6</b>	: exemple de liaison ponctuelle d'une roulette sphérique rigide sur le sol.....	<b>15</b>
<b>Fig I.7</b>	: liaison linéaire rectiligne. Le contact entre les deux solides est une droite.....	<b>16</b>
<b>Fig I.8</b>	: exemple de liaison rectiligne : un roulement à rouleaux.....	<b>16</b>
<b>Fig I.9</b>	: Liaison linéaire annulaire. Le contact entre les deux solides est un cercle.....	<b>17</b>
<b>Fig I.10</b>	: Exemple de liaison annulaire : un roulement à billes.....	<b>17</b>
<b>Fig I.11</b>	: Liaison rotule. Le contact entre les deux solides est une sphère.....	<b>18</b>
<b>Fig I.12</b>	: Exemple de liaison rotule : la liaison châssis/roue d'une voiture.....	<b>18</b>
<b>Fig I.13</b>	: Liaison plan sur plan. Le contact entre les deux solides est un plan.....	<b>19</b>
<b>Fig I.14</b>	: Exemple de liaison plan sur plan : les plaquettes de frein d'une voiture sur le disque lié à la roue.....	<b>19</b>
<b>Fig I.15</b>	: Liaison pivot glissant. Le contact entre les deux solides est un cylindre à base circulaire.....	<b>20</b>
<b>Fig I.16</b>	: Exemple de liaison pivot glissant : la poupée mobile de tour.....	<b>20</b>
<b>Fig I.17</b>	: liaison pivot. Le contact entre les deux solides est un cylindre.....	<b>21</b>
<b>Fig I.18</b>	: exemple de liaison pivot : une charnière de port.....	<b>21</b>
<b>Fig I.19</b>	: Liaison glissière. Le contact entre les deux solides est un parallélépipède.....	<b>22</b>
<b>Fig I.20</b>	: Exemple de liaison glissière : un téléphone portable dont la partie supérieur coulisse sur la partie inférieure.....	<b>22</b>
<b>Fig I.21</b>	: Liaison hélicoïdal.....	<b>23</b>
<b>Fig I.22</b>	: Exemple de liaison hélicoïdal : la vis d'un serre-joint.....	<b>23</b>
<b>Fig I.23</b>	: Liaison encastrement.....	<b>25</b>
<b>Fig I.24</b>	: exemple de liaison encastrement : les freins non ABS).....	<b>25</b>

## Chapitre II : Engrenages et réducteurs de vitesses

<b>Fig II.1</b>	: Roue, pignon et couronne.....	<b>28</b>
-----------------	---------------------------------	-----------

<b>Fig II.2</b> : Couple de dents en contact.....	<b>30</b>
<b>Fig II.3</b> : Réducteur élémentaire.....	<b>32</b>
<b>Fig II.4</b> : réducteur à engrenage cylindrique extérieur.....	<b>32</b>
<b>Fig II.5</b> : réducteur à engrenage cylindrique intérieur.....	<b>33</b>
<b>Fig II.6</b> : réducteur à engrenage conique.....	<b>34</b>
<b>Fig II.7</b> : Réducteur à roue intermédiaire (ou roue parasite).....	<b>35</b>
<b>Fig II.8</b> : Réducteur coaxial à arbre intermédiaire (engrenage extérieur).....	<b>36</b>
<b>Fig II.9</b> : Des trains épicycloïdaux.....	<b>36</b>
<b>Fig II.10</b> : trains épicycloïdal plan.....	<b>37</b>
<b>Fig II.11</b> : trains épicycloïdal sphérique.....	<b>37</b>
<b>Fig II.12</b> : types des trains épicycloïdaux.....	<b>38</b>
<b>Fig II.13</b> : présentation graphique des modes de fonctionnement d'un train épicycloïdal.....	<b>40</b>
<b>Fig II.14</b> : condition 1 et 2.....	<b>41</b>
<b>Fig II.15</b> : haricot d'un train.....	<b>42</b>

### **Chapitre III : Analyse statique et cinématique de réducteur épicycloïdal plan**

<b>Fug III.1</b> : Réducteur épicycloïdal plan de type I .....	<b>42</b>
<b>Fig III.2</b> : le schéma cinématique de réducteur épicycloïdal plan.....	<b>44</b>
<b>Fig III.3</b> : la chaîne cinématique de réducteur épicycloïdal plan.....	<b>44</b>
<b>Fig III.4</b> : Effort de contact roues du train épicycloïdal plan.....	<b>45</b>
<b>Fig III.5</b> : Les deux cycles indépendants (a) et (b) de la chaîne cinématique.....	<b>54</b>

## NOMENCLATURE ET SYMBOLES

$m_C$  : mobilité cinématique ;

$m_U$  : mobilité utile ;

$m_I$  : mobilité interne ;

$h$  : degré hyperstatique ;

$N_S$  : nombre d'inconnues statiques ;

$r_S$  : nombre d'équations scalaires indépendantes (rang de la matrice statique) ;

$N_C$  : nombre d'inconnues cinématiques ;

$R_C$  : nombre d'équations scalaire indépendantes (rang de la matrice cinématique) ;

$\gamma$  : nombre cyclomatique ;

$L$  : nombre d'arcs ;

$P$  : nombre de sommets ;

$\tau$  : Torseur ;

$\tau_S$  : Torseur statique ;

$\tau_C$  : Torseur cinématique ;

$\bar{S}$  : La résultante des forces de torseur statique (N) ;

$\overrightarrow{M}_p$  : Le moment en point p (N.m) ;

$A$  : automoment de torseur  $\tau$  ;

$\omega$  : Vecteur vitesse angulaires (rad.S<sup>-1</sup>) ;

$V$  : vecteur vitesse linéaire (m.s<sup>-1</sup>) ;

$W$  : puissance (watt) ;

$S_1$  : solide 1 ;

$S_2$  : solide 2 ;

$\eta$  : Rendement ;

$N$  : vitesse de rotation en (tour/ min) ;

$C$  : couple de rotation (N.m) ;

$i$  : Rapport de transmission ;

$a_0$  : entraxe linéaire (mm);

$\Sigma_0$  : Position angulaire ;

$d_1$  : diamètre du pignon (mm) ;

$d_2$  : diamètre de la roue dentée (mm) ;

$u$  : rapport de réduction ;

$R_0$  : longueur de génératrice d'un engrenage conique (mm) ;

$\delta_1, \delta_1$  : Angles primitifs de cônes (rad) ;

$\beta_0$  : Angle d'hélice en (rad) ;

$m$  : module (mm) ;

$Z$  : nombre de dent ;

$l$  : longueur en (mm) ;

$r$  : rayon en (mm).

# **Introduction générale**

## Introduction générale

Les engrenages sont largement utilisés dans l'industrie mécanique comme moyen de transmission de puissance d'un arbre vers un autre. Ils sont obtenus par taillage sur des machines-outils spéciales soit par reproduction au bien par génération. La précision d'exécution dépend essentiellement de la valeur et de la précision du rapport des trains d'engrenages introduits dans la chaîne cinématique qui lie la rotation de la fraise et la rotation de la broche porte-pièce dans le cas de fraisage.

Les engrenages sont utilisés comme moyen de transmission de puissance dans les boîtes de vitesses d'avances des machines où ils réalisent les vitesses, les couples et les sens de rotation des éléments des machines. Ces transmissions peuvent être simples ou composées. Ces engrenages doivent réaliser des rapports de transmission qui sont égaux aux rapports des nombres de dents des roues qui constituent la chaîne cinématique. Pour en arriver là il faut calculer les nombres de dents des roues dentées qui doivent réaliser les différents rapports de transmission

Pour résoudre ce problème nous avons divisé notre travail en trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous avons procédé à l'explicitation des mécanismes et leurs différentes compositions ; Afin de mieux comprendre le but de ce travail nous l'avons réparti comme suit :

- ✓ Modélisation d'un mécanisme.
- ✓ Torseur.
- ✓ Liaisons.

A cet effet, dans le deuxième chapitre nous avons cité les engrenages ainsi que leurs types, puis les types de réducteur de vitesse. Nous avons apporté plus de détail sur les réducteur épicycloïdales car ils représentent l'objet de notre étude.

Dans le troisième chapitre, nous avons exposé la procédure d'analyse statique et cinématique de réducteur épicycloïdal qui réalisent une transmission composée de la chaîne cinématique. Nous avons commencé par établir le programme de calcul théorique sur des caractéristiques techniques d'une boîte de réducteur mise à l'étude. Cela nous permet de construire un système matriciel global regroupant les différentes équations d'équilibre du réducteur à partir de laquelle on trouve les efforts de chaque liaison qui vont nous permettre d'établir les relations entre les paramètres d'entrée – sortie. La suite est une analyse cinématique dans laquelle nous avons appliqué la loi de composition des torseurs cinématiques de chaque cycle ; Les équations résultantes seront regroupées sous forme matricielle, la résolution de ce dernier permet de trouver les degrés de mobilité (utile et interne) ainsi que la loi d'entrée-sortie cinématique du réducteur.

# **Chapitre I**

## **Généralités sur les mécanismes**

## **I.1. Introduction**

La mécanique des machines est une science qui comprend deux disciplines. La première est la « théorie des mécanismes », la seconde, la « théorie des machines », sachant la théorie des mécanismes étudie les propriétés des différents mécanismes usuels employés dans les machines, les appareils et les dispositifs les plus variés. C'est la science qui étudie la structure, la cinématique et la dynamique des mécanismes en liaison avec leur analyse et leur synthèse, ainsi la théorie des machines s'attache à considérer l'ensemble des mécanismes associés formant la machine. Cet ensemble peut être une machine isolée, un groupe-machines, ou, enfin, un complexe de machines à action automatique. Lors de la conception d'une machine, il est nécessaire de s'assurer que chaque mécanisme envisagé donne bien les mobilités souhaitées. L'étude du mécanisme permet également d'obtenir des informations précieuses pour la conception des liaisons.

## **I.2. Définition d'un mécanisme**

On appelle le mécanisme tout composant qui transmet de l'énergie mécanique sous forme cinétique comme le montre la figure I.1 .

Un mécanisme est un agencement de pièces mécanique reliées entre elles et conçu en vue de réaliser une fonction déterminée, un mécanisme est généralement conçu pour établir une relation particulière entre des informations d'entrée qui sont des informations exercées par le milieu extérieur sur le mécanisme, et des informations de sortie qui sont des informations exercées par le système sur le milieu extérieur. La fonction d'un mécanisme est caractérisée par la permanence des mouvements originaux des pièces entre elles. Une structure, comme une charpente, dont les pièces n'ont aucuns mouvements relatifs, n'est pas un mécanisme [1].

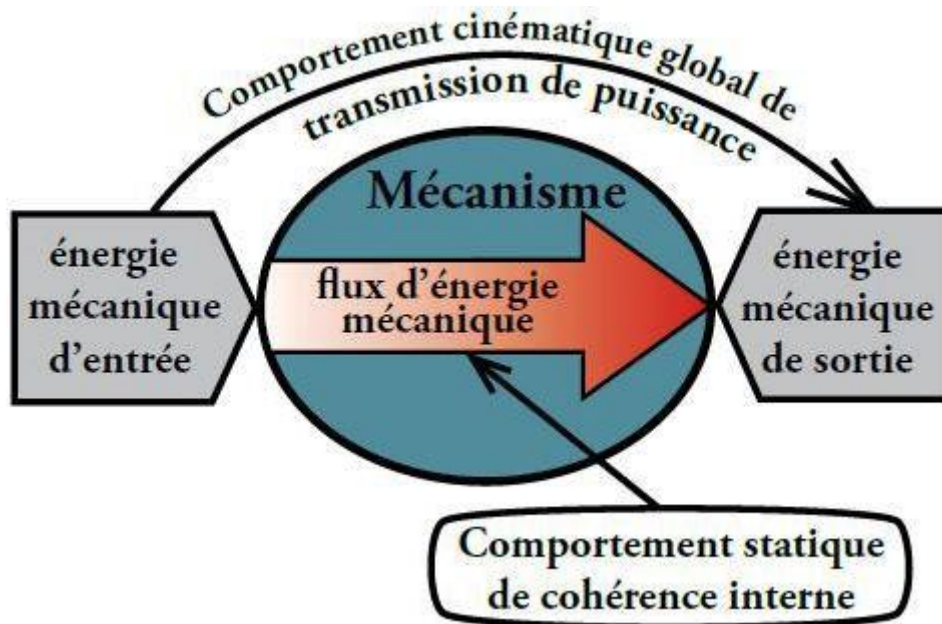


Figure (I.1) : comportement globale d'un mécanisme

### La théorie des mécanismes a donc pour but :

- ✓ Dans un contexte d'analyse, de vérifier l'aptitude d'un mécanisme existant à réaliser la loi entrée/sortie recherchée, et de mettre en évidence les conditions géométriques dont dépend éventuellement le bon fonctionnement de l'appareil.
- ✓ Dans un contexte de conception, de rechercher des dispositions constructives qui réalisent la loi entrée/sortie souhaitée d'une part, et pour lesquelles on est certain de pouvoir calculer les actions mécaniques internes en vue du dimensionnement, des organes mécaniques d'autre part.

### I.3. Notion de degré mobilité d'un mécanisme :

La notion de degré de mobilité repose sur le concept de degré de liberté, or le nombre de degrés de liberté dépend directement du choix des liaisons, donc du modèle associé au mécanisme. Il est alors facile de comprendre que, même si on parle souvent du degré de mobilité d'un mécanisme, on devrait en toute rigueur, parler du degré de mobilité du modèle d'un mécanisme.

#### ❖ Définition :

On appelle degré de mobilité d'un mécanisme quelconque, le nombre de paramètres qui décrivent le mouvement et qui sont indépendants. Il est noté  $m$ . Un système est immobile lorsque  $m=0$ . Un système est mobile lorsque  $m>0$ .

Parmi les paramètres cinématiques indépendants on peut distinguer :

- ✓ les paramètres d'entrée qui fixent les paramètres de sortie, au sens où ce sont les paramètres du mouvement des solides de sortie. Leur nombre se nomme le degré de mobilité utile et se note  $\mu$ .
- ✓ les paramètres d'entrée qui fixent les paramètres de mouvements Internes, au sens où ce sont les paramètres du mouvement des solides internes au mécanisme. Leur nombre se nomme le de degré mobilité interne et se note  $m_i$ .

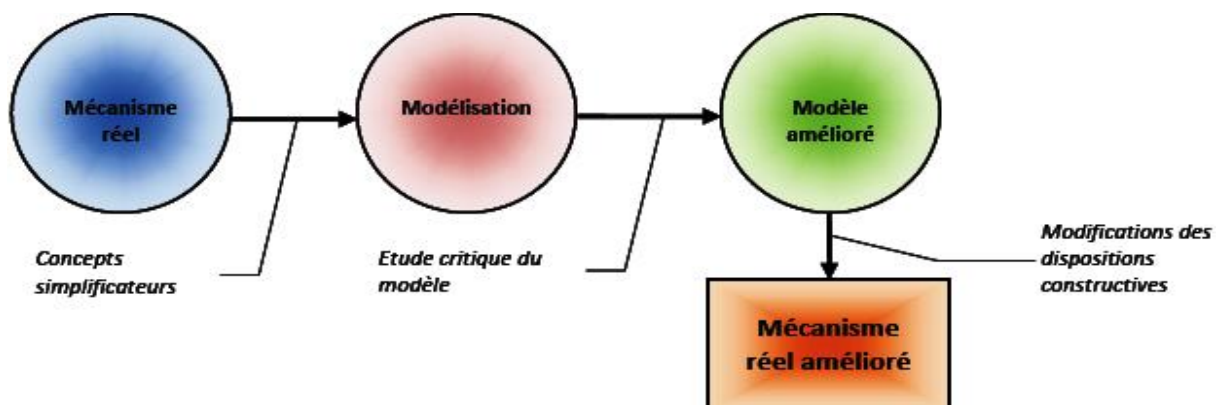
On peut donc écrire la relation :  $m_c = \mu + m_i$

La valeur du degré de mobilité constitue le critère recherché pour valider la structure d'un mécanisme.

## I.4. Modélisation

### I.4.1. Modélisation d'un mécanisme

Un mécanisme réel étant très complexe, il est nécessaire, pour le comprendre et l'améliorer, d'élaborer des modèles, afin de pouvoir lui appliquer les lois de la mathématique ou de la mécanique [2]. Cette modélisation permet de comprendre de façon fine le fonctionnement réel, d'en voir les limites et de proposer des modifications sur le modèle afin de l'améliorer.



**Figure(I.2):** schéma représentatif des différentes étapes d'étudié un mécanisme.

Lors de l'étude d'un mécanisme, la modélisation des pièces, des liaisons et des actions mécaniques va permettre de déterminer les performances de ce mécanisme et son dimensionnement. La modélisation et la schématisation cinématique sont des moyens

privilegiés pour expliquer le fonctionnement d'un mécanisme et pour exprimer certaines caractéristiques grâce à un paramétrage adéquat.

#### I.4.2. Modélisation des pièces mécaniques

Les pièces mécaniques sont des solides parfaits, indéformables ayant une géométrie bien définie.

Cette modélisation exclut naturellement les fluides, ainsi que les pièces qui subissent de grandes déformations, comme les ressorts ou les courroies de transmission.

#### I.4.3. Modélisation des contacts

Les contacts mécaniques entre pièce sont parfait, sans jeu, les surfaces fonctionnelles sont géométriquement exactes, sans frottement ni adhérence et sans déformation sous charge.

La modélisation des liaisons est basée sur l'analyse des surfaces de contact entre les groupes cinématiquement liés.

Ces modélisations apparaissent sous deux formes :

- la chaîne cinématique.
- Le schéma cinématique.

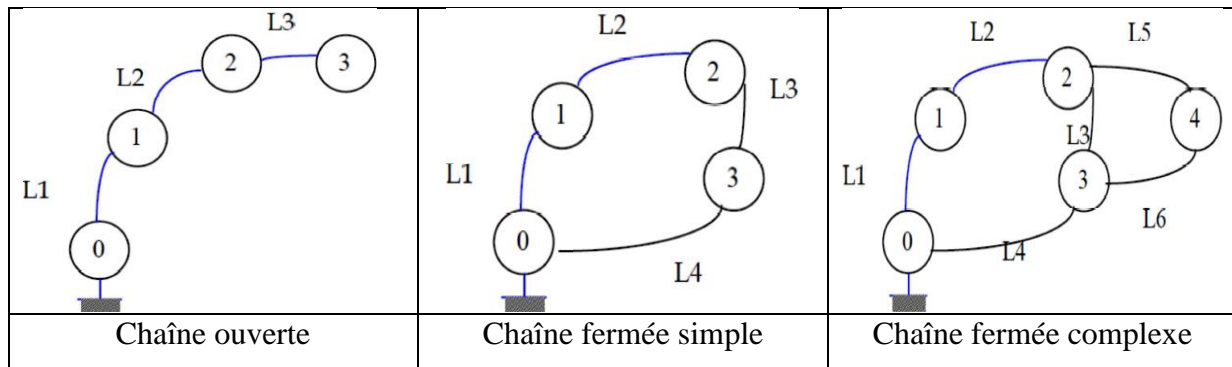
#### I.5. Chaîne cinématique (ou graphe des liaisons)

La théorie des graphes s'appuie sur un formalisme dont l'objectif est de mettre en évidence les cheminements possibles entre deux objets.

Les objets sont les sommets du graphe et la relation qui existe entre deux objets est représentée par un arc. Ainsi le graphe de structure sera constitué de sommets représentant les solides 0, 1, 2, 3... et des arcs représentant les liaisons  $L_{1,2,3...}$  (Voir les figures I.3)

Par une chaîne cinématique, on entend un système joint d'éléments qui forment entre eux des couples cinématique ou des liaisons. Il existe trois types de chaînes cinématiques :

- **Une chaîne ouverte** : est un mécanisme pour lequel le graphe des liaisons n'est pas bouclé. C'est le cas des bras de robot manipulateurs par exemple.
- **Une chaîne fermée simple** : est un mécanisme pour lequel le graphe des liaisons se compose d'une boucle simple unique.
- **Une chaîne fermée complexe** : est un mécanisme pour lequel le graphe des liaisons se compose de plusieurs boucles imbriquées.



**Figure (I.3) :** les chaînes cinématiques ou graphe des liaisons.

### I.6. Schéma cinématique

Le schéma cinématique permet de modéliser les interactions cinématiques entre les solides d'un même mécanisme [3]. Ce type de représentation permet de décomposer de manière détaillée une liaison entre deux solides. Par exemple, une liaison pivot réalisée par deux roulements à billes assurant respectivement une liaison rotule et une liaison linéaire annulaire sera schématisée par ces deux liaisons. Par ces aspects, le schéma cinématique permet, d'une part, d'aider à la conception d'un mécanisme en lui donnant le principe de fonctionnement cinématique et, d'autre part, d'aider à la compréhension du système à analyser.

En pratique, la réalisation d'un schéma cinématique d'un système consiste simplement à lier des schémas élémentaires de liaison entre eux. Ceux-ci représentent chacun une cinématique établie, telle que la liaison pivot, pivot glissant, etc. Une description schématique de ces éléments est proposée dans le tableau suivant en deux dimensions ou trois dimensions :

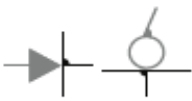
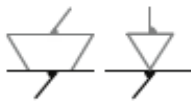
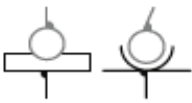


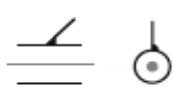

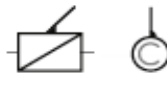



Liaison	Schématisation plane	Liaison	Schématisation plane
Ponctuelle		Linéaire rectiligne	
Linéaire annulaire		Rotule	
Plan sur plan		Pivot glissant	
Hélicoïdale à droite		Hélicoïdale à gauche	
Glissière		Pivot	
Encastrement			

Tableau (I.1):les liaisons normalisées

### I.7. Méthode pour représenter un schéma cinématique

1. Choisir une représentation spatiale ou plane et l'orientation la plus représentative si elle n'est pas imposée.
2. Mettre en place le(s) repère(s) en respectant l'orientation choisie.
3. Placer les centres des liaisons en respectant la géométrie du mécanisme et ses proportions.
4. Représenter en leur centre chaque liaison en respectant son orientation et les contenant-contenu.
5. Relier les classes d'équivalences (La liaison équivalente à un ensemble de liaisons situées entre deux solides (S1) et (S2) est une liaison théorique qui a le même comportement que cette association de liaisons, c'est à dire qui transmet la même action mécanique et qui autorise le même mouvement relatif de ces deux solides).

### I.8. notions de degré d'hyperstatisme (ou d'hyperstaticité) d'un mécanisme

Le degré d'hyperstatisme  $h$  d'un mécanisme caractérise la surabondance des liaisons constituant le mécanisme.

Un système est isostatique  $h=0$  s'il est possible de déterminer la totalité des inconnues de liaison en appliquant le principe fondamental de la statique (ou de la dynamique) à chacune des pièces du mécanisme.

Chaque inconnue non déterminable par le principe fondamental de la statique est un degré d'hyperstatisme  $h>0$ , et donc le système est hyperstatique.

#### I.8.1. Pour une chaîne fermée

Notons  $p$  le nombre de liaisons constituant une chaîne continue fermée.

##### Approche statique :

Soit :

- $N_s$  le nombre d'inconnues statiques de  $p$  liaisons.
- $r_s$  le nombre d'équations scalaires indépendantes entre les  $N_s$  inconnues statiques.

On définit le degré d'hyperstaticité  $h$  de la chaîne fermée par :

$$h = N_s - r_s \quad (\text{I.1})$$

##### Approche cinématique :

Soit :

- $N_c$  le nombre d'inconnues cinématiques de  $p$  liaisons.
- $r_c$  le nombre d'équations scalaires indépendantes entre les  $N_c$  inconnues cinématiques.

On définit le degré de mobilité  $m$  de la chaîne fermée par :

$$m = N_c - r_c \quad (\text{I.2})$$

Pour chaque liaison  $i$ ,  $N_{ci} + N_{si} = 6$  car le nombre d'inconnues du torseur statique au centre d'une liaison est le complément à 6 du nombre d'inconnues du torseur cinématique.

Pour  $p$  liaisons :

$$N_c + N_s = 6.p \quad (\text{I.3})$$

On montre d'autre part que le degré de mobilité est :

$$m = 6(p - 1) - r_s \quad (\text{I.4})$$

En éliminant  $r_s$  entre les relations (1) et (4) on obtient :

$$H = N_s + m - 6(p - 1) \quad (\text{I.5})$$

$$\text{Ou bien : } h = N_s + m_u + m_i - 6(p - 1) \quad (\text{I.6})$$

En éliminant  $N_s$  entre les relations (3) et (5), on obtient :

$$h = m + 6 - N_C \quad (\text{I.7})$$

### I.8.2. Pour une chaîne complexe

La théorie des mécanismes s'appuie sur l'étude des chaînes fermées des solides. Donc pour étudier une chaîne cinématique complexe la première préoccupation est de dénombrer les chaînes fermées qui la constitue. Ce nombre de chaînes est appelé **nombre cyclomatique**. On appelle **nombre de cyclomatique** le nombre de chaînes fermées indépendantes à parcourir pour décrire un graphe dans sa totalité.

On peut montrer que ce nombre  $\mu$  est directement calculable à partir du nombre de sommets et du nombre d'arc.

Pour un graphe de structure, on a :

$$\gamma = L - p + 1 \quad (\text{I.8})$$

Avec :  $\gamma$  : nombre cyclomatique,

$L$  : nombre d'arcs,

$P$  : nombre de sommets.

### I.9. Torseur

Les torseurs sont des outils de modélisation analogues aux vecteurs, utilisés pour représenter des actions mécaniques, des vitesses et diverses autres grandeurs. Leur domaine d'emploi privilégié concerne les études des mécanismes dans l'espace faisant intervenir des liaisons mécaniques complexes et nécessitant des analyses détaillées en statique, cinématique et cinétique [4].

#### I.9.1. Quelques opérations sur les torseurs

##### a) Les éléments de réduction

Dans une base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  orthonormée, la résultante  $\vec{S} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$ , le moment en  $p$ ,  $\vec{M}_p = (L_p\vec{x}, M_p\vec{y}, N_p\vec{z})$  sont les éléments de réduction du torseur  $\{\tau\}$  au point  $p$ .

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{l|l} X & L_p \\ Y & M_p \\ Z & N_p \end{array} \right\}_{(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})} \quad (\text{I.9})$$

### b) Changements de centre de réduction

Connaissant les éléments de réduction de  $\{\tau\}$  en p, exprimons les éléments de réduction de  $\{\tau\}$  en Q.

a) La somme vectorielle  $\vec{S}$  du torseur a même valeur en tout point, elle est invariable.

b)  $\vec{M}$  étant connu, la valeur du moment en B,  $\vec{M}_B$ , est obtenue par la relation :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{S} \quad (\text{I.10})$$

### c) Egalité de deux torseurs

Deux torseurs sont égaux s'ils sont les mêmes éléments de réduction en un même point p.

$$\text{Si } \{\tau\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{S} \\ \vec{M}_p \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\tau'\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{S}' \\ \vec{M}'_p \end{array} \right\} \quad \text{sont égaux, alors } \vec{S} = \vec{S}' \quad \text{et} \quad \vec{M}_p = \vec{M}'_p$$

Ces égalités sont vraies pour tout point P à condition que  $\{\tau\}$  et  $\{\tau'\}$  soient réduits au même point.

### d) Invariant scalaire ou auto-moment d'un torseur

On appelle automoment du torseur  $\{\tau\}$  le produit scalaire de ses éléments de réduction.

$$\text{Au point P : } A_p(\tau) = \vec{S} \cdot \vec{M}_p \quad (\text{I.11})$$

$$\text{Au point Q : } A_Q(\tau) = \vec{S} \cdot \vec{M}_Q \quad (\text{I.12})$$

$$\text{Comme : } \vec{M}_Q = \vec{M}_p + \vec{QP} \wedge \vec{S} \quad (\text{I.13})$$

$$A_Q(\tau) = \vec{S} \cdot (\vec{M}_p + \vec{QP} \wedge \vec{S}) \quad (\text{I.14})$$

$$\text{Comme : } \vec{S} \cdot (\vec{QP} \wedge \vec{S}) = 0 \quad (\text{propriété du produit mixte}). \quad (\text{I.16})$$

$$A_p(\tau) = A_Q(\tau) \quad (\text{I.17})$$

L'automoment est indépendant du point où il est calculé. C'est un invariant scalaire.

### e) Axe centrale d'un torseur

L'axe centrale d'un torseur est une droite  $(\Delta)$  telle que en tout point I de cette droite, le vecteur résultante  $\vec{S}$  et le vecteur moment en I,  $\vec{M}_I$ , aient même direction que  $(\Delta)$ .

$$\forall I \in (\Delta) \quad \vec{S} \wedge \vec{M}_I = 0 \quad (\text{I.18})$$

### I.9.2. Torseur statique

les actions mécaniques transmissibles dans une liaison entre deux pièces i et j sont modélisables par le torseur statique de la liaison, dont les éléments de réduction (force résultante et moment) sont exprimables en un point A et une base locale (x,y,z) choisis en fonction des références centrées de la liaison considérée.

On utilise également fréquemment la notation suivante pour écrire l'action transmissible de i

$$\text{sur j ;} \quad \left\{ \tau_{S(i \rightarrow j)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{A(x,y,z)} \quad (\text{I.19})$$

Avec : (X, Y, Z) sont les coordonnées de la résultante du torseur en newton (N).

(L, M, N) : les coordonnées de moment des forces en (N.m).

Si on veut écrire le torseur  $\left\{ \tau_s \right\}$  dans un autre point B quelconque, on va écrire :

$$\left\{ \tau_s \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_B \end{array} \right\} \quad (\text{I.20})$$

$$\text{Avec ;} \quad \vec{R}_B = \vec{R}_A \quad (\text{I.21})$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}_A \quad (\text{I.22})$$

Lorsque la liaison supprime un degré de liberté, elle autorise la transmission d'un effort dans cette direction. A l'inverse, si un mouvement relatif est possible, il n'est pas y avoir transmission d'effort. La composante correspondant de l'élément de réduction du torseur est nuls sont indépendant et représentent les efforts transmissibles par la liaison.

### I.9.3. Torseur cinématique

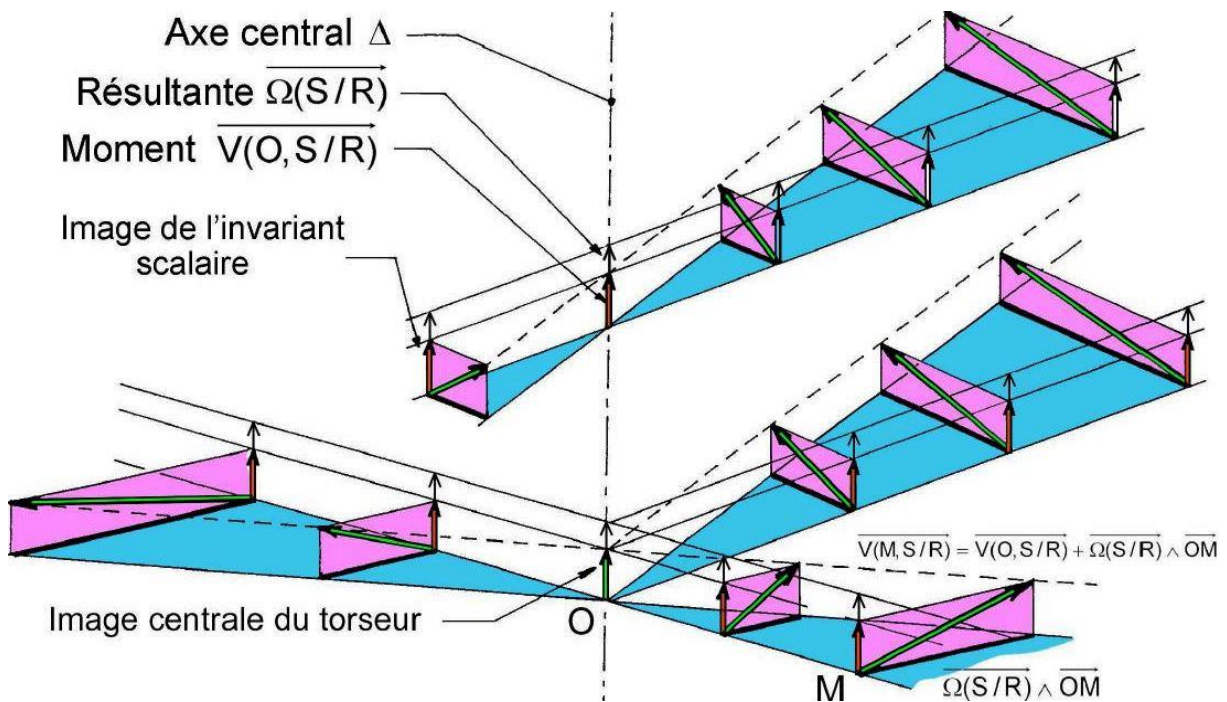
le mouvement relatif admissible entre deux pièces i et j liées est représenté par le torseur cinématique, dont les éléments de réduction sont exprimables en un point A et une base locale (x,y,z), choisis en fonction des références centrées de la liaison considérée :

$$\left\{ \tau_{C(i/j)} \right\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{matrix} \right\} \\ A \quad (x,y,z) \end{matrix} \quad (\text{I.23})$$

Avec :  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  : composantes de vecteur vitesse angulaires 'exprime en  $\text{rad.s}^{-1}$ .

$(V_x, V_y, V_z)$  : composantes de vecteur vitesse linéaire en  $\text{m.s}^{-1}$ .

Pour chaque liaison définie, chaque degré de liberté supprimé annule une composante de la matrice des composantes des éléments de réduction du torseur [5]. Les termes non nuls sont indépendants et représente les mouvements cinématiquement admissibles dans la liaison.



**Figure (I.4) :** Image du torseur cinématique

## I.10. Liaisons

### I.10.1. Liaisons parfaites

Une liaison est parfaite si le jeu de fonctionnement est nul (pas fondamental comme hypothèse) et si le contact se fait sans frottement. Une liaison est parfaite si et seulement si la puissance dissipée par la liaison est nulle. La puissance mécanique développée par les inter-efforts de liaison entre un solide  $S_1$  et un solide  $S_2$ , par rapport à un repère  $R$ , est égale au sommet du torseur cinématique de  $S_2$  sur  $S_1$  et du torseur des actions mécanique de  $S_1$  sur  $S_2$ . Les torseurs cinématiques des liaisons, en un point de contact  $P$ , sont définis dans la page précédente.

La puissance des actions mutuelles de liaison entre un solide  $S_1$  et un solide  $S_2$  en  $P$  se définit ainsi comme suit :

$$W(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{ \tau_s(S_1 \rightarrow S_2) \}_P \bullet \{ \tau_c(S_2/S_1) \}_P \quad (I.24)$$

Où «  $\bullet$  » représente le moment entre les torseurs cinématique et statique.

S'il s'agit d'une liaison parfaite l'équation (1.1) s'annule, garantissant une dissipation nulle de l'énergie :

$$W(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{ \tau_s(S_1 \rightarrow S_2) \}_P \bullet \{ \tau_c(S_2/S_1) \}_P = 0, \forall P \in S_1 \cap S_2. \quad (I.25)$$

L'équation (1.2) montre une dualité entre cinématique et statique. À partir de cette expression et de la connaissance du torseur statique de la liaison parfaite considérée, on peut exprimer une équation sur le torseur cinématique, et réciproquement pour le torseur statique si l'on connaît le torseur cinématique [6].

### I.10.1.1. Liaison ponctuelle

La liaison ponctuelle entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  est représentée par un point. Elle suppose dans la pratique des solides indéformables de type cône sur un plan (figure I.5), ou toute surface de forme quelconque en appui sur une autre en un point, comme une sphère en appui sur un plan (figure I.6). Le contact est supposé permanent en  $O$ , la vitesse ne peut donc pas avoir de composante selon l'axe  $(O, Z)$ .

➤ **Mouvements possibles :** dans la configuration de la figure I.5, c'est-à-dire avec un repère  $R(O, x, y, z)$  où  $O$  est le point de contact et  $Z$  la normale au plan  $P_1$ , le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  se décompose comme suit :

- Rotation autour de  $(O, X)$ ,  $(O, Y)$ ,  $(O, Z)$ .
- Translations suivant  $(O, X)$ ,  $(O, Y)$ .

On peut résumer ces conditions sous la forme d'une condition :

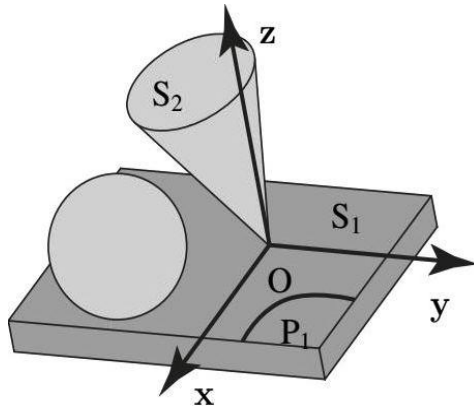
$$V(O/R) \cdot z = 0. \quad (I.26)$$

➤ **Torseur cinématique :** Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

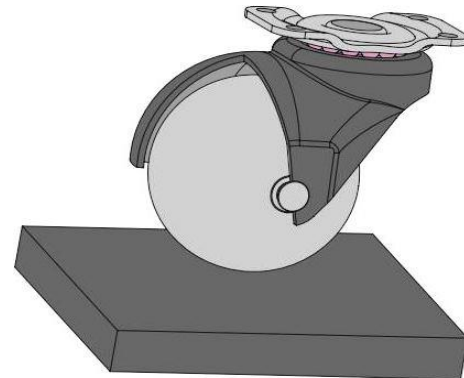
$$\{ \tau_c(S_1/S_2) \} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z \\ V_x x + V_y y + V_z z \end{array} \right\}_O \quad (I.27)$$

➤ **Le torseur statique s'écrit donc :**

$$\{\tau_s(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0x + 0y + Zz \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O \quad (I.28)$$



**Figure (I.5) :** liaison ponctuelle représentée par le contact d'une sphère ou d'un cône sur un plan



**Figure (1.6) :** exemple de liaison ponctuelle d'une roulette sphérique rigide sur le sol

➤ **Degrés de mobilité :** en étudiant le torseur cinématique, il apparaît que cinq mouvements sont possibles. Ils sont indépendants les uns des autres, c'est-à-dire qu'une translation ou une rotation selon un axe peut être effectuée sans influencer sur les mouvements des axes. Le degré de mobilité  $m$  de cette liaison vaut donc cinq.

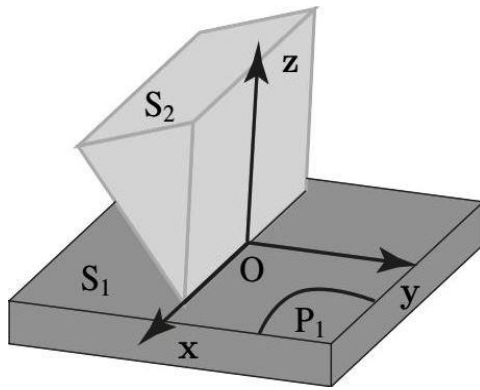
### I.10.1.2. Liaison linéaire rectiligne

La liaison linéaire rectiligne entre  $S_1$  et  $S_2$  est du type cylindre en appui sur un plan. Le contact entre les deux solides est une droite (figure I.7). Un exemple pratique de cette liaison est roulement à rouleaux (figure I.8).

➤ **Mouvements possibles :** dans la configuration de la figure I.7, c'est-à-dire avec un repère

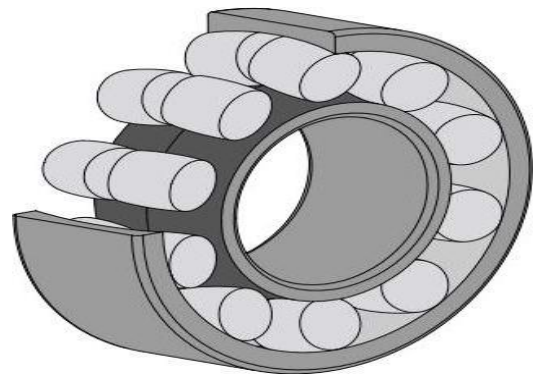
$R(O, x, y, z)$  où la droite  $(O, X)$  est confondue avec la ligne de contact entre  $S_2$  et  $S_1$  et où  $Z$  est la normal au plan  $P_1$ , le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  se décompose comme suit :

- Rotation autour de  $(O, X)$ ,  $(O, Z)$ .
- Translation suivant  $(O, X)$ ,  $(O, Y)$ .



**Figure (I.7) :** liaison linéaire rectiligne.

Le contact entre les deux solides est une droite.



**Figure (I.8) :** exemple de liaison rectiligne : un roulement à rouleaux.

- **Degrés de mobilité :** le degré de mobilité  $m$  de cette liaison vaut quatre.
- **Torseur cinématique :** le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\{\tau_c(S_1 / S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x x + 0y + \omega_z z \\ V_x + V_y y + 0z \end{array} \right\}_o \quad (\text{I.29})$$

- **Le torseur statique s'écrit alors :**

$$\{\tau_s(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} 0x + 0y + Zz \\ 0x + My + 0z \end{array} \right\}_o \quad (\text{I.30})$$

### I.10.1.3. Liaison linéaire annulaire

La liaison linéaire annulaire entre  $S_1$  et  $S_2$  est de type sphère dans un cylindre creux de même diamètre (figure I.9). La ligne de contact entre les deux solides est un cercle. Un exemple pratique de cette liaison est le roulement à billes (figure I.10).

➤ **Mouvement possibles :** dans la configuration de la (figure I.9), c'est-à-dire avec un repère  $R(O, x, y, z)$  au centre de  $S_2$ , le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  se décompose comme suit :

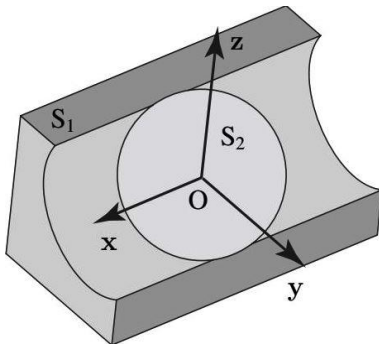
- Rotations autour de  $(O, x)$ ,  $(O, y)$ ,  $(O, z)$ .
- Translation suivant  $(O, x)$ .

➤ **Torseur cinématique ;** le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

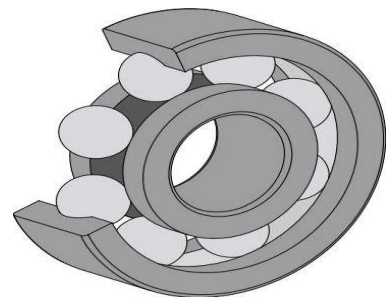
$$\{\tau_c(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z \\ V_x x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O \quad (\text{I.31})$$

➤ L'expression du torseur statique est donc :

$$\{\tau_s(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0x + Yy + Zz \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O \quad (\text{I.32})$$



**Figure (I.9) :** liaison linéaire annulaire. Le contact entre les deux solides est un cercle.

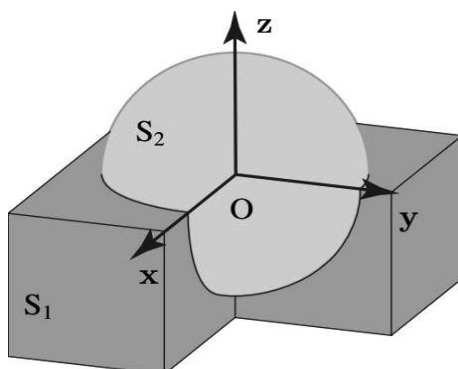


**Figure (I.10) :** exemple de liaison annulaire : un roulement à billes.

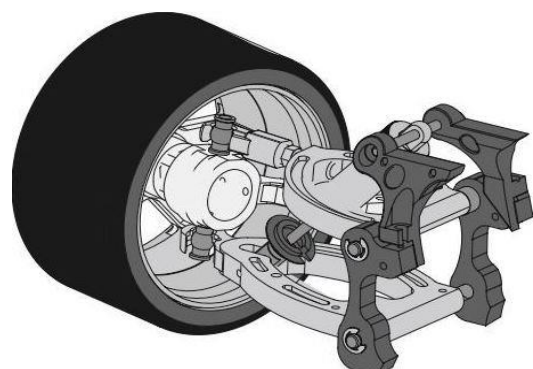
➤ **Degré de mobilité :** le degré de mobilité de cette liaison vaut quatre.

#### I.10.1.4. Liaison rotule

La liaison rotule est de type sphère dans une sphère creuse de même diamètre (figure I.11). La surface de contact entre les deux solides est la surface de la sphère intérieure. Un exemple de cette liaison est celle entre le châssis et la roue d'une voiture (figure I.12).



**Figure (I.11) :** Liaison rotule.  
Le contact entre les deux solides est une sphère.



**Figure (I.12) :** Exemple de liaison rotule : la liaison châssis/roue d'une voiture.

➤ **Degré de mobilité** : le torseur cinématique fait apparaître trois mouvements indépendants. Le degré de mobilité vaut donc trois.

➤ **Mouvements possibles** : dans la configuration de la figure (I.11), c'est-à-dire avec un repère R (O, x, y, z) au centre de S<sub>2</sub>, le mouvement de S<sub>2</sub> par rapport à S<sub>1</sub> se décompose suivant les trois rotations autour de (O, x), (O, y), (O, z).

➤ **Torseur cinématique** ; le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S<sub>2</sub> par rapport à S<sub>1</sub> :

$$\{\tau_c(S_1 / S_2)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O \quad (\text{I.33})$$

➤ **D'où l'expression du torseur statique** :

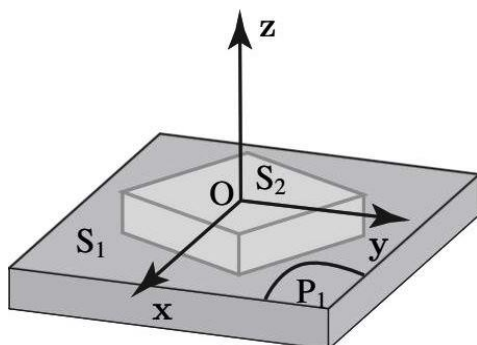
$$\{\tau_s(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} Xx + Yy + Zz \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O \quad (\text{I.34})$$

#### I.10.1.5. Liaison appui plan

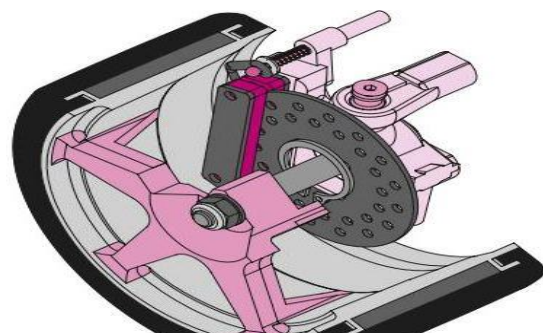
La liaison appui plan est du type plan sur plan (figure I.13). La surface de contact entre les deux solides est un plan. Un exemple de cette liaison est celle entre les plaquettes de frein d'une voiture et le disque lié à la roue (figure I.14)

➤ **Mouvement possibles** : dans la configuration de la figure (I.13), c'est-à-dire avec un repère R (O, x, y, z) au centre de S<sub>2</sub> en contact avec le plan S<sub>1</sub>, le mouvement de S<sub>2</sub> par rapport à S<sub>1</sub> se décompose comme suit :

- Rotation de (O, z).
- Translation suivant (O, x), (O, y).



**Figure (I.13)** ; liaison plan sur plan. Le contact entre les deux solides est un plan



**Figure (I.14)** exemple de liaison plan sur plan : les plaquettes de frein d'une voiture sur le disque lié à la roue

- **Degré de mobilité** : trois mouvements indépendants sont identifiables à partir du torseur cinématique. Le degré de mobilité  $m$  de cette liaison vaut donc trois.
- **Torseur cinématique** ; le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\{\tau_s(S_2 / S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0x + 0y + \omega_z z \\ V_x x + V_y y + 0z \end{Bmatrix}_O \quad (\text{I.35})$$

- **Torseur statique** ; le torseur statique s'écrit donc :

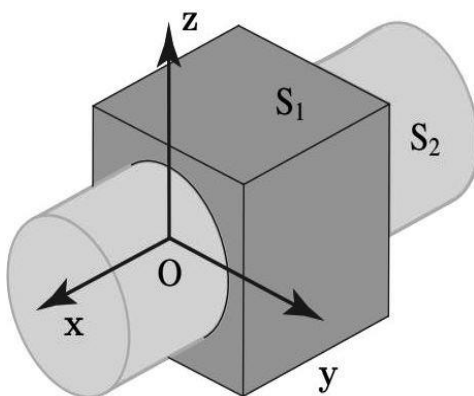
$$\{\tau_s(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0x + 0y + Zz \\ Lx + My + 0z \end{Bmatrix}_O \quad (\text{I.36})$$

### I.10.1.6. Liaison pivot glissant

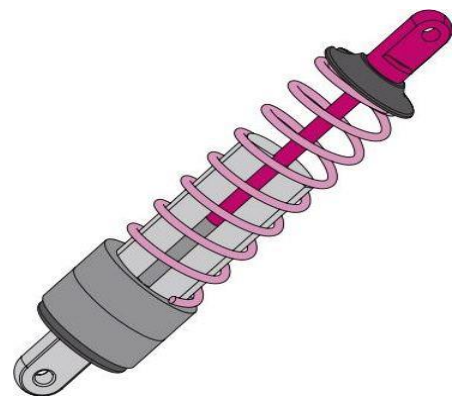
La liaison pivot glissant est de type cylindre à base circulaire dans un cylindre creux à base circulaire de même rayon (figure I.15). La surface de contact entre les deux solides est donc un cylindre. Un exemple de cette liaison est celle du système coulissant entre partie supérieure et inférieure d'un amortisseur de voiture (figure I.16).

➤ **Mouvements possibles** : dans la configuration de la figure (I.15), c'est-à-dire avec un repère  $R(O, x, y, z)$  au centre de  $S_2$ , le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  se décompose comme suit :

- Rotation autour de  $(O, x)$ .
- Translation suivant  $(O, x)$ .



**Figure (I.15)** : Liaison pivot glissant. Le contact entre les deux solides est un cylindre à base circulaire.



**Figure (I.16)** : Exemple de liaison pivot glissant : un amortisseur dont la partie supérieure coulisse dans la partie inférieure.

- **Degré de mobilité** : le torseur cinématique montre que deux mouvements sont possibles et sont indépendants. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc deux.
- **Torseur cinématique** ; le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\{\tau_c(S_2 / S_1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x x + 0y + 0z \\ V_x x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O \quad (\text{I.37})$$

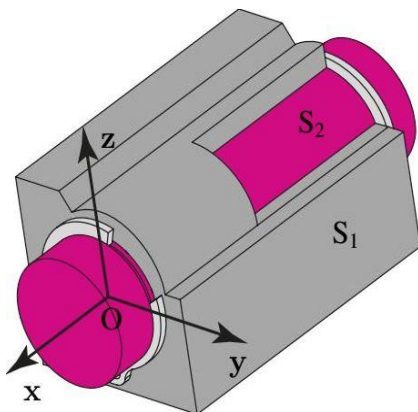
- **Torseur statique** ; le torseur statique s'écrit donc :

$$\{\tau_s(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0x + Yy + Zz \\ 0x + My + Nz \end{Bmatrix}_O \quad (\text{I.38})$$

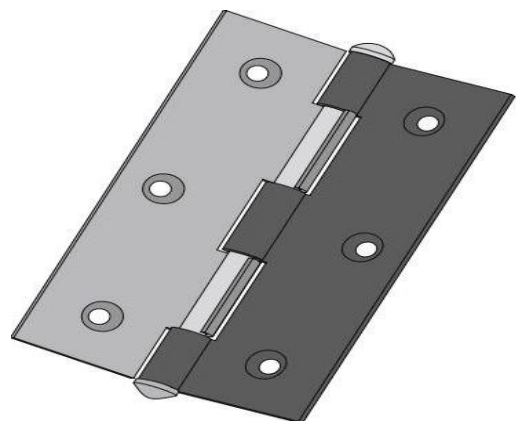
### I.10.1.7. Liaisons pivot

La liaison pivot est du type forme de révolution non cylindrique dans une forme identique (figure I.17). La surface de contact entre les deux solides est la surface de cette forme. Un exemple pratique de cette liaison est une charnière de porte (figure I.18). Dans le cas de la figure (I.17), le cylindre  $S_2$  est bloqué en translation par les circlips. Il ne peut qu'effectuer des rotations selon l'axe  $(O, x)$ .

➤ **Mouvements possibles** : dans la configuration de la figure (I.19), c'est-à-dire avec un repère  $R(O, x, y, z)$  au centre de  $S_2$ , le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  se décompose en rotation autour de  $(O, x)$ .



**Figure (I.17)** : liaison pivot. Le contact entre les deux solides est un cylindre.



**Figure (I.18)** : exemple de liaison pivot : une charnière de porte.

➤ **Degré de mobilité** : un seul mouvement est possible pour ce type de liaison, c'est une rotation unique. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc un. De l'utilité d'exprimer les torseurs statique en un point particulier (le centre de la liaison, un point de l'axe...)

➤ **Torseur cinématique** ; le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\{\tau_c(S_2 / S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x x + 0y + 0z \\ 0x + 0y + 0z \end{array} \right\}_o \quad (\text{I.39})$$

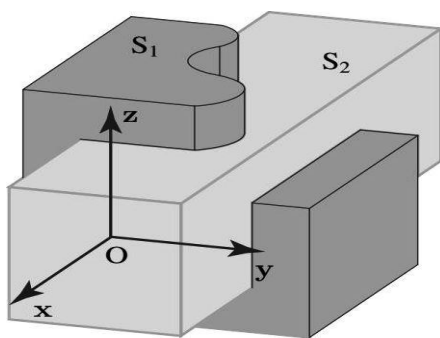
➤ **Torseur statique** ;

$$\{\tau_s(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} Xx + Yy + Zz \\ 0x + My + Nz \end{array} \right\}_o \quad (\text{I.40})$$

### I.10.1.8. Liaisons glissière

La liaison glissière est du type cylindre à base non circulaire dans un cylindre présentant un creux de forme identique (figure I.19). La surface de contact entre les deux solides est la surface du cylindre intérieur. Un exemple pratique est l'ouverture d'un téléphone portable par coulissement de l'écran sur le clavier (figure I.20).

➤ **Mouvement possibles** : dans la configuration de la figure (I.19), c'est-à-dire avec un repère  $R(O, x, y, z)$  au centre de  $S_2$ , le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  se décompose selon une translation suivant  $(O, x)$ .



**Figure (I.19)** : Liaison glissière.  
Le contact entre les deux solides est un parallélépipède.



**Figure (I.20)** : Exemple de liaison glissière : la poupée mobile de tour.

➤ **Degré de mobilité** : un seul mouvement est possible pour ce type de liaison, c'est une translation unique. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc un.

➤ **Torseur cinématique** ; le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\{\tau_c(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0x+0y+0z \\ V_x x+0y+0z \end{Bmatrix}_o \quad (\text{I.41})$$

➤ **Torseur statique** ;

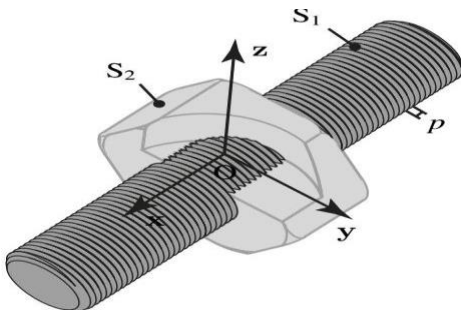
$$\{\tau_s(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0x+Yy+Zz \\ Lx+My+Nz \end{Bmatrix}_o \quad (\text{I.42})$$

### I.10.1.9. Liaison hélicoïdale

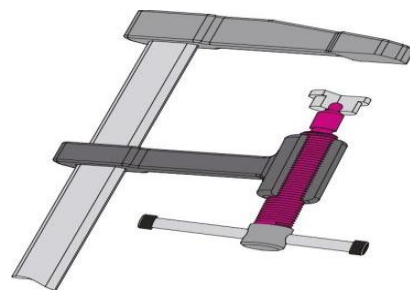
La liaison hélicoïdale est caractérisée par l'existence d'un mouvement combiné qui rend possible la rotation uniquement s'il y a une translation simultanée (figure I.21). La surface de contact entre les deux solides est une surface hélicoïdale définie par le pas  $p$  de l'hélice. Un exemple pratique de cette liaison est le système de vis d'un serre-joint (figure I.22).

➤ **Mouvement possibles** : dans la configuration de la figure (I.21), c'est-à-dire avec un repère  $R(O, x, y, z)$  au centre de  $S_2$ , le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  se décompose comme suit :

- Rotation autour de  $(O, x)$ .
- Translation suivant  $(O, x)$ .



**Figure (I.21)** : Liaison hélicoïdale.



**Figure (I.22)** : Exemple de liaison hélicoïdale : la vis d'un serre-joint.

➤ **Torseur cinématique** ; le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\{\tau_c(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x x+0y+0z \\ V_x x+0y+0z \end{Bmatrix}_o \quad (\text{I.43})$$

➤ **Torseur statique** ; le torseur statique s'écrit alors :

$$\{\tau_s(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} Xx + Yy + Zz \\ Lx + My + Nz \end{Bmatrix}_o \quad (\text{I.44})$$

➤ **Relation entre les composantes des torseurs cinématique et statique** : il est possible d'écrire le torseur cinématique pour tout point P de l'axe (O, X) comme suit :

$$\{\tau(S_2 / S_1)\} = \begin{Bmatrix} \omega x \\ \omega p x \end{Bmatrix}_p \quad (\text{I.45})$$

Où  $\Omega$  est la vitesse de rotation de  $S_1$  par rapport à  $S_2$ . Le cas étudié fait avancer le solide  $S_1$  selon (O, +X). Dans le cas contraire, la composante du moment du torseur cinématique est négatif ( $V_x = -\Omega p$ ). On parle alors d'hélice à droite pour le cas, sinon d'hélice à gauche. En développant l'expression de la puissance qui est nulle dans les liaisons parfaites, il vient que :

$$p\Omega X + L\Omega = 0. \quad (\text{I.46})$$

La relation entre les deux composantes non indépendantes s'écrit alors :  $L = -pX$ .

➤ **Degrés de mobilité** : le torseur cinématique de la liaison hélicoïdale fait apparaître deux mouvements possibles qui sont une translation et une rotation suivant le même axe. Cependant, nous venons de montrer qu'il existe une relation entre la translation et la rotation de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . Les deux mouvements sont donc liés, ils ne sont par conséquent pas indépendants. La connaissance d'un de ces mouvements permet d'obtenir l'autre grâce à la relation définie ci-dessus. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc un.

#### I.10.1.10. Liaisons encastrement

La liaison encastrement interdit tout mouvement relatif entre les deux solides suite à l'existence de multiples contacts entre eux (figure I.23). Une application pratique de cette liaison est le système de freinage par blocage du disque lié à la roue (figure I.24).

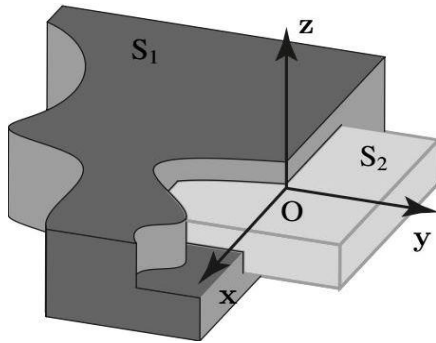
➤ **Mouvements possibles** : aucun mouvement n'est possible avec une liaison encastrement.

➤ **Torseur cinématique** ; il s'écrit :

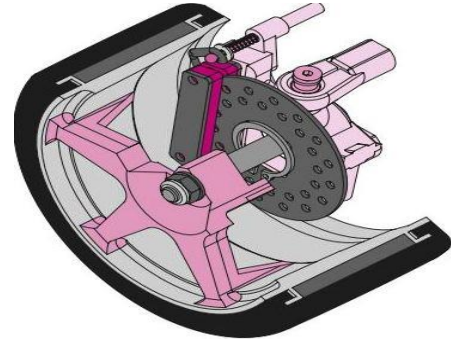
$$\{\tau_c(S_2 / S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0x + 0y + 0z \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_o \quad (\text{I.47})$$

➤ **Torseur statique** : le torseur statique s'écrit donc :

$$\{\tau_s(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} Xx + Yy + Zz \\ Lx + My + Nz \end{Bmatrix}_O \quad (I.48)$$



**Figure (I.23)** : Liaison encastrement.



**Figure (I.24)** : exemple de liaison encastrement : les freins non ABS,

➤ **Degré de mobilité** : le torseur cinématique ne fait pas apparaître de mouvement possible. Le degré de mobilité de cette liaison est nul :  $m = 0$ .

### I.11. Les liaisons normalisées entre solides

Parmi toutes les liaisons envisageables, la norme ISO 3952 ou NF EN 2395 a résumé les plus courantes dans le tableau suivant :

Liaison	Modélisation	Torseur statique	Torseur cinématique
Repère (O, x, y, z)		$\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2) \}_O$	$\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \}_O$
Ponctuelle de normale (O, z) $m = 5$		$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + Zz \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} \Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z \\ V_x x + V_y y + 0z \end{Bmatrix}_O$
Linéaire rectiligne d'axe (O, x), de normale (O, z) $m = 4$		$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + Zz \\ 0x + My + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} \Omega_x x + 0y + \Omega_z z \\ V_x x + V_y y + 0z \end{Bmatrix}_O$
Linéaire annulaire d'axe (O, x) $m = 4$		$\begin{Bmatrix} 0x + Yy + Zz \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} \Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z \\ V_x x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$
Rotule de centre O $m = 3$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + Zz \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} \Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$







Liaison	Modélisation	Torseur statique	Torseur cinématique
Appui plan de normale (O, z) $m = 3$		$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + Zz \\ Lx + My + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + \Omega_z z \\ V_x x + V_y y + 0z \end{Bmatrix}_O$
Pivot glissant d'axe (O, z) $m = 2$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + 0z \\ Lx + My + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + \Omega_z z \\ 0x + 0y + V_z z \end{Bmatrix}_O$
Glissière hélicoïdale d'axe (O, z) $m = 1$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + Zz \\ Lx + My + Nz \end{Bmatrix}_O$ $N = -pZ$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + \Omega_z z \\ 0x + 0y + V_z z \end{Bmatrix}_O$ $V_z = p\Omega_z$
Glissière d'axe (O, z) $m = 1$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + 0z \\ Lx + My + Nz \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + 0z \\ 0x + 0y + V_z z \end{Bmatrix}_O$
Pivot d'axe (O, z) $m = 1$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + Zz \\ Lx + My + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + \Omega_z z \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$
Encastrement $m = 0$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + Zz \\ Lx + My + Nz \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + 0z \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$

Tableau (L.2) : les liaisons parfaites selon la norme ISO 5932.

### Conclusion

Lors de la conception d'une machine, il est nécessaire de s'assurer que chaque mécanisme envisagé donne bien les mobilités souhaitées. L'étude du mécanisme permet également d'obtenir des informations précieuses pour la conception des liaisons.

La théorie des mécanismes a donc pour but :

- ✓ Dans un contexte d'analyse, de vérifier l'aptitude d'un mécanisme existant à réaliser la loi entrée/sortie recherchée, et de mettre en évidence les conditions géométriques dont dépend éventuellement le bon fonctionnement de l'appareil.
- ✓ Dans un contexte de conception, de rechercher des dispositions constructives qui réalisent la loi entrée/sortie souhaitée d'une part, et pour lesquelles on est certain de pouvoir calculer les actions mécaniques internes en vue du dimensionnement, des organes mécaniques d'autre part.

## **Chapitre II**

# **Engrenages et réducteur de vitesses**

## II.1. Les engrenages

### II.1.1 Introduction

Les engrenages sont utilisés comme moyen de transmission de puissance dans les boîtes de vitesses et d'avances des machines où ils réalisent les vitesses, les couples et les sens de rotation des éléments de machines. Ils sont aussi largement utilisés dans l'industrie mécanique comme moyen de transmission de puissance d'un arbre vers un autre. Ils sont obtenus par taillage sur des machines-outils spéciales soit par reproduction soit par génération. La précision d'exécution dépend essentiellement de la valeur et de la précision du rapport des trains d'engrenage introduits dans la chaîne cinématique.

### II.1.2. Définition d'un engrenage

L'engrenage est un organe qui assure la liaison entre deux arbres, transmettant le mouvement de rotation de l'un des arbres (arbre menant, ou moteur) à l'autre arbre (arbre mené) [8], avec un rapport des vitesses angulaires constant. La petite roue se nomme le pignon, la grande roue extérieure s'appelle la roue (figure II.1), la grande roue intérieure s'appelle la couronne, l'une des roues peut avoir un rayon infini, elle s'appelle alors une crémaillère.

Les engrenages dans un mécanisme tournant sont résistants et durables ;

- Il transmet une puissance d'un arbre en rotation à un autre arbre tournant à une vitesse généralement différente, les deux vitesses restent dans un rapport constant.
- Il assure une sécurité cinématique, car il ne peut pas se produire de glissement.
- La résistance aux efforts est très importante avec une très bonne fiabilité.
- La puissance transmise est la plus forte obtenue parmi toutes les solutions, avec plus de précision.
- L'encombrement est très réduit.
- Le rendement mécanique est très voisin de l'unité dans le cas d'une bonne fabrication ( $\eta = 0,96$  à  $0,99$ ).
- Le coût est très variable suivant la précision demandée, il est en générale élevé.

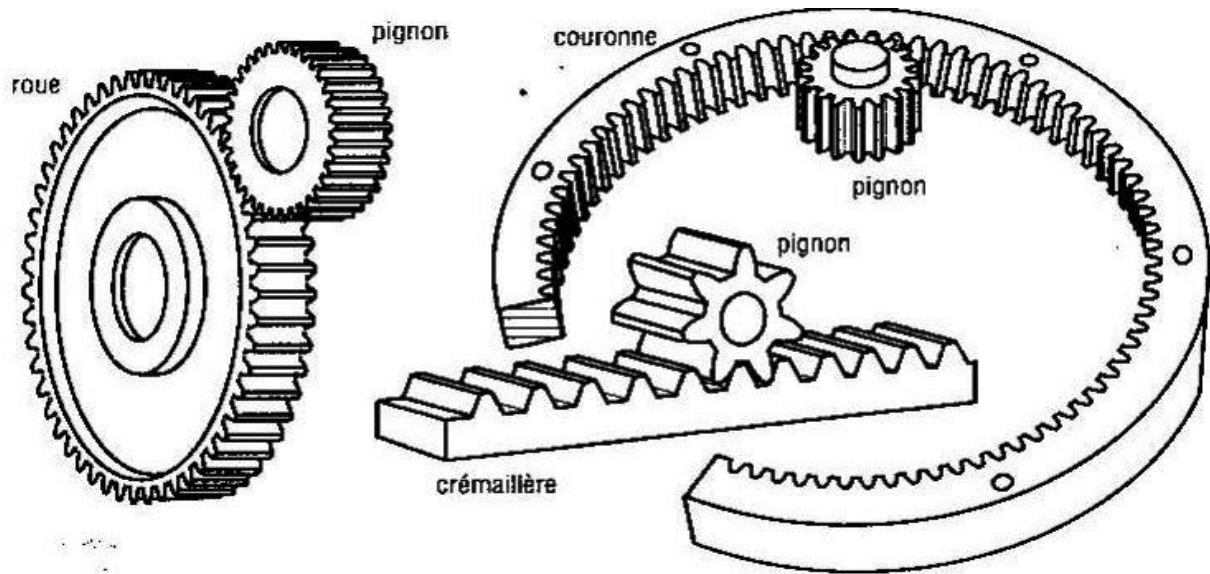


Figure (II.1) : Roue, pignon et couronne

### II.1.3. Différentes types d'engrenages

Les engrenages sont classés en différentes catégories caractérisées par : la position relative des axes des arbres d'entrée et de sortie, la forme extérieure des roues dentées et le type de denture.

Les différentes forme d'engrenage et la fonction qu'ils ont à réaliser ce d'écrite dans le tableau suivant :

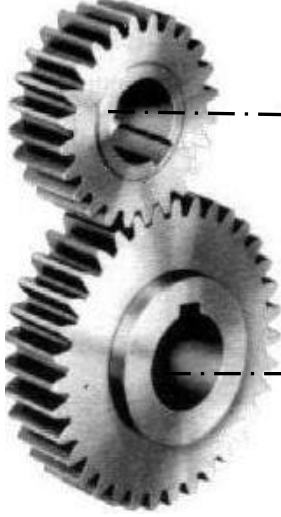
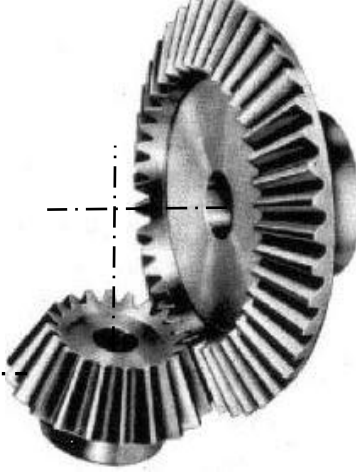

Les engrenages droits (à axes parallèles)	Les engrenages coniques (à axes concourantes)	Les engrenages gauches
		

Tableau II.1 : types d'engrenages

### **II.1.3.1. Les engrenages coniques**

C'est un groupe important utilisé pour transmettre un mouvement entre deux axes non parallèles dont les axes sont concourants. On a trois types différents de dents (denture droite, denture spirale et denture hypoïde).

### **II.1.3.2. Les engrenages gauches (à vis sans fin)**

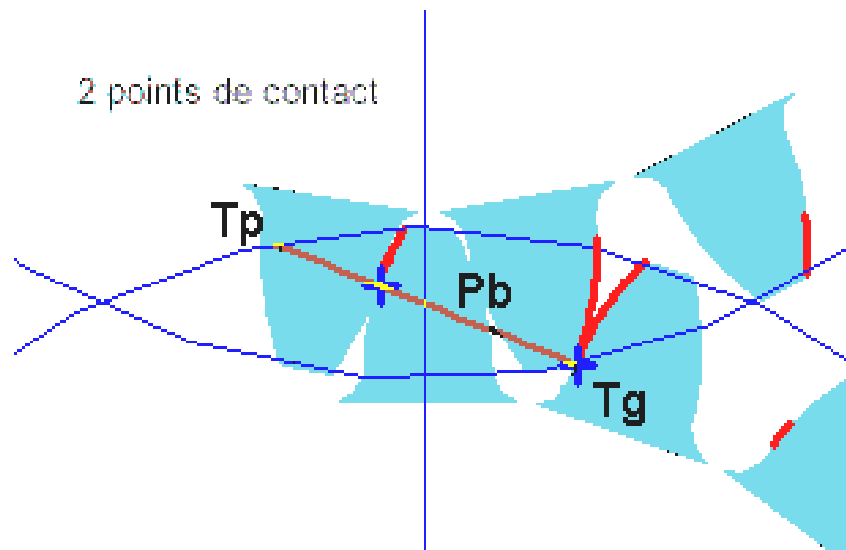
La transmission du mouvement se fait entre deux arbres orthogonaux. Ces engrenages permettent de grands rapports de réduction (jusqu'à 1/200) et offrent des possibilités d'irréversibilité. Ils constituent les engrenages à l'engrènement le plus silencieux et sans chocs. En contrepartie le glissement et le frottement important provoquent un rendement médiocre.

### **II.1.3.3. Les engrenages à axes parallèles à denture droite ou à denture hélicoïdal**

Pour l'engrenage hélicoïdal l'angle d'inclinaison de la denture est le même pour les deux roues, mais de sens opposé. Leurs axes peuvent être orthogonaux (cas des engrenages gauches). Les engrenages droite sont les plus simples et les plus économique, mais leur utilisation est généralement bruyante et génère des vibrations et des chocs d'engrènement.

### **II.1.4. Fonctionnement des engrenages**

Pendant le fonctionnement d'une transmission, le contact d'une dent de la roue menant avec une dent de la roue menée s'amorce au pied de la dent menant et au sommet de la dent menée. L'engrènement s'effectue sur toute la largeur des dents à la fois (engrenage à dentures droites). Pour que la transmission de la rotation à l'arbre mené soit continue, l'attaque du couple de dents suivant doit se produire avant la fin de prise du couple précédent. Dans les sections perpendiculaires aux axes des roues hélicoïdales, le contact s'établit de la même façon que dans le cas des roues à dentures droites, mais du fait que les dents des roues hélicoïdales sont disposées suivant les hélices, la phase de leur engrènement varie dans les sections parallèles, contrairement aux engrenages à dentures droites où cette phase est la même sur toute la largeur des roues. A la différence d'un engrenage droit, dans un engrenage hélicoïdal le contact des dents s'établit non pas simultanément sur toute leur largeur, mais progressivement.



**Figure II.2 :** Couple de dents en contact

## II.2. Les réducteurs de vitesses

### II.2.1. Définition

Un réducteur est un ensemble d'organes mécaniques comprenant un générateur de puissance (moteur), des engrenages, des mécanismes entraînés (accouplements, frein), des structures servant de support (arbres, paliers) généralement incorporés dans un carter. Chacun des composants influence sur le comportement dynamique du réducteur, mais il est généralement admis que l'engrenage qui est l'organe de transmission par excellence, constitue une des sources principales d'excitations. S'il répond parfaitement aux exigences de rendement, de précision et de puissance spécifique imposées dans les architectures modernes, les critères de confort acoustique, de tenue vibratoire et de gain du poids sont à l'origine d'une nouvelle pression technologique sur ce composant [9].

### II.2.2. Rôle d'un réducteur de vitesse

- ✓ C'est une transmission de puissance, qui est installée entre un moteur et une machine à commander.
- ✓ C'est aussi un moteur à vitesse de fonctionnement unique et à couple nominal unique, utilisé dans la majorité des cas (qu'il soit électrique, hydraulique ou pneumatique, car c'est la solution économiquement acceptable).

Ces deux caractéristiques évoluent entre deux valeurs voisines, suivant le type de moteur, les variations de la vitesse en charge acceptées ( $n_{m0} \pm \Delta n_{m0}$ ) et le couple en charge ( $C_m \pm \Delta C_m$ ), se situant entre 2% et 10% du rendement ( $\eta$ ) énergétique souhaité.

La machine à commande fonctionne en générale à vitesse et à couple uniques, dite caractéristiques d'utilisation : ( $n_{s0} \pm \Delta n_{s0}$ ), ( $C_s \pm \Delta C_s$ ), avec des variations de l'ordre de 2% à 20%.

Il est donc nécessaire d'adapter les caractéristiques du moteur à celles de la machine, et pour cela l'élément d'adaptation entre moteur et machine est un réducteur de vitesse ou un multiplicateur de vitesse de rapport  $i$  constant (Il se nomme aussi réducteur de couple ou multiplicateur de couple), si l'on admet un rendement unité :

$$\checkmark \text{ Réducteur: } i_r = |n_{m0}| / |n_{s0}| = |C_s| / |C_m| = Cte \text{ --- } i_r > 1. \quad (\text{II.1})$$

$$\checkmark \text{ Multiplicateur : } i_m = |n_{s0}| / |n_{m0}| = |C_m| / |C_s| = Cte \text{ --- } i_m > 1. \quad (\text{II.2})$$

Le réducteur et le multiplicateur étant deux mécanismes réciproques, seul le réducteur sera étudié par la suite.

### II.2.3. Quelque exemple de réducteur

#### II.2.3.1. Réducteur élémentaires

Les réducteurs élémentaires sont les éléments de base les plus simples (figure II.2), forme d'un engrenage unique (pignon et roue) avec les guidages et les maintiens de contact assurés par un carter, ils sont caractérisés par leur géométrie et leur cinématique :

$$(O, x_{10}), (O, x_{20}), = (a_0, \Sigma_0). \quad (\text{II.3})$$

**Avec ;**  $a_0$  : entraxe linéaire,

$\Sigma_0$  : Position angulaire,

L'indice 0 signifiant simplement par rapport au référentiel.

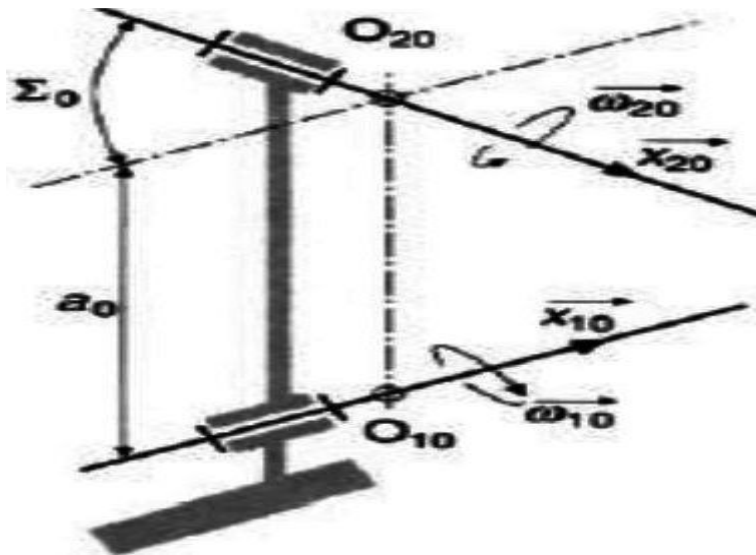


Figure (II.3) : réducteur élémentaire.

### II.2.3.2. Réducteur à engrenage cylindrique extérieur

Le réducteur à engrenage cylindrique extérieur (figure. II.4) convient à une géométrie de parallélisme entre l'arbre d'entrée et l'arbre de sortie :

$$\Sigma_0 = 0 \text{ Et } a_0 = \text{cte}$$

Les sens des rotations  $N_{m0}$  et  $N_{s0}$  sont opposés.

Les surfaces primitives sont des cylindres de révolution de diamètre  $d_1$  et  $d_2$  tangents extérieurement. La denture est normalisée, profile ISO en hélicoïdes développables, de section apparents en développante de cercle, denture droite ou denture hélicoïdale.

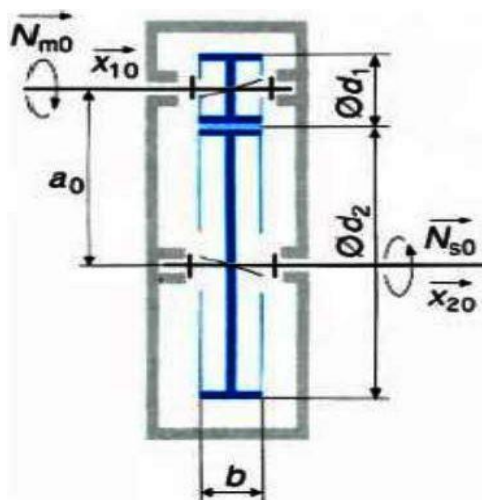


Figure (II.4) : réducteur à engrenage cylindrique extérieur.

### II.2.3.3. Réducteur à engrenage cylindrique intérieur

La géométrie parallèle entre l'arbre d'entrée et l'arbre de sortie (figure II.5) :

$$\sum_0 = 0 \text{ Et } a_0 = \text{cte}$$

Les sens de rotation sont les même.

Le même type de denture normalisée ISO est utilisé mais les surfaces primitives sont des cylindres de révolution de diamètre  $d_1$  et  $d_2$  tangents intérieurement. L'encombrement général est réduit par rapport à la solution précédente.

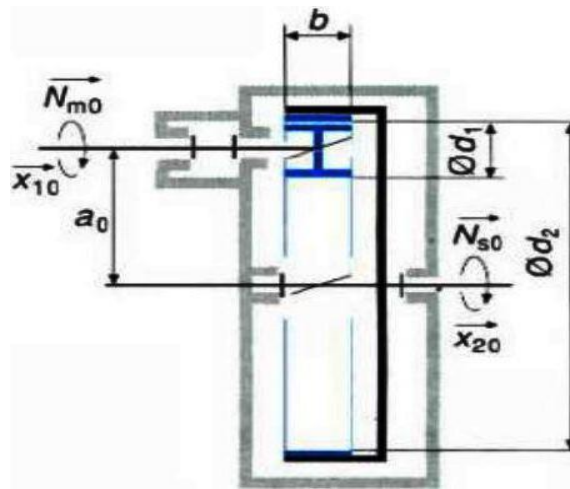


Figure (II.5) : réducteur à engrenage cylindrique intérieur.

### II.2.3.4. Réducteur à engrenage conique

Un réducteur à engrenage conique est un mécanisme sphérique utilisé dans le cas d'une géométrie de concourante des axes :

$$(O, X_{10}), (O, X_{20}) = \sum_0 \quad (\text{II.4})$$

Les surfaces primitives sont des cônes de révolution de même sommet, tangents extérieurement et le rapport de réduction  $u$  vaut :

$$u = n_{10}/n_{20} = d_1/d_2 = R_0 \sin \delta_2 / R_0 \sin \delta_1 \quad (\text{II.5})$$

$$\text{Donc} \quad u = \sin \delta_2 / \sin \delta_1 \text{ et } \delta_1 + \delta_2 = \sum_0 \quad (\text{II.6})$$

$$\text{D'où on tire } \quad \text{tang } \delta_2 = \sin \Sigma_0 / (u + \cos \Sigma_0) \quad (\text{II.7})$$

Seules les dentures extérieures peuvent être taillées en roues conique, avec pour limite la roue plate, relation de résistance de la denture :  $\delta_2 \leq \pi/2$ . (II.8)

Avec :  $\Sigma_0$  : angle des axes.

$R_0$  : longueur de génératrice d'un engrenage conique.

$\delta_1, \delta_2$  : Angles primitifs de cônes.

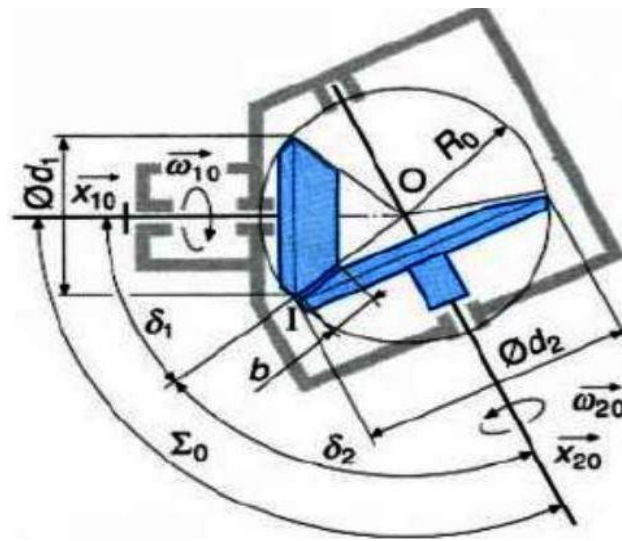


Figure (II.6) : réducteur à engrenage conique.

### II.2.3.5. Réducteur à roue et vis sans fin

On peut également utiliser une roue dentée associée à une vis sans fin pour réaliser la réduction.

Le principe de fonctionnement est simple : le mouvement de la vis autour de son axe provoque le déplacement des flancs de ses filets qui engrènent avec les dents de la roue, dont l'axe est perpendiculaire celui de la vis. La roue est donc entraînée en rotation par la vis.

### II.2.3.6. Réducteur élémentaires dérivés

Sans en arriver aux groupements d'engrenages simples, il est possible de constituer des réducteurs de base formés de plus de deux roues dentées.

### II.2.3.7. Réducteur à roue intermédiaire (ou à roue parasite)

Le pignon (1) de diamètre  $d_1$  n'est pas en contact avec la roue (2) de diamètre  $d_2$ , l'entraxe étant supérieur à la demi-somme des diamètres de têtes :  $a_0 > (d_{a1} + d_{a2}) / 2$ .

Une roue intermédiaire (3) de diamètre  $d_3$  engrène avec le pignon (1) en A avec la roue (2) en B par adaptation des deux entraxes  $a_{13}$  et  $a_{23}$ .

L'engrènement impose, en denture normalisée : le même module  $m_{n0}$ , le même angle d'hélice  $\beta_0$  puisque  $a_{n0} = 20^\circ$ .

Chaque contact extérieur en A et B change le sens de rotation. On obtient donc, ainsi, un réducteur élémentaire formé de roues à dentures extérieurs dont les vitesses sont de même sens.

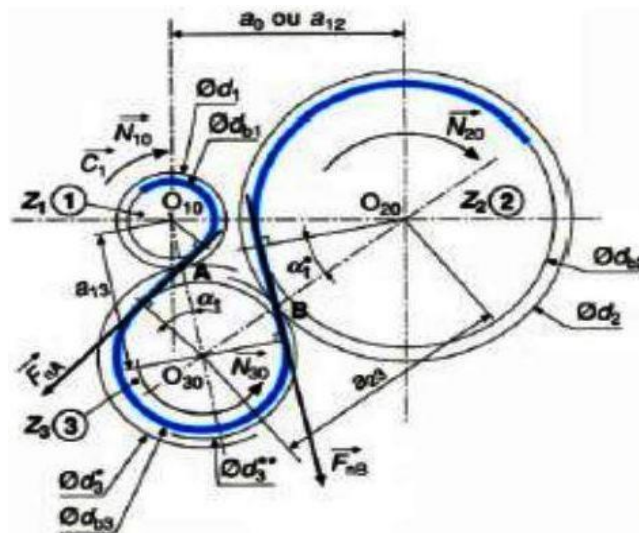


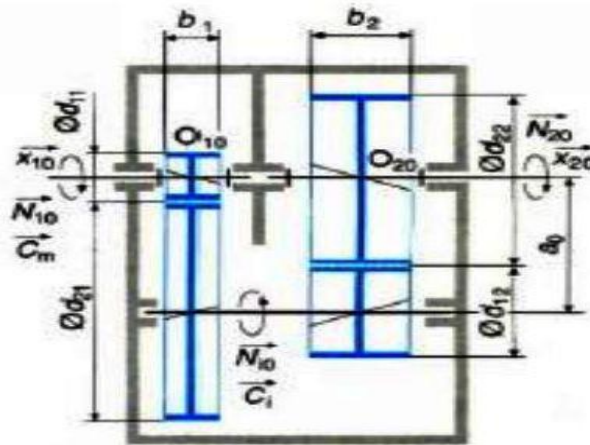
Figure (II.7) : Réducteur à roue intermédiaire (ou roue parasite).

### II.2.3.8. Réducteur coaxial à arbre intermédiaire

Ce type de réducteur permet d'assurer une géométrie coaxialité économique, puisqu'il n'y a que des roues à dentures extérieures et de plus, il est possible d'éviter les porte-à-faux :

$$(O_{10}, \vec{x}_{10}), (O_{20}, \vec{x}_{20}) = (a_0, \Sigma_0 = 0) \quad (\text{II.9})$$

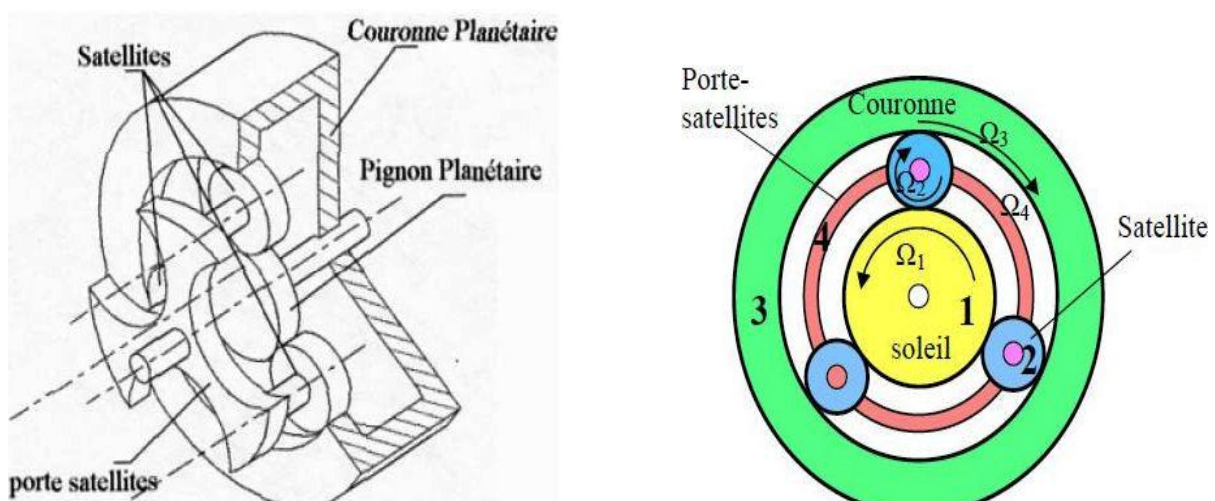
Par contre, deux engrenages sont nécessaires ainsi qu'un arbre intermédiaire parallèle aux deux autres.



**Figure (II.8)** : Réducteur coaxial à arbre intermédiaire (engrenage extérieur).

### II.2.3.9. les réducteurs (train) épicycloïdal

Les trains épicycloïdaux permettent d'obtenir (figure II.9) un grand rapport de réduction. Les configurations sont nombreuses et variées. Sous le nom de train épicycloïdal ou engrenage planétaire, on désigne un système de transmission de puissance entre deux ou plusieurs arbres dont certains tournent non seulement autour de leur propre axe, mais aussi avec leur axe autour d'un autre axe. Les engrenages peuvent être cylindriques ou conique. Ceux dont l'axe coïncide avec un axe fixe dans l'espace s'appellent "couronne et soleil" et ceux qui tournent avec leur axe autour d'un autre s'appellent "satellites". Ces derniers sont généralement maintenus en place par une pièce mobile nommée "porte-satellites". Les axes des satellites ne sont pas fixes [10].



**Figure (II.9)** : des trains épicycloïdaux

### Les systèmes planétaires offrent les avantages suivants :

- Possibilité d'arrangement coaxial des arbres.
- Réduction du poids et de l'encombrement pour une puissance donnée.
- Possibilité d'un rapport de réduction très élevé avec un minimum d'éléments pour les transmissions à faible puissance.
- Excellent rendement quand le système est judicieusement choisi.

### Les inconvénients des systèmes planétaires sont :

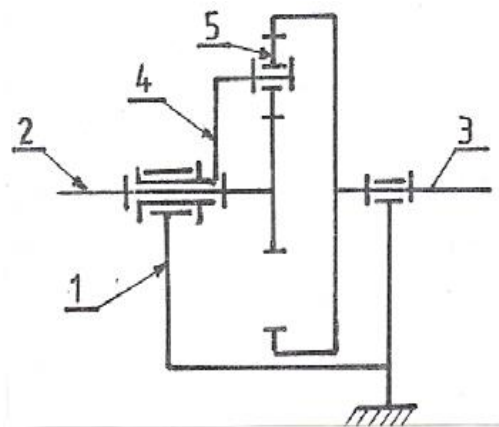
- Fortement hyperstatique.
- Rendement lié au mode de fonctionnement.
- Difficulté à aligner les éléments et à éviter les déformations qui modifient l'aligne

#### II.2.4. Différents types de trains épicycloïdaux

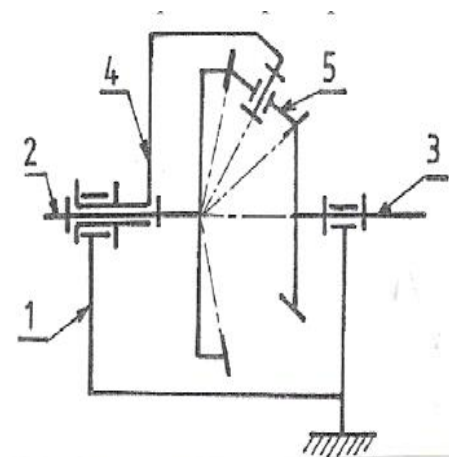
Les trains épicycloïdaux sont dits :

- **Plans** : quand les axes des roues sont parallèles (engrenage cylindriques).
- **Sphériques** : quand les axes sont concourants (engrenages concourants).
- **Gauches** : quand les axes sont quelconques.

Notre étude sur les trains épicycloïdaux sera limitée aux trains plans [11].



**Figure II.10:** trains épicycloïdal plan



**Figure II.11 :** trains épicycloïdal sphérique

Schématiquement ils sont composés de 5 éléments dans le cas général :

1. Bâti fixe
2. Planétaire (arbre d'entrée)
3. Dernière roue (arbre de sortie)
4. Porte satellite
5. Satellite

### II.2.4.1. les types des trains épicycloïdaux plans

Il existe plusieurs types de trains épicycloïdaux, les plus courants étant les trains plans, parmi lesquels on peut distinguer quatre variantes élémentaires (figure II.12). Cette classification permet l'identification d'un train en fonction de son corps. Les 4 principaux types présentés permettent le calcul du rapport de vitesse de la plupart des trains d'engrenages.

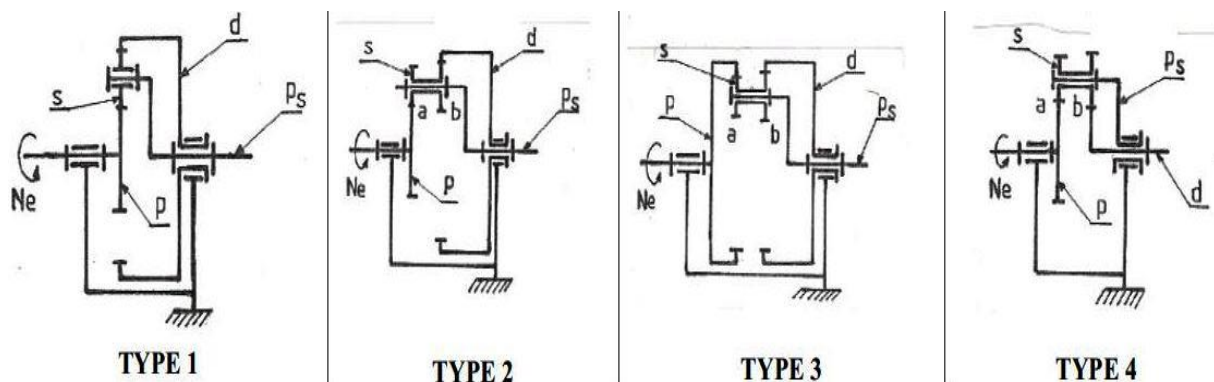


Figure (II.12) : types des trains épicycloïdaux.

#### II.2.4.1.1. Formules de Willis

On écrit d'abord la formule de Willis (loi de Willis 1841) pour un train épicycloïdal de type 1 qui permet de déterminer facilement le rapport de réduction  $i$  d'un train épicycloïdal.

$$k\Omega_1 + (1-k)\Omega_4 - \Omega_3 = 0 \quad (\text{II.10})$$

Avec :  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  les vitesses respectives du soleil, d'un satellite, de la couronne et du porte-satellites. Dans la plupart des modes de fonctionnement d'un train épicycloïdal, au moins une des pièces (le soleil, le satellite, la couronne ou le porte-satellites) est fixe. En nous appuyant sur les équations II.1, II.3 et la figure I.1 nous allons donner la valeur du rapport de réduction  $i$  pour chacun des cas :

**a) porte-satellites bloqué ( $\Omega_4 = 0$ ) :**

##### **a.1. Mode 1 :**

- L'entrée se fait par le soleil ( $\Omega_1$ ).

- La sortie par la couronne ( $\Omega_3$ ).

$$i = \frac{\Omega_{sort}}{\Omega_{entr}} = \frac{\Omega_3}{\Omega_1} = k = -\frac{Z_1}{Z_3} \quad (\text{II.11})$$

### **a.2. Mode 2 :**

- l'entrée se fait par la couronne ( $\Omega_3$ ).
- la sortie par le soleil ( $\Omega_1$ ).

$$i = \frac{\Omega_{sort}}{\Omega_{entr}} = \frac{\Omega_3}{\Omega_4} = 1 - k = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_3} \quad (\text{II.12})$$

### **b) Couronne bloquée ( $\Omega_3 = 0$ ) :**

#### **b.1. Mode 3 :**

- l'entrée se fait par le soleil ( $\Omega_1$ ).
- La sortie par le porte-satellites ( $\Omega_4$ ).

$$i = \frac{\Omega_{sort}}{\Omega_{entr}} = \frac{\Omega_4}{\Omega_1} = \frac{k}{1-k} = -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} \quad (\text{II.13})$$

#### **b.2. Mode 4 :**

- L'entrée se fait par le port-satellites ( $\Omega_4$ ).
- La sortie par le soleil ( $\Omega_1$ ).

$$i = \frac{\Omega_{sort}}{\Omega_{entr}} = \frac{\Omega_1}{\Omega_4} = \frac{1-k}{k} = -\frac{Z_1 + Z_3}{Z_1} \quad (\text{II.14})$$

### **c) soleil bloquée ( $\Omega_1 = 0$ ) :**

#### **c.1. Mode 5 :**

- L'entrée se fait par la couronne ( $\Omega_3$ ).
- La sortie par le porte-satellites ( $\Omega_4$ ).

$$i = \frac{\Omega_{sort}}{\Omega_{entr}} = \frac{\Omega_4}{\Omega_3} = \frac{1}{1-k} = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} \quad (\text{II.15})$$

#### **c.2. Mode 6 :**

- L'entrée se fait par le porte-satellites ( $\Omega_4$ ).
- La sortie par la couronne ( $\Omega_3$ ).

$$i = \frac{\Omega_{sort}}{\Omega_{entr}} = \frac{\Omega_3}{\Omega_4} = 1 - k = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_3} \quad (\text{II.16})$$

Donc on a obtenu 6 modes différents de fonctionnement et une large marge du rapport de réduction  $i$  de ce train (voir la figure II.13 et le tableau II.2)

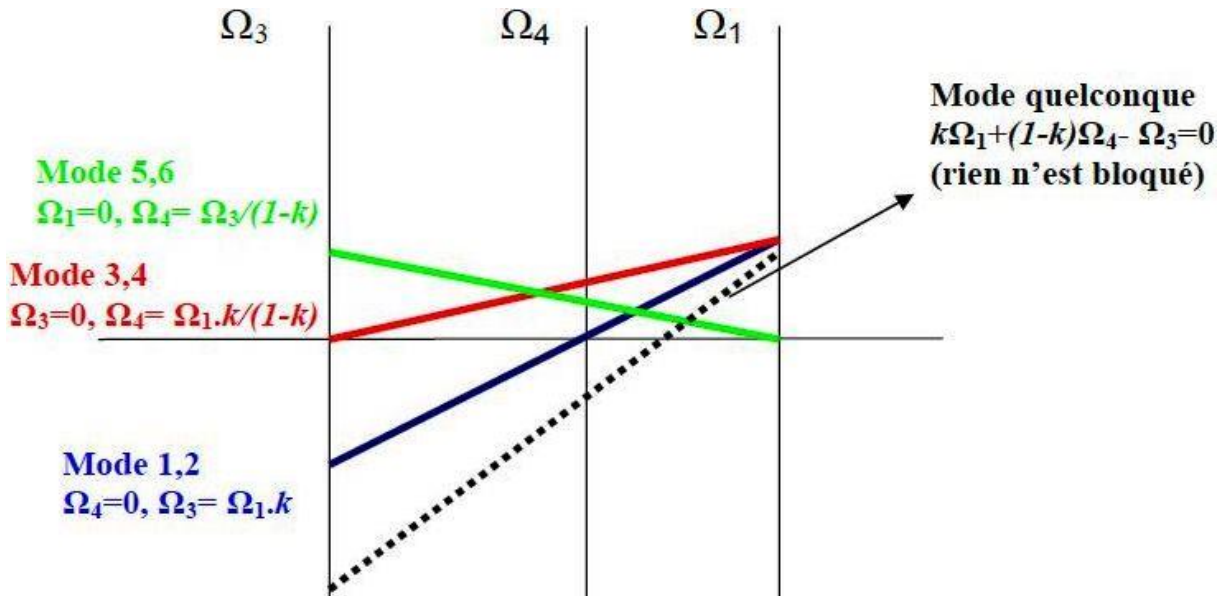


Figure (II.13) : présentation graphique des modes de fonctionnement d'un train épicycloïdal.

						Exemple $Z_1=21, Z_2=21, Z_3=63$
mode	$\Omega_{entr}$	$\Omega_{sort}$	bloqué	$i =$ $\Omega_{sort}/ \Omega_{entr}$	$i =$ $\Omega_{sort}/ \Omega_{entr}$	$\Omega_{sort}/ \Omega_{entr}$
1	$\Omega_1$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$k$	$-Z_1/Z_3$	-0,334
2	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_4$	$1/k$	$-Z_3/Z_1$	-3
3	$\Omega_1$	$\Omega_4$	$\Omega_3$	$k/(1-k)$	$-Z_1/(Z_1+Z_3)$	-0,25
4	$\Omega_4$	$\Omega_1$	$\Omega_3$	$(1-k)/k$	$-(Z_1+Z_3)/ Z_1$	-4
5	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_1$	$1/(1-k)$	$Z_3/(Z_1+Z_3)$	0,75
6	$\Omega_4$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$(1-k)$	$(Z_1+Z_3)/Z_3$	1,334

Tableau (II.2) : modes de fonctionnement d'un train épicycloïdal avec équations et un exemple de calculs

II.2.4.1.2.Trains épicycloïdaux de types 2,3 et 4

On trouve dans les trains épicycloïdaux de type 1, ceux où les satellites sont en même temps roues menantes et menées. Mais dans les types 2,3 et 4, les satellites sont faits de deux roues : une qui engrène avec la couronne et une avec le soleil. Les trains épicycloïdaux de type 2,3, et 4 sont également décrits par la formule de Willis (la méthodologie est similaire à celle relative au type 1). La différence est que les satellites ne pourront plus être en même temps menant et menés.

### II.2.4.2. Conditions de montage des trains épicycloïdaux

On a quatre conditions qu'il faut respecter pour bien monter les trains épicycloïdaux. On va les présenter dans ce qui suit :

#### a) Condition sur le module (Condition 1)

Pour tous les engrenages, deux roues ne peuvent engrener que si elles ont un module identique. Donc le soleil, le satellite et la couronne ont le même module  $m$  (équation II.10 et figure II.14) :

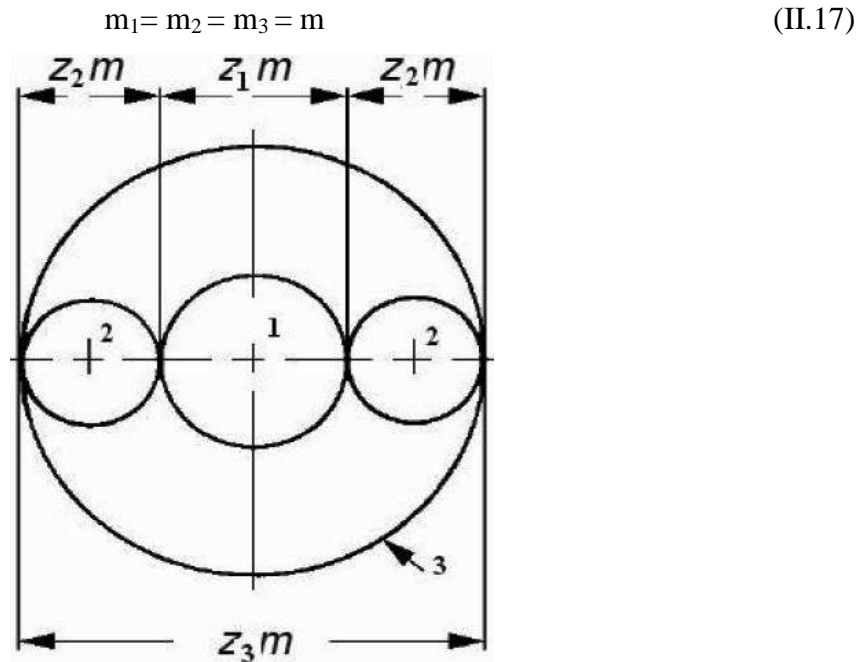


Figure (II.14) : condition 1 et 2.

#### b) Condition sur les entraxes (condition 2) :

Pour fonctionner, il faut que les diamètres de la couronne, satellite et soleil vérifiant la condition suivante (figure II.9) :

$$D_3 = D_1 + 2D_2 \quad (\text{II.18})$$

Comme :  $D = m \cdot Z$

Et à partir de l'équation II.11 on obtient :

$$Z_3 = Z_1 + 2Z_2 \quad (\text{II.19})$$

#### c) Règle du « haricot » (condition 3) :

Les trains planétaires ont de nombreux satellites,  $n_{\text{sat}}$  (souvent  $n_{\text{sat}} = 3$ ). Afin que les satellites puissent engrener en même temps avec la couronne et avec le soleil, le nombre de dents composées sur le contour en pointillés de la figure II.10 (en forme de haricot) doit être entier.

$$\frac{Z_3}{n_{\text{Sat}}} + \frac{Z_1}{n_{\text{Sat}}} + \frac{Z_2}{2} + \frac{Z_2}{2} = n_1, n_1 \text{ Est entier} \quad (\text{II.20})$$

Donc :

$$\frac{Z_3}{n_{Sat}} + \frac{Z_1}{n_{Sat}} + Z_2 = n_1 \quad (\text{II.21})$$

Le nombre de dents  $Z_2$  étant entier. On obtient donc :

$$\frac{Z_3}{n_{Sat}} + \frac{Z_1}{n_{Sat}} = n_1 - Z_2 \text{ est entier} \quad (\text{II.22})$$

C.-à-d. :  $Z_1 + Z_2 = \text{multiple de } n_{Sat}$

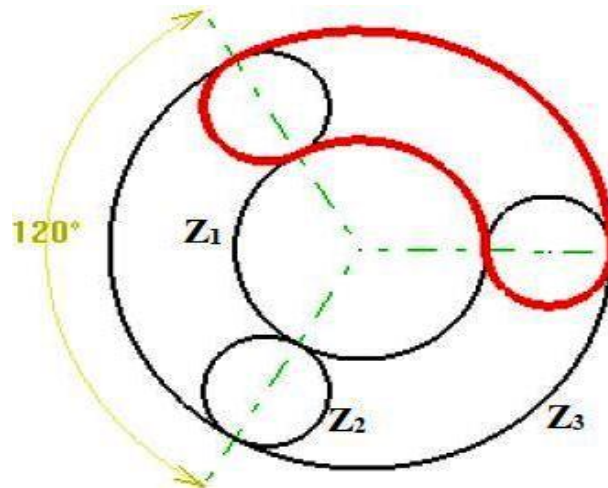


Figure (II.15) : haricot d'un train.

**a.1) Montage d'un satellite :**

$$r_1 + d_2 = r_3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{m \times Z_1}{2} + m \times Z_2 = \frac{m \times Z_3}{2} \quad (\text{II.23})$$

D'où la condition sur les nombre de dents à respecter :

$$Z_3 = Z_1 + 2 \cdot Z_2 \quad (\text{II.24})$$

**a.2) Montage de deux satellites :**

$$Z_2 + \frac{Z_1 \times Z_3}{2} = \text{entier} \quad (\text{II.25})$$

$$Z_1 + Z_3 = \text{pair} \quad (\text{II.26})$$

**a.3) Montage de trois satellites :**

$$Z_1 + Z_3 = \text{multiple de } 3 \quad (\text{II.27})$$

**II.2.4.3. Condition de non contact des satellites (condition 4) :**

Pour que deux satellites adjacents successifs ne se touchent pas il faut que l'équation II.21 soit vérifiée.

$$Z_2 + 2 < (Z_1 + Z_2) \sin\left(\frac{180}{n_{Sat}}\right) \quad (\text{II.28})$$

#### II.2.4.4. Marge permise sur la valeur de $k$ d'un train épicycloïdale de type 1

Pour un train épicycloïdal de type 1, les relations entre les engrenages doivent satisfaire l'équation I.19. Des équations I.11 et I.19, on peut déduire la marge permise de la valeur de  $k$  comme la suivante:

$$-1 < k < 0 \quad (\text{II.29})$$

### II.3. Conclusion

Une transmission est un ensemble d'organe qui permet de transmettre un mouvement. Ce mouvement est modifié de manière à être :

- ✓ A transformé un mouvement de rotation ou un mouvement de translation.
- ✓ A augmenté ou à réduire la vitesse de rotation de sortie par rapport à la vitesse d'entrée du mouvement de rotation.
- ✓ A augmenter ou réduire le couple de sortie par rapport au couple d'entrée du mouvement de rotation.

# **Chapitre III**

## **Analyse statique et cinématique d'un réducteur épicycloïdal plan**

### III.1. introduction :

L'objet de notre travail dans ce chapitre est l'analyse statique et cinématique d'un réducteur épicycloïdal plan de type I de la figure III.1 et nous présentons l'étude théorique et les calculs mathématiques qui décrivent l'évaluation des équations linéaires vers une matrice globale afin de déterminer les inconnues pour avoir les lois de transfert (entrée/sortie). Pour notre système, nous avons fait le choix d'un train épicycloïdal. Ce type de train présente l'avantage de transmettre un fort couple tout en gardant un faible encombrement.

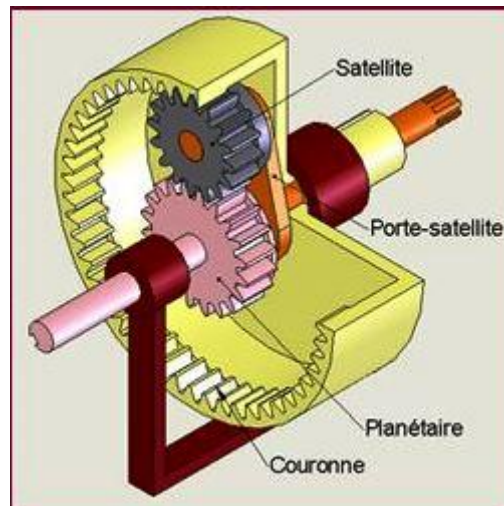


Figure III.1 : Réducteur épicycloïdal plan de type I

### III.2. Analyse de réducteur épicycloïdal

Notre système mécanique se décompose en deux parties. Une partie dite de réduction (train épicycloïdal) et une partie dite de distribution composée de l'engrenage central.

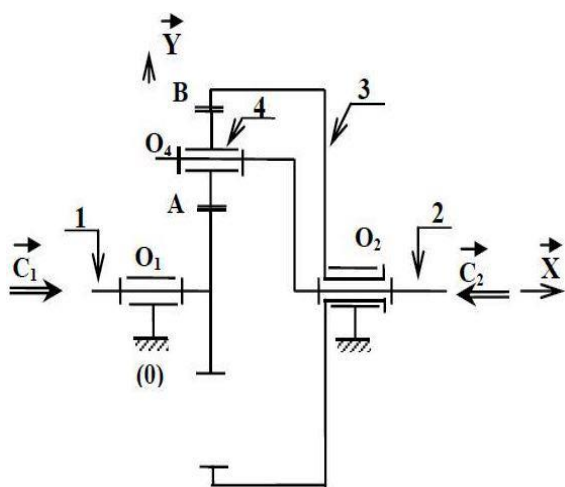


Figure III.2 : le schéma cinématique de réducteur épicycloïdal plan.

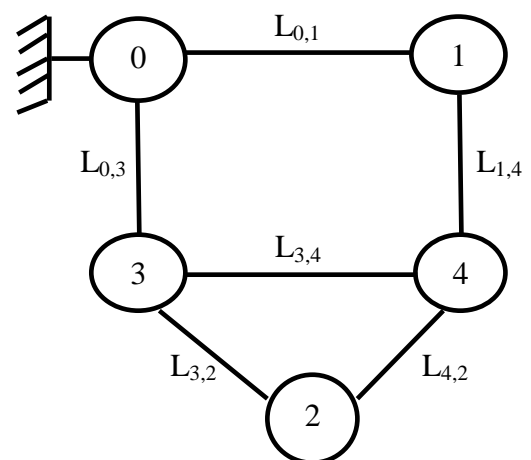


Figure III.3 : la chaîne cinématique de réducteur épicycloïdal plan

On donne dans le repère  $R_1 = (O_1, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  :

$$\begin{aligned} \vec{O_1O_4} &= \begin{pmatrix} l_1 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{O_1O_2} = \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{O_1A} = \begin{pmatrix} l_1 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{O_1B} = \begin{pmatrix} l_1 \\ r_3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{O_2A} = \begin{pmatrix} -l_3 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{O_2O_4} = \begin{pmatrix} -l_3 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{O_2B} &= \begin{pmatrix} -l_3 \\ r_3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{O_4A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r_4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{O_4B} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### III.2.1. Identification des liaisons

- Liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{X})$  de 1 avec 0 en  $O_1$  ( $L_{0,1}$ ) :  $\tau_{0 \rightarrow 1} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{array} \right\}$  ( $N_{s1} = 5$ )
- Liaison pivot d'axe  $(O_4, \vec{X})$  de 4 avec 2 en  $O_4$  ( $L_{4,2}$ ) :  $\tau_{2 \rightarrow 4} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{24} & 0 \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & N_{24} \end{array} \right\}$  ( $N_{s2} = 5$ )
- Liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{X})$  de 3 avec 2 en  $O_2$  ( $L_{3,2}$ ) :  $\tau_{3 \rightarrow 2} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & N_{32} \end{array} \right\}$  ( $N_{s3} = 5$ )
- Liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{X})$  de 3 avec 0 en  $O_2$  ( $L_{3,0}$ ) :  $\tau_{0 \rightarrow 3} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{03} & 0 \\ Y_{03} & M_{03} \\ Z_{03} & N_{03} \end{array} \right\}$  ( $N_{s4} = 5$ )
- Liaison appui ponctuel de 1 avec 4 ( $L_{1,4}$ ) et de 3 avec 4 ( $L_{3,4}$ ) en  $O_1$

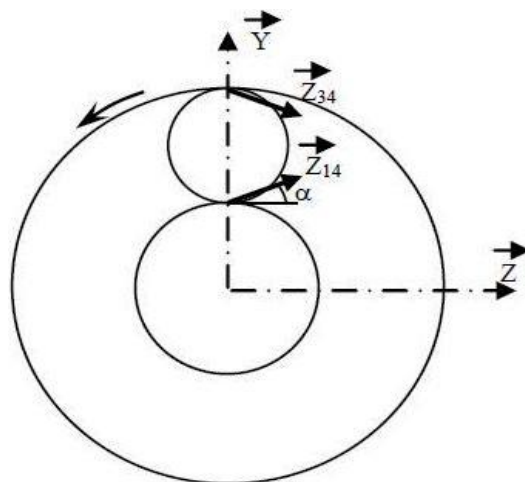


Figure III.4. Effort de contact roues du train épicycloïdal plan

$$\tau_{1 \rightarrow 4} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \sin a.Z_{14} & 0 \\ \cos a.Z_{14} & 0 \end{array} \right\} (N_{s5} = 2) \quad ; \quad \tau_{3 \rightarrow 4} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -\sin a.Z_{34} & 0 \\ \cos a.Z_{34} & 0 \end{array} \right\} (N_{s6} = 2)$$

**III.3. Analyse statique de réducteur**

On prend le graphe des de la figure III.2 et convenons de rajouter les torseurs d'action mécanique extérieure : torseur d'entrée et torseur de sortie.

$$\tau_{ext \rightarrow 1} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & C_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} \quad , \quad \tau_{ext \rightarrow 2} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & -C_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} \quad , \quad \tau_{ext \rightarrow 3} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & C_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

Etudions l'équilibre des différentes classes du système :

o Equilibre de solide 1 en  $O_1$  :  $\tau_{0 \rightarrow 1} - \tau_{1 \rightarrow 4} = -\tau_{ext \rightarrow 1} \dots\dots\dots(I)$

Le torseur  $\tau_{0 \rightarrow 1}$  est écrit au point  $O_1$ . Il reste donc à exprimer le torseur  $\tau_{1 \rightarrow 4}$  au point  $O_1$ . Ce qui donne :

$$\tau_{1 \rightarrow 4} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & r_1 \cdot \cos a.Z_{14} \\ \sin a.Z_{14} & -l_1 \cdot \cos a.Z_{14} \\ \cos a.Z_{14} & l_1 \cdot \sin a.Z_{14} \end{array} \right\}_{O_1}$$

Avec ;  $\vec{M}_{O_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \sin a.Z_{14} \\ \cos a.Z_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cdot \cos a.Z_{14} \\ -l_1 \cdot \cos a.Z_{14} \\ l_1 \cdot \sin a.Z_{14} \end{pmatrix}$

Ecrivons les six équations issues de (I) :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} X_{01} = 0 \dots\dots\dots (1) \\ Y_{01} - \sin a.Z_{14} = 0 \dots\dots\dots (2) \\ Z_{01} - \cos a.Z_{14} = 0 \dots\dots\dots (3) \\ -r_1.\cos a.Z_{14} = -C_1 \dots\dots\dots (4) \\ M_{01} + l_1.\cos a.Z_{14} = 0 \dots\dots\dots (5) \\ N_{01} - l_1.\sin a.Z_{14} = 0 \dots\dots\dots (6) \end{array} \right.$$

○ Equilibre de solide 2 en O<sub>2</sub> :  $\tau_{3 \rightarrow 2} - \tau_{2 \rightarrow 4} = -\tau_{ext \rightarrow 2} \dots\dots\dots (II)$

Le torseur  $\tau_{3 \rightarrow 2}$  est écrit au point O<sub>2</sub>. Il reste donc à exprimer le torseur  $\tau_{2 \rightarrow 4}$  au point O<sub>2</sub>. Ce

qui donne :

$$\tau_{2 \rightarrow 4} = \left\{ \begin{array}{l} X_{24} \quad r_2.Z_{24} \\ Y_{24} \quad M_{24} + l_3.Z_{24} \\ Z_{24} \quad N_{24} - l_3.Y_{24} - r_2.X_{24} \end{array} \right\}_{O_2}$$

Avec :  $\vec{M}_{O_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_{24} \\ N_{24} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l_3 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_{24} \\ Y_{24} \\ Z_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2.Z_{24} \\ M_{24} + l_3.Z_{24} \\ N_{24} - l_3.Y_{24} - r_2.X_{24} \end{pmatrix}$

Ecrivons les six équations issues de (II) :

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} X_{32} - X_{24} = 0 \dots\dots\dots (7) \\ Y_{32} - Y_{24} = 0 \dots\dots\dots (8) \\ Z_{32} - Z_{24} = 0 \dots\dots\dots (9) \\ r_2.Z_{24} = C_2 \dots\dots\dots (10) \\ M_{32} - M_{24} - l_3.Z_{24} = 0 \dots\dots\dots (11) \\ N_{32} - N_{24} + l_3.Y_{24} + r_2.X_{24} = 0 \dots\dots\dots (12) \end{array} \right.$$

○ Equilibre de solide 3 en  $O_2$ :  $\tau_{0 \rightarrow 3} + \tau_{3 \rightarrow 2} - \tau_{3 \rightarrow 4} = -\tau_{ext \rightarrow 3} \dots \dots \dots$  (III)

Le torseur  $\tau_{3 \rightarrow 2}$  et  $\tau_{0 \rightarrow 3}$  est écrit au point  $O_2$ . Il reste donc à exprimer le torseur  $\tau_{3 \rightarrow 4}$  au point  $O_2$ . Ce qui donne :

$$\tau_{3 \rightarrow 4} = \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & r_3 \cdot \cos a \cdot Z_{34} \\ -\sin a \cdot Z_{34} & l_3 \cdot \cos a \cdot Z_{34} \\ \cos a \cdot Z_{34} & l_3 \cdot \sin a \cdot Z_{34} \end{array} \right\}_{O_2}$$

Avec :  $\overline{M}_{O_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l_3 \\ r_3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin a \cdot Z_{34} \\ \cos a \cdot Z_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_3 \cdot \cos a \cdot Z_{34} \\ l_3 \cdot \cos a \cdot Z_{34} \\ l_3 \cdot \sin a \cdot Z_{34} \end{pmatrix}$

Ecrivons les six équations issues de (III) :

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} X_{03} + X_{32} = 0 \dots \dots \dots (13) \\ Y_{03} + Y_{32} + \sin a \cdot Z_{34} = 0 \dots \dots (14) \\ Z_{03} + Z_{32} - \cos a \cdot Z_{34} = 0 \dots \dots (15) \\ -r_3 \cdot \cos a \cdot Z_{34} = -C_3 \dots \dots \dots (16) \\ M_{03} + M_{32} - l_3 \cdot \cos a \cdot Z_{34} = 0 \dots \dots (17) \\ N_{03} + N_{32} - l_3 \cdot \sin a \cdot Z_{34} = 0 \dots \dots (18) \end{array} \right.$$

○ Equilibre de solide 4 en  $O_4$ :  $\tau_{1 \rightarrow 4} + \tau_{3 \rightarrow 4} + \tau_{2 \rightarrow 4} = -\tau_{ext \rightarrow 4} \dots \dots \dots$  (IV)

Le torseur  $\tau_{2 \rightarrow 4}$  est écrit au point  $O_2$ . Il reste donc à exprimer le torseur  $\tau_{3 \rightarrow 4}$  et  $\tau_{1 \rightarrow 4}$  au point  $O_4$ . Ce qui donne :

$$\tau_{1 \rightarrow 4} = \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & -r_4 \cdot \cos a \cdot Z_{14} \\ \sin a \cdot Z_{14} & 0 \\ \cos a \cdot Z_{14} & 0 \end{array} \right\}_{O_4}$$

Avec :  $\overline{M}_{O_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -r_4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \sin a \cdot Z_{14} \\ \cos a \cdot Z_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_4 \cdot \cos a \cdot Z_{14} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\tau_{3 \rightarrow 4} = \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & r_4 \cdot \cos a \cdot Z_{34} \\ -\sin a \cdot Z_{34} & 0 \\ \cos a \cdot Z_{34} & 0 \end{array} \right\}_{o_4}$$

Avec :  $\vec{M}_{o_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r_4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin a \cdot Z_{34} \\ \cos a \cdot Z_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_4 \cdot \cos a \cdot Z_{34} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ecrivons les six équations issues de (IV) :

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_{24} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (19) \\ \sin a \cdot Z_{14} - \sin a \cdot Z_{34} + Y_{24} = 0 \dots\dots\dots (20) \\ \cos a \cdot Z_{14} + \cos a \cdot Z_{34} + Z_{24} = 0 \dots\dots\dots (21) \\ -r_4 \cos a \cdot Z_{14} + r_4 \cos a \cdot Z_{34} = 0 \dots\dots\dots (22) \\ \mathbf{M}_{24} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (23) \\ \mathbf{N}_{24} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (24) \end{array} \right.$$

**III.3.1. Analyse du système linéaire statique et résultats**

L'étude algébrique de l'équilibre du système va comporter :

$$6(p - 1) = 24 \text{ équations}$$

Avec ; P = nombre de pièces

Déterminons le nombre d'inconnues de système :

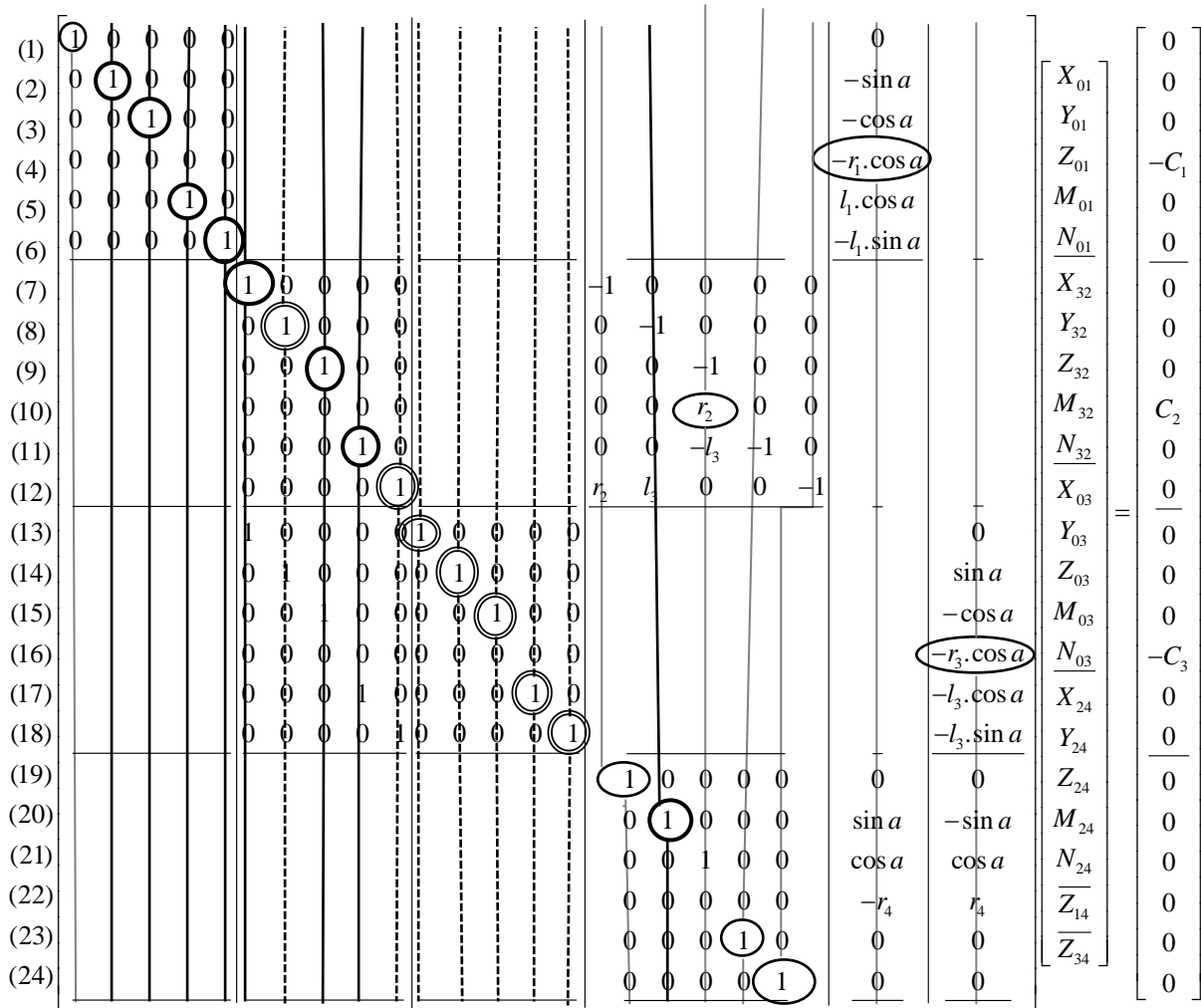
$$N_s = \sum_{i=1}^6 N_{s_i} = 24$$

Pour résoudre le système linéaire à 24 inconnues et 24 équations, on va d'abord écrire toutes les équations précédentes sous forme matricielle suivant :









❖ Résultat

– Toute les inconnues de liaisons sont calculables donc c’est un mécanisme isostatique.

$$h = N_{\text{équa}} - N_{\text{incon}}$$

$$h = 24 - 24 = 0$$

– On a trouvé deux équations secondaires (équation 21 et 22) ce qu’implique un mécanisme à deux mobilités.

$$\cos a \cdot Z_{34} + \cos a \cdot Z_{34} + Z_{24} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

$$-r_4 \cdot \cos a \cdot Z_{14} + r_4 \cdot \cos a \cdot Z_{34} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

D’après les équations (4), (10) et (16) :

$$Z_{14} = \frac{C_1}{r_1 \cdot \cos a} \quad ; \quad Z_{24} = \frac{C_2}{r_2} \quad ; \quad Z_{34} = \frac{C_3}{r_3 \cdot \cos a}$$

Nous remplaçons  $Z_{14}$ ,  $Z_{24}$  et  $Z_{34}$  dans les équations (21) et (22) on trouve :

$$(21) \Rightarrow \frac{C_1}{r_1} + \frac{C_3}{r_3} + \frac{C_2}{r_2} = 0 \dots\dots\dots (a)$$

$$(22) \Rightarrow -r_4 \cdot \frac{C_1}{r_1} + r_4 \cdot \frac{C_3}{r_3} = 0 \dots\dots\dots (b)$$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{r_3}{r_1} C_1 \dots\dots\dots \textcircled{c}$$

On remplace la valeur de  $C_3$  dans (a) :

$$\Rightarrow C_1 = \frac{r_1}{2 \cdot r_2} C_2$$

Nous retrouvons la relation entrée-sortie du mécanisme (réducteur).

### III.4. Analyse cinématique du réducteur

#### II.4.1. Définition des cycles indépendants

La théorie des graphes permet de démontrer que ;

$$\gamma = l - p + 1$$

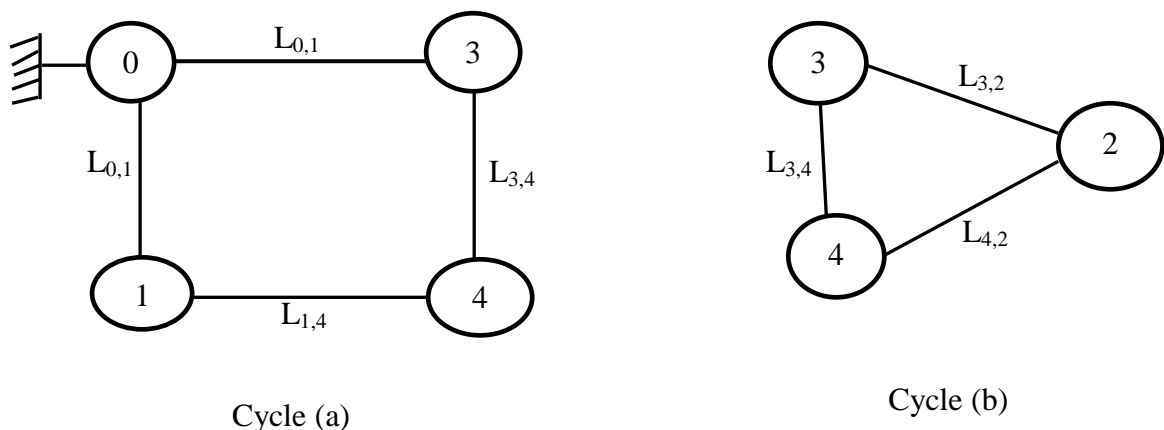
Avec ;  $\gamma$  : nombre cyclomatique.

$p$  : nombre de pièces.

$l$  : nombre de liaison.

D'après la chaîne cinématique de la figure III.2 on voit que  $p = 5$  et  $l = 6$

Donc ;  $\gamma = 6 - 5 + 1 = 2$  (deux cycles indépendants)



**Figure III.5.** Les deux cycles indépendants (a) et (b) de la chaîne cinématique.

❖ Cycle (a) :

Écrivons la loi de composition des torseurs cinématique :

$$\tau_{c(0/3)} + \tau_{c(3/4)} + \tau_{c(1/4)} + \tau_{c(1/0)} = \{\bar{0}\} \dots\dots\dots (a)$$

– Les torseurs cinématique associées aux liaisons précédentes :

$$\tau_{c(0/3)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x(0/3)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\}_{O_2} \quad (N_{c1}=1); \tau_{c(1/4)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x(1/4)} & v_{x(1/4)} \\ \mathbf{0} & v_{y(1/4)} \\ \omega_{z(1/4)} & \mathbf{0} \end{array} \right\}_A \quad (N_{c3}=4)$$

$$\tau_{c(3/4)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x(3/4)} & v_{x(3/4)} \\ \mathbf{0} & v_{y(3/4)} \\ \omega_{z(3/4)} & \mathbf{0} \end{array} \right\}_B \quad (N_{c2}=4) \quad ; \quad \tau_{c(1/0)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x(1/0)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\}_{O_1} \quad (N_{c4}=1)$$

Les torseurs  $\tau_{0 \rightarrow 3}$  et  $\tau_{0 \rightarrow 1}$  sont déjà exprimés au point  $O_1$ . Il reste donc à exprimer les torseurs  $\tau_{1 \rightarrow 4}$  et  $\tau_{3 \rightarrow 4}$  au point  $O_1$ . Ce qui donne :

$$\tau_{c(3/4)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x(3/4)} & v_{x(3/4)} + r_3 \cdot \omega_{z(3/4)} \\ \mathbf{0} & v_{y(3/4)} - l_1 \cdot \omega_{z(3/4)} \\ \omega_{z(3/4)} & -r_3 \cdot \omega_{x(3/4)} \end{array} \right\}_{O_1}$$

$$\text{Avec : } \vec{v}_{O_1}(3/4) = \begin{pmatrix} v_{x(3/4)} \\ v_{y(3/4)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ r_3 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_{x(3/4)} \\ \mathbf{0} \\ \omega_{z(3/4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x(3/4)} + r_3 \cdot \omega_{z(3/4)} \\ v_{y(3/4)} - l_1 \cdot \omega_{z(3/4)} \\ -r_3 \cdot \omega_{x(3/4)} \end{pmatrix}$$

$$\tau_{c(1/4)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{x(1/4)} & r_1 \cdot \omega_{z(1/4)} + v_{x(1/4)} \\ \mathbf{0} & -l_1 \cdot \omega_{z(1/4)} + v_{y(1/4)} \\ \omega_{z(1/4)} & -r_1 \cdot \omega_{x(1/4)} \end{array} \right\}_{O_1}$$

$$\text{Avec : } \vec{v}_{O_1}(1/4) = \begin{pmatrix} v_{x(1/4)} \\ v_{y(1/4)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ r_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_{x(1/4)} \\ \mathbf{0} \\ \omega_{z(1/4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x(1/4)} + r_1 \cdot \omega_{z(1/4)} \\ v_{y(1/4)} - l_1 \cdot \omega_{z(1/4)} \\ -r_1 \cdot \omega_{x(1/4)} \end{pmatrix}$$

○ Écrivons les équations issues de la relation (a) relativement au cycle (a) :

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \omega_{x(0/3)} + \omega_{x(3/4)} + \omega_{x(1/4)} + \omega_{x(1/0)} = 0 \dots\dots\dots (1) \\ \omega_{z(3/4)} + \omega_{z(1/4)} = 0 \dots\dots\dots (2) \\ v_{x(1/4)} + v_{x(3/4)} + r_3 \cdot \omega_{z(3/4)} + r_1 \cdot \omega_{z(1/4)} = 0 \dots\dots\dots (3) \\ v_{y(1/4)} + v_{y(3/4)} - l_1 \cdot \omega_{z(3/4)} - l_1 \cdot \omega_{z(1/4)} = 0 \dots\dots\dots (4) \\ -r_3 \cdot \omega_{x(3/4)} - r_1 \cdot \omega_{x(1/4)} = 0 \dots\dots\dots (5) \end{array} \right.$$

❖ Cycle (b) :

Ecrivons la loi de composition des torseurs cinématique pour le cycle (b) :

$$\tau_{c(3/4)} + \tau_{c(4/2)} + \tau_{c(3/2)} = \{\vec{0}\} \dots\dots\dots (b)$$

– Les torseurs cinématique associées aux liaisons :

$$\tau_{c(4/2)} = \left. \begin{array}{c} \omega_{x(4/2)} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad (N_{c5} = 1) \quad ; \quad \tau_{c(3/2)} = \left. \begin{array}{c} \omega_{x(3/2)} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad (N_{c6} = 1)$$

$$\tau_{c(3/4)} = \left. \begin{array}{c} \omega_{x(3/4)} \\ 0 \\ \omega_{z(3/4)} \end{array} \right| \begin{array}{c} v_{x(3/4)} \\ v_{y(3/4)} \\ 0 \end{array} \quad (N_{c7} = 4)$$

Les torseurs  $\tau_{3 \rightarrow 2}$  sont déjà exprimés au point  $O_2$ . Il reste donc à exprimer les torseurs  $\tau_{4 \rightarrow 2}$  et  $\tau_{3 \rightarrow 4}$  au point  $O_2$ . Ce qui donne :

$$\tau_{c(3/4)} = \left. \begin{array}{c} \omega_{x(3/4)} \\ 0 \\ \omega_{z(3/4)} \end{array} \right| \begin{array}{c} v_{x(3/4)} + r_3 \cdot \omega_{z(3/4)} \\ v_{y(3/4)} + l_3 \cdot \omega_{z(3/4)} \\ -r_3 \cdot \omega_{x(3/4)} \end{array}$$

$$\text{Avec : } \vec{v}_{O_2}(4/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l_3 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_{x(4/2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_2 \cdot \omega_{x(4/2)} \end{pmatrix}$$

$$\tau_{c(4/2)} = \left. \begin{array}{l} \omega_{x(4/2)} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -r_2 \cdot \omega_{x(4/2)} \end{array}$$

$$\text{Avec : } \vec{v}_{O_2}(4/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l_3 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_{x(4/2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_2 \cdot \omega_{x(4/2)} \end{pmatrix}$$

○ Ecrivons les équations issues de la relation (b) relativement au cycle (b) :

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \omega_{x(4/2)} + \omega_{x(3/4)} + \omega_{x(3/2)} = 0 \dots\dots\dots (6) \\ \omega_{z(3/4)} = 0 \dots\dots\dots (7) \\ v_{x(3/4)} + r_3 \cdot \omega_{z(3/4)} = 0 \dots\dots\dots (8) \\ v_{y(3/4)} + l_3 \cdot \omega_{z(3/4)} = 0 \dots\dots\dots (9) \\ -r_2 \omega_{x(4/2)} - r_3 \cdot \omega_{x(3/4)} = 0 \dots\dots\dots (10) \end{array} \right\} (b) \end{array}$$

**II.4.2. Analyse du système linéaire cinématique et résultats**

On un système linéaire de 10 équations (a) et (b), qui comporte

$$N_c = \sum_{i=1}^6 N_{C_i} = 12 \text{ Inconnues.}$$

Pour résoudre le système linéaire à 12 inconnues, on va d'abord écrire tous les équations précèdent sous forme matricielle :

$$\begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3) \\
 (4) \\
 (5) \\
 (6) \\
 (7) \\
 (8) \\
 (9) \\
 (10)
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & r_1 & 1 & 0 & 0 & r_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -l_1 & 0 & 1 & 0 & -l_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_2 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \omega_{x(1/0)} \\
 \omega_{x(1/4)} \\
 \omega_{z(1/4)} \\
 v_{x(1/4)} \\
 v_{y(1/4)} \\
 \omega_{x(3/4)} \\
 \omega_{z(3/4)} \\
 v_{x(3/4)} \\
 v_{y(3/4)} \\
 \omega_{x(0/3)} \\
 \omega_{x(4/2)} \\
 \omega_{X(3/2)}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

On va appliquer la même méthode d'élimination progressive des inconnues pour les degrés de mobilité et d'hyperstatisme du mécanisme.

❖ Premier niveau d'élimination :

- Inconnues éliminées :  $W_{z(3/4)}$ .
- Equation secondaires : aucune.

$$\begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3) \\
 (4) \\
 (5) \\
 (6) \\
 (7) \\
 (8) \\
 (9) \\
 (10)
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & r_1 & 1 & 0 & 0 & r_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -l_1 & 0 & 1 & 0 & -l_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_2 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \omega_{x(1/0)} \\
 \omega_{x(1/4)} \\
 \omega_{z(1/4)} \\
 v_{x(1/4)} \\
 v_{y(1/4)} \\
 \omega_{x(3/4)} \\
 \omega_{z(3/4)} \\
 v_{x(3/4)} \\
 v_{y(3/4)} \\
 \omega_{x(0/3)} \\
 \omega_{x(4/2)} \\
 \omega_{X(3/2)}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

❖ Deuxième niveau d'élimination :

- Inconnues éliminées ;  $W_{z(1/4)}$ ,  $V_{x(3/4)}$ ,  $V_{y(3/4)}$ .
- Equation secondaires : aucune.

-

$$\begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3) \\
 (4) \\
 (5) \\
 (6) \\
 (7) \\
 (8) \\
 (9) \\
 (10)
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & r_1 & 1 & 0 & 0 & r_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -l_1 & 0 & 1 & 0 & -l_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_3 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_2 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \omega_{x(1/0)} \\
 \omega_{x(1/4)} \\
 \omega_{z(1/4)} \\
 v_{x(1/4)} \\
 v_{y(1/4)} \\
 \omega_{x(3/4)} \\
 \omega_{z(3/4)} \\
 v_{x(3/4)} \\
 v_{y(3/4)} \\
 \omega_{x(0/3)} \\
 \omega_{x(4/2)} \\
 \omega_{X(3/2)}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

❖ Troisième niveau d'élimination :

- Inconnues éliminer ;  $V_{x(1/4)}, V_{y(1/4)}$ .
- Aucune équation secondaire.

$$\begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3) \\
 (4) \\
 (5) \\
 (6) \\
 (7) \\
 (8) \\
 (9) \\
 (10)
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & r_1 & \textcircled{1} & 0 & 0 & r_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -l_1 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -l_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_3 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_2 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \omega_{x(1/0)} \\
 \omega_{x(1/4)} \\
 \omega_{z(1/4)} \\
 v_{x(1/4)} \\
 v_{y(1/4)} \\
 \omega_{x(3/4)} \\
 \omega_{z(3/4)} \\
 v_{x(3/4)} \\
 v_{y(3/4)} \\
 \omega_{x(0/3)} \\
 \omega_{x(4/2)} \\
 \omega_{X(3/2)}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Après ces trois niveaux d'élimination il reste le sous-système de quatre (4) équations à six (6) inconnues suivant :

$$\begin{array}{l} (1) \\ (5) \\ (6) \\ (10) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 & -r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -r_3 & 0 & -r_2 & 0 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \omega_{x(1/0)} \\ \omega_{x(1/4)} \\ \omega_{x(3/4)} \\ \omega_{x(0/3)} \\ \omega_{x(4/2)} \\ \omega_{x(3/2)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

La matrice cinématique admet maintenant un rang ( $r_g = 4$ ). Mais avec un nombre d'inconnues cinématiques égales à 6, on obtient un degré de mobilité  $\mathbf{m}_C = 2$ .

$$m_C = N_C + r_C = 6 - 4 = 2$$

D'autre part comme  $r_C = E_C$ , on obtient  $\mathbf{h} = 0$ .  $h = E_C - r_C = 4 - 4 = 0$

Le modèle est bien isostatique mais son degré de mobilité est modifié. Il reste donc à vérifier que le degré de mobilité supplémentaire est un degré de mobilité interne, sinon le modèle isostatique envisagé n'est pas une solution valide.

Cette vérification s'obtient en recherchant la loi entrée-sortie.

Les deux équations (5) et (10) permettent le calcul d'une même vitesse  $W_{x(3/4)}$ . Une de deux équations est principale (au choix) et l'autre est secondaire et doit vérifier le résultat de la première. Une condition de compatibilité doit exister entre les deux équations.

$$\left. \begin{array}{l} (5) \Rightarrow \omega_{x(3/4)} = -\frac{r_1}{r_3} \omega_{x(1/4)} \\ (10) \Rightarrow \omega_{x(3/4)} = -\frac{r_2}{r_3} \omega_{x(4/2)} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_{x(1/4)} = \frac{r_2}{r_1} \omega_{x(4/2)}$$

Cette relation c'est la loi entrée-sortie cinématique.

On remarque que la vitesse de sortie ne dépend que d'une seule vitesse d'entrée, donc la mobilité utile égale à 1 ( $m_{cu} = 1$ ), et la mobilité interne égale à 1 ( $m_{ci} = 1$ ).

**Conclusion :**

Afin d'assurer le bon fonctionnement de l'engrenage épicycloïdale il faut passer par une étude statique et une autre cinématique grâce auxquelles on détermine respectivement les efforts de liaisons et les relations entre les paramètres d'entrée et de sortie (la loi de transfert) d'une part et les vitesses et les degrés de mobilité (utile et interne) ainsi que les paramètres d'entrée sortie cinématique de l'autre part.

# Conclusion générale

## **Conclusion générale**

Ce travail nous a permis d'enrichir nos connaissances dans la construction mécanique et en particulier les transmissions par engrenage, et de comprendre leurs intérêts sur les réducteurs et les multiplicateurs de vitesses.

Notre étude est basée essentiellement sur la contribution de l'analyse cinématique et statique d'un réducteur épicycloïdal plan de type I. A partir de cette analyse nous avons pu trouver les fonctions de transfert dans le cas statique et cinématique ; ces dernières nous aident dans la conception optimale de réducteur. Cette étude nous a aussi permis de toucher l'utilité du logiciel SolidWorks dans le domaine de la conception, la création d'éléments et de formes géométriques bidimensionnelles et tridimensionnelles, réalisation des schémas, assemblage d'éléments, en respectant les contraintes imposées par les normes.

En perspective, nous espérons que ce travail sera comme une source d'inspirations aux promotions avenir, et qu'il va les aider à mieux comprendre comment faire une analyse cinématique et statique d'un mécanisme.

## Références bibliographiques

## Références bibliographiques

[1] : Jean-Dominique Mosser, Jacques Tanoh, Pascal Leclercq, « **SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGENIER** ». Dunod, Paris, 2010.

[2] : Gilbert Balsce « **Schéma cinématique des mécanismes** ».  
Professeur en classes préparatoires au lycée Louis-le-Grand.

[3] : Michel Aublin, René Boncompain, Michel Boulaton, Daniel Caron, Emile Jeay, Bernard Lacage, Jaccky Réa, « **SYSTEMES MECANIQUES, théorie et dimensionnement** ».  
Sont des professeurs en classes préparatoires technologiques et en sections de techniciens supérieurs.

[4] : Sylvie Pommier, Yves Berthaud, « **Mécanique Générale**». Dunod, paris, 2010.

[5] : PIERRE AGATI / MARC ROSSETTO, « **Liaisons et mécanismes** », Edition DUNOD, paris 1994.

[6] : JEAN-LOUIS FANCHON, « **GUIDE DE MACANIQUE, Sciences et technologies industrielles**». Novembre 1998.  
Professeur agrégé de mécanique.  
Ancien élève de l'ENS/ Cachan/.

[7] : R. LE BORZEC/ J. LOTTERIE « **principe de la théorie des mécanismes** » Edition DUNOD, Paris 1975.

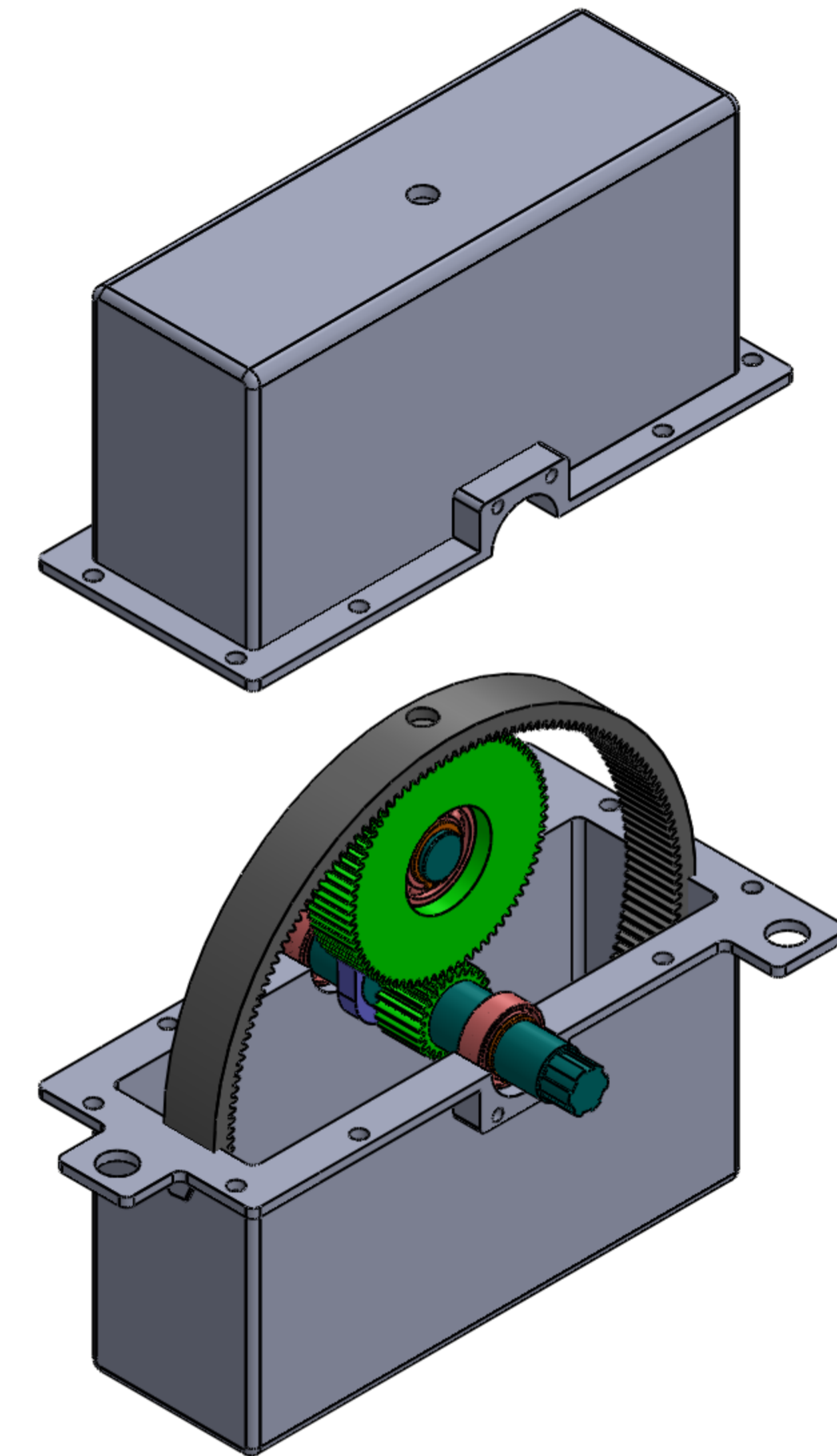
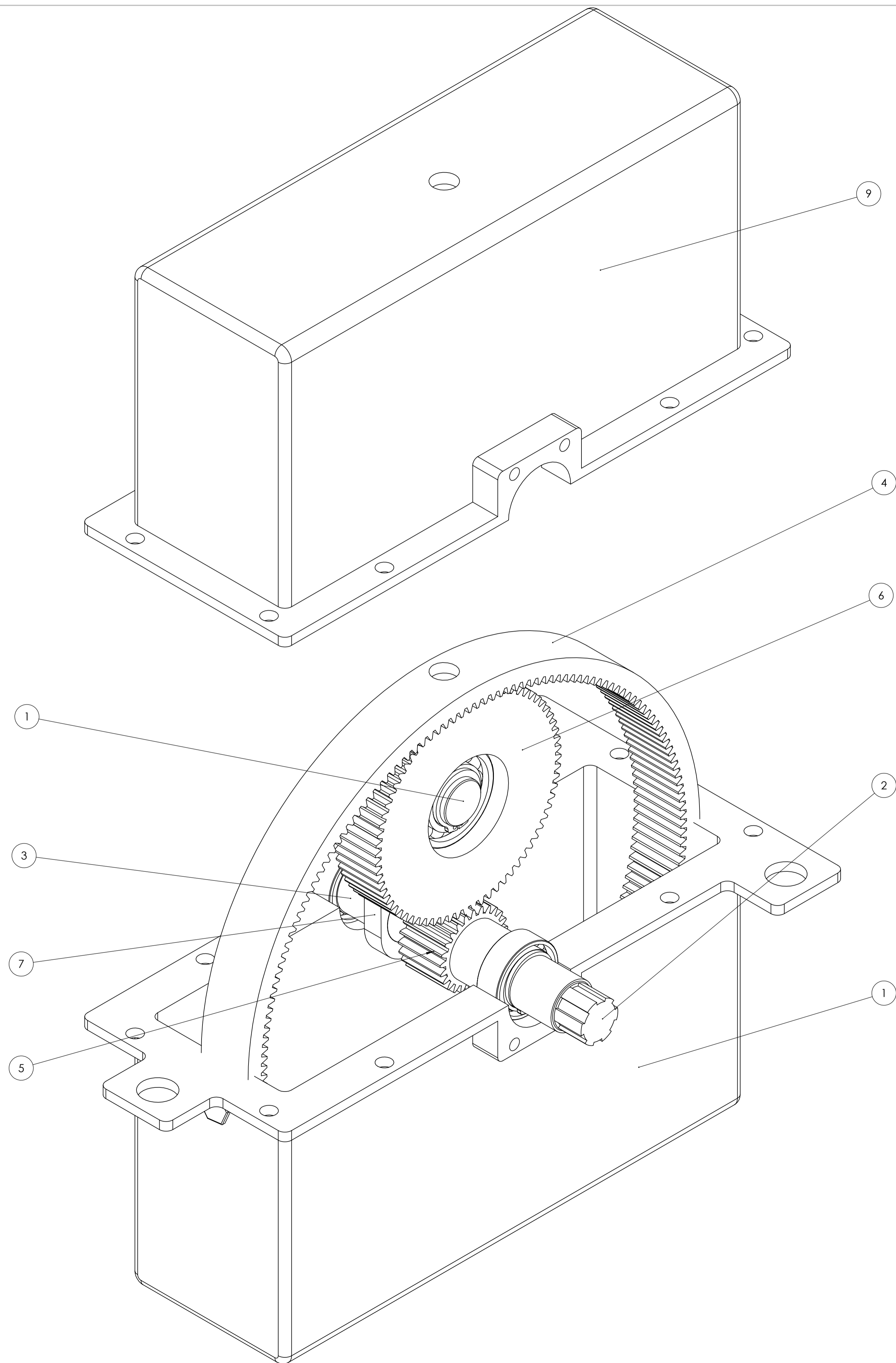
[8] : CETIM, Centre D'Etude des Technique de L'Ingénier Mécanique « **Engrenage. Définition. Contrôle. Table d'involutés** ».

[9] : ROBERT. LE BORZEC, « **Réducteur de vitesse à engrenage** ».  
Professeur de construction mécanique à l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers de Lille.

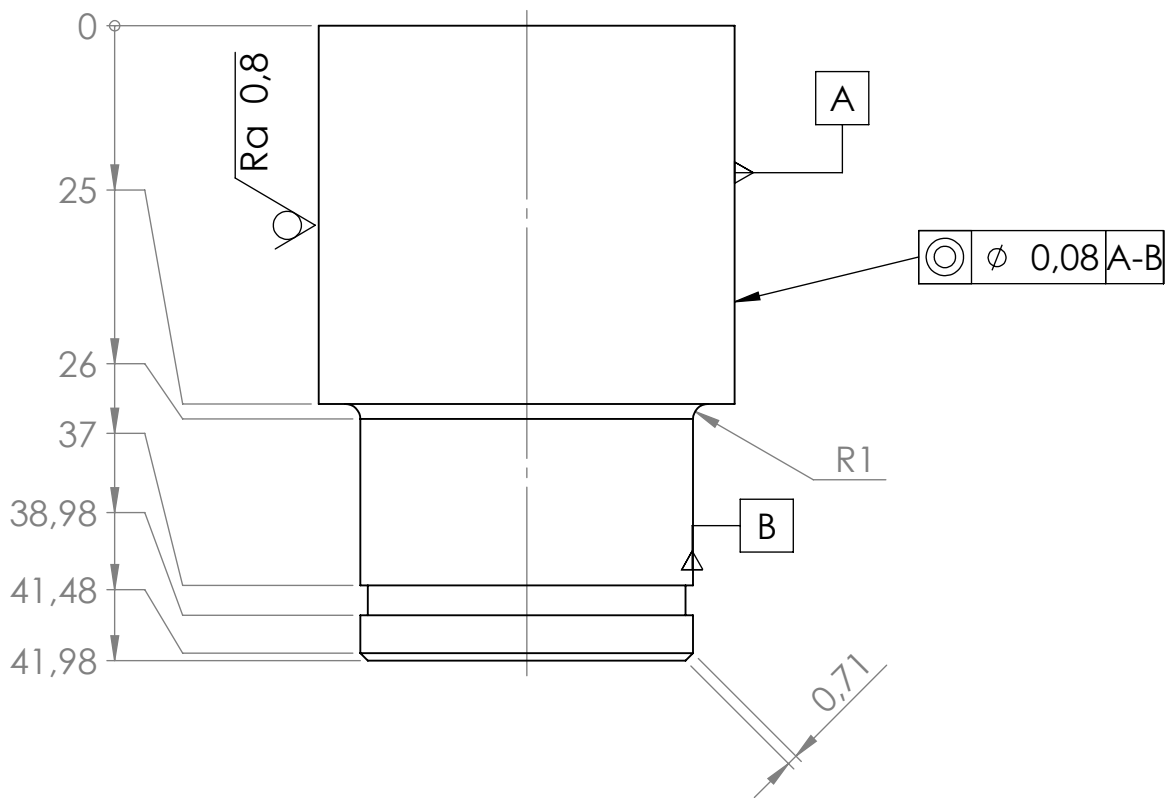
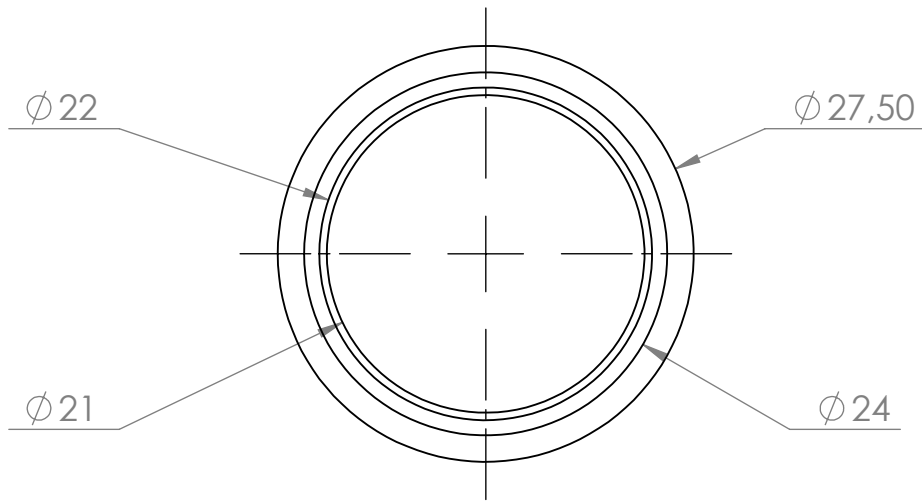
[10] : Thèse de Eid Abdelbaki Ahmed GOUDA « **TRANSMISSION PLANETAIRE MAGNETIQUE ETUDE, OPTIMISSATION ET REALISATION** ». 20 Juin 2011.

[11] : Philipe Arqués « **transmission mécaniques de puissance ; Application aux boîtes de vitesses automatiques** ».

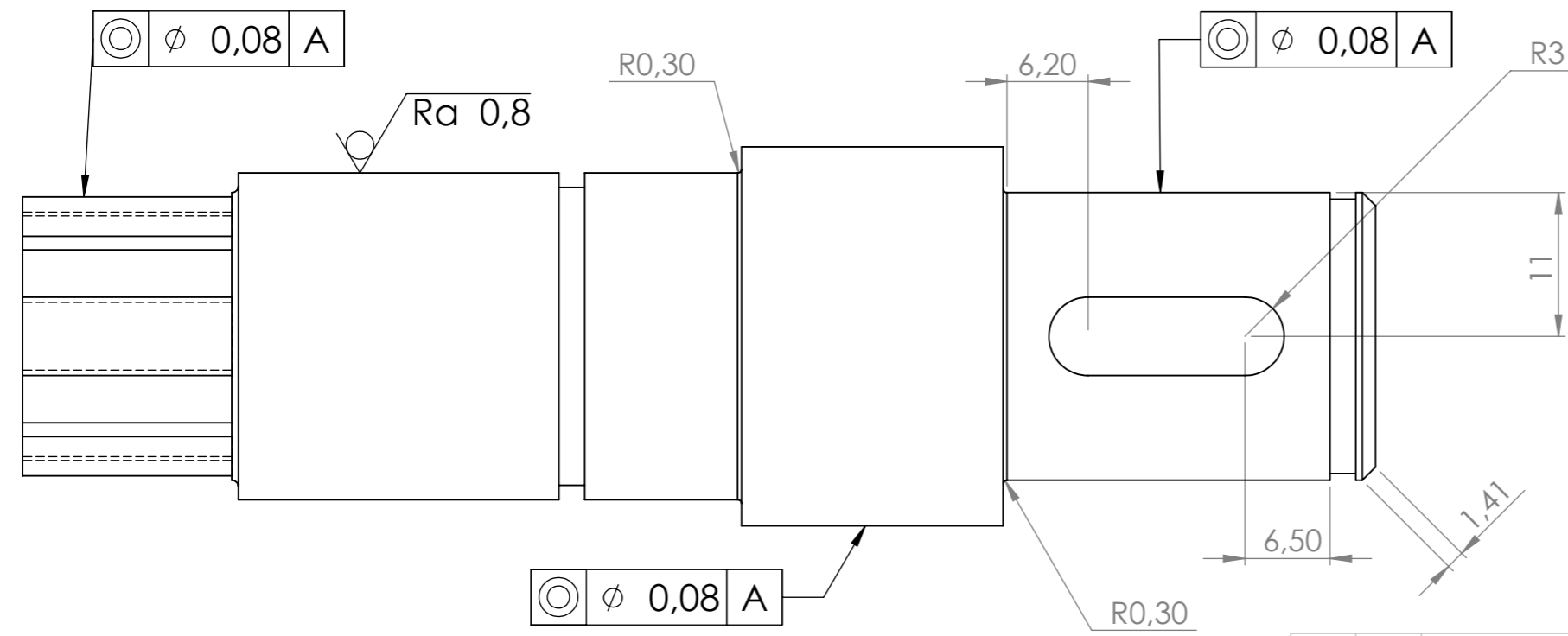
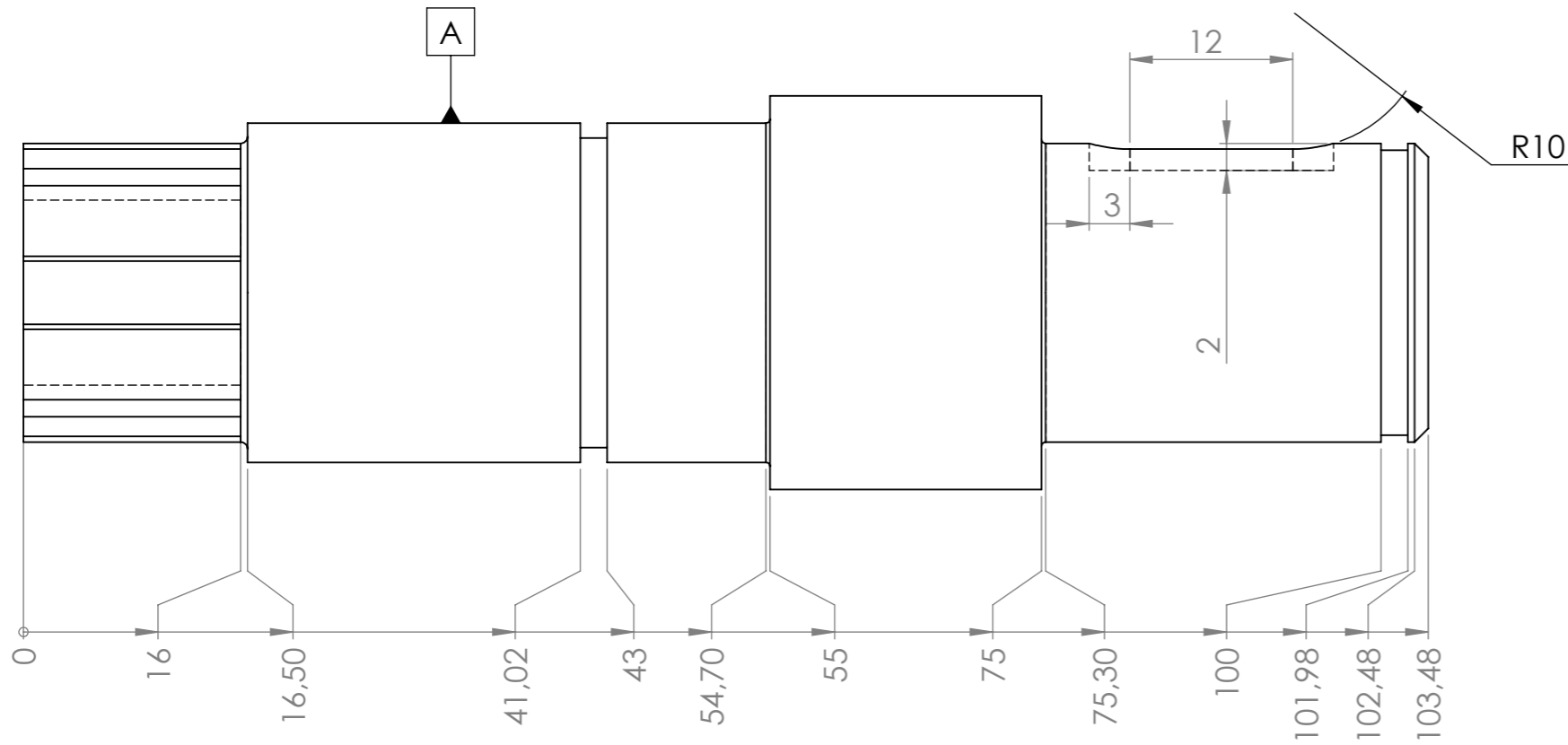
# Les Mises en plan



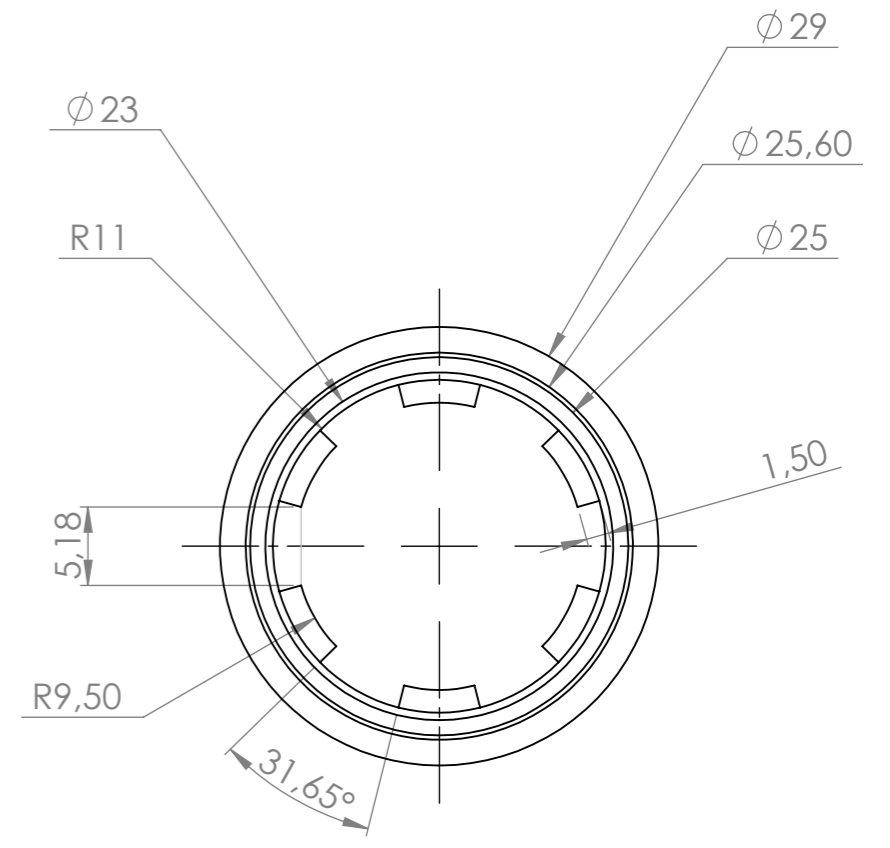
09	01	CACHE CARTER		Moulage
08	01	CARTER		Moulage
07	01	PORTE SATELLITE		Usinée
06	01	SATELLITE		Usinée
05	01	PIGNON		Usinée
04	01	COURONNE		Usinée
03	01	ARBRE DE SORTIE		Usinée
02	01	ARBRE D'ENTREE		Usinée
01	01	ARBRE A SATELLITE		Usinée
RF	NB	Designation	Matière	Observation
Echelle 1:1		Réducteur épicycloïdal plan de type I		
		UMMTO-FGC-DGM	MASTER 2 CM	
A1		BOUDJAHROUNE MADJID	Planche N°01	



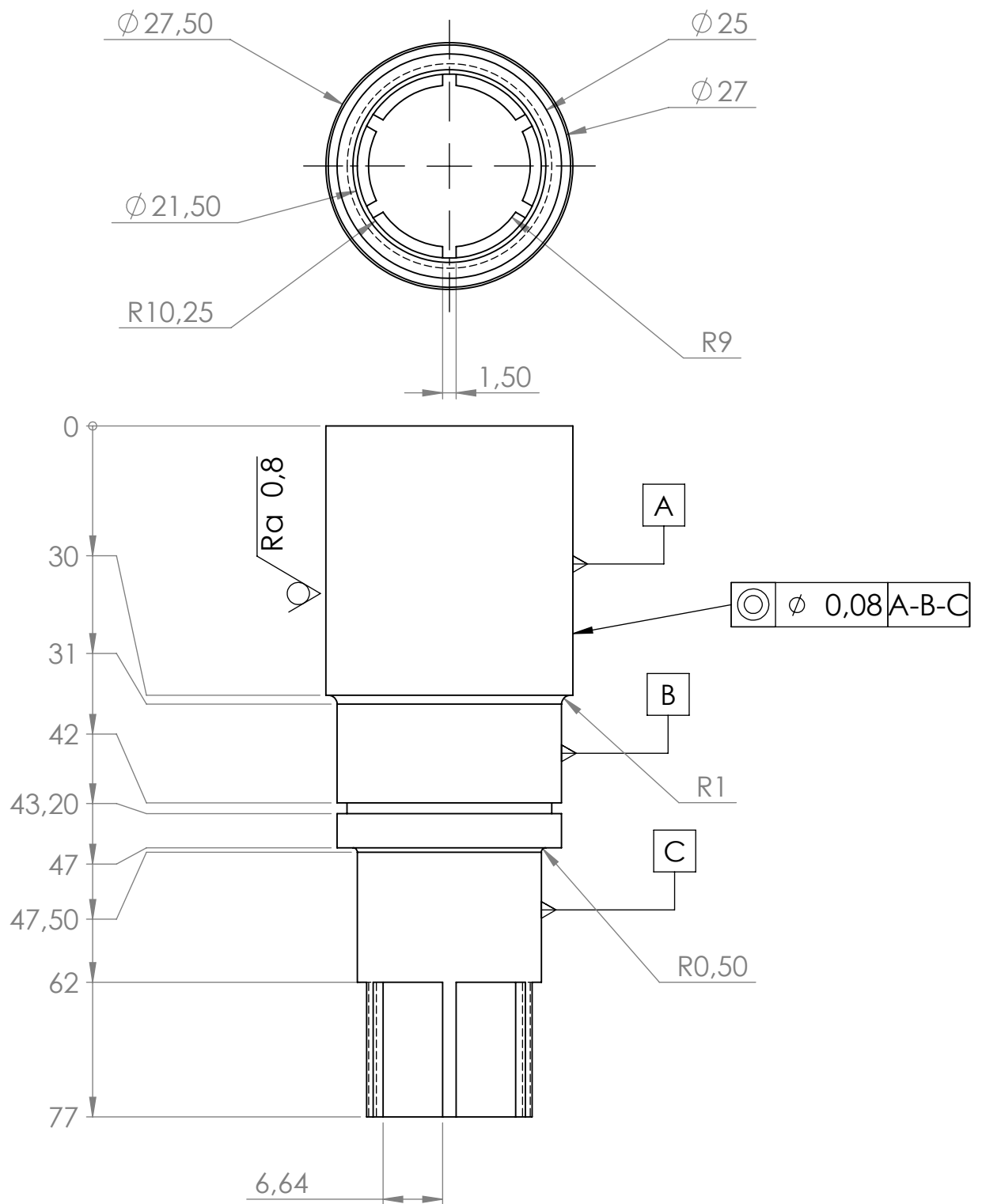
01	01	Arbre à satellite		Usinée
RF	NB	Designation	Matière	Observation
Echelle: 2:1		Réducteur épicycloïdal plan de type I		
		UMMTO-FGC-DGM		Master 2 CM
A4		BOUDJAHROUNE Madjid		Planche n° 02



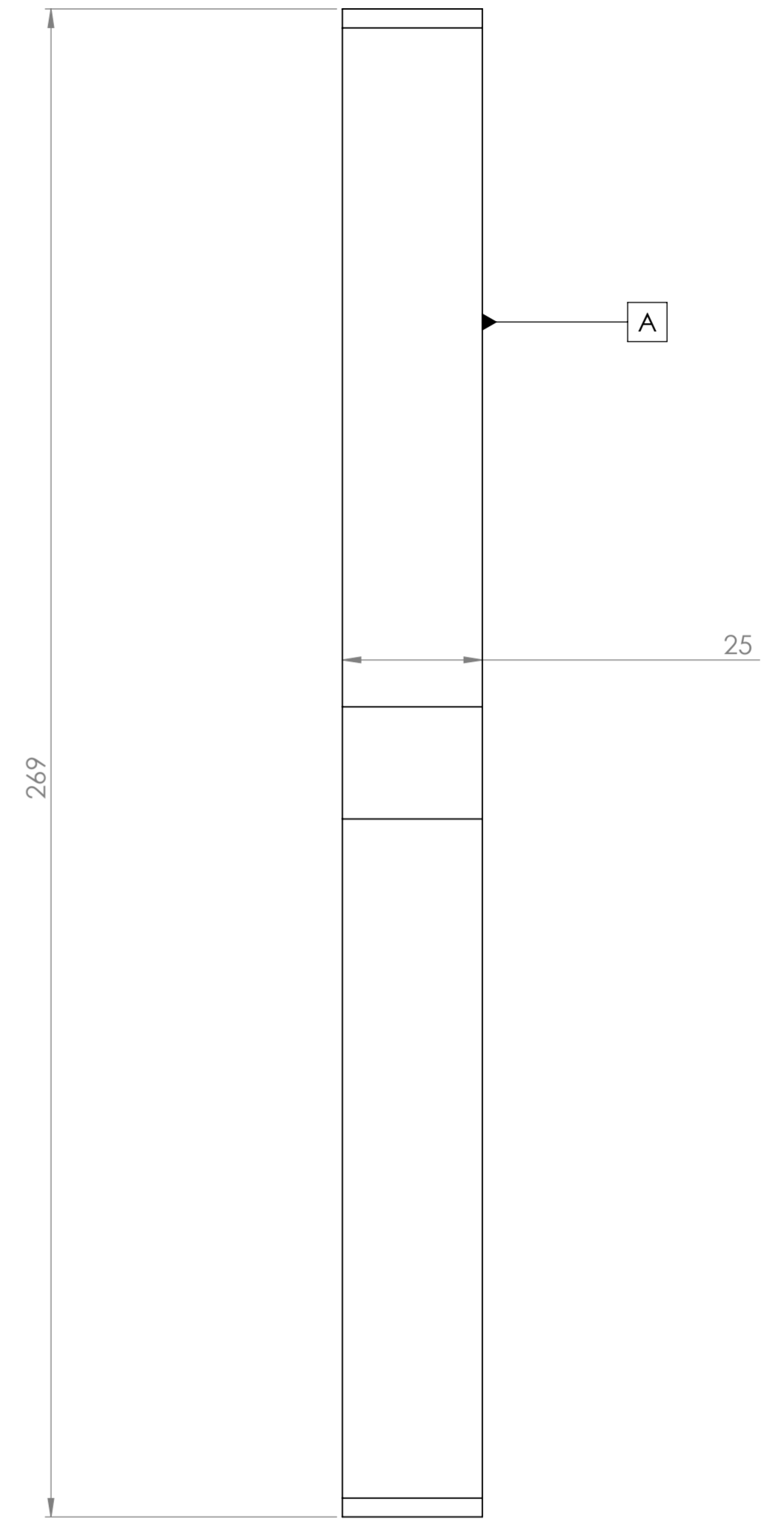
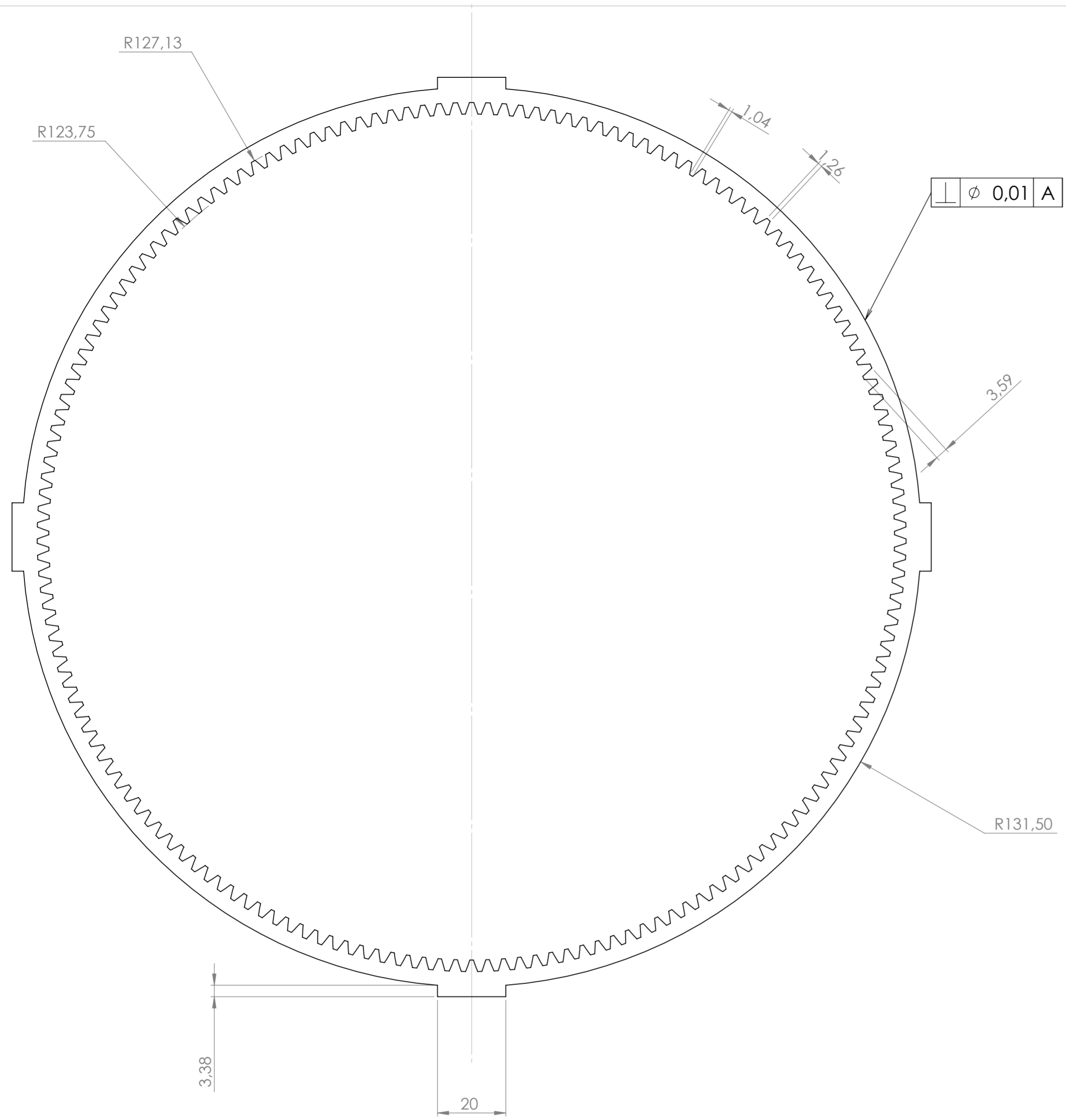
ECHELLE 2 : 1



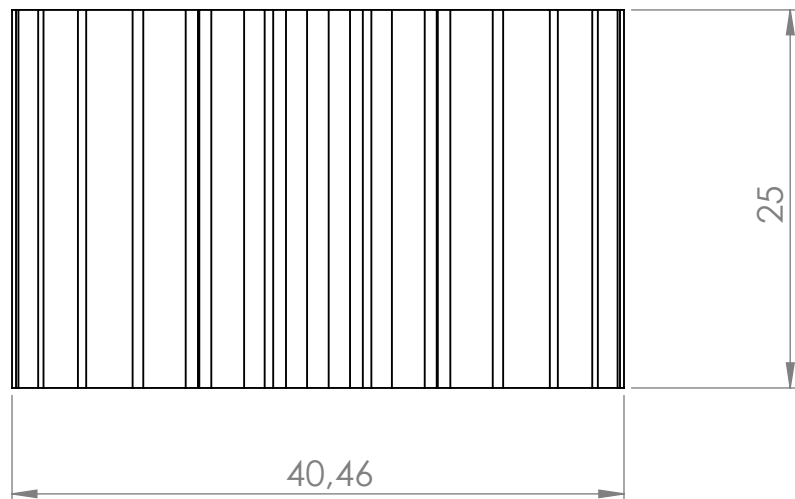
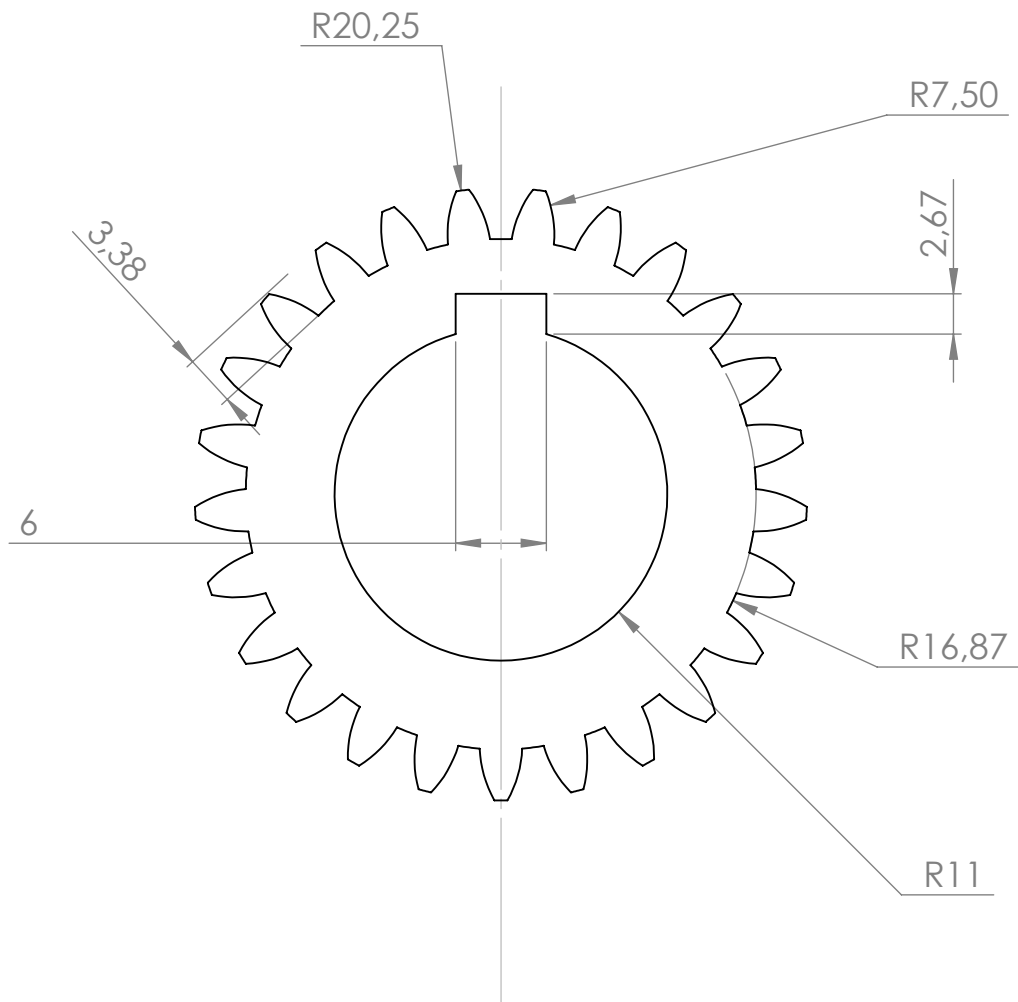
02	01	Arbre d'entrée		Usinée
RF	NB	Designation	Matiere	Observation
Echelle 2:1		Réducteur épicycloïdal plan de type I		
 A3		UMMTO-FGC-DGM		Master 2 CM
		BOUDJAHROUNE Madjid		Planche n°: 03

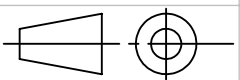


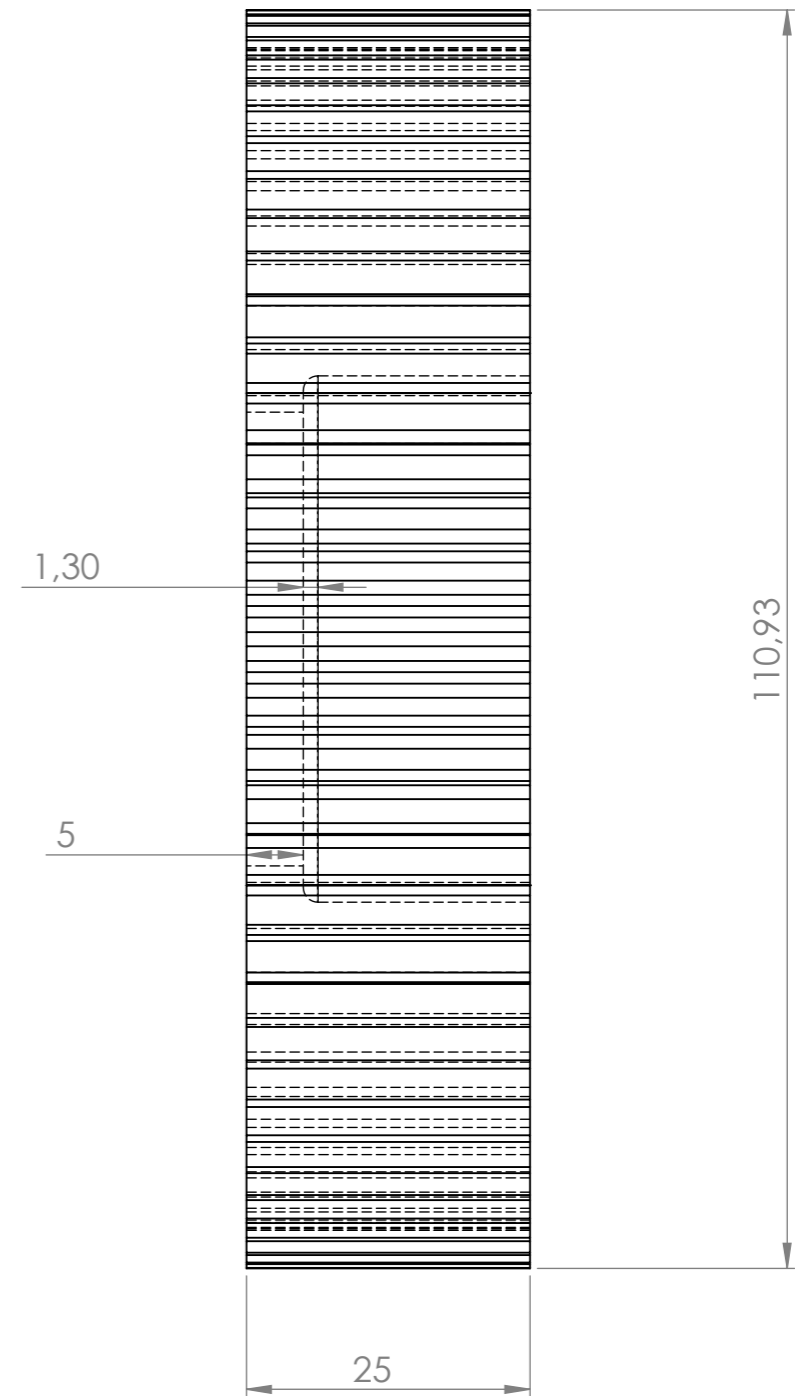
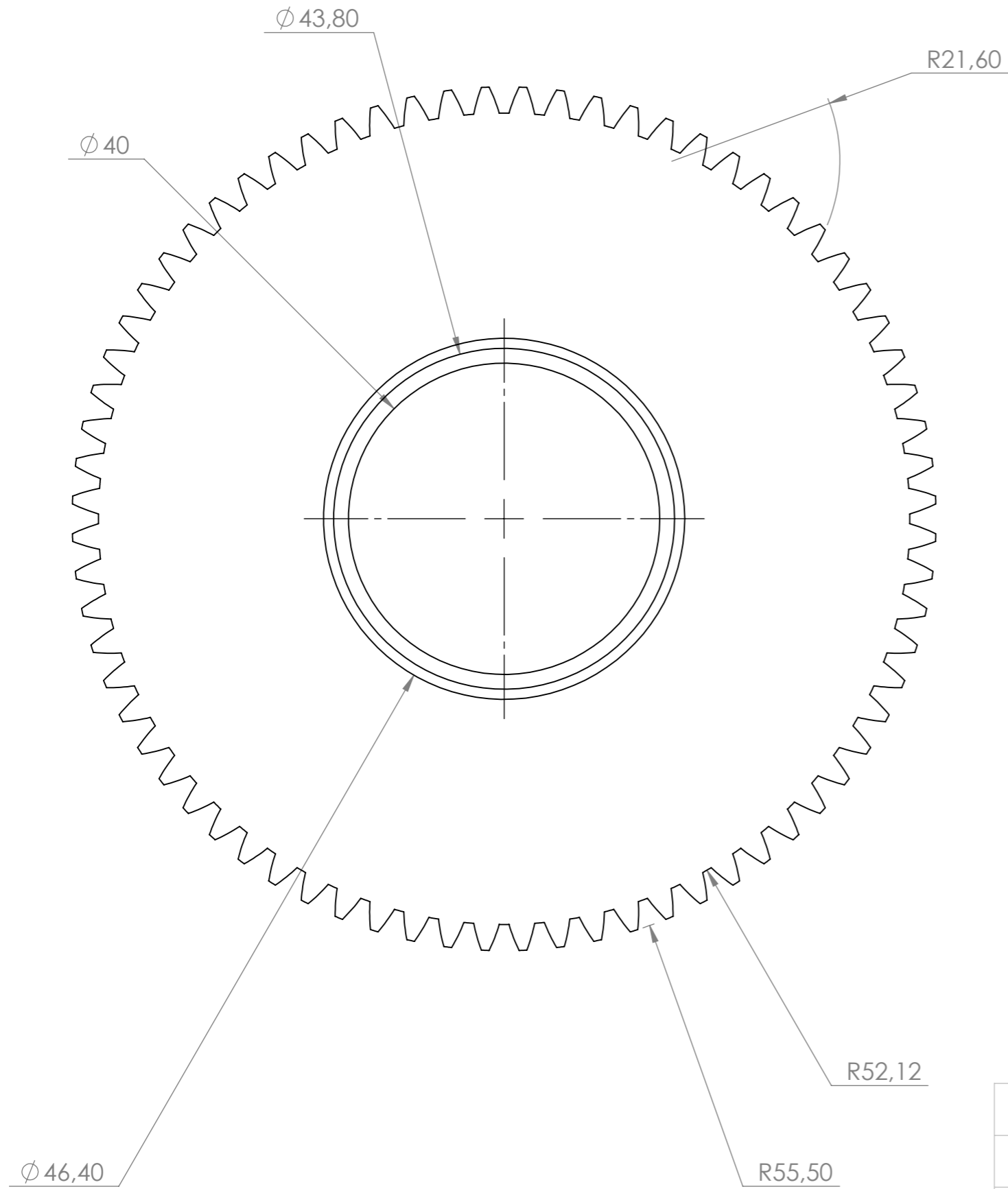
03	01	Arbre de sortie		Usinée
RF	NB	Designation	Matière	Observation
Echelle: 3:2		Réducteur épicycloïdal plan de type I		
		UMMTO-FGC-DGM	Master 2 CM	
A4		BOUDJAHROUNE Madjid	Planche n° 04	



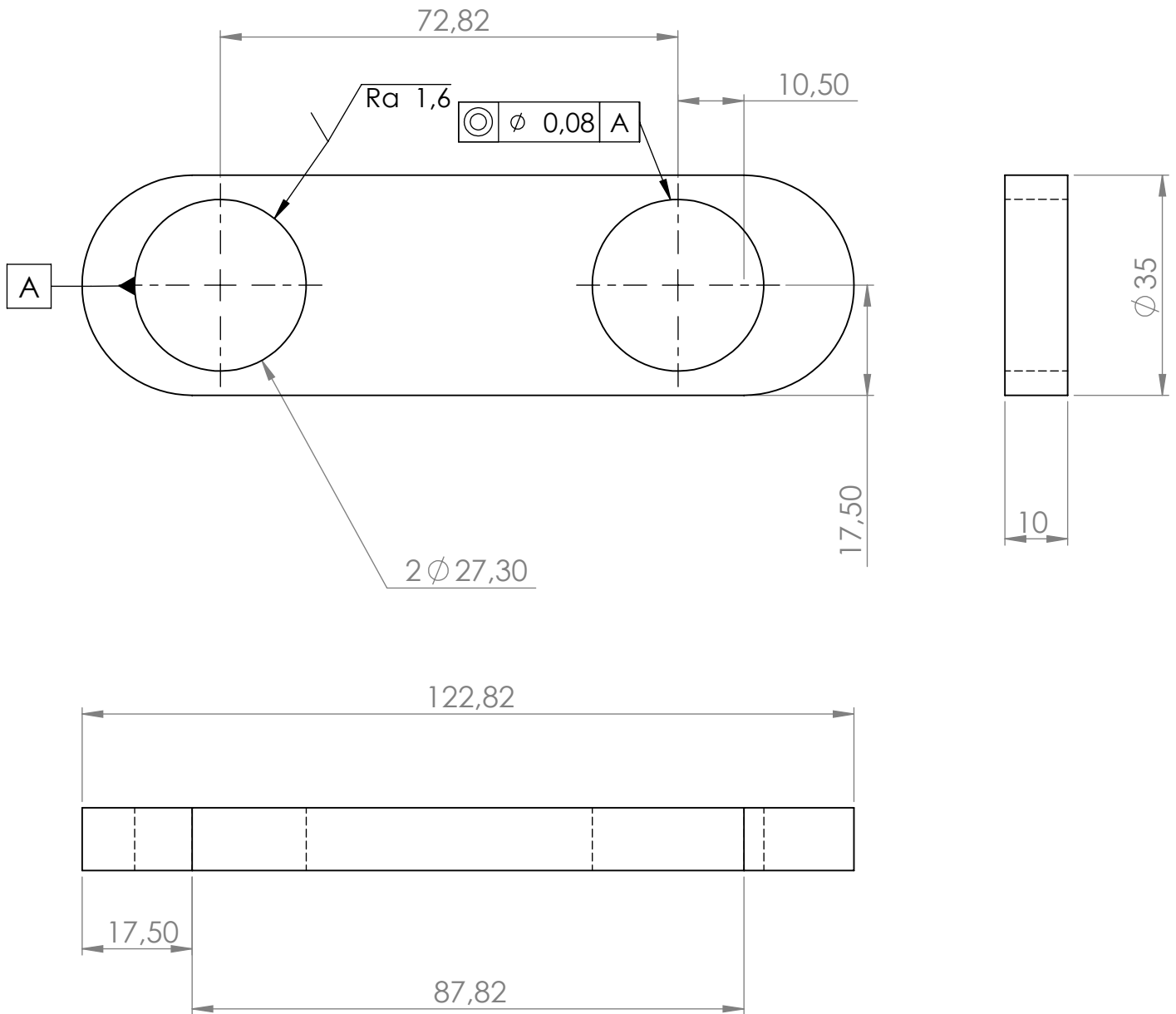
04	01	Couronne		Usinée
RF	NB	Designation	Matière	Observation
Echelle 1:1		Réducteur épicycloïdal plan de type I		
		UMMTO-FGC-DGM		Master 2 CM
A2		BOUDJAHROUNE Madjid		Planche n° 05



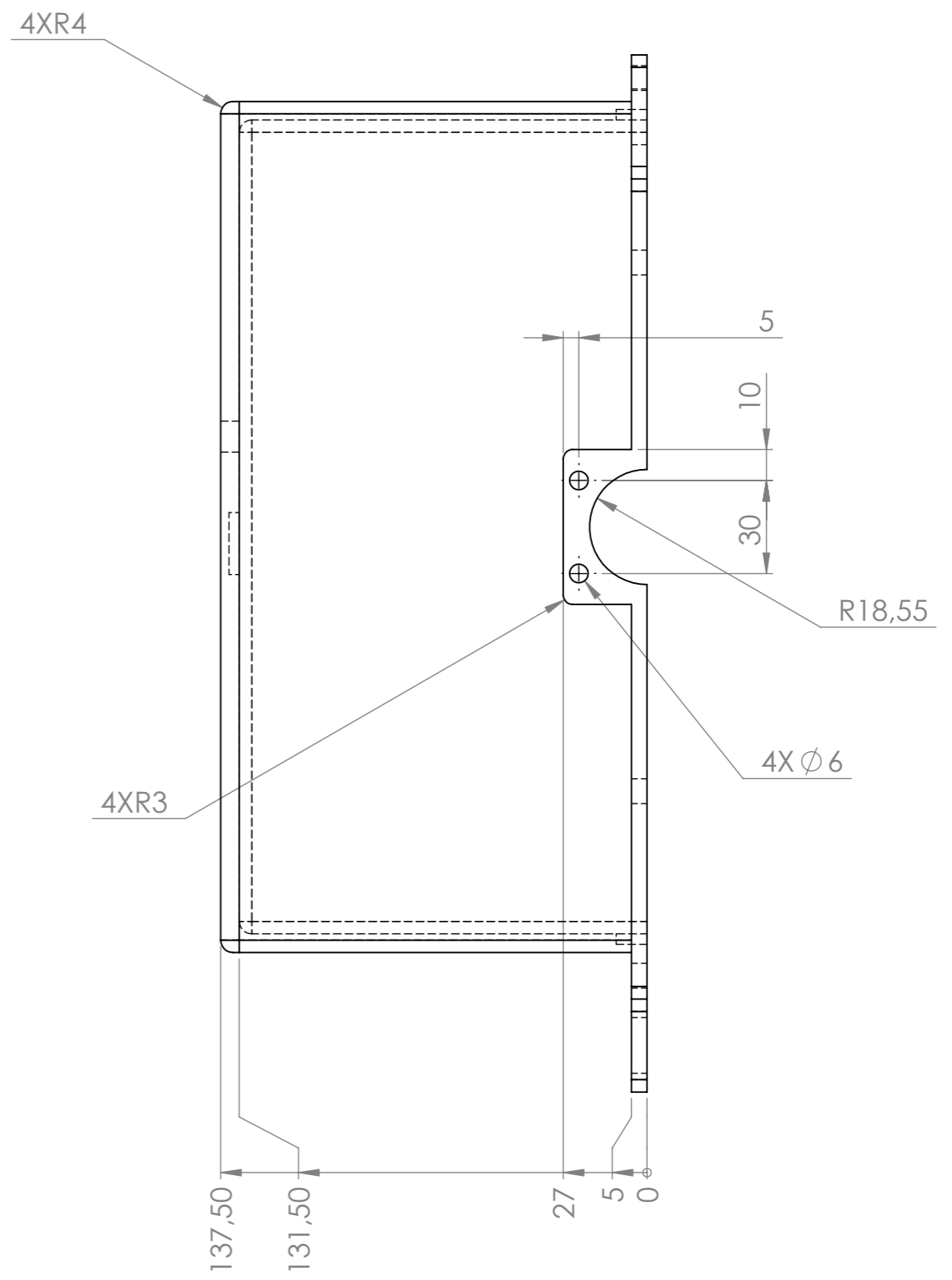
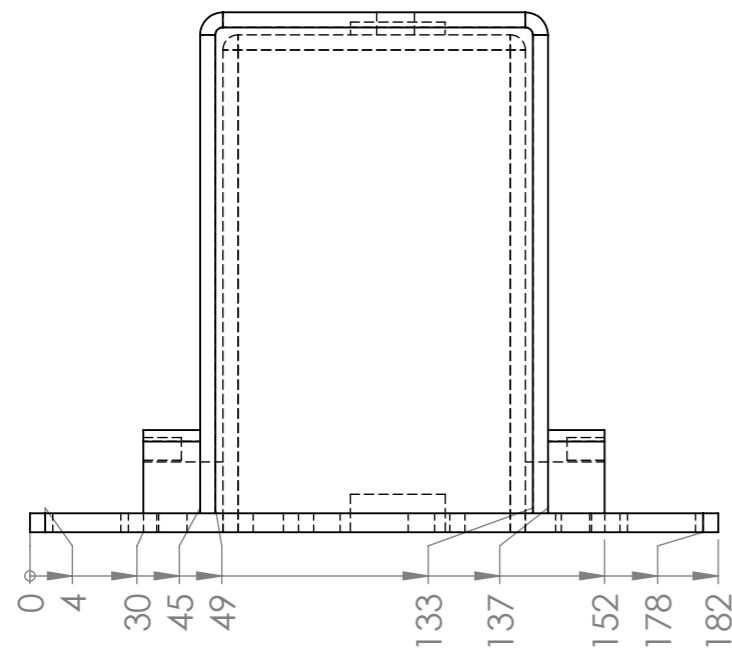
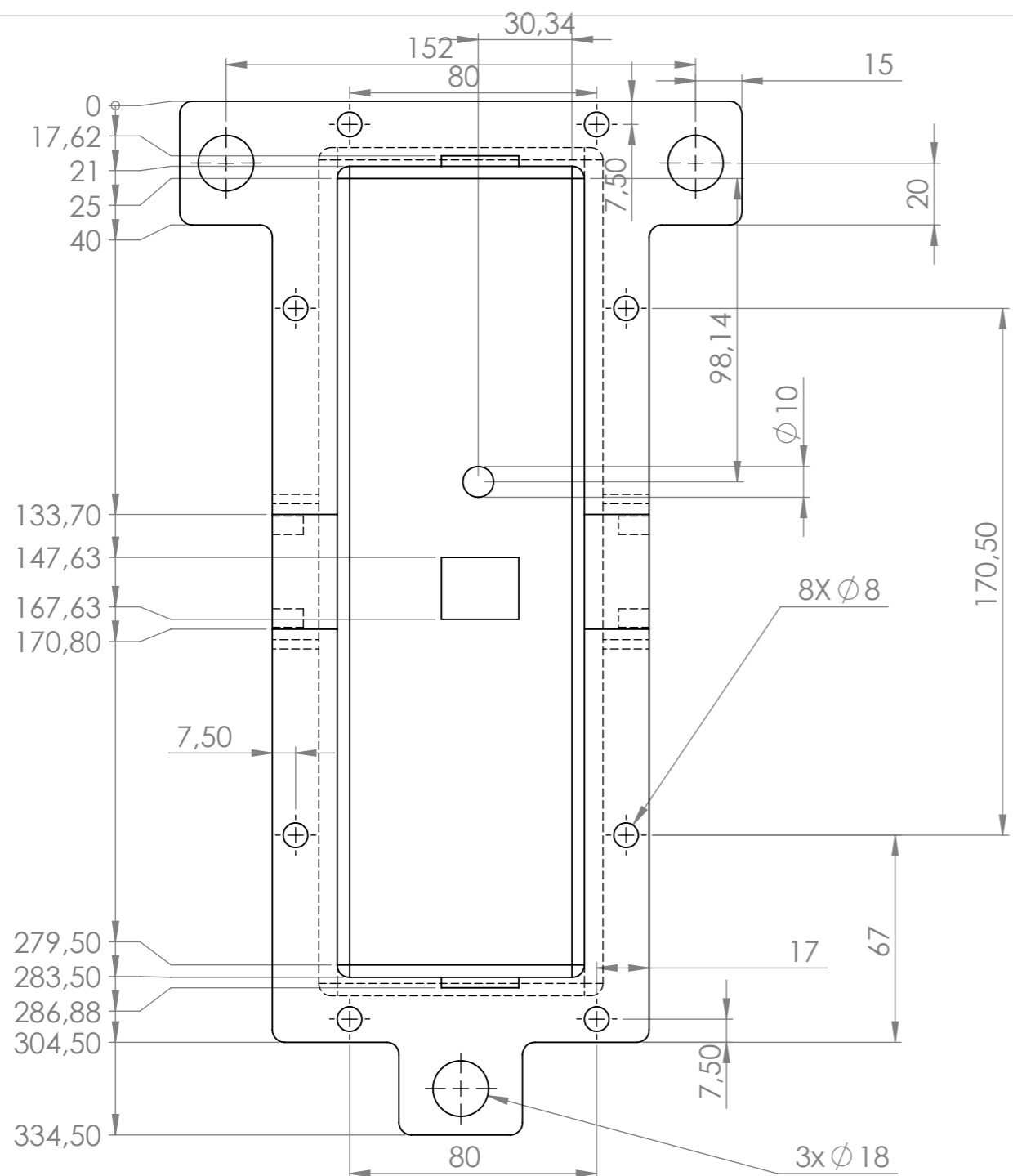
05	01	Pignon		Usinée
RF	NB	Designation	Matière	Observation
Echelle: 2:1		Réducteur épicycloïdal plan de type I		
		UMMTO-FGC-DGM	Master 2 CM	
A4		BOUDJAHROUNE Madjid	Planche n° 06	



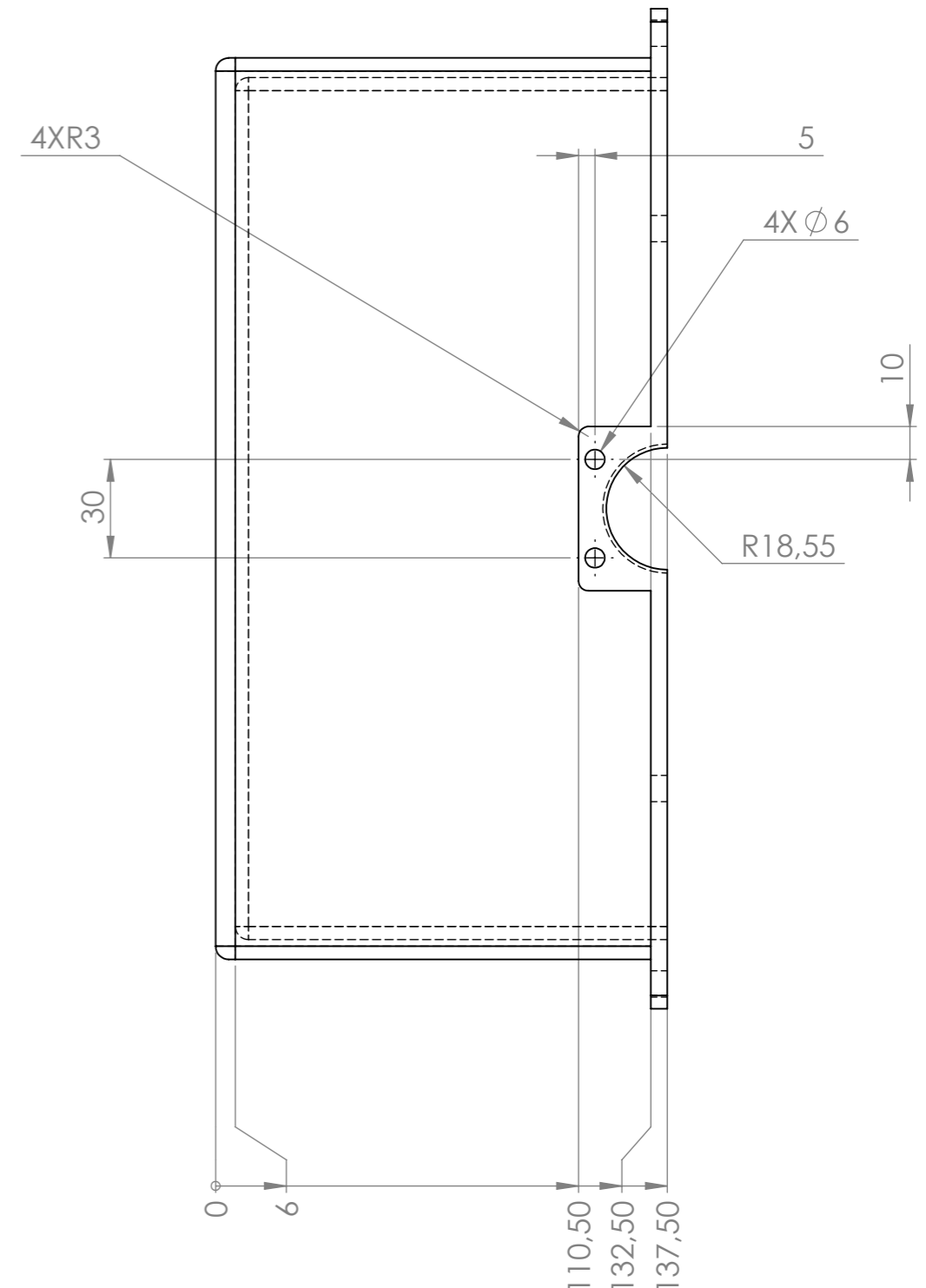
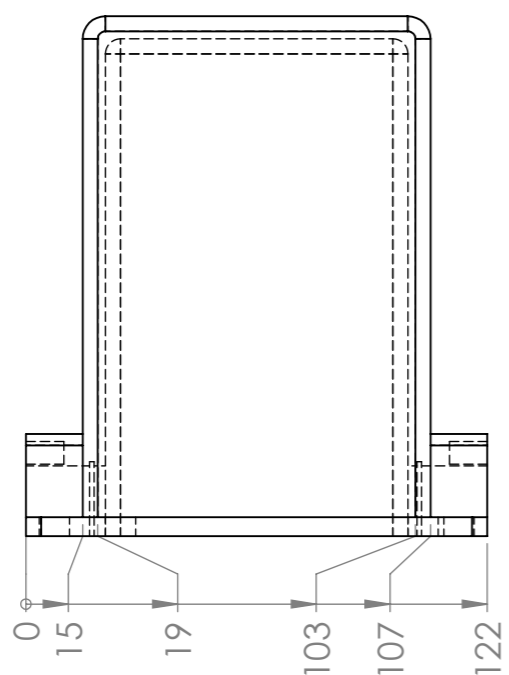
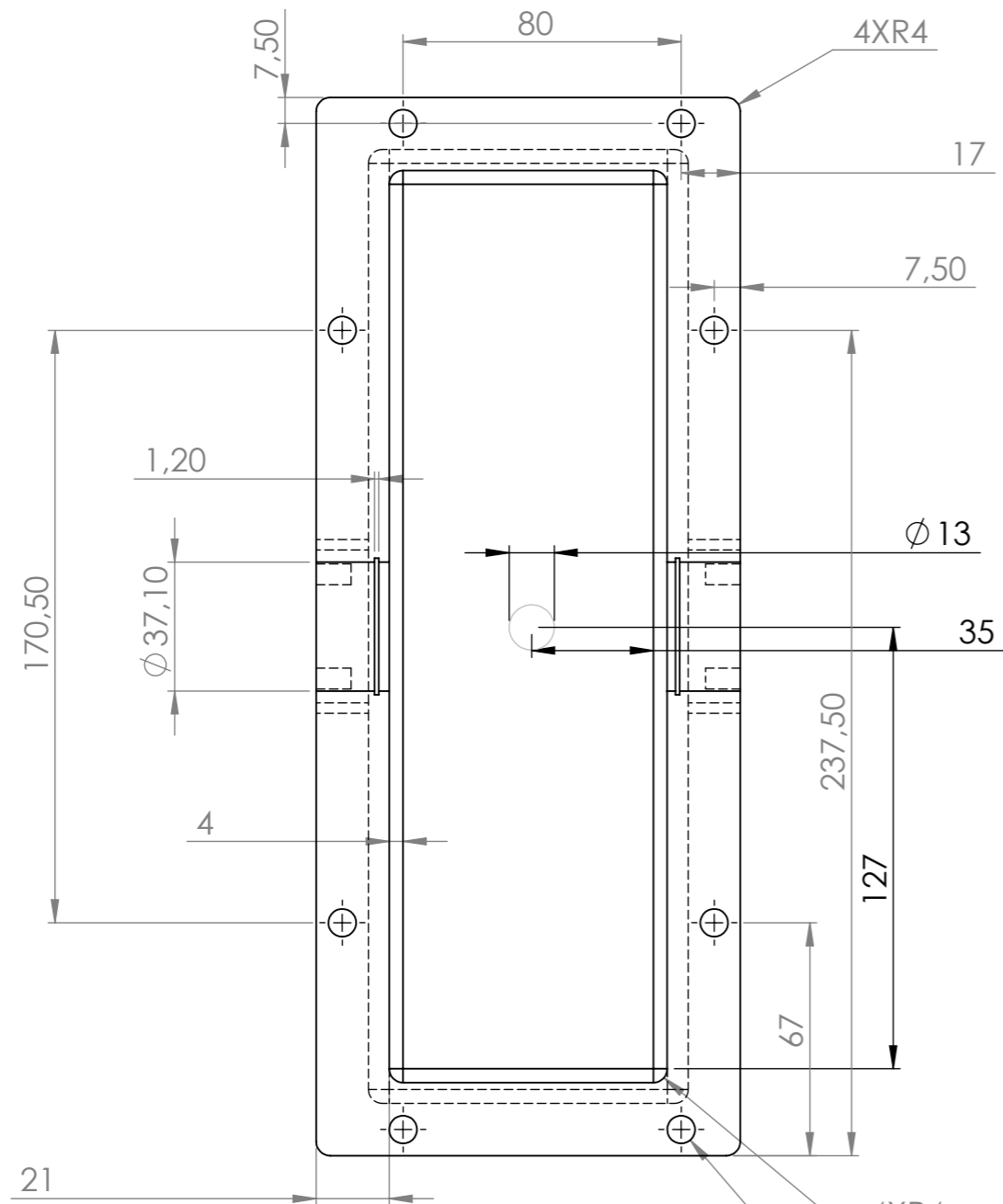
06	01	Satellite		Usinée
RF	NB	Designation	Matiere	Observation
Echelle 3:2		Réducteur épicycloïdal plan de type I		
		UMMTO-FGC-DGM		Master 2 CM
A3		BOUDJAHROUNE Madjid		Planche n°: 07



07	01	Porte Satellite		Usinée
RF	NB	Designation	Matière	Observation
Echelle 1:1		Réducteur épicycloïdal plan de type I		
		UMMTO-FGC-DGM		Master 2 CM
A4		BOUDJAHROUNE Madjid		Planche n° 08



08	01	Carter		Usinée
RF	NB	Designation	Matiere	Observation
Echelle 1:2		Réducteur épicycloïdal plan de type I		
		UMMTO-FGC-DGM	Master 2 CM	
A3		BOUDJAHROUNE Madjid	Planche n°: 09	



09	01	Cache Carter		Usinée
RF	NB	Designation	Matiere	Observation
Echelle 1:2		Réducteur épicycloïdal plan de type I		
		UMMTO-FGC-DGM		Master 2 CM
A3		BOUDJAHROUNE Madjid		Planche n°: 10