

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITE MOULOUD MAMMERRI**  
- TIZI OUZOU -

**Faculté du Génie de la construction**  
**Département de Génie Civil**

**MÉMOIRE DE MAGISTÈRE**

*Spécialité : génie civil*  
*Option : géotechnique et environnement*

Présenté par :

**M. Said. BIR**

*THÈME*

***Écoulements au travers les milieux  
poreux. Approche stochastique***

*Devant le jury :*

<b>Mr BOUAFIA Youcef</b>	<b>Professeur</b>	<b>UMMTO</b>	<b>Président</b>
<b>Mr BOUHERAOUA Ali</b>	<b>Maître de conférences (A)</b>	<b>UMMTO</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Mr HAMZA Ali</b>	<b>Maître de conférences (A)</b>	<b>UMMTO</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr AIT AIDER Hacène</b>	<b>Maître de Conférences</b>	<b>UMMTO</b>	<b>Examineur</b>

*Soutenu le :    /    / 2012*

# ***REMERCIEMENTS***

Que tout ceux qui m'ont apporté leur aide, pour la réalisation de ce travail, trouvent ici l'expression de m'a profonde gratitude.

Je tiens notamment à remercier :

Monsieur **A. BOUHERAOUA** maître de conférences (A) au département de génie civil de l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, pour avoir dirigé ce travail, et de m'avoir permis ainsi de le mener à son terme.

Monsieur **Y. BOUAFIA** professeur au département de génie civil de l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, qui a bien voulu examiner ce travail et présider le jury.

Monsieur **A. HAMZA** maître de conférences (A) au département de génie civil de l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, d'avoir voulu accepter d'être examinateur dans le jury de soutenance.

Monsieur **H. AIT AIDER** maitre de conférences A au département de génie civil de l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, d'avoir voulu accepter d'être examinateur dans le jury de soutenance.

Je n'oublie surtout pas mes amis qui m'ont apporté aide et réconfort.

## RESUME

Le présent travail fait partie d'une série de recherches consacrées à l'évaluation de l'effet de la variabilité spatiale sur le problème d'écoulement et du transport en milieu poreux. Il présente une étude en éléments finis de l'influence des variations dans l'espace des propriétés du sol sur la prédiction du chemin de l'écoulement.

Les propriétés de sol considérées comme variables aléatoires, sont **la conductivité hydraulique de saturation  $K_{sat}$**  et **la teneur en eau de saturation  $\theta_{sat}$** . La loi de distribution « **Log normale** » est choisie pour représenter la répartition des valeurs de ces deux paramètres. L'étude probabiliste a été effectuée par la méthode de **Monte Carlo**.

Deux séries de cinquante (50) calculs ont été effectuées. Elles représentent deux cas d'analyse. D'abord la variabilité des propriétés des sols est aléatoire dans tout le sol (cas statistiquement homogène). Ensuite, la variabilité des propriétés des sols est supposée unidimensionnelle (valeurs uniformes dans chaque plan horizontal) : le milieu est divisé en couches et les propriétés  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$  varient d'une couche à une autre et sont constants dans une même couche.

Les résultats de ces deux séries de calculs ont été analysés en termes de variabilité de charges hydrauliques pour le problème de l'écoulement et de concentrations pour le problème de transport pour montrer l'influence de la structure de la variabilité du sol.

La comparaison avec des solutions déterministes classiques a aussi été effectuée.

*Mots Clés* : variabilité, éléments finis, probabilité, milieu poreux, écoulement, transport.

## ABSTRACT

This work presents a rigorous numerical validation of analytical stochastic models of transient unsaturated flow in heterogeneous porous media. It also provides a crucial link between stochastic theory based on simplifying assumptions and empirical field and simulation evidence of variably saturated flow in actual or realistic hypothetical heterogeneous porous media. Statistical properties of saturated hydraulic conductivity and water content in heterogeneous soils are investigated through high resolution Monte Carlo simulations of a wide range of transient flow problems in a quasi-unbounded domain.

In agreement with assumptions in analytical stochastic models of unsaturated flow, hydraulic conductivity and soil water content are found to be lognormally, respectively. In contrast, simulations indicate that in moderate to strong variable conductivity fields, longitudinal flux is highly skewed. Transverse flux distributions are leptokurtic. Under moderate to strong heterogeneous soil flux conditions, analytical solutions overestimate variability in soil as soil heterogeneity increases, and underestimate variability of both flux components by up to a factor 5.

*Keywords:* soil water, vadose zone, stochastic analysis, heterogeneity, flow modeling.

## *Notations principales*

$\mu$	: Viscosité dynamique.
$\nu$	: Viscosité cinématique.
$\emptyset$	: Porosité totale.
$\emptyset_e$	: Porosité efficace.
$\emptyset_d$	: Porosité de drainage.
$\emptyset_{ret}$	: Capacité de rétention
$e$	: Indice des vides.
$S_r$	: Degré de saturation.
$S_e$	: Coefficient de saturation effective
$\theta$	: Teneur en eau (volumique).
$\theta_r$	: Teneur en eau résiduelle
$\theta_{sat}$	: Teneur en eau de saturation.
$C$	: Capacité de rétention
$k$	: Conductivité hydraulique.
$k_{sat}$	: Conductivité hydraulique de saturation.
$K$	: Perméabilité.
$\bar{\bar{K}}$	: Tenseur de conductivité hydraulique
$T$	: Transmissivité.
$S$	: Coefficient d'emménagement.
$S_s$	: Coefficient d'emménagement spécifique.
$A_s$	: Aire spécifique.
$Q$	: Débit d'écoulement.
$Q_s$	: Terme puits/source.
$\vec{U}$	: Flux d'eau.
$i$	: Gradient hydraulique.
$q$	: Vitesse de l'écoulement.

---

$H$ , ou, $h$	: Charge hydraulique.
$h_p$	: Potentiel matriciel ou de pression.
$\Psi_b$	: Potentiel d'entrée d'air.
$\rho_w$	: Densité du fluide.
$\rho_b$	: Densité apparente
$Re$	: Nombre de Reynolds
$C$	: Concentration du fluide.
$c_p$	: Masse de contaminant adsorbée
$D_m$	: Coefficient de diffusion moléculaire.
$D_{ij}$	: Tenseur de dispersion.
$D_L$	: Dispersion hydrodynamique.
$t$	: Temps
$\bar{x}$	: Moyenne arithmétique.
$V(X)$	: Variance.
$\sigma(X)$	: Ecart-type.
$C_v(X)$	: Coefficient de variation.
$E(X)$	: Espérance mathématique.
$f(u)$	: Densité de probabilité univariée.
$F(u)$	: Distribution cumulée univariée.
$\langle u \rangle$	: Espérance mathématique ou tout simplement la moyenne
$\sigma_u^2$	: Variance,
$C_{uv}$	: Covariance des variables $u$ et $v$ ,
$\bar{u}$	: Moyenne

## ***LISTE DES FIGURES***

***Figure I.1*** Zone saturée et zone non saturée.

***Figure I.2*** Porosité primaire (figure de gauche) et secondaire (figures du centre et de droite; modifiées de Banton et Bangoy, 1999).

***Figure I.3*** Types d'aquifère classifiés d'après leur degré de confinement (tirée de Verreaultetal, 2006).

***Figure I.4*** Autre schéma de classification des aquifères (tiré de l'adapté de Landry 1992).

***Figure I.5*** Schéma d'un volume élémentaire de sol. Poids et volumes des différentes phases.

***Figure I.6*** Exemple de sol et de représentation du milieu poreux associé.

***Figure I.7*** Concept d'emménagement dans les aquifères captifs et libres.

***Figure II.1*** Densité de probabilité de la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 10$ .

***Figure II.2*** Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.

***Figure II.3*** Densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre  $a = 3$ .

***Figure II.4*** Densité de probabilité de la loi de Weibull de paramètre  $\beta = 2$ .

***Figure III.1*** Schématisation d'un aquifère (Bear, 1972).

***Figure III.2*** Schéma d'un réservoir naturel d'un hydrocarbure (Bear, 1972)

***Figure III.3*** Coupes d'échantillons de grès poreux obtenues à différentes profondeurs  $P$  : (a)  $e = 27\%$ ,  $P=1000-1500$  m; (b)  $e = 23\%$ ,  $P=1700-1900$  m; (c)  $e = 18\%$ ,  $P=2000-2300$  m; (d)  $e = 16\%$ ,  $P=2500-2700$  m; (e)  $e = 13\%$ ,  $P=2800-3000$  m; (f)  $e = 10\%$ ,  $P > 3000$  m

***Figure III.4*** Espace des pores d'un grès de la mer du Nord (données Statoil

***Figure III.5*** Exemple de coupe d'un poreux (grés)

***Figure III.6*** Dispositif expérimentale de Darcy.

***Figure III.7*** Courbe limitant le domaine de la validité de la loi de Darcy

***Figure III-8*** Détermination de la charge hydraulique dans un piézomètre

***Figure III.9*** Évolution de la porosité totale d'une sphère centrée en un point  $P$  du milieu poreux en fonction de son rayon  $r$

**Figure III.10** Ecoulement plan sous un barrage, écoulement bidimensionnel.

**Figure III.11** Propriétés hydrodynamiques du sol. a) La conductivité hydraulique ( $K$ ) fonction de la teneur en eau( $\theta$ ) ; Le potentiel matriciel ( $\Psi$ ) fonction de la teneur en eau.

**Figure III.12** Application de l'approche mathématique à un écoulement à surface libre

**Figure III.13** Réseau d'écoulement en coupe d'une nappe libre en différentes cote (Hubbert, 1940)

**Figure III.14** Approximation de Dupuit valide pour des iso-H presque verticaux

**Figure III.15** Ecoulement vers un fossé prismatique dans un aquifère phréatique

**Figure III.16** Vitesse  $U=U_r e_r$  d'un aquifère autour d'un puits vertical et cylindrique

**Figure III.17** Paramètres pour la solution de Dupuits pour une nappe libre en régime permanent

**Figure III.22** Potentiel de pression d'eau en fonction de la cote en  $x = L$ , avec ,  $\psi$  = potentiel de pression d'eau [L],  $h(L, z, t)$  = charge hydraulique totale [L] ( $h = \psi + z$ ),  $H_w$  = niveau d'eau dans le fossé aval [L],  $H_{SS}$  = hauteur de la surface de suintement [L],  $z =$  côte [L]

**Figure III.23** Nappe dans un barrage en terre, avec niveau d'eau amont  $H_1$ , et aval  $H_w$ .HDF, niveau de nappe estimé via l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer

**Figure III.24** Ecoulement à partir d'une condition amont parabolique vers un drain horizontal

**Figure IV.1** Deux types de porosité

**Figure IV.2** Réseau cubique (à gauche) et réseau rhomboédrique (à droite)

**Figure IV.3** Illustration des écoulements à travers un réseau de fracture connecté d'après (Darcel, 2002).

**Figure IV.4** La caractérisation de l'organisation des écoulements dans les réseaux de fractures naturels

**Figure IV.5** Illustration de la variabilité spatiale de la perméabilité (conductivité hydraulique); 1 pied = 30,48cm; la perméabilité est exprimée en millidarcy =  $0,987 \cdot 10^{-15} m^2$

**Figure IV.6** Une réalisation de la variable "distribution des grains"

**Figure V.7.** Modèles analytiques de covariance.

**Figure V.1** Schéma montrant les différentes étapes nécessaires à la détermination de la solution probabiliste

**Figure V.2** Présentation du milieu poreux étudié

**Figure V.3** Isovaleurs des charges hydrauliques «H»

**Figure V.4** Isovaleurs des saturations effectives « $S_e$ »

**Figure V.5** Isovaleurs des concentrations de soluté « $c$ »

**Figure V.6** Courbe des charges hydrauliques «H» pour  $x = 0.5 m$  pendant 10 jours

**Figure V.7** Courbe des charges hydrauliques «H» pour  $x = 0.7 m$  pendant 10 jours

**Figure V.8** Courbe des charges hydrauliques «H» pour  $x = 1 m$  pendant 10 jours

**Figure V.9** Courbe des charges hydrauliques «H» pour  $x = 1.5 m$  pendant 10 jours

**Figure V.10** Courbe de saturation effectives « $S_e$ » pour  $x = 0.5 m$  pendant 10 jours

**Figure V.11** Courbe de saturation effective « $S_e$ » pour  $x = 0.7 m$  pendant 10 jours

**Figure V.12** Courbe de saturation effective « $S_e$ » pour  $x = 1 m$  pendant 10 jours

**Figure V.13** Courbe de saturation effective « $S_e$ » pour  $x = 1.5 m$  pendant 10 jours

**Figure V.14** Courbe des concentrations de soluté « $c$ » pour  $x = 0.5 m$  pendant 10 jours.

**Figure V.15** Courbe des concentrations de soluté « $c$ » pour  $x = 0.7 m$  pendant 10 jours

**Figure V.16** Courbe des concentrations de soluté « $c$ » pour  $x = 1 m$  pendant 10 jours

**Figure V.17** Courbe des concentrations de soluté « $c$ » pour  $x = 1.5 m$  pendant 10 jours

**Figure V.18** Ligne de coupe verticale de calcul de l'écoulement et du transport

**Figure V.19** Courbes des charges hydrauliques « H » de l'écoulement dans le sol

**Figure V.20** Evolution des écart-types des charges hydrauliques

**Figure V.21** Courbe des concentrations «  $c$  ».dans le sol

**Figure V.22** Evolution des écart-types des concentrations «  $c$  »

**Figure V.23** Iso valeurs des charges hydrauliques « H ».dans le sol

**Figure V.24** Courbe des charges hydrauliques « H » pour un cas stratifié hétérogène

**Figure V.25** Courbes des charges hydrauliques « H » de l'écoulement dans le sol

**Figure V.26** Evolution des écart-types des charges hydrauliques

**Figure V.27** Iso valeurs des concentrations «  $c$  » pour un cas stratifié

**Figure V.28** Courbe des charges hydrauliques «  $H$  » pour un cas stratifié

**Figure V.29** Courbe des concentrations «  $c$  ».dans le sol

**Figure V.30** Evolution des écart-types des concentrations «  $c$  »

**Figure V.31** Courbe des charges hydrauliques «  $H$  » moyennes pour les différents cas de calcul

**Figure V.32** Courbe des charges hydrauliques «  $H$  » max et min pour les différents cas de calcul

**Figure V.33** Evolution des écart-types des charges hydrauliques «  $H$  » pour les différents cas de calcul

**Figure V.34** Courbe des concentrations moyennes «  $c$  » pour les différents cas de calcul.

**Figure V.35** Courbe des concentrations «  $c$  » min et max pour les différents cas de calcul.

**Figure V.36** Evolution des écart-types des concentrations «  $c$  » pour les différents cas de calcul.

## ***LISTE DES TABLEAUX***

***Tableau III.1*** Unités de perméabilité

***Tableau IV.1*** Ordre de grandeur des principaux paramètres hydrodynamiques

***Tableau IV.2*** Ordre de grandeur des paramètres caractéristiques de l'hétérogénéité (d'après Gelhar 1986).

***Tableau IV.3*** Paramètres statistiques de la conductivité hydraulique log-normale ( $K$  en cm/s)

***Tableau IV.4*** Valeurs types des variances et longueurs de corrélation de la log-conductivité hydraulique (longueurs en m)

***Tableau V.1*** Paramètres d'écoulement utilisés dans la modélisation.

***Tableau V.2*** Paramètres du transport de soluté utilisés dans la modélisation.

***Tableau V.3*** Quelques valeurs générées des paramètres variables  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$

***Tableau V.4*** Valeurs générées des paramètres variables  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$

## SOMMAIRE

	<b>INTRODUCTION</b>	01
<i>Chapitre I</i>	<b>THEORIE DES EAUX SOUTERRAINES</b>	05
	<b>I.1 INTRODUCTION</b>	06
	<b>I.2 Ecoulement de l'eau souterraine</b>	
	I.2.1 Zone non saturée	
	a. Zone vadose	
	b. Zone capillaire	
	I.2.2 Zone saturée	
	<b>I.3 Classification de l'eau interstitielle</b>	07
	I.3.1 Eau gravitaire	
	I.3.2 Eau de rétention	
	I.3.3 Eau capillaire	
	I.3.4 Capacité de rétention	
	I.3.5 Capacité au champ	
	<b>I.4 Classification des aquifères</b>	08
	I.4.1 Définitions	
	a. Aquifère	
	b. Couche de confinement	
	- Aquifuge	
	- Aquiclude	
	- Aquiclude	
	I.4.2 Types d'aquifères	
	a. Types d'aquifères d'après le type de porosité	
	b. Types d'aquifères selon le degré de confinement	
	c. Utilité de ces classifications pour l'estimation de l'aire d'alimentation	
	<b>I.5 Caractéristiques physiques du sol</b>	12
	I.5.1 Viscosité de l'eau	
	a. Viscosité dynamique	
	b. Viscosité cinématique	
	I.5.2 Porosité	
	a. la porosité géométrique, ou porosité totale, $\emptyset$	
	b. l'indice des vides, $e$	
	c. la porosité efficace $\emptyset_e$ , ou porosité cinématique	
	- la porosité efficace	
	- la porosité cinématique	
	d. la porosité de drainage $\emptyset_d$	
	e. la capacité de rétention $\emptyset_{ret}$	
	I.5.3 Degré de saturation $S_r$	
	I.5.4 Teneur en eau (volumique) $\theta$	
	I.5.5 Conductivité hydraulique et perméabilité intrinsèque	
	I.5.6 Relation entre la perméabilité et la porosité	
	a. Hazen	
	b. Cazagrande	
	c. Terzaghi	
	d. Schlichter	
	e. Bakhmetef	
	f. Koseny-Carman	

g. Bretjinski	
I.5.7 Relation entre la perméabilité et l'indice des vides	
I.5.8 Transmissivité	
I.5.9 Coefficient d'emmagasinement	
I.5.10 Coefficient d'emmagasinement spécifique	
I.5.11 Homogénéité-hétérogénéité et isotropie-anisotropie	
<b>Chapitre II</b>	<b>ELEMENTS DE STATISTIQUES ET PROBABILITES</b>
	23
<b>II.1 INTRODUCTION</b>	23
<b>II.2 Probabilité</b>	23
II.1.1 Notion de probabilités	
II.1.2 Epreuves et événements	
II.1.3 Espace probabilisé	
II.1.3.1 Axiomatique de Kolmogorov	
II.1.3.2 Propriétés élémentaires	
II.1.4 Probabilité conditionnelle - Théorème de Bayes	
II.1.4.1 Théorème des probabilités composées	
II.1.4.2 Conséquences	
II.1.4.3 Théorème de Bayes - Probabilités des causes	
II.1.5 Le paradoxe de Bertrand	
<b>II.3 Variables aléatoires</b>	28
II.2.1 Variable aléatoire	
II.2.2 Fonction de répartition	
II.2.2.1 Définition	
II.2.2.2 Propriétés	
II.2.2.3 Fonction de répartition d'une v.a. discrète	
II.2.3 Fonction de répartition d'une v.a. continue	
II.2.4 Couple de variables aléatoires	
II.2.4.1 Définitions	
II.2.4.2 Cas d'un couple de v.a. continues	
II.2.4.3 Cas d'un couple de v.a. discrètes	
II.2.4.4 Distribution conditionnelle	
II.2.5 Loi d'une fonction d'une ou plusieurs variables aléatoires	
II.2.5.1 Transformation d'une variable aléatoire	
- Transformation d'une loi discrète	
- Transformation d'une loi continue	
II.2.5.2 Densité de probabilité d'une somme de V.A. indépendantes	
II.2.6 Moyenne et espérance mathématique d'une v.a	
II.2.6.1 Notion de moyenne pour une v.a. discrète	
II.2.6.2 Espérance mathématique	
II.2.7 Moments	
II.2.7.1 Définitions	
- Moment d'ordre $n$	
- Moment d'ordre $n$ rapporté à l'abscisse $a$	
- Moment centré d'ordre $n$	
- Le moment centré d'ordre $n$ d'une v.a	
II.2.7.2 Quelques moments particuliers	
II.2.7.3 Variance, covariance et écart-type	
II.2.7.4 Variable centrée réduite	
II.2.7.5 Coefficient de corrélation	
II.2.7.6 Exemple	

II.2.7.7 Inégalités de Bienaymé - Tchebyshev – Markov	
- Inégalité de Tchebyshev	
- l'inégalité de Markov	
- l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev	
II.2.8 Quelques lois de probabilités	
II.2.8.1 Les valeurs principales	
II.2.8.2 Liaisons entre lois de probabilités	
- Loi 0-1 - Loi binomiale	
- Loi géométrique	
- Loi de Pascal d'ordre $n$	
- Loi de Poisson (magistrat français du XIX <sup>ème</sup> siècle)	
- Loi Normale ou loi de Gauss-Laplace	
- Loi exponentielle	
- Loi de Weibull	
- Loi Gamma	
- Loi du $\chi^2$	
- Loi de Rayleigh	
- Loi de Student	
II.2.9 Quelques relations	
II.2.10 Loi des grands nombres	
II.2.10.1 Convergence stochastique	
- Convergence en loi	
- Convergence en probabilité	
- Convergence en moyenne	
II.2.10.2 Théorème central limite	
II.2.11 Simulation d'une variable aléatoire	
II.2.11.1 Méthode générale par transformation inverse	
II.2.11.1 Loi uniforme	
II.2.11.3 Loi exponentielle	
II.2.11.4 Loi binomiale	
II.2.11.5 Loi de Poisson	
II.2.11.6 Loi normale, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	
II.2.12 Autres indicateurs	
II.2.12.1 Histogramme	
II.2.12.2 Médiane	
II.2.12.3 Mode	
II.2.12.4 Autres moyennes	
<b>Chapitre III      CARACTERISATION DES ECOULEMENTS EN MILIEUX POREUX</b>	<b>45</b>
<b>III.1 INTRODUCTION</b>	<b>45</b>
<b>III.2 QUELQUES EXEMPLES DE MILIEUX POREUX NATURELS</b>	
III.2.1 Milieux poreux naturels	
III.2.2 Milieux poreux artificiels	
<b>III.3 DESCRIPTION DU MILIEU POREUX NATUREL ET THÉORIE DE LA CONTINUITÉ</b>	<b>48</b>
III.3.1 Description géométrique	
III.3.1.1 La porosité	
III.3.1.2 Aire spécifique	
III.3.1.3 Autres paramètres	
<b>III.4 Circulation de fluides en milieu poreux</b>	<b>51</b>
<b>III.5 Loi de Darcy</b>	<b>54</b>
III.5.1 Généralisation de la loi de Darcy	

III.5.2 Domaine de validité de la loi de Darcy	
<b>III.6 La charge hydraulique</b>	55
<b>III.7 Loi de conservation de masse-équation de continuité</b>	55
III.7.1 Notion de Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R)	
III.7.2 Equation de conservation de la masse	
<b>III.8 Loi de LAPLACE</b>	58
III.8.1 Cas des écoulements à deux dimensions en milieu homogène et isotrope	
<b>III.9 Equation des écoulements dans les aquifères</b>	59
<b>III.10 Représentation mathématique des processus hydrologiques souterrains</b>	61
III.10.1 L'écoulement en milieu poreux non saturé et saturé	
III.10.1.1 Le modèle Richard	
III.10.1.2 Quelques modèles simplifiés	
III.10.1.3 Domaines et limites d'application	
III.10.2 L'écoulement en milieu poreux saturé	
III.10.2.1 La loi de Darcy	
III.10.2.2 L'équation de Boussinesq	
III.10.2.3 Domaines et limites d'application	
<b>III.11 Modélisation en régime permanent et transitoire des écoulements au travers les milieux poreux</b>	65
<b>III.12 Approche mathématique</b>	67
<b>III.13 Cas du régime transitoire</b>	68
<b>III.14 Approximation de Dupuit</b>	70
III.14.1 Hypothèses de Dupuit	
III.14.2 Validations et limitations (exemple d'application)	
III.14.3 Domaines et limites d'application	
<b>III.15 Cas du régime permanent</b>	75
III.15.1 Modèle de Dupuits (solution pour le régime permanent)	
<b>III.16 Équation de Transport des Polluants en Milieux Poreux</b>	76
<b>III.17 Prise en compte du phénomène de suintement dans la détermination de la position de la surface libre de la nappe</b>	80
III.17.1 L'hypothèse de DF et le phénomène de suintement	
III.17.2 Définitions et état des connaissances	
III.17.3 Cas du drainage par un fossé vide, avec un niveau d'eau amont fixé- Solution de Kozeny (1931, cité par Youngs 1990 et Kao 2002)	
<b>III.18 Modèles mathématiques pour les écoulements à surface libre</b>	85
III.18.1 Le système de Saint-Venant	
III.18.2 Domaine et limite d'application	
III.18.3 Autres solutions mathématiques du problème de surface libre	
<b>III.19 Résumé</b>	
<b>Chapitre IV PRISE EN COMPTE DE LA VARIABILITE DES SOLS DANS LE CALCUL DES ECOULEMENTS</b>	88
<b>VI.1 Introduction</b>	88
<b>VI.1 Fiabilité de la mesure unique</b>	89
<b>IV.2 Variabilité spatiale des paramètres</b>	89
IV.2.1 Limites de l'aquifère	
IV.2.2 Variation spatiale et corrélation de $K$ et $T$	
IV.2.3 Variation spatiale des autres paramètres	
<b>IV.3 Variabilité temporelle des paramètres</b>	92
IV.3.1 Propriétés physiques des matériaux	
<b>IV.4 Volume élémentaire représentatif</b>	93
<b>IV.5 Outils et méthodes, (description d'une méthode de travail)</b>	93
IV.5.1 Variabilité spatiale	
IV.5.2 Variation du sol	

IV.5.3 Statistiques et Géostatistiques	
IV.5.3.1 Statistique	
a. Distribution normale	
b. Distribution log-normal	
IV.5.3.2 Géostatistique	
<b>IV.6 Ecoulement d'eau dans les milieux poreux hétérogène</b>	<b>98</b>
IV.6.1 Théorie de la continuité	
IV.6.2 Propriétés géométriques de la porosité	
IV.6.2.1 Deux types de porosité	
IV.6.2.2 Porosité d'interstice et agencement des grains dans l'espace	
IV.6.2.3 Surface spécifique	
IV.6.3 La porosité et la circulation des fluides	
IV.6.3.1 Porosité cinématique	
IV.6.3.2 Perméabilité intrinsèque	
IV.6.3.3 Loi de Darcy	
IV.6.3.4 Conductivité hydraulique	
IV.6.3.5 Champ de vitesse	
IV.6.4 Hétérogénéité physique des milieux poreux	
IV.6.4.1 Hétérogénéité du milieu naturel	
IV.6.4.2 Impacts de l'hétérogénéité sur les flux d'eau	
IV.6.5 Description de l'hétérogénéité	
IV.6.5.1 Approche géostatistique	
IV.6.5.2 Réalisation d'un champ de perméabilité hétérogène	
IV.6.6 Changement d'échelle et homogénéisation	
IV.6.6.1 Concept d'homogénéisation	
IV.6.6.2 Perméabilité effective dans les milieux poreux hétérogènes	
<b>IV.7 Passage de l'hétérogénéité du milieu à l'hétérogénéité des écoulements</b>	<b>108</b>
<b>IV.8 Bilan</b>	<b>110</b>
<b>IV.9 Modélisation Stochastique des écoulements en milieux poreux</b>	<b>111</b>
V.9.1 Description "continue" [Bear, 1979] ; [de Marsily, 1986]	
IV.9.2 Description stochastique	
IV.9.2.1 Notations	
IV.9.2.2 Notions de géostatistique [Dagan, 1989] ; [de Marsily, 1986]	
- Ensemble des réalisations et fonctions aléatoires	
- Stationnarité - Moyennes spatiales de fonctions aléatoires et ergodicité - Interpolation par "kriging"	
IV.9.3 Ecoulement en milieux poreux	
IV.9.3.1 Définition	
- Domaine d'écoulement	
- Porosité totale	
- porosité cinématique	
- Teneur en eau	
- Potentiel hydraulique	
IV.9.3.2 Les équations fondamentales en milieu poreux	
- Equations de la dynamique des fluides	
- Equations en milieu poreux	
IV.9.4 L'écoulement en milieu stochastique	
IV.9.4.1 Comportement des variables hydrogéologiques	
IV.9.4.2 Résolution de l'équation d'écoulement stochastique	
- La méthode dite de "simulation Monte Carlo"	
- La méthode des perturbations	

- Théorie non locale	
- La méthode self-consistante ou de renormalisation	
IV.9.4.3 Conductivité hydraulique effective	
IV.9.4.4 Covariance de la vitesse de filtration	
IV.9.5 Application de la stochastique à la résolution de l'écoulement en milieux poreux hétérogènes	
IV.9.5.1 Introduction	
- L'hypothèse de stationnarité	
- L'hypothèse d'ergodicité	
IV.9.5.2 Résolution de l'écoulement par approche stochastique	
a. Propriétés statistiques de la conductivité hydraulique	
1. Fonction de covariance exponentielle	
2. Fonction de covariance gaussienne	
3. Fonction de covariance linéaire	
4. Fonction de covariance semi-sphérique	
b. Méthodes de résolution	
IV.9.5.3 Application des théories stochastiques à l'écoulement à proximité de puits	
- Solution de l'écoulement en radial	
IV.9.5.4 Prise en compte des conditions aux limites dans les théories stochastiques	
- Résultats théoriques	
- Validation numérique	
<b>IV.10 Conclusion</b>	<b>149</b>
<b>Chapitre V</b>	<b>ANALYSE PROBABILISTE DES ECOULEMENTS EN MILIEUX POREUX</b>
<b>V.1 INTRODUCTION</b>	<b>151</b>
<b>V.2 METHODOLOGIE</b>	<b>151</b>
V.2.1 Introduction	
V.2.2 Programme de calcul en éléments finis	
V.2.3.3 Analyse statistique des paramètres $K_{sat}$ et $\theta_{sat}$	
V.2.3.1 Généralités	
V.2.3.2 Choix des paramètres de calcul	
V.2.3 Procédure de calcul répétitif et d'analyse statistique des résultats	
V.2.4 Déroulement de la procédure de calcul statistique	
<b>V.3 Simulation numérique</b>	<b>154</b>
V.3.1 Présentation du cas étudié	
<b>V.4 Hypothèse de modélisation</b>	<b>155</b>
<b>V.5 Maillage d'éléments finis.</b>	<b>156</b>
<b>V.6 Cas déterministe</b>	<b>157</b>
IX.6.1 Présentation du cas étudié	
IX.6.2 Présentation des résultats	
IX.6.3 Interprétation des résultats	
<b>V.7 Cas statistiquement homogène</b>	<b>168</b>
IX.7.1 Présentation du cas étudié	
IX.7.2 Présentation des résultats	
IX.7.3 Interprétation des résultats	
<b>V.8 Cas d'analyse d'un multicouche</b>	<b>174</b>
V.8.1 Présentation du cas étudié	
V.8.2 Présentation des résultats	
V.8.3 Interprétation des résultats	
<b>V.9 Comparaison des différentes analyses effectuées</b>	<b>181</b>
V.9.1 Introduction	

V.9.2 Résultats des calculs

V.9.3 Comparaison des résultats obtenus

**CONCLUSION GENERALE**

## **INTRODUCTION GENERALE**

Sous les effets conjugués de l'accroissement de la population et de l'intensification des activités polluantes, le problème de la gestion et de la préservation de la ressource en eau est devenu un des enjeux majeurs de la société humaine. La partie souterraine de cette ressource, à laquelle nous nous intéressons plus particulièrement, possède elle-même des caractéristiques qui en font un sujet d'étude vaste et délicat.

Les aquifères naturels, en effet, possèdent des propriétés complexes, difficiles à déterminer, et tels que le renouvellement de la ressource se fait en général à une échelle de temps bien supérieure à celle qui pourrait caractériser une pollution accidentelle ou chronique. Ces réserves souterraines sont de plus des entités intégrées à des systèmes plus vastes, et les relations qui les lient à leur environnement, et en particulier les conditions aux limites de ces domaines, la présence de sources ou de puits, ont une influence déterminante sur leur comportement.

Pour gérer la ressource souterraine, il est donc nécessaire de résoudre des problèmes complexes, qui reposent sur la connaissance approfondie des phénomènes liés à l'hydrodynamique et au transfert de masse en milieu poreux, la représentation adéquate de ces phénomènes, ce qui inclut la traduction des propriétés physico-chimiques du milieu en termes de paramètres mathématiques, et finalement la résolution des équations établies par des méthodes efficaces, qu'elles soient analytiques (résolution exacte des équations) ou numériques (résolution approchée sur un domaine discrétisé).

L'approche la plus classique pour la résolution de problèmes d'écoulement et de transport en milieu poreux est l'approche déterministe initiée par Darcy. Celle-ci repose sur une équation empirique, la loi de Darcy, et sur l'équation de conservation de la masse. Dans cette approche, on suppose que les paramètres caractérisant le milieu poreux, et en particulier la porosité et la conductivité hydraulique  $K$ , sont des grandeurs connues en tout point du milieu. Il est donc nécessaire dans ce cas de les déterminer de façon expérimentale, à l'aide de méthodes qui se sont avérées destructives, fastidieuses, complexes et/ou coûteuses.

Un des problèmes majeurs rencontrés lors de la caractérisation d'un milieu poreux est la particularité fondamentale qu'ont ses propriétés à se déployer de façon hétérogène dans l'espace. Cette hétérogénéité découle des processus de genèse des milieux qui sont constitués de différents matériaux ayant subi des altérations mécaniques et chimiques.

En réponse à ce problème, se sont développées au cours des dernières décennies des approches inspirées de la géostatistique appliquée à l'écoulement et au transport en milieu poreux et reposant sur la prise en compte des propriétés du milieu de manière stochastique. Ces dernières sont ainsi considérées comme des fonctions aléatoires de l'espace (et parfois du temps), ce qui permet de résoudre les difficultés liées à l'incertitude sur leur distribution en prenant en compte cette incertitude de façon formelle.

Les équations à résoudre dans le cadre de la géostatistique dérivent directement des équations déterministes, mais leur résolution s'effectue en termes de moments statistiques, c'est-à-dire de grandeurs telles que moyenne, variance et covariance qui permettent de caractériser statistiquement une variable. En particulier, on cherchera à déterminer les moyennes et variances de la vitesse de Darcy et de la concentration en différents points (ou sur différentes parties, ou sur l'ensemble) du domaine en fonction des moyennes et variances des paramètres du milieu comme la conductivité hydraulique  $K$ .

L'introduction de la variabilité statistique dans les équations de l'écoulement et du transport rend cependant celle-ci plus délicates à résoudre. De ce fait, les auteurs ont été contraints à émettre des hypothèses simplificatrices, pour s'affranchir de certaines difficultés théoriques et aboutir à des équations suffisamment simple et surtout pouvant se résoudre rapidement de façon analytique ou numérique. C'est ainsi que plusieurs approches ont été développées, se distinguant notamment par les hypothèses et simplifications formulées pour parvenir à un résultat exploitable, expressions analytiques ou semi-analytiques des moments des variables d'écoulement, de paramètres équivalents (à un milieu homogène) par exemple. On peut ainsi citer parmi les travaux de références ceux de Gehlar et Axness (1983), Dagan (1989) ou Neuman et Zhang (1990) entre autres.

La nécessité de simplifier les problèmes étudiés a également pesé sur le choix des phénomènes pris en compte. La plupart des études portent ainsi sur le cas d'un écoulement permanent et uniforme pour lequel on peut simplifier l'expression des variables statistiques étudiées. Le domaine étudié est également très souvent considéré comme infini dans une ou plusieurs dimensions de l'espace, ce qui permet entre autres d'appliquer sans réserves les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité nécessaires à la résolution de tels problèmes.

Le problème de l'applicabilité de telles approches à des cas réels se pose donc. Des études comparatives avec des mesures in situ (par exemple Kitanidis, 1997) ainsi qu'avec les résultats fournis par des modèles numériques reposant sur une approche classique (par exemple Chin, 1997 et Lintea, 2001) ont montré que les résultats fournis par les théories stochastiques étaient satisfaisants pour des milieux faiblement hétérogènes, pour un écoulement permanent et uniforme en milieu infini ou semi-infini.

Une telle configuration ne représente cependant pas la totalité des cas à étudier. En particulier, l'écoulement considéré peut souvent être non-uniforme (la vitesse moyenne variant en direction et en intensité dans l'espace) du fait de la présence de puits d'injection ou de pompage dans le domaine, et l'on peut également être amené à étudier l'écoulement et le transport à proximité immédiate d'une limite d'un aquifère (limite géologique imperméable ou cours d'eau par exemple) de telle sorte que ce dernier ne puisse plus être considéré comme infini.

A la suite des études portant sur l'extension des méthodes stochastiques appliquées à l'écoulement et au transport en milieu poreux hétérogène, que ce soit dans le cas d'écoulement non-uniformes (Indelman et Dagan, 1999 ; Dagan et Indelman, 1999 par exemple) ou pour la prise en compte de conditions aux limites du domaine d'étude (Rubin et Dagan, 1988a et b ; Osnes, 1995), ces présents travaux exposent une méthode semi-analytique de prise en compte de conditions aux limites de type Neuman (à flux nul) lors de l'étude de l'écoulement et du transport dans un milieu poreux hétérogène aléatoire sous l'effet d'un doublet puits de pompage-puits d'injection, ce dispositif étant fréquemment employé dans le cas de dépollution de sites contaminés.

Les développements exposés dans la suite de ce mémoire prennent appui sur les résultats d'Abdelhak GHOULI (1999) qui ont abordé le problème de propagation de polluants dans un milieu poreux non saturé par le biais d'une approche basée sur la notion de temps de parcours d'une particule. Cette approche conduit à l'expression semi-analytique de la concentration moyenne après mélange dans le puits de pompage en fonction des caractéristiques statistiques du milieu ainsi que des conditions d'injection et de pompage qui conditionnent l'écoulement. Cette solution est basée sur la théorie du premier ordre proposée par Dagan (1989) qui est développée entre autres sous la condition de faibles fluctuations du champ de log-conductivité noté  $Y = \ln K$ , c'est-à-dire des faibles valeurs de la variance  $\sigma_Y^2$ .

A partir de cette solution, validée par comparaison avec des résultats de simulations numériques par Lintea (2001) pour des valeurs de  $\sigma_Y^2$  allant jusqu'à 1.5, nous chercherons à évaluer dans quelle mesure la prise en compte d'éventuelles conditions aux limites va influencer sur les phénomènes d'écoulement et de transport, et ainsi se traduire dans la variable d'observation, la concentration au puits de pompage après mélange.

Une autre difficulté de l'application des théories stochastiques à des cas concrets étant l'identification des paramètres statistiques du milieu poreux, qui ne peuvent être mesurés, une étude de sensibilité à ces différents paramètres est effectuée sur les résultats de Dagan et Indelman (1999), étude restant valable dans le cas de la présence de limites imperméables. Cette étude a pour objet de déterminer l'influence relative d'une petite variation d'un des paramètres du milieu sur la réponse du système aux sollicitations que sont l'injection et le pompage d'un polluant, qui est bien notre cas de figure. Elle peut trouver deux applications majeures qui sont le design d'échantillonnage et l'identification de paramètres proprement dite. Le design d'échantillonnage qui est détaillé plus loin consiste en la localisation spatiale et/ou temporelle des points de mesure d'une grandeur (dans notre cas la charge hydraulique en terme d'écoulement et la concentration en terme de transport de polluant) afin d'obtenir un maximum d'informations sur les paramètres du système en fournissant le minimum d'effort de mesure.

Plus précisément, le présent mémoire se compose de cinq chapitres qui s'articulent de la façon suivante,

Le **chapitre I** présente succinctement les concepts relatifs à la théorie des eaux souterraines ou les propriétés distinctives des nappes libres et captives sont présentées et les caractéristiques physiques et hydrauliques des sols sont définies. Le concept d'emmagasinement dans les aquifères est explicité du moment qu'il joue un rôle très important dans les écoulements des eaux souterraines. Enfin l'équation générale décrivant les écoulements en milieux poreux est développée et les équations des écoulements dans les aquifères sont alors déduites.

Le **chapitre II** donne quelques éléments et autres notions de ce qu'il est obligatoire de maîtriser si l'on veut aller au bout des projets : les notions de statistiques et probabilistes. Celles-ci sont une façon pénétrer l'inconnu qui découle de l'hétérogénéité des sols en termes d'incertitude qui affecte l'estimation des paramètres de calculs.

Le **chapitre III** présente une simple caractérisation du milieu poreux, et passe en revue les différentes approches mathématiques des problèmes d'écoulement et du transport en milieu poreux saturé et non saturé ainsi que l'écoulement à surface libre qui limite la description de l'écoulement à la zone saturée en supposant une variation discontinue de certains grandeurs physiques.

Le **chapitre IV** traite de la variabilité des paramètres géotechniques et des aléas qui en découlent dans leur caractérisation ou de leur influence sur les solutions de problème de l'écoulement . Par ailleurs, il met en relief la nécessité d'utiliser des techniques d'analyse de cette variabilité. Comme il est abordé dans ce même chapitre et de façon synthétique les éléments fondamentaux de la théorie stochastique appliquée aux écoulements en milieu poreux hétérogène, puis expose de façon plus détaillée l'application de ces travaux aux problèmes d'écoulements, en particulier en présence de puits et/ou de conditions aux limites.

Au dernier chapitre, soit le **chapitre V**, on analyse le problème de l'écoulement et du transport par approche stochastique. Deux cas d'étude y sont abordés : le cas statiquement homogène (50 calculs), un cas bidimensionnel à variabilité bidimensionnelle (50 calculs). Des résultats relatifs aux charges hydrauliques et aux concentrations, sous forme de courbes et de tableaux y sont donnés.

Malgré le développement d'outils de calculs (méthodes numériques) de plus en plus performants et une description de sol de plus en plus proche de la réalité, il existe toujours un écart entre les résultats de calcul et les valeurs des solutions réels à la fois en laboratoire et in situ.

C'est dans l'espoir de réduire ce biais existant, ou, tout au moins de progresser dans la compréhension de ces divergences, que les géotechniciens poussent leurs investigations dans l'application de diverses techniques dont les méthodes statistiques et probabilistes, avec comme objectif de prendre en compte l'effet de la variabilité des propriétés physiques et hydrauliques de sol sur le comportement des écoulements en milieux poreux.

Enfin ce travail réalisé dans le cadre de la préparation d'un mémoire de magister se termine par une conclusion. L'accent est ainsi mis sur l'importance de ces techniques et de leur développement éventuel. L'espoir est qu'un jour les ingénieurs accorderont plus d'importance à toutes ces méthodes dans leurs diverses applications.

## CHAPITRE I

**THEORIE DES EAUX SOUTERRAINES****I.1 INTRODUCTION**

Les écoulements souterrains constituent la partie « cachée » du cycle hydrologique. C'est la raison pour laquelle certaines de leurs caractéristiques, mesurables ponctuellement seulement, restent parfois incertaines. Cependant l'étude de ces écoulements et des ressources qu'ils sont susceptibles de nous fournir ne peuvent être négligées dans la gestion générale des eaux.

Le mouvement de l'eau dans le sous-sol est très lent par rapport aux vitesses de ruissellement en surface, ce qui implique un long temps dans le sous-sol et de faibles flux. Autrement dit, lorsque la zone d'aération du sol contient une humidité suffisante pour permettre la percolation profonde de l'eau, une fraction des précipitations atteint la nappe phréatique. L'importance de cet apport dépend de la structure et de la géologie du sous-sol ainsi que du volume d'eau précipité. L'eau va transiter à travers l'aquifère à une vitesse de quelques mètres par jour à quelques millimètres par an avant de rejoindre le cours d'eau. Cet écoulement, en provenance de la nappe phréatique, est appelé **écoulement de base** ou **écoulement souterrain**.

A cause des faibles vitesses de l'eau dans le sous-sol, l'écoulement de base n'intervient que pour une faible part dans l'écoulement de crue. De plus, il ne peut pas être toujours relié au même événement pluvieux que l'écoulement de surface et provient généralement des pluies antécédentes.

L'écoulement de base assure en générale le débit des rivières en l'absence de précipitations et soutient les débits d'étiage (l'écoulement souterrain des régions karstiques fait exception à cette règle). Le coût d'extraction de l'eau hors des nappes aquifères est souvent plus élevé que le simple prélèvement des eaux de surfaces, lorsque celles-ci ne doivent pas être traitées. Mis à part les incertitudes liées au caractère souterrain de ces écoulements, leur exploitation offre des avantages certains,

- une meilleure protection contre la pollution;
- une température relativement constante;
- de faibles distances entre la source et l'utilisation;
- une réponse à la demande peu variable dans le temps et dont les extrema sont décalés de un à six mois par rapport aux extrema pluviométriques.

L'exploitation optimum des ressources souterraines implique une connaissance préalable des conditions hydrogéologiques, permettant le calcul du bilan et la courbe de tarissement. Les informations hydrogéologiques étant fournies par des essais de pompage, des essais de traçage et de piézomètres, leur nombre est forcément limité.

Quelque soit le but final, la meilleure façon de profiter au maximum de toutes les données disponibles, relatives à une nappe aquifère, est de combiner celle-ci aux lois physiques appropriées (exprimées sous forme d'équations) pour former un modèle mathématique.

## I.2 ECOULEMENT DE L'EAU SOUTERRAINE

### I.2.1 Zone non saturée

La zone non saturée correspond à la partie située au dessous de la surface du sol et au dessus de la nappe phréatique des aquifères. Elle est constituée simultanément, au moins pour une période de temps donnée, de l'air et de l'eau dans les pores. Son épaisseur est très petite voire nulle dans les sols humides, et estimée à des centaines de mètres dans les sols arides ou secs. Elle est conçue comme zone d'activité telle que l'implantation des arbres, construction de différents ouvrages et le dépôt des déchets.

On distingue aussi,

**a. Zone vadose**, La zone vadose est la partie du sol qui se trouve au dessus de la nappe phréatique, où les pores sont partiellement saturés en eau (zone radulaire, vadose, intermédiaire) et saturée en eau (zone capillaire). Dans ce cas de figure l'eau est sous pression négative.

**b. Zone capillaire**, La zone capillaire est la partie du sol située au dessous de la nappe phréatique et au dessus de la limite de la remontée capillaire, elle est caractérisée par une pression d'eau négative.

### I.2.2 Zone saturée

La zone saturée correspond à la partie du sol située sous la nappe phréatique (surface libre des aquifères) où les pores sont complètement remplis d'eau. Elle est caractérisée par une pression d'eau positive.

La figure I.1 récapitule l'ensemble des zones d'écoulements souterrains citées ci-dessus,

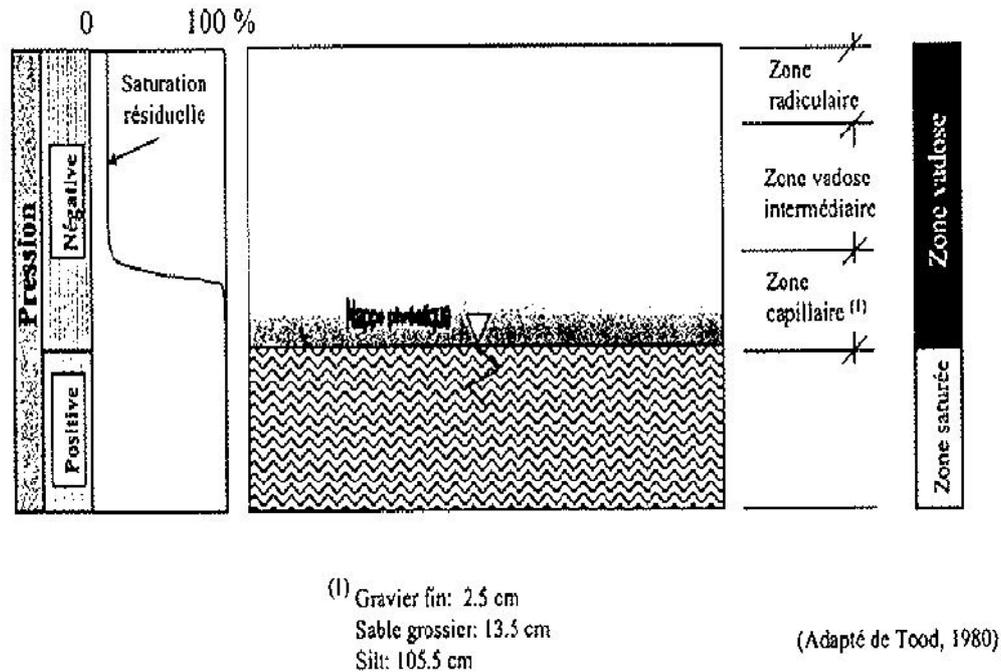


Figure I.1 Zone saturée et zone non saturée

### I.3 CLASSIFICATION DE L'EAU INTERSTITIELLE

#### I.3.1 Eau gravitaire

C'est la fraction de l'eau souterraine qui se draine sous l'action des forces de gravité uniquement. Cette eau est mobilisable par drainage et pompage dans un aquifère à nappe libre.

#### I.3.2 Eau de rétention

C'est la fraction de l'eau maintenue dans les interstices à la surface des grains ou sur des microfissures par la force d'attraction moléculaire. On distingue l'eau pelliculaire qui peut être libérée par centrifugation et l'eau absorbée qui ne sera libérée que par évaporation en étuve.

#### I.3.3 Eau capillaire

C'est la fraction de l'eau soumise à la force de tension superficielle au-dessus de la surface de la nappe.

#### I.3.4 Capacité de rétention

La capacité de rétention est le rapport du volume d'eau retenue dans un matériau au volume total de ce matériau sec (= teneur en eau volumique de rétention =  $n(1-S_r)$ ). Elle exclut donc l'eau gravitaire et inclut l'eau pelliculaire et l'eau adsorbée. Par abus de langage, on l'appelle eau capillaire.

### I.3.5 Capacité au champ

C'est le rapport de la masse d'eau retenue dans un matériau à la masse de ce matériau sec (= teneur en eau massique de rétention), suite au drainage gravitaire.

## I.4 CLASSIFICATION DES AQUIFERES

### I.4.1 Définitions

#### a. Aquifère

Un aquifère est une unité géologique **saturée** au moins en partie en eau, et constitué de matériaux suffisamment perméables pouvant transmettre et capter des quantités significatives d'eau d'une nappe souterraine sous des gradients hydrauliques ordinaires ou faibles. Autrement dit, un aquifère est tout simplement une unité géologique capable de fournir des quantités d'eau économiquement avantageuses. Les ensembles géologiques considérés comme aquifères varient selon le contexte et la disponibilité de formations perméables dans une région donnée. Normalement les formations considérées comme des aquifères sont formés de matériaux dont la conductivité hydraulique excède  $10^{-7}$  m/s.

#### b. Couche de confinement

Une couche de confinement est une unité géologique de faible ou de très faible conductivité hydraulique (inférieure à  $10^{-7}$  m/s). Ces couches sont subdivisées généralement en aquifuges, aquitards, et aquicludes.

- **Aquifuge**, Un aquifuge est une unité absolument imperméable ne contenant pas d'eau et ne permettant pas l'écoulement. Ce terme est plutôt conceptuel et correspond à assez peu de situations réelles.

- **Aquiclude**, L'aquiclude est aussi une unité géologique de faible perméabilité, saturée et incapable de fournir ou transmettre des quantités significatives d'eau sous des gradients hydrauliques ordinaires, constituant ainsi la limite supérieure ou inférieure d'un système d'écoulement.

- **Aquiclude**, L'aquitard, aussi appelé couche **semi-perméable** est une unité géologique peu perméable du point de vue de l'utilisation économique de l'eau, mais suffisamment perméables pour emmagasiner de l'eau souterraine et la transférer lentement d'un aquifère à un autre.

Des vrais aquicludes sont très rares. Dans la majorité des cas, il s'agit d'aquitards. Ainsi, ont fait plutôt référence seulement aux aquifères et aquitards.

### I.4.2 Types d'aquifères

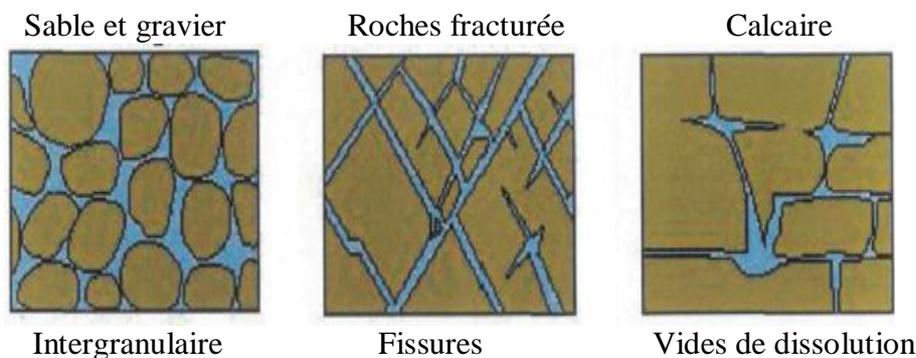
Les classifications conventionnelles discriminent les aquifères selon le type de matériau géologique, la perméabilité ou le degré de confinement. Lorsque l'aquifère est exploité et que l'aire d'alimentation de l'ouvrage de captage doit être estimée, une classification plus pointue et plus appropriée qui intègre l'information géologique influençant la direction et la vitesse d'écoulement de l'eau souterraine doit être utilisée.

Selon plusieurs auteurs de manuels d'hydrogéologie reconnus ( Freeze et Cherry, 1979 ; Todd, 1980 ; Fetter, 1994 ; Banton et Bangoy, 1999), les aquifères se classent selon le type de pore caractérisant les corps géologiques aquifères tels les dépôts meubles, les roches sédimentaires poreuses, les massifs rocheux fracturés ou les systèmes karstiques.

Les aquifères se distinguent également suivant leur degré de confinement qui peut varier d'un endroit à un autre à l'intérieur d'un même aquifère.

### a. Types d'aquifères d'après le type de porosité

Deux types de porosité sont présents dans les formations géologiques aquifères (figure I.2). La porosité primaire correspond aux vides entre les composantes de la matrice, que ce soit des cristaux ou des grains. La porosité secondaire correspond aux systèmes de fractures ou karstiques d'un massif rocheux. Les roches susceptibles de posséder une bonne porosité primaire sont celles qui résultent de la consolidation de sédiments pulvérulents. Selon le processus de sédimentation et le ciment composant la roche, celle-ci est plus ou moins poreuse.



**Figure I.2** Porosité primaire (figure de gauche) et secondaire (figures du centre et de droite; modifiées de Banton et Bangoy, 1999).

Les trois illustrations ne sont pas à la même échelle, la figure de gauche est à plus grande échelle par rapport aux figures du centre et de droite.

Les aquifères à porosité primaire correspondent principalement à des dépôts meubles. Les roches sédimentaires poreuses peuvent également appartenir à cette classe mais il faut considérer qu'elles peuvent également être fracturées et avoir deux types de porosité effective. La classe d'aquifère constitué de dépôts meubles se distingue par la dimension des pores entre les constituantes de la matrice et les liens entre ces pores qui favorisent l'écoulement de l'eau (Freeze et Cherry, 1979; Todd, 1980; Fetter, 1994; Banton et Bangoy, 1999).

Les aquifères dont le principal apport en eau provient du réseau de fractures sont considérés comme des aquifères fracturés. En milieu fracturé, les deux types de porosité sont présents mais c'est essentiellement la porosité secondaire qui contrôle l'écoulement (Sylvestre, 1981). Il en est de même pour les systèmes karstiques dont l'ouverture des fractures est généralement plus élevée que celle des massifs rocheux fracturés à cause de l'élargissement des fractures par dissolution des carbonates (Trenhaile, 1998).

En plus de l'ouverture des fractures, trois autres facteurs importants influencent la porosité efficace de fracture dans l'aquifère : la densité des fractures, l'orientation des jeux des fractures et la longueur des fractures. Ces trois caractéristiques déterminent le degré de recoupement entre les fractures (Bradbury et Muldoon, 1994).

### **b. Types d'aquifères selon le degré de confinement**

Indépendamment du milieu géologique de l'aquifère, trois classes d'aquifère se distinguent selon le type de nappe phréatique qu'ils contiennent,

- un aquifère non-confiné contient une nappe libre, cas d'un écoulement gravitaire;
- un aquifère confiné contient une nappe captive, cas d'un écoulement artésien et ;
- un aquifère semi-confiné contient une nappe semi-captive.

Un aquifère non-confiné (figure I.3) se caractérise par une couche à perméabilité élevée qui affleure à la surface du terrain et s'étend jusqu'à la limite inférieure de l'aquifère. La nappe qu'il contient est libre et se recharge par l'infiltration verticale des eaux de surface (Todd, 1980; Banton et Bangoy, 1999). Trois facteurs contrôlent la quantité d'eau contribuant à la recharge (Fetter, 1994),

- la quantité d'eau météorique disponible pour la recharge;
- la conductivité hydraulique verticale des dépôts de surface et des autres couches situées au-dessus du toit de la nappe et ;
- la transmissivité et le gradient hydraulique utilisés pour déterminer la quantité d'eau provenant de l'infiltration. Dans ce type d'aquifère, l'élévation du toit de la nappe phréatique varie dans l'espace et dans le temps.

Un type particulier de nappe contenue dans un aquifère non-confiné est la nappe perchée (figure I.3) qui est retenue par une lentille imperméable qui, située à l'intérieur d'un aquifère non-confiné, retient une partie de la recharge. Cette nappe s'écoule ensuite par les bordures de la couche imperméable ou par infiltration verticale vers le bas au travers de cette couche pour rejoindre la nappe principale de l'aquifère.

Un aquifère semi-confiné se caractérise par une couche de surface aquiclude. La recharge de la nappe se fait verticalement lorsque la couche aquifère rejoint la surface et/ou par infiltration verticale à travers la couche aquiclude, de la même façon que pour les aquifères confinés.

Une nappe captive remplit complètement et à saturation un aquifère situé sous une couche aquitard (figure I.3). La recharge s'effectue verticalement lorsque l'aquifère apparaît en surface et/ou par percolation très lente à travers la couche aquiclude. Lorsqu'il y a des zones de recharge où l'aquifère apparaît en surface, la recharge est contrôlée par les trois mêmes facteurs que pour la recharge d'une nappe libre. L'élévation du toit de la nappe phréatique peut se trouver plus élevée que la limite supérieure de l'aquifère, alors la nappe est soumise à des conditions artésiennes. Ces conditions sont moins fréquemment rencontrées dans les climats arides où la quantité d'eau disponible à la recharge potentielle est moindre, de ce fait le niveau du toit de la nappe est moins élevé (Fetter, 1994).

L'écoulement dans la couche "sandwichée" est appelé écoulement mixte (ou artésien gravitaire) si le niveau d'eau dans l'aquifère est à une élévation à certains endroits inférieure à l'élévation du contact entre l'aquifère et la couche peu perméable supérieure, et à certains endroits supérieurs à ce contact.

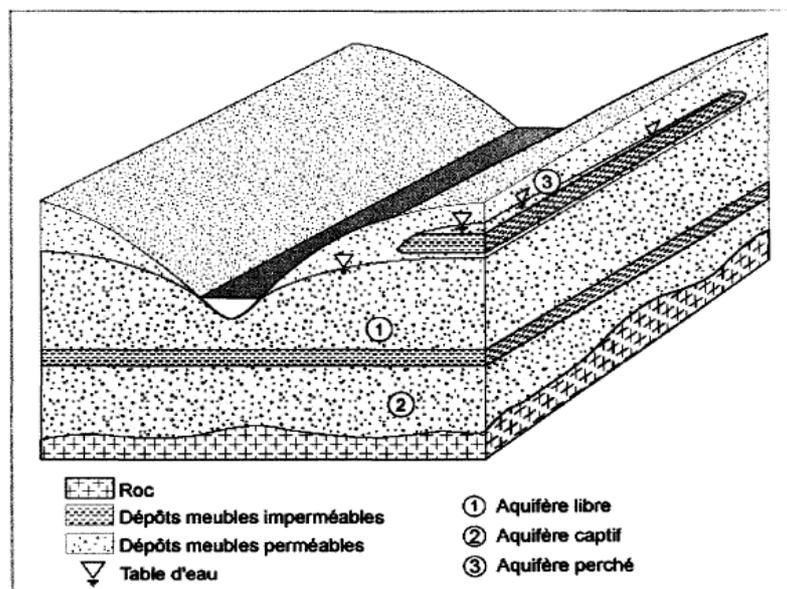
Il est possible de trouver dans la littérature la dénomination «aquifères partiellement confinés». Il s'agit, dans ces cas, d'une couche perméable sous-jacente à une couche moins perméable mais capable de "fournir" une quantité d'eau non négligeable dans certains cas ou à certaines périodes de l'année.

Si la surface piézométrique (la ligne imaginaire reliant les hauteurs d'eau dans tous les piézomètres installés en ligne, pour simplifier dans une région) d'un aquifère se situe au-dessus de la surface naturelle du terrain, tout puits installé dans cette région sera un puits artésien jaillissant (pas besoin de pompe).

### c. Utilité de ces classifications pour l'estimation de l'aire d'alimentation

La classification conventionnelle discrimine les aquifères selon le type de porosité et le degré de confinement. Ces classifications considèrent de grands ensembles géologiques mais n'intègrent pas les différents faciès sédimentaires pour les dépôts meubles, ni les caractéristiques des réseaux de fractures pour les massifs rocheux.

Une classification basée sur les particularités géologiques influençant l'écoulement de l'eau souterraine est un outil de base à l'estimation de l'aire d'alimentation d'un ouvrage de captage.



*Figure I.3* Types d'aquifère classifiés d'après leur degré de confinement (tirée de Verreaultetal, 2006).

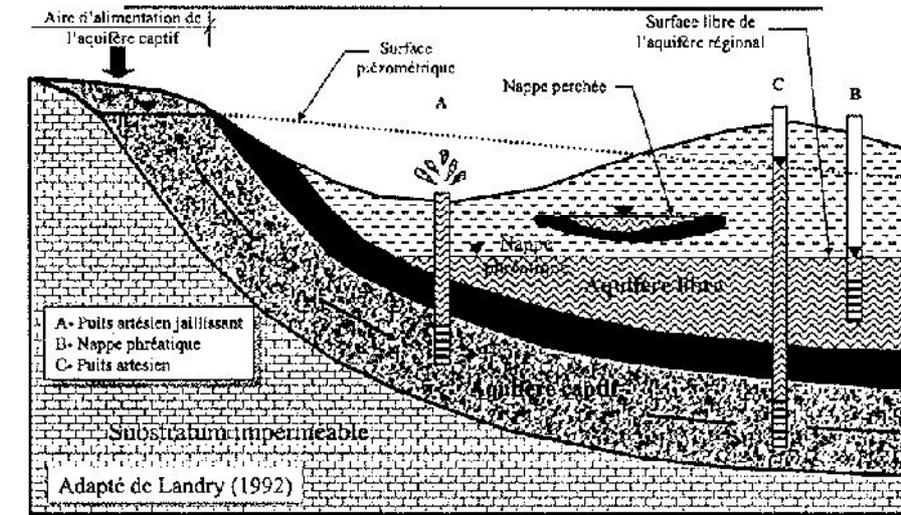


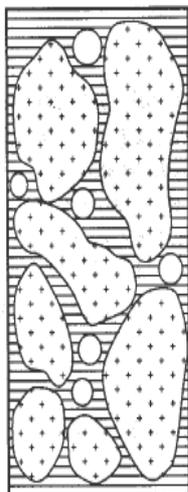
Figure I.4 Autre schéma de classification des aquifères (tiré de l'adapté de Landry 1992).

I.5 CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DU SOL

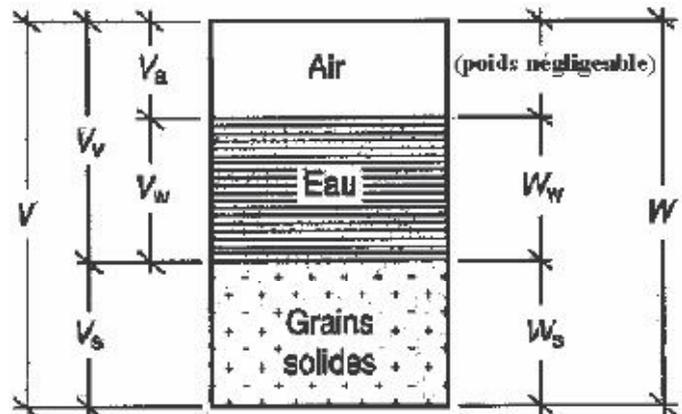
Pour avoir un bon modèle de simulation d'un écoulement, on doit définir les principales propriétés et caractéristiques des sols saturés ou non saturés, qui serviront des données paramétriques dans l'étude de la dite simulation, pour ce faire, on choisit alors, un volume élémentaire plus approprié d'un sol tel que illustré par la figure I.5.

Sol à l'état naturel

Diagramme des phases



Volume



Poids (masse)

Figure I.5 Schéma d'un volume élémentaire de sol. Poids et volumes des différentes phases.

### I.5.1 Viscosité de l'eau

La viscosité est un concept qui apparaît simple et clair, à première vue, mais qui devient fort complexe lorsqu'on va au fond des choses. Il intervient notamment dans la force dans laquelle les couches plus rapides entraînent les couches plus lentes d'un écoulement laminaire.

#### a. Viscosité dynamique

Si on considère dans le cas d'un écoulement laminaire, deux couches contiguës distantes de  $dz$ . La force de frottement  $F$  qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit  $dv$ , à leur surface  $S$  et inversement proportionnelle à  $dz$ .

Par conséquent, cette force de frottement est liée à un facteur de proportionnalité appelé, **coefficient de viscosité dynamique**.

$$F = \frac{\mu dv}{dz} \quad (\text{I-1})$$

Ou  $F$  : la force de frottement.

$\mu$ : la viscosité dynamique.

$dv$ : la variation de la vitesse d'écoulement.

$dz$ : la variation de la distance normale à la direction de l'écoulement.

#### b. Viscosité cinématique

La viscosité cinématique est le rapport du coefficient de viscosité dynamique par la masse volumique de l'eau.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_w} \quad (\text{I-2})$$

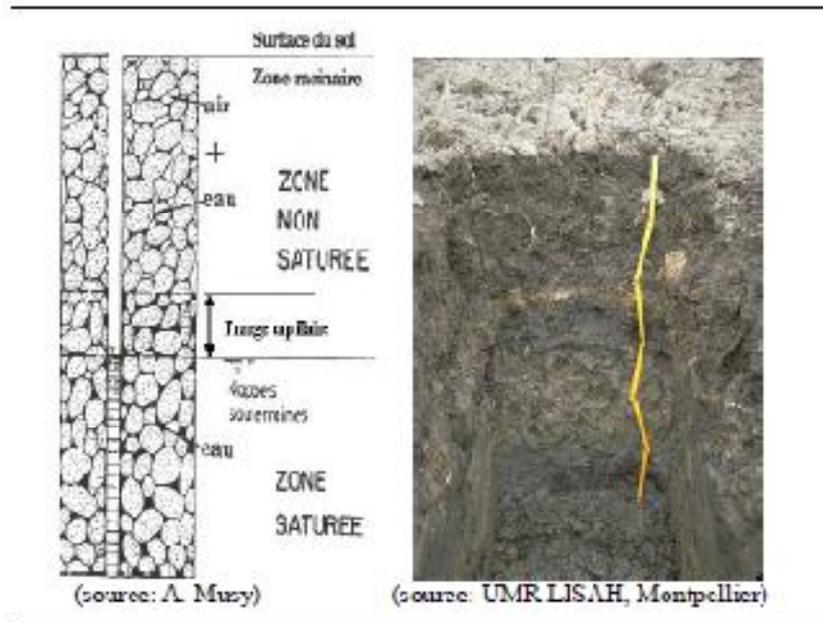
Ou  $\nu$  : la viscosité cinématique.

$\mu$ : la viscosité dynamique.

$\rho_w$ : la masse volumique ou la densité de l'eau.

Le sol peut être alors considéré comme un système hétérogène complexe composé de trois phases : la phase solide matérialisée par les particules du sol, la phase liquide constituée notamment par l'eau et la phase gazeuse représentée essentiellement par l'air (Hillel 1988). Lorsque la phase gazeuse est absente de la matrice poreuse, le milieu considéré est dit saturé ; c'est le cas des nappes d'eau souterraines.

A proximité de la surface, le sol présente des zones plus ou moins humides assimilées à des milieux poreux non saturés ou variablement saturés (figure I.6). La texture, qui indique les proportions relatives des diverses fractions d'un sol (argile, limons, sables,...) et structure, qui précise la manière dont sont associés les constituants élémentaires, permettent une caractérisation du sol en tant que milieu poreux.



**Figure I.6** Exemple de sol et de représentation du milieu poreux associé.

Un certain nombre de paramètres que l'on définira dans la suite de ce sous chapitre, permet de caractériser l'étendue relative de chacune des trois phases constitutives du milieu poreux. La porosité, notée  $n$  traduit l'importance de l'espace poral où se déroulent les transferts, tandis que l'indice de saturation effective, noté  $S_e$ , renseigne sur la partie liquide du fluide présent.

D'un point de vue dynamique, dans le cas d'un sol indéformable et d'une eau faiblement compressible, l'état hydrique d'un milieu poreux soumis à des conditions particulières peut être décrit à l'aide de trois variables d'état (Musy et al., 1991) : la teneur en eau  $\theta$ , la charge piézométrique  $H(L)$  qui mesure la densité d'énergie potentielle totale associée à  $\theta$  et permet de déduire la répartition de l'énergie dans le profil, et la conductivité hydraulique  $K$ , qui caractérise les propriétés hydrodynamiques du sol et mesure l'aptitude de ce dernier à transmettre l'eau.

### I.5.2 Porosité

D'une manière générale, la porosité d'un sol est définie comme étant sa capacité à l'état solide à se laisser pénétré par un fluide, appelée : **capacité d'absorption**, elle est dépendante de l'importance du pourcentage des vides que contient le sol. Dans la présente étude le fluide cité est assimilé à l'eau sous sa forme liquide. Par ailleurs, et vu l'importance de ce paramètre de porosité dans la texture des sols et selon le phénomène qui intéresse la présente étude, on distingue,

#### a. la porosité géométrique, ou porosité totale, $\emptyset$

Elle permet de connaître l'importance des vides c'est à dire de savoir si le sol est dans un état lâche ou serré. Elle est définie comme étant le rapport du volume des vides  $V_v$  accessible à l'eau et à l'air au volume total apparent  $V$ , du sol. La porosité est toujours inférieure à 1, elle peut aussi être exprimée en pourcents.

$$\emptyset = \frac{V_v}{V} \quad (\text{I-3})$$

#### b. l'indice des vides, $e$

Les sollicitations auxquelles sont soumis les sols produisent des variations du volume des vides  $V_v$  qui entraînent des variations du volume apparent  $V$ , aussi préfère t-on souvent rapporter le volume des vides non pas au volume apparent de l'échantillon mais au volume des particules solides  $V_s$ , lequel peut être considéré comme invariant. On définit alors l'indice des vides, noté  $e$ , dont la signification est analogue à celle de la porosité. Il est défini par la relation,

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (\text{I-4})$$

L'indice des vides peut être supérieur à 1 et même atteindre la valeur 13 (cas extrême des argiles de Mexico).

#### c. La porosité efficace $\emptyset_e$ , ou porosité cinématique

- **La porosité efficace.** La porosité efficace est celle qui est occupée par l'eau qui s'écoule, c'est donc celle qui devrait intéresser en premier les hydrogéologues! La définition exacte de la porosité efficace est le rapport du volume d'eau qui est extrait par gravité  $V_g$ , sur le volume total  $V$ , et le milieu doit être initialement saturé en eau, cette définition exclut l'eau liée de la porosité efficace. Elle est exprimée en pourcentage par la relation,

$$\emptyset_e = \frac{V_g}{V} \quad (\text{I-5})$$

- **La porosité cinématique.** La porosité cinématique est conceptuellement proche de la porosité efficace mais diffère par sa définition : c'est le rapport de la vitesse d'écoulement de l'eau sur la vitesse de Darcy (calculée suivant la loi de Darcy).

On peut ajouter d'autres paramètres liés spécifiquement aux milieux non saturés, tels que,

#### d. La porosité de drainage $\phi_d$

Elle est définie comme étant la fraction de la porosité correspondante à un écoulement rapide. Le plus souvent la porosité de drainage est assimilée à la porosité efficace, et ce à cause de la difficulté, dans la pratique, de différencier l'une de l'autre. Leur complémentaire par rapport à la porosité totale est nommé capacité de rétention capillaire (De Marsily, 1981).

#### e. La capacité de rétention $\phi_{ret}$

Elle est définie comme étant la différence entre la porosité totale et la porosité de drainage, représentant la partie du volume des vides non drainés. Elle est exprimée par la relation,

$$\phi_{ret} = \phi - \phi_d \quad (\text{I-6})$$

### I.5.3 Degré de saturation $S_r$

Le degré de saturation indique dans quelle proportion les vides sont remplis par l'eau. Il est défini comme le rapport du volume de l'eau  $V_w$  au volume des vides  $V_v$ . Il est exprimé par la relation,

$$S_r = \frac{V_w}{V_v} \quad (\text{I-7})$$

Le degré de saturation peut varier de 0% (sol sec) à 100% (sol saturé).

### I.5.4 Teneur en eau (volumique) $\theta$

La teneur en eau volumique est définie comme étant le rapport du volume d'eau  $V_w$  contenu dans le sol sur le volume total  $V$  de celui-ci.

$$\theta = \frac{V_w}{V} \quad (\text{I-8})$$

La teneur en eau volumique est liée au degré de saturation par la relation,

$$\theta = \phi \cdot S_r \quad (\text{I-9})$$

### I.5.5 Conductivité hydraulique et perméabilité intrinsèque

La perméabilité caractérise l'aptitude d'un milieu poreux à se laisser traverser par un fluide sous l'effet d'un gradient de pression. Dans ce qui suit, nous ne traiterons que le cas des écoulements monophasiques, c'est-à-dire que les milieux poreux considérés sont saturés par une seule phase de fluide.

La perméabilité est indépendante des propriétés du fluide saturant contrairement à la conductivité hydraulique qui est définie comme étant un coefficient de proportionnalité décrivant la facilité avec laquelle un liquide peut se déplacer dans un milieu poreux.

En effet, la conductivité hydraulique traduit une vitesse de percolation qui dépend de la nature du fluide. La perméabilité, qui à l'unité d'une surface, est quant à elle une propriété intrinsèque des matériaux. La perméabilité peut être ainsi analysée en fonction de la microstructure des milieux poreux et ce sont essentiellement les caractéristiques morphologiques de l'espace poreux (tortuosité, connectivité, surface spécifique, taille des pores,...) qui sont des facteurs influant sur sa valeur [Dana 1999, Dullien 1992].

### I.5.6 Relation entre la perméabilité et la porosité

L'évolution de la perméabilité est très sensible à la porosité. En effet la perméabilité dépend du nombre, de la géométrie, de la taille et surtout de l'interconnectivité des vides laissés entre les grains. La perméabilité diminue avec la porosité.

La formule empirique la plus connue pour relier la perméabilité à la porosité est celle de **Koseny-Carman**.

$$k = \frac{C_s e^3}{\mu S_0^2 (1+e^3)} \quad (\text{I-10})$$

Cependant, de nombreux auteurs ont proposé des formules reliant la perméabilité à la porosité du milieu ainsi qu'à sa granulométrie. Parmi ces formules empiriques on peut citer (Reddi 2003),

#### a. Hazen

$$k = 100(d_{10})^2 \quad (\text{I-11})$$

Ou,  $d_{10}$  : représente le diamètre efficace des grains, (la formule I-11 est valable pour les sols sableux).

#### b. Cazagrande

$$k = 1,4K_{0,85}e^2 \quad (\text{I-12})$$

Ou,  $K_{0,85}$  : représente la perméabilité correspondante à un indice des vides  $e = 0,85$ .

#### c. Terzaghi

$$k = \frac{c(d_{10})^2(n-0,13)^2}{\mu(1-n)^{1/3}} \quad (\text{I-13})$$

Ou,  $c$  : est un coefficient qui dépend de l'uniformité des grains.

$\mu$ : est la viscosité dynamique.

#### d. Schlichter

$$k = c(d_{10})^2 n^{3,3} \quad (\text{I-14})$$

**e. Bakhmetef**

$$k = c(d_{10})^2 n^4 \quad (\text{I-15})$$

**f. Koseny-Carman**

$$k = \frac{C_s e^3}{\mu S_0^2 (1+e^3)} \quad (\text{I-16})$$

Ou,

$S_0$  : est la surface exposée au fluide par unité de volume du milieu solide.

$C_s$  : est une constante décrivant la forme irrégulière des pores.

**g. Bretjinski**

$$\phi = 0,117.(k)^{1/7} \quad (\text{I-17})$$

ou,

$k$  : est en mètre par jour (m/j).

Les formules empiriques données ci-dessus conduisent à des résultats assez comparables à ceux obtenus par la formule de Hagen-Poiseuille :

$$k = \frac{y_w d^2}{32\mu} \quad (\text{I-18})$$

Ou  $y_w = \rho_w g$  : est le poids volumique de l'eau.

$g$  : est l'accélération due à la pesanteur.

On peut déduire à partir de ces expressions, que le coefficient de perméabilité  $k$ , qui définit les propriétés physiques du sol du point de vue filtration, dépend de la structure et de la texture du sol, de la forme et de la dimension des grains, de leur constitution pétrographique et de leur assemblage.

On définit ainsi la perméabilité intrinsèque qui est liée à la conductivité hydraulique par la formule suivante,

$$K = \frac{k\mu}{y_w} \quad (\text{I-19})$$

Ou  $K$  : est la perméabilité intrinsèque.

$k$  : est la perméabilité (ou conductivité) hydraulique.

$\mu$  : est la viscosité dynamique.

La conductivité hydraulique,  $k$  est une vitesse de diffusion qui indique la résistance d'un sol à l'écoulement d'un fluide. Ce coefficient dépend de la structure et de la composition du sol et des propriétés du fluide. La perméabilité intrinsèque  $K$ , simplement appelée perméabilité, ne dépend que des propriétés du sol. En théorie et parfois en pratique, on peut dissocier la conductivité hydraulique en deux facteurs, la **perméabilité intrinsèque** du sol et la **fluidité** du fluide.

$$k = K \cdot f \quad (\text{I-20})$$

Ou  $K$  : est la perméabilité intrinsèque du sol.

$f$  : est la fluidité du fluide.

La fluidité est inversement proportionnelle à la viscosité dynamique et exprimée comme suit,

$$f = \frac{\gamma_w}{\mu} \quad (\text{I-21})$$

La perméabilité est considérée comme constante pour un sol dont le squelette ne subit pas ou peu de changement. Elle est alors mesurée empiriquement par un essai de drainage. Dans le cas de grandes déformations, la perméabilité n'est plus constante et dépend de l'indice des vides.

### I.5.7 Relation entre la perméabilité et l'indice des vides

Nombre de mesures de perméabilité ont été effectuées avec différents gradients de pression de fluide et pour différentes valeurs d'indice des vides. On peut citer en particulier Grunberger (1995), qui a réalisé des essais similaires sur argiles. Puis plusieurs chercheurs ont confirmé ces résultats pour chaque degré de compaction qui correspond à une valeur d'indice des vides.

Deux études expérimentales ont été menées par Nagaraj et al.(1994), dans le but de déterminer la valeur de la perméabilité et son évolution en fonction de l'indice des vides. Différents sols à base d'argile sont utilisés. Les échantillons sont soumis à des charges-décharges de pression de consolidation de 200 KPa, 400 KPa, et 800 KPa. A chaque pression, après la réalisation de l'équilibre, des tests de perméabilité axiale sont réalisés.

En effet, la valeur de la perméabilité est influencée par la modification de l'indice des vides. La pression de consolidation influence la magnitude de la perméabilité. La perméabilité décroît avec la décroissance de l'indice des vides.

### I.5.8 Transmissivité

La transmissivité est la vitesse à laquelle l'eau d'une masse volumique et d'une viscosité données traverse, sous un gradient hydraulique unitaire, une largeur unitaire d'un aquifère (ou

d'une couche encaissante). Elle est définie comme étant le produit du coefficient de perméabilité moyen par l'épaisseur de l'aquifère. On la note par,  $T$ .

Elle a les dimensions [Longueur<sup>3</sup> / Temps.Longueur], ou encore [Longueur<sup>2</sup> / Temps]; on l'exprime par exemple en m<sup>2</sup>/jour. La transmissivité dépend des propriétés du liquide et du milieu poreux. Aussi appelée coefficient de transmissivité.

$$T = k \cdot \beta \quad (\text{I-22})$$

Ou  $T$  : est la transmissivité.

$k$  : est la perméabilité.

$\beta$  : est l'épaisseur saturée.

Si l'aquifère est plutôt constitué de  $n$  couches multiples, la transmissivité totale  $T$  est la somme des transmissivités  $T_i$  de chacune des couches.

$$T = \sum T_i \quad (\text{I-23})$$

### I.5.9 Coefficient d'emmagasinement

Le coefficient d'emmagasinement est défini comme le volume d'eau  $V_w$  libéré ou emmagasiné à travers une surface  $A$  d'aire égale à l'unité, pour une unité de variation de la charge hydraulique  $\Delta h$  normale à cette surface. Il est désigné par le symbole  $S$ , sans dimension.

$$S = \frac{V_w}{A\Delta h} \quad (\text{I-24})$$

Le coefficient d'emmagasinement des zones captives d'une nappe dépend de l'élasticité des sols (ou des roches) et de l'eau, et sa grandeur est de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-6}$ .

Le coefficient d'emmagasinement des nappes libres équivaut en pratique à la porosité efficace (celle des pores ouverts) du sol (ou de la roche), car dans une nappe libre les effets de l'élasticité du sol (ou de la roche) et de l'eau sont généralement négligeables.

Il faut ici faire attention au fait que les pores trop petits ne jouent aucun rôle dans la porosité efficace, car dans ce cas les forces de rétention sont supérieures au poids de l'eau. Pour les sables, cette porosité efficace est de l'ordre de 0,1 à 0,2.

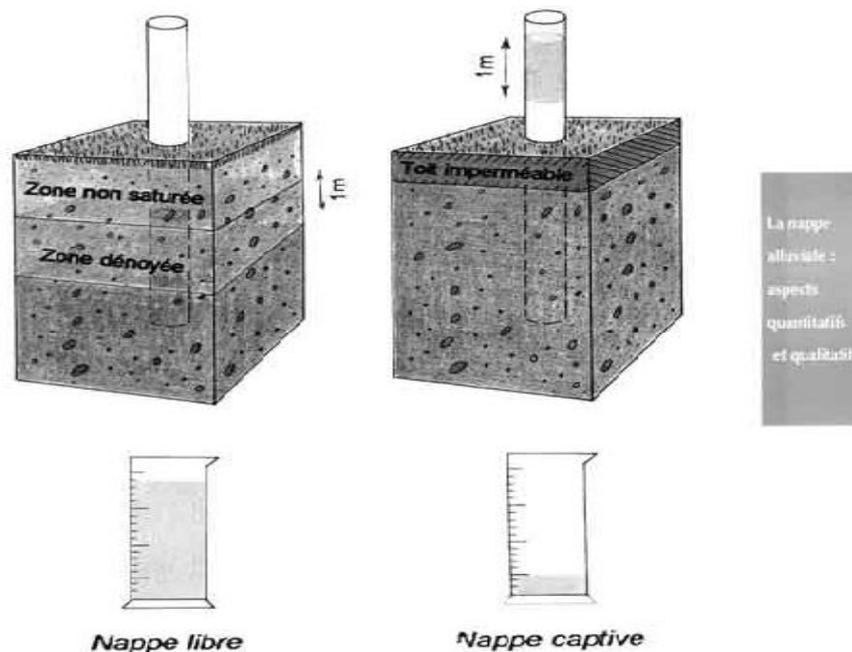
La figure I.7 illustre ce concept pour les nappes captives et libres. Dans le cas d'une nappe libre, un abaissement de la charge hydraulique provoque le drainage de l'eau sur un mètre de formation. La **porosité de drainage**  $\phi_d$  représente la proportion d'eau pouvant être drainée d'un volume unitaire de formation. Le volume d'eau  $V_w$  produit par l'abaissement de la nappe sera donc égal au produit de la porosité de drainage par le volume drainé, ( $V_w = \phi_d \cdot V$ ).

Ce volume drainé est égal au produit de la hauteur drainée de la formation, soit l'abaissement de la charge hydraulique  $\Delta h$ , par l'aire  $A$ . Le volume d'eau produit est donc,

$$V_w = \phi_d \cdot \Delta h \cdot A \quad (I-25)$$

En substituant cette dernière expression dans la définition du coefficient d'emmagasinement, on obtient pour **une nappe libre** le coefficient d'emmagasinement  $S$  est égal à la porosité de drainage  $\phi_d$ ,

$$S = S_y = \phi_d \quad (I-26)$$



**Figure 1.7** Concept d'emmagasinement dans les aquifères captifs et libres.

Le coefficient d'emmagasinement pour les nappes libre est souvent désigné par la notation  $S_y$  d'après le terme « specific yield » souvent utilisé pour décrire cette propriété. Le traitement précédent néglige l'effet de la compressibilité de l'eau et de l'aquifère qui produit peu d'eau relativement au drainage de l'aquifère. Le coefficient d'emmagasinement pour les nappes libres prend généralement des valeurs entre 0,02 et 0,03.

### 1.5.10 Coefficient d'emmagasinement spécifique

Le coefficient d'emmagasinement spécifique  $S_s$ , donne le volume d'eau libéré par un volume unitaire de matériau pour une baisse unitaire d'une charge hydraulique (la charge hydraulique est définie par la suite).

Son unité est  $L^{-1}$ . Le coefficient d'emmagasinement total d'un aquifère  $S$  est le produit du coefficient d'emmagasinement spécifique du matériau par l'épaisseur  $b$  de l'aquifère,

$$S = S_s \cdot b \quad (I-27)$$

Le coefficient d'emmagasinement spécifique  $S_s$  a été défini pour estimer le rendement d'un aquifère. Il exprime la quantité d'eau récupérable  $V_w$  en  $m^3$  par rapport à un abaissement  $\Delta h$  du niveau piézométrique de  $i$  mètres, sur une superficie  $A$  de l'aquifère en  $m^2$  (en unité SI).

$$S_s = \frac{V_w}{A\Delta h} \quad (\text{I-28})$$

Ou  $V_w$  : volume d'eau récupéré.  
 $A$  : surface considérée.  
 $\Delta h$  : rabattement du niveau piézométrique.

Dans un aquifère à nappe libre, le coefficient d'emmagasinement spécifique  $S_s$ , correspond à la porosité utile, on récupère toute l'eau par la force de l'eau gravitaire (ou par pompage). Pour un aquifère captive non pompée, l'abaissement du niveau piézométrique se fait uniquement par exclusion de l'eau, elle même contrôlée par l'élasticité des grains constituant l'aquifère et celle de l'eau. Les modules d'élasticité étant faibles le volume d'eau récupéré est alors bien plus faible que dans le cas d'une nappe libre.

Pour les aquifères profonds ( $> 500$  m), tous captifs sauf exception, la quantité d'eau récupérée est encore amoindrie suite à l'effet de diminution de la porosité (et la perméabilité) par écrasement des éléments (grains, blocs) constituant l'aquifère.

### I.5.11 Homogénéité-hétérogénéité et isotropie-anisotropie

La variabilité spatiale de la conductivité hydraulique  $k$  dépend de deux facteurs, la position et l'orientation de l'écoulement.

Les termes **homogénéité** et **hétérogénéité** sont utilisés pour se référer à la position dont dépend  $k$ . Similairement, les termes **isotropie** et **anisotropie** font référence à l'orientation dont dépend la conductivité hydraulique  $k$ .

Si  $k$  est indépendante de la position dans le domaine d'écoulement considéré, le sol est dit **homogène** par rapport à  $k$ , dans le cas contraire, le sol est dit **hétérogène** par rapport à  $k$ .

Similairement, si  $k$  est indépendante de la direction de l'écoulement, le sol est dit **isotrope** par rapport à  $k$ , si non il est **anisotrope** par rapport à  $k$ . L'hétérogénéité implique que la conductivité hydraulique  $k$  varie dans un système de coordonnées cartésiennes, et l'anisotropie implique que  $k$  varie avec les coordonnées angulaires (Reddi 2003). Autrement dit et, dans un contexte général, un milieu est dit **isotrope** lorsque ses caractéristiques physiques (perméabilité, granulométrie en particulier) sont constantes dans les trois directions de l'espace.

Dans le cas contraire le milieu est dit **anisotrope**. La définition de l'isotropie est aussi dépendante de la taille du réservoir considéré. A l'échelle millimétrique un aquifère formé de cailloux centimétriques est anisotrope. A l'échelle métrique ce même aquifère aura un comportement parfaitement isotrope. La définition d'un volume unitaire d'écoulement doit donc être assez grande par rapport aux dimensions des vides ou l'eau circule afin de permettre la continuité de l'écoulement.

Dans un milieu isotrope, la conductivité hydraulique est identique dans toutes les directions de l'espace  $(x, y, z)$ . Dans un milieu anisotrope, la conductivité hydraulique varie selon directions préférentielles, par exemple les couches sédimentaires.

## CHAPITRE II

**ELEMENTS DE PROBABILITES ET DE STATISTIQUES****II.1 INTRODUCTION**

La théorie des probabilités est une construction abstraite et axiomatique. Son intérêt pour l'ingénieur est de lui donner une représentation idéalisée, et donc plus simple et plus commode des phénomènes concrets. L'ingénieur est en face d'un phénomène de résultats incertains. Il fait alors une expérience de ( $n$ ) mesures, l'ensemble de ces mesures est appelé par le statisticien l'**échantillon**. Il observe combien de fois il a dépassé, par exemple, un seuil  $k$  fois. Il définit alors la fréquence relative du résultat incertain  $\frac{k}{n}$

La théorie va modéliser cette réalité en utilisant, à la place du résultat incertain, le concept abstrait de l'événement, cet événement est associé à une épreuve, et on lui associera un poids ou une probabilité à la place d'une fréquence relative.

Théorie, Pratique

Evénement, résultat incertain

Epreuve, expérience

(Réalisation des événements), (échantillon de  $n$  mesures)

Probabilité, fréquence relative

La théorie sera celle des probabilités, la pratique constitue en l'analyse statistique. Cette théorie idéalise correctement les résultats incertains, ceci est démontré par les théorèmes limites. On veillera toujours à distinguer Probabilités et Statistique : les Probabilités ont pour but de prévoir un événement qui n'est pas encore réalisé, les Statistiques de caractériser de grands ensembles de nombre, résultats possibles d'un ou de beaucoup d'événements.

**II.2 PROBABILITE**

Historiquement, le calcul des probabilités s'est développé à partir du XVII<sup>ème</sup> siècle autour des problèmes de jeux dans des situations où le nombre de cas possibles est fini. Les développements plus récents concernant des espaces non nécessairement finis nécessitent les outils techniques de la théorie de la mesure. Mais on peut introduire simplement sur les espaces finis toutes les notions importantes de probabilités sans avoir besoin de cet outillage.

### II.2.1 Notion de probabilités

Il existe plusieurs manières de définir une probabilité. Principalement, on parle de probabilités inductives ou expérimentales et de probabilités déductives ou théoriques. On peut les définir comme suit,

**Probabilité expérimentale ou inductive**, la probabilité est déduite de toute la population concernée. Par exemple, si sur une population d'un million de naissances, on constate 530000 garçons et 470000 filles, on dit que  $P[\text{garçon}] = 0.53$

**Probabilité théorique ou déductive**, cette probabilité est connue grâce à l'étude du phénomène sous-jacent sans expérimentation. Il s'agit donc d'une connaissance a priori par opposition à la définition précédente qui faisait plutôt référence à une notion de probabilité a posteriori. Par exemple, dans le cas classique du dé parfait, on peut dire, sans avoir à jeter un dé, que  $P[\text{"obtenir un 4"}] = \frac{1}{6}$ .

Comme il n'est pas toujours possible de déterminer des probabilités a priori, on est souvent amené à réaliser des expériences. Il faut donc pouvoir passer de la première à la deuxième solution. Ce passage est supposé possible en terme de limite (i.e. avec une population dont la taille tend vers la taille de la population réelle).

### II.2.2 Epreuves et événements

Une **expérience** est dite **aléatoire** si ses résultats ne sont pas prévisibles avec certitude en fonction des conditions initiales.

On appelle **épreuve** la réalisation d'une expérience aléatoire.

On appelle **événement** la propriété du système qui une fois l'épreuve effectuée est ou n'est pas réalisée.

Logique	Ensemble
état du système	élément $w \in \Omega$
événement A	partie $\{A\} \subset \Omega$
événement certain	espace entier $\Omega$
événement impossible	partie vide $\emptyset$
événement contraire $\bar{A}$ ou $A^c$	partie complémentaire $\{A\} = C_{A/\Omega}$
l'évènement B entraîne l'évènement A	$\{B\} \subset \{A\}$
A et B	intersection $\{A\} \cap \{B\}$
événements incompatibles $A \Rightarrow \bar{B}$ et $B \Rightarrow \bar{A}$	parties disjointes $\{A\} \cap \{B\} = \emptyset$
A ou B (ou non exclusif)	réunion $\{A\} \cup \{B\}$
ou exclusif	somme $\{A\} + \{B\} = (\{A\} \cup \{B\}) - (\{A\} \cap \{B\})$

A partir de ces notions, on peut préciser le calcul de probabilités d'un événement A,

$$\text{Probabilité théorique, } P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre total de cas}}$$

Probabilité expérimentale,  $P(A) = \frac{\text{nombre d'épreuves qui réalisent } A}{\text{nombre total d'épreuve}}$ .

Cette approche (aussi appelée approche fréquentiste) ne permet pas de donner une valeur ni même un sens à la probabilité d'un événement non répétable du genre "neigera-t-il le 25 octobre 2990" ce qui limite de fait le champ d'application du calcul des probabilités.

Pour les fréquentistes, seules ont un sens les probabilités calculées a posteriori sur la base de la répétition d'un grand nombre d'événements identiques; pour les subjectivistes, au contraire, la notion de probabilité a priori, évaluable en fonction d'un sentiment individuel d'incertitude, peut avoir un sens.

## II.2.3 Espace probabilisé

### II.2.3.1 Axiomatique de Kolmogorov

A chaque événement, on associe un nombre positif compris entre 0 et 1, sa probabilité. Afin d'éviter toute discussion sur cette notion, la théorie moderne des probabilités repose sur l'axiomatique suivante :

#### Définition (1)

On appelle probabilité sur  $(\Omega, \xi)$  (ou  $\Omega$  est l'ensemble des événements et  $\xi$  une classe de parties de  $\Omega$ ), ou loi de probabilité, une application  $P$  de  $\xi$  dans  $[0,1]$  telle que,

$$- P(\Omega) = 1$$

- pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles  $A_1, A_2, \dots, A_n$  on a  $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$ .

#### Définition (2)

On appelle espace probabilisé le triplé  $(\Omega, \xi, P)$ , Une loi de probabilité n'est donc rien d'autre qu'une mesure positive de masse totale 1. On peut donc relier la théorie des probabilités à celle de la mesure.

### II.1.3.2 Propriétés élémentaires

**Propriété (1)**,  $P(\emptyset) = 0$ .

**Propriété (2)**,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

**Propriété (3)**,  $P(A) < P(B)$  si  $A \subset B$ .

**Propriété (4)**,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**Propriété (5)**,  $P(\cup A_i) \leq \sum_i P(A_i)$  (Il n'y a stricte égalité que si les événements  $A_i$  sont deux à deux incompatibles).

**Propriété (6)** : Continuité monotone séquentielle. Soient  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \emptyset$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$

**Propriété (7)**, Théorème des probabilités totales : Soit  $\Omega = \cup B_i$  un système complet d'événements (i.e : tel que  $\{B_i\}$  constitue une partition de  $\Omega$ ).  $\forall A, P(A) = \sum_i P(A \cap B_i)$ .

**Remarque** :  $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$ . De même,  $P(A) = 1 \Leftrightarrow A = \Omega$ .

## II.2.4 Probabilité conditionnelle - Théorème de Bayes

### II.2.4.1 Théorème des probabilités composées

Soient deux évènements  $A$  et  $B$  réalisés respectivement  $n$  et  $m$  fois au cours de  $N$  épreuves. On a donc  $P(A) = \frac{n}{N}$  et  $P(B) = \frac{m}{N}$ . Si de plus  $A$  et  $B$  sont réalisés simultanément  $k$  fois, on a  $P(A \cap B) = \frac{k}{N}$ . Que peut-on déduire sur la probabilité de l'évènement  $B$  sachant que l'évènement  $A$  est réalisé ? Cette probabilité est appelée probabilité conditionnelle de  $B$ , sachant  $A$  et se note  $P(B/A)$ . Dans notre cas, on a  $P(B/A) = \frac{k}{n}$ .

Par définition, on a,  $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  et  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

### II.2.4.2 Conséquences

Deux évènements  $A$  et  $B$  sont dits indépendants si  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  ou encore si  $P(B/A) = P(B)$  (l'information sur la réalisation de  $A$  n'apporte rien à l'évènement  $B$ ) et  $P(A/B) = P(A)$ .

Attention,

1) indépendant  $\neq$  incompatible.

2)  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow A$  et  $B$  sont indépendants **uniquement** si vous pouvez prouver que  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  théoriquement. En pratique, i.e. : sur des valeurs numériques, on ne peut pas induire l'indépendance à partir de cette égalité constatée numériquement. On ne peut que supposer très probable cette indépendance.

Si deux évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors il en est de même de  $A$  et  $B^c$ ,  $A^c$  et  $B$ ,  $A^c$  et  $B^c$ .

Soit  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  une suite d'évènements ayant une intersection commune non nulle i.e :  $P(\cap_{k=0}^n A_k) \neq \emptyset$ , on a alors,

$$P(\cap_{k=0}^n A_k) = P(A_1/A_0)P(A_2/A_0 \cap A_1) \dots P(A_n/A_0 \cap A_1) \dots \cap A_{n-1})P(A_0).$$

### II.2.4.3 Théorème de Bayes - Probabilités des causes

Soit un évènement  $A$  qui peut dépendre de  $N$  causes  $C_i$  différentes et incompatibles deux à deux (on ne peut avoir deux causes réalisées simultanément). Etant donnée la réalisation de l'évènement  $A$ , quelle est la probabilité que ce soit  $C_i$  qui en soit la cause ?

On peut écrire que  $A = \cup_{i=1}^N A \cap C_i$  car  $\{C_i\}$  constitue un système complet (les causes sont incompatibles deux à deux et toutes les causes possibles à  $A$  sont supposées connues). Donc d'après le théorème des probabilités totales, on a  $P(A) = \sum_i P(A \cap C_i)$ .

En appliquant le théorème des probabilités conditionnelles, on a,  
 $P(A \cap C_i) = P(A) \cdot P(C_i/A) = P(C_i) \cdot P(A/C_i)$  donc,

$$P(C_i/A) = \frac{P(C_i)P(A/C_i)}{\sum_{k=1}^N P(C_k)P(A/C_k)}$$

### II.2.5 Le paradoxe de Bertrand

Ce paradoxe est un exemple classique permettant de mesurer la limite des définitions de probabilités. Considérons un triangle équilatéral et son cercle circonscrit. On tire une corde au hasard. Quelle est la probabilité que sa longueur soit supérieure à celle du côté du triangle ?

On doit à **Renyi** les remarques suivantes,

#### . Première solution

Comme la longueur de la corde est déterminée par la position de son milieu, le choix de la corde peut consister à marquer un point au hasard à l'intérieur du cercle. La probabilité pour que la corde soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit est alors égale à la probabilité pour que le milieu de la corde soit intérieur au cercle inscrit dans ce triangle qui est de rayon moitié.

Si on admet que la répartition de ce point est uniforme dans le cercle, on trouve pour la probabilité demandée :  $\frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$

#### . Deuxième solution

La longueur de la corde est déterminée par la distance de son milieu au centre du cercle. Par raison de symétrie, nous pouvons considérer que le milieu de la corde est pris sur un rayon donné du cercle et supposer que la répartition de ce point sur le rayon est uniforme. La corde sera plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit si son milieu est à une distance du centre inférieure à  $r/2$ ; la probabilité recherchée est alors  $1/2$ .

#### . Troisième solution

Par raison de symétrie, nous pouvons supposer qu'on a fixé une des extrémités de la corde en  $P_0$ . L'autre sera choisie au hasard sur la circonférence.

Si on admet que la probabilité que l'autre extrémité  $P$  tombe sur un arc donné de la circonférence est proportionnelle à la longueur de cet arc, la corde  $P_0P$  est plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit quand  $P$  se trouve sur l'arc  $P_1P_2$  (tel que  $\widehat{P_1P_0P_2} = \frac{\pi}{3}$ ) dont la longueur est le  $1/3$  de celle de la circonférence; la probabilité est donc de  $1/3$ .

Il est clair que les trois hypothèses de répartition sont également réalisables. Il n'y a pas cependant de réel paradoxe car il s'agit simplement d'un choix de conditions expérimentales de tirage des cordes qui conduisent à des événements différents.

## II.3 Variables aléatoires

### II.3.1 Variable aléatoire

Une variable aléatoire (V.A.) est une application de l'ensemble des épreuves dans le corps des réels. Elle est caractérisée par l'ensemble des probabilités associées à tous ses états possibles.

#### Définition (1)

Tout ensemble de parties d'un ensemble  $\Omega$ , stable par réunion, intersection et complémentarité s'appelle une tribu sur  $\Omega$ .

Soit  $A$  une tribu de parties de  $\Omega$ . Le couple  $(\Omega, A)$  s'appelle un espace probabilisable ou mesurable et  $A$  est l'ensemble des événements.

Si  $\Omega$  peut être muni d'une topologie, alors la tribu engendrée par la classe des ouverts de  $\Omega$  est appelée tribu borélienne.

#### Définition (2)

Une variable aléatoire  $X$  est une application mesurable d'un espace probabilisé  $(\Omega, \xi, P)$  dans le corps des réels  $R$  muni de sa tribu borélienne  $(R, B)$  (i.e. ensemble des intervalles de la forme  $] -\infty, a [$ ).

#### Définition (3)

Pour tout borélien  $B$  (i.e.  $B \in B$ ), on définit une loi de probabilité de  $X$  sur  $(R, B)$  et l'on note  $P_X$  :

$$P_X(B) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\}) = P(\{X^{-1}(B)\})$$

#### Définition (4)

Une v.a.  $X$  est discrète si  $\text{Card}[\xi]$  est fini ou dénombrable. Dans ce cas,  $X$  ne peut prendre, avec une probabilité non nulle, qu'un nombre fini de valeurs particulières  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . On note généralement les probabilités par  $P(X = x_i) = p_i$

#### Définition (5)

Une v.a.  $X$  est continue si elle peut prendre toute valeur sur un segment de la forme  $[a, b], ] - 1, a], [b, +1[, ] - 1, +1[$  et telle que  $\forall x_0, P(X = x_0) = 0$ .

#### Définition (6)

Une v.a.  $X$  est mixte si 1)  $\forall i \in I \subset N, P(X = x_i) = p_i \neq 0$ , 2)  $P_i \sum_{i \in I} p_i < 1$  et 3)  $\exists i P(X \in ]x_i, x_{i+1}[) \neq 0$ .

## II.3 2 Fonction de répartition

### II.3.2.1 Définition

La fonction de répartition (*FR*) d'une v.a.  $X$  est l'application  $F$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  définie par,

$$F(x) = P(X < x)$$

### II.3.2.2 Propriétés

- $F$  est non décroissante.
- $F$  est continue à gauche.
- $F$  est continue à droite dans le cas des v.a. continues.
- $F(-\infty) = 0$  et  $F(+\infty) = 1$
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$ .

### II.3.2.3 Fonction de répartition d'une v.a. discrète

Soit  $X$  une v.a. discrète pouvant prendre les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de probabilités respectivement  $p_1, p_2, \dots, p_n$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

$F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} p_i$  ou  $k$  est donné par  $x_k \leq x < x_{k+1}$ .

### II.3.3 Fonction de répartition d'une v.a. continue

Soit  $X$  une v.a. continue. Sa fonction de répartition est continue à gauche et à droite. Il existe donc une fonction  $f$  telle que l'on puisse écrire,

$$f = \frac{dF(x)}{dx} \text{ ou } F(x) = \int_{-\infty}^x f(\mu) d\mu$$

Par définition,  $f$  est appelée densité de probabilité de  $X$ , ou en abrégé, **ddp** de  $X$ . Cette fonction a les propriétés suivantes :

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\bullet \forall x \ f(x) \geq 0$$

$$\bullet P(X \in ]x_1, x_2]) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(\mu) d\mu$$

$$\bullet P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(\mu) d\mu = 0$$

$$\bullet P(X \in ]x_0, x_0 + dx_0]) = \int_{x_0}^{x_0+dx_0} f(\mu) d\mu = f(x_0) dx_0 = dF(x_0)$$

### II.3.4 Couple de variables aléatoires

#### II.3.4.1 Définitions

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. définies sur le même espace probabilisé. On appelle fonction de répartition conjointe de  $X$  et  $Y$ , la fonction  $F$  définie par :

$$F(X, Y) = P(X \in ]-1, x] \cap Y \in ]-1, y]) = P(X < x \text{ et } Y < y)$$

On a par définition,  $F(-\infty, -\infty) = 0$  et  $F(+\infty, +\infty) = 1$ .

#### II.3.4.2 Cas d'un couple de v.a. continues

On note  $f$  la **ddp** conjointe de  $X$  et  $Y$  et l'on a par définition :

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\mu, \vartheta) d\mu d\vartheta$$

Avec les propriétés suivantes,

- $\forall x, y: f(x, y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu, \vartheta) d\mu d\vartheta = 1$

On peut également définir une fonction de répartition marginale de  $X$ , notée  $F_X$  par  $F_X(x) = P(X < x) = F(x, +\infty)$  (idem pour  $Y$ ,  $F_Y(y) = F(y, +\infty)$ ).

#### II.3.4.3 Cas d'un couple de v.a. discrètes

On note  $P_{ij} = P(X = x_i \setminus Y = y_j)$  pour  $i \in I$  et  $j \in J$ .

#### II.3.4.4 Distribution conditionnelle

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. continues de *FR* conjointe  $F$  et de **ddp** conjointe  $f$ . Comment peut-on évaluer la probabilité conditionnelle  $P(X \in I_1 / Y \in I_2)$  ?

On définit la **fonction de répartition conditionnelle**  $F(x/Y = y_0)$  par,

$$F(x/Y = y_0) = \frac{\int_{-\infty}^x f(\mu, y_0) d\mu}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vartheta, y_0) d\vartheta}$$

et la **densité de probabilité conditionnelle**  $f(x/Y = y_0)$  par,

$$f(x/Y = y_0) = \frac{F(x/Y = y_0)}{dx}$$

Si les deux v.a. sont indépendantes, alors on a,

$$F(x/Y = y_0) = F_X(x)$$

$$f(x/Y = y_0) = f_X(x)$$

### II.3.5 Loi d'une fonction d'une ou plusieurs variables aléatoires

Dans la pratique, on est souvent amené à manipuler des variables aléatoires qui sont des transformations ou des combinaisons de variables aléatoires connues. C'est pourquoi on dispose de règles de passage d'une loi à une autre, pour des transformations simples.

#### II.3.5.1 Transformation d'une variable aléatoire

##### . Transformation d'une loi discrète

Soit  $X$  une v.a. discrète de loi  $P_X$ . Alors, la loi de la v.a.  $U = \Psi(X)$  est définie par,

$$P(U = k) = P(\Psi(X) = k) = P(X = \Psi^{-1}(k)) = P_X(\Psi^{-1}(k))$$

ou  $\Psi^{-1}$  désigne la fonction réciproque de  $\Psi$ .

##### . Transformation d'une loi continue

Soit  $X$  une v.a. continue dont la loi admet la densité de probabilité  $f_X$  et une fonction monotone et dérivable. Alors, la densité de la loi de la v.a.  $U = \Psi(X)$  est,

$$f_U(u) = |(\Psi^{-1})'(u)| f_X(\Psi^{-1}(u))$$

ou  $\Psi^{-1}$  désigne la fonction réciproque de  $\Psi$ .

On peut par ces propriétés montrer en particulier que la v.a.  $U = F(X)$  ou  $F$  est la fonction de répartition de la loi de la v.a.  $X$ , suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

#### II.3.5.2 Densité de probabilité d'une somme de V.A. indépendantes

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. continues de **ddp**  $f(x)$  et  $g(y)$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors la densité de probabilité  $h(z)$  de la v.a.  $Z$  définie par  $Z = X + Y$  est donnée par :

$$h(z) = f * g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy$$

Cette propriété se généralise quel que soit le nombre de variables dans la somme. On peut aussi additionner des variables aléatoires discrètes.

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. discrètes à valeurs dans  $D_X$  et  $D_Y$ . La loi de  $S = X + Y$  est définie par,

$$P(S = k) = \begin{cases} \sum_{i \in D_X} P(X = i, S = k) = \sum_{i \in D_X, k-i \in D_Y} P(X = i, Y = k-i) \\ \text{ou} \\ \sum_{j \in D_Y} P(S = k, Y = j) = \sum_{j \in D_Y, k-j \in D_X} P(X = k-j, Y = j) \end{cases}$$

En particulier, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a,

$$P(S = k) = \begin{cases} \sum_{i \in D_X, k-i \in D_Y} P(X = i)P(Y = k - i) \\ \text{ou} \\ \sum_{i \in D_Y, k-i \in D_X} P(X = k - j)P(Y = j) \end{cases}$$

On peut aussi passer par les propriétés de l'opérateur espérance mathématique (voir section suivante).

### II.3.6 Moyenne et espérance mathématique d'une v.a

#### II.3.6.1 Notion de moyenne pour une v.a. discrète

Soit  $X$  une v.a. discrète prenant ses valeurs dans  $\{x_1, \dots, x_n\}$  et dont les probabilités associées sont  $P(X = x_i) = p_i$ .

Par définition, on appelle **moyenne théorique** ou **espérance mathématique** de  $X$ , et l'on note  $E(X)$ , la valeur :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

On ne connaît cette v.a. que par le moyen d'un échantillon de taille  $N$  (dont on supposera qu'il est significatif par rapport au nombre de valeurs possible,  $n$ , de la v.a. i.e.  $N \gg n$ ). Chaque événement  $X = x_i$  se réalise  $k_i$  fois dans l'échantillon ( $N = \sum_i k_i$ ).

La moyenne expérimentale est définie par :  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n k_i x_i$

Si on admet que la proportion  $\frac{k_i}{N}$  tend vers la probabilité théorique  $p_i$  pour un échantillon de taille infinie ( $N \rightarrow \infty$ ) alors on peut estimer la moyenne théorique par la limite de la moyenne expérimentale.

#### II.3.6.2 Espérance mathématique

Soit  $X$  une v.a. On définit l'**espérance mathématique** de  $X$  et l'on note  $E(X)$  la valeur :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Où  $F$  est la fonction de répartition de  $X$ .

Cette intégrale est dite au sens de Stieljes. Soit  $X$  une v.a. définie sur  $[a, b[$ . On peut discrétiser la v.a.  $X$  en introduisant une nouvelle v.a. discrète  $Y$  en découpant l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  tels que,

$X \in [x_{i-1}, x_i[ \rightarrow Y = \xi_i, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  et donc

$$P(Y = \xi_i) = P(X \in [x_{i-1}, x_i]) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(u) du = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Grace à un échantillon de taille  $N$ , on peut calculer une moyenne expérimentale de  $Y$  ( $\frac{1}{N} \sum_i \xi_i k_i$ ) qui tend vers la moyenne théorique  $\sum_i \xi_i P(Y = \xi_i)$  si  $N \rightarrow \infty$ . Si de plus, on découpe en une infinité d'intervalles de la forme  $[x_{i-1}, x_i[$  ( $n \rightarrow \infty$ ), alors on obtient la moyenne théorique de la v.a.  $X$  par  $\sum_i \xi_i [F(x_i) - F(x_{i-1})] \rightarrow \int_a^b x dF(x) = E(x)$ .

**Remarque**

L'espérance mathématique n'est pas toujours définie. C'est en particulier le cas de la loi de Cauchy dont la **ddp** est donnée par :  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$  car l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$  diverge.

**Propriétés**

Les propriétés de l'espérance mathématique proviennent de celle de l'opérateur intégral et en particulier la linéarité. Soit  $X$  une v.a. et  $a$  une constante.

$$\begin{aligned} E(a) &= a \\ E(aX) &= aE(X) \\ E(X + a) &= E(X) + a \end{aligned}$$

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux v.a. et  $a$  et  $b$  deux constantes.

$$E(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2)$$

Plus généralement, pour toute fonction  $h$ , positive, continue, à support compact,

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x) dx$$

**II.3.7 Moments**

La notion de moment permet d'introduire celle d'indicateur résumant et/ou caractérisant une variable aléatoire. On y retrouvera la moyenne comme cas particulier.

**II.3.7.1 Définitions****- Moment d'ordre  $n$** 

On appelle moment d'ordre  $n$  de la v.a.  $X$  et l'on note

$$\alpha_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x).$$

Pour les v.a. discrètes, cela donne :  $\alpha_n = \sum_i x_i^n P(X = x_i)$ .

**- Moment d'ordre  $n$  rapporté à l'abscisse  $a$** 

On appelle moment d'ordre  $n$  de la v.a.  $X$  rapporté à l'abscisse  $a$ , et l'on note  $\alpha_{a,n}$ , la valeur,

$$\alpha_{a,n} = E((X - a)^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^n dF(x).$$

### - Moment centré d'ordre $n$

On appelle moment centré d'ordre  $n$  de la v.a.  $X$  et l'on note  $\mu_n$  la valeur,

$$\mu_n = E((X - E(X))^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^n dF(x).$$

- **Le moment centré d'ordre  $n$  d'une v.a.** est donc le moment d'ordre  $n$  de cette v.a. rapporté à l'abscisse particulière qu'est sa moyenne ( $\mu_n = \alpha_{E[X],n}$ ).

#### II.3.7.2 Quelques moments particuliers

- $\mu_1 = E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$
- $\alpha_1$  est la moyenne.
- $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$
- $\mu_2$  est la variance (voir plus loin).

Très souvent, pour des raisons d'efficacité, les moments souhaités, i.e.  $\mu_k$ , sont calculés à partir des moments simples, i.e.  $\alpha_k$ . En effet, le calcul d'un moment centré nécessite le calcul préalable de l'espérance mathématique, il y a donc 2 pas de calculs au lieu d'un seul pour les moments non centrés.

- $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$
- $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4$

$\mu_2$ ,  $\mu_3$  et  $\mu_4$  sont utilisés pour caractériser la forme d'une distribution. Pour cela, on construit des indicateurs sans dimension :

Le coefficient d'asymétrie (skewness) :  $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$ . Ce coefficient est nul pour une distribution parfaitement symétrique, inférieur à zéro si la distribution est plus étendue vers la gauche (les valeurs inférieures à la moyenne), et supérieur à zéro dans le cas contraire.

Le coefficient d'aplatissement (kurtosis) :  $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ .  $\gamma_2$  est toujours supérieur à 1. De plus, on a toujours  $\gamma_2 \geq 1 + (\gamma_1)^2$ . Plus que l'aplatissement, le coefficient 2 mesure l'importance des "queues" de distribution. Cet indicateur vaut 3 dans le cas de la loi de Gauss (cf chapitre sur les principales lois de probabilité). Il est inférieur à 3 pour une distribution moins large que la loi de Gauss et supérieure à 3 pour une distribution plus large.

**Remarque :** Ces indicateurs ne sont utilisables, i.e. n'ont de sens, que dans le cas d'une distribution unimodale (un seul maximum).

#### II.3.7.3 Variance, covariance et écart-type

La variance est définie par,

$$\mu_2 = E((X - E(X))^2) = \sigma^2 = \text{variance de } X = V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Elle traduit la dispersion de la distribution de la v.a. autour de sa valeur moyenne. Etant un carré, la dimension de la variance n'est pas celle de la moyenne. C'est pourquoi on utilise plus souvent l'écart type, noté  $\sigma$ , qui est la racine de la variance.

On dit aussi que la variance traduit la notion d'incertitude. Plus la variance est faible, moins le résultat de l'expérience aléatoire est incertain. A la limite, une v.a. de variance nulle conduit à des expériences strictement identiques (i.e. le phénomène est complètement déterministe, il n'y a donc plus aucune raison de garder la notion de variable aléatoire).

La variance a également des propriétés intéressantes vis à vis de la combinaison linéaire de v.a. : Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux v.a.

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2cov(X_1, X_2)$$

Où  $cov(X, Y)$  est la covariance des v.a.  $X$  et  $Y$  définie par,

$$cov(X, Y) = \mu_{1,1} = E(XY) - E(X)E(Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

La covariance peut être vue comme le moment centré conjoint d'ordre 1 de deux v.a. Si les deux v.a. sont indépendantes, alors leur covariance est nulle (mais la réciproque n'est pas vraie en général).

Par ailleurs, soit  $X$  une v.a. et  $a$  et  $b$  deux constantes. On a,  $V(aX + b) = a^2V(X)$

#### II.3.7.4 Variable centrée réduite

On appelle variable aléatoire centrée réduite, une v.a.  $Y$  construite par :  $Y = \frac{X - E[X]}{\sqrt{V[X]}}$ . C'est le moyen le plus classique pour normaliser une v.a. Par construction, on obtient  $E[Y]=0$  et  $V[Y]=1$ .

#### II.3.7.5 Coefficient de corrélation

La relation entre deux v.a. peut être quantifiée par la covariance comme vue précédemment. Cependant, à l'image de la moyenne et de la variance, la covariance est un moment donc possède une dimension ce qui la rend plus difficile à interpréter. C'est pourquoi on utilise plus généralement **le coefficient de corrélation**, indicateur sans dimension, défini par,

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mu_{1,1}}{\sqrt{\mu_2(X)\mu_2(Y)}}$$

Le coefficient de corrélation mesure la qualité de la relation linéaire entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  (i.e. de la forme  $Y = aX + b$ ). On a les propriétés suivantes,

- $\forall X, Y : \rho(X, Y) \in [-1, 1]$ .
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\rho(X, Y) = 0$  (la réciproque n'est pas vraie en général).
- $\forall X, Y \forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{R} (a_1 a_2 \neq 0) : \rho(a_1 X + b_1, a_2 Y + b_2) = \text{sign}(a_1 a_2) \rho(X, Y)$ .
- Si il existe une relation linéaire entre  $X$  et  $Y$  alors  $\rho(X, Y) = \pm 1$ .

On peut réécrire la relation sur la variance d'une somme de v.a. en utilisant le coefficient de corrélation,

$$\sigma^2(X_1 + X_2) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + 2\rho(X_1, X_2) \sigma(X_1) \sigma(X_2)$$

Et en généralisant, on obtient,

$$\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \sigma^2(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{j>i}^{j=n} \rho(X_i, X_j) \sigma(X_i) \sigma(X_j)$$

### II.3.7.6 Inégalités de Bienaymé - Tchebyshev – Markov

- **Inégalité de Tchebyshev**,  $P(g(X) \geq k) \leq \frac{E[g(X)]}{k}$  ou  $k$  est un réel positif et  $g$  une fonction positive. En posant,  $g(X) = X^n$ , on obtient,

- **l'inégalité de Markov**,  $P(X^n \geq k^n) \leq \frac{E(X^n)}{k^n}$ . De même, si l'on pose  $g(X) = (X - E(X))^2$  et  $k = t^2\sigma^2$ , on obtient,

- **l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev**,  $P((X - E(X)) \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}$ .

Cette inégalité est la plus connue des trois. Elle est valable quelle que soit la v.a.  $X$ , ce qui est une propriété très intéressante. Malheureusement, elle n'a que peu d'applications pratiques car la majoration qu'elle fournit est la plupart du temps excessive.

### II.3.8 Quelques lois de probabilités

#### II.3.8.1 Les valeurs principales

Loi	Type	Prob. ou ddp	Moyenne	Variance
0-1	D	$P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$	$p$	$p(1 - p)$
Uniforme	D	$P(X = x) = \frac{1}{n}, x \in [1, n]$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Binomiale	D	$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$ pour $x \in [0, n]$	$np$	$np(1-p)$
Géométrique	D	$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$ pour $x = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Pascal	D	$P(X = x) = C_{x-1}^{n-1} p^n (1-p)^{x-n}$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
Poisson	D	$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ pour $\lambda > 0$ et $x = 1, 2, \dots$	$\lambda$	$\lambda$
Uniforme	C	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ avec $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Gauss	C	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ pour $x \in \mathfrak{R}$	$\mu$	$\sigma^2$
Cauchy	C	$f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$	non défini	non défini
Gamma	C	$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$ , $x > 0$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
Exponentielle	C	$f(x) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}$ pour $x > 0$ et $a > 0$	$a$	$a^2$
Rayleigh	C	$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ pour $x > 0$	$\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\sigma^2(2 - \frac{\pi}{2})$
Laplace	C	$f(x) = \frac{a}{2} e^{-a x }$	0	$\frac{2}{a^2}$
$\chi^2$	C	$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$	$m$	$2m$
Student	C	$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}$	0	$\frac{n}{n-2}$ ; $n > 2$
Weibull	C	$f(x) = \beta x^{\beta-1} c^{-x^\beta}$	$\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$	$\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - E^2(x)$

Type,  $D \equiv$  loi discrète ;  $C \equiv$  loi continue.

### II.3.8.2 Liaisons entre lois de probabilités

- **Loi 0-1**, on appelle aussi cette loi, loi de Bernoulli. La v.a. associée à une telle loi est considérée comme la fonction indicatrice d'un événement de probabilité  $P$ . C'est un cas particulier de la loi Binomiale.

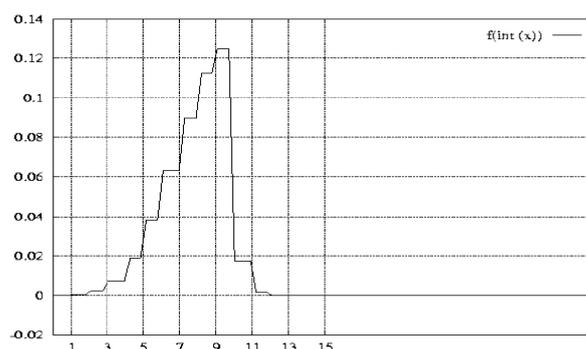
- **Loi binomiale**, On obtient une v.a. de loi binomiale  $B(n, p)$  par une somme de  $n$  v.a. de loi 0-1 ( $p$ ). En d'autres termes, la loi binomiale est la loi associée à  $n$  répétitions, dans des conditions identiques et indépendamment, d'une expérience aléatoire dont l'issue est l'apparition ou la non apparition d'un événement. La somme de deux lois binomiales de même paramètre est une loi binomiale.

- **Loi géométrique**, La loi géométrique est la loi du nombre d'essais nécessaires pour faire apparaître un événement de probabilité  $P$ .

- **Loi de Pascal d'ordre  $n$** , C'est la loi du nombre d'essais nécessaires pour observer exactement  $n$  fois un événement de probabilité  $p$ . Cette loi est la somme de  $n$  lois géométriques indépendantes.

- **Loi de Poisson (magistrat français du XIX<sup>ème</sup> siècle)**, On obtient une v.a. de loi de Poisson à partir d'une v.a. de loi binomiale  $B(n, p)$  pour laquelle on a  $n \rightarrow \infty$  et  $p \rightarrow 0$  et  $n_p \rightarrow \lambda \neq \infty$ . On peut aussi introduire la loi de Poisson par la notion de processus de Poisson. Soit un phénomène tel qu'un seul événement puisse se produire à la fois (non simultanéité des réalisations) et que le nombre d'événements se produisant pendant une période  $T$  ne dépend que de la durée de cette période. Supposons enfin l'indépendance des événements. Soit  $E(N) = cT$  l'espérance mathématique d'un nombre  $N$  d'événements pendant la période de durée  $T$  avec la cadence  $c$ .  $c$  désigne donc le nombre moyen d'événements par unité de temps. On démontre alors que la probabilité d'obtenir  $n$  événements pendant un temps  $T$  est,

$$P(N = n) = \frac{(cT)^n}{n!} e^{-cT}.$$



**Figure II.1** Densité de probabilité de la loi de Poisson de paramètre  $\lambda=10$

La somme de deux lois de Poisson de paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  est une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_1+\lambda_2$ .

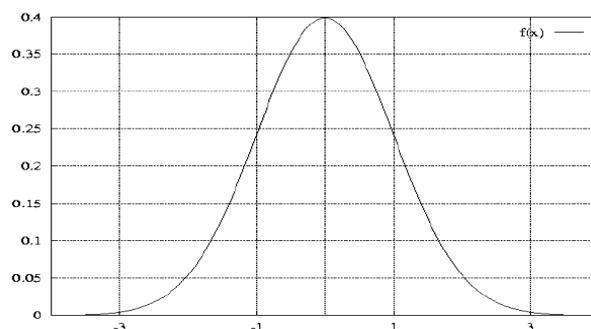
- **Loi Normale ou loi de Gauss-Laplace**, C'est incontestablement la loi la plus connue. On la doit à Moivre qui, en 1738, a trouvé cette loi comme limite de la loi binomiale. On utilisera la notation suivante :  $\mathcal{N}(\text{moyenne, variance}) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . On la retrouve comme modèle le plus courant pour les distributions d'erreurs de mesure autour d'une valeur "vraie". Elle joue aussi un rôle important en terme de comportement asymptotique des autres lois de probabilités, comme le montre le théorème central limite. Une propriété intéressante de cette loi est sa conservation vis à vis de la combinaison linéaire : Soient  $\{X_i\}$  un ensemble de  $p$  v.a. normales de paramètres  $(\mu_i, \sigma_i^2)$  deux à deux indépendantes, leur somme pondérée par les coefficients  $\alpha_i$  est une v.a. normale de paramètres la somme pondérée des paramètres  $(\sum \alpha_i \mu_i, \sum \alpha_i^2 \sigma_i^2)$ .

- **Loi exponentielle**, Si  $Y$  suit une loi de Poisson, et traduit le nombre d'apparitions d'un certain phénomène aléatoire dans un intervalle de temps  $t$ , alors la variable aléatoire  $1/Y$  représente l'intervalle de temps séparant deux apparitions d'un événement donné. Cette nouvelle variable suit une loi exponentielle de paramètre  $a$  ou  $a$  est le paramètre de la loi de Poisson. En fiabilité, cette loi est très utilisée pour représenter la durée de vie de circuits électroniques. L'espérance  $a$  est souvent appelée le MTBF (Mean Time Between Failure) et  $1/a$  à le taux de défaillance. La loi exponentielle est un cas particulier de la loi Gamma pour  $k = 1$ .

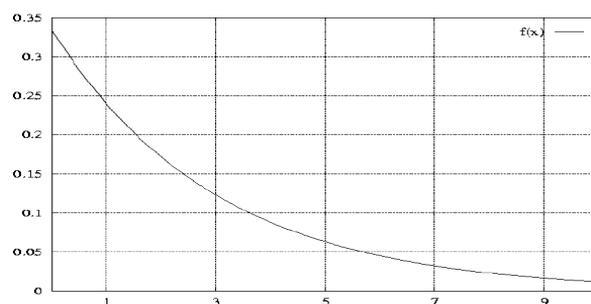
La loi exponentielle est souvent utilisée pour son caractère sans mémoire. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi exponentielle. Soient  $u$  et  $t$  deux réels strictement positifs, on a,

$$P(X > t + u | X > t) = P(X > u)$$

Cela signifie que la probabilité d'être dans un intervalle  $[t, t + u]$  dépend uniquement de la largeur de l'intervalle et pas de sa position absolue (d'où le vocable "d'effet sans mémoire").

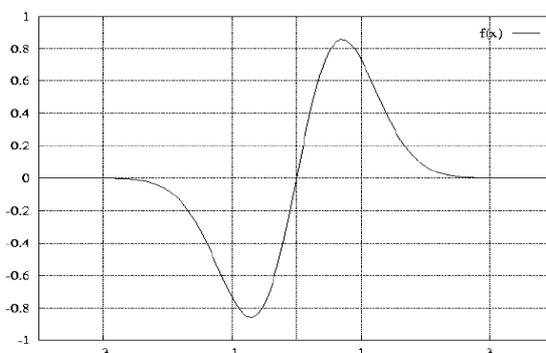


**Figure II.2** Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.



**Figure II.3** Densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre  $a = 3$ .

- **Loi de Weibull**, Cette loi est aussi très utilisée pour caractériser la fiabilité des matériels. Elle est reliée à la loi exponentielle par la relation suivante :  $X$  suit une loi de Weibull de paramètre  $\beta$  si  $X^\beta$  suit une loi exponentielle. On dit que  $\beta$  est le paramètre de forme :  $\beta > 1$  correspond à un matériel qui se dégrade avec le temps (usure);  $\beta < 1$  à un matériel qui se bonifie avec le temps;  $\beta = 1$  (cas où la loi est exponentielle) à un matériel sans usure (pannes purement accidentelles).



**Figure II.4** Densité de probabilité de la loi de Weibull de paramètre  $\beta = 2$ .

- **Loi Gamma**, Soit une v.a. normale  $X$  de paramètres  $(\mu, \sigma)$  et soit  $Y$  une v.a. construite par  $Y = \frac{1}{2} \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$  suit une loi Gamma de paramètres  $(\lambda, k) = (\frac{1}{2}, 1)$ . La distribution gamma est une généralisation de la loi exponentielle. En effet, si la loi exponentielle correspond à la distribution de probabilité du temps séparant l'apparition de deux événements donnés, la loi gamma fournit la distribution de probabilité du temps qui s'écoule entre la  $K^{\text{ème}}$  et la  $(K+r)^{\text{ème}}$  apparition de l'événement. La loi gamma est appliquée comme modèle de probabilité pour prévoir la durée de vie des appareils qui subissent une usure tels les véhicules automobiles ou les appareils mécaniques.

- **Loi du  $\chi^2$** , Le paramètre  $m$  est le nombre de degrés de liberté de cette loi. Cette distribution permet de définir la loi de la v.a.  $\chi_m^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2$  où les  $x_i$  sont des v.a. normales centrées réduites indépendantes. Pour  $m$  tendant vers l'infini, cette loi tend asymptotiquement vers une loi normale. La somme de deux v.a. du  $\chi^2$  à respectivement  $a$  et  $b$  degrés de liberté, est une nouvelle v.a. de loi du  $\chi^2$  à  $(a + b)$  degrés de liberté. On peut aussi relier cette loi à la loi Gamma avec  $(k, \lambda) = (m/2, 1/2)$ .

- **Loi de Rayleigh**, C'est la loi de la norme, i.e.  $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  où  $x_1$  et  $x_2$  sont des v.a. normales centrées. C'est aussi la loi de la dérivée de la loi normale. La loi de Rayleigh apparaît souvent pour décrire le bruit en sortie de certains récepteurs de transmissions.

- **Loi de Student**, Si  $X : \mathcal{N}[0, \sigma^2]$ , et si  $Y$  (indépendante de  $X$ ) est telle que  $Y^2/\sigma^2$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté, alors la variable  $T = \frac{X\sqrt{n}}{Y}$  suit une loi de Student à  $n$  degrés de liberté. Cette loi sert essentiellement pour les tests statistiques d'hypothèses.

### II.3.9 Quelques relations

En statistique, on est souvent amené à construire les variables aléatoires suivantes,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n}$$

Dans le cas, fréquent, ou l'on admet ou vérifie, que les  $X_i$  sont des lois normales de même paramétrage  $(\mu, \sigma)$ , alors :

$\bar{X}$  suit une loi normale  $\mathfrak{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ .

$S^2$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $(n-1)$  degrés de liberté.

$T$  suit une loi de Student  $(n-1)$  degrés de liberté.

Par ailleurs, on sait que seules les affinités (et en particulier les sommes) conservent les lois normale, binomiale, uniforme et Gamma (à paramètres entiers).

$X_i : \mathcal{B}(n_i, p)$ ( $X_i$ ) indépendantes $Y = \sum_{i=1}^k X_i$	$Y : \mathcal{B}(\sum_{i=1}^k n_i, p)$
$X_i : \mathcal{P}(\lambda_i)$ ( $X_i$ ) indépendantes $Y = \sum_{i=1}^k X_i$	$Y : \mathcal{P}(\sum_{i=1}^k \lambda_i)$
$X_i : \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ ( $X_i$ ) indépendantes $Y = \sum_{i=1}^k a_i X_i$	$Y : \mathcal{N}(\sum_{i=1}^k a_i \mu_i, \sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2)$
$X_i : \mathcal{E}(\lambda)$ ( $X_i$ ) indépendantes $Y = \sum_{i=1}^k a_i X_i$	$Y : G(k, \lambda)$
$X_i : G(a, p_i)$ ( $X_i$ ) indépendantes $Y = \sum_{i=1}^k X_i$	$Y : G(a, \sum_{i=1}^k p_i)$
$X_i : \chi^2(\gamma_i)$ ( $X_i$ ) indépendantes $Y = \sum_{i=1}^k X_i$	$Y : \chi^2(\sum_{i=1}^k \gamma_i)$

### II.3.10 Loi des grands nombres

#### II.3.10.1 Convergence stochastique

On s'intéresse à la loi d'une suite de v.a. identiques, et plus particulièrement à la convergence à l'infini. Pour étudier cette convergence, il existe de nombreux outils dont nous résumons ici les principaux.

- **Convergence en loi**, Soit une suite de v.a.  $X_n$  de F.R.  $F_n(x)$ , et soit  $X$  une v.a. de FR  $F(x)$ . On dit que la suite  $X_n$  converge en loi vers la v.a.  $X$  ssi  $F_n(x)$  converge vers  $F(x)$ .
- **Convergence en probabilité**, On dit que la suite  $X_n$  converge en probabilité vers la v.a.  $X$  ssi  $\forall \eta, \varepsilon$  (donnés arbitrairement petits)  $\exists n_0$  tel que  $n > n_0 \Rightarrow P(|X_n - X| > \varepsilon) < \eta$

Cette définition est une généralisation du théorème de Bernoulli (dans le cas où  $X$  est une constante). En conséquence de ce théorème, on sait que dans une série d'épreuves indépendantes, la fréquence relative de l'événement  $A$  converge en probabilité vers  $P(A)$  quand le nombre d'épreuves croît indéfiniment.

- **Convergence en moyenne**, On dit que la suite  $X_n$  converge en moyenne d'ordre  $p$  vers la v.a.  $X$  ssi  $E(|X_n - X|^p) \rightarrow 0$  pour  $n$  tendant vers l'infini. La plus utilisée de ces convergences est la convergence en moyenne quadratique ( $p = 2$ ).

La convergence moyenne d'ordre 2 implique la convergence en moyenne d'ordre 1 (ou convergence en moyenne) qui implique la convergence en probabilité qui implique la convergence en loi. Cette dernière est donc la convergence la plus stricte.

### II.3.10.2 Théorème central limite

Le théorème central limite est l'un des résultats les plus importants de la théorie des probabilités. De façon informelle, ce théorème donne une estimation très précise de l'erreur que l'on commet en approchant l'espérance mathématique par la moyenne arithmétique. Ce phénomène a d'abord été observé par Gauss qui l'appelait loi des erreurs; mais ce dernier n'en a pas donné de démonstration rigoureuse. La preuve du théorème a été apportée par Moivre et Laplace; le théorème porte donc parfois leurs noms.

Ce théorème est fondamental car il justifie toutes les approximations par la loi normale.

#### Théorème

Soit  $X_n$  une suite de v.a. de même loi d'espérance  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ . Alors la v.a.  $\frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma} \right)$  converge en loi vers une v.a. normale centrée réduite  $\mathfrak{N}(0, 1)$ .

#### Théorème

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des v.a. indépendantes, pas forcément de même loi, centrées et de variance  $\sigma_i^2$ . Soient  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$  et  $F_i(x)$  la fonction de répartition de la v.a.  $X_i$ . Si la condition suivante est réalisée,

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x_i| > \varepsilon s_n} X_i^2 dF_i(x) \right) = 0$$

Alors

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathfrak{N}(0,1)$$

La condition de **Lindeberg** exprime que les v.a.  $\frac{X_i - \mu_i}{s_i}$  sont "uniformément petites" avec une grande probabilité. Le résultat veut dire qu'à force d'ajouter de telles variables, on finit par obtenir une loi normale. Autrement dit, si une variable est la résultante d'un grand nombre de causes, petites, à effet additif, cette variable suit une loi normale. C'est à cause de cette interprétation que la loi normale est très souvent employée comme modèle (malheureusement pas toujours à raison).

Enfin, notons que ces théorèmes supposent l'existence des moments des v.a. On ne peut donc pas les utiliser par exemple pour des v.a. suivant une loi de Cauchy (dans ce cas particulier, la somme produit une v.a. qui a toujours une loi de Cauchy et cela quel que soit le nombre d'éléments dans la somme).

### II.3.11 Simulation d'une variable aléatoire

Très souvent en simulation, on est amené à utiliser des échantillons fictifs de réalisations d'une v.a. de loi déterminée. Nous abordons ici un ensemble de méthodes de construction de tels échantillons

#### II.3.11.1 Méthode générale par transformation inverse

Soit à construire un échantillon de  $n$  réalisations d'une v.a.  $X$  de fonction de répartition  $F$ . Soit  $Y$  la v.a. définie par  $Y = F(X)$ . Cette v.a. suit une densité de probabilité uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Sa fonction de répartition  $G$  est telle que  $G(y) = P[Y < y] = y$ .

Soient  $y_1, \dots, y_n$  un échantillon de taille  $n$  d'une v.a. uniformément distribuée sur  $[0, 1]$ . Les  $y_i$  peuvent être considérés comme des réalisations de la v.a.  $x_i$ . Pour calculer les réalisations de  $x_i$ , il suffira alors de calculer la valeur de  $x_i$  qui correspond à une valeur  $y_i$  de sa fonction de répartition,

$$X = F^{-1}(Y) \Rightarrow x_i = F^{-1}(y_i)$$

#### II.3.11.2 Loi uniforme

La construction d'un échantillon fictif d'une v.a. de loi quelconque nécessite en premier lieu la construction d'un échantillon fictif d'une v.a. uniforme entre 0 et 1. Pour une loi uniforme, on ne pourra donc pas se servir de la méthode générale. On utilisera alors soit des tables de nombres au hasard, soit des algorithmes de génération de nombres pseudo-aléatoires (fonction random classique sur les machines par exemple).

#### II.3.11.3 Loi exponentielle

$f(x) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}$  a pour  $x > 0$  et  $a > 0$ . On a le résultat suivant  $F(x) = \int_0^x f(u) du = 1 - e^{-\frac{x}{a}}$ . La méthode générale par transformation inverse nous donne  $x = F^{-1}(y)$ . Si on remplace  $y$  par  $1 - y$  (ce qui est possible sans conséquence car la distribution uniforme est symétrique), alors on obtient  $1 - y = e^{-\frac{x}{a}}$ . On a donc  $x_i = -a \ln y_i$ .

#### II.3.11.4 Loi binomiale

$f(x) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$  et  $n$  doivent être connus. On pose alors  $k_0 = 0$  et on génère  $n$  nombres aléatoires  $y_i$  uniformément distribués et pour chaque  $y_i$ , on fait le test,

si  $y_i \leq p$  alors faire  $k_i = k_{i-1} + 1$

si  $y_i > p$  alors faire  $k_i = k_{i-1}$

$k_n$  sera la valeur de la réalisation d'une v.a. binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Cet algorithme utilise la propriété qui relie la loi binomiale à la loi 0-1 ( $p$ ).

### II.3.11.5 Loi de Poisson

$f(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$  On utilise le fait que les intervalles de temps séparant deux évènements successifs suivant une loi de Poisson sont distribués exponentiellement. On génère donc les intervalles  $t_1 \dots t_n$  distribués suivant une loi exponentielle de moyenne 1. La réalisation  $k$  de la variable aléatoire de Poisson de paramètre  $\lambda$  sera alors déterminée par l'inégalité,

$$\sum_{i=0}^k t_i < \lambda < \sum_{i=0}^{k+1} t_i$$

Avec  $t_i = -\ln y_i$  ( $y_i$ , v.a. uniforme  $[0,1]$  et  $t_i$  v.a. exponentielle de moyenne 1).

### II.3.11.6 Loi normale, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

On utilise le théorème central limite. La distribution de la moyenne  $\bar{Y}$  d'une v.a.  $Y$  tend vers une loi normale lorsque la taille  $n$  de l'échantillon est suffisamment grande, et ceci quelle que soit la distribution de la v.a.  $Y$ . On peut donc prendre  $Y$  : v.a. uniforme sur  $[0,1]$ . Donc  $E(Y) = \frac{1}{2}$  et  $\text{Var}(Y) = \frac{1}{12}$ . La v.a. définie par  $\frac{\sum_{i=1}^n y_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$  tend vers une loi normale centrée réduite.

Pour obtenir un échantillon de v.a. normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ , on utilisera la relation,

$$x_i = \mu + \sigma \sqrt{\frac{12}{n}} \left[ \sum_{i=1}^n y_i - \frac{n}{2} \right]$$

En pratique, on utilise  $n \approx 100$ .

### II.3.12 Autres indicateurs

Il existe d'autres indicateurs permettant de caractériser une v.a. Ils ne sont pas issus du calcul des moments.

#### II.3.12.1 Histogramme

L'histogramme est analogue à la courbe de densité. L'ordonnée associée à chaque abscisse est égal à la fréquence d'apparition de la valeur dans l'échantillon. Dans le cas d'une v.a. discrète, la construction de l'histogramme ne pose pas de problème. Par contre, pour une v.a. continue, il est nécessaire de résumer les valeurs à reporter sur la courbe en classes. La détermination du nombre de classes d'un histogramme est délicate et il n'existe pas de règle absolue. Un trop faible nombre de classes fait perdre de l'information et aboutit à gommer les différences pouvant exister entre des groupes de l'ensemble étudié.

En revanche, un trop grand nombre de classes aboutit à des graphiques incohérents ou certaines classes deviennent vides ou presque car  $n$ , la taille de l'échantillon, est fini.

**Sturges** propose comme limite maximale du nombre de classes,

$$n_c = [1 + \text{Log}^2(n)]$$

Où  $[ ]$  désigne la partie entière. Ainsi pour 100 mesures, il ne faudrait pas construire d'histogrammes de plus de 7 classes.

### II.3.12.2 Médiane

Par définition, la médiane est la valeur correspondant au milieu de la fonction de répartition d'une v.a.,

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{\tilde{x}} dF(x) = \frac{1}{2}$$

Si la loi de la v.a. est symétrique, alors la médiane est égale à l'espérance mathématique. la médiane n'est pas unique. C'est un indicateur insensible aux valeurs extrêmes ce qui en fait un outil très intéressant dans le domaine des statistiques robustes.

Si l'on part d'un échantillon de  $n$  réalisations triées par ordre croissant, la médiane sera obtenue par  $\tilde{x} = x_{(n+1)/2}$  si  $n$  est impair. Si  $n$  est pair, on prend conventionnellement,

$$\tilde{x} = \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2}.$$

### II.3.12.3 Mode

Par définition, le mode d'une v.a. est sa valeur la plus probable,

$$x_{mode}, P(X = x_{mode}) = \text{Max}_x P(X = x)$$

Le mode n'est pas unique. Il n'est strictement défini que pour une v.a. discrète car pour toute v.a. continue, on a  $\forall x P(X = x) = 0$ . Cependant, nous verrons dans le chapitre sur l'estimation qu'il est possible de trouver une valeur que l'on assimile au mode pour les v.a. continues.

### II.3.12.4 Autres moyennes

Dans la pratique, il peut arriver que la nature des réalisations d'un échantillon ne soit pas adaptée à l'utilisation de la moyenne classique. Il existe d'autres possibilités :

- La moyenne géométrique,  $\mu_g = \sqrt{\prod_{i=1}^n x_i}$

- La moyenne harmonique,  $\mu_h = \frac{n \prod_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$

Il est très dur de connaître les lois de comportements de ces indicateurs particuliers. Ils doivent donc être utilisés avec précaution.

## CHAPITRE III

**CARACTERISATION DES ECOULEMENTS AU TRAVERS LES MILIEUX POREUX****III.1 INTRODUCTION**

Dans le catalogue des milieux divisés, les milieux poreux désignent des matériaux pour lesquels la phase solide, fortement imbriquée avec la phase fluide, est fixe. On trouve de nombreux matériaux naturels dans cette catégorie : les sols, les couches sédimentaires, la plupart des roches, ainsi que certains matériaux vivants. Certains matériaux artificiels requièrent d'être poreux soit dans le processus de fabrication soit dans leur finalité pour jouer un rôle de filtre ou apporter des propriétés macroscopiques particulières (conductivité thermique par exemple). D'une manière générale, les milieux poreux sont définis par deux critères,

- . le matériau doit contenir de petits espaces vides, appelés pores, délimités par une matrice solide ;
- . le matériau doit être perméable à un écoulement de fluide (gaz ou liquide).

Ces deux critères renvoient à deux caractéristiques essentielles d'un milieu poreux :

**La porosité, la fraction de vide, et la perméabilité** qui indique l'aptitude d'un milieu poreux à être traversé par un écoulement. Ces deux quantités sont des variables macroscopiques, c'est-à-dire estimées sur un volume contenant de nombreuses entités microscopiques composant le matériau, **les pores**.

**III.2 QUELQUES EXEMPLES DE MILIEUX POREUX****III.2.1 Milieux poreux naturels**

Dans la nature, les roches et les sols sont certainement les milieux poreux les plus exploités. L'étude géologique des sous-sols permet de classer les différentes couches géologiques selon la perméabilité à un écoulement de fluide. Les couches d'argile constituent en général les parois imperméables de réservoirs naturels d'eau ou d'hydrocarbures. On nomme aquifère un réservoir qui non seulement contient de l'eau mais qui peut aussi être le lieu d'écoulement, par gravité ou par pompage.

Une schématisation d'un aquifère est proposée sur la figure III.1. Les roches poreuses peuvent contenir également des hydrocarbures. La figure III.2 montre qu'un tel réservoir peut contenir de l'eau, du pétrole et du gaz, avec des couches de mélange intermédiaires. C'est pourquoi la compréhension des écoulements multiphasiques est très importante pour l'industrie de l'extraction pétrolière.

La porosité des roches est très variable selon les conditions de température et de pression lors de la formation et de l'évolution géologique. Les roches denses comme le granit ont des porosités inférieures à 2%. Au contraire, les roches volcaniques formées à la surface (faible pression) ont des porosités élevées à cause des processus de dégazage associés au refroidissement. Certaines roches atteignent ainsi une porosité de 60%. Les roches sédimentaires se sont formées à partir d'agglomération de grains cimentés entre eux. Les schistes argileux ont une porosité de l'ordre de 10 à 25%. Le grès, formé en général de grains de quartz, a une porosité qui dépend fortement du matériau de cimentation des grains (entre 10 et 45%).

De plus, la compaction géologique peut réduire considérablement la porosité : la figure III.3 montre différentes coupes d'échantillons de grès poreux prélevés dans un même forage mais à des profondeurs différentes. On remarque que la porosité diminue nettement avec la profondeur de forage.

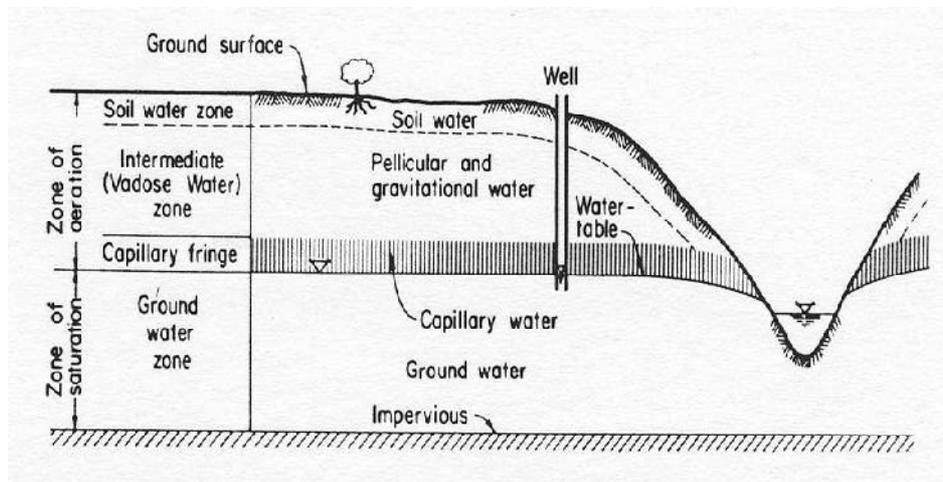


Figure III.1 Schématisation d'un aquifère (Bear, 1972)

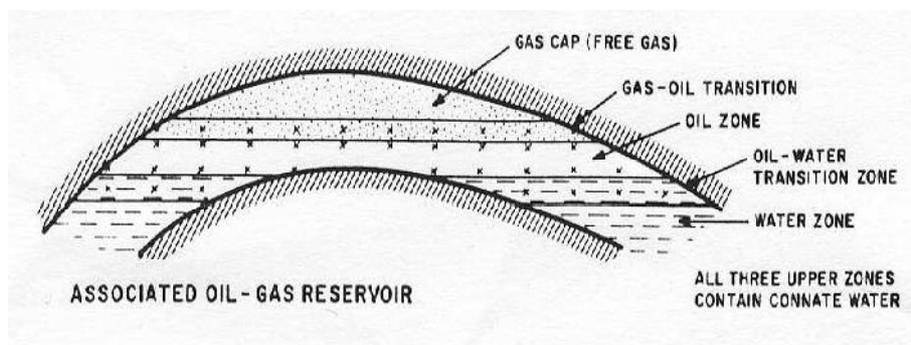
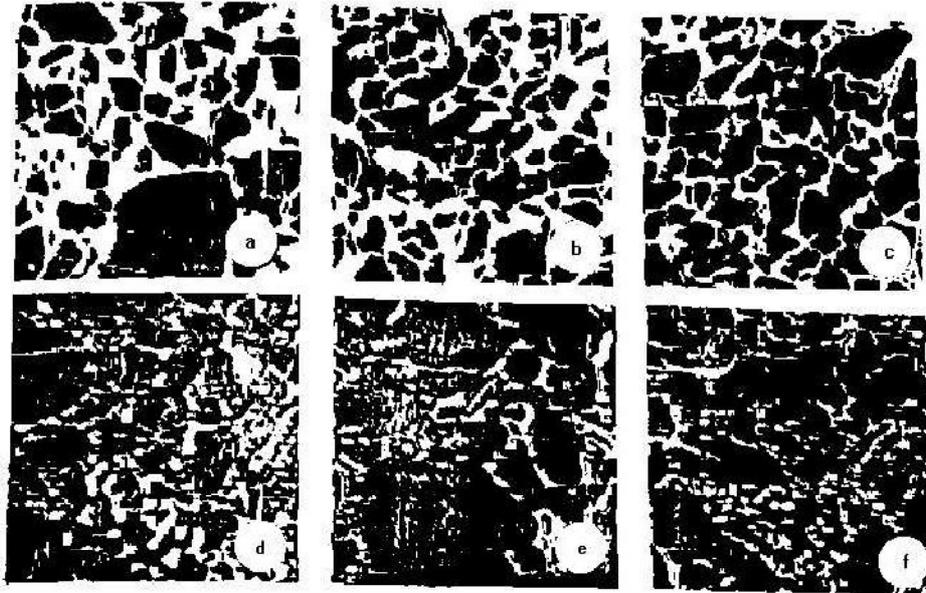


Figure III.2 Schéma d'un réservoir naturel d'un hydrocarbure (Bear, 1972)



**Figure III.3** Coupes d'échantillons de grès poreux obtenues à différentes profondeurs  
 P : (a)  $e = 27 \%$ ,  $P=1000-1500$  m; (b)  $e = 23 \%$ ,  $P=1700-1900$  m; (c)  $e = 18 \%$ ,  
 $P=2000-2300$  m; (d)  $e = 16 \%$ ,  $P=2500-2700$  m; (e)  $e = 13 \%$ ,  $P=2800-3000$  m;  
 (f)  $e = 10 \%$ ,  $P > 3000$  m

### III.2.2 Milieux poreux artificiels

Lors de la fabrication des bétons et des ciments, une certaine porosité est nécessaire pour permettre un séchage lent et progressif et l'obtention d'un matériau robuste. Parfois, la porosité « fine » est complétée par un réseau de fractures qui fragilise le béton. La porosité d'un bon béton est comprise entre 6 et 10%.

Le contrôle de la porosité et de la structure poreuse joue un grand rôle dans l'industrie du papier. Selon les méthodes de fabrication, on peut obtenir un papier filtre très absorbant avec une porosité de 80%, ou au contraire un papier très « serré » et transparent (le papier calque) avec une porosité proche de 0. On a alors des pores de diamètres compris entre 0,2 à  $4\mu\text{m}$ . Une méthode de réalisation de poreux de formes diverses est le frittage. Un empilement de grains en contact est chauffé de manière à ce que les contacts entre grains fondent et réalisent une soudure. Le frittage peut se réaliser avec des grains en métal (bronze, cuivre par exemple), en plastique ou en verre.

### III.3 DESCRIPTION D'UN MILIEU POREUX ET THEORIE DE LA CONTINUTE

Les milieux poreux naturels sont caractérisés par une extrême complexité de la distribution des pores, irrégulières, aussi bien en forme qu'en taille. Ainsi, si en théorie il est possible de décrire ce système à l'échelle du pore, les fortes hétérogénéités rendent cette description inatteignable lorsque la taille du système augmente.

Ce constat force à envisager une approximation du système qui soit plus facile à manipuler que cette description microscopique. C'est ce que propose la théorie de la continuité.

Dans cette théorie le système physique réel discret est remplacé par un système continu dans lequel les propriétés physiques le décrivant varient continument dans l'espace. L'hypothèse sous-jacente est qu'un système physique réel qui présente des variations très rapides à petite échelle peut être approximé par un système dans lequel l'évolution spatiale des propriétés étudiées est suffisamment régulière pour permettre l'utilisation du calcul différentiel pour décrire les processus s'y déroulant.

Dans la représentation continue des milieux poreux, la valeur d'une variable physique en chaque point résulte d'une moyenne de la propriété physique réelle sur un volume élémentaire représentatif. Les dimensions d'un tel volume sont généralement grandes par rapport à la taille du grain mais petites par rapport à la longueur caractéristique sur laquelle les quantités considérées varient.

### III.3.1 Description géométrique

Les milieux poreux ont une géométrie complexe. Pour illustration, la figure III.4 montre l'espace des pores d'un grès de la mer du Nord, obtenu par des mesures tomographiques.

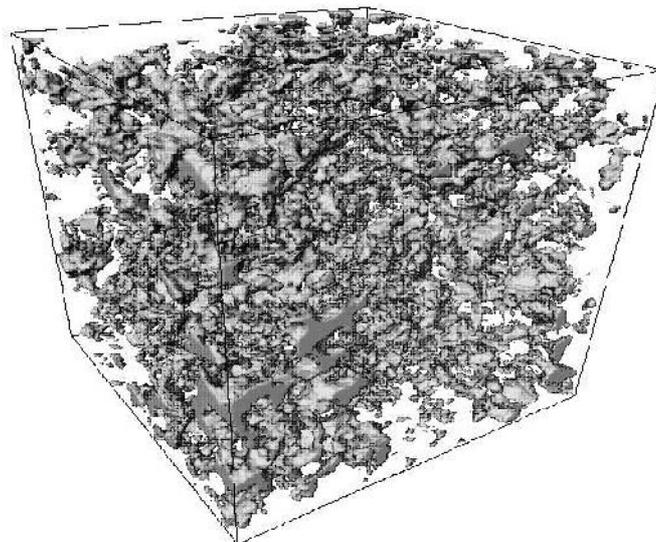
#### III.3.1.1 La porosité

Le paramètre principal décrivant un milieu poreux est la **porosité** définie par ,

$$\phi = \frac{V_P}{V_0} = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}} \quad (\text{III-1})$$

Qui varie donc entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide). Ce paramètre de porosité est complémentaire de la **fraction volumique de solide**  $f$  telle que,

$$\phi + f = 1 \quad (\text{III-2})$$



**Figure III.4** Espace des pores d'un grès de la mer du Nord (données Statoil)

La définition (1) de la porosité est une définition tridimensionnelle. Elle peut être transposée à un rapport de surfaces. En effet, une coupe d'un échantillon poreux (un exemple est donné sur la figure III.5) montre une surface composée de deux phases. On définit alors la porosité surfacique (à deux dimensions):

$$\phi_s = \frac{A_p}{A_0} = \frac{\text{surface des pores}}{\text{surface total}} \quad (\text{III-3})$$

Pour chaque section effectuée à la côte  $z$ , on peut mesurer l'aire  $A_p(z)$  occupée par les pores. Si le milieu est homogène (donc la porosité surfacique ne dépend pas de la côte  $z$ ), on peut écrire que cette aire vaut  $\phi_s \cdot A_0$ , ou  $A_0$  est l'aire totale de la section. A partir de ces mesures, on peut calculer le volume des pores de l'échantillon par,

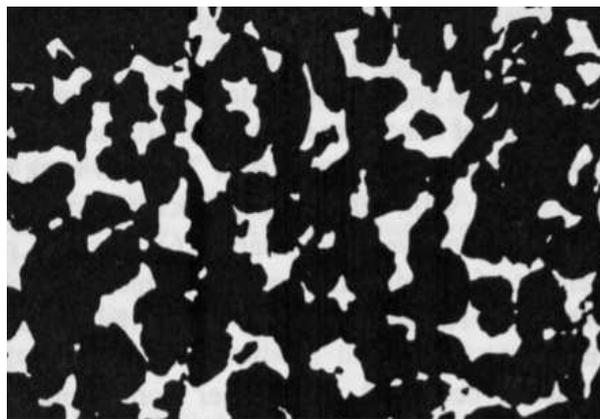
$$V_p = \int A_p(z) dz = A_0 \phi_s \int dz = \phi_s V_0 \quad (\text{III-4})$$

Par conséquent, on obtient une égalité entre la porosité volumique et la porosité surfacique:

$$\phi_s = \phi \quad (\text{III-5})$$

La définition peut être appliquée à une dimension, en introduisant une **porosité linéique**,  $\phi_L$  calculée par des mesures de longueurs de segments occupés par le solide ou le vide. Si le matériau est homogène et isotrope, on peut montrer que,

$$\phi = \phi_L = \phi_s \quad (\text{III-6})$$



**Figure III.5** Exemple de coupe d'un poreux (grés)

### III.3.1.2 Aire spécifique

La grande surface interne de la matrice solide est une caractéristique des milieux poreux. A partir d'un échantillon de volume  $V_0$ , on peut définir par  $S$  la surface interne des pores.

L'aire spécifique d'un poreux est définie comme le rapport  $A_s = \frac{S}{V_0}$ , avec une dimension de l'inverse d'une longueur.

Les méthodes classiques de mesures d'aire spécifique sont :

- adsorption d'un gaz ;
- analyse de coupes.

### **III.3.1.3 Autres paramètres**

La porosité et l'aire spécifique sont des propriétés macroscopiques pour le matériau poreux. Mais d'autres paramètres peuvent être importants au niveau microscopique, en particulier quand un fluide circule dans l'espace des pores.

On peut citer la connectivité, qui caractérise le nombre de voisins pour un pore, la présence de bras morts (pores bouchés), ou encore la topologie du volume des pores. Le désordre géométrique est un caractère essentiel des milieux poreux. Cela empêche toute trajectoire en ligne droite incluse dans le volume des pores. On peut alors définir une tortuosité, qui représente le caractère non rectiligne des trajectoires. Cette notion sera précisée lors de la modélisation des milieux poreux.

## **III.4 CIRCULATION DE FLUIDES EN MILIEU POREUX**

Pour décrire le transport d'espèces chimiques en milieu poreux, une première condition est de savoir comment l'eau, qui est le vecteur de ces espèces dissoutes, s'écoule dans le milieu. On peut caractériser un milieu poreux par deux grandeurs : sa porosité cinématique et sa perméabilité intrinsèque. Le volume poreux dans lequel l'eau peut circuler est inférieur au volume vide total, la porosité cinématique correspond ainsi à la fraction de la porosité totale contenant l'eau qui peut circuler.

Ceci exclut donc les volumes correspondant à l'eau attachée à la surface des grains par le jeu des forces d'attraction moléculaire, aux pores non connectés au réseau global, et aux pores en cul-de-sac dans lesquels l'eau est quasi immobile. La perméabilité intrinsèque est définie par la loi de Darcy.

## **III.5 LOI DE DARCY**

On considère dans cette section que le milieu poreux est totalement imbibé, c'est-à-dire que le volume des pores est entièrement rempli de fluide.

L'étude fondatrice des écoulements dans les milieux poreux a été réalisée par l'ingénieur Darcy en 1856 avec un « Mémoire sur les fontaines publiques de la ville de Dijon ». Il a mis en évidence une relation linéaire entre la vitesse et le gradient de pression appliqué de part et d'autre du matériau poreux. La loi de Darcy s'applique à un milieu poreux homogène et isotrope parcouru par un écoulement à faible vitesse.

A cet effet, l'auteur a tenté d'améliorer la qualité des filtres à sable utiles à la purification des eaux d'alimentation de la ville de Dijon, il a établi expérimentalement la relation entre le débit d'écoulement à travers un matériau poreux et la perte de charge qui lui est associée dans un dispositif semblable à celui illustré à la figure III.6, extraite de [Musy and Soutter, 1991].

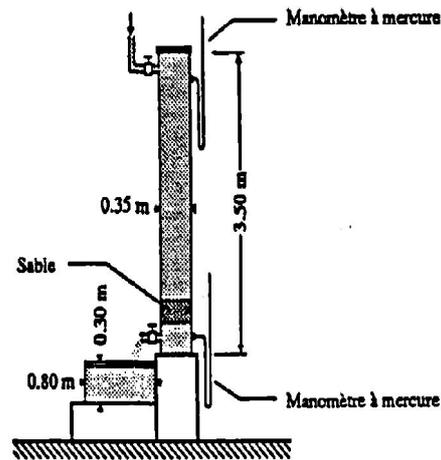


Figure III.6 Dispositif expérimentale de Darcy

De cette expérience, Darcy a déduit une relation exprimant le débit total  $Q$  transitant au travers de la colonne comme le produit de sa section  $A$ , du rapport de la différence de la charge totale  $\Delta h$  existant entre ces deux extrémités à sa longueur  $L$  et d'un coefficient de proportionnalité  $k$ ,

$$Q = k \cdot A \frac{\Delta h}{L} = \tilde{k} \cdot i \cdot A \quad (\text{III-7})$$

ou  $Q$  : débit d'écoulement total mesuré à la sortie.

$k$  : constante connue sous le nom de coefficient de perméabilité de Darcy.

$\Delta h$  : Différence de la charge totale entre les deux extrémités du tube de sol.

$L$  : longueur de l'échantillon.

$i$  : gradient hydraulique ( $i = \frac{\Delta h}{L}$ ).

$A$  : Section de l'échantillon normale à la direction de l'écoulement.

En divisant les deux membres de la relation (3-7) par  $A$ , nous obtenons la vitesse de filtration,  $q = \frac{Q}{A}$  appelée également vitesse de Darcy,

$$q = \frac{Q}{A} = k \frac{\Delta h}{L} = k \cdot i \quad (\text{III-8})$$

ou  $q$  : vitesse de l'écoulement.

$i$  : gradient hydraulique ( $i = \frac{\Delta h}{L}$ ).

$k$  : coefficient de perméabilité ou conductivité hydraulique du milieu.

### III.5.1 Généralisation de la loi de Darcy

La loi de Darcy représente un cas particulier de l'intégration des lois générales de la mécanique, lorsque l'on fait l'hypothèse que l'eau se comporte comme un fluide newtonien, incompressible, et qu'au cours de son écoulement dans le sol, les forces d'inertie sont négligeables. On montre que, dans ces conditions, la loi de Darcy peut se mettre sous la forme,

$$q_m = -k \text{ grad } H \tag{III-9}$$

$H$  : représente la charge hydraulique de Bernoulli (définie à une constante additive près) :

$$H = \frac{z+u}{\gamma_w} \tag{III-10}$$

$q_m$  (vitesse moyenne fictive de Darcy) et  $[\text{grad } H]$  sont des vecteurs et  $k$  est un tenseur, le tenseur de perméabilité cinématique. Il dépend à la fois des propriétés du milieu poreux et de celles du liquide. Pour s'affranchir de ces dernières, on définit également le tenseur de perméabilité géométrique  $K$  qui ne dépend que du milieu poreux :

$$k = \frac{\tilde{K} \cdot \rho_w \cdot g}{\mu_w} = \frac{\tilde{K} \cdot \gamma_w}{\mu_w} \tag{III -11}$$

On peut écrire  $K$  et  $k$  sous forme diagonale dans les axes principaux d'anisotropie des perméabilités :

- quelconques dans le cas d'une roche ; ils dépendent dans ce cas de l'histoire du matériau,
- généralement, horizontaux et verticaux dans le cas d'un sol sédimentaire (perméabilités horizontale et verticale).

Les unités de perméabilité sont précisées sur le tableau III.1.

**Tableau III.1** Unités de perméabilité.

Symbole	Désignation	Unité SI	Relation avec d'autres paramètres
$K$	Perméabilité géométrique	$\text{m}^2 (\text{L}^2)$	1 mDa (milliDarcy) = $9.87 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2$ 1 perm (CGS) = $10^{-4} \text{ m}^2$
$k$	Perméabilité cinématique	$\text{m/s} (\text{LT}^{-1})$	eau pure : $k / K \approx 10^7 (\text{m s})^{-1}$
$\mu$	Viscosité dynamique	$\text{Pl} (\text{FL}^{-2}\text{T})$	1 cPo (centiPoise CGS) = $10^{-3} \text{ Pl}$ (Poiseuille) eau pure : $\mu \approx 10^{-3} \text{ Pl}$
$\nu = \mu/\rho$	Viscosité cinématique	$\text{m}^2/\text{s} (\text{L}^2\text{T}^{-1})$	1 cSt (centiStoke CGS) = $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ eau pure : $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$

Dans un sol isotrope, la vitesse d'écoulement est donc parallèle au gradient hydraulique, lui-même normal aux surfaces équipotentielles de l'écoulement. Par conséquent, la vitesse d'écoulement est normale aux surfaces équipotentielles.

### III.5.2 Domaine de validité de la loi de Darcy

On peut retrouver les limites du domaine de validité de la loi de Darcy en se reportant aux hypothèses qui ont été faites pour son établissement théorique (figure III.7).

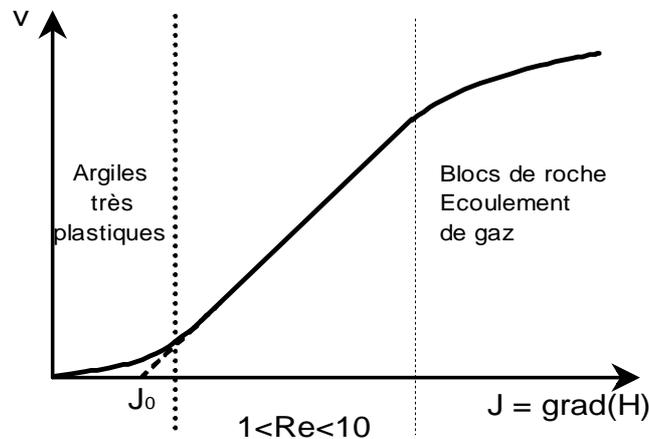


Figure III.7 Courbe limitant le domaine de la validité de la loi de Darcy

Comportement newtonien du fluide non valable lorsque les interactions entre le liquide et le sol sont importantes (cas des argiles "actives" : montmorillonites, smaltites).

. forces d'inertie négligeables : écoulement lent, laminaire, que l'on caractérise par un nombre de Reynold's (pour un tube de diamètre  $d$ ) inférieur à 1. Au delà de cette valeur, la loi de perte de charge est plutôt quadratique.

$$R_e = \frac{q_m \cdot d \cdot \rho_w}{\mu} < 1 \tag{III-12}$$

ou  $\rho_w$ : densité du fluide (poids par unité de volume).

$d$  : diamètre moyen des grains.

$q_m$ : vitesse moyenne fictive de Darcy.

$\mu$  : coefficient de viscosité dynamique

$R_e$  : nombre de Reynolds.

### III.6 LA CHARGE HYDRAULIQUE

Dans un milieu poreux, l'eau est caractérisée par son état d'énergie. Son potentiel énergétique total résulte de l'addition des forces qui agissent sur elle. On définit alors la charge hydraulique  $h$  (ou potentiel énergétique total) d'un fluide incompressible et soumis à la seule gravité par la relation,

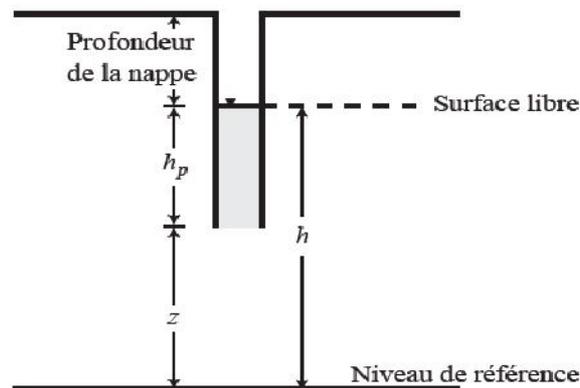
$$h = h_p + z \tag{III-13}$$

Ou ( $h_p = p / \rho_f \cdot g$ ) est le potentiel matriciel ou de pression (m) avec  $p$  la pression de l'eau (Pa) et  $\rho_f$  est la masse volumique du fluide ( $kg \cdot m^{-3}$ ), et  $z$  est le potentiel gravitaire (m).

Le potentiel matriciel ou de pression est une conséquence des forces de capillarité et d'absorption dues à la matrice solide qui attirent et lient la phase solide dans le sol.

Le potentiel matriciel est défini comme étant positif si sa valeur est supérieure à la pression atmosphérique et négative dans le cas contraire. Le premier cas est rencontré dans un milieu saturé, et le deuxième dans un milieu non saturé.

On exprime généralement la charge hydraulique par rapport au nivellement général (NGF) comptées au dessus du niveau moyen des mers, comme les altitudes topographiques. En hydrogéologie, la charge hydraulique en un point du milieu poreux est déterminée par des mesures dans les piézomètres (figure III.8).



**Figure III-8** Détermination de la charge hydraulique dans un piézomètre

### III.7 LOI DE CONSERVATION DE MASSE – EQUATION DE CONTINUTE

Les milieux poreux naturels sont caractérisés par une extrême complexité de la distribution des pores, irrégulière aussi bien en forme qu'en taille. Si en théorie il est possible de décrire ce système à l'échelle du pore, une telle description se révèle utopiste lorsque la taille du système augmente. Par conséquent, il est nécessaire de passer de l'échelle microscopique où les lois fondamentales de la physique s'appliquent mais où les variables sont inaccessibles à la mesure, à l'échelle macroscopique où les phénomènes sont observés.

#### III.7.1 Notion de Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R)

Les équations qui gouvernent l'évolution des grandeurs macroscopiques ne sont pas nécessairement de la même forme que celles s'appliquant au niveau microscopique. A fin de pouvoir établir de telles équations, nous introduisons la notion du volume élémentaire représentatif (VER) à partir duquel le milieu poreux peut être considéré comme un milieu continu (Bear, 1979). Dans cette théorie, le système physique réel discret est remplacé par un système continu dans lequel les propriétés physiques le décrivant varient continûment dans l'espace.

La théorie de la continuité repose sur l'hypothèse qu'un système physique réel peut être approximé par un système dans lequel les variations dans l'espace des propriétés étudiées sont suffisamment lisses pour permettre l'utilisation de calculs différentiels.

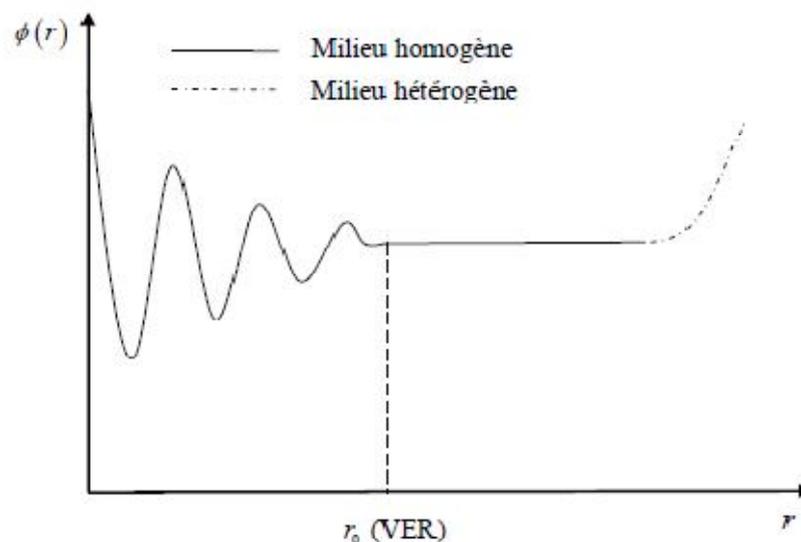
L'intérêt est donc de pouvoir formuler les changements dans le système en termes d'équations différentielles décrivant les processus qui ont lieu.

Dans la présentation continue d'un milieu poreux, les variables physiques décrivant le milieu, discontinues à l'échelle microscopique, sont remplacées par des fonctions continues à l'échelle macroscopique. La valeur de chaque variable physique affectée à un point mathématique dans l'espace continu est obtenue en moyennant la propriété physique sur un volume élémentaire représentatif (VER).

Les dimensions du VER sont généralement suffisamment grandes par rapport à la taille du grain, pour contenir un grand nombre de pores et pouvoir ainsi définir une propriété moyenne globale avec l'assurance d'une fluctuation négligeable d'un pore à l'autre, mais suffisamment petites pour que les variations du paramètre d'un domaine au domaine voisin puissent être approchées par des fonctions continues (De Marsily, 1981).

Le VER peut être estimé en mesurant la porosité totale  $\phi$  d'une sphère de rayon  $r[L]$  centrée sur un point  $P$ . Sa dimension est prise égale au rayon  $r_0[L]$  défini par l'apparition d'un palier sur la courbe reliant la porosité totale du milieu à la taille du volume d'observation (figure III.9). Nous adoptons alors comme porosité totale au point  $P$  la valeur  $\phi(r_0)$ . Pour des sphères de rayon inférieur à  $r_0$ ,  $\phi(r_0)$  est sensible aux fluctuations microscopiques du milieu poreux et varie aléatoirement. La valeur de la porosité peut aussi varier au-delà d'une certaine valeur de  $r$  si le milieu est hétérogène.

Nous nous placerons dans ces conditions de continuité dans la suite du travail



**Figure III.9** Évolution de la porosité totale d'une sphère centrée en un point  $P$  du milieu poreux en fonction de son rayon  $r$

### III.7.2 Equation de conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse stipule que la variation de la masse dans

un volume de l'ordre d'un VER pendant un intervalle de temps  $dt$  est égale à la quantité de masse entrante moins la quantité de masse sortante. Ce principe se traduit mathématiquement par l'équation différentielle suivante (Bear, 1979),

$$\frac{\partial(\phi_c \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q) = \rho Q_s \quad (\text{III-14})$$

Où  $Q_s [T^{-1}]$  représente le terme puits/source par unité de volume.

Deux hypothèses sont communément citées dans la littérature (Holzbecher, 1998) et permettent de simplifier l'équation (III-14),

- L'approximation d'Oberbeck-Boussinesq où les variations de la densité sont négligées. L'équation précédente devient alors,

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial t} + \nabla \cdot q = Q_s \quad (\text{III-15})$$

- La variation de la densité dans la direction de l'écoulement est négligeable. Nous obtenons dans ce cas,

$$\frac{\partial(\phi_c \rho)}{\partial t} + \rho \nabla \cdot q = \rho Q_s \quad (\text{III-16})$$

L'hypothèse de Boussinesq a un domaine de validité restreint (Evans et Raffensperger, 1992 ; Kolditz *et al*, 1997; Younes, 2003) et sera évitée dans le cadre de ce travail.

La seconde hypothèse consistant à négliger le terme  $\nabla \rho \cdot q$  dans l'équation de conservation de la masse n'introduit pas de différences significatives (Bear, 1979 ; Ackerer *et al.*, 2000) et sera adoptée dans la suite.

Nous supposons que la porosité ne dépend que de la pression et que la densité  $\rho$  du fluide dépend de la pression  $P$ , de la fraction massique du polluant dissous (soluté)  $C_m [-]$  (rapport entre la masse du soluté et la masse totale du fluide) et de la température  $T [K]$ . En négligeant les effets thermiques au sein du milieu poreux, nous pouvons écrire,

$$\frac{\partial(\phi_c \rho)}{\partial t} = \rho \frac{\partial \phi_c}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( \rho \frac{\partial \phi_c}{\partial P} + \phi_c \frac{\partial \rho}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + \phi_c \frac{\partial \rho}{\partial C_m} \frac{\partial C_m}{\partial t} \quad (\text{III-17})$$

Soit  $\alpha [LT^2M^{-1}]$  le coefficient de compressibilité de la matrice poreuse et  $\beta [LT^2M^{-1}]$  le coefficient de compressibilité du fluide définis par Bear (1979),

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}, \quad \alpha = \frac{1}{1-\phi_c} \frac{\partial \phi_c}{\partial P} \quad (\text{III-18})$$

L'équation (III-17) devient,

$$\frac{\partial(\phi_c \rho)}{\partial t} = \rho S \frac{\partial P}{\partial t} + \phi_c \frac{\partial \rho}{\partial C_m} \frac{\partial C_m}{\partial t} \quad (\text{III-19})$$

Avec :  $S$  [ $LT^2M^{-1}$ ] l'emmagasinement par unité de volume du milieu poreux dû à une variation d'une unité de pression et qui est défini par (Bear, 1979),

$$S = \alpha \cdot (1 - \phi_c) + \phi_c \cdot \beta \quad (III-20)$$

L'équation de conservation de la masse (III-14) devient,

$$\rho S \frac{\partial P}{\partial t} + \phi_c \frac{\partial \rho}{\partial C_m} \frac{\partial C_m}{\partial t} + \rho \nabla \cdot q = \rho Q_s \quad (III-21)$$

L'équation (3-21) peut être également exprimée en fonction de la charge hydraulique,

$$\rho S \frac{\partial h}{\partial t} + \phi_c \frac{\partial \rho}{\partial C_m} \frac{\partial C_m}{\partial t} + \rho \nabla \cdot q = \rho Q_s \quad (III-22)$$

Où :  $s$  [ $L^{-1}$ ] est l'emmagasinement par unité de volume du milieu poreux dû à une variation d'une unité de charge, relié à  $S$  par,

$$s = \rho_0 \cdot g \cdot S \quad (III-23)$$

Dans le cas d'un traceur de l'eau, l'équation de conservation de la masse (III-23) s'écrit alors,

$$s \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot q = Q_s \quad (III-24)$$

### III.8 LOI DE LAPLACE

Si l'on considère un sol soumis à un écoulement quelconque, en combinant la condition de continuité et la loi de DARCY nous obtenons le système suivant qui nous permet d'obtenir l'équation tridimensionnelle de LAPLACE,

$$\frac{\partial(v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{Condition de continuité}).$$

$$\begin{cases} V_x = -K \frac{\partial h}{\partial x} \\ V_y = -K \frac{\partial h}{\partial y} \\ V_z = -K \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{Loi de Darcy}).$$

Soit : Loi de Laplace

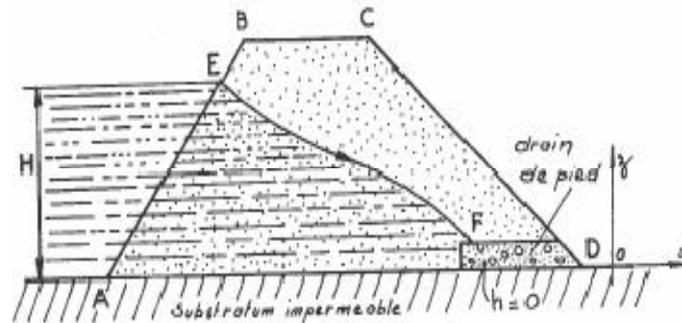
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (III -25)$$

A noter que cette équation concerne la charge hydraulique exclusivement, elle suffit à caractériser tout écoulement souterrain dans un sol. Autrement dit, l'équation de LAPLACE est considérée comme une loi mathématique régissant les écoulements stationnaires en

milieux poreux. Pour ce faire, elle doit être soumise à des conditions aux limites imposées sur le domaine considéré.

**III.8.1 Cas des écoulements à deux dimensions en milieu homogène et isotrope**

La plupart des problèmes d’hydraulique des sols peuvent être ramenés à deux dimensions comme dans le cas d’un barrage (figure III.10).



**Figure III.10** Ecoulement plan sous un barrage, écoulement bidimensionnel

Dans ce contexte l’équation de Laplace s’écrit,

$$\nabla h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \tag{III-26}$$

Plusieurs méthodes permettent de résoudre cette équation,

- la méthode numérique,
- la méthode analogique (analogie électrique),
- la méthode graphique.

**III.9 EQUATION DES ECOULEMENTS DANS LES AQUIFERES**

Nous présentons ici les équations différentielles décrivant l’écoulement de l’eau dans les aquifères. Les références classiques dans ce domaine sont celles de Bear (1972), de Marsily (1994) et de Domenico et Schwartz (1997).

Nous venons de voir que le gradient de charge hydraulique est le principal moteur du mouvement de l’eau dans les sols. L’équation de diffusivité décrit les transferts d’eau dans un milieu poreux saturé. Elle découle de la combinaison de la loi de Darcy avec l’équation de continuité du fluide,

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{U}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \phi) + \rho_f Q \tag{III-27}$$

Où  $\vec{U}$  est le flux d'eau (ou vitesse de Darcy) (m/s),  $\rho_f$  est la masse volumique du fluide ( $\text{kg/m}^3$ ),  $\emptyset$  est la porosité et  $Q$  est le terme source qui représente le débit volumique de fluide prélevé (ou apporté s'il est négatif) par unité de volume en chaque point. Le débit massique prélevé sera donc  $\rho_f Q$ ,  $Q$  étant définie à l'échelle macroscopique. L'équation de continuité exprime la conservation de la matière dans un élément de volume fixe.

### III.9.1 Écoulement en nappe libre

La limite supérieure des nappes libres est représentée par la surface libre où l'eau est à la pression atmosphérique. L'écoulement dans les nappes libres pose un problème particulier car l'épaisseur de la zone saturée est variable. Pour qu'il y ait écoulement, il doit y avoir différence de charge, ce qui entraîne aussi un changement de l'épaisseur saturée et de la section d'écoulement. Le problème de l'écoulement en nappes libres est donc intrinsèquement non linéaire puisque la valeur de la charge dépend de la charge elle-même. Cependant, ce problème peut être linéarisé en supposant que l'épaisseur saturée est très grande comparée aux changements de l'épaisseur reliés à l'écoulement. On peut donc utiliser une valeur moyenne de l'épaisseur de la zone saturée  $e$  pour l'ensemble de l'aquifère.

Pour obtenir une solution élémentaire de l'écoulement dans une nappe libre, nous allons nous placer sous l'hypothèse de Dupuit. Toutes les vitesses sont supposées être horizontales et parallèles entre elles sur une même verticale et le gradient hydraulique est constant le long d'une verticale et égal à la pente de la surface de la nappe. L'hypothèse de Dupuit est assez bien satisfaite dans la réalité dès que l'on s'éloigne des exutoires. Enfin on suppose aussi que la transmissivité est isotrope et constante dans toute la nappe.

En combinant l'équation de la loi de Darcy et l'équation de continuité du fluide sous l'hypothèse d'un fluide incompressible de masse volumique et viscosité dynamique constante, on obtient l'équation de diffusivité pour une nappe libre,

$$\vec{\nabla}^2 h = \frac{\emptyset_d}{T} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{Q}{T} \quad (\text{III--28})$$

Où  $T$  est la transmissivité de la nappe ( $\text{m}^2/\text{s}$ ),  $\emptyset_d$  est la porosité de drainage et  $Q$  est le débit volumique de fluide prélevé ou apporté ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).

### III.9.2 Écoulement en nappe captive

On considère le fluide compressible et le milieu poreux compressible, aussi bien pour les pores que les grains solides. On suppose en outre le milieu poreux entièrement saturé en fluide. En combinant l'équation de continuité du fluide, l'équation de continuité du flux de grains solide et l'équation de la loi de Darcy et en supposant la transmissivité  $T$  isotrope et constante dans tout l'espace,

$$\vec{\nabla}^2 h = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{Q}{T} \quad (\text{III-29})$$

Où  $S$  est le coefficient d'emménagement de la nappe (sans dimension).

Le rapport  $\frac{S}{T}$  est appelé diffusivité hydraulique de l'aquifère. Cette équation est identique à celle de la nappe libre mais  $S$  remplace ici la porosité de drainage  $\phi_d$ . Il faut bien voir cependant que même si les deux équations sont identiques, les mécanismes mis en jeu (mouvement de la surface libre dans un cas, compressibilité du milieu dans l'autre) sont distincts.

Dans les chapitres suivants nous utiliserons le formalisme de l'écoulement en nappe captive en définissant à chaque fois «  $S$  » soit comme la porosité de drainage d'une nappe libre soit comme le coefficient d'emmagasinement de la nappe captive.

### III.10 REPRESENTATION MATHEMATIQUE DES PROCESSUS HYDROLOGIQUES SOUTERRAINS

Dans cette partie nous étudions séparément les principaux processus hydrologiques souterrains : l'écoulement en milieu non saturé, l'écoulement en milieu saturé et l'écoulement à surface libre. Pour chaque processus nous allons étudier les concepts théoriques, les équations mathématiques et les paramètres nécessaires.

#### III.10.1 L'écoulement en milieu poreux non saturé et saturé

##### III.10.1.1 Le modèle de Richards

L'infiltration est le mouvement de l'eau pénétrant dans un milieu poreux depuis la surface du sol. Ce milieu est souvent représenté par deux compartiments, le milieu non-saturé et le milieu saturé ou l'aquifère. L'infiltration est un processus dirigé principalement par deux forces motrices dont les origines sont la capillarité et la pesanteur. Les écoulements en milieu non-saturé sont gouvernés par l'équation de **Richards (1931)**.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial z} K \quad (\text{III-30})$$

Avec,

$t$  : temps  $[T]$  ;

$z$  : profondeur orientée positivement vers le bas  $[L]$  ;

$\theta$  : teneur en eau volumique  $[L^3L^{-3}]$  ;

$K(\theta)$  : conductivité hydraulique  $[LT^{-1}]$  ;

$\Psi(\theta)$  : potentiel matriciel  $[L]$ .

Ce modèle dépend des deux relations fonctionnelles  $K(\theta)$  et  $\Psi(\theta)$  qui doivent être connues. Dans la littérature, plusieurs auteurs ont étudié ces relations (figure III.11) tels les travaux de Brooks et Corey (1994), Van Genuchten (1980) et Smith *et al.* (1993) (voir une synthèse dans Rawls et Brakensiek, 1989). Van Genuchten (1980) propose,

$$K(\theta) = K_S \left[ \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right]^{b + \frac{a}{\lambda}} \quad (\text{III-31})$$

$$\Psi(\theta) = \Psi_b \left[ \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{\frac{c}{\lambda}} - 1 \right]^{\frac{1}{c}} \quad (\text{III-32})$$

Avec,

$a, b, c$  et  $\lambda$  : coefficients adimensionnels ;

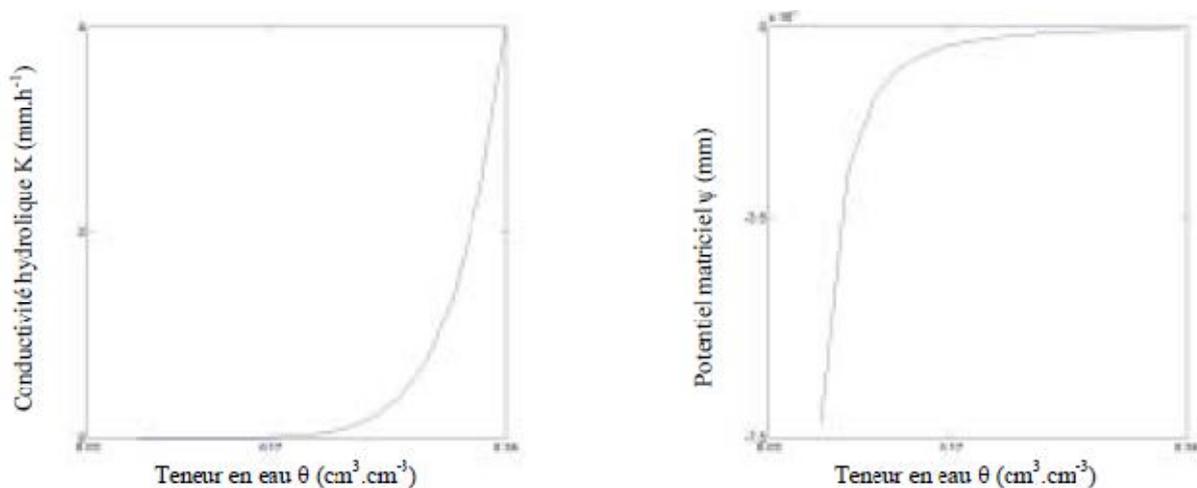
$K_S$ : conductivité hydraulique à saturation [ $L.T^{-1}$ ] ;

$\theta$  : teneur en eau [ $L^3L^{-3}$ ];

$\theta_r$  : teneur en eau résiduelle [ $L^3L^{-3}$ ] ;

$\theta_s$  : teneur en eau à saturation [ $L^3L^{-3}$ ] ;

$\Psi_b$ : potentiel d'entrée d'air [ $L$ ].



**Figure III.11** Propriétés hydrodynamiques du sol. a) La conductivité hydraulique ( $K$ ) fonction de la teneur en eau ( $\theta$ ) ; Le potentiel matriciel ( $\Psi$ ) fonction de la teneur en eau

L'équation (1.3) qui représente un écoulement monodirectionnel vertical dans le sol peut être généralisée pour représenter les écoulements en bidimensionnel (e.g. le modèle HYDRUS-2D de Simunek et Van Genuchten, 1997) et tridimensionnel (le modèle SWMS-3D de Simunek *et al.*, 1995). L'équation de Richards est non-linéaire et sa résolution nécessite des méthodes numériques aux différences finies ou aux éléments finis (Lehman et Ackerer, 1996 ; Simunek et Van Genuchten, 1996, 1997; Simunek *et al.*, 1998). Ces méthodes sont très consommatrices en temps de calcul et posent des problèmes de stabilité et de convergence numériques. Par ailleurs, le modèle de Richards nécessite une bonne connaissance des propriétés hydrodynamiques du sol ainsi que des conditions initiales et aux limites.

### III.10.1.2 Quelques modèles simplifiés

Sous certaines hypothèses, les équations de Richards peuvent être simplifiées et conduisent à des modèles à bases physiques tels les modèles de Green et Ampt (1911), de Philip (1957a), de Morel-Seytoux, (1978), de Haverkamp *et al.* (1990) ou de Corradini *et al.* (1994). Tous

ces modèles dérivés nécessitent la connaissance des propriétés hydrodynamiques du sol décrites par les lois  $K(\theta)$  et  $\Psi(\theta)$ . L'infiltration peut aussi être simulée par des modèles à réservoirs avec de simples relations mathématiques (e.g. Horton, 1933; Nash, 1957; Holtan, 1961 ; Diskin et Nazimov, 1995), ou par des relations empiriques (SCS, 1972).

### III.10.1.3 Domaines et limites d'application

De nombreux modèles existent pour simuler le mécanisme d'infiltration. Ces modèles diffèrent par leurs structures, les paramètres et la manière avec laquelle les conditions initiales sont prises en compte.

Dans le SHE, l'équation de Richards est résolue par un schéma numérique aux différences finies. Cependant, la plupart des modèles hydrologiques spatialisés traitent le problème de l'infiltration en simplifiant l'équation de Richards. Le modèle de Morel-Seytoux est une modification du modèle de Green et Ampt et est utilisé dans WEPP (Flanagan et Nearing, 1995), ANSWERS (Beasley et Huggins, 1982), CREAMS (Knisel, 1980), KINEROS (Woolhiser *et al.*, 1990b) et SWATC (Morel-Seytoux et Alhassoun, 1987). Le modèle de Philip est utilisé dans WATFLOOD (Kouwen, 2001) et HYSIM (Manley, 1982). LISEM (De Roo *et al.*, 1995) et MHYDAS (Moussa *et al.*, 2002) proposent aux utilisateurs le choix entre différents modèles mécanistes ou conceptuels. Le modèle de Horton est utilisé dans MARINE (Estupina-Borrell *et al.*, 2002) et SWMM (Huber et Dickinson, 1988). Finalement, le SCS est utilisé dans SWIM (Krysanova *et al.*, 2000), SWAT (Arnold *et al.*, 1995), CREAMS (Knisel, 1980) et HEC1 (Hydrologic Engineering Center, 1990).

### III.10.2 L'écoulement en milieu poreux saturé

Comme pour le milieu non-saturé, les écoulements en milieu saturé sont gouvernés par les deux lois de la conservation de la masse et de la conservation d'énergie qui conduisent à l'équation de Boussinesq (1904). Par ailleurs, les écoulements en milieu saturé sont aussi modélisés par d'autres approches plus simples comme celles basées sur la loi de Darcy (1856) ou les modèles à réservoirs.

#### III.10.2.1 La loi de Darcy

Suite à ses travaux sur les fontaines de la ville de Dijon, Henri Darcy réalise que le débit d'eau dans une colonne de sable est proportionnel à la différence de gradient hydraulique entre deux points. Il en déduit sa fameuse loi gouvernant le flux en milieu saturé,

$$Q = -KA \frac{\partial h}{\partial l} \quad (\text{III-33})$$

Avec

$A$  : aire [ $L^2$ ] ;

$h$  : charge hydraulique entre deux points [ $L$ ] ;

$K$  : conductivité hydraulique [ $LT^{-1}$ ] ;

$l$  : distance entre deux points [ $L$ ] ;

$Q$  : débit [ $LT^{-1}$ ].

Plus tard Buckingham (1907) étend la loi de Darcy aux écoulements en milieu non saturé. Telle qu'elle est formulée, cette loi ne s'applique qu'à un écoulement monodimensionnel mais on peut aussi la représenter en fonction des trois composantes  $x$ ,  $y$ , et  $z$  d'un flux tridimensionnel. On obtient,

$$q_x = -K \frac{\partial h}{\partial x}, q_y = -K \frac{\partial h}{\partial y}, q_z = -K \frac{\partial h}{\partial z} \quad (\text{III-34})$$

La loi de Darcy ne représente que le flux entre deux points. Pour représenter le flux à travers l'ensemble d'un domaine il faudrait intégrer la notion de conservation de masse et d'énergie à la loi de Darcy; on aboutirait alors à l'équation de Boussinesq (1904).

### III.10.2.2 L'équation de Boussinesq

L'équation de Boussinesq (1904) décrit le flux d'eau dans un milieu saturé non-confiné. La dérivation complète des équations est décrite en détail dans de nombreux ouvrages e.g. Bear (1979), Freeze et Cherry (1979), De Marsily (1986) et Fetter (1994). Boussinesq (1904) combine la loi de Darcy et la loi de conservation de masse pour aboutir à l'équation suivante,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\theta_s}{T} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{Q}{T} \quad (\text{III-35})$$

$Q$  : débit prélevé par unité de surface de la nappe [ $LT^{-1}$ ];  
 $T$  : transmissivité [ $L^2T^{-1}$ ].

Le calcul de  $Q$  fait intervenir le pompage direct, l'évapotranspiration, les échanges rivière-aquifère et les autres conditions aux limites.

### III.10.2.3 Domaines et limites d'application

L'équation de Boussinesq est une équation aux dérivées partielles du second ordre qui n'admet pas de solution exacte. Elle peut être résolue par des schémas numériques aux différences finies comme dans le cas de SHE et de SWATC. Dans TOPMODEL des simplifications sont apportées pour simuler l'écoulement dans la nappe. L'équation fondamentale est établie sur l'hypothèse d'une relation exponentielle entre l'écoulement saturé du bas de versant et la profondeur du niveau piézométrique.

On admet également que le niveau piézométrique est parallèle à la surface du sol de sorte que le gradient hydraulique local pour l'écoulement latéral saturé soit donné par l'angle local de la pente. Cependant, d'autres modèles comme HYDROTEL ou MHYDAS représentent la nappe par une série de réservoirs qui se déversent les uns dans les autres.

## 3.11 MODELISATION EN REGIME PERMANENT ET TRANSITOIRE DES ECOULEMENTS AU TRAVERS LES MILIEUX POREUX

Des modèles mathématiques sont de plus en plus souvent utilisés afin de simuler le comportement des nappes souterraines. Les principes physiques et les bases mathématiques relatifs aux écoulements souterrains, et à leur simulation numérique, sont repris de façon synthétiques. Il est indispensable d'utiliser des modèles physiquement significatifs afin

d'assurer la fiabilité des résultats prévisionnels. Les lois utilisées pour les écoulements et pour le transport de produit dissout, en milieu poreux, sont présentées et le rôle de différents paramètres intervenant dans ces lois est souligné. De même, sont discutés les différents types de données indispensables à une simulation, les diverses conditions aux frontières possibles et la validation du modèle via sa phase de calibration.

Dans le cas d'une étude quantitative, le rôle d'un modèle mathématique est d'intégrer toutes les données disponibles, d'approximer de façon logique et fiable les données manquantes et de fournir une réponse globale montrant toutes les tendances de la nappe en régime permanent ou transitoire.

La plupart des modèles hydrogéologiques utilisés aujourd'hui sont des modèles mathématiques déterministes. Ils sont basés sur les principes de la conservation de masse, de la force d'impulsion et de l'énergie et décrivent des relations de causes à effets. L'hypothèse sous-jacente consiste à considérer que si on a un bon niveau de compréhension des processus qui entraînent une réponse à une perturbation sur un système, on peut prévoir les réponses de ce système sous l'effet de n'importe quelles perturbations, même si l'intensité de la nouvelle perturbation n'entre pas dans la gamme de celles observées historiquement.

Ces modèles nécessitent généralement la résolution d'équations différentielles partielles. Des solutions exactes peuvent souvent être obtenues analytiquement, mais les modèles analytiques nécessitent que les paramètres et les limites du système soient fortement idéalisés. Certains modèles déterministes considèrent les propriétés des milieux poreux de manière empirique (essentiellement comme une boîte noire), cela ne permet donc pas de représenter des propriétés hydrauliques hétérogènes dans le modèle.

Or l'hétérogénéité, ou la variabilité des propriétés des sols ainsi que celles des aquifères, sont les caractéristiques de tout système géologique et l'ont sait maintenant qu'elles jouent un rôle clef dans les processus d'écoulement des eaux souterraines et du transport de masse. Il est donc bien souvent préférable d'utiliser des modèles à paramètres distribués, qui permettent une représentation plus réaliste de la distribution spatiale des propriétés du système. Les méthodes numériques donnent des solutions approchées de l'équation (ou équations) de base, à travers la discrétisation de l'espace et du temps. A l'intérieur du domaine discrétisé, les valeurs, variables, des propriétés internes, des conditions aux limites et des perturbations du système sont approximées.

Les modèles numériques déterministes, à paramètres distribués, peuvent assouplir les conditions trop idéalisées des modèles analytiques ou empiriques, et ils peuvent ainsi être plus réalistes et flexibles pour simuler les conditions réelles (à condition de savoir les appliquer correctement).

Dans la modélisation des écoulements en milieux poreux, on distingue deux méthodes d'approche. La première méthode est celle qui repose sur la modélisation dite « saturée-non

saturé » ou « complète » (Kacimov, 2000) qui considère l'ensemble du système constitué par la nappe et la zone non saturée entre la surface du sol et le toit de la nappe. Dans ce cas, le modèle est fondé sur l'équation dite de Richards (1931), et nécessite – outre la définition des conditions aux limites – la connaissance de deux fonctions décrivant les propriétés hydrodynamiques du sol (relation: succion-teneur en eau, relation: conductivité hydraulique-teneur en eau). La deuxième méthode est celle qui repose sur la modélisation dite « saturée » qui est obtenu à partir d'un certain nombre de simplifications dues aux problèmes de non linéarité de l'équation de Richards compte tenu des variations importantes que subissent la conductivité hydraulique et la succion en fonction de la teneur en eau hydraulique des sols non saturés. Pour cette raison, à part des cas bien précis, unidimensionnels très souvent et à conditions aux limites draconiennes (Philip, 1973 ; Youngs, 1960), rares ont été les solutions analytiques pour ces problèmes.

D'autres non linéarités proviennent non seulement de la variabilité des paramètres hydrodynamiques (perméabilité et teneur en eau), mais aussi de la nature des conditions aux limites inconnues (surface de suintement) du domaine de l'écoulement.

Tous ces problèmes de non linéarité, ajoutés à la difficulté parfois d'obtenir des données expérimentales fiables pour les courbes de perméabilité et les courbes de rétention d'eau du sol non saturé, ont motivé un certain nombre de simplifications débouchant sur cette deuxième méthode de modélisation qui repose sur l'approche mathématique, appelée « classique » des problèmes à surfaces libres ou à frontières libres.

La première étape de simplification consiste à ne considérer comme système que la nappe (on parle alors généralement de modélisation « saturée »), délimitée dans sa partie supérieure par sa surface libre dont la position est inconnue a priori. Dans ce système, la charge hydraulique totale vérifie l'équation dite de « LAPLACE » (Vauclin et al, 1976) et le principe de résolution en régime transitoire consiste à la déterminer en tout point en prenant en compte les mouvements d'une limite libre pour le toit de la nappe.

La encore, le problème peut être résolu dans les trois dimensions de l'espace. Tout comme l'équation de Richards, la résolution du problème nécessite l'utilisation d'outils numériques spécifiques en général fondés sur la méthode des différences finies ou des éléments finis et un maillage pouvant se déformer avec le domaine (Romano et al, 1999 ; Jarrin, 2001). Des solutions analytiques ont été élaborées par certains auteurs en régime permanent (Polubarinova-Kochina, 1962) dans des contextes particuliers.

Le deuxième niveau de simplification consiste à introduire l'hypothèse de (Dupuit-Forchheimer (DF)) : la pente de surface libre de la nappe est supposée faible et l'écoulement strictement horizontale dans le système (ie : les iso-potentiels sont verticales) ce qui peut se justifier dans le cas de la nappe ayant une extension latérale importante, et tant que le rayon de la courbure de la surface libre est grand (ie : l'angle qu'elle fait avec l'horizontale est petit). Cette hypothèse permet une simplification importante de la résolution de l'équation de

LAPLACE, aboutissant dans un certain nombre de cas à des solutions analytiques ou numériques simples.

Sous ce corps d'hypothèses, l'équation non linéaire décrivant la surface libre devient l'équation décrivant l'ensemble du système. Elle est alors appelée équation de « Boussinesq » (Young, 1999).

Le dernier niveau de simplification consiste à linéariser l'équation de Boussinesq en faisant l'hypothèse que les fluctuations du toit de la nappe sont faibles par rapport à l'épaisseur de celle-ci. On aboutit alors à une équation linéaire de diffusion simple, largement utilisée par les hydrogéologues et connue sous le nom « d'équation de diffusivité » (De Marsily, 1981).

Les modèles développés à partir de l'hypothèse DF sont largement employés dans les calculs de dimensionnement d'ouvrages hydrauliques, en particulier en raison d'un traitement numérique beaucoup plus simple que dans les approches de type « Richards ».

Néanmoins, en ignorant la composante verticale de l'écoulement, l'hypothèse DF engendre des erreurs qui peuvent être significatives dans la détermination des hauteurs des nappes, en particulier proches du bord du fossé ou les gradients hydrauliques sont les plus élevés. Ces erreurs peuvent avoir origines,

- la non prise en compte du phénomène de suintement ;
- la non prise en compte des écoulements verticaux sous le fond du fossé si l'imperméable est profond ;
- la non prise en compte des composantes verticales dans la zone où elles deviennent non négligeables.

### **III.12 APPROCHE MATHEMATIQUE**

Alors que l'approche basée sur l'équation de Richards permet de décrire le front de saturation ou la surface libre, à travers la continuité des transferts hydrauliques entre zones saturées et non saturées, la méthode analytique ou l'approche mathématique limite la description de l'écoulement à la zone saturée en supposant une variation discontinue de certaines grandeurs physiques (Todd, 1957 ; Bouwer, 1963 ; Dicker, et Servian, 1965).

On suppose que la perméabilité chute brutalement dès que l'on dépasse le front de saturation. Ce faisant, on néglige physiquement l'écoulement dans la frange capillaire, ce qui semble se présenter lorsque la perméabilité relative du sol considéré varie rapidement en fonction de la succion comparativement à l'unité (perméabilité relative à la saturation).

Il en découle de cette approximation que la surface libre est non seulement l'isobare où règne la pression atmosphérique, mais aussi la limite supérieure du domaine de l'écoulement. Cette idéalisation de l'écoulement non saturé comportant une zone saturée est connue des mathématiciens sous le nom de « problème à surface libre » ou « problème à frontière libre ».

### III.13 CAS DU REGIME TRANSITOIRE

L'approche mathématique de l'écoulement à surface libre transitoire revient à écrire trois équations : une équation régissant l'évolution de la charge hydraulique dans le domaine saturé, une équation définissant la surface libre et enfin, une équation décrivant la cinématique du mouvement de la surface libre.

Dans le domaine saturé, on peut obtenir une forme générale de l'équation qui décrit l'écoulement en régime transitoire d'un écoulement incompressible dans un aquifère homogène, isotrope, en combinant la loi de Darcy et l'équation de continuité, ainsi on aura une équation en fonction du potentiel de pression,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_s \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_s \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{III-36})$$

Ainsi, pour un milieu homogène et isotrope cette équation est réduite à l'équation de LAPLACE,

$$\left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (\text{III-37})$$

Cette équation ne suffit pas pour déterminer la charge hydraulique dans tout le domaine saturé, puisque l'une des frontières du problème à surface libre est une limite inconnue du domaine de l'écoulement. Deux équations supplémentaires sont par conséquent nécessaires. Celles-ci sont données par les propriétés de la surface libre.

Soit  $Z_L(t)$  la cote de la surface libre. Pour tout point  $M$  de la surface libre, on a la relation (la surface libre étant une surface isobarique),

$$Z_M = Z_L [x_M(t), y_M(t), t] \quad (\text{III-38})$$

Comme la surface libre est une surface matérielle, on peut alors introduire la dérivée particulaire et écrire,

$$\frac{dZ_M}{dt} = \frac{\partial Z_L}{\partial t} + \frac{dx_M}{dt} \frac{\partial Z_L}{\partial x} + \frac{dy_M}{dt} \frac{\partial Z_L}{\partial y} \quad (\text{III-39})$$

Or, dans l'hypothèse d'incompressibilité de l'eau et de rigidité du squelette, la vitesse du fluide est liée à la vitesse cinématique du point courant  $M$  de la surface libre par les relations (sans restreindre la généralité, on suppose dans la suite que le milieu poreux est isotrope),

$$\begin{aligned} V_x &= -k_s \frac{\partial h}{\partial x} = \emptyset \frac{dx_M}{dt} \\ V_y &= -k_s \frac{\partial h}{\partial y} = \emptyset \frac{dy_M}{dt} \end{aligned} \quad (\text{III-40})$$

$$V_Z = - k_s \frac{\partial h}{\partial z} = \phi \frac{dz_M}{dt}$$

Ou  $\phi$  est la porosité ou la teneur en eau volumique à saturation et  $k_s$  la perméabilité à saturation.

Les équations (III-38), (III-39) et (III-40) permettent d'écrire l'équation dite « équation du mouvement de la surface libre »

$$\phi \frac{dz_M}{dt} = k_s \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial z_L}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial z_L}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} \right] \quad (III-41)$$

Il convient de rappeler qu'il existe une autre façon d'établir la relation (III-41), basée sur le calcul des volumes d'eau écoulés entre temps  $t$  et  $t + \Delta t$ , à travers la variation de la cote de la surface libre entre ces deux instants.

L'approche mathématique du problème de surface libre transitoire consiste à résoudre les équations (III-37) et (III-41) complétées par les conditions initiales et aux limites sur les autres frontières fixes du domaine de l'écoulement. On peut remarquer que, dans cette approche, la donnée des deux paramètres : la porosité et le tenseur des perméabilités à saturation, suffit pour décrire complètement à surface libre non stationnaire.

La figure III.12 présente cette description mathématique du problème de surface libre dans un cas classique, écoulement bidimensionnel d'une nappe d'eau à surface libre à travers un barrage poreux, isotrope et homogène.

Il est cependant relativement difficile de résoudre par cette approche les problèmes pratiques aussi bien du point de vue analytique que numérique : comme illustré dans la figure III.2, la charge hydraulique dépend des variations de la cote de la surface libre (problème topographique de la surface du sol) et la cote de celle-ci dépend des gradients de la charge de cette surface.

La recherche de solutions analytique se heurte à ce couplage de la charge hydraulique et de la cote de la surface libre. Des développements fondés sur la théorie des petites perturbations ont néanmoins rendu possible des solutions analytiques pour des cas bien précis (Dagan, 1960).

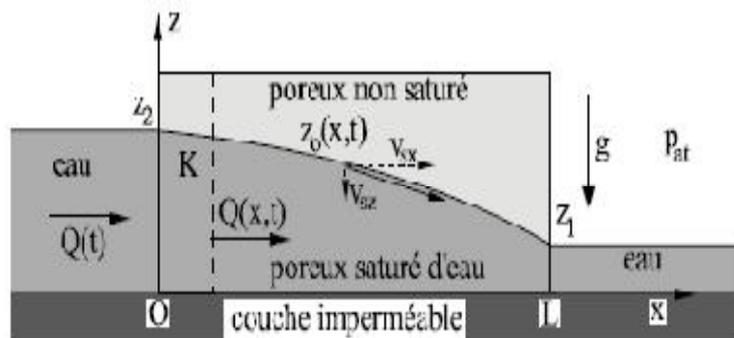
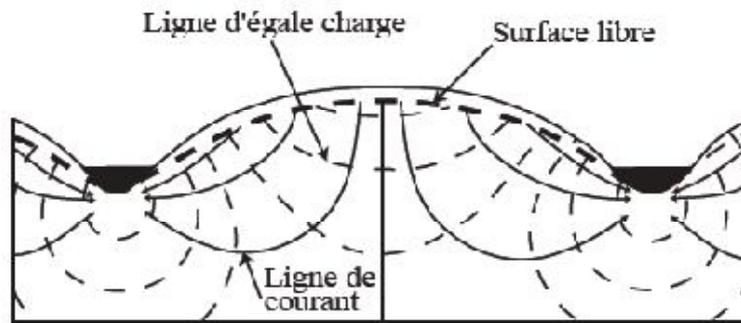


Figure III.12 Application de l'approche mathématique à un écoulement à surface libre



**Figure III.13** Réseau d'écoulement en coupe d'une nappe libre en différentes cote (Hubbert, 1940)

La figure III.13 montre un réseau d'écoulement dans une nappe libre affectée par l'effet de la topographie de la surface du sol. On y voit les zones suivantes : la zone d'alimentation avec un gradient hydraulique vers le bas dans les hauts topographiques, la zone de transition avec un écoulement latéral, et la zone d'émergence avec un gradient hydraulique vers le haut dans les bas topographiques.

Il est à noter que le formalisme mathématique du problème à surface libre [relations (III-37) et (III-41)] a surtout servi de base aux modèles analogiques où l'on peut établir des similitudes entre l'écoulement à surface libre et, par exemple, des modèles rhéoélectriques (cuve rhéoélectriques et papier conducteur) ou l'écoulement visqueux entre deux plaques rapprochées (analogie visqueuse du type Hele-Shaw). Ces similitudes ont été largement appliquées à des cas pratiques de calculs de barrages en terre (Schneebeli, 1987).

Cependant, il est possible, sous certaines hypothèses, de ramener la résolution des équations (III-37) et (III-41) à celle d'une unique équation aux dérivées partielles.

### III.14 APPROXIMATION DE DUPUIT

Dans le cas de modélisation à grande échelle ou de modélisation stochastique Monte Carlo qui demande beaucoup de ressources, l'utilisation de l'approximation de Dupuit, lorsqu'elle est applicable est une bonne alternative. L'approximation de Dupuit revient à intégrer verticalement les équations d'écoulement (ou orthogonalement aux épontes de l'aquifère). L'hypothèse principale est que les écoulements sont considérés quasi-horizontaux et que pour de petites variations dans la pente de la surface libre, la charge hydraulique est indépendante de l'élévation, cela suppose les lignes équipotentiels et les lignes de courant sont respectivement verticales et horizontales. Cela revient à dire que l'écoulement est horizontal, donc la composante verticale de la vitesse d'écoulement est nulle et que la courbure de la surface libre est négligée. Cette situation se présente fréquemment dans les écoulements de nappes phréatiques peu profondes ayant un substratum imperméable et sensiblement horizontal. Une seconde hypothèse stipule que le gradient provoquant l'écoulement est égal à la pente de la surface libre.

### III.14.1 Hypothèses de Dupuit

Les hypothèses de l'approximation de Dupuit, sont assez bien satisfaites loin des exutoires (sources, rivières, surfaces de suintement, etc.) ou des lignes de crête (plans de flux nul). Elles se justifient, d'une part par le fait que les nappes étudiées ont une extension horizontale de la dizaine à la centaine de kilomètres, bien supérieure à leur extension verticale (de l'ordre de la dizaine à la centaine de mètres), et d'autre part par le fait que les aquifères sont une superposition de couches dont le pendage est faible, de l'ordre de 1‰ à quelques 1%. Tout concourt donc pour laisser un rôle secondaire à la coordonnée verticale de l'espace et remplacer le problème 3D par un problème 2D (figure III-14). Il en découle alors, de la première hypothèse qu'il n'y a pas de gradient dans la direction verticale. Donc, sur une verticale, la charge hydraulique est constante et égale, par conséquent, à la cote de la surface libre,

$$h(x, y, z, t) = Z_L(x, y, t) \tag{III-42}$$

Puisque les lignes de courant sont horizontales, le gradient hydraulique  $i$  est égal à  $tg\theta$  (pente de la surface libre), comme spécifié dans la seconde hypothèse. Cela revient donc à utiliser  $tg\theta$  au lieu de  $sin\theta$ .

La validité de ces hypothèses est directement liée à la valeur de  $\theta$ . Bear (1972) a démontré que l'erreur due à la deuxième hypothèse est petite lorsque  $i^2 \ll 1$  pour un milieu isotrope. Dans le cas d'un milieu anisotrope, cette condition s'écrit :  $(k_x/k_z) i^2 \ll 1$ , ou  $k_x$  et  $k_z$  sont les conductivités hydrauliques dans les directions  $x$  et  $z$  respectivement.

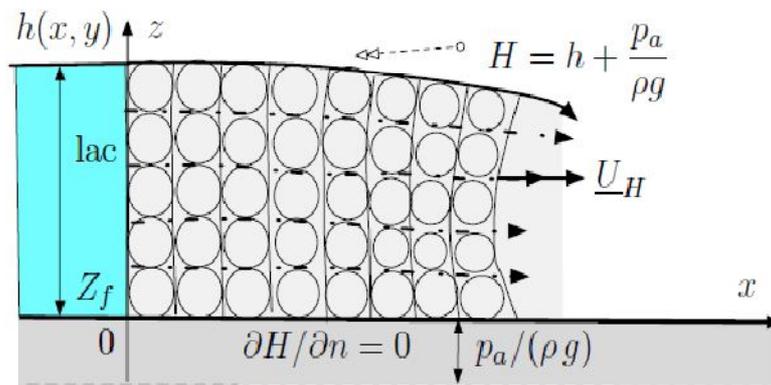


Figure III.14 Approximation de Dupuit valide pour des iso-H presque verticaux

On remarque que l'équation (III-42) qui, normalement, n'est valable que sur la surface libre, garde sa validité en tout point de l'écoulement. Il en résulte que la charge hydraulique dans tout le domaine saturé se trouve complètement déterminé par la connaissance à tout

instant de la cote de la surface libre. En effet, intégrons entre une position de référence (nulle par exemple) et la cote actuelle de la surface libre  $Z_L$ , l'équation (III-37). Il vient dans ce cas,

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \int_0^{Z_L} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dz = - \int_0^{Z_L} \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] dz = -Z_L \left[ \frac{\partial^2 Z_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_L}{\partial y^2} \right] \quad (\text{III-43})$$

Cette équation permet, par substitution dans l'équation (III-41) d'obtenir,

$$\emptyset \frac{\partial Z}{\partial t} = k_s \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( Z_L \frac{\partial Z_L}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Z_L \frac{\partial Z_L}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{III-44})$$

L'équation (III-44) n'est plus seulement l'équation du mouvement de la surface libre, mais bien l'équation aux dérivées partielles décrivant la totalité de l'écoulement. Il est cependant à remarquer que l'équation (III-44), tout comme celle de Dupuit, est non linéaire.

Ainsi, pour parer au problème de non linéarité de ces deux équations, on est amené souvent à opérer une linéarisation conduisant à l'équation des écoulements résultante appelée équation de Boussinesq des écoulements plans. La résolution de cette équation 2D peut se faire sur de très larges systèmes et ne demande comme principales entrées que la distribution verticalement intégrée des conductivités et porosités efficaces (pour les nappes libres), obtenues généralement lors des essais de pompage dans les nappes.

### III.14.2 Validations et limitations (exemple d'application)

Pour bien cerner la problématique des écoulements à surface libre en sols saturés et, avoir une bonne compréhension physique à travers leur modélisation par application de l'approximation de Dupuit, et dans l'objectif d'avoir une idée sur sa validité ainsi que ces limites on est amené à traiter dans un cas pratique et réel un aquifère phréatique coulant d'un lac vers un fossé prismatique (figure III.15).

Nous supposons que l'interface imperméable du fond est un plan horizontal et nous choisissons les axes de sorte que  $Z_f = 0$  soit la valeur constante de son altitude.

On note  $Q$  le débit linéique du fossé dans la direction  $y$ . Nous supposons que le lac est à la charge  $H_0$  et nous notons  $x_0$  sa distance au fossé. On note  $h_0$  la distance entre le plan imperméable et la surface libre du lac. Nous avons donc :  $H_0 = h_0 + \frac{P_a}{\rho g}$ , puisque  $Z_f = 0$ .

En comparant avec les solutions des équations exactes, on peut montrer que l'approximation de Dupuit est valide partout excepté près du fossé où la vitesse  $U$  ne peut plus être considérée comme horizontale.

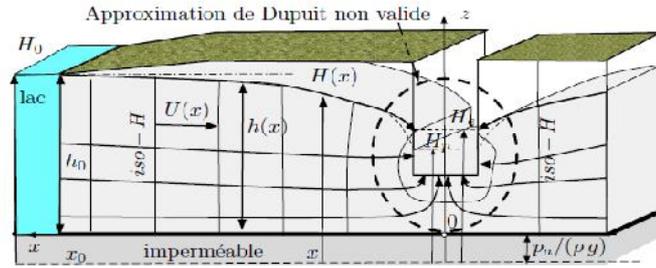


Figure III.15 Ecoulement vers un fossé prismatique dans un aquifère phréatique

Pour les points où l'hypothèse de Dupuit est valide, la charge est égale à :  $H_0 = h_0 + \frac{P_a}{\rho g}$  et nous pouvons écrire,

$$\frac{d}{dx} [U(x)h(x)] = 0 \quad , \quad U(x) = -K_p \frac{dH}{dx}(x) = -K_p \frac{dh}{dx}(x)$$

Qui peut être intégré en,

$$h_0^2 - h^2(x) = \frac{2q}{K_p}(x_0 - x)$$

On en déduit alors la charge  $H_p$  au fossé obtenue dans le cadre de l'approximation de Dupuit. Bien que cette approximation ne soit pas valide près du puits, cette valeur  $H_p$  peut être utilisée pour déterminer le niveau d'eau dans le fossé en disant que  $Z = h_p = H_p - \frac{P_a}{\rho g}$  est l'altitude de la surface libre. La solution obtenue sans l'approximation de Dupuit met en évidence l'existence d'une "face de résurgence" de sorte que la surface de la nappe ne coïncide pas avec la surface de l'eau du fossé.

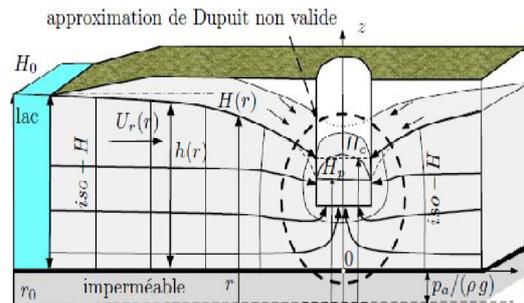


Figure III.16 Vitesse  $U = U_r e_r$  d'un aquifère autour d'un puits vertical et cylindrique

Si l'on remplace maintenant le fossé par un puits vertical et cylindrique (figure III-16) dans lequel un débit  $Q$  est pompé, la vitesse radiale  $U_r(r)$  et la charge  $H(r)$  ne dépendent que du rayon  $r$ . Pour les points où l'approximation de Dupuit est valide, on a  $H = h$  et les équations s'écrivent,

$$\frac{d}{dr} [rU_r(r)h(r)] = 0 \quad , \quad U_r(r) = -K_p \frac{dH}{dr}(r) = -K_p \frac{dh}{dr}(r)$$

En intégrant ces équations, on obtient,

$$h_0^2 - h^2(r) = \frac{Q}{\pi K_p} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

L'équation (III-35) de Boussinesq qui représente un écoulement dans un sol saturé utilise l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer (1863) d'un écoulement essentiellement horizontal pour lequel la valeur de la composante verticale du gradient hydraulique est négligée. Cette hypothèse est valide pour des nappes phréatiques ayant de faibles pentes.

Dans le cas des écoulements unidimensionnels en régime transitoire, on est amené à linéariser l'équation de Dupuit-Forchheimer en supposant que les variations spatiales de la cote de la surface libre sont faibles par rapport à une valeur moyenne « $Z_L$ ». Dans ce cas on écrit,

$$Z_L = Z_l + \bar{Z}_L \quad (\text{III-45})$$

Dans l'exemple de la nappe phréatique évoqué ci-dessus,  $Z_L$  peut représenter l'épaisseur de la nappe. Les équations (III-44) et (III-45) permettent d'obtenir l'équation dite «de chaleur»,

$$\frac{\partial Z_L}{\partial t} = \xi \Delta Z_L \quad (\text{III-46})$$

Ou  $\xi = k_s \frac{Z_L}{\phi}$

L'équation (III-45) permet, moyennant des conditions aux limites et initiales écrites par rapport à la surface libre, d'étendre les travaux effectués sur l'équation de la chaleur aux problèmes de surface libre. Mais les développements théoriques les plus importants semblent concerner plus particulièrement l'écoulement à surface libre en régime permanent.

Lorsque cette équation est utilisée pour résoudre un problème d'écoulement permanent bidimensionnel dans un sol isotrope, elle se résume à l'équation de LAPLACE,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III-47})$$

### III.14.3 Domaines et limites d'application

L'équation de Boussinesq, ne permet pas de tenir compte de la zone partiellement saturée généralement située près de la surface du sol, ce qui présente un désavantage important lorsque des phénomènes tels que le transport de contaminants au niveau de la zone de marnage de la nappe phréatique veulent être étudiés. La prise en compte de la zone partiellement saturée complexifie la modélisation numérique de l'écoulement souterrain car la conductivité hydraulique varie dans cette zone en fonction de la teneur en eau et de la charge piézométrique, ce qui rend le problème très non-linéaire. Les relations entre la conductivité hydraulique et la charge piézométrique, et celle entre la teneur en eau et la charge piézométrique, sont complexes à établir, étant donné qu'il s'agit d'hystérésis, n'ayant pas le même comportement lors du mouillage et du séchage d'un sol. La plupart du temps, les

modèles d'infiltration utilisent des relations empiriques ne permettant pas de tenir compte de cette hystérésis, telles que celles développées par Van-Genuchten (1981) et Philip (1957). Un sol sec est généralement très peu perméable et la conductivité hydraulique maximale est atteinte lorsque le sol devient complètement saturé, la forme des relations développées permet de représenter la transition entre ces cas limites.

L'équation de Boussinesq est aussi, une équation aux dérivées partielles du second ordre qui n'admet pas de solution exacte. Elle peut être résolue par des schémas numériques aux différences finies comme dans le cas de FLAC, SHE et de SWATCH. Dans le schéma numérique, TOPMODEL des simplifications sont apportées pour simuler l'écoulement dans la nappe.

L'équation fondamentale est établie sur l'hypothèse d'une relation exponentielle entre l'écoulement saturé du bas de versant et la profondeur du niveau piézométrique. On admet également que le niveau piézométrique est parallèle à la surface du sol de sorte que le gradient hydraulique local pour l'écoulement latéral saturé soit donné par l'angle local de la pente. Cependant, d'autres modèles comme HYDROTEL ou MHYDAS représentent la nappe par une série de réservoirs qui se déversent les uns dans les autres.

### III.15 Cas du régime permanent

Lorsque la cote de la surface ne varie pas dans le temps, le mouvement de celle-ci est stationnaire alors, l'écoulement est dit **permanent**. Ce problème de surface libre stationnaire est sans doute le plus étudié dans les aspects théoriques d'existence et d'unicité de la solution.

Dans ce cas, la frontière correspondant à l'équi-pression nulle (surface libre) est encore une frontière à flux nul. Cela veut dire, du fait de la permanence de cette condition, que c'est une ligne de courant. Cette double condition de la charge et du flux sur une même frontière ne constitue pas une surdétermination mathématique puisque cette frontière est une inconnue du problème.

Ce problème mathématique fut et demeure l'objet de développements théoriques importants. Les approches les plus classiques concernent l'utilisation du potentiel complexe et la théorie des transformations conformes, qui s'appliquent aux écoulements plans stationnaires et isotropes. Elle suppose en générale une idéalisation de la géométrie (carré, rectangle, trapèze, etc.) au sein de laquelle on écrit l'équation de LAPLACE. Ces approches ont été appliquées aux écoulements dans les barrages en terre à géométrie simple, ou des fonctions complexes ont été mises au point pour approximer la forme et la localisation de la surface libre dans diverses situations (substratum perméable ou non, présence de drain ou non, etc.) (Muskat, 1946 ; Casagrande, 1937 ; Mallet et Pacquant, 1951 ; Schneebeli, 1955 ; Guevel, 1960 ; Bowzin, 1964). Le lecteur désireux de plus de détail sur les applications de cette théorie pourra consulter un des ouvrages de base, par exemple « Hydraulique souterraine » (Schneebeli, 1987).

En régime permanent, un système hydraulique est en équilibre et il n'ya pas de variation de charge hydraulique dans le temps, le terme de droite des équations d'écoulement devient nul et la nouvelle équation dite de LAPLACE s'exprime,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III-48})$$

Cette équation en trois dimensions est générale, en autant que l'aquifère considéré soit homogène et isotrope, mais constitue une simplification pour les nappes libres.

### III.15.1 Modèle de Dupuits (solution pour le régime permanent)

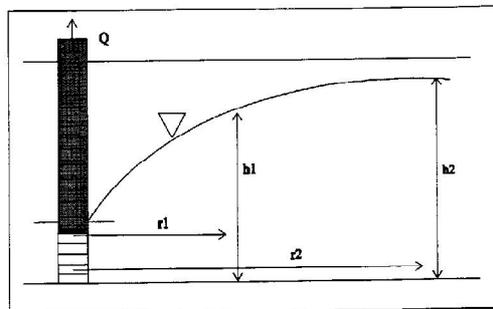
Le modèle de Dupuits en régime permanent (figure III.17) est basé sur l'hypothèse que l'écoulement est horizontal et se dirige radialement vers le puits. De plus, les conditions suivantes sont nécessaires à l'élaboration du modèle :

- l'aquifère est isotrope ;
- l'écoulement est en régime permanent ;

Dans ces conditions, le débit d'un puits pompant dans un aquifère libre est donné par l'équation suivante,

$$Q = \pi K \frac{h_2^2 - h_1^2}{\ln(r_2/r_1)} \quad (\text{III-49})$$

Il est bon de noter que les conditions telles que celle énumérées plus haut ne se retrouvent pas généralement sur le terrain mais que l'équation est utilisée tout de même comme approximation pratique.



**Figure III.17** Paramètres pour la solution de Dupuits pour une nappe libre en régime permanent

### III.16 ÉQUATION DE TRANSPORT DES POLLUANTS EN MILIEUX POREUX

Les processus de transport dans les sols, ont lieu principalement dans la phase liquide, par le réseau poreux partiellement rempli d'eau. En effet, quand les polluants entrent dans le sol, la plupart d'entre eux sont transportés par l'eau avec un mouvement convectif. Cependant, le transport peut également être affecté par d'autres processus de natures chimique, biologique et physique.

Nous pouvons trouver dans les travaux de Jury et Flühler (1992), Vauclin (1994), Feyen et al. (1998), des synthèses sur les divers modèles existants dans le domaine du transport de solutés dans les milieux poreux. Ces modèles peuvent être regroupés selon quatre mécanismes basés sur des lois physiques (van Dam et al., 2004) :

- « Stochastic-convective model » (SCM). Le volume de sol est considéré comme des « tubes » d'écoulement indépendants les uns des autres. Les vitesses dans les tubes sont réparties selon une fonction considérée souvent comme log-normale (Jury et Roth, 1990).
- « Convection-dispersion équation » (CDE). Suppose un flux uniforme où le soluté se propage par un flux dispersif analogue à la diffusion, obéissant à la loi de Fick.
- « Fractional advection-dispersion équation » (FADE). Ce modèle est intermédiaire entre SCM et CDE. Son développement est lié au non adéquation de la CDE à représenter le transport de solutés à l'échelle du terrain.
- « Continuous-time random walk » (CTRW), (Berkowitz et al., 2000). Décrit le mouvement du soluté par un déplacement aléatoire dans le temps.

Parmi ces modèles, nous avons choisi, dans ce qui suit, d'utiliser le modèle mécaniste déterministe de convection-dispersion-réactions chimiques. Parce que c'est un des modèles les plus utilisés.

Et parce qu'il s'appuie sur une description déterministe des processus modélisés et qu'il requiert la détermination des valeurs de paramètres ou des conditions initiales. Il est dit mécaniste, car il est fondé sur des équations provenant des lois de la physique,

$$\frac{\partial \theta C_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_d N_i}{\partial t} - \vec{\nabla} \{ \theta D_{1,i} \vec{\nabla} C_i + C_i \vec{q} \} - \sum_j R_{i,j} (C_i, N_i) = 0 \quad (\text{III-50})$$

Où  $N_i$  et  $C_i$  sont les concentrations de l'élément ( $i$ ) dans la phase solide et liquide respectivement et  $R_{i,j}$  est source interne et/ou puits.

Le premier terme à droite dans l'équation (III-50) représente la variation de concentration causée par la dispersion hydrodynamique. Cette expression est analogue à celle de la loi de Fick qui décrit les flux de diffusion. Ce modèle de Fick suppose que le gradient de concentration est la force motrice et que le flux dispersif va des concentrations les plus fortes vers les plus faibles. Cependant, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée dans les observations et fait encore l'objet de recherches et d'études. Le deuxième terme représente le transport par advection et décrit les déplacements de solutés en considérant une vitesse moyenne d'écoulement souterrain. Le troisième terme englobe toutes les réactions chimiques, géochimiques et biologiques qui engendrent un transfert de masse entre le liquide et les phases solides ou les passages entre différentes formes chimiques dissoutes. La diminution des concentrations des composés chimiques inorganiques peut s'expliquer par des phénomènes d'adsorption/désorption, précipitation/dissolution, ou des phénomènes

d'oxydoréduction ; les composés organiques eux, peuvent être adsorbés ou décomposés au cours de processus microbiologiques. Il y a eu un progrès considérable en matière de modélisation de ces processus; cependant, un bilan complet de ces processus et de leur représentation dans les modèles de transport va au delà de l'objectif de ce chapitre.

En général, dans l'équation de convection-dispersion-réactions chimiques, les principaux mécanismes de transport pour un soluté sont la convection et la dispersion hydrodynamique qui englobent la diffusion moléculaire et la dispersion mécanique.

#### a. Convection

La convection représente l'entraînement des éléments en solution dans le mouvement du fluide qui se déplace. Le soluté est transporté par le mouvement général de l'eau, à la vitesse définie par la loi de Darcy.

Le principe de conservation de la masse permet d'écrire :

$$-\vec{\nabla}(C_i \vec{q}) = \frac{\partial(C_i \theta)}{\partial t} \quad (\text{III-51})$$

Où :  $C$  est la concentration [ $\text{ML}^{-3}$ ],  $q$  la vitesse de Darcy [ $\text{LT}^{-1}$ ],  $\theta$  la teneur en eau volumique du sol [ $\text{L}^3\text{L}^{-3}$ ].

#### b. Dispersion hydrodynamique

La notion de dispersion hydrodynamique a été introduite par Bear (1972). La dispersion hydrodynamique est un phénomène par lequel une substance migre dans le sol. En se déplaçant, l'espèce chimique se dilue (effet du mélange) et s'étale pour occuper un volume plus grand avec une concentration corrélativement décroissante (effet de dilution). Cette propagation est provoquée, d'une part, par le déplacement des molécules sous l'effet de la diffusion moléculaire et, d'autre part, par la dispersion cinématique. La dispersion hydrodynamique est fonction de la nature du sol et des caractéristiques du transport de soluté.

#### c. Diffusion

La diffusion est un phénomène basé sur le mouvement des molécules qui se produit en présence d'un gradient de concentration aboutissant à un net mouvement des constituants vers les régions de plus faible concentration. La diffusion ne dépend pas du mouvement de l'ensemble de fluide et est gouvernée par les activités cinétiques des ions et molécules appelées mouvement Brownien. Son influence ne devient importante que dans les cas d'écoulements lents.

$$-\vec{\nabla}(\theta D_m \vec{\nabla}(C_i)) = \frac{\partial(C_i \theta)}{\partial t} \quad (\text{III-52})$$

Où :  $D_m$  est le coefficient de diffusion moléculaire dans le milieu poreux ( $\text{L}^2\text{T}^{-1}$ ).

Normalement ce coefficient est plus faible dans les matériaux avec des pores plus petits. Dans un milieu poreux, la diffusion dépend de la tortuosité qui traduit un effet de résistance à la diffusion provoqué par la distorsion des chenaux entre les pores du milieu. Dans les écoulements non saturés, la tortuosité augmente quand la teneur en eau diminue, dans ce cas le coefficient  $D_m$  est encore plus faible.

Le processus de la diffusion est un processus de transport relativement lent. Son effet est alors masqué en présence de mouvements convectifs importants. Néanmoins, la diffusion à l'échelle du temps géologique peut avoir un impact très important.

#### d. Dispersion mécanique

Parallèlement au transport général des molécules en solution par convection, se rajoute un phénomène de dispersion du soluté dans l'eau. Cette dispersion est due à l'hétérogénéité de la distribution des vitesses dans un milieu poreux, elle-même soumise à trois phénomènes : (i) le profil de vitesse dans un capillaire est parabolique (donc la vitesse est plus rapide pour les molécules situées au centre des pores), (ii) la dimension des pores est variable (donc la vitesse est plus rapide pour les molécules transportées par les grands pores), (iii) les lignes de courant varient par rapport à la direction principale de l'écoulement (donc plus rapide pour les molécules qui s'éloignent le moins de cette direction principale).

$$-\vec{\nabla}(\theta D_{ij} \vec{\nabla}(C_i)) = \frac{\partial(C_i \theta)}{\partial t} \quad \text{(III-53)}$$

Où,  $D_{ij}$  est le tenseur de dispersion (c'est un tenseur symétrique de deuxième ordre, et ses directions principales sont la direction du vecteur vitesse d'écoulement, les deux autres directions sont perpendiculaires à la première et entre elles).

Dans la formulation conventionnelle de l'équation de transport de masse (III-53), on définit le coefficient de dispersion hydrodynamique comme la somme de la dispersion mécanique et de la diffusion moléculaire (Bear 1997). La dispersion mécanique est fonction, à la fois des propriétés intrinsèques du milieu poreux (comme des conductivités hydrauliques et des porosités hétérogènes), mais aussi de l'écoulement du fluide. La diffusion moléculaire dans un milieu poreux sera différente de celle avec de l'eau libre du fait du rôle de la porosité et de la tortuosité. Ces relations se présentent généralement pour le cas bidimensionnel sous la forme suivante,

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,i} \frac{q_x^2}{|\vec{q}|} + \alpha_{2,i} \frac{q_z^2}{|\vec{q}|} + D_{m,i} & (\alpha_{1,i} - \alpha_{2,i}) \frac{q_x q_z}{|\vec{q}|} \\ (\alpha_{1,i} - \alpha_{2,i}) \frac{q_x q_z}{|\vec{q}|} & \alpha_{1,i} \frac{q_x^2}{|\vec{q}|} + \alpha_{2,i} \frac{q_z^2}{|\vec{q}|} + D_{m,i} \end{bmatrix} \quad \text{(III-54)}$$

Où,  $\alpha_{1,2}$  est la dispersivité dans le milieu poreux (un tenseur d'ordre 4),  $q_x$  et  $q_y$  les composantes de la vitesse de darcy,  $D_{m,i}$  le coefficient de diffusion moléculaire et  $|\vec{q}|$  la norme du vecteur vitesse (Bear 1979; Domunico et Schwartz 1998; Scheidegger 1961).

La dispersivité dans un milieu poreux isotrope peut être caractérisée par deux constantes. Il s'agit de la dispersivité longitudinale,  $\alpha_1$ , et de la dispersivité transversale,  $\alpha_2$ . La plupart des applications de modèles de transport à des problèmes hydrogéologiques qui ont été établies jusqu'à maintenant se sont basées sur cette formulation conventionnelle.

Bien que la théorie conventionnelle prétende que  $\alpha_1$ , est généralement une propriété intrinsèque de l'aquifère, il est démontré dans la pratique qu'elle dépend et est proportionnelle à l'échelle de mesure. La plupart des valeurs de  $\alpha_1$  indiquées se situent dans l'intervalle de 0.01 à 1.0 fois l'échelle de mesure, bien que le rapport  $\alpha_1$  à l'échelle de mesure ait tendance à décroître avec des échelles plus grandes (Anderson 1984; Gelhar et al. 1992). Dans le cas où la dépendance des dispersivités à la saturation est négligeable, on aura la relation suivante :

$$\alpha_{2,i} = 0.1\alpha_{1,i}$$

### **III.17 PRISE EN COMPTE DU PHENOMENE DE Suintement DANS LA DETERMINATION DE LA POSITION DE LA SURFACE LIBRE DE LA NAPPE**

L'existence de surfaces de suintement à l'interface entre des nappes libres et le réseau de surface (ou des faces aval de barrage) est largement évoquée dans la littérature (Muskat, 1937 ; Schnebelli, 1966 ; Boufadel et al., 1999 ; etc...).

La détermination de la hauteur des surfaces de suintement peut par exemple être justifiée pour évaluer la stabilité de certaines structures, et en particulier des barrages en terre, calculer les débits transitant dans des nappes libres drainées (Muskat, 1937) ou encore estimer les hauteurs de nappe dans un système drainé (Youngs, 1990).

#### **III.17.1 L'hypothèse de DF et le phénomène de suintement**

Les approches reposant sur l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer sont fondées sur deux principes : (i) les écoulements dans la zone non-saturée ne sont pris en compte que de manière simplifiée ; (ii) la composante verticale des écoulements dans la nappe est négligée.

L'existence de surfaces de suintement est liée aux pertes de charges verticales dans le système hydraulique, et à la distribution des lignes de courant au voisinage de la condition à la limite aval. L'extension verticale du suintement dépend de la géométrie du système (dimension latérale), des propriétés hydrodynamiques du sol et du flux transitant dans le système.

Vis-à-vis de la condition aval, la théorie de DF ignore le problème des surfaces de suintement. La surface libre de la nappe est connectée au niveau de l'eau libre dans le fossé qui tient lieu de drain. Historiquement, la majorité des travaux reposant sur l'hypothèse de DF se sont intéressés à la prédiction de débits transitant par la nappe, et/ou au calcul de l'élévation maximale de la nappe. En revanche, peu de travaux se sont penchés sur la prédiction de la hauteur de la nappe pour tout point (x) et sur la caractérisation de l'erreur liée

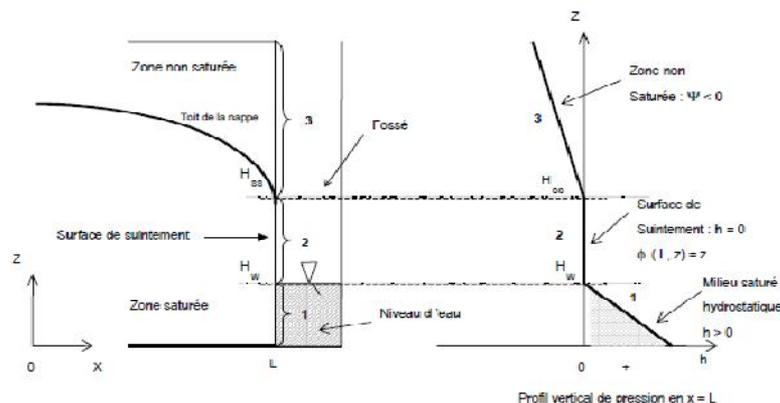
à l'hypothèse de DF, en particulier la non prise en compte de la surface de suintement (Youngs, 1965, 1990).

La question est de savoir si le fait d'ignorer l'existence d'une surface de suintement introduit une erreur importante dans ce calcul du débit transitant par la nappe. Différents auteurs se sont fait très tôt l'écho de cette question et Muskat (1946) synthétise les différentes approches en régime permanent en concluant que le calcul du débit transitant à travers une nappe, en ignorant le problème du suintement et en supposant l'hypothèse de DF valide, est exact, mais de manière qu'il qualifie de « fortuite » et « surprenante ». Youngs (1965) propose une approche analytique rigoureuse de ce problème, à travers le concept de potentiel de débit unitaire, et montre en régime permanent que l'erreur liée à l'hypothèse de DF est compensée exactement par la non prise en compte de la surface de suintement sur la condition aval. Ces résultats sont importants car ils valident dans la prédiction des débits d'utilisation d'une approche simplifiée et déjà largement développée

Si l'approche de DF (et donc la non prise en compte de la surface de suintement) semble efficace en matière de débit (en régime permanent), ce n'est à priori pas le cas pour ce qui est du calcul de la position de la nappe, et ceci d'autant plus que l'on se place en un point proche de la condition de drainage aval. La question qui se pose (en première approche pour le régime permanent) est de savoir si l'on peut caractériser l'erreur faite par l'approche de DF sur le calcul de la hauteur de la nappe, ce qui revient à proposer un calcul approché de la hauteur de suintement.

### III.17.2 Définitions et état des connaissances

Le phénomène de suintement se caractérise par l'existence d'une surface à travers laquelle l'eau de la nappe sort du système directement en contact avec l'air. Muskat (1937) montre que cette hauteur existe lorsqu'une nappe est drainée par un fossé, du fait des pertes de charge verticales dans le système. C'est une conséquence de la convergence des lignes d'écoulement près du bord du fossé. Cette surface de suintement correspond ainsi à la différence de niveau entre la surface libre de la nappe et le niveau de l'eau dans le fossé (figure III.22).



**Figure III.22** Potentiel de pression d'eau en fonction de la cote en  $x = L$ , avec :  
 $\psi$  = potentiel de pression d'eau [L],  $h(L, z, t)$  = charge hydraulique totale [L] ( $h = \psi + z$ ),  $H_w$   
 = niveau d'eau dans le fossé aval [L],  $H_{SS}$  = hauteur de la surface de suintement [L],  $z$  = cote  
 [L]

La surface de suintement constitue une condition à la limite particulière du système, puisqu'il s'agit d'une condition de pression nulle résultant du fonctionnement du système, et non pas d'une condition imposée au système (condition de flux imposé, type Neuman, ou de charge imposée, type Dirichlet). Sa position n'est pas connue a priori.

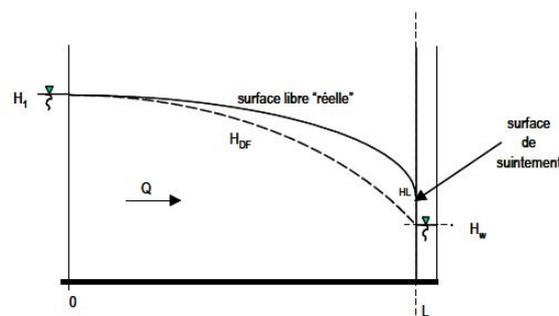
L'existence de cette surface de suintement a des conséquences directes en terme de prédiction de la position de la surface libre de la nappe, position calculée différemment selon le modèle d'écoulement que l'on choisit. Des solutions analytiques ont été proposées par certains auteurs afin de donner une première approximation de la hauteur de suintement, sans avoir à résoudre les équations complètes d'écoulement en milieu poreux. Ces solutions sont limitées au cas du régime permanent et pour des conditions aux limites particulières. Youngs (1990) propose une synthèse exhaustive du problème de prise en compte de la surface de suintement, et de l'estimation de l'erreur liée à l'hypothèse de DF sur le calcul de la position de la surface libre de la nappe, mais limitée au régime permanent, dans le cas d'un fossé vide.

Nous allons successivement nous intéresser au cas simple d'un barrage en terre, puis d'un système drainant par fossé, soumis à une recharge pluviométrique. Dans les exemples bibliographiques qui vont être présentés, le sol sera considéré homogène et isotrope, le fossé reposant sur l'imperméable.

### III.17.3 Cas du drainage par un fossé vide, avec un niveau d'eau amont fixé

#### - Solution de Kozeny (1931, cité par Youngs 1990 et Kao 2002)

Le cas du barrage en terre, soumis à deux hauteurs d'eau libre constantes en amont et en aval, est un cas d'étude classique, connu sous le nom évocateur de « problème de Dupuit ». Le système est présenté en (figure III.23).



**Figure III.23** Nappe dans un barrage en terre, avec niveau d'eau amont  $H_1$ , et aval  $H_w$ .  $H_{DF}$ , niveau de nappe estimé via l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer

En faisant l'hypothèse de DF, le débit transitant à travers le système peut être estimé par la relation connue sous le nom de « formule de Dupuit », et est égal à,

$$Q = K \frac{(H_1^2 - H_w^2)}{2L} \tag{III-55}$$

Comme nous l'avons évoqué au Chapitre (1), Youngs (1965) a montré que ce débit en régime permanent est exact, quand bien même la nappe ne se raccorde pas en réalité au niveau d'eau libre aval,  $H_w$ . Il est aussi intéressant de noter que ce débit ne dépend que des différences de hauteurs amont et aval.

Dans le cadre des hypothèses de DF, la position de la surface libre de la nappe est donnée par la relation suivante :

$$H_{DF}(x) = H_1 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{H_w^2}{H_1^2}\right) \frac{x}{L}} \tag{III-56}$$

La hauteur de nappe ainsi calculée est une sous-estimation de la hauteur de nappe réelle dans la mesure où elle ne prend pas en compte le décalage introduit par l'existence d'une surface de suintement. Une solution exacte peut être approchée par un système hydraulique équivalent, et en particulier pour le cas où le fossé aval est vide (suintement strict).

Cette solution est issue des travaux de Kozeny (1931, cités par Muskat, 1946 et Youngs, 1990), qui considère une nappe soumise à une condition amont de charge selon un profil parabolique, et un niveau aval contrôlé par un drain horizontal de longueur infinie (figure III.24).

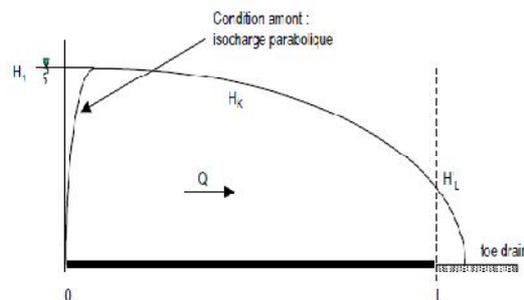


Figure III.24 Ecoulement à partir d'une condition amont parabolique vers un drain horizontal

Kozeny calcule de manière analytique la position de la nappe (méthode de l'hodographe), qui a comme expression,

$$L - x = \frac{K.H_k^2(x)}{2Q} - \frac{Q}{2K} \tag{III-57}$$

Cette relation, appliquée en  $L$  et comparée à la solution de Dupuit, permet de donner une estimation de la hauteur de la surface de suintement identifiée à  $\hat{H}_L$ ,

$$\hat{H}_L \approx H_L = \frac{H_1^2}{2L} \tag{III-58}$$

En fait l'analogie entre les deux systèmes n'est pas complète dans la mesure où la nappe considérée par Kozeny a une extension au delà de  $x = L$ . Ceci a pour conséquence une hauteur de nappe supérieure, pour tout  $x$ , à  $HDF$  (ce qui est logique vu la prise en compte de la surface de suintement), mais aussi supérieure à la solution exacte pour le système réel.

L'estimation de la hauteur de suintement découlant du calcul de Kozeny peut ainsi être considérée comme une valeur limite.

Le principal avantage de l'approche de Kozeny est d'être calculable très simplement, ce qui permet d'évaluer l'ordre de grandeur maximum que peut atteindre la hauteur de suintement, selon des caractéristiques simples du système considéré.

L'examen de la relation de Kozeny permet en particulier de montrer que pour des systèmes ayant une extension latérale importante, la hauteur de suintement peut être considérée comme négligeable. Dans ce cas, la position de la nappe estimée par l'approche de DF est une bonne estimation de la réalité.

Enfin, l'approche de Kozeny s'applique au cas particulier où le fossé aval est vide, ce qui est la situation la plus favorable pour l'apparition d'une surface de suintement. En effet, dans le cas où il existe un niveau d'eau libre dans le fossé aval, la surface de suintement va être réduite (Shamshai and Narasimhan, 1991). En imposant un niveau hydrostatique (isopotentielle verticale) dans la partie du fossé remplie d'eau, on se rapproche du domaine de validité de DF, et la hauteur de suintement diminue.

### III.18 MODELES MATHEMATIQUES POUR LES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE

Les écoulements surfaciques sont souvent modélisés par une simplification des équations de Navier–Stokes à surface libre. Dans les écoulements à surface libre en eau peu profonde, comme dans les rivières et les canaux, il est parfois pertinent de négliger la vitesse verticale devant ses composantes horizontales. Saint-Venant fut le premier à proposer les équations décrivant un écoulement unidimensionnel en eau peu profonde intégrées suivant la section. Ces équations traduisent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans le cas d'un écoulement unidimensionnel.

Le principe pour obtenir les équations de Saint–Venant est d'effectuer une intégration suivant la verticale (pour la version bidimensionnelle) ou suivant la section (pour la version monodimensionnelle) des équations de Navier–Stokes en supposant que l'écoulement est horizontal (typiquement une pente inférieure à 10%), la pression est hydrostatique, les variations de la surface libre sont faibles et la turbulence est négligeable. On suppose également qu'il n'y a pas de transfert de masse à travers le fond et la surface, que la vitesse verticale est nulle au fond et que la cote du fond est indépendante du temps. Une démonstration complète est par exemple donnée par Gerbeau et Perthame [GP01], Hervouet [Her03, p. 35] et Viollet et al. [VCEL03, p. 215].

Le système régissant l'écoulement transitoire à surface libre est le système bien connu de Barré de Saint-Venant (1871), qui transforme une onde amont en une onde aval. Ce système

d'équations différentielles n'admet pas de solutions analytiques exactes et de nombreuses simplifications ont été développées.

### III.18.1 Le système de Saint-Venant

Le phénomène de propagation de crue sur un bief de rivière est régi par les deux équations de la mécanique des milieux continus : la conservation de la matière (3-59) et la conservation de la quantité de mouvement (3-60). Les hypothèses de base (Chow, 1959; Henderson, 1963; Abbott, 1979 ; Carlier, 1980) supposent un écoulement monodirectionnel, une distribution hydrostatique des pressions et l'absence d'apports ou de pertes latéraux.

$$\frac{\partial y}{\partial t} + y \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (\text{III-59})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} + g(S_f - S) = 0 \quad (\text{III-60})$$

Avec

$g$  : accélération de la pesanteur [ $LT^{-2}$ ] ;

$S$  : pente du fond du cours d'eau en  $x$  [ $LL^{-1}$ ] ;

$S_f$  : pente de la ligne de charge en  $x$  à l'instant  $t$  [ $LL^{-1}$ ] (calculée par exemple à partir l'équation de Manning-Strickler);

$t$  : temps [ $T$ ] ;

$V$  : vitesse moyenne en  $x$  à l'instant  $t$  [ $LT^{-1}$ ] ;

$x$  : abscisse [ $L$ ] ;

$y$  : profondeur d'eau en  $x$  à l'instant  $t$ , comptée à partir du fond [ $L$ ].

Les équations de Saint-Venant dépendent des conditions aux limites amont et aval du tronçon, des conditions initiales à  $t = 0$  et des caractéristiques géométriques de la rivière tels le profil en travers des lits mineur et majeur, la longueur, la pente et la rugosité.

En fonction de ces grandeurs, certains termes des équations de Saint-Venant peuvent être négligés, conduisant à une forme plus simplifiée de l'équation de propagation l'onde. On parle alors des modèles de l'onde dynamique, de l'onde diffusante et de l'onde cinématique (Moussa et Bocquillon, 1996b). Pour la simulation des crues, ces deux derniers modèles sont souvent utilisés. Dans le cas général, la résolution de ces équations passe par des schémas numériques aux différences finies (voir une revue dans Richtmeyer et Morton, 1967 ; Remson et al., 1971 ; Singh, 1996). Cependant, d'autres simplifications basées sur des hypothèses de linéarité de la fonction du transfert amènent à simplifier ces équations, on parle alors de l'hydrogramme unitaire.

### III.18.2 Domaine et limite d'application

Le choix de la fonction de transfert reflète aussi bien les problèmes d'échelle que les problèmes de paramétrisation dans la modélisation hydrologique. Quelle est la part de

transfert à l'échelle du versant, et quelle est la part via le réseau hydrographique ? A-t-on toujours besoin du modèle complet de Saint-Venant ou de l'un de ces dérivés ? Lorsque les caractéristiques géométriques du milieu sont bien connues, le modèle de Saint-Venant ou ses dérivées peuvent être utilisés. Dans le cas contraire, on a recours à des modèles plus simples du type hydrogramme unitaire.

Pour modéliser le ruissellement sur les versants, le modèle de l'onde diffusante est utilisé dans HYDROTEL, le modèle de l'onde cinématique 2D dans SHE, l'onde cinématique 1D dans QPBRRM et TOPOG, et le modèle de Manning dans ANSWERS et LISEM. Pour modéliser le transfert via le réseau hydrographique, le modèle complet de Saint-Venant est utilisé dans le SHE, le modèle de l'onde diffusante dans HYDROTEL, MHYDAS et le SHE, l'onde cinématique dans KINEROS, LISEM, et QPBRRM.

### III.18.3 Autres solutions mathématiques du problème de surface libre

D'autres solutions mathématiques du problème de surface libre existent à l'heure actuelle, celles qui sont résolues numériquement. On peut citer dans ce domaine les travaux de Baiocchi (1971) et Baiocchi et al. (1973), qui tracent un cadre mathématique précis ou l'ont démontré au préalable l'unicité et l'existence de la solution, la recherche de celle-ci pouvant déboucher sur la résolution d'équations variationnelles ou l'analyse numériques des équations aux dérivées partielles s'applique. Cependant, dans la plupart des cas, l'écoulement est supposé bidimensionnel, c'est pourquoi ya nécessité de simplification afin d'aboutir à des équations unidimensionnelles, beaucoup plus faciles à résoudre numériquement (Knight, 2005).

Dans le cas d'un régime permanent et pour un écoulement à surface libre bidimensionnel ayant un substratum imperméable et horizontal, la théorie de Dupuits-Forchheimer suppose que la composante verticale de la vitesse est nulle, même pour les cas des écoulements avec recharge à la surface. Après une longue controverse sur la validité de cette hypothèse (Jaeger, 1946 ; Charni, 1951 ; Chapman, 1957 ; Young, 1966 et 1990), cette dernière a été corrigée, ou du moins améliorée, par Knight (2005) en supposant que la composante verticale de la vitesse est nulle à la base (substratum) et proportionnelle à l'élévation au dessus de celle-ci. Ceci revient à supposer que la charge hydraulique varie quadratiquement avec l'élévation sur n'importe quelle ligne verticale. En utilisant des équations unidimensionnelles simplifiées qu'il a résolues par la méthode des différences finies, Knight (2005) a trouvé des solutions plus exactes que celles des expressions de Dupuit-Forchheimer pour la surface libre et plus faciles à calculer par rapport aux solutions des problèmes à deux dimensions (Baiocchi).

Mais les études concernent en général les régimes permanents, il est très rare de trouver des schémas numériques appliqués à l'approche mathématique du problème de surface libre transitoire décrit par les équations (III-37) et (III-41). La mobilité de cette frontière ou surface libre rend en effet délicate, sur le plan numérique, la prise en compte des volumes d'eau écoulés au cours du temps pendant les remontées et les descentes de la cote de la surface libre. On pose très souvent des hypothèses complémentaires pour coupler ces deux équations en une seule équation. Dans la plupart des cas, comme on l'a déjà vu avec les hypothèses de Dupuit-Forchheimer ou de Boussinesq, on est amené, la encore à résoudre une équation de diffusion

unidimensionnelle. Ces études sont aussi limitées aux cas idéaux où la géométrie est souvent carrée, rectangulaire ou trapézoïdale. Dans la plupart des cas, l'écoulement est supposé bidimensionnel, le milieu poreux isotrope et homogène et la surface libre est une fonction continue et régulière. C'est pourquoi le traitement des écoulements en milieux poreux pour les problèmes réels est resté essentiellement numérique.

### **III.19 RESUME**

Dans ce chapitre nous avons présenté très simplement les différents systèmes aquifères et les propriétés du milieu poreux qui peuvent influencer les écoulements souterrains. De plus nous avons exposé les concepts théoriques de base décrivant l'écoulement de l'eau dans un milieu poreux non saturé et saturé et dans un milieu poreux saturé. Ces écoulements diffèrent suivant le type de nappes (libres ou captives). Les signaux de potentiel spontané mesurés à la surface du sol sont générés par des circulations de fluides : c'est ce que l'on appelle le phénomène d'électrofiltration.

Les lois régissant les processus hydrologiques pour les écoulements en milieu non saturé sont basées sur les équations mécanistes de Richards, Boussinesq en milieu saturé, et Saint-Venant pour les écoulements à surface libre. Les paramètres à identifier sont les propriétés hydrodynamiques des sols (courbes  $K(\theta)$  et  $\Psi(\theta)$ ) pour les écoulements en milieu poreux non saturé, la transmissivité pour les écoulements en milieu poreux saturé ainsi que les caractéristiques géométriques (longueur, profil en travers, pente, rugosité) pour les écoulements à surface libre aussi bien sur les versants que dans le réseau hydrographique. A ceci s'ajoute la connaissance des conditions initiales et aux limites du milieu. Ce sont ces paramètres et variables qu'il s'agit d'identifier sur les différentes unités constituant le bassin versant.



**CHAPITRE IV****PRISE EN COMPTE DE LA VARIABILITE DES SOLS DANS LE  
CALCUL DES ECOULEMENTS****VI.1 INTRODUCTION**

Il est évident qu'un modèle représentant les processus de l'écoulement de l'eau souterraine doit tenir compte de la variation spatiale des paramètres, au moins au niveau des valeurs devant être entrées pour chaque maille du domaine. Cependant, on ne possède pas toujours l'information sur cette variation spatiale. Il y a par ailleurs peu d'information dans la littérature sur la variabilité des paramètres, ce qui crée une grande incertitude au niveau des données et donc des résultats. En effet, les paramètres qui gouvernent les écoulements varient spatialement et bien souvent, les échantillons ou les sondages ne tiennent pas compte de ces variations. Cette lacune amène des valeurs qui, souvent, ne sont pas interprétables et des résultats qui peuvent être non représentatifs de la réalité.

Pour la réalisation de la modélisation, il est essentiel d'avoir une valeur fiable pour chaque paramètre hydrogéologique et ce pour chaque maille du domaine (subdivision du domaine à modéliser en un nombre prédéterminé de mailles). Le problème qui consiste donc à acquérir des valeurs représentatives pour chaque maille se complique pour une région où le sol est hétérogène. La difficulté majeure consiste à faire correspondre l'échelle à laquelle les mesures peuvent être effectuées sur le terrain ou en laboratoire (limitation des méthodes) et l'échelle à laquelle le modèle nécessite ces données (dimension des mailles).

Plusieurs méthodes (traçage, essai de pompage sur puits ou par un autre procédé) peuvent être utilisées sur le terrain à une échelle qui correspond à celle de la grille élémentaire du modèle. Il est possible d'utiliser cette approche pour des modèles possédant un maillage à une échelle suffisamment petite. Par exemple, si la superficie d'une zone à modéliser est de 100 km<sup>2</sup> et des mailles de 5 km<sup>2</sup>, il est possible d'échantillonner toutes les mailles. Cependant, si les cellules ont 500 m<sup>2</sup>, il est presque impossible de faire une telle campagne de terrain.

**VI.1 FIABILITE DE LA MESURE UNIQUE**

Il est possible de définir les paramètres de l'écoulement et d'en trouver les valeurs effectives pour chaque maille en ne possédant que quelques valeurs sur le domaine.

Il s'agit de faire des mesures à plus petite échelle, conduisant à une mesure unique. Comme il a été vu précédemment, les tests sur des échantillons en laboratoire sont faits à une échelle différente des mailles du modèle lui-même. De plus les caractéristiques de l'écoulement peuvent être affectées par la destructivité du test et par les conditions imposées aux limites (Beven, 1991).

Comment donc relier les observations de laboratoire obtenues sur des échantillons limités aux mailles du modèle ? Plusieurs études suggèrent que des variations considérables des paramètres de l'écoulement peuvent être observées entre des échantillons de même dimension dans une même région (Ellsworth et Jury, 1991). Des variations semblables se reflètent à l'échelle du maillage du modèle, sujettes ou non à des autocorrélations spatiales. L'auto corrélation spatiale a été étudiée en terme d'hétérogénéité des caractéristiques hydrauliques du sol et de leurs effets sur les écoulements locaux. Cependant, peu d'études ont été faites sur la corrélation spatiale des paramètres sur le terrain. VanWesenbeeck et Kachanoski (1991) suggèrent que l'échelle des corrélations est petite.

## **IV.2 VARIABILITE SPATIALE DES PARAMETRES**

Tous les paramètres que nous avons vus précédemment peuvent varier dans l'espace. Cette section propose une analyse sommaire de la variabilité spatiale des différents paramètres de la modélisation des écoulements souterrains.

### **IV.2.1 Limites de l'aquifère**

Les limites inférieures et supérieures de l'aquifère varient très peu sur de courtes distances. Les variations dans les limites sont plutôt observées sur les grandes distances avec des changements radicaux dans les matériaux en présence et des variations marquées de la topographie. Les limites inférieures et supérieures varient avec un changement de perméabilité marqué. Par exemple, un aquifère sableux confiné par une couche d'argile s'agrandit si la couche de sable devient plus épaisse et devient libre si la couche d'argile supérieure disparaît. Les limites latérales changent avec la proximité d'un milieu imperméable tel un massif rocheux ou avec une étendue d'eau en contact avec l'aquifère.

### **IV.2.2 Variation spatiale et corrélation de $K$ et $T$**

La théorie de perturbation est une approche assez récente pour l'estimation de certains paramètres. Cette méthode nécessite beaucoup d'informations sur la corrélation spatiale des structures et des propriétés hydrauliques d'un site, dont la conductivité hydraulique et la transmissivité sont les plus importantes. Les paramètres statistiques les plus utilisés pour cette approche sont la variance  $\sigma^2$  et l'échelle de corrélation spatiale ( $\lambda$ ).

La variance est facilement estimable à partir d'un nombre limité de valeurs. La difficulté réside dans l'estimation de l'échelle des corrélations. Il est possible d'obtenir cette échelle à partir de variogrammes d'estimation prenant en compte  $K$  et  $T$ . Cependant, cette procédure s'avère assez ardue et les variogrammes sont sensibles à l'échelle d'observation.

Par ailleurs, les données de  $K$  et  $T$  doivent être d'espacement semblable à celui des cellules du modèle, ce qui est assez rare. De plus, en trois dimensions, l'espacement des valeurs de  $K$  doit être homogène tant horizontalement que verticalement, et souvent, un si grand nombre de données est impossible à recueillir (difficulté de terrain et coût) (Hoeksema et Kitanidis, 1985).

Certains auteurs, Gelharet al. (1985) et Journel (1986) entre autres, suggèrent une méthode pour surmonter ce problème. Il s'agit d'ajouter aux valeurs de paramètre que l'on entre dans le modèle des informations subjectives sur la géologie et les conditions morphologiques du site.  $K$  est fréquemment relié à des caractéristiques microscopiques observables du sol (structure, granulométrie, etc.). Il s'agit donc de trouver la conductivité hydraulique de quelques échantillons préalablement décrits. Par la suite, on donne à chaque échantillon une caractéristique physique choisie, par exemple granulométrie moyenne de 2 mm, que l'on jumelle à la valeur de  $K$ . Finalement, il est possible d'affecter des valeurs de  $K$  à des cellules du modèle qui ne comportent pas de test ou d'échantillon, en leur attribuant les valeurs des cellules dont ils possèdent les mêmes caractéristiques physiques. Il est ainsi possible de faire une corrélation spatiale des valeurs de différents paramètres physiques sur l'ensemble du site à modéliser.

Cette approche est utile pour un matériel possédant une grande variance des conductivités hydrauliques. Phillips et Wilson (1989) suggèrent de prendre un nombre suffisant d'échantillons pour pouvoir déterminer la variance de  $\text{Log}_n K$ . Ces échantillons seront examinés pour en déterminer les caractéristiques qui pourront être utilisées comme propriété reliée à  $\text{Log}_n$ . Ce nombre d'échantillons sera bien plus petit que le nombre requis pour une analyse de variogramme complète. Par la suite, ces propriétés sont corrélées avec les valeurs de conductivité hydraulique.

Cependant, les variations de la conductivité hydraulique dans l'espace sont encore assez mal connues. Elles varient fortement avec des changements sensibles des caractéristiques des matériaux, et rapidement dans un même type de sol.

### **IV.2.3 Variation spatiale des autres paramètres**

Le type de matériau varie dans l'espace et les composantes solides de l'aquifère et de son environnement sont variables autant verticalement qu'horizontalement. La plupart des paramètres qui régissent les écoulements souterrains sont reliés à ces variations.

Pour caractériser sommairement les changements de composition des sols et des roches d'une région donnée, il est utile de consulter des cartes des dépôts quaternaires et de la géologie ainsi que des forages, coupes géophysiques, descriptions de tranchées, etc. Toutes ces informations, permettent d'obtenir une vision globale des variations de composition du substratum d'une région.

Les changements de composition et de structure d'un sol apparaissent à différentes échelles et varie en fonction de la profondeur. Par exemple, la granulométrie peut varier en séquences de 10 cm (alternance de sable et gravier fin) et la composition peut changer à tous les 20 mètres (alternance des lits de sable et gravier fin avec des bancs d'argile). Les roches varient en composition, porosité, structure et microstructure; les sols changent de granulométrie, composition, arrondi des grains, distribution (tri) et structures sédimentaires. La topographie, variable elle aussi à plus ou moins grande échelle, affecte la disposition du matériel composant le sol.

La porosité change spatialement avec les variations de matériaux et de leurs caractéristiques. La porosité reste constante si un sol est spatialement homogène. Elle est très influencée par la compaction et par les caractéristiques typiques du sol comme la granulométrie, l'arrangement des grains, etc.. Pour ce qui est des roches, les micro-fractures et la composition influencent grandement la porosité. La capacité au champ et le coefficient d'emménagement (nappes libres) sont gérés par l'eau retenue dans le sol et par les forces de rétention. La quantité d'eau retenue dans le sol est elle aussi reliée à la porosité et dépend du support.

Tous les paramètres qui contrôlent les écoulements souterrains sont interdépendants et reliés aux types de matériau qui supportent l'écoulement. Il est donc difficile de parler d'échelle de variation spatiale car les paramètres varient dans l'espace et ce, à une échelle différente les uns des autres. Toutefois, il y a une relation entre l'échelle de variation des types de matériau et la variation des paramètres.

Il est donc pertinent, lors de la modélisation, de se baser sur la variation des supports (sol et roche) pour déterminer les échelles de variabilité des paramètres. Il est cependant difficile de quantifier ces variations spatiales, et chaque cas de modélisation commande une étude des changements spatiaux des supports d'écoulement.

### **IV.3 VARIABILITE TEMPORELLE DES PARAMETRES**

#### **IV.3.1 Propriétés physiques des matériaux**

Le type de sol ou de roche ne varie pas rapidement dans le temps. Des variations sont observables seulement sur de longues périodes de temps.

Il en est de même pour la topographie et l'emplacement des réseaux hydrologiques qui semblent invariables durant l'échelle de temps d'observation.

Les limites imperméables de l'aquifère tel que le roc ou des sédiments non-perméables ne varient pratiquement pas dans les échelles de temps simulées. Les limites perméables comme l'eau (rencontre d'une rivière...) ou le sable (sommet de l'aquifère) peuvent varier avec le gel.

Cependant, étant donné que le sol ne gèle que sur une couche d'épaisseur très superficielle, il est improbable que le gel affecte la partie saturée, mais seulement quelques dizaines de centimètres de la zone non-saturée. Si un aquifère libre gèle en sa partie supérieure, il peut devenir temporairement captif.

La porosité d'un sol ou d'une roche ne change pas à l'échelle de la modélisation. Le gel est le seul facteur qui influence la porosité. Lorsque le sol est gelé, les pores remplis d'eau gelée ne peuvent plus participer à l'écoulement du fluide. Cet écoulement sera alors influencé dans le temps par la réduction de la porosité.

La perméabilité et la conductivité semblent constantes dans le temps. Étant donné qu'elles sont principalement des propriétés du sol, elles demeurent stables lorsqu'on étudie un de ces paramètres dans un même point de l'espace. Par contre, comme pour les autres paramètres, le gel peut influencer ces propriétés en restreignant les vides participant à l'écoulement. Si un sol est entièrement gelé, il ne peut y avoir aucun échange de liquide dans celui-ci. Un changement de température de l'eau, observé entre l'hiver et l'été, entraîne une diminution ou une augmentation de la densité de l'eau, ce qui affecte aussi la conductivité hydraulique du matériau. Cependant, cette influence demeure faible. Le coefficient d'emmagasinement et la capacité au champ peuvent varier dans le temps avec la quantité et la qualité de l'eau qui circule dans le sol, et aussi avec le gel. Mais en général, ces paramètres restent assez stables dans le temps.

#### **IV.4 VOLUME ELEMENTAIRE REPRESENTATIF**

Avant de parler de l'agrégation de l'information au niveau du modèle, il est nécessaire d'aborder le principe de la représentativité des valeurs de paramètre mesurées et du volume élémentaire représentatif (VER). Pour ce faire, nous utiliserons des notions apportées par De Marsily (1981) et Castany (1985).

Généralement, les formations hydrogéologiques sont anisotropes et très souvent hétérogènes. La stratigraphie implique obligatoirement un réservoir anisotrope et hétérogène. Il est souvent obligatoire de déterminer des sous-réservoirs homogènes.

Par les études lithologiques, il est possible de déterminer un volume de réservoir, plus petit et homogène. Ce domaine d'espace est appelé volume élémentaire représentatif. La grandeur de ce volume unitaire, assimilé à un cube, est comprise entre deux limites extrêmes. Ce volume se doit d'être assez petit pour être isotrope et homogène, par contre il doit être assez grand, par rapport aux dimensions des vides, pour permettre la continuité de l'écoulement et représenter les caractéristiques statistiques significatives des paramètres de l'aquifère. Pour les milieux poreux, on évalue la dimension de ce cube élémentaire à un maximum de 50 à 100 d10.

Les dimensions du VER peuvent varier de l'échelle centimétrique pour le limon à l'échelle kilométrique avec des roches compactes et fissurées. Ainsi, un aquifère d'alluvions peut être considéré comme homogène à l'échelle régionale. Découpé en volume plus petits, de l'ordre de grandeur du VER, il devient hétérogène car deux échantillons prélevés au hasard présentent des granulométries différentes. Cependant, chaque VER est homogène, de plus, le VER se doit d'être observé dans le temps pour annuler l'effet des fluctuations des vitesses d'écoulement. Il est évident que cette notion de VER est bonne pour représenter toutes les propriétés d'un sol ou d'une roche. Il est à noter que dans un milieu fissuré, la taille du VER peut devenir très grande et ne peut être représentée à l'échelle des instruments de mesure.

## **IV.5 OUTILS ET METHODES DE TRAVAIL, (DESCRIPTION D'UNE METHODE DE TRAVAIL)**

### **IV.5.1 Variabilité spatiale**

L'étude et l'interprétation des propriétés du sol et des écoulements souterrains à une échelle plus grande que celle du volume élémentaire représentatif ne sont pas un problème nouveau.

Plusieurs chercheurs comme Russo et Bresler (1981), Vieira et al. (1981), Gajem et al. (1981), Byers et Stephens (1983), Webster et Cuanalo (1975), entre autres, ont effectué des recherches sur ce sujet.

Lors de l'étude des propriétés des sols et des écoulements, le facteur problématique est l'hétérogénéité des formations du sol en place lequel provoque une grande variabilité spatiale dans le mouvement des eaux. Plusieurs études décrivent les propriétés hydrauliques d'un sol au moyen de fonctions aléatoires (Bresler et Dagan (1983), Bresler et al. (1983) et Mantoglou et Gelhar (1985)). Sposito et al. (1986) ont discuté l'utilisation efficace du concept des probabilités dans la description de l'écoulement de l'eau souterraine à l'échelle du terrain. La difficulté est liée au fait que les données expérimentales existantes sont très dispersées dans l'espace et le mécanisme contrôlant les écoulements n'est pas encore très bien connu.

Jensen et Refsgaard (1991) indiquent que la variabilité horizontale des paramètres est souvent plus importante que celle que l'on peut déduire par les modèles basés sur des tests de laboratoire ou par quelques mesures sur le terrain. Ceci vient du fait qu'il est très facile de négliger les variations à micro-échelle du sol. Ces dernières sont rarement intégrées dans les valeurs des paramètres introduits dans le modèle et il en découle une lacune dans l'intégration des microprocessus dans la modélisation. Des essais de traçage sur le terrain ont montré que la variabilité horizontale des paramètres d'écoulement augmente avec la profondeur, l'augmentation de l'hétérogénéité du milieu et la complexité des structures.

Russo et Bresler (1981) avancent quelques idées sur la relation entre la statistique et la variabilité spatiale.

L'approche statistique conventionnelle pour décrire la variabilité des propriétés hydrauliques du sol traite les observations d'un paramètre donné comme étant indépendantes de sa position spatiale. Le fait que la variation de chaque propriété n'est pas complètement désordonnée dans l'espace a toujours été envisagé par les pédologues.

On observe souvent des structures de sol en couches ou en blocs qui se présentent à différentes échelles irrégulières (Bakr et al., 1978). Comme la statistique conventionnelle ne tient pas compte de l'arrangement spatial des structures du sol, une approche plus complète, comprenant une description des changements de structures spatiales, devrait être développée.

Plusieurs raisons peuvent être avancées pour expliquer l'intérêt grandissant pour la recherche sur la variabilité spatiale des propriétés du sol. La plus importante d'entre elles est que les mesures en laboratoire ne sont qu'une approximation des mesures de variabilité sur le terrain.

De plus, le progrès accompli dans la modernisation des méthodes de mesure et d'analyse d'échantillons amène une meilleure compréhension des processus qui régissent les écoulements souterrains (Peck, 1983)

#### **IV.5.2 Variation du sol**

Un échantillon de 0,1 m. suffit souvent à évaluer la variabilité des propriétés du sol. Cependant, plus l'échantillon augmente en taille, plus la variance des observations diminue. À un certain point, la variance peut atteindre une valeur constante laquelle représente la variance de la méthode de mesure. Le plus petit échantillon physique pour lequel une variance constante d'une propriété spécifique du sol est observée, est reconnu comme le volume élémentaire représentatif pour cette propriété dans ce domaine d'étude. La variabilité spatiale d'un sol peut être telle qu'aucun volume élémentaire représentatif n'existe ou qu'il est plus grand que la taille possible d'un échantillon.

Warrick et Nielson (1980), en se basant sur plusieurs valeurs de propriétés et de leurs variances sur différents sites, ont proposé un regroupement des propriétés du sol à partir d'un coefficient de variation (CV) (rapport de l'écart-type à la moyenne). Les regroupements de propriétés proposés sont empiriques. Cependant, ils donnent une échelle de comparaison intéressante. Les variations les moins importantes (CV entre 7 et 10%) sont reliées à la densité volumétrique, la porosité et au contenu en eau à saturation. La composition, proportion en argile, silt et sable, ainsi que le contenu en eau gravimétrique montrent des variations intermédiaires (CV entre 10-100%). Les variations les plus importantes (CV plus grand que 100%) sont rapportées pour les paramètres tels la conductivité hydraulique, la vitesse de pore et l'échelle de grosseur des grains.

Les variations de composition du sol sont souvent représentées par l'indice (PDF) considérant les données en terme de fonction de probabilité de densité d'une série d'observations d'un secteur.

Nielsen (1973) a avancé que la PDF du contenu en eau, de la densité volumétrique et du rapport de sable-argile pour un terrain de 70 hectares pouvait être représentée de façon adéquate par une courbe de distribution normale. Par contre, les PDF de la conductivité hydraulique et de la transmissivité sont mieux représentées par une courbe Log-normale. De plus, une courbe Log-normale peut aussi représenter la vitesse de pore, le coefficient de diffusion et l'échelle des grosseurs de pores.

Lorsque le CV est petit, un échantillon de petite taille est nécessaire pour déterminer la meilleure courbe statistique. On pourrait penser que deux mesures d'une propriété prises sur le terrain seraient plus facilement corrélables si elles sont prises l'une près de l'autre.

Selon une étude de Webster (1973), il semble que des séries de valeurs de contenu en argile d'un sol prises sur un transect à intervalles réguliers montrent une corrélation aléatoire des variables. Selon lui, cette observation semble provenir d'un problème dans la méthode d'échantillonnage ou d'une lacune dans les techniques d'analyses du procédé de formation du sol, ou bien d'une combinaison de ces facteurs.

Les données recueillies sont une réalisation d'un processus stochastique, et un autre transect au même endroit donnerait d'autres valeurs et une réalisation différente du processus.

### **IV.5.3 Statistiques et Géostatistiques**

#### **IV.5.3.1 Statistique**

Les études statistiques simples sont utilisées depuis longtemps pour décrire de façon synthétique l'information. Les données ainsi traitées sont plus faciles à interpréter. Dans le cas qui nous intéresse, il y a deux (2) types de distribution des paramètres hydrogéologiques et des paramètres du sol, soit la distribution normale et la distribution log-normale.

##### **a. Distribution normale**

Une distribution normale est caractérisée par ses moments d'ordre 1 et 2 (moyenne et variance), le moment d'ordre 3 (coefficient d'asymétrie) étant nul. Les paramètres tel que le contenu en eau, la densité volumétrique, et la porosité, suivent une loi de distribution normale.

##### **b. Distribution log-normal**

Une distribution log-normale s'applique aux paramètres dont le logarithme naturel des valeurs suit une distribution normale. Les paramètres comme la conductivité hydraulique, la transmissivité, la vitesse de pore et le coefficient de dispersion suivent une distribution log-normale.

### IV.5.3.2 Géostatistique

Cette méthode permet de comparer la variabilité spatiale du paramètre, d'un point dans l'espace à un autre. Le variogramme  $Y$  est la demi-moyenne des carrés des différences entre deux valeurs d'un paramètre pour un écartement donné des points de mesure.

$$\sum_i^{n-h} \frac{(x_i - x_{i+h})^2}{2n}$$

Par conséquent  $Y_h$  est la demi-moyenne des carrés des différences à une distance  $h$  donnée entre deux (2) points. De plus,  $x_i$  est une mesure d'une variable régionalisée prise à un endroit  $i$ , et  $x_{i+h}$  une autre mesure prise à une distance  $h$  de la première;  $n$  est le nombre de mesures (Verlyetal, 1983).

Le variogramme exprime le coefficient d'auto-corrélation du paramètre en fonction de la distance entre deux points d'observation. Cette méthode permet de caractériser la variabilité d'un paramètre dans l'espace. Il est possible de déterminer entre autres la distance à laquelle les valeurs sont statistiquement indépendantes.

Une variable régionalisée a des propriétés qui se situent entre une variable aléatoire et un autre complètement déterministe. Les variables régionalisées sont des fonctions qui décrivent des phénomènes naturels ayant une distribution géographique, tel que l'élévation du sol, le niveau de la nappe phréatique et les paramètres qui caractérisent le sol. Contrairement aux variables aléatoires, les variables régionalisées ont une continuité d'un point à un autre dans l'espace; cependant les changements dans les valeurs des variables sont si complexes qu'elles ne peuvent être représentées par des fonctions déterministes simples.

En dépit de la continuité spatiale d'une variable régionale, il n'est pas possible de connaître sa valeur en tout point de l'espace.

Lorsque la distance entre deux échantillons est nulle ( $\Delta h = 0$ ), les différences sont égales à zéro et la semi-variance de  $Y_0$  est aussi égale à zéro. Si le  $\Delta h$  (distance entre deux (2) points) est une petite valeur, les valeurs comparées peuvent être voisines et la semi-variance est une petite valeur. Lorsque la distance  $\Delta h$  augmente, les valeurs comparées sont moins reliées entre elles et leur différence devient plus grande. Le résultat de cet éloignement est une valeur de  $Y_V$  plus grande.

À un certain point, la distance des points comparés est si grande qu'ils ne sont plus corrélés entre eux et la différence des valeurs au carré devient égale en grandeur à la variance autour des valeurs moyennes. La semi-variance, par le fait même, n'augmente plus et le semi-variogramme arrive à un plateau de pente zéro. La distance à laquelle la semi-variance approche la variance est appelée la portée de la variable régionalisée. Celle-ci définit la plage dans laquelle les valeurs du paramètre pour des lieux d'échantillonnages donnés sont considérées comme statistiquement reliées entre elles.

Le variogramme constitué à partir d'une série de données donne le type de structure spatiale associée à un phénomène de variation spatiale. De plus, le variogramme indique le taux de bruit de fond présent dans les données. Ce bruit de fond est communément appelé l'effet de pépité. Si ce bruit de fond se rapproche de la valeur de la variance, on peut dire que les données sont spatialement distribuées d'une façon aléatoire.

Pour approfondir ce principe, nous pouvons représenter nos données comme une observation unique d'une fonction aléatoire  $Z$ .

Les données recueillies pour représenter plusieurs phénomènes naturels sont souvent parasitées par un certain niveau de bruit de fond appelé bruit aléatoire. La fonction  $Z$  est ainsi décomposée.

$$Z(x) = W(x) + S(x)$$

Où  $W$  représente le bruit aléatoire et  $S$  la composante structurale.

$$E[Z(x)] = E[S(x)]$$

Si  $W$  est suffisamment grand, un variogramme effectué sur  $Z$  peut révéler la distribution aléatoire de  $W$  donnant généralement un très large effet de pépité et ce, sans fournir aucune information sur la corrélation spatiale de  $S$ . Il s'agit alors de filtrer  $W$  de  $Z$  pour révéler le comportement de  $S$ .

Une grande quantité de bruit de fond présent dans une série de données peut provenir de différents facteurs. Un de ces facteurs, et possiblement le plus important, est l'erreur introduite lors de la prise et du traitement des données.

#### **IV.6 ECOULEMENT D'EAU DANS LES MILIEUX POREUX HETEROGENES**

Nous nous intéressons dans cette étude aux milieux poreux aquifères. Un aquifère est une formation géologique contenant de l'eau et à travers laquelle, en conditions normales, une quantité significative de cette eau s'écoule. Un milieu poreux est un matériel constitué par une matrice solide et des vides, appelés pores. Le pourcentage de vide d'un milieu poreux définit sa porosité totale. Ces vides peuvent être occupés par de l'eau, de l'air ou d'autres fluides. En hydrogéologie, l'analyse de la porosité n'est pas exclusivement géométrique mais se réfère également à l'eau contenue dans le milieu poreux, à ses liaisons physiques avec la matrice solide et à ses mouvements possibles. En effet, la porosité totale d'un sol meuble ou d'une roche n'est pas une condition suffisante à l'écoulement d'eau. C'est l'interconnexion des pores ainsi que les relations fluides-solide qui définiront la circulation du fluide.

**IV.6.1 Théorie de la continuité**

Les milieux poreux naturels sont caractérisés par une extrême complexité de la distribution des pores, irrégulière, aussi bien en forme qu'en taille.

Ainsi si en théorie, il est possible de décrire ce système à l'échelle du pore, du fait de cette forte hétérogénéité, une telle description se révèle vite utopiste lorsque la taille du système augmente et que de plus en plus de volumes poreux sont mis en jeu. Par conséquent, il est nécessaire d'approximer le système par un autre plus facile à utiliser.

Les propriétés physiques caractéristiques du milieu poreux peuvent être définies à l'aide de la notion volume élémentaire représentatif (VER) ou théorie de la continuité. Dans cette théorie le système physique réel discret est remplacé par un système continu dans lequel les propriétés physiques le décrivant varient continûment dans l'espace. La théorie de la continuité repose sur l'hypothèse qu'un système physique réel peut être approximé par un système dans lequel les variations dans l'espace des propriétés étudiées sont suffisamment lisses pour permettre l'utilisation de calculs différentiels pour décrire les processus s'y déroulant. L'intérêt est ainsi de pouvoir formuler les changements dans le système en terme d'équations aux dérivées partielles.

Dans la représentation continue du milieu poreux, les variables physiques décrivant le milieu, discontinues à l'échelle microscopique, sont remplacées par des fonctions continues à l'échelle macroscopique.

La valeur de chaque variable physique affectée à un point mathématique dans l'espace continu est obtenue en moyennant la propriété physique vraie sur un volume élémentaire représentatif (VER).

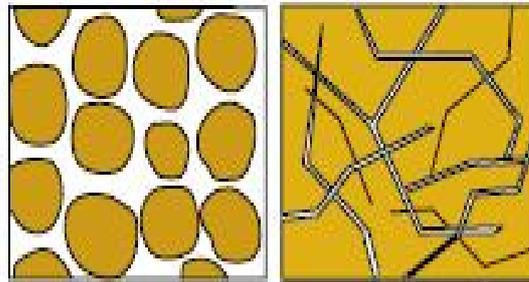
La caractéristique essentielle d'un VER est qu'il correspond localement aux propriétés du système. Les dimensions du VER sont généralement grandes par rapport à la taille du grain, pour pouvoir définir une propriété moyenne globale avec l'assurance d'une fluctuation négligeable d'un pore à l'autre, mais petites par rapport à la longueur caractéristique sur laquelle les quantités considérées varient.

Le modèle continu s'oppose au modèle discret dans lequel le milieu est traité comme une succession de sub-systèmes connectés entre eux. Chaque élément a ses propres paramètres. Un sub-système classiquement utilisé est par exemple le "stirred continuous reactor" ou "mixing-cell".

Les modèles discrets sont souvent basés sur une représentation en réseau (network) du milieu poreux. Nous nous placerons dans des conditions de continuité dans la suite de ce travail.

## IV.6.2 Propriétés géométriques de la porosité

### IV.6.2.1 Deux types de porosité

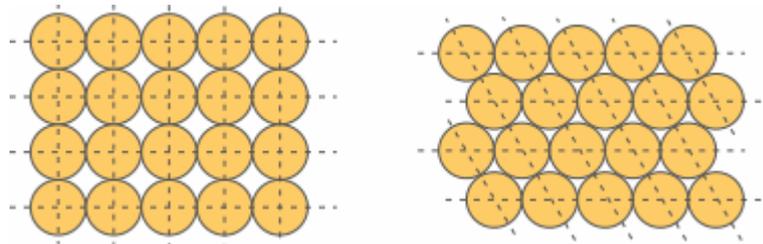


**Figure IV.1** Deux types de porosité

La porosité peut être de deux formes. La porosité d'interstice (à gauche sur la figure IV.1) représente les vides subsistant autour de particules minérales solides, plus ou moins cimentées alors que la porosité de fissure (à droite sur la figure IV.1) correspond aux fissures, fractures ou diaclase non colmatées présentes dans les roches. Généralement, dans les roches naturelles, ces deux types de porosité cohabitent. Des valeurs moyennes de porosité totale des roches sont indiquées dans le tableau IV.1.

### IV.6.2.2 Porosité d'interstice et agencement des grains dans l'espace

Considérons la porosité d'interstice d'un milieu poreux théorique constitué de sphères (particules) de taille égale. Il existe différents cas possibles d'agencement des sphères contiguës.



**Figure IV.2** Réseau cubique (à gauche) et réseau rhomboédrique (à droite)

La porosité maximale est atteinte pour un tassement lâche des sphères, empilées en réseau cubique (figure IV.2) pour lequel le pourcentage des vides, soit l'espace disponible pour le fluide, est de 47,6%. A l'autre extrême, si on tasse au maximum les sphères, sans les déformer cependant, on obtiendra un tassement rhomboédrique (figure IV.2), avec un espace de vides de 25,9%. Malgré ce tassement serré, il y a encore passablement d'espace pour emmagasiner l'eau. Dans la nature, on a le plus souvent ce dernier tassement, mais les situations intermédiaires entre tassement serré et tassement lâche existent aussi.

Les porosités deviennent plus faibles lorsque les particules du sédiment ne sont pas de taille uniforme, par exemple, un mélange de petites et de grosses particules, ou encore lorsque la charge sur un sédiment due à l'accumulation est suffisamment élevée pour déformer les particules. En généralisant, on peut dire que la compaction liée à l'accumulation des sédiments diminue progressivement la porosité. Les phénomènes de la cimentation durant la diagenèse viennent aussi combler progressivement la porosité.

#### IV.6.2.3 Surface spécifique

Comme la porosité, la surface spécifique est une propriété géométrique importante du milieu poreux. Elle est définie comme le rapport entre surface totale des vides et le volume total du sol ou de la roche. Considérons un volume  $V$  dans lequel sont entassées  $N$  sphères de rayons  $R$  tel qu'un volume  $b^3$  puisse être associé à chaque sphère, espace poral compris.

La porosité est définie par,

$$\emptyset = \frac{V_{pores}}{V} = \frac{b^3 - \frac{4}{3}\pi R^3}{b^3} = 1 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{b}\right)^3 \quad (IV-1)$$

La surface spécifique peut alors être écrite en fonction de la porosité,

$$S_{Sp} = \frac{S_{pores}}{V} = \frac{4\pi R^2}{b^3} = \frac{3}{R} (1 - \emptyset) \quad (IV-2)$$

Par exemple, pour un réseau cubique  $b^3 = 8R^3$  et la surface spécifique vaut,  $S_{Sp} = \frac{\pi}{2R}$ .

Ainsi, logiquement, pour une porosité donnée, plus la taille des particules est petite, plus la surface spécifique est grande (0,5-5m<sup>2</sup>/g pour les grès à environ 100m<sup>2</sup>/g pour les argiles, (Bear 1972)). La surface spécifique varie beaucoup d'un milieu à un autre.

D'après son expression pour une porosité  $\emptyset \ll 1$ , la surface spécifique ne dépend plus de la porosité du milieu poreux.

Par ailleurs, pour des milieux naturels, la taille des grains est donnée par une distribution plutôt que par une valeur unique ce qui complique l'évaluation de la surface spécifique.

La surface spécifique est un paramètre important pour les modèles de transport réactif, notamment pour la quantification des réactions eau-roche. La surface spécifique par unité de volume de fluide correspond à la surface réactive.

### IV.6.3 La porosité et la circulation des fluides

#### IV.6.3.1 Porosité cinématique

Le volume poreux dans lequel l'eau peut circuler est inférieur au volume vide total.

La porosité cinématique est la fraction de la porosité totale contenant l'eau qui peut circuler.

Sont donc exclus de la porosité cinématique,

- les espaces poreux occupés par l'eau liée, i.e. l'eau attachée à la surface des grains par le jeu des forces d'attraction moléculaire, qui peut donc être considérée comme faisant partie du solide ;
- les pores non connectés, l'importance de la porosité cinématique est en effet liée à la notion d'interconnexion ;
- les pores en culs de sac dans lesquels l'eau est quasi immobile.

Des ordres de grandeur de la valeur de la porosité cinématique des roches sont indiqués dans le tableau IV.1.

#### **IV.6.3.2 Perméabilité intrinsèque**

La perméabilité intrinsèque est la propriété d'un corps poreux de se laisser traverser par les fluides. Cette constante caractéristique d'un milieu poreux est liée à la forme des grains et à la porosité cinématique (communication entre les pores). Donc, indépendante des caractéristiques des fluides elle ne dépend que de la structure et de la connectivité des pores. La perméabilité intrinsèque est généralement anisotrope et s'exprime donc sous forme tensorielle.

#### **IV.6.3.3 Loi de Darcy**

L'écoulement de l'eau à travers les formations perméables a été étudié par Darcy en 1856 (Darcy 1856). Les vitesses de circulation de l'eau dans les milieux poreux sont très variables. Elles dépendent d'un certain nombre de facteurs, dont évidemment la perméabilité de l'aquifère, mais aussi le gradient hydraulique qui est défini par la différence d'élévation entre deux points de la surface de la nappe, divisée par la distance entre ces deux mêmes points, et la viscosité de l'eau.

La loi Darcy est une loi empirique, obtenue pour un flux monodimensionnel à travers une colonne de sable homogène et s'écrit,

$$Q = -KA \frac{dh}{dl} \quad (\text{IV-3})$$

avec  $Q$  : débit,  $K$ , constante appelée conductivité hydraulique ou perméabilité,  $A$  l'aire de la section perpendiculaire à l'écoulement,  $\frac{dh}{dl}$  gradient de charge hydraulique.

Si on divise le débit par la section  $A$ , on obtient une vitesse  $v$ , dite vitesse de Darcy ou vitesse de filtration correspondant à une vitesse fictive puisqu'elle suppose que toute la surface, y compris la matrice, participe à l'écoulement. La vitesse réelle du courant  $u$ , vitesse de pore, est égale à la vitesse de Darcy divisée par la porosité cinématique.

La charge hydraulique est fonction des trois dimensions de l'espace. Pour un fluide incompressible et isotherme, la généralisation en trois dimensions de la loi de Darcy nous permet d'écrire la vitesse d'écoulement de l'eau sous la forme vectorielle suivante,

$$\vec{U} = -\frac{\bar{K}}{\phi} \cdot \overrightarrow{grad}h \tag{IV-4}$$

Où  $\bar{K}$  est le tenseur de conductivité hydraulique et  $h$  la charge hydraulique.

Tableau IV.1 Ordre de grandeur des principaux paramètres hydrodynamiques

Roches	Porosité totale (interstice)	Porosité cinématique	Conductivité hydraulique (m/s)
graviers, galets	25 - 40%	20 - 40%	$3.10^{-2} - 10^{-6}$
sables	~ 40%	5-15%	$2.10^{-4} - 10^{-6}$
argile	40 - 45%		$5.10^{-9} - 10^{-11}$
craie	30 - 45 %	5%	$6.10^{-6} - 10^{-9}$
calcaires lithographiques	5%	$\epsilon$	
calcaires karstifiés	< 30%	30%	$2.10^{-2} - 10^{-4}$
dolomies secondaires	30%	5 - 30%	$6.10^{-6} - 10^{-9}$
grès	5 - 30 %	$\epsilon - 10\%$	$6.10^{-6} - 3.10^{-10}$
basaltes	5 - 20 %	$\epsilon - 20\%$	$4.10^{-7} - 2.10^{-11}$
granite, gneiss	0.1 - 1%	$\epsilon$	$2.10^{-10} - 3.10^{-12}$
sel	0.1%	$\epsilon$	

#### IV.6.3.4 Conductivité hydraulique

La conductivité hydraulique est une mesure de la capacité du milieu à laisser circuler l'eau. En général, elle dépend du sens de l'écoulement de l'eau. Dans ce cas, anisotrope, elle s'exprime sous la forme d'un tenseur symétrique de second ordre.

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{pmatrix} \tag{IV-5}$$

La conductivité hydraulique dépend des caractéristiques du milieu, via la perméabilité intrinsèque,  $k$ , ainsi que des caractéristiques du fluide,

$$\bar{K} = (\rho g / \mu) \bar{k} \tag{IV-6}$$

Avec  $g$ , accélération de la pesanteur,  $\rho$  masse volumique du fluide,  $\mu$  viscosité dynamique du fluide. Des ordres de grandeur de la valeur de la perméabilité des roches sont indiqués dans le tableau IV.1.

#### **IV.6.3.5 Champ de vitesse**

Les conditions aux limites, en imposant un gradient de pression, vont entraîner des mouvements d'eau dans le milieu poreux. La dynamique d'écoulement est simplement gouvernée par une équation de continuité exprimant la conservation de la masse en régime permanent,

$$\operatorname{div}(\phi \vec{U}) = 0 \quad (\text{IV-7})$$

et par l'équation de la conservation de la quantité de mouvement qui s'exprime par la loi de Darcy. Comme la vitesse est directement proportionnelle à la perméabilité et que le champ

de perméabilité est fortement hétérogène dans les milieux poreux, il en résulte que le champ de vitesse est également fortement hétérogène. En général, la vitesse d'écoulement de l'eau en un point varie très peu dans le temps, voire pas du tout (sauf si des réactions chimiques modifient la porosité et donc le champ de vitesse!). Nous considérerons par la suite que la vitesse est stationnaire.

#### **IV.6.4 Hétérogénéité physique des milieux poreux**

Bien que l'hétérogénéité concerne de nombreux paramètres physiques des milieux géologiques, nous nous intéressons ici plus particulièrement à l'hétérogénéité de la conductivité hydraulique, voire de la porosité. La conductivité hydraulique est communément le paramètre qui intéresse le plus les hydrogéologues de part l'ampleur des variations de sa valeur dans la plupart des systèmes naturels et de son importance fondamentale dans le contrôle du champ de vitesse du fluide et de la migration des éléments.

##### **IV.6.4.1 Hétérogénéité du milieu naturel**

Une hétérogénéité à l'échelle du pore peut être observée au laboratoire : elle est associée à la structure du pore. Ces hétérogénéités peuvent prendre différentes formes : porosité interne d'agrégats, pores en cul de sac, fractures ainsi que micro stratifications ou lamines à conductivité hydraulique variable caractéristiques des aquifères d'origine sédimentaire. De nombreuses expériences, sur site ou en laboratoire, ont montré que cette hétérogénéité structurale du milieu peut influencer le flux d'eau et le transport de soluté.

Lorsque l'on regarde un affleurement, le long d'une route par exemple, la forte variabilité des matériaux en terme de type de roche, de composition minéralogique et de distribution spatiale est flagrante. A cette variabilité est associée une variabilité des propriétés du milieu, qu'il s'agisse des propriétés hydraulique, mécanique ou chimique.

Ainsi, il est de règle que les mesures de perméabilité hydraulique et de porosité varient d'un point à l'autre. Ces variations sont irrégulières spatialement et concernent des distances bien supérieures à l'échelle du laboratoire. Ainsi, le long d'un transect d'environ 70 mètres dans l'Illinois, Bakr et al. (1978) trouvent une conductivité hydraulique variant de quatre ordres de grandeur et une porosité variant de 1 à 20%. De nombreuses autres études (e.g. Borden tracer test site, (Sudicky 1986)) montrent une variabilité du même ordre.

#### **IV.6.4.2 Impacts de l'hétérogénéité sur les flux d'eau**

L'une des principales conséquences de l'hétérogénéité physique est qu'elle peut conduire à des variations significatives des vitesses du fluide sur de courtes distances et créer des chemins préférentiels. Comme nous l'avons vu, le gradient hydraulique est le principal moteur du mouvement d'eau souterraine (loi de Darcy) et la vitesse du fluide est directement proportionnelle à la perméabilité. Si la valeur de la perméabilité varie d'un ordre de grandeur entre deux endroits très proches, alors, pour un même gradient hydraulique, les vitesses varieront du même ordre de grandeur. Ainsi l'existence d'une variabilité spatiale des conductivités hydrauliques entraîne une variabilité spatiale du champ de vitesse.

#### **IV.6.5 DESCRIPTION DE L'HETEROGENEITE**

Les milieux poreux sont donc caractérisés par une forte hétérogénéité spatiale, en particulier de la conductivité hydraulique. Cette hétérogénéité ne peut pas être mesurée en détails (accès indirects ou ponctuels au milieu souterrain) pourtant son impact sur les écoulements d'eau est important et il l'est probablement autant sur le transport des éléments. Dans la perspective d'une modélisation du comportement des contaminants dans le milieu, il faut décrire cette hétérogénéité de la façon la plus représentative possible du milieu naturel.

Trois approches sont généralement utilisées pour décrire l'hétérogénéité du milieu, approche stochastique, approche "milieu stratifié" et approche "double porosité". Dans un milieu stratifié, on fait l'hypothèse que l'aquifère est composé d'un certain nombre de couches horizontales dont les propriétés diffèrent (e.g. Pickens et Grisak 1981). Dans l'approche "double porosité", le milieu consiste conceptuellement en deux domaines : un domaine "advectif" dans lequel advection et dispersion se déroulent et un domaine non advectif dans lequel l'advection est négligée. Un transfert de masse diffusif entre les deux domaines est parfois pris en compte.

Cette approche est le plus souvent utilisée pour décrire l'hétérogénéité locale du milieu mais peut être utilisée pour représenter la variabilité de la conductivité hydraulique (Brusseau 1994).

Dans cette étude, nous utiliserons l'approche stochastique que nous présentons ici plus en détails.

#### IV.6.5.1 Approche géostatistique

Une des façons de décrire l'hétérogénéité spatiale du milieu est d'utiliser une approche géostatistique basée sur des fonctions spatiales aléatoires. La distribution spatiale de la propriété physique est aléatoire et corrélée dans l'espace.

Le caractère aléatoire permet de rendre compte de la distribution des valeurs observées alors que la corrélation marque la continuité spatiale d'une valeur donnée dans toutes les directions.

Freeze (1975) a effectué une synthèse bibliographique des données de terrain concernant les propriétés hydrauliques des milieux à l'échelle locale. Son étude, confirmée par la suite par de nombreux autres travaux, a montré que la perméabilité  $K$  varie spatialement selon une loi log normale stationnaire,  $Y = \ln K$ , où  $Y$  suit une loi normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$  pouvant atteindre 13 dans certaines formations même si, dans la plupart des cas, la variance est bien moindre.

Dans les formations étudiées par Freeze, pour la plupart des formations consolidées à faible perméabilité, telles que des roches réservoirs, les valeurs de  $\mu$  varient de -6 à -9 et celles de  $\sigma$  de 0,5 à 2. Sur le site de Borden, l'analyse statistique des mesures de perméabilité effectuées par Sudicky dans des roches sédimentaires montre également que la perméabilité suit une loi log normale avec  $\mu$  égal à -4,63 et  $\sigma^2$  0,328. La moyenne et la variance de la distribution des perméabilités s'écrivent en fonction de  $\mu$  et  $\sigma$  de la façon suivante

$$\langle K \rangle = \exp(\mu + \sigma^2/2)$$

$$\sigma_K^2 = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (\exp(\sigma^2) - 1) \quad (\text{IV-8})$$

Nous définissons également la moyenne géométrique  $K_G$  de la distribution des perméabilités,

$$K_G = \exp(\mu) \quad (\text{IV-9})$$

Une analyse de la corrélation spatiale des structures géologiques a révélé que les valeurs des conductivités hydrauliques en deux positions très proches ont de fortes chances d'être similaires. Par contre, plus la distance entre deux points augmente, plus les valeurs seront différentes car il y a plus de chance que la formation géologique ait changé. Pour prendre en compte cette continuité spatiale,  $Y(x)$ , fonction stationnaire, est écrite sous la forme,

$$Y = \ln K(x) = F + f(x) \quad (\text{IV-10})$$

$F$  est considérée comme une constante et, dans ce cas, correspond à la moyenne  $\mu$  de la loi normale suivie par  $Y$ .  $f(x)$  est un champ aléatoire normal, spatialement corrélé, stationnaire de 2<sup>nd</sup> ordre, de moyenne zéro et de variance  $\sigma^2$ . La continuité spatiale est ainsi modélisée à l'aide d'une fonction,  $\text{Cor}$ , fonction de covariance de  $f(x)$ , structure de corrélation stationnaire. La valeur de la fonction de corrélation décroît avec la distance,  $r$ , entre deux points.

Soulignons qu'un processus est dit stationnaire lorsque les paramètres représentant l'hétérogénéité du milieu ne varient pas spatialement. L'aquifère est alors dit uniformément hétérogène. Nous nous placerons dans ces conditions par la suite.

Dagan (1989) fait une revue des différentes fonctions de covariances rencontrées dans la littérature : exponentielle, semi-sphérique, linéaire, gaussienne... La plus utilisée qui s'applique bien aux données de terrain est la covariance exponentielle,

$$Cov(\vec{r}) = \sigma^2 \exp(-[(r_x/\lambda_x)^2 + (r_y/\lambda_y)^2 + (r_z/\lambda_z)^2]^{1/2}) \quad (IV-11)$$

$\vec{r}$  est un vecteur distance et les termes  $\lambda_i$  représentent la longueur de corrélation dans les trois dimensions de l'espace. L'équation précédente (4-11) représente une corrélation anisotrope. Le tableau IV.2 présente des valeurs de variance et des longueurs de corrélation trouvées dans des formations naturelles. Si la longueur de corrélation est la même dans toutes les dimensions de l'espace, la corrélation est isotrope et la fonction de corrélation s'écrit,

$$Cov(\vec{r}) = \sigma^2 \exp(-|\vec{r}|/\lambda) \quad (IV-12)$$

Nous nous placerons dans ces conditions par la suite.

Ainsi, la distribution de probabilité d'un champ de perméabilité hétérogène aléatoire isotrope et stationnaire est complètement définie par la moyenne géométrique  $K_G$ , la variance  $\sigma^2$ , la forme de la fonction de covariance et la longueur de corrélation  $\lambda$ .

**Tableau IV.2** Ordre de grandeur des paramètres caractéristiques de l'hétérogénéité (d'après Gelhar 1986).

	$\sigma$	$\lambda_x$	$\lambda_{y/z}$
Grès	1,5 - 2,2		0,3 - 1
Sable outwash	0,8	>10	0,4
Sable fluviatile	0,9	>3	0,1
Sables et graviers	1,9	17	0,5

**IV.6.5.2 Réalisation d'un champ de perméabilité hétérogène**

Etant donné une valeur de  $F$  et une fonction de covariance  $Cov(\vec{r})$ , une distribution structurée de  $K$  peut être dérivée de l'équation  $\ln K(x) = F + f(x)$  en synthétisant une réalisation du champ aléatoire  $f(x)$ . Selon les objectifs de la simulation, nous distinguons deux grands types de méthodes. Une méthode de simulation non-conditionnelle vise à produire des champs montrant la même structure spatiale (variogramme) et le même histogramme que ceux inférés à partir des données observées. Une méthode de simulation conditionnelle vise les mêmes objectifs que la simulation non-conditionnelle mais elle doit également assurer que chaque réalisation soit compatible avec les valeurs observées aux points échantillons.

Il existe une panoplie de méthodes de simulation géostatistique. Si on cherche à regrouper ces méthodes, il est possible de distinguer les méthodes gaussiennes (décomposition de la matrice de covariance telle que LU décomposition, méthode gaussienne séquentielle, moyennes mobiles, bandes tournantes, méthodes autorégressives, méthodes fréquentielles, etc.) des méthodes non-gaussiennes (recuit simulé, simulation séquentielle d'indicatrices, méthodes utilisant des champs de probabilité ("p-fields"), etc) (Lee et Ellis 1997, Marcotte 2003).

#### **IV.6.6 Changement d'échelle et homogénéisation**

##### **IV.6.6.1 Concept d'homogénéisation**

Comme nous l'avons vu, la grande complexité du milieu poreux rend sa caractérisation impossible et nécessite l'introduction de modèles stochastiques afin de décrire les propriétés du milieu par des variables aléatoires. Le changement d'échelle pose le problème du calcul des perméabilités à plus grande échelle (et par la suite des paramètres descriptifs du transport), sachant que la perméabilité n'est pas un paramètre additif.

Le concept d'homogénéisation consiste à trouver un moyen de décrire et prédire le comportement global à grande échelle de systèmes hétérogènes en terme de propriétés "effectives" fonction de la structure et du degré d'hétérogénéité. Il s'agit en fait de remplacer le milieu poreux hétérogène par un milieu homogène équivalent de sorte que le comportement global du milieu hétérogène soit équivalent au comportement du milieu homogène à l'échelle macroscopique. Cela constitue l'approche de changement d'échelle la plus simple.

##### **IV.6.6.2 Perméabilité effective dans les milieux poreux hétérogènes**

En ce qui concerne la perméabilité effective des milieux poreux hétérogènes, des synthèses ont été publiées récemment (Renard et Marsily 1997, Jankovic et al. 2003). Pour des perméabilités distribuées selon une loi log normale comme celle décrite ci-dessus, des formes exactes de la perméabilité effective existent seulement pour des problèmes mono et bidimensionnels,

$$1D : K_{ef} = K_G \exp(-\sigma^2/2) \quad (IV-13)$$

$$2D : K_{ef} = K_G \quad (\text{Matheron 1967, Dykhne 1971}) \quad (IV-14)$$

Pour les problèmes tridimensionnels, des approximations de la perméabilité effective en milieu isotrope ont été dérivées à l'aide de simulations numériques ou d'approches par petites perturbations, en développant une solution de l'équation de Darcy en série de puissance (Matheron 1967, Gutjahr et al. 1978),

$$K_{ef} = K_G \exp (\sigma^2/6) \quad (4-15)$$

Une généralisation de ce résultat, également compatible en milieu mono et bidimensionnel, a été postulée par Landau et Lifschitz (1960) en électrodynamique et par Matheron (1967) dans les milieux poreux sous la forme,

$$K_{ef} = K_G \exp \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{D} \right) \sigma^2 \right] \quad (4-16)$$

Où  $D$  représente la dimension de l'espace. Ces résultats sont principalement valables pour de petites variations de la conductivité.

#### **IV.7 PASSAGE DE L'HETEROGENEITE DU MILIEU A L'HETEROGENEITE DES ECOULEMENTS**

Le passage de l'hétérogénéité du milieu à l'hétérogénéité des écoulements n'est pas trivial. L'organisation des écoulements dépend de la variabilité des propriétés hydrauliques et de leur corrélation spatiale, c'est à dire de la connectivité spatiale des zones de propriétés hydrauliques similaires. Le gradient de charge étant variable dans l'espace, la relation entre perméabilité et vitesse d'écoulement n'est pas directe.

Des études numériques et expérimentales ont mis en évidence le fait que les écoulements dans les milieux hétérogènes ont tendance à s'organiser en chenaux plus ou moins indépendants (*Moreno and Tsang, 1994, Tsang and Neretnieks, 1998, Bruderer-Weng et al., 2004, Tiedeman and Hsieh, 2004*). Ce phénomène de chenalisation est souvent évoqué comme une des raisons principales de l'incapacité des modèles classiques à reproduire les observations (*Tsang and Neretnieks, 1998*).

La question du passage de l'hétérogénéité du milieu à celle des écoulements est généralement traitée différemment pour les milieux poreux hétérogènes ou pour des roches peu perméables fracturées. Dans ce dernier cas, la question de la connectivité est primordiale. A l'échelle des réseaux de fractures, l'organisation des écoulements dépend des propriétés géométriques des réseaux de failles. Celles-ci peuvent être caractérisées par la distribution des longueurs de failles, la densité de failles et la distribution des ouvertures de fracture.

Au seuil de percolation, lorsqu'il existe un réseau de fractures connecté, l'organisation des écoulements est contrôlée par la géométrie de ce réseau connecté (figure IV-3), ainsi que par la distribution des propriétés hydrauliques des fractures (*de Dreuzy et al., 2001*). Ceci implique une grande variété d'organisations possibles pour les écoulements dans ces systèmes en fonction des propriétés géométriques des réseaux (*de Dreuzy, 1999*).

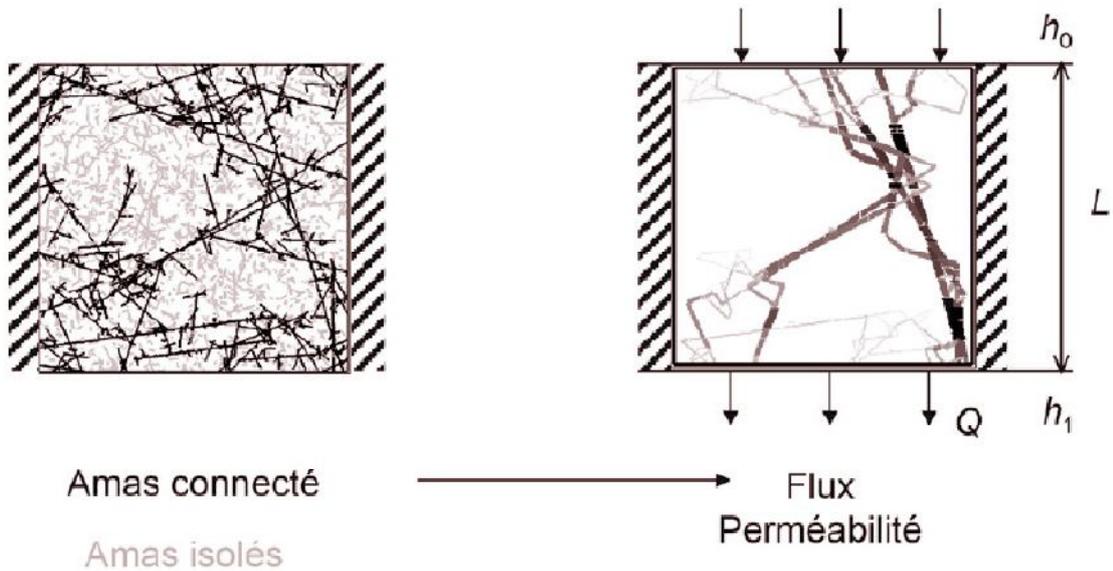


Figure IV.3 Illustration des écoulements à travers un réseau de fracture connecté d'après (Darcel, 2002).

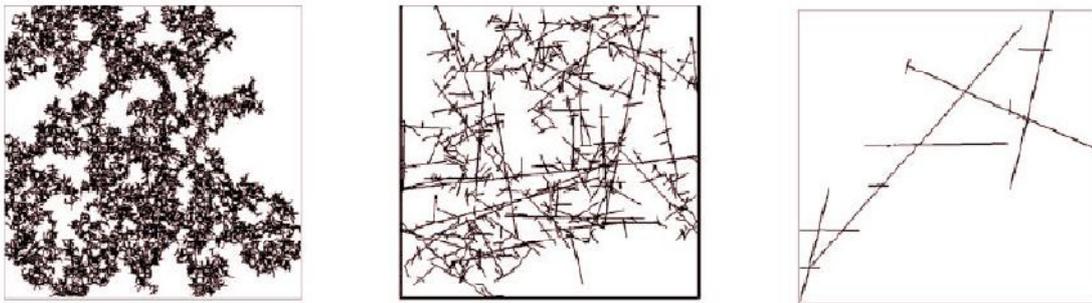


Figure IV.4 La caractérisation de l'organisation des écoulements dans les réseaux de fractures naturels

La figure IV.4 illustre des exemples de réseaux au seuil de percolation (densité de fracture pour laquelle le réseau est connecté) pour différentes distributions de longueurs de fractures: a)  $a = \infty$ , b)  $a = 2.5$ , c)  $a = 2$ . Les amas de failles non connectés ne sont pas représentés. D'après (Darcel, 2002). Si le réseau est représenté par des failles de tailles identiques (a), la connexion du réseau dépend de la densité de faille. Au dessus d'une densité de faille critique, le réseau est connecté quelle que soit l'échelle d'observation. Ce type de système peut être décrit dans le cadre de la théorie de la percolation (Stauffer and Aharony, 1992). Au contraire, si le réseau de failles est représenté par une large distribution de failles de type loi de puissance d'exposant  $a$ , la connexion dépend également de la taille du système (b,c). En effet, même pour des faibles densités de failles, il existe une échelle à partir de laquelle on rencontre des longues failles qui à elles seules garantissent la connexion du système (Bour and Davy, 1997).

**IV.8 BILAN**

Les milieux poreux naturels sont caractérisés par une forte hétérogénéité. En terme d'écoulements d'eau, une forte variabilité spatiale de la conductivité hydraulique entraîne une forte variabilité spatiale des vitesses d'écoulements et la création de chemins préférentiels.

Du fait de la grande complexité de la structure du milieu et de sa difficulté d'accès, l'hétérogénéité ne peut pas être mesurée précisément dans les milieux naturels et une caractérisation complète est impossible. Dans la perspective d'une modélisation de l'écoulement d'eau dans les milieux poreux, nous nous sommes intéressés à une description quantitative représentative de cette hétérogénéité. L'approche que nous utiliserons dans ce travail est une approche géostatistique dans laquelle la conductivité hydraulique est considérée comme une variable aléatoire spatialement corrélée. Nous présenterons la génération de ce champ hétérogène corrélé par la suite.

La description complexe de l'hétérogénéité du milieu n'est pas facile à gérer dans la pratique. Le changement d'échelle pose le problème des paramètres représentatifs de l'écoulement à plus grande échelle. Ainsi, la prise en compte de l'hétérogénéité implique souvent la recherche d'un milieu physique homogène équivalent ; il s'agit de rechercher une description continue macroscopiquement équivalente. Nous avons présenté dans cette partie les résultats des travaux concernant la recherche d'une perméabilité équivalente.

**IV.9 MODELISATION STOCHASTIQUE DES ECOULEMENTS EN MILIEUX POREUX****IV.9.1 Description "continue" [Bear, 1979] ; [de Marsily, 1986]**

La description donnée précédemment d'un milieu poreux est une description à l'échelle microscopique. La modélisation de l'écoulement des eaux souterraines n'est pas envisagée à cette échelle pour les deux raisons suivantes, 1) l'impossibilité d'une description quantitative précise de la géométrie complexe du réseau interconnecté des pores qui s'offre au cheminement d'un fluide, 2) le peu d'intérêt dans les applications pratiques pour la connaissance de grandeurs à cette échelle.

Dès lors, nous sommes amenés comme dans beaucoup de domaines de la Physique à définir des grandeurs macroscopiques appelées en hydrogéologie grandeurs locales.

Deux approches coexistent pour la définition des propriétés locales d'un milieu poreux: l'approche **déterministe** basée sur la théorie du **R.E.V.** "Représentative Elementary Volume" et l'approche **stochastique**. Nous décrivons ici la première approche.

Celle-ci consiste simplement à définir une grandeur locale (macroscopique) à l'aide d'une moyenne spatiale appropriée sur un élément de volume; cette grandeur locale étant associée au centroïde de ce volume élémentaire.

Le milieu géologique peut dès lors être vu comme un milieu continu. Il est implicite dans cette approche que la longueur caractéristique de ce volume élémentaire ( $l_v$ ) satisfait aux inégalités:  $l_p \ll l_v \ll l_D$  ou  $l_D$  est l'échelle de longueur du domaine géologique étudié.

Pour être plus précis, définissons  $V(\vec{r})$  comme le volume d'un domaine spatial inclus dans  $D$  le domaine géologique étudié, ayant pour centre, le vecteur position  $\vec{r}$  et  $\bar{u}(\vec{r}, t)$  une grandeur tensorielle, vectorielle ou scalaire dans un milieu poreux. La valeur moyenne spatiale de  $u$  sur  $V$  au temps  $t$  est définie par,

$$\bar{u}(\vec{r}, t, V(\vec{r})) = \frac{1}{V(\vec{r})} \int_{V(\vec{r})} \bar{u}(\vec{r}, t) d\vec{r} \quad (IV-17)$$

Celle-ci dépend en général de la taille, la forme et l'orientation de  $V(\vec{r})$  au temps  $t$ . Pour que  $\bar{u}$  ne dépende que de  $\vec{r}$  et  $t$ , nous devons définir un volume  $V_0$  compris entre deux sphères de volume  $V_{min} = \frac{\pi}{6} l_{min}^3$  et  $V_{max} = \frac{\pi}{6} l_{max}^3$ , tel que pour  $V_0$ ,

$$\frac{\pi}{6} l_{min}^3 < V_0 < \frac{\pi}{6} l_{max}^3 \quad (IV-18)$$

Si nous pouvons trouver pour  $V_0$  des limites  $l_{min}$  et  $l_{max}$  communes en tout point  $\vec{r}$  du domaine  $D$ , alors on peut définir un champ  $\bar{u}(\vec{r}, t)$  à travers  $D$  et traiter  $D$  comme un milieu continu pour la grandeur  $u$ . Le volume  $V_0$  est le volume élémentaire représentatif (R.E.V.).

Au vu de ce qui précède, deux avantages de l'approche R.E.V. sont reconnus: 1) la démarche est intuitive; elle met en relation directe la grandeur macroscopique et sa mesure; 2) toute grandeur macroscopique définie selon cette approche est continue dans l'espace. Néanmoins, les principaux inconvénients sont, la perte d'informations après la moyenne spatiale, sur la structure microscopique du milieu poreux, la définition relativement arbitraire du volume élémentaire  $V_0$  (pour autant que celui-ci existe!).

Nous verrons en quoi l'approche stochastique peut partiellement résoudre ces problèmes.

### **IV.9.2 Description stochastique**

Dans l'approche stochastique, toute propriété du milieu géologique (telle que la géométrie ou les grandeurs physiques) est traitée en tant que fonction aléatoire de l'espace. De nombreuses méthodologies ont été intensivement appliquées en hydrogéologie à partir de la fin des années 60. Cet engouement trouve son origine en grande partie dans la puissance de synthèse de cette approche. L'outil probabiliste fonctionne comme un grand simplificateur dans le sens où la diversité de la géométrie ou d'une grandeur physique d'un milieu poreux est ramenée à la connaissance d'une moyenne et de moments d'ordre supérieur. En outre l'approche stochastique a pu justifier les écarts constatés (par exemple) entre les coefficients de dispersion mesurés en laboratoire et ceux mesurés lors d'expériences in situ. L'approche stochastique a permis de mettre en évidence cet effet de dépendance d'échelle et a fourni les expressions de coefficients de dispersion effectifs.

**IV.9.2.1 Notations**

Nous introduisons tout d'abord des notions élémentaires de statistique afin de préciser les notations utilisées.

Soit  $u, v, u_1, u_2, \dots, u_N$  un ensemble de variables aléatoires, nous noterons :

$f(u)$  la densité de probabilité univariée,

$F(u) = \int_{-\infty}^u f(u)du$  la distribution cumulée univariée,

$\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du$  l'espérance mathématique ou tout simplement la moyenne,

$u' = u - \langle u \rangle$  le résidu ou la composante aléatoire,

$\sigma_u^2 = \langle u'^2 \rangle$  la variance,

$\langle u^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n f(u)du$  le moment d'ordre  $n$ ,

$f(u_1, u_2, \dots, u_N)$  la densité de probabilité univariée des variables  $u_1, u_2, \dots, u_N$ ,

$F(u_1, u_2, \dots, u_N)$  la distribution cumulée multivariée,

$$f(u_1, u_2, \dots, u_M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2, \dots, u_M, u_{M+1} \dots u_N) du_{M+1} \dots du_N$$

la densité de probabilité marginale des variables  $u_1, u_2, \dots, u_M$ ,

$$f(u_1, u_2, \dots, u_M / u_{M+1}, u_{M+2}, \dots, u_N) = \frac{f(u_1, u_2, \dots, u_M, u_{M+1} \dots u_N)}{f(u_{M+1}, u_{M+2}, \dots, u_N)}$$

la densité de probabilité conditionnelle des variables  $u_1, u_2, \dots, u_M$ ,

$$C_{uv} = \langle u'v' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (u - \langle u \rangle)(v - \langle v \rangle) dudv$$
 la covariance des variables  $u$  et  $v$ ,

**IV.9.2.2 Notions de géostatistique [Dagan, 1989] ; [de Marsily, 1986]**

**- Ensemble des réalisations et fonction aléatoire**

Afin de donner une image de ce concept, supposons qu'en laboratoire nous disposions de plusieurs colonnes de sable chacune remplie du même type de sable. Chaque colonne représente le même milieu poreux mais les configurations obtenues sont néanmoins toutes différentes. Chaque colonne est, une réalisation, un élément de l'ensemble des réalisations d'un processus.

De nombreuses théories de géométrie stochastique ont été développées pour la construction de tels processus. Nous trouvons notamment dans [Stoyan et al., 1987] de nombreux modèles mathématiques pour la construction de processus de points ("point process"), de lignes, de fibres, de plans ou de surfaces.

Etant donné que le milieu poreux est le résultat d'une réalisation d'un processus, une propriété  $u$  d'un milieu poreux est notée selon l'approche stochastique  $u(\bar{r}, \xi)$  où  $\bar{r}$  est le vecteur position dans le domaine spatial et  $\xi$  est la "variable d'état" dans l'ensemble des réalisations. Donc,  $u(\bar{r}, \xi)$  est une réalisation de  $u$  dans l'espace;  $u(\bar{r}_0, \xi)$  est une variable aléatoire c.à.d. l'ensemble des réalisations de la fonction aléatoire  $u$  au point  $\bar{r}_0$ . Dès lors, les grandeurs statistiques introduites au paragraphe (IV.9.2.1) sont les densités de probabilité, moyenne et moments d'ordre supérieur associés à la "variable d'état"  $\xi$  dans  $u(\bar{r}, \xi)$ . La moyenne  $\langle u \rangle$  est ainsi souvent appelée "moyenne sur l'ensemble des réalisations" ("ensemble average"). Pour simplifier les notations, nous omettrons dans la suite la variable  $\xi$ .

Avant de clôturer ce paragraphe, remarquons qu'en pratique, si nous voulons étudier un milieu poreux donné, celui-ci ne nous fournira qu'une seule réalisation  $\xi$  du processus. Nous sommes donc en principe dans l'incapacité d'évaluer les propriétés statistiques d'une grandeur  $u$  du milieu poreux dans l'ensemble des réalisations. Nous verrons que les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité remédient à ce problème.

**- Stationnarité**

Une fonction aléatoire  $u$  est dite stationnaire quand elle satisfait la propriété:

$$F[u(\bar{x}_1 + \bar{r}), u(\bar{x}_2 + \bar{r}), \dots, u(\bar{x}_N + \bar{r})] = F[u(\bar{x}_1), u(\bar{x}_2), \dots, u(\bar{x}_N)]$$

Pour tout ensemble de points  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N$  et pour tout vecteur arbitraire  $\bar{r}$ . En d'autres mots,  $F$  est invariant pour une même translation de tous les points  $\bar{x}_i$  et dépend seulement de leurs positions relatives.

Souvent en hydrogéologie, on fait l'hypothèse d'une condition moins stricte: la stationnarité faible. Elle s'applique à un milieu où seuls les deux premiers moments sont stationnaires:

$$\langle u(\bar{x}) \rangle = m_u$$

$$\langle (u(\bar{x}) - m_u)(u(\bar{x} + \bar{r}) - m_u) \rangle = C_{uu}(\bar{r})$$

Cette condition de stationnarité peut s'étendre à une classe plus large encore de fonctions aléatoires: les fonctions aléatoires d'incrément stationnaires.

Considérons la différence  $\varepsilon_{ij} = u(\bar{x}_i) - u(\bar{x}_j)$  La variable aléatoire  $\varepsilon_{ij}$  est définie par la distribution cumulée  $F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{km}, \dots)$  pour des paires arbitraires de points  $(\bar{x}_i, \bar{x}_j), (\bar{x}_k, \bar{x}_m), \dots$

La fonction aléatoire  $u(\bar{x})$  est d'incrément stationnaires si  $F$  est invariant pour une translation de vecteur  $\bar{r}$  des points  $\bar{x}_i, \bar{x}_j, \bar{x}_k, \bar{x}_m, \dots$

Dès lors, la variabilité spatiale de  $u(\bar{x})$  a une propriété intrinsèque qui dépend seulement de la position relative des points  $\bar{x}_i, \bar{x}_j, \dots$  et non de la position de leur centre de gravité.

Le moment d'ordre deux de la différence  $u'(\bar{x}_i) - u'(\bar{x}_j)$  définit une grandeur souvent rencontrée en hydrogéologie: le semi-variogramme,

$$\gamma_u(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \frac{1}{2} \langle [u'(\bar{x}_i) - u'(\bar{x}_j)]^2 \rangle \quad (IV-19)$$

Pour une fonction aléatoire  $u$  d'incrément stationnaires,  $\gamma_u$  est une fonction de  $\bar{x}_i - \bar{x}_j$  uniquement [Dagan, 1989]. Dans le cas particulier d'une fonction aléatoire stationnaire,  $\gamma_u$  est relié simplement à la covariance  $C_{uu}(\bar{r})$  par l'identité,

$$\gamma_u(\bar{r}) = \sigma_u^2 - C_{uu}(\bar{r}) \quad (IV-20)$$

Obtenue à partir de la définition (IV-19). De l'identité (IV-20), nous obtenons  $\gamma_u(\infty) = \sigma_u^2$  et  $C_{uu}(\bar{r}) = \gamma_u(\infty) - \gamma_u(\bar{r})$ . Dans ce cas, il n'y a pas d'avantage à utiliser  $\gamma_u(\bar{r})$  plutôt que  $C_{uu}(\bar{r})$ . Mais pour des fonctions aléatoires  $u$  plus générales (c.à.d. d'incrément stationnaires) pour lesquelles  $\gamma_u(\bar{r})$  croît infiniment avec  $|\bar{r}|$  (qui ont donc une variance  $\sigma_u^2$  infinie et dont la covariance  $C_{uu}(\bar{r})$  n'est pas définie) la notion de semi-variogramme pourra être utilisée pour caractériser la structure locale de  $u(x)$ . Remarquons que même si  $\gamma_u(\bar{r})$  devient pratiquement constant pour  $|\bar{r}| > l$  ou  $l$  est appelé le "range" dans la littérature géostatistique, la covariance reste toujours difficile à définir si l'étendue du domaine spatial où est défini  $u(\bar{x})$  n'est pas beaucoup plus grande que  $l$  dès lors, dans ce cas également, l'utilisation de  $\gamma_u(\bar{r})$  peut s'avérer utile.

**- Moyennes spatiales de fonctions aléatoires et ergodicité**

Le but de ce paragraphe est d'établir un lien entre l'approche stochastique et l'approche "continue" ou du volume élémentaire (R.E.V.).

Nous examinons ici brièvement la relation entre les moments statistiques de la moyenne spatiale  $\bar{u}$  (IV-17) et ceux de  $u$ , quand  $u$  est une fonction aléatoire stationnaire (indépendante du temps ici). Nous avons immédiatement,

$$\bar{u}(\bar{r}) = \frac{1}{V} \int_{V(\bar{r})} \langle u \rangle dr' = \langle u \rangle \quad (IV-21)$$

Par stationnarité de  $u$ . La moyenne sur l'ensemble des réalisations d'une fonction aléatoire stationnarité et celle de sa moyenne spatiale sont donc identiques. De plus, on montre [Dagan, 1989] que la covariance,

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = C_{\bar{u}\bar{u}}(0) = \langle [\bar{u}(\bar{x}) - \langle \bar{u} \rangle]^2 \rangle \quad (IV-22)$$

Peut s'écrire,

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \frac{1}{V^2} \int C_{\bar{u}\bar{u}}(\bar{r}) H(\bar{r}) d\bar{r} \quad (IV-23)$$

Où  $H(\bar{r})$  est le volume de l'intersection entre  $V$  et sa translation d'un vecteur  $\bar{r}$ . Cette relation est importante car elle nous permet de définir plus précisément la taille de l'élément de volume élémentaire  $V_0$  dans l'approche R.E.V. En effet, supposons que  $V$  soit une sphère de volume  $\frac{\pi}{6} l_V^3$ . Par de simples relations géométriques, nous obtenons pour  $H(r)$  et  $r < l_V$  et  $H(r) = 0$  pour  $r \geq l_V$  [Dagan, 1989],

$$\frac{H(r)}{V} = 1 - \frac{3}{2} \frac{r}{l_V} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l_V}\right)^3 \quad (\text{IV-24})$$

Supposons également l'existence d'une longueur de corrélation de la fonction aléatoire  $u$ , définie pour une covariance isotrope par,

$$l_u = \left[ 3 \int_0^\infty r^2 \frac{C_{\bar{u}\bar{u}}(\bar{r})}{\sigma_u^2} dr \right]^{1/3} \quad (\text{IV-25})$$

Nous pouvons considérer dans (IV-23) deux cas extrêmes,

1.  $l_V \ll l_u$ :  $C_{\bar{u}\bar{u}}(\bar{r})$  est approximativement égal à  $\sigma_u^2$  pour  $r < l_V$  ou  $H \neq 0$ , donc,

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \frac{\sigma_u^2}{V^2} \int H(\bar{r}) d\bar{r} = \sigma_u^2 \quad (\text{IV-26})$$

Le domaine d'intégration est suffisamment petit pour que la moyenne spatiale de la fonction aléatoire  $u$  soit approximativement égale à sa valeur ponctuelle.

2.  $l_V \gg l_u$ ,  $H(\bar{r})$  par sa définition est approximativement égal à  $V$  sur l'entièreté du domaine où  $C_{uu} \neq 0$ , donc,

$$\sigma_{\bar{u}}^2 \approx \sigma_u^2 \left(\frac{l_u}{l_V}\right)^3 \quad (\text{IV-27})$$

Ici, pour une valeur de  $l_V$  suffisamment grande, la variance de la moyenne spatiale de  $u$  est négligeable et dans ce cas, étant donné l'identité (IV-21), nous pouvons dire que,

$$\bar{u}(\bar{r}) \approx \langle u \rangle \quad (\text{IV-28})$$

A la limite, quand  $l_V \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_{\bar{u}}^2 \rightarrow 0$  et  $\bar{u}(\bar{r}) = \langle u \rangle$ . En pratique, la relation (IV-27) nous permettra d'estimer une valeur adéquate de  $l_V$  c.à.d. la taille du volume élémentaire  $V_0$  de l'approche R.E.V.

Avant de clôturer ce paragraphe, introduisons la notion d'ergodicité de la fonction aléatoire  $u$ . Comme en pratique nous ne possédons qu'une seule réalisation de la fonction aléatoire  $u$ , c'est à partir de l'information contenue dans cette réalisation (c.à.d. à partir du comportement spatial de la fonction aléatoire  $u$  dans cette réalisation) que nous devons déduire les propriétés statistiques de l'ensemble des réalisations.

L'hypothèse d'ergodicité suppose que cette démarche est possible. Le critère utilisé pour vérifier cette hypothèse est que la variance de la moyenne spatiale tende vers zéro; c.à.d. que l'identité (IV-28) soit satisfaite et que donc la moyenne de  $u$  sur l'ensemble des réalisations puisse se déduire à partir de la moyenne spatiale de  $u$  dans une seule réalisation.

**- Interpolation par "kriging"**

L'interpolation par kriging (fort répandue en géologie et en hydrogéologie) doit son nom à D. Krige qui le premier a utilisé cette méthode d'interpolation pour la recherche de nouveaux filons aurifères lors de la prospection des mines Sud-Africaines.

Soit  $u(\bar{x})$  une fonction aléatoire de l'espace. Nous supposons posséder  $N$  valeurs mesurées de  $u$  aux points  $\bar{x}_j (j = 1, \dots, N)$ . Le problème consiste à déterminer  $u(\bar{x})$  par interpolation pour tout point du domaine. L'interpolation par kriging est une interpolation linéaire; elle suppose que  $u$  est approché par l'interpolant  $u_k(\bar{r})$  suivant,

$$u_k(\bar{r}) = \sum_{j=1}^N A_j(\bar{x}) u(\bar{x}_j) \tag{IV-29}$$

Où  $A_j(\bar{x})$  sont des coefficients à déterminer. Cependant  $u$  est également une réalisation d'une fonction aléatoire de l'espace. Supposons que celle-ci soit de moyenne constante  $m_u$  et d'incrément stationnaires. Les coefficients  $A_j(\bar{x})$  de l'interpolant  $u_k(x)$  sont déterminés à l'aide de deux conditions:

1.  $\langle u_k(x) \rangle = \langle u(\bar{x}) \rangle = \langle u(\bar{x}_j) \rangle = m_u = \text{constante}$ . De l'expression (IV-29), on obtient alors la relation,

$$\sum_{j=1}^N A_j(\bar{x}) = 1 \quad \forall \bar{x}; \tag{IV-30}$$

2. l'erreur d'estimation  $|u_k(\bar{x}) - u(\bar{x})|$  doit être minimale.

Pour satisfaire cette dernière condition, on impose généralement que  $\langle (u_k(\bar{x}) - u(x))^2 \rangle$  soit minimum en tout point du domaine. En utilisant la définition (IV-29) de l'interpolant  $u_k(\bar{x})$  et la condition (IV-30), cette grandeur s'écrit [de Marsily, 1986],

$$\langle (u_k(\bar{x}) - u(\bar{x}))^2 \rangle = - \sum_i \sum_j A_i(\bar{x}) A_j(\bar{x}) \gamma_u(\bar{x}_i - \bar{x}_j) + 2 \sum_i A_i(\bar{x}) \gamma_u(\bar{x}_i - \bar{x}) \tag{IV-31}$$

Où  $\gamma_u$  est le semi-variogramme de la variable aléatoire  $u$ . La minimisation de l'expression (IV-31) soumise à la contrainte (IV-30) est obtenue par la technique des multiplicateurs de Lagrange. Le système final obtenu est le suivant,

$$\sum_{j=1}^N A_j(\bar{x}) \gamma_u(\bar{x}_i - \bar{x}_j) = \gamma_u(\bar{x}_i - \bar{x}) \quad i = 1, \dots, N \tag{IV-32}$$

C'est un système algébrique linéaire de  $N$  équations à  $N$  inconnues  $A_j(\bar{x})$ . Ce système a une solution unique si la fonction  $\gamma_u$  est définie positive et si les  $\bar{x}_i$  sont distincts.

Enfin, l'introduction des relations (IV-32) dans la quantité (IV-31) nous permet d'obtenir la variance de l'erreur d'estimation  $u_k(\bar{x}) - u(\bar{x})$ . On trouve en effet,

$$\langle (u_k(\bar{x}) - u(\bar{x}) - \langle u_k(\bar{x}) - u(\bar{x}) \rangle)^2 \rangle = \langle (u_k(\bar{x}) - u(\bar{x}))^2 \rangle = \sum_{i=1}^N A_i(\bar{x}) \gamma_u(\bar{x}_i - \bar{x}) \quad (\text{IV-33})$$

Où les  $A_i(\bar{x})$  sont calculés à partir du système (IV-32). Si  $u$  est stationnaire, la variance précédente devient (en appliquant la relation (IV-20)),

$$\langle (u_k(\bar{x}) - u(\bar{x}))^2 \rangle = \sigma_u^2 - \sum_{i=1}^N A_i(\bar{x}) \gamma_u(\bar{x}_i - \bar{x}) \quad (\text{IV-34})$$

Nous voyons dès lors que la variance de l'erreur d'estimation de la quantité inconnue  $u$  est inférieure à la variance de la fonction aléatoire  $u$ : les points de mesures imposent une contrainte sur le champ aléatoire et diminue la variance de ce champ. Ce phénomène doit être pris en compte dans la génération de champs aléatoires conditionnels.

### IV.9.3 Ecoulement en milieux poreux

#### IV.9.3.1 Définition

##### - Domaine d'écoulement

Les formations souterraines peuvent être divisées verticalement en plusieurs zones selon la proportion relative des pores occupés par l'eau. On distingue une zone de saturation dans laquelle tous les pores sont complètement remplis d'eau et une zone d'aération (appelée aussi zone non saturée) qui se situe au-dessus de la zone de saturation et dans laquelle les pores contiennent à la fois une phase gazeuse (principalement de l'air et de la vapeur d'eau) et de l'eau. La surface séparant ces deux zones est appelée surface de la nappe phréatique ou plus simplement surface phréatique. Au niveau de la surface phréatique, la pression est égale à la pression atmosphérique.

C'est en-dessous de la zone d'aération, dans la zone de saturation, que l'eau rencontrée est appelée eau souterraine par les hydrologues. Sauf mention contraire, nous associerons dans la suite la zone de saturation au domaine d'écoulement, c'est-à-dire le domaine de définition et d'étude des grandeurs et des relations entre grandeurs relatives à l'écoulement. Ce domaine d'écoulement est limité supérieurement par la surface phréatique.

##### - Porosité totale - porosité cinématique

Considérons l'approche stochastique du milieu poreux et définissons la fonction aléatoire,

$$L(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{x} \text{ est dans le grain,} \\ 1 & \text{si } \bar{x} \text{ est dans un pore.} \end{cases} \quad (\text{IV-35})$$

Appelée fonction caractéristique des pores. La porosité totale notée  $\emptyset$  est la grandeur macroscopique définie par,

$$\emptyset = \langle L(\bar{x}) \rangle = \int L f(L) dL \quad (\text{IV-36})$$

Où  $L(\bar{x}) = (1 - \emptyset)\delta L + \emptyset\delta(L - 1)$  ou  $\delta L$  est une distribution de Dirac.

Selon l'approche R.E.V., on définit encore  $\emptyset$  comme,

$$\emptyset = \frac{1}{V} \int_V L(\bar{x}) d\bar{x} \quad (\text{IV-37})$$

La porosité totale est donc la proportion du volume de pores dans le milieu;  $\emptyset = V_p + \frac{V_p}{V}$  où  $V_p$  est le volume des pores et  $V_s$ , est le volume de la matrice solide.

Pour les roches cristallines  $\emptyset$  varie de 1 à 5%, pour les sables  $\emptyset$  est proche des 30% et pour les argiles des valeurs de 40%, voire plus, sont constatées.

Pour un milieu poreux saturé en eau (c.à.d. que tous les pores sont remplis d'eau), on définit également une porosité cinématique ou effective noté  $\emptyset_c$ . Cette porosité est liée à la circulation du fluide dans le milieu et non au pourcentage de volume occupé par la phase liquide.

L'existence de pores non connectés ou de phénomènes d'adhésion de l'eau à la phase solide ont un effet limitatif sur l'écoulement du fluide et sont responsables d'une porosité cinématique (effective) inférieure à la porosité totale.

**- Teneur en eau**

Cette grandeur macroscopique apparaît dans un milieu poreux non saturé en eau où une troisième phase (l'air) peut occuper l'espace des pores. Elle est définie comme suit,

$$\theta = \frac{\text{volume d'eau}}{\text{volume total du milieu}} \quad (\text{IV-38})$$

$\theta$  est appelée teneur en eau. On a,  $0 \leq \theta \leq \emptyset$ .

**- Potentiel hydraulique**

Cette grandeur macroscopique, bien connue en hydraulique, est également appelée hauteur piézométrique. Le potentiel hydraulique d'un fluide incompressible soumis seulement à la gravité est défini par:

$$h(\bar{r}) = \frac{v^2(\bar{r})}{2g} + \frac{p(\bar{r})}{\rho(\bar{r})g} + z(\bar{r})$$

ou  $v(\bar{r})$  est le module de vitesse du fluide au point  $\bar{r}$ ,  $p(\bar{r})$  la pression dans le fluide,  $\rho(\bar{r})$  la masse volumique du fluide,  $z(\bar{r})$  la hauteur mesurée positivement vers le haut et  $g$  l'accélération gravitationnelle. En milieu poreux, le terme cinétique est toujours négligeable vu les faibles vitesses  $v$ ; et donc le potentiel hydraulique s'écrit,

$$h(\bar{r}) = \frac{p(\bar{r})}{\rho(\bar{r})g} + z(\bar{r}) \quad \text{(IV-39)}$$

### IV.9.3.2 Les équations fondamentales en milieu poreux

#### - Equations de la dynamique des fluides

Pour résoudre tout problème d'écoulement d'un fluide Newtonien, 6 inconnues doivent être déterminées: la masse volumique  $\rho$ , la pression  $p$ , la température  $T$  et les composantes  $v_i$  du champ de vitesses  $v$ . Ces 6 inconnues dépendent du temps  $t$  et de la variable spatiale. Si nous supposons que le milieu est isotherme (ce qui est souvent le cas dans les milieux poreux), il nous reste 5 inconnues. Elles sont déterminées à partir des équations suivantes:

(1) l'équation de continuité,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}(\rho \bar{v}) = S \quad \text{(IV-40)}$$

Où  $S$  est un terme de source, c.à.d. la masse de fluide introduite ou extraite par unité de volume et de temps dans le domaine et  $\bar{\nabla}$  est l'opérateur Nabla;

(2) les équations de Navier-Stokes,

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \mu \bar{\nabla}^2 v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial v_i} (\bar{\nabla} \bar{v}) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho F_i \quad \text{(IV-41)}$$

Où  $\mu$ , est la viscosité dynamique supposée constante;  $F_i$  la composante  $i$  de la force en volume  $\bar{F}$  (qui est une force par unité de masse) et  $\bar{\nabla}^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  ;

(3) l'équation d'état du fluide, par exemple,

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(p-p_0)} \quad \text{(IV-42)}$$

Ou  $\beta$ , est le facteur de compressibilité.

#### - Equations en milieu poreux

Nous montrons dans ce paragraphe comment les équations générales de la dynamique des fluides peuvent être transposées dans le cas d'un milieu poreux.

Les équations (IV-40) à (IV-42) sont des équations "microscopiques" c.à.d. valables à l'échelle des pores et uniquement dans les pores que nous supposons ici saturés en eau. Par exemple la vitesse  $v$  dans les équations (IV-40) et (IV-41) représente la vitesse microscopique, c'est-à-dire celle qu'a le fluide dans les pores. Cette vitesse est nulle à l'intérieur des grains.

Obtenir les grandeurs et équations macroscopiques du milieu poreux revient à obtenir les grandeurs et équations d'écoulement dans un milieu biphasique au minimum. Cette démarche est équivalente à un changement d'échelle. Les grandeurs et équations macroscopiques s'obtiennent soit par l'approche R.E.V. [de Marsily, 1986]; [Bear, 1979] soit par l'approche stochastique [Dagan, 1989]; l'hypothèse d'ergodicité permettant l'interchangeabilité des deux approches. Nous considérons ici l'approche stochastique.

Multiplions l'équation (IV-40) par la fonction indicatrice des pores  $L$  définie en (IV-35) et prenons la moyenne (sur l'ensemble des réalisations) de l'équation résultante, on a,

$$\langle L \frac{\partial \rho}{\partial t} \rangle + \langle L \bar{V}(\rho \bar{v}) \rangle = \langle L S \rangle \tag{IV-43}$$

La fonction  $L$  étant une fonction discontinue, il y a lieu d'être prudent quant à la définition de sa dérivée. Les développements mathématiques nécessitent dès lors quelques précautions. Les calculs conduisent à l'équation,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle L \rho \rangle + \bar{V} \langle L \rho \bar{v} \rangle = \langle L S \rangle \tag{IV-44}$$

On définit ensuite les grandeurs macroscopiques suivantes dans les pores (phase fluide),

$\langle S \rangle = \langle L S \rangle$  est la source macroscopique;

$\langle \rho \rangle = \frac{\langle L \rho \rangle}{\langle L \rangle} = \frac{\langle L \rho \rangle}{\emptyset}$  est appelée masse volumique macroscopique du fluide;

$\langle \bar{v} \rangle = \frac{\langle L \rho \bar{v} \rangle}{\langle \rho \rangle \langle L \rangle}$  est appelée vitesse moyenne dans les pores ;

Pour être plus précis, la vitesse moyenne dans les pores vaut plutôt  $\langle \bar{v} \rangle = \frac{\langle L \rho \bar{v} \rangle}{\langle \rho \rangle \emptyset_c}$  où  $\emptyset_c$  est la porosité cinématique. Cette vitesse est rarement utilisée en pratique. On lui préfère la vitesse définie comme suit,

$\bar{q} = \frac{\langle L \rho \bar{v} \rangle}{\langle \rho \rangle} = \emptyset \langle \bar{v} \rangle$  est appelée vitesse de filtration ou vitesse de Darcy.

Cette vitesse représente une moyenne des vitesses microscopiques sur le milieu poreux total (phase fluide et solide). Elle peut être mesurée expérimentalement (en appliquant le principe d'interchangeabilité entre la moyenne spatiale et la moyenne sur un ensemble de réalisations) par une mesure de débit au travers d'une surface. L'équation (IV-44) devient alors,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \phi \langle \rho \rangle \rangle + \bar{\nabla} \langle \langle \rho \rangle \bar{q} \rangle = \langle S \rangle \quad (\text{IV-45})$$

Qui est l'équation de continuité macroscopique dans la phase liquide d'un milieu poreux. Pour une phase solide non déformable c.à.d.  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  est homogène c.à.d.  $\bar{\nabla} \phi$ , l'équation (IV-45) devient,

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \bar{\nabla} \langle \langle \rho \rangle \langle \bar{v} \rangle \rangle = \frac{\langle S \rangle}{\phi} \quad (\text{IV-46})$$

Si de plus la compressibilité du fluide est négligeable, nous obtenons:

$$\bar{\nabla} \bar{q} = \frac{\langle S \rangle}{\langle \rho \rangle} \quad (\text{IV-47})$$

Nous écrirons dans la suite les grandeurs  $\langle \rho \rangle$  et  $\langle S \rangle$  en omettant les signes  $\langle \rangle$ . Ayant obtenu l'équation de continuité macroscopique en milieu poreux, nous pourrions appliquer les mêmes techniques que celles vues précédemment en moyennant les équations de Navier-Stokes. Néanmoins cette démarche n'est jamais entreprise car elle conduirait à faire intervenir dans les équations résultantes les pressions et les vitesses microscopiques du fluide au niveau des interfaces phase liquide-phase solide (voir annexe A). Les détails de ces vitesses et pressions n'étant pas connus, il a fallu trouver une loi macroscopique en milieu poreux permettant de lier les grandeurs macroscopiques: vitesse, pression et forces extérieures, C'est le rôle de la loi expérimentale de Darcy.

Nous pouvons cependant, à partir de situations simplifiées, résoudre les équations de Navier-Stokes et obtenir une loi macroscopique qui peut être comparée à la loi expérimentale de Darcy; cette démarche ne constituant pas une preuve de la loi de Darcy, étant donné que cette loi est phénoménologique. Mentionnons ici que les travaux de Matheron [Matheron, 1967] ont permis de justifier la loi de Darcy par intégration des équations de Navier-Stokes dans un milieu réel.

Matheron montre que la loi de Darcy est uniquement le résultat de la linéarité des équations de Navier-Stokes et pas de leurs formes! Dans [de Marsily, 1986], l'auteur détermine dans le cas d'un écoulement stationnaire et pour un fluide incompressible la solution des équations de Navier-Stokes dans trois cas simples:

- . l'écoulement stationnaire dans une fissure d'épaisseur  $e$  constante de largeur  $b$  et de longueur  $l$ .
- . l'écoulement à travers un tube de section circulaire de rayon  $r$ .
- . le même écoulement que dans le cas (1) mais lorsque la fissure est orientée verticalement et l'écoulement soumis à la gravité.

Dans les deux premiers cas, la forme des solutions des équations de Navier-Stokes suggèrent que le flux total  $Q$  à travers une section d'aire  $A$  du milieu poreux soit proportionnel à  $A$ , au gradient de pression et inversement proportionnel à la viscosité dynamique  $\mu$ , le coefficient de proportionnalité dépendant de la géométrie des pores ou des fissures. Nous verrons que c'est la forme de la loi expérimentale de Darcy.

Dans le dernier cas, les solutions des équations de Navier-Stokes nous fournissent la relation suivante,

$$Q = A \frac{k}{\mu} \left( \frac{p_1 - p_2}{l} - \rho g \right) \quad (\text{IV-48})$$

Où  $p_1$  et  $p_2$  sont les pressions respectivement à l'entrée et à la sortie d'une fissure de longueur  $l$ ,  $g$  est la constante gravitationnelle et  $k$  un coefficient de proportionnalité. Cette dernière relation suggère une généralisation de la loi de Darcy dans le cas de forces extérieures.

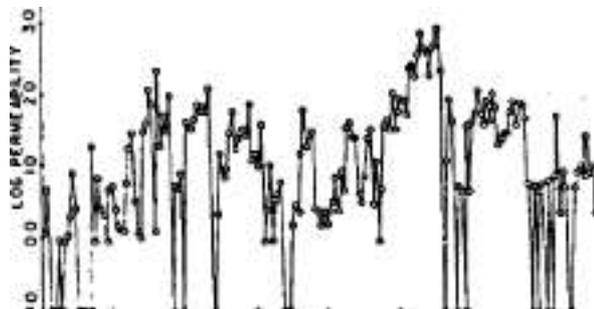
## IV.9.4 L'écoulement en milieu stochastique

### IV.9.4.1 Comportement des variables hydrogéologiques

Nous mentionnerons ici les hypothèses généralement utilisées pour décrire, selon l'approche stochastique, la variabilité spatiale des paramètres hydrogéologiques dans une formation naturelle. Ces hypothèses ont été déduites suite à la collection d'un grand nombre de données expérimentales obtenues pour toutes sortes de formations naturelles. Précisons que la variabilité considérée ici est la variabilité des grandeurs macroscopiques (locales) dans un domaine constitué par exemple d'une couche géologique dont l'épaisseur varie de quelques mètres à quelques centaines de mètres et dont l'extension horizontale peut atteindre des dizaines de kilomètres. Dans ce domaine, les grandeurs locales varient de manière fort irrégulière dans l'espace et ces variations apparaissent à une échelle beaucoup plus grande que l'échelle du laboratoire (qui est elle de l'ordre de quelques dizaines de centimètres).

Le paramètre hydrogéologique le plus étudié est la conductivité hydraulique (ou la perméabilité dont elle dépend) qui apparaît seule dans l'équation d'écoulement stationnaire.

Les données expérimentales compilées dans [Freeze, 1975] ont permis de déduire que la conductivité hydraulique  $K(\vec{r})$  est hautement variable et devrait être caractérisée par une densité de distribution. La figure IV-5 extraite de [Gelhax, 1986] illustre pour un site réel la variabilité de la perméabilité en fonction de la distance.



**Figure IV.5** Illustration de la variabilité spatiale de la perméabilité (conductivité hydraulique); 1 pied = 30,48cm; la perméabilité est exprimée en millidarcy =  $0,987 \cdot 10^{-15} \text{m}^2$ .

On remarquera à la figure IV.5 que la perméabilité est exprimée en échelle logarithmique! L'analyse de Freeze conclut que la distribution qui s'adaptait le mieux aux données était une distribution log-normale pour  $K$ ; c'est-à-dire que,

$$Y = \ln K \quad (\text{IV-49})$$

appelée "log-conductivité hydraulique" est distribuée selon une loi normale  $N(m_y, \sigma_y)$  où  $m_y = \langle Y \rangle$  est la moyenne, et  $\sigma_y$  est l'écart-type.

$$f(Y) = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(Y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right] \quad (IV-50)$$

Ces hypothèses ont été confortées par d'autres études et sont à l'heure actuelle généralement admises.

Un type d'hétérogénéité peut néanmoins échapper à cette règle, celui dû à de fines inclusions imperméables dans un milieu conducteur [Dagan, 1989]; dans ce cas, des distributions bimodales de  $Y = \ln K$  sont utilisées [Rubin and Journel, 1991].

Pour une distribution log-normale, comme la conductivité hydraulique  $K$ , le moment d'ordre  $\emptyset$  de  $K$  vaut,

$$\langle K^n \rangle = \exp \left\{ \emptyset m_Y + \frac{\emptyset^2}{2} \sigma_Y^2 \right\} \quad (IV-51)$$

Pour  $\emptyset=1$ , (IV-51) fournit l'expression de la moyenne arithmétique de  $K$ , notée  $K_A$ . Souvent, les moyennes géométrique et harmonique sont utilisées. Elles sont définies par,

$$K_G = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left( \prod_{i=1}^N u_i \right)^{1/N} \right\}$$

$$K_H = \frac{1}{\langle K^{-1} \rangle}$$

Ces trois moyennes ont des expressions simples pour des distributions log-normales ( $y = \ln K$ ),  $K_A = \exp \left\{ m_Y + \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \right\}$ ,  $K_G = \exp(m_Y)$ ,  $K_H = \exp \left\{ m_Y - \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \right\}$ . (IV-52)

Au tableau IV.3, nous reprenons les valeurs de  $K_G$ ,  $m_Y$  et  $\sigma_Y$  extraites de [Dagan, 1989] pour quelques formations naturelles ( $K$  est exprimé en cm/s).

**Tableau IV.3** Paramètres statistiques de la conductivité hydraulique log-normale ( $K$  en cm/s)

Formation	$K_G$	$m_Y$	$\sigma_Y$
Sandstone	$1.51 \times 10^{-4}$	-8.79	0.92
Sandstone	$4.36 \times 10^{-4}$	-7.73	0.46
Sand and gravel	-		1.01
Sand and gravel	-		1.24
Sand and gravel	-		1.66
Silty clay	$1 \times 10^{-3}$	-6.90	2.14
Loamy sand	$2.09 \times 10^{-3}$	-6.16	1.98

Etant donné que  $K(\bar{r})$  est une fonction aléatoire de l'espace, sa détermination complète nécessite la connaissance de propriétés de corrélations. Dans le cas particulier d'une distribution normale pour  $Y$ , les propriétés statistiques de  $Y$  sont entièrement déterminées par  $m_Y$ ,  $\sigma_Y$  et l'auto-covariance définie au paragraphe II.4.2. Dans l'hypothèse d'une stationnarité faible (voir paragraphe II.4.3), on a :  $C_{YY}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = C_{YY}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \equiv C_{YY}(\bar{r})$ , ou  $\bar{r} = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$ . On définit alors les longueurs de corrélation,

$$I_{Y_i} = \frac{1}{\sigma_Y^2} \int_0^\infty C_{YY}(\bar{r}) \Big|_{r_i \neq 0} dr_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (IV-53)$$

Où  $r_i$  est la  $i^{ème}$  composante de  $\bar{r}$  et  $C_{YY}(\bar{r}) \Big|_{r_i \neq 0}$  est l'expression de l'auto-covariance où toutes les composantes cartésiennes de  $f$  sont nulles sauf la  $i^{ème}$  qui est variable d'intégration. Dans le tableau IV.3, extrait de [Dagan, 1989], quelques valeurs de l'écart-type  $\sigma_y$  et des longueurs de corrélation  $I_{Y_h}$  et  $I_{Y_v}$  de la log-conductivité sont données pour des formations naturelles types ( $I_{Y_h}$  est la longueur de corrélation horizontale et  $I_{Y_v}$  est la longueur de corrélation verticale). On trouvera également dans [Dagan, 1989, ppl68-172] des exemples d'expression pour l'auto-covariance  $C_{YY}(\bar{r})$ . Les modèles souvent rencontrés sont les modèles exponentiels, gaussiens ou linéaires,

$$C_{YY}(\bar{r}) = \sigma_Y^2 e^{-r/l_Y} \quad (IV-54)$$

$$C_{YY}(\bar{r}) = \sigma_Y^2 e^{-r/l_Y} \quad (IV-55)$$

$$C_{YY}(\bar{r}) = \begin{cases} \sigma_Y^2 (1 - \frac{r}{l_Y}) & \text{si } r < l_Y \\ 0 & \text{si } r \geq l_Y \end{cases} \quad (IV-56)$$

Les covariances exponentielles et gaussiennes sont également utilisées sous leur forme anisotropique pour des milieux stratifiés. Ils sont souvent utilisés dans des modèles d'écoulement et de transport pour leur simplicité. Le modèle de milieu géologique conduisant à la covariance linéaire (IV-56) est un ensemble de blocs de mêmes dimensions; dans chaque bloc, la conductivité hydraulique est constante et elle est distribuée parmi les blocs selon une distribution log-normale. Le semi-variogramme associé à la covariance linéaire est,

$$\gamma_Y = \frac{\sigma_Y^2}{l_Y} r \quad (IV-57)$$

Il peut être employé pour la modélisation de formations à incréments stationnaires et variance non bornée; en général pour une variation régionale de  $Y$  lorsque les dimensions du domaine d'étude ne sont pas beaucoup plus grandes que  $l_Y$ , le "range"

Les propriétés stochastiques de la porosité et du coefficient d'emmagasinement spécifique ont également été étudiées mais les résultats sont beaucoup plus rares. Dès lors, Preeze a suggéré une loi empirique de corrélation linéaire entre  $\phi$  et  $Y$  [Preeze, 1975].

$$\phi \approx 0,375 - 0,011.Y \quad (\text{IV-58})$$

Pour  $K$  exprimé en cm/s. Deux faits principaux déduits de (IV-58) sont généralement acceptés, a) la porosité peut être décrite par une distribution normale; b) la variance de  $\phi$  est beaucoup plus faible que celle de  $Y$  (d'environ quatre ordres de grandeur).

La relation linéaire entre  $\log_{10} \alpha_e$  et  $\log_{10} K$  proposée par Preeze [Preeze, 1975] pour l'évaluation du coefficient d'emmagasinement  $S_e$  dans peut être utilisée pour relier  $S_e$  à  $Y$ . En négligeant l'effet de la compressibilité de l'eau, on obtient,

$$\ln S_e = \ln(\rho g) + \ln \alpha_e = -16,9 - \frac{Y}{3} \quad (\text{IV-59})$$

Pour  $K$  exprimé en cm/s et  $S_e$  en  $\text{cm}^{-1}$ . La relation (IV-59) suggère que  $\ln S_e$ , comme  $Y$ , soit normal et que sa variance soit plus petite, d'un ordre de grandeur, que celle de  $Y$ .

Le peu d'informations à l'heure actuelle au sujet des propriétés stochastiques de  $n$  et de  $s_e$  ne permet pas de déduire plus que ce qui découle de (IV-58) et (IV-59) (notamment sur la structure des corrélations spatiales). Néanmoins, nous avons vu que les variations spatiales de  $\phi$  et de  $S_e$  sont largement inférieures à celles de  $K$ ; la modélisation de leurs comportements stochastiques n'est dès lors généralement pas envisagée.

Le problème de la génération des variables aléatoires avec les propriétés statiques mentionnées ci-dessus sera abordé ultérieurement.

**Tableau IV.4** Valeurs types des variances et longueurs de corrélation de la log-conductivité hydraulique (longueurs en m)

Formation	$\sigma_Y$	$l_{Yh}$	$l_{Yv}$
Sandstone	1.5-2.2		0.3-1.0
Outwash sand	0.8	>10	0.4
Fluvial sand	0.9	>3	0.1
Sand and gravel	1.9	17	0.5

#### IV.9.4.2 Résolution de l'équation d'écoulement stochastique

Nous introduisons quelques méthodes types utilisées pour la résolution de l'écoulement dans un milieu stochastique. Ces méthodes regroupées ici ne constituent qu'un aperçu bref et provisoire des nombreux travaux réalisés à l'heure actuelle dans le domaine de l'écoulement en milieu géologique.

##### - La méthode dite de "simulation Monte Carlo"

Cette méthode, la plus simple au niveau conceptuel, consiste uniquement à simuler des champs aléatoires de paramètres (principalement la conductivité hydraulique) et à résoudre pour chaque réalisation donnée, l'équation d'écoulement par des méthodes classiques de résolutions numériques (éléments finis, différences finies, ...). Les résultats de ces simulations sont (dans le cas d'un écoulement stationnaire) le potentiel hydraulique  $h_{j,k}$  en tout nœud  $j$  du domaine et pour chaque réalisation  $k$  du champ aléatoire de la conductivité hydraulique. L'analyse de ces résultats nous fournit alors directement une évaluation numérique des propriétés statistiques du potentiel hydraulique: la moyenne  $\langle h \rangle$  la covariance  $C_{hh}$  et les moments d'ordre supérieur. Les mêmes renseignements ( $\langle \bar{q} \rangle, C_{q_l}, C_{q_m}, \dots$ ) peuvent être obtenus pour la vitesse de Darcy lorsque celle-ci est calculée à partir des solutions  $h_{jk}$  en tout nœud  $j$  du domaine pour chaque réalisation  $k$  de la conductivité. Enfin, de ces résultats, on tire également la covariance croisée  $C_{hY}$ .

Cette méthode numérique porte souvent le nom de "simulation Monte Carlo" dans les études de risque de stockage de déchets radioactifs [PAGIS, 1988b, WIPP, 1992] ainsi que dans la littérature hydrogéologique [Preeze, 1975, Smith and Preeze, 1979a, Smith and Freeze, 1979b, Ünü et al., 1990]. Afin de la distinguer de la simulation Monte Carlo communément utilisée dans le domaine du transport de particules (neutrons, photons, aérosols, ... ) et sur laquelle nous reviendrons dans les chapitres ultérieurs, nous appellerons la méthode numérique présentée ici "simulation Monte Carlo de paramètres".

Le principal avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite aucune hypothèse sur la nature des champs aléatoires générés (au niveau de la valeur de la variance ou de propriétés de stationnant notamment). Elle rencontre par contre trois difficultés en pratique:

a. Le remplacement des fonctions aléatoires de l'espace  $Y$  et  $h$  par un ensemble de valeurs discrètes lors de la résolution de l'équation d'écoulement (par les méthodes différences finies ou éléments finis) pose le problème de la sélection de la taille de la grille. Comme nous l'avons vu à la figure II.9, ce problème est fort délicat étant donné la grande variabilité de la conductivité hydraulique. L'équation d'écoulement est parfois écrite en fonction de  $Y = \ln K$ , à savoir,

$$\nabla^2 h + \bar{\nabla} Y \cdot \bar{\nabla} h = \frac{q}{K} \quad (\text{IV-60})$$

Mais  $\bar{\nabla} Y$  reste fort variable malgré tout.

b. La décomposition du domaine en blocs de conductivité hydraulique constante (lors de la discrétisation) pose le problème de la corrélation des valeurs de la conductivité entre blocs. Dans [Smith and Preeze, 1979a, Smith and Preeze, 1979b] les auteurs introduisent une corrélation approchée à l'aide d'un modèle appelé modèle du plus proche voisin ("nearest-neighbor model"). A une dimension, on a,

$$Y_i = \alpha(Y_{i-1} + Y_{i+1}) + \varepsilon_i \quad (\text{IV-61})$$

Où  $Y_i$  est la log-conductivité constante dans le bloc  $i$ ;  $\varepsilon_i$  est une variable gaussienne indépendante et  $\alpha$  est un paramètre d'auto-régression. Les relations (IV-61) forment un système algébrique linéaire de  $m$  équations à  $m$  inconnues ( $Y_i$ ) où  $m$  est le nombre de blocs. Ce système est résolu pour chaque tirage au sort des  $\varepsilon_i$ . La distribution des  $Y_i$  est alors gaussienne et la corrélation spatiale dans ce modèle discret en blocs est représenté par une fonction échelon décroissante qui décroît d'autant plus vite que le paramètre  $\alpha$  est faible [Smith and Ereeze, 1979a].

Remarquons que dans ce modèle, on ne peut pas imposer une fonction de corrélation spatiale donnée.

c)- Etant donné qu'une équation d'écoulement doit être résolue pour chaque réalisation du champ aléatoire de conductivité, la méthode est rapidement limitée (pour des raisons de temps de calcul prohibitifs) à un nombre restreint de réalisations pour une modélisation réaliste 2D ou 3D du domaine d'écoulement. On trouve par exemple dans les études du projet WIPP [WIPP, 1992] un nombre maximum de 70 générations de champs de conductivité dans un domaine bidimensionnel. Il peut en découler une incertitude statistique élevée (voir le chapitre sur le transport par simulation Monte Carlo) qui entache les résultats de la simulation (moyenne et moments d'ordre supérieur).

### - La méthode des perturbations

Contrairement à la méthode précédente, la méthode des perturbations est basée sur l'hypothèse que la variance de la log-conductivité est faible :  $\sigma_Y^2 \ll 1$ , de plus, on suppose en général que le champ aléatoire  $Y$  possède la propriété de stationnant faible. Cette méthode permet, grâce à un développement limité, d'obtenir des équations approchées pour la moyenne  $\langle h \rangle$ , l'auto-covariance  $C_{hh}$  et la covariance croisée  $C_{Yh}$ , elle permet également d'évaluer sous certaines conditions le tenseur de conductivité hydraulique effectif reliant la vitesse de filtration moyenne  $\langle \bar{q} \rangle$  au potentiel hydraulique moyen  $\langle h \rangle$ .

En supposant que  $\langle h \rangle$ ,  $C_{hh}$  et  $C_{Yh}$  peuvent être développés en série pour  $\sigma_Y^2$  faible, nous avons :

$$\langle h \rangle = \langle h \rangle^0 + \langle h \rangle^1 + \langle h \rangle^2 + \dots$$

$$F_{hh}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \langle h(\bar{r}_1)h(\bar{r}_2) \rangle = F_{hh}^{(1)} + F_{hh}^{(2)} + \dots \quad (\text{IV-62})$$

$$F_{Yh}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = F_{Yh}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = F_{Yh}^{(1)} + F_{Yh}^{(2)} + \dots$$

A partir de  $F_{hh}$  et  $F_{Yh}$ , les covariances  $C_{hh}$  et  $C_{Yh}$  sont calculées grâce aux relations,

$$C_{hh}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = F_{hh}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) - \langle h(\bar{r}_1) \rangle \langle h(\bar{r}_2) \rangle \text{ et}$$

$$C_{Yh}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = F_{Yh}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) - \langle Y(\bar{r}_1) \rangle \langle h(\bar{r}_2) \rangle$$

Dans les développements (3-14), nous avons  $\langle h \rangle^{j+1} / \langle h \rangle^j \rightarrow 0$  pour  $\sigma_Y^2 \rightarrow 0$  ainsi que pour  $F_{Yh}^j$  et  $F_{hh}^j$  une valeur supérieure de l'indice ( $j + 1$ ) par rapport à l'indice  $j$  indiquant uniquement un ordre supérieur en  $\sigma_Y^2$ . L'absence de termes d'indice 0 dans les développements de  $F_{hh}$  et  $F_{Yh}$  provient de ce que  $F_{hh}$  et  $F_{Yh}$  (ainsi que  $C_{hh}$  et  $C_{Yh}$ ) sont nuls quand  $\sigma_Y^2 \rightarrow 0$ .

Nous partons de la forme (IV-60) de l'équation d'écoulement avec une source  $Q$  nulle et nous développons formellement  $h$  en une série, pour  $\sigma_Y^2$  faible comme pour les expressions (IV-62), à savoir,

$$h = h^{(0)} + h^{(1)} + h^{(2)} + \dots \quad (4-63)$$

Pour  $\sigma_Y^2 \rightarrow 0$ ,  $h = h^{(0)}$  devient une solution déterministe pour l'écoulement dans un milieu homogène de log-conductivité constante  $Y = \langle Y \rangle = m_Y, K = K_G = \exp(m_Y)$ . En introduisant (IV-63) dans (IV-60), on obtient en rassemblant les termes de même ordre,

$$\nabla^2 h^{(0)} = 0 \quad (IV-64)$$

$$\nabla^2 h^{(1)} = -\bar{\nabla} Y \cdot \bar{\nabla} h^{(0)} \quad (IV-65)$$

$$\nabla^2 h^{(2)} = -\bar{\nabla} Y \cdot \bar{\nabla} h^{(1)} \quad (IV-66)$$

En considérant des conditions aux limites déterministes, on voit à partir de (3.16) que est une solution déterministe, c'est-à-dire  $\langle h \rangle^{(0)} = h^{(0)}$ . De plus, en prenant la moyenne de (3.17), on a :

$$\nabla^2 \langle h^{(1)} \rangle = -\langle \bar{\nabla} Y \cdot \bar{\nabla} h^{(0)} \rangle = -\langle \bar{\nabla} Y \rangle \cdot \bar{\nabla} h^{(0)} = 0$$

où la dernière égalité provient de la stationnarité du champ aléatoire  $Y$ . Etant donné que les conditions aux limites sont homogènes pour l'équation précédente, on obtient  $\langle h^{(1)} \rangle$ . Dès lors, le premier terme du développement de  $F_{Yh}$  s'écrit  $C_{Yh}^{(1)}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \langle Y(\bar{r}_1) \rangle \langle h(\bar{r}_2) \rangle = C_{Yh}(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$  et l'équation de s'obtient en multipliant (3.17) par  $F_{Yh}^{(1)}$  (ou  $C_{Yh}^{(1)}$ ) et en prenant la moyenne :

$$\bar{\nabla}_2^2 C_{Yh}^{(1)}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = -\bar{\nabla} h^{(0)}(\bar{r}_2) \langle Y(\bar{r}_1) \bar{\nabla} Y(\bar{r}_2) \rangle = \bar{J}^0(\bar{r}_2) \bar{\nabla}_2 C_{YY}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \quad (IV-67)$$

où  $\bar{\nabla}_2$  est l'opérateur nabla agissant sur  $\bar{r}_2$  et  $\bar{J}^0 = -\bar{\nabla} h^{(0)}$ .

L'équation (3.19) est une équation de Poisson pour  $C_{Yh}^{(1)}$  dont le membre de droite est exprimé à partir de l'approximation d'ordre zéro  $h^{(0)}$  (solution d'une équation de Laplace avec des conditions aux limites déterministes) et à partir de la covariance  $C_{YY}$ . De plus, on voit que  $C_{Yh}^{(1)}$  est d'ordre  $\sigma_Y^2$ .

Dans [Dagan, 1989], l'auteur obtient de façon similaire pour le premier terme du développement  $F_{hh}, F_{hh}^{(1)}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \langle h^{(1)}(\bar{r}_1)h^{(2)}(\bar{r}_2) \rangle = C_{hh}^{(1)}(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$  de l'équation suivante:

$$\bar{V}_2^2 \bar{V}_2^1 C_{Yh}^{(1)} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 J_j^{(0)}(\bar{r}_1) J_k^{(0)}(\bar{r}_2) \frac{\partial^2}{\partial x_{1j} \partial x_{1k}} C_{YY}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \quad (IV-68)$$

où à nouveau  $C_{hh}^{(1)}$  satisfait une équation linéaire non homogène; on constate aussi que  $C_{hh}^{(1)}$  est d'ordre  $\sigma_Y^2$ .

Suite aux développements précédents nous pouvons faire les remarques suivantes:

a. la détermination des moments des grandeurs  $h$  et  $Y$  devient vite complexe; elle est limitée en pratique à l'approximation du premier ordre.

b. les équations (3.19) et (3.20) pour les approximations au premier ordre  $C_{Yh}^{(1)}$  et  $C_{hh}^{(1)}$  ont été résolues dans la littérature pour des cas tests (domaines simples 1D, 2D et 3D infinis) avec une covariance  $C_{YY}$  exponentielle. Ces résultats montrent que  $C_{Yh}^{(1)}(\bar{r})$  est négatif et tend vers une constante non nulle quand  $\bar{r} \rightarrow \infty$  pour l'écoulement 1D. Cette longueur de corrélation infinie s'interprète aisément en considérant un milieu parfaitement stratifié, un écoulement perpendiculaire aux strates (équivalent à un écoulement 1D) et des potentiels fixés aux extrémités du domaine d'écoulement. Dans cette situation la moindre variation de la **log conductivité hydraulique**  $Y$  de la couche la moins perméable (par exemple) se répercute sur la solution d'écoulement 0 dans l'entièreté du domaine. Pour un domaine de dimension infinie, la longueur de corrélation associée à  $C_{Yh}$  est donc infinie.

Pour des écoulements 2D et 3D,  $C_{Yh}^{(1)}(\bar{r}_x)$  tend cette fois-ci vers zéro quand  $\bar{r}_x \rightarrow \infty$ , la décroissance étant plus rapide dans le cas 3D que dans le cas 2D. Contrairement au cas 1D, les lignes d'écoulement peuvent contourner des inclusions imperméables dans un écoulement 2D et encore plus facilement dans un écoulement 3D. La corrélation entre  $Y$  et  $h$  devient donc locale.

La méthode des perturbations n'est applicable rigoureusement que sous certaines conditions restrictives. Elle est pourtant souvent utilisée en pratique (même lorsque les conditions de validité ne sont qu'approximativement satisfaites) car elle donne des relations explicites entre les moments des grandeurs aléatoires et permet d'en déduire approximativement leur comportement.

### - Théorie non locale

La théorie non locale est une alternative aux approches de type **Monte Carlo** ou **perturbations** présentée par Neuman et Orr (1993), Tartakovsky et Neuman (1998, 1999) et Guadagnini et Neuman (1999). Elle repose sur la formulation et la résolution d'un jeu d'équations déterministes satisfaites par les moments d'ensemble de la charge hydraulique et du flux.

Les moments conditionnels (conditionnés par des valeurs de la log-conductivité  $K$ ) des variables de l'écoulement (permanent) d'ordre un (Neuman et Orr, 1993) et deux (Guadagnini et Neuman, 1999) sont présentés comme les solutions d'équations proches des équations déterministes traditionnelles. Afin de permettre leur résolution numérique, ces équations sont ensuite développées suivant les puissances du paramètre  $\sigma_Y$ , ce qui limite les résultats obtenus par la suite aux milieux faiblement hétérogènes ou aux milieux fortement conditionnés.

En particulier, on retrouve chez Neuman et Orr (1993) une définition de la **conductivité hydraulique effective**, distincte de la notion de conductivité hydraulique équivalente (Renard et de Marsily, 1997), qui permet d'étendre la loi de Darcy déterministe à une relation vérifiée par les valeurs moyennes des grandeurs caractéristiques de l'écoulement :

Le tenseur de *conductivité hydraulique équivalente* caractérise un milieu homogène produisant une réponse identique aux mêmes conditions aux limites et conditions initiales qu'un milieu hétérogène donné. Une équivalence complète entre ces deux milieux étant physiquement impossible, les critères selon lesquels cette équivalence est établie sont :

- L'égalité des flux aux limites du domaine.
- L'égalité de l'énergie dissipée par les forces visqueuses :  $E = -grad(H) \cdot q$

La conductivité hydraulique effective est elle définie par la relation :

$$\langle q(x) \rangle = -K \nabla \langle H(x) \rangle$$

L'expression de cette conductivité effective s'obtient en utilisant des méthodes identiques à celles exposées précédemment. A titre d'exemple, dans le cas d'une covariance  $C_Y$  axisymétrique avec un gradient de charge constant  $= -J \cdot x$ , Dagan (1989) obtient au second ordre dans le cas tridimensionnel :

$$K_{efh}/K_G = 1 + \sigma_Y^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \right)$$

$$K_{efv}/K_G = 1 + \sigma_Y^2 \left( -\frac{1}{2} + \lambda \right)$$

Avec,

$K_{eff,h}$  : Conductivité effective horizontale,

$K_{eff,v}$  : Conductivité effective verticale.

$$\lambda = \frac{e^2}{1 + e^2} \left[ \frac{1}{e\sqrt{1 - e^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1}{e^2} - 1} - 1 \right]$$

Où  $e$  est le rapport entre les échelles intégrales verticales et horizontales. Neuman et Depner (1988) ont eux montré que  $K_e$  ne dépend que de  $\sigma_Y^2$  et des échelles intégrales de  $Y$ . Les composantes de ce vecteur s'écrivent alors :

$$K_{efh} = K_G \left( 1 + \frac{\sigma_Y^2}{2} - F_i \right)$$

$$F_i = \frac{2\sigma_Y^2}{\pi I_i^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{f_i}{f^T I^{-2} f} \sin\phi d\phi d\theta$$

Avec,

$$f^T(\phi, \theta) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi).$$

En faisant l'hypothèse que l'expression précédente est le début du développement de Taylor d'une exponentielle, on peut l'étendre à des valeurs élevées de  $\sigma_Y^2$  :

$$K_{efi} = \exp \left( \langle Y \rangle + \frac{\sigma_Y^2}{2} - F_i \right)$$

La validité de cette expression a été testée pour des valeurs de  $\sigma_Y^2$  allant jusqu'à 7 par Neuman et al. (1992).

#### - La méthode self-consistante ou de renormalisation

Cette méthode a été appliquée pour déterminer les propriétés effectives de milieux multiphasés et hétérogènes. Dans l'approximation self-consistante le champ de potentiel hydraulique est celui dû à un bloc plongé dans un milieu de conductivité  $\bar{K}_0$  constante mais inconnue, qui est déterminée en imposant à  $\bar{K}_0$  d'être la conductivité effective du milieu composite. Cette méthode a l'avantage d'être applicable en principe à de grandes variances  $\sigma_Y^2$ . La méthode est par contre limitée à des conditions aux limites simples ou à un domaine infini.

#### IV.9.4.3 Conductivité hydraulique effective

La conductivité hydraulique effective lie la vitesse moyenne de filtration au potentiel hydraulique moyen :

$$\langle \bar{q} \rangle = -\bar{K}_{eff} \bar{\nabla} \langle h \rangle \tag{IV-69}$$

Nous exposons ci-dessous le principe des calculs amenant à l'expression du tenseur de conductivité effective dans le cas de la méthode des perturbations. Nous partons de la loi de Darcy  $\bar{q} = -K\bar{\nabla}h = \exp(m_Y + Y')\bar{\nabla}h$  et nous développons en série  $\exp(Y')$  et  $h$ ; nous avons :

$$\bar{q} = -K_G \left( 1 + Y' + \frac{Y'^2}{2} + \dots \right) (\bar{\nabla}h^{(0)} + \bar{\nabla}h^{(1)} + \bar{\nabla}h^{(2)}) \quad (\text{IV-70})$$

D'où on tire :

$$\begin{aligned} \bar{q}^{(0)} &= -K_G \bar{\nabla}h^{(0)} \\ \bar{q}^{(1)} &= -K_G (Y' \bar{\nabla}h^{(0)} + \bar{\nabla}h^{(1)}) \\ \bar{q}^{(2)} &= -K_G \left( \frac{Y'^2}{2} \bar{\nabla}h^{(0)} + Y' \bar{\nabla}h^{(1)} + \bar{\nabla}h^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV-71})$$

En supposant la condition aux limites simple suivante ( $\bar{J}$  constant),

$$h = -\bar{J} \cdot \bar{r} \quad (\text{IV-72})$$

Les équations (3.16), (3.17) et (3.18) permettent d'évaluer les moyennes  $\bar{q}^{(0)}$ ,  $\bar{q}^{(1)}$  et  $\bar{q}^{(2)}$ . On trouve [Dagan, 1989] :

$$\begin{aligned} \bar{q}^{(0)} &= K_G \cdot \bar{J} \\ \bar{q}^{(1)} &= 0 \\ \bar{q}^{(2)} &= K_G \left[ \frac{\bar{J} \sigma_Y^2}{2} - \langle Y' \bar{\nabla}h^{(1)} \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-73})$$

Dès lors, la moyenne de  $q$  au premier ordre  $\langle \bar{q}^{(0)} \rangle = \langle \bar{q}^{(1)} \rangle + \langle \bar{q}^{(2)} \rangle$  est déterminée si le terme  $\langle Y' \bar{\nabla}h^{(1)} \rangle$  dans (3.25) peut être évalué. Cela est possible aisément si le milieu considéré est infini. Dans ce cas,  $h^{(1)}$  qui est solution de l'équation (3.17) peut s'écrire à l'aide d'une fonction de Green du milieu infini.

Des expressions simples du tenseur  $\bar{\bar{K}}_{eff}$  sont alors obtenues pour une fonction de covariance exponentielle anisotrope  $C_{YY}(\bar{r})$  de la log-conductivité dans un milieu infini. Dans le cas axisymétrique où  $I_{Y_x} = I_{Y_y} = I_{Y_h}$  est la longueur de corrélation horizontale et  $I_{Y_z} = I_{Y_v}$  est la longueur de corrélation verticale; on définit  $e = \frac{I_{Y_v}}{I_{Y_h}}$  et on trouve [Dagan, 1989] pour les composantes horizontale et verticale de  $\bar{\bar{K}}_{eff}$  :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{K}}_{eff,h} &= K_G \left[ 1 + \sigma_Y^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{f(e)}{2} \right) \right] \\ \bar{\bar{K}}_{eff,v} &= K_G \left[ 1 + \sigma_Y^2 \left( f(e) - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-74})$$

$$\text{Ou } f(e) = \frac{e^2}{1-e^2} \left[ \frac{1}{e\sqrt{1-e^2}} \arctg \left( \sqrt{\frac{1}{e^2} - 1} - 1 \right) \right]$$

Les résultats précédents ont été obtenus également par [Gelhar and Axness, 1983] à l'aide de la représentation par intégrales de Fourier-Stieltjes et du théorème de Wiener-Khinchin [Gardiner, 1985, Dagan, 1989]. Il s'agit également d'une méthode de perturbations. Le potentiel hydraulique  $h$  apparaissant dans la loi de Darcy est décomposé simplement en une composante moyenne  $\langle h \rangle$  et une composante aléatoire  $h'$  (la perturbation) de moyenne nulle. Dès lors, au premier ordre, on obtient l'équation de la moyenne et l'équation de la perturbation [Cushman et al., 1990, Chap.14]

$$\nabla^2 \langle h \rangle = O(\sigma_Y^2)$$

$$\nabla^2 h' - \bar{J} \cdot \bar{\nabla} Y' = O(\sigma_Y^2)$$

Où  $\bar{J} = \bar{\nabla} \langle h \rangle$ . En négligeant les termes d'ordre supérieur et en supposant  $J$  constant, la représentation Fourier-Stieltjes appliquée à la deuxième équation nous fournit la relation simple,

$$dZ_h = i \frac{\bar{J} \cdot \bar{k}}{k^2} dZ_Y$$

Où  $i$  est le nombre complexe imaginaire pur,  $dZ_Y$  est la variation infinitésimale de la fonction de distribution aléatoire complexe  $Z_Y(\bar{k})$  associée à la log-conductivité  $Y$  et satisfaisant les relations :

$$\langle dZ_Y(\bar{k}) dZ_Y^*(\bar{k}') \rangle = 0 \quad \text{pour } \bar{k} \neq \bar{k}' \quad (\text{IV-75})$$

$$\langle dZ_Y(\bar{k}) dZ_Y^*(\bar{k}') \rangle = S_{YY}(\bar{k}) d\bar{k} \quad \text{pour } \bar{k} = \bar{k}'$$

où l'indice \* est utilisé pour le complexe conjugué et  $S_{YY}(\bar{k})$  est le spectre, c'est-à-dire la transformée de Fourier de la covariance  $C_{YY}(\bar{r})$ . Le théorème de Wiener-Khinchin assure que pour  $Y$  stationnaire les relations (3.28) sont satisfaites.

A partir de la relation (3.27), Gelhar et Axness [Gelhar and Axness, 1983] évaluent directement le terme  $\langle Y' \bar{\nabla} h' \rangle$  (analogue au terme  $\langle Y' \bar{\nabla} h^{(1)} \rangle$  dans (3.25)) dans le tenseur de conductivité effective.

#### IV.9.4.4 Covariance de la vitesse de filtration

Dans les paragraphes précédents, nous avons montré qu'elles étaient les méthodes utilisées pour obtenir le potentiel hydraulique moyen  $\langle h \rangle$  l'approximation au premier ordre des covariances  $C_{Yh}$  et  $C_{hh}$  enfin la vitesse de filtration moyenne à partir du tenseur de conductivité effective. Nous terminerons cet aperçu des propriétés statistiques de l'écoulement dans un milieu stochastique par l'étude de la covariance de la vitesse  $\bar{q}$ .

La covariance de la vitesse de filtration  $C_{q_i q_j}(\bar{x}, \bar{x}') = \langle q'_i(\bar{x}) q'_j(\bar{x}') \rangle$  est étroitement liée par la loi de Darcy à la covariance de la log-conductivité, à celle du potentiel hydraulique et à la covariance croisée. Nous pouvons obtenir la covariance  $C_{q_i q_j}$  soit directement soit à partir de sa transformée de Fourier  $S_{q_i q_j}$  en utilisant la représentation par intégrales de Fourier-Stieltjes.

1. Nous utilisons l'expression de  $\bar{q}^{(1)}$  dans (3.23) pour obtenir l'expression au premier ordre de la covariance :

$$C_{q_i q_j}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}') = \langle q_i^{(1)}(\bar{x}) q_j^{(1)}(\bar{x}') \rangle = K_G^2 \left[ J_i J_j C_{YY}(\bar{x}, \bar{x}') - J_i \frac{\partial}{\partial x_j} C_{Yh}^{(1)}(\bar{x}', \bar{x}) - J_j \frac{\partial}{\partial x'_i} C_{Yh}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}') + \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x_j} C_{hh}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}') \right] \approx C_{q_i q_j}(\bar{r}) \quad (\text{IV-76})$$

Où  $\bar{r} = \bar{x} - \bar{x}'$ . Il est possible de montrer [Dagan, 1989] que la covariance  $C_{q_i q_j}(\bar{r})$

obtenue en (3.29) n'est jamais infinie.

2. En reprenant l'approche développée par Gelhar et Axness [Gelhar and Axness, 1983] et exposée au paragraphe précédent, on écrit la loi de Darcy :

$$\bar{q} = -K_G (1 + Y' + Y'^2 + \dots) (\bar{\nabla} \langle h \rangle + \bar{\nabla} h')$$

et on trouve au premier ordre pour la composante résiduelle de la vitesse de filtration :  $\bar{q}' = \bar{q} - \langle \bar{q} \rangle$ .

$$\bar{q}' = -K_G (\langle Y' \bar{\nabla} h' \rangle + \bar{\nabla} h') \text{ analogue à la vitesse } \bar{q}^{(1)} \text{ dans (3.23).}$$

L'équation précédente est alors réécrite en utilisant la représentation Fourier-Stieltjes :

$$dZ_{q_i} = K_G (J_j dZ_Y + i k_i dZ_h) \quad (\text{IV-77})$$

Où  $J_j$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du gradient  $\bar{J} = -\bar{\nabla} \langle h \rangle$  supposé constant. Or l'équation de la perturbation  $h'$  nous fournit une relation entre  $dZ_h$  et  $dZ_Y$  (équation (3.27)). En introduisant (3.27) dans (3.30) et en calculant le tenseur spectral  $S_{q_i q_j}(\bar{k}) d\bar{k} = \langle dZ_{q_i}(\bar{k}) dZ_{q_j}^*(\bar{k}) \rangle$  on trouve :

$$S_{q_i q_j}(\bar{k}) = K_G^2 \left( J_i - \frac{k_i \langle \bar{J} \cdot \bar{k} \rangle}{k^2} \right) \left( J_j - \frac{k_j \langle \bar{J} \cdot \bar{k} \rangle}{k^2} \right) S_{YY}(\bar{k}) \quad (\text{IV-78})$$

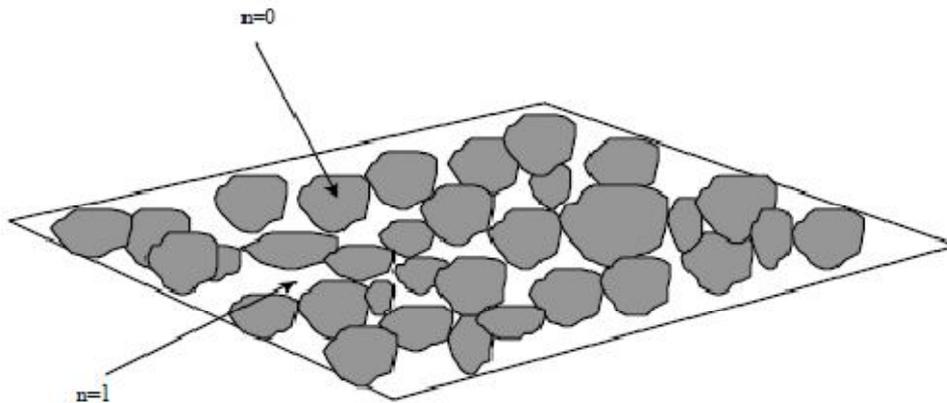
La relation spectrale (3.31) dans l'espace réciproque est plus pratique d'utilisation que la relation (3.29) dans l'espace direct où les grandeurs  $C_{Yh}^{(1)}$  et  $C_{hh}^{(1)}$  doivent être évaluées au préalable.

Le tenseur spectral  $S_{q_i q_j}(\bar{k})$  dans (3.31) ne dépend que de la fonction spectrale  $S_{YY}(\bar{k})$ .

## IV.9.5 Application de la stochastique à la résolution de l'écoulement en milieux poreux hétérogènes

### IV.9.5.1 Introduction

Depuis quelques années, l'utilisation des méthodes stochastiques dans la résolution des problèmes d'écoulement et de transport en milieu poreux s'est largement répandue. Ces techniques y sont particulièrement adaptées du fait des caractéristiques des milieux étudiés: ils sont naturellement hétérogènes, car issus de processus de formation physico-chimiques complexes, avec une large part faite au hasard dans l'organisation des hétérogénéités. De plus, les techniques d'évaluation des propriétés d'un sol ou d'une roche ainsi que des variables de l'écoulement y ayant lieu étant soit coûteuses, soit destructives, soit difficiles à mettre en œuvre, la connaissance empirique de ces variables n'est possible que partiellement et est en tout cas entachée d'une incertitude non négligeable. C'est pourquoi il est apparu judicieux d'aborder ces problèmes par le biais de la statistique, c'est-à-dire en considérant les propriétés intrinsèques du milieu, ainsi que les variables d'écoulement et de transport comme des fonctions aléatoires de la variable spatiale et parfois du temps. Pour illustrer la manière dont les processus et les variables les décrivant sont abordées dans l'approche stochastique, de Marsily (1981) s'appuie sur l'exemple simple de la porosité en un point du milieu, à l'échelle du laboratoire. Cette variable, notée  $n$ , prend la valeur  $\emptyset = 0$  lorsque le point est situé dans un grain et  $\emptyset = 1$  lorsqu'il est dans un pore.



**Figure IV.6** Une réalisation de la variable "distribution des grains"

La figure IV.6 représente ainsi une réalisation « $i$ » d'un processus aléatoire (la distribution des grains) caractéristique du milieu poreux. On suppose alors que l'on dispose d'un nombre  $M$  de réalisations de ce milieu. En tout point  $P$ , on possède une population de valeurs de la variable porosité  $n$  pour laquelle on peut calculer les propriétés statistiques : espérance mathématique, variance, moments d'ordre supérieur....

Par exemple, on obtient l'espérance de la porosité en un point  $P$  par :

$$\bar{\phi}_P = \frac{1}{M} \sum_i^M \phi_P^i$$

Dans le cas réel, on ne dispose cependant que d'un milieu poreux à étudier, c'est-à-dire que d'une seule réalisation des processus aléatoires qui le caractérisent. Pour pouvoir y appliquer les outils statistiques, il est alors nécessaire d'adopter deux hypothèses fondamentales :

- **L'hypothèse de stationnarité**, qui suppose que la loi de probabilité de la variable aléatoire étudiée est invariable par translation arbitraire, ce qui signifie qu'elle est identique en tout point du domaine. Cette hypothèse se traduit en particulier au niveau des deux premiers moments statistiques de la propriété par les égalités suivantes,

$$\langle u(x) \rangle = \langle u \rangle = cte$$

$$C_u(x_1, x_2) = C_u(x_2 - x_1) = C_u(x_2, x_1) = C_u(r) = C_u(-r)$$

$$\sigma_u^2(x) = C_u(0) = cte$$

$$\rho_u(x_1, x_2) = \rho_u(x_2 - x_1) = \rho_u(x_2, x_1) = \rho_u(r) = \rho_u(-r)$$

Une fonction dont les deux premiers moments satisfont à ces conditions est appelée stationnaire au deuxième ordre ou faiblement stationnaire. Cette propriété est suffisante dans de nombreux cas de figure pour lesquels les calculs ne mettent en jeu que les deux premiers moments statistiques.

- **L'hypothèse d'ergodicité**, qui suppose que la réalisation unique du processus aléatoire déploie dans l'espace la loi de probabilité stationnaire précédente. Cela signifie que l'on obtient les caractéristiques statistiques de cette loi à partir de la réalisation unique dont l'on dispose en étudiant ses variations spatiales :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \langle V(p) \rangle$$

$$V_n = \frac{1}{S_n} \int_{S_n} V(p) dp$$

Avec :

$V(P)$  : Processus aléatoire ;

$V_n$  : Série mathématique de la moyenne spatiale ;

$S_n$  : Aire du domaine.

Dans la pratique, puisque l'on ne dispose encore une fois que d'une seule réalisation, la vérification *a priori* d'une telle hypothèse est impossible.

Dagan (1989) préconise d'utiliser la démarche pragmatique qui consiste à supposer l'ergodicité, faire les calculs des moments statistiques cherchés, puis vérifier l'hypothèse en regard des résultats obtenus.

Lorsque ces deux propriétés sont vérifiées, on parle de milieu statistiquement homogène. Les propriétés (porosité, conductivité hydraulique...) d'un tel milieu sont appelées fonctions aléatoires stationnaires et ergodiques. Elles sont définies en tout point de l'espace par leur loi de probabilité et leur fonction de corrélation ou leur variogramme qui rendent compte de l'interdépendance des valeurs de la fonction aléatoire en deux points voisins.

#### IV.9.5.2 Résolution de l'écoulement par approche stochastique

Dans cette partie, nous nous plaçons à l'échelle de la formation naturelle, qui dans la majorité des cas est constituée de différentes strates horizontales de profondeur variant de quelques mètres à plusieurs centaines de mètres. A cette échelle, les propriétés du milieu ainsi que les variables d'écoulement sont des grandeurs calculées ou mesurées sur des volumes suffisamment grands pour leur assurer un caractère macroscopique par rapport à l'échelle des pores. Ces propriétés peuvent être considérées comme déterministes et attachées à chaque point de l'espace ; le milieu et le fluide sont assimilés à un continuum ; on pourra représenter les propriétés et les variables macroscopiques comme des vecteurs ou des tenseurs spatiaux continus.

Considérons un écoulement permanent en l'absence de terme de type puits/source. L'équation qui régit un tel écoulement s'écrit :

$$\nabla \cdot q(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot [K(\mathbf{x})\nabla H(\mathbf{x})] = 0$$

Avec,

$H(\mathbf{x})$  : la charge hydraulique ;

$K(\mathbf{x})$  : la conductivité hydraulique ;

On peut relier la vitesse d'écoulement  $U$  au flux de Darcy  $q$  par :

$$U = \frac{q}{\phi_e}$$

$\phi_e$  : étant la porosité cinématique.

On considérera ici un problème d'écoulement de type direct et inconditionnel, c'est-à-dire que l'on se propose de chercher à identifier  $H$  et  $U$  (par le biais de leurs propriétés statistiques) en connaissant les propriétés statistiques du champ des perméabilités  $K$  sans conditionner le résultat (au sens statistique du terme) par des informations supplémentaires comme des mesures ponctuelles des variables. Les méthodes de résolution issues de la stochastique de ce problème s'appuient en particulier sur les propriétés de la distribution spatiale de la conductivité hydraulique.

### a. Propriétés statistiques de la conductivité hydraulique

De par ses variations irrégulières dans l'espace, la conductivité hydraulique peut être considérée comme une Fonction Aléatoire Spatiale (F.A.S.). Freeze (1975) puis Gehlar (1993) ont cherché, en s'appuyant sur des séries de mesures *in situ* à déterminer quel type de fonction de densité de probabilité était le mieux à même de caractériser la répartition de  $K(x)$ . Leurs résultats montrent que l'on peut faire l'hypothèse que  $K(x)$  a une distribution log-normale.

Si on note alors  $Y(x) = \ln K(x)$ , la log conductivité  $Y(x)$  est une F.A.S. ayant une distribution normale  $N[m_y, \sigma_Y^2]$ , caractérisée par une moyenne  $m_y$  et une variance  $\sigma_Y^2$ . On note  $K_g [LT^{-1}]$  la moyenne géométrique de la conductivité hydraulique. La relation entre  $K_g$  et  $m_y$  est :

$$K_g = \exp(m_y)$$

$Y(x)$  (et donc  $K(x)$ ) est statistiquement déterminée de façon complète par la donnée de  $m_y$  et  $\sigma_Y^2$  de la fonction d'auto-covariance  $C_Y(r)$  où  $r$  est la distance qui sépare deux points de l'espace.

Deux paramètres caractérisent la fonction de covariance en termes d'"extension spatiale" L'échelle intégrale définie comme suit,

$$I_Y = \frac{1}{\sigma_Y^2} \int_0^{\infty} C_Y(r) dr$$

**La longueur de corrélation**, noté  $l_y$ , représente la distance à partir de laquelle les variables cessent d'être corrélées et elle correspond à la valeur d'annulation de  $C_Y(r)$ . La relation entre

la longueur de corrélation  $l_y$  et l'échelle intégrale  $I_Y$  varie selon le type de modèle.

Le rapport des échelles intégrales définit le taux d'anisotropie statistique. Si on note avec  $I_{Y_x}$ ,  $I_{Y_y}$  et  $I_{Y_z}$  les échelles intégrales sur les trois directions de l'espace nous aurons les expressions suivantes pour les taux d'anisotropie :

$$e_{xz} = \frac{I_{Y_z}}{I_{Y_x}}$$

$$e_{xy} = \frac{I_{Y_y}}{I_{Y_x}}$$

Dans le cas où  $I_{Y_x} = I_{Y_y}$  on parle d'anisotropie axisymétrique.

On définit alors:

$I_{Y_h} = I_{Y_x} = I_{Y_y}$ : L'échelle intégrale horizontale ;

$I_{Y_v} = I_{Y_z}$ : L'échelle intégrale verticale ;

Dans ce cas le taux d'anisotropie statistique est défini par la relation suivante :

$$e = \frac{I_{Yv}}{I_{Yh}}$$

Les résultats expérimentaux montrent que l'on peut approcher les covariances obtenues en milieu naturel par différents types d'expressions (Dagan, 1989) :

### 1. Fonction de covariance exponentielle

$$C_y(r) = \sigma_Y^2 \exp(-r)$$

Ou,  $r = \frac{r'}{I_Y}$  est la distance réduite.

Dans le cas de l'anisotropie statistique :

$$r = \left( \frac{r_x'^2}{I_{Yx}^2} + \frac{r_y'^2}{I_{Yy}^2} + \frac{r_z'^2}{I_{Yz}^2} \right)^{1/2}$$

Avec ,

$I_{Yx}$ ,  $I_{Yy}$  et  $I_{Yz}$  : échelles intégrales suivant les directions de l'espace ;

$r_x' = x - x'$  : distance de séparation sur  $Ox$  ;

$r_y' = y - y'$  : distance de séparation sur  $Oy$  ;

$r_z' = z - z'$  : distance de séparation sur  $Oz$  ;

Dans ce cas la longueur de corrélation est égale à l'échelle intégrale :  $l_y = I_Y$

### 2. Fonction de covariance gaussienne

$$C_y(r) = \sigma_Y^2 \exp \left[ -\frac{4r}{\pi} \right]$$

Avec,

$$r^2 = \frac{r_x'^2}{I_{Yx}^2} + \frac{r_y'^2}{I_{Yy}^2} + \frac{r_z'^2}{I_{Yz}^2}$$

$$I_Y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} l_y$$

### 3. Fonction de covariance linéaire

$$C_y(r) = \sigma_Y^2 \left( 1 - \frac{r'}{I_Y} \right)$$

Avec,  $r = \frac{r'}{l_Y}$  et :  $l_Y = 0,5l_y$

#### 4. Fonction de covariance semi-sphérique

$$C_y(r) = \sigma_Y^2 \left( 1 - \frac{3r'}{2l_Y} + \frac{1}{2} \frac{r'^3}{l_Y^3} \right) \text{ pour } \frac{r'}{l_Y} \leq 1.$$

$$C_y(r) = 0 \text{ pour } \frac{r'}{l_Y} > 1$$

Avec,

$$l_Y = \frac{3}{8}l_y$$

De façon générale, la fonction de covariance peut s'écrire sous la forme :

$$C_y(r) = \sigma_Y^2 \rho(r),$$

Avec :

$\sigma_Y^2$  : la variance ;

$\rho(r)$  : la fonction de corrélation.

Déterminer  $C_y$ ,  $C_y$  et  $l_Y$  de façon empirique à partir des mesures expérimentales de  $K$  implique une analyse structurale (variographique).

Dans la figure II.2 nous avons représenté quelques modèles analytiques de covariance.

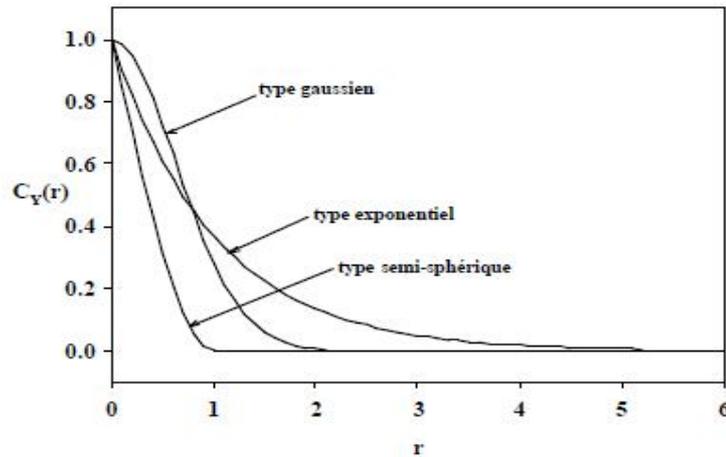


Figure V.7. Modèles analytiques de covariance

### b- Méthodes de résolution

On considère l'équation qui décrit l'écoulement permanent :

$$\nabla \cdot (K \nabla H) = 0$$

qui développée devient :

$$\nabla^2 H + \frac{\nabla K}{K} \nabla H = 0$$

Sachant que  $Y = \ln K$  et par suite  $\nabla Y = \frac{\nabla K}{K}$  l'équation aura l'expression :

$$\nabla^2 H + \nabla Y \cdot \nabla H = 0$$

Le problème d'écoulement a été énoncé de la façon suivante par Dagan (1989) : « étant donné le domaine  $\Omega$  et les propriétés du milieu sous forme de fonctions aléatoires (ex :  $Y$ ), il faut déterminer la fonction spatiale aléatoire  $H$  qui satisfait l'équation d'écoulement et les conditions aux limites ».

Pour répondre à cette question on a qu'à adopter l'une des quatre approches développées précédemment à savoir :

- (i) Les simulations Monte-Carlo
- (ii) La méthode des contributions (dite "self-consistent")
- (iii) La théorie des petites perturbations
- (iv) La théorie non locale.

### IV.9.5.3 Application des théories stochastiques à l'écoulement à proximité de puits

Bien que très souvent rencontrés dans les cas concrets, les écoulements à proximité d'un ou de plusieurs puits en milieu poreux hétérogène n'ont été que peu étudiés par le passé. Le problème qui se pose dans de telles configurations d'écoulement est en effet marqué par une forte instationnarité due à la présence des singularités que sont les puits.

Cette non stationnarité, que l'on peut rapprocher de celles engendrées par des distributions de paramètres (conductivité, porosité) variables dans l'espace, entraîne pour les équations qui caractérisent l'écoulement un caractère non-local qui n'apparaissait pas dans le cas de l'écoulement uniforme en milieu infini. Dans une approche similaire à celle adoptée dans ce premier cas, les approches de premier ordre apportent des solutions au problème en terme de moments statistiques des variables de l'écoulement.

#### - Solution de l'écoulement en radial

Le problème de l'écoulement à proximité d'un puits de pompage en milieu hétérogène a été examiné dans le passé par quelques auteurs, travaillant chacun sous différentes hypothèses. On peut citer en particulier les travaux de Desbarats (1992) qui s'est attaché à déterminer une expression de la transmissivité équivalente (pour un écoulement bidimensionnel donc) dans un élément carré contenant un puits, avec charge constante aux frontières du domaine et flux constant pour le puits, ceci dans le but de fournir une méthode d'évaluation des paramètres à fournir à un modèle de type éléments finis pour les mailles contenant des puits.

A l'aide d'une méthode utilisant les petites perturbations, Naff (1991) est parvenu à exprimer les deux premiers moments statistiques du gradient de charge dans la direction radiale. Ces expressions, nécessitant l'évaluation numérique de quelques intégrales, ont été obtenues pour un écoulement tridimensionnel, en utilisant comme condition un flux constant au niveau du puits.

De façon générale, la majorité des auteurs (Ababou et Woods, 1990 ; Naff, 1991 ; Desbarats, 1992 ; Neuman et Orr, 1993) ont étudié des milieux hétérogènes dans deux dimensions et/ou des puits matérialisés par des conditions aux limites sur les flux. Dans ce qui suit, nous allons développer les travaux de Indelman et al. (1996) et Fiori et al. (1998) qui ont eux considéré l'écoulement dû à la présence d'un puits à charge imposée dans un milieu poreux hétérogène tridimensionnel infini.

On se place donc dans le cas d'un aquifère d'épaisseur constante dans lequel on pompe avec un puits totalement pénétrant de rayon  $r_w$  et de charge constante  $H_w$ . Le milieu poreux est caractérisé par une fluctuation de log conductivité  $Y = \ln(K/K_G)$  fonction aléatoire de l'espace stationnaire, de moyenne nulle et de covariance  $C(x, y) = \sigma_Y^2 \rho(x - y)$ , avec l'autocorrélation  $\rho$  supposée axisymétrique.

**- Remarque**

On choisit ici, comme dans le reste de l'étude, une condition de charge constante au puits, contrairement à nombre de travaux précédents. On considère en effet que cette condition reflète avec plus de réalisme ce qui se passe dans la colonne d'eau à l'intérieur du puits. Dans ce cas, étant donnée l'hétérogénéité du milieu, le flux  $q$  se trouve être lui aussi distribué de façon aléatoire au voisinage du puits. Il n'est donc pas possible en toute rigueur de définir une distribution de  $q$  sur la hauteur du puits.

Pour simplifier les calculs, outre l'hypothèse d'ergodicité classique, et de l'extension du domaine à l'infini, on considérera dans tout ce qui suit que le puits a un rayon suffisamment petit pour que l'on puisse le remplacer par une singularité en  $r = 0$ .

Dans le premier article, Indelman et al. (1996) précisent la notion de conductivité équivalente, par opposition notamment à la conductivité efficace  $K_{ef}$ , usuellement définie comme le rapport entre la moyenne de  $q_r$  et  $-\frac{dH}{dr}$ . Dans le cas présent,  $K_{eq}$  est définie pour un milieu homogène fictif qui produirait le même débit  $Q$  ; elle n'est pas une propriété intrinsèque du milieu mais dépend de la distance de parcours du traceur et du rayon du puits. Après réécriture des équations de l'écoulement en utilisant un développement perturbatif en  $\sigma_Y^2$ , on obtient pour un champ de conductivité donné (distribution gaussienne ou exponentielle) les expressions de  $\langle h \rangle$  au deuxième ordre en  $\sigma_Y$  et  $K_{eq}$ . Le résultat important de cette étude est que la conductivité équivalente pour un écoulement radial est une moyenne pondérée (par une fonction que l'on peut calculer) de  $K_\alpha$ , la moyenne arithmétique, et  $K_{efu}$  la conductivité efficace en écoulement uniforme.

Dans la continuité de ces résultats, Fiori et al. (1998) s'intéressent cette fois aux moments statistiques d'ordre 2 des variables d'écoulement : charge, gradient de charge et vitesse de Darcy. On peut résumer la méthode utilisée comme suit,

Si on rappelle les équations de l'écoulement :

$$\nabla^2 H + \nabla Y \cdot \nabla H = 0$$

$$q = -K \nabla H$$

On utilise un système de coordonnées cartésiennes :  $X(x_1, x_2, x_3) = X(r, z)$

Les conditions aux limites peuvent s'écrire :

$$H = H_w \text{ pour } r = r_w$$

$$H = H_L \text{ pour } r = L \text{ (frontière extérieure située loin du puits)}$$

On écrit ensuite des développements suivant la méthode des petites perturbations pour  $H$  et  $q$  en  $\sigma_Y$ , et on obtient la série d'équations suivantes :

$$\nabla^2 H^{(0)} = 0$$

$$\nabla^2 H^{(j)} + \nabla Y \cdot \nabla H^{(j-1)} = 0$$

$$q^{(0)} = -K_G \nabla H^{(0)}$$

$$q^{(1)} = -K_G [Y \cdot \nabla H^{(0)} + \nabla H^{(1)}]$$

$$q^{(2)} = -K_G \left[ \frac{1}{2} Y^2 \nabla H^{(0)} + \nabla H^{(1)} + \nabla H^{(2)} \right]$$

Avec,

$$j = 1, 2, \dots$$

La solution d'ordre 0 est celle que l'on obtiendrait pour un milieu homogène de conductivité  $K_G$  :

$$H^{(0)}(r) = a \ln r + b$$

$$a = \frac{(H_L - H_w)}{\ln(L/r_w)}$$

$$b = H_w - a \ln r_w$$

$$\nabla H^{(0)} = a \frac{r}{r^2}$$

Avec l'hypothèse énoncée précédemment, c'est-à-dire en considérant que la limite  $L$  est très grande vis-à-vis de  $I_Y$  échelle intégrale du log conductivité, et en considérant  $a$  comme une constante donnée, on résout le problème au premier ordre à l'aide des fonctions de Green (et de fonctions dérivées).

On obtient l'expression suivante :

$$H^{(1)}(X) = \int_{\Omega} dX' \frac{\partial Y(X')}{\partial r'_i} \frac{\partial H^{(0)}(r')}{\partial r'_i} [G(X - X') + g_w(X, X')]$$

Avec,  $i = 1, 2$ .

$G(X)$  est la fonction de Green pour un domaine infini, et  $g_w$  est la solution de :

$$\nabla^2 g_w(X, X') = 0$$

$$g_w(X, X')|_{|r|=r_w} = -G(X - X')|_{|r|=r_w}$$

Si l'on considère maintenant, pour simplifier, que le diamètre du puits est très petit (on assimile alors celui-ci à une singularité) on a :

$$H^{(1)}(X) = \int dX' \frac{\partial Y(X')}{\partial r'_i} \frac{\partial H^{(0)}(r')}{\partial r'_i} [G(X - X') - G(r', x_3 - x'_3)]$$

Où l'intégration se fait sur tout l'espace, et en dérivant :

$$H^{(1)}(X) = \int dX' \frac{\partial Y(X')}{\partial r'_i} \frac{\partial H^{(0)}(r')}{\partial r'_i} \frac{\partial G(x - x')}{\partial r_i}$$

$$j = 1, 2.$$

A partir de ces expressions, on va pouvoir calculer les moments statistiques que l'on cherche, en s'intéressant particulièrement à une distribution Gaussienne de  $Y$ .

On considère alors un milieu fortement anisotrope, soit  $e < 0.2$ . On utilise alors une expression de  $\rho$  au premier ordre en  $e$  :

$$\rho = \sqrt{\pi}e \exp \left[ -\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{l^2} \right] \delta \left( \frac{x_3 - y_3}{l} \right) + O(e^2)$$

De façon générale, les corrélations sont calculées pour des vecteurs dont les composantes radiales (dans le plan horizontal) sont parallèles, dans un souci de simplification.

On s'intéresse particulièrement aux variances et aux échelles intégrales verticales. Les résultats obtenus sont alors comparés à ceux de Dagan (1989) dans le cadre d'un écoulement monodimensionnel. On se place pour cela dans des conditions comparables, à savoir on travaille dans le demi espace  $X_1 > 0$ , avec un gradient de charge moyenne constant suivant  $X_1$  et  $H(0, x_2, x_3) = H_w$

On remarque alors que,

- La variance de la charge et son échelle intégrale ont le même comportement en 0 (du fait des conditions aux limites) et en l'infini (asymptote pour la variance, limite infinie pour le produit  $\sigma_H^2 I_H$ ) dans les deux cas.
- La seule différence pour la charge se situe au niveau de la vitesse de décroissance du coefficient de variation (en  $\ln(r)^{-1}$  en radial, en  $x^{-1}$  en uniforme)
- Si l'on s'intéresse à la covariance croisée entre le logarithme de la conductivité hydraulique et le gradient de charge, on montre en calculant à partir de l'expression (II.96) que celle-ci tend à l'infini vers celle d'un écoulement uniforme avec les mêmes valeurs moyennes de gradient. Cela confirme le fait que la conductivité équivalente en radial tend vers celle obtenue en uniforme (Indelman et al., 1996)
- De même, la variance du gradient de la charge en radial, qui vaut 0 pour  $r = 0$  du fait des conditions limites, est non monotone, avec un maximum pour  $r/l = 1.6$  environ, et tend vers l'expression obtenue en uniforme pour  $r$  tendant vers l'infini.
- On note quand même une différence significative entre les échelles verticales de la composante radiale du gradient de charge  $E_r$ , l'expression calculée en radial à l'infini étant plus grande d'une échelle intégrale verticale de  $Y$  que celle obtenue en uniforme. Ceci est dû à la présence d'un terme additionnel généré par la source linéaire à l'origine.

- On remarque enfin que la variance de la vitesse de Darcy se comporte comme celle de l'écoulement uniforme à l'infini. Il y a aussi une divergence entre les valeurs asymptotiques des échelles intégrales dues à la présence de la source.

**IV.9.5.4 Prise en compte des conditions aux limites dans les théories stochastiques**

Un des principaux freins à l'application des résultats des théories stochastiques aux cas réels est que ceux-ci ont été obtenus sous différentes hypothèses plus ou moins contraignante, la principale étant l'extension du domaine à l'infini.

Si cette simplification peut sembler légitime dans bon nombre de cas où l'on s'intéresse à l'écoulement et au transport dans des zones éloignées de toutes contraintes de types limites imperméables ou à charge imposée (cours d'eau...), il en va différemment à proximité de telles frontières. La résolution de tels problèmes étant complexe, et n'admettant pas en général de solution simple, plusieurs méthodes de prise en compte des conditions aux limites ont été développées.

**- Résultats théoriques**

Rubin et Dagan (1988 a et b) ont étudié, en se basant sur l'approche développée en milieu infini par Dagan (1984) l'effet des conditions initiales, de type charge constante ou flux nul, sur la variabilité spatiale du champ de la charge pour un écoulement bidimensionnel.

Le principe de base est identique à la résolution dans le cas infini, à savoir que l'on part de l'équation de l'écoulement classique en deux dimensions :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0$$

Sur le domaine  $D$  constitué du demi-plan  $y > 0$ .

On suppose  $Y = \ln T$  normal et stationnaire et caractérisé par sa moyenne  $m_Y$  et sa covariance  $C_Y(x, x')$ .

Si on note  $G(x, x')$  la fonction de Green pour l'équation de Laplace, on rappelle que les covariances de  $Y$  et  $H$  et de  $H$  sont données par :

$$C_{YH}(x, x') = E \int_D C_Y(x, x'') \frac{\partial G(x', x'')}{\partial y''} dx''$$

$$C_{YH}(x, x') = E^2 \int_D \int_D C_Y(x'', x''') \frac{\partial G(x, x'')}{\partial y''} \frac{\partial G(x', x''')}{\partial y'''} dx'' dx'''$$

Avec  $E$  gradient de charge moyen constant sur le domaine.

La fonction de Green pour un domaine infini est donnée par :

$$G_{\infty}(X, X') = -\frac{1}{2\pi} \ln(|X - X'|)$$

En appliquant le théorème des images (Bear, 1972), on obtient la fonction de Green associée à un demi-plan et la condition en  $y = 0$ .

$G(X, X'') = G_{\infty}(|x - x''|, |y - y''|) - G_{\infty}(|x - x''|, |y + y''|)$  pour une charge imposée.

$G(X, X'') = G_{\infty}(|x - x''|, |y - y''|) + G_{\infty}(|x - x''|, |y + y''|)$  pour une limite à flux nul.

On applique le résultat obtenu à une distribution des log-perméabilités de la forme exponentielle séparée, qui n'est pas isotrope, mais qui se rapproche fortement de la distribution exponentielle habituellement utilisée (Dagan, 1989 par exemple) pour les milieux infinis :

$$G_Y(|x - x'|, |y - y'|) = \sigma_Y^2 \exp[-(|x - x'|/l + |y - y'|/l)]$$

Après quelques calculs, on arrive à des expressions des covariances que l'on a calculé pour des points de même abscisse, c'est-à-dire sur une ligne perpendiculaire à la frontière.

Les principaux résultats de l'étude des formulations obtenues sont les suivantes :

- Dans le cas de la limite à charge imposée, la variance de  $H$  est finie pour une covariance exponentielle de  $Y$ , contrairement à celle du cas infini ; de plus cette variance n'est pas stationnaire et croît comme  $\ln(Y)$ .
- Le semivariogramme de  $H$  est calculé explicitement, il n'est pas stationnaire mais atteint rapidement la valeur du domaine infini qui elle est stationnaire. On peut donc considérer que les moments calculés analytiquement pour les domaines infinis peuvent être utilisés pour les points situés suffisamment loin de la frontière du domaine.
- La covariance du champ de charge sous l'influence d'une limite imperméable n'est pas bien définie, contrairement au cas précédent, on travaille donc dans ce cas avec le variogramme qui lui est bien défini.

- Au voisinage de la limite imperméable, on a une augmentation de la variabilité de la charge, au contraire de ce qui se passe dans le cas d'une charge fixée (ce qui paraît logique physiquement).
- Les résultats montrent que le champ de charge calculé sur un domaine infini constitue une bonne approximation de celui correspondant au domaine limité par la frontière imperméable, à l'exception d'une bande d'une largeur d'environ 3 longueurs de corrélation parallèlement à la limite.

Tous ces résultats ont été comparés à une méthode plus directe de prise en compte des limites utilisant les principes du conditionnement bayésien .

Osnes (1995, 1998) reprend la méthode précédente, et l'applique à un domaine quadrangulaire (rectangle ou carré) et évalue les effets de différentes conditions aux limites, de la taille de l'aquifère et de l'échelle de corrélation de la log-conductivité sur les moments statistiques de la charge puis sur ceux de la vitesse eulérienne et du déplacement de particules inertes. On considère également un écoulement moyen uniforme suivant la direction de  $x$ .

La fonction de Green, qui prend ici une expression plus complexe, est exprimée sous la forme de séries de Fourier :

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Avec  $L$  la longueur du domaine (on notera  $B$  sa largeur)

On introduit cette expression dans l'équation de Laplace de départ :

$$\nabla^2 G(X, X') = \delta(X - X') \quad X, X' \in D$$

$$G = 0 \text{ pour } x = 0, L$$

$$\partial G / \partial y = 0 \text{ pour } y = 0, B$$

On obtient alors l'expression des coefficients  $a_n$ :

$$a_n(y) = c_n \cosh\left(\frac{n\pi(y' - B)}{L}\right) \cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \text{ pour } y \leq y'$$

$$a_n(y) = c_n \cosh\left(\frac{n\pi y'}{L}\right) \cosh\left(\frac{n\pi(y - B)}{L}\right) \text{ pour } y > y'$$

Ou,

$$c_n = -\frac{2 \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi B}{L}\right)}$$

Pour la résolution formelle du problème, on choisit comme précédemment la fonction à exponentielle séparée (équation (II.98)) pour  $C_Y$ . On peut alors exprimer la covariance et la variance de la charge sous la forme :

$$C_H(X, X') = (JI)^2 \left(\frac{I}{L}\right)^2 \sigma_Y^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} \left(\frac{x}{I}, \frac{x'}{I}, \frac{y}{I}, \frac{y'}{I}, \frac{L}{I}, \frac{B}{I}\right)$$

$$\sigma_H^2(X) = (JI)^2 \left(\frac{I}{L}\right)^2 \sigma_Y^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{f}_{nm} \left(\frac{x}{I}, \frac{y}{I}, \frac{L}{I}, \frac{B}{I}\right)$$

Avec  $I$  échelle intégrale de  $Y$  et  $\hat{f}$  déduit de  $f$  en remplaçant  $x'$  par  $x$  et  $y'$  par  $y$  dans son expression.

La covariance de la vitesse s'exprime elle comme la somme de séries de fonctions :

$$u_{ij}(X, X') = U^2 \sigma_Y^2 \left\{ \exp\left(-\frac{|x-x'| + |y-y'|}{I}\right) \delta_{1i} \delta_{1j} - \left(\frac{I}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_{in} \delta_{1i} - \left(\frac{I}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_{in} \delta_{1i} + \left(\frac{I}{L}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{ijnm} \right\}$$

De cette covariance on déduit par intégration numérique le déplacement.

Les principales conclusions sur l'influence de différents paramètres sur les moments statistiques sont les suivantes,

- $\sigma_H^2$  fonction de  $x$  pour  $y = B/2$  est paire et atteint son maximum en  $x = L/2$ . On note que plus  $B/L$  est petit (aquifère « étroit ») plus la valeur atteinte est grande.
- Si l'on considère cette variance à  $x = L/2$  fixé et que l'on fait varier  $y$ , on constate que cette valeur demeure à peu près constante lorsque l'aquifère est « étroit », alors que est « large ».
- Par comparaison avec les résultats obtenus par Rubin et Dagan (1988 a et b) sur des aquifères semi-infinis, on montre que ceux-ci ne sont pas d'une grande utilité dans le cas d'aquifères étroits.
- On montre que la taille de l'aquifère a une importance non négligeable si celui-ci a des dimensions caractéristiques inférieures à  $15I$ .

Les covariances des vitesses ainsi que celles du déplacement qui en sont déduites se distinguent des valeurs obtenues en milieu infini (Dagan, 1989) tout d'abord par leur caractère local : du fait de la présence de singularités déterministes, les résultats varient suivant la position relative du point où on les calcule,

- La covariance  $u_{22}$  est nulle sur toutes les frontières, augmente rapidement pour devenir constante après  $3l$  environ. Quelle que soit la taille du domaine (plus d'influence après  $15l$ ) la valeur obtenue loin du bord est légèrement inférieure à celle de Dagan.
- La covariance  $u_{11}$  atteint sa valeur maximale sur les frontières du domaine ; cependant le comportement fonctionnel est différent suivant que l'on se place sur une ligne de courant (à  $x$  constant) ou perpendiculairement ( $y$  constant), c'est-à-dire sur une équipotentielle. Dans le premier cas, en s'éloignant des frontières, la descente est lente et l'asymptote est « atteinte » après  $5l$ , dans le second il y a d'abord une chute rapide (minimum atteint en moins d' $1l$ ) avant une remontée lente vers une valeur limite. Ces comportements dépendent des conditions limites. Comparativement aux résultats de Dagan, les valeurs limites quelle que soit la taille du domaine sont légèrement supérieures.
- Les statistiques du déplacement, calculées par intégration en utilisant une quadrature de Gauss, quoique non stationnaires, se montrent faiblement dépendantes de la position initiale de la particule, la covariance  $X_{11}$  étant en valeur absolue plus grande que  $X_{22}$ .

#### - Validation numérique

Maugis (1997) a cherché à évaluer numériquement, en utilisant des simulations de type Monte-Carlo et un schéma aux éléments finis mixtes hybrides bidimensionnel, à vérifier de façon numérique l'influence de conditions aux limites de type charge imposée et flux nul (déterministes) sur l'écoulement et le transport. Plusieurs géométries de milieu ont été étudiées, avec pour chacune d'elle différentes valeurs des paramètres de la log-conductivité. Dans le cas de l'écoulement, l'approche de Rubin et Dagan (1988 et 1989) est validée dans le cas de limites parallèles à la direction principale de l'écoulement. Maugis montre de plus que la présence de limites sur chaque côté du domaine engendre des "interactions", et que la prédominance d'une condition sur une autre est directement liée à la proximité du point considéré et de la frontière.

La présence de conditions aux limites apparaît également dans cette étude avoir une grande influence sur les covariances des vitesses ainsi que sur la dispersion. Cette dernière est affectée sur de plus grandes distances, jusqu'à une dizaine de longueurs de corrélation de  $Y$ , alors que les moments de la vitesse ne le sont que sur une distance deux fois moindre environ.

#### IV.10 CONCLUSION

L'application de la théorie stochastique à la résolution de l'écoulement et du transport en milieu poreux permet de s'affranchir d'une des difficultés majeures de tels problèmes lorsqu'ils se posent en milieu naturel, la prise en compte de l'hétérogénéité de celui-ci en l'absence de données en nombre et qualité insuffisants.

En considérant les propriétés de la formation naturelle étudiée comme des fonctions spatiales aléatoires associées à une structure statistique caractérisée par ses moments (espérance mathématique, variance et loi de covariance spatiale), l'approche stochastique permet d'intégrer cette hétérogénéité dans le formalisme même des équations considérées.

La résolution des équations ainsi obtenues, c'est-à-dire l'expression des moments statistiques des grandeurs recherchées (la charge hydraulique et la vitesse dans le cas de l'équation de l'écoulement) en fonction de la structure statistique des paramètres des équations (principalement la conductivité hydraulique  $K$ ) nécessite cependant l'emploi d'approximations et d'hypothèses simplificatrices conduisant à des solutions analytiques qui peuvent différer d'un auteur à l'autre (voir par exemple Dagan, 1984, 1989, Gehlar et Axness, 1983, Neuman et Zhang, 1990).

De ce fait, ces solutions analytiques ne s'appliquent en principe qu'à des cas de figure précis (écoulement uniforme, milieu infini ou semi-infini, faible hétérogénéité en particulier). Leur validation nécessite donc le recours à des expériences *in situ* (par exemple Kitanidis, 1997) ou à des simulations numériques (Chin et Wang, 1992, Chin, 1997, Lintea, 2001). Les résultats de ces différents travaux montrent que ces solutions peuvent être appliquées à des cas où la variabilité spatiale de  $K$  est faible.

Poursuivant le but d'étendre le champ d'application potentiel des résultats issus de la théorie stochastique, quelques auteurs se sont attachés à la résolution des équations des équations de l'écoulement et du transport dans des cas d'écoulement non uniformes (Desbarats, 1992, Fiori et al, 1998, Dagan et Indelman, 1999 par exemple) et/ou de milieux bornés par des limites finies (Rubin et Dagan, 1988a et b, Osnes 1995, 1998), ces résultats demeurant limités par l'utilisation d'hypothèses simplificatrices.



## CHAPITRE V

# **ANALYSE STOCHASTIQUE DES ECOULEMENTS EN MILIEUX POREUX, APPLICATION A LA PROPAGATION D'UN POLLUANT DANS UN MILIEU POREUX**

## V.1 INTRODUCTION

Les modèles numériques disponibles pour l'étude des écoulements en milieux poreux utilisent comme données les distributions supposées exactes des propriétés des sols. Malheureusement, les techniques d'exploration courantes ne peuvent fournir ce type d'information déterministe. L'interprétation la plus réaliste que l'on peut faire des résultats du programme d'exploration hydrologique d'un site est en terme de densité de probabilité pour chacune des propriétés de sol, et de structure de corrélation spatiale, de dérive spatiale, et de structure d'autocorrection, si elles existent, pour les différentes propriétés du sol.

Dans la présente étude, le problème est posé en termes probabilistes ou stochastiques et un modèle numérique fondé sur les techniques de simulation de **Monte Carlo** est proposé pour sa résolution. Par la même occasion, nous montrons l'intérêt que peut présenter l'approche de Monte Carlo en tant qu'outil de résolution de certains problèmes où n'interviennent qu'un nombre fini de variables aléatoires.

Les variables aléatoires retenues comme paramètres de calcul sont, dans notre cas, **la conductivité hydraulique de saturation  $K_{sat}$**  et **la teneur en eau de saturation  $\theta_{sat}$** , vu leur interdépendance commune au sol et à l'écoulement, et la méthode numérique est celle du programme de calcul par éléments finis, **COMSOL Multiphysics**.

## V.2 METHODOLOGIE

### V.2.1 Introduction

Toute approche stochastique nécessite une méthode numérique et une méthode statistique :

- La méthode numérique est ici la méthode des éléments finis ; nous avons utilisé le logiciel **COMSOL Multiphysics** ;
- La méthode statistique est la technique de simulation de **Monte Carlo**.

### V.2.2 Programme de calcul en éléments finis

Cette étude a été effectuée en utilisant le logiciel **COMSOL Multiphysics**, destiné à la résolution des problèmes du génie civil et de l'environnement par la méthode des éléments finis.

Ce programme de calcul, dont les modalités d'application ne seront pas développées dans la présente étude, permet de résoudre le problème de l'écoulement et du transport en milieux poreux (calcul des charges hydrauliques pour l'écoulement d'eau et des concentrations pour le transport de polluant).

### V.2.3 Procédure de calcul répétitif et d'analyse statistique des résultats

#### V.2.3.1 Généralités

L'analyse stochastique des écoulements en milieux poreux par la méthode de Monte Carlo développée dans cette étude a comporté les étapes suivantes :

- 1) Choix des paramètres de calcul ;
- 2) Analyse statistique de ces paramètres de calcul à partir d'essais de laboratoire et d'essais en place (moyenne, variance, histogramme, fonction de distribution) ;
- 3) Choix des paramètres et du plan de charge ;
- 4) Discrétisation du sol en éléments ;
- 5) Génération des valeurs aléatoires des paramètres de base et attribution d'une valeur aléatoire à chaque zone d'éléments ;
- 6) Détermination de la solution du problème (charges et concentrations) en chaque point des lignes de calcul déterminées ;
- 7) Répétition des étapes (5) et (6) pour obtenir plusieurs solutions ;
- 8) Analyse statistique des solutions obtenues : moyenne, variance, histogramme, fonction de distribution.

Le schéma de la figure V.1 résume les différentes étapes.

#### V.2.3.2 Choix des paramètres de calcul

Les propriétés de calcul de l'écoulement en milieu poreux retenues comme paramètres de calcul sont **la conductivité hydraulique de saturation  $K_{sat}$**  et **la teneur en eau de saturation  $\theta_{sat}$** .

Ce choix est dicté par la variabilité importante de ces deux paramètres, et le leur influence, soulignée par de nombreux auteurs, sur la solution déterministe.

#### V.2.3.3 Analyse statistique des paramètres $K_{sat}$ et $\theta_{sat}$

L'analyse statistique des valeurs retenues pour chacun des paramètres a donné les résultats suivants,

- Module d'élasticité  $K_{sat}$  :
  - Moyenne  $m_{K_{sat}}$  :  $2.10^{-6}$  m/s = 0.1728 m/j

- Coefficient de variation CV ( $K_{sat}$ ) = 50%
- Angle de frottement interne  $\theta_{sat}$  :
  - Moyenne  $m_{\theta_{sat}}$  : 16% = 0.16
  - Coefficient de variation CV ( $\theta_{sat}$ )=62.5%

Pour chaque propriété du sol retenue comme paramètre de calcul, la loi de distribution **Log normale** semble être la plus représentative. Ce choix fait l'unanimité auprès de nombreux auteurs.

#### **V.2.4 Déroulement de la procédure de calcul statistique**

La procédure développée dans cette étude pour l'analyse statistique du problème de l'écoulement en milieu poreux comporte trois objectifs,

- Tenir compte de la variabilité naturelle des paramètres de calcul dans le milieu poreux,
- Effectuer les calculs de l'écoulement en milieu poreux de façon automatique,
- Faciliter l'analyse des résultats.

Le déroulement de cette procédure de calcul comporte trois parties bien distinctes :

- 1) Génération des valeurs aléatoires des paramètres  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$  (excel) ;
- 2) Réalisation de n (50) calculs nécessaires pour une bonne estimation de la solution du problème ;
- 3) Exploitation des résultats.

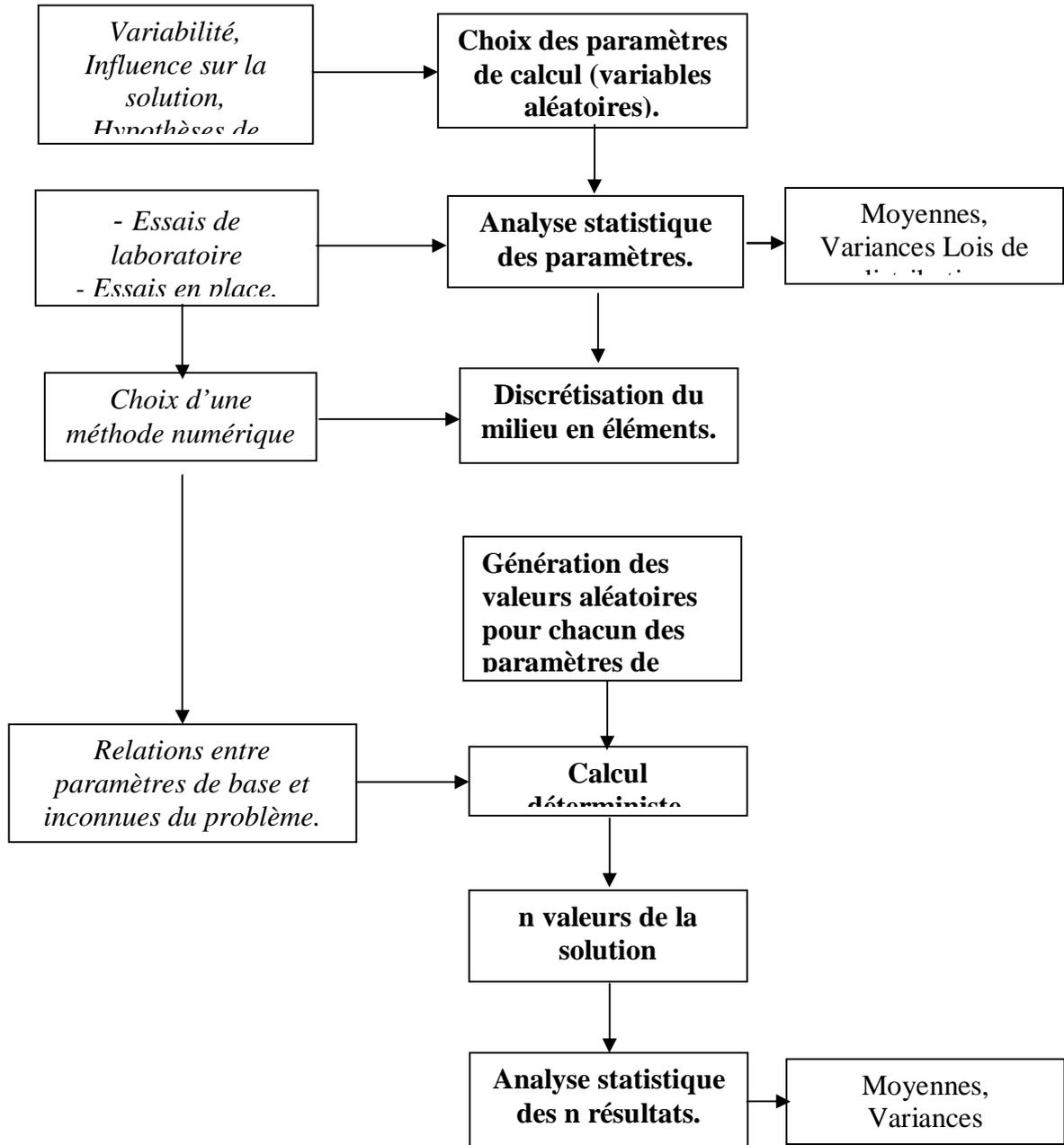
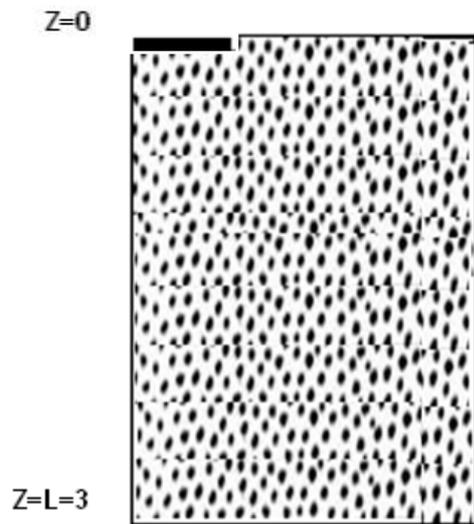


Figure V.1 Schéma montrant les différentes étapes nécessaires à la détermination de la solution probabiliste

### V.3 SIMULATION NUMERIQUE

#### V.3.1 Présentation du cas étudié

Le modèle de simulation utilisé est un domaine rectangulaire, de hauteur  $z = 3\text{m}$ , et de largeur  $r = 2\text{m}$  (figure V.2). Un drain de  $0.4\text{m}$  de longueur et de  $0.01\text{m}$  d'épaisseur a été placé de façon à avoir l'écoulement transportant le polluant dirigé vers le bas pour pouvoir diffuser l'eau contaminée. Dans notre étude on s'intéresse à l'analyse de l'effet de la variabilité des paramètres de sol dans le calcul de l'écoulement ou du transport de polluant en régime transitoire.



**Figure V.2** Présentation du milieu poreux étudié

#### **V.4 HYPOTHESES DE CALCULS**

Le modèle de calcul numérique de l'écoulement en milieu poreux est une représentation simplifiée de la réalité. Les simplifications nécessaires concernent :

- Le milieu poreux est supposé indéformable devant les forces attractives de l'écoulement et les interactions du polluant avec les particules du sol ;
- L'écoulement d'eau est pris comme étant incompressible.
- Pour l'écoulement, l'eau est diffusée à partir du drain et du coup s'infiltrer dans le sous sol.
- Le milieu poreux est initialement partiellement saturé et devient saturé à un certain temps ce qui explique l'utilisation de l'équation de Richard pour une modélisation complète dite non saturée, saturée ;
- Les vides de la matrice poreuse sont occupés par deux phases, l'eau et l'air
- L'air forme une phase continue avec l'atmosphère sous une pression uniforme.
- L'eau provenant du drain contient un polluant appelé "soluté" de concentration constante initiale  $c_0$ .
- Le soluté s'infiltrer dans le sol avec l'eau et s'y déplace à travers par advection-dispersion.
- En outre, le soluté s'adsorbe avec les particules du sol, ce qui réduit les concentrations aqueuses et ralentit aussi le mouvement de soluté par rapport à l'eau. La biodégradation réduit également les concentrations des deux phases liquide et solide.

La sorption et la biodégradation sont linéairement proportionnelles aux concentrations aqueuses. L'écoulement contenu dans le drain est la seule source polluante, et le soluté est libre de quitter la colonne du sol avec le flux d'écoulement. Initialement, le sol n'est pas contaminé par le soluté. Nous allons modéliser son transport pendant dix jours.

- **Conditions initiales et limites**

**- Partie écoulement**

Les conditions initiales et limites utilisées pour l'écoulement d'eau sont résumées ci-dessous,

- La pression hydraulique initiale au niveau du drain est prise égale à  $H_p = 0.01m$ , ce qui fait que le niveau initial d'eau dans le sol est à 0,01 m, donnant ainsi une condition au limite de Dirichlet en charge hydraulique égale à 0.01m. Pour les deux cotés de la section rectangulaire du sol on considère qu'il n'y a pas d'écoulement les traversant quand à sa base on impose une condition de Neumann de flux non nul égal à  $N_0 = 0.01K_S$ , les expressions (V.1) à (V.5) synthétisent les conditions initiales et limites.

**- Conditions initiales**

Ce terme désigne l'état d'un système que l'on veut modéliser, au début de la simulation. La valeur de la variable d'intérêt est donc supposée connue en tout point du système à l'instant initial. Dans notre cas, les conditions initiales consistent à spécifier le potentiel ou la charge hydraulique ( $H_p = \psi + z$ ) en chaque point du domaine de l'écoulement  $\Omega$  à l'instant  $t = 0$ , comme suit,  $H_p(x, z) = H_{p0}(x, z) \rightarrow \psi = H_{p0} - z$   
 $H_p = H_{p0} \quad \partial\Omega \text{ drain ;} \quad (V.1)$

**- Conditions limites**

Ce terme désigne les contraintes extérieures imposées à un système, et qui conditionnent son évolution. Pour les problèmes d'écoulement en milieux poreux, ces contraintes peuvent être des conditions en **charge** (condition de Dirichlet) ou des conditions en **flux** (condition de Neumann). Dans le premier cas on impose donc la charge ou le potentiel, dans l'autre, on spécifie un flux à travers une limite du système. Notons qu'on peut avoir les deux types de conditions pour le même système, et qu'en un endroit du système, on peut passer d'un type de condition à l'autre en cours de simulation. Un problème pour lequel on dispose des conditions initiales, des conditions aux limites, et d'une loi d'évolution du système conduit à une solution unique.

Dans notre cas, les conditions aux limites consistent à imposer la charge hydraulique  $H_p$  ou le flux  $N_0$  à travers le contour  $\Omega$  du domaine d'écoulement pour un temps  $t \geq 0$ . Si  $\Omega_1$  est le contour du domaine d'écoulement où la charge est imposée et  $\Omega_2$  celui où le flux est imposé, les types de conditions aux limites à envisager sont les suivantes,

**- Condition de Dirichlet (charge ou pression imposée)**

$$H(x, z, t) = H \text{ sur } \Omega_1 \rightarrow \psi = H_{p0} - z$$

**- Condition de Neumann (flux imposé)**

$$\frac{\partial h}{\partial n} = N_0 \text{ sur } \Omega_2$$

Ou  $n$  est la normale à la limite ou à la surface avec des composantes  $x$  et  $z$ ,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = N_0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = N_0 \text{ et } \frac{\partial h}{\partial z} = N_0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} = N_0 - 1$$

Si la limite est imperméable alors,  $N_0 = 0$ .

$$n. [-K_S k_r \nabla(H_p + D)] = 0 \quad \partial\Omega \text{ surface ;} \quad (\text{V.2})$$

$$n. [-K_S k_r \nabla(H_p + D)] = 0 \quad \partial\Omega \text{ cotés ;} \quad (\text{V.3})$$

$$n. [-K_S k_r \nabla(H_p + D)] = 0 \quad \partial\Omega \text{ symétrie ;} \quad (\text{V.4})$$

$$n. [-K_S k_r \nabla(H_p + D)] = N_0 \quad \partial\Omega \text{ base.} \quad (\text{V.5})$$

**- Partie transport**

Les conditions initiales et limites utilisées pour le transport de soluté sont résumées ci dessous,

Le soluté pénètre avec l'eau le drain à une concentration  $c_0$ , tout en sachant que le sol est pris initialement à une concentration nulle et qu'il dispose d'une petite fuite à sa base inférieure. Les expressions (V.6) à (V.10) synthétisent les conditions initiales et limites pour le problème de transport.

$$c = c_0 \quad \partial\Omega \text{ drain ;} \quad (\text{V.6})$$

$$n. [-\theta D_L \nabla c] = 0 \quad \partial\Omega \text{ surface ;} \quad (\text{V.7})$$

$$n. [-\theta D_L \nabla c] = 0 \quad \partial\Omega \text{ cotés ;} \quad (\text{V.8})$$

$$n. [-\theta D_L \nabla c + uc] = 0 \quad \partial\Omega \text{ symétrie ;} \quad (\text{V.9})$$

$$n. [-\theta D_L \nabla c] = 0 \quad \partial\Omega \text{ base ;} \quad (\text{V.10})$$

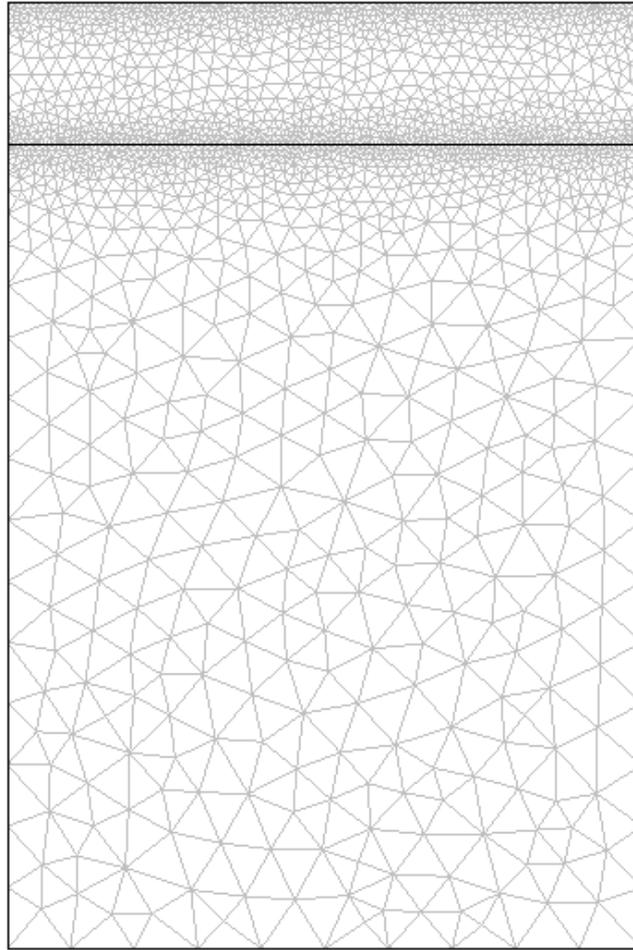
Ou  $n$  est un vecteur unitaire normal.

**V.5 MAILLAGE D'ELEMENTS FINIS**

Le maillage d'éléments finis réalisé est constitué de 15310 nœuds, et de 3744 éléments triangulaires finis (Figure V.3). Pour les besoins de calculs stochastiques, nous avons fait varier les paramètres de sol (variables aléatoires) en subdivisant le milieu poreux dans le sens vertical en 20 couches (strates). Ce maillage comprend toutes les zones du milieu.

L'origine des coordonnées est prise en tête du rectangle représentant le milieu poreux (coté amont), l'axe vertical est orienté vers le bas et l'axe horizontal vers l'aval.

La largeur totale du modèle a été fixée de l'amont vers l'aval à 2 m et la hauteur totale à 3 m. Ces limites ont été choisies pour que les frontières extérieures du maillage n'aient pas d'influence sur les champs de charges hydrauliques et des concentrations à proximité du milieu.



**Figure V.3** Maillage réalisé pour l'étude de l'écoulement

## **V.6 CAS DETERMINISTE**

### **V.6.1 Présentation du cas étudié**

Ce cas d'étude (déterministe) est utile et nécessaire pour estimer les résultats d'analyse probabiliste qui seront effectuées plus loin.

Nous nous proposons de calculer les charges hydrauliques pour l'écoulement d'eau et les concentrations pour le transport du soluté en milieu poreux.

Le maillage est constitué de 15310 nœuds et de 3744 éléments finis.

Tout en sachant que le mouvement de l'eau et le transport de soluté dans le sol peuvent être modélisés séparément en conséquence.

Cette procédure est valable lorsque les concentrations de soluté sont faibles et qu'elles ne modifient pas les propriétés de l'eau de façon significative. Nous utilisons donc cette hypothèse pour faciliter le développement du modèle.

#### **V.6.1.1 Partie hydrique**

La partie hydrique correspond à l'étude de l'écoulement partiellement saturé régit par l'équation de Richards,

$$[C + S_e S] \frac{\partial H_p}{\partial t} + \nabla \cdot [-K_S k_r \nabla (H_p + D)] = Q_s$$

$C$  : la capacité de rétention, elle représente la variation de teneur en eau du sol par unité de variation de charge matricielle ( $C(h) = \frac{d\theta}{dh}$ ) ;

$S_e$  : Coefficient de saturation effective du sol ;

$S$  : Coefficient d'emmagasinement de l'eau dans le sol ;

$H_p(m)$  : la charge hydraulique ;

$t$  : représente le temps (jours) ;

$K_S$  : la conductivité hydraulique de saturation ;

$D$  : représente le système de coordonnées  $(x, y)$  ;

$Q_s$  : représente le terme de source d'écoulement.

La modélisation de la partie hydrique suit le cheminement de l'eau dans le sol. En supposant que le taux d'infiltration maximum est constant et égal au coefficient de perméabilité à saturation, on fait une économie de paramètres car ce coefficient est déjà utilisé ailleurs dans le modèle.

Les pertes causées par le réseau de drainage lorsque présent sont modélisées par l'interception d'une proportion fixe du flux hydrique traversant l'élément au niveau duquel le drain est enfoui. Cette interception  $I_{DR}$  (m/s) est donc égale à,

$$I_{DR} = C_{DR} \cdot q$$

Ou,  $C_{DR}$  est le coefficient de drainage ;

La percolation est modélisée par les équations de Richard et de Buckingham :

$$q = -K(\theta) \frac{dH}{dz}$$

où  $q$  est le flux (m/s),  $K(\theta)$  est la conductivité hydraulique (m/s),  $\theta$  est la teneur volumétrique en eau ( $m^3/m^3$ ),  $H$  est la charge hydraulique (m) et  $z$  est l'altitude (m).

A la différence de la loi de Darcy la conductivité hydraulique n'est pas constante dans la loi de Buckingham et elle varie en fonction du contenu en eau. En condition de saturation la teneur volumétrique en eau est égale à la porosité du matériau et la conductivité hydraulique est alors la même selon les deux lois.

Etant donné que le pas de temps est journalier, on peut supposer que la percolation est uniquement gravitaire. On simplifie ainsi le modèle de percolation à,

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{dK(\theta)}{dz}$$

Les variables aléatoires sont  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$  ainsi que les paramètres d'écoulement utilisés dans cette modélisation sont résumés dans le tableau V.1.

**Tableau V.1** Paramètres d'écoulement utilisés dans la modélisation.

Paramètres	Unités	Déscriptions	Valeurs
$K_S$	$m/j$	Conductivité hydraulique de saturation	0.1728
$\theta_S$	–	Teneur en eau volumique	0.16
$\theta_r$	–	Teneur en eau volumique résiduelle	0.01
$\alpha$	$m^{-1}$	Paramètre empirique	1.39
$n$	–	Paramètre empirique	1.6
$m$	–	Paramètre empirique	$1 - 1/m$
$l$	–	Coefficient de connexion des pores	0.5
$H_{ps}$	$m$	Charge hydraulique du drain	0.01
$H_{p0}$	$m$	Charge hydraulique initiale	$-(z+2.9)*(z<-0.5)+(z+2.9)-0.2*(z+0.5))*(-0.5<=z)$

**V.6.1.2 Partie de soluté**

Elle correspond à l'étude du transport de soluté en milieu poreux régit par l'équation d'advection-dispersion- sorption,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta c) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_b c_p) = \nabla \cdot [-\theta D_L \nabla c + uc] = \sum R_L + \sum R_p + S_c$$

$c$  : représente la concentration dissoute (kg/m) ;

$c_p$  : est la masse de contaminant adsorbée par unité de poids sec de solide (mg/kg) ;

$\theta$  : la teneur en eau volumétrique ;

$\rho_b$  : représente la densité apparente (kg/m<sup>3</sup>) ;

$D_L$  : est le tenseur de dispersion hydrodynamique (m<sup>2</sup>/j) ;

$R_L$  : représente les réactions dans l'eau, il est équivalent à des réactions impliquant des solutés liés aux particules du sol (kg/m<sup>3</sup>.j) ;

$S_C$  : est soluté ajouté par unité de volume de sol par unité de temps (kg/m<sup>3</sup>.j).

Le modèle suppose que le soluté est appliqué à la surface du sol de façon homogène. Les précipitations les dissolvent progressivement pour l'entraîner dans l'eau d'infiltration.

Pendant son séjour à la surface il est soumis à une dégradation du premier ordre dont la constante inclut les processus de biodégradation et de photolyse. La quantité de soluté noté  $M$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) à la surface est donc modélisée par,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -K_p M - P_s$$

où  $K_p$  est la constante de dégradation à la surface ( $1/\text{s}$ ) et où  $P_s$  représente les gains consécutifs à un épandage et les pertes par dissolution ( $\text{kg}/\text{m}^2.\text{s}$ ).

Les paramètres du transport de soluté utilisés dans cette modélisation sont résumés dans le tableau V.2.

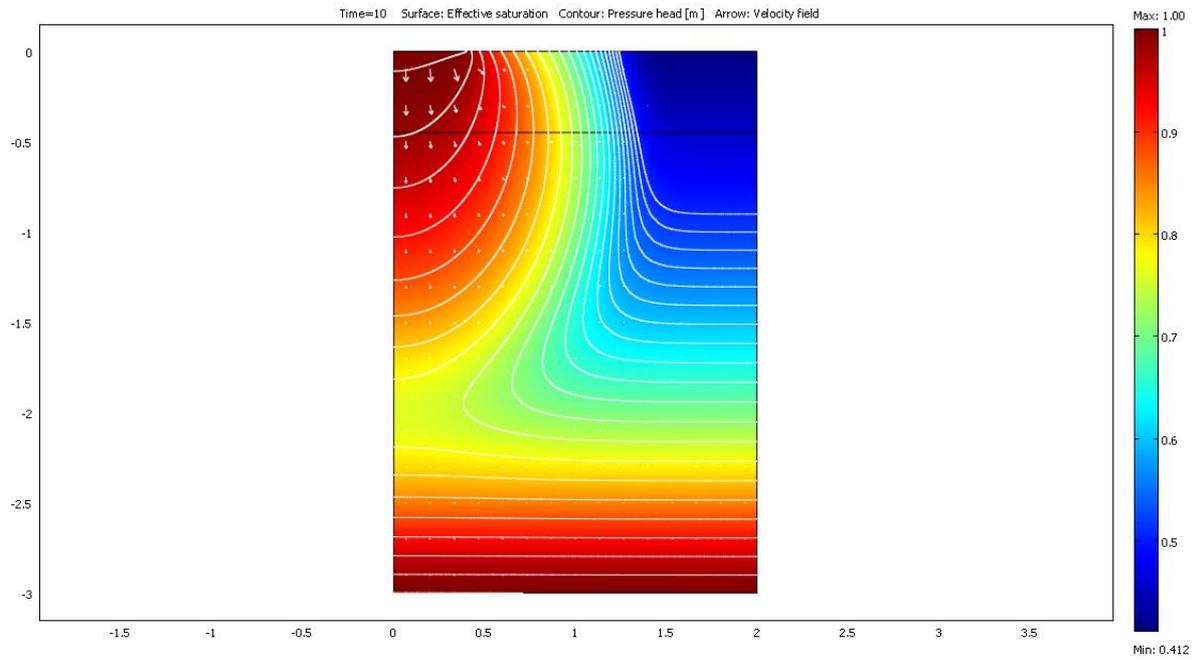
**Tableau V.2** Paramètres du transport de soluté utilisés dans la modélisation.

<i>Paramètres</i>	<i>Unités</i>	<i>Déscriptions</i>	<i>Valeurs</i>
$r_b$	$\text{Kg}/\text{m}^3$	<i>Densité apparente</i>	1200
$k_p$	$\text{m}^3/\text{kg}$	<i>Coefficient de partition</i>	0.0001
$D_m$	$\text{m}^2/\text{j}$	<i>Coefficient de diffusion moléculaire</i>	0.00374
$\tau_L$	–	<i>Facteur de tortuosité</i>	$\theta^{7/3}\theta_s^{-2}$
$\alpha_1$	$\text{m}$	<i>Dispérsivité longitudinale</i>	0.005
$\alpha_2$	$\text{m}$	<i>Dispérsivité transversale</i>	0.001
$\phi_L$	$\text{j}^{-1}$	<i>Taux de décroissance dans liquide</i>	0.05
$\phi_P$	$\text{j}^{-1}$	<i>Taux de décroissance dans le solide</i>	0.01
$c_s$	$\text{Kg}/\text{m}^3$	<i>Concentration du soluté au drain</i>	1.0
$c_0$	$\text{Kg}/\text{m}^3$	<i>Concentration initiale du soluté dans le sol</i>	0

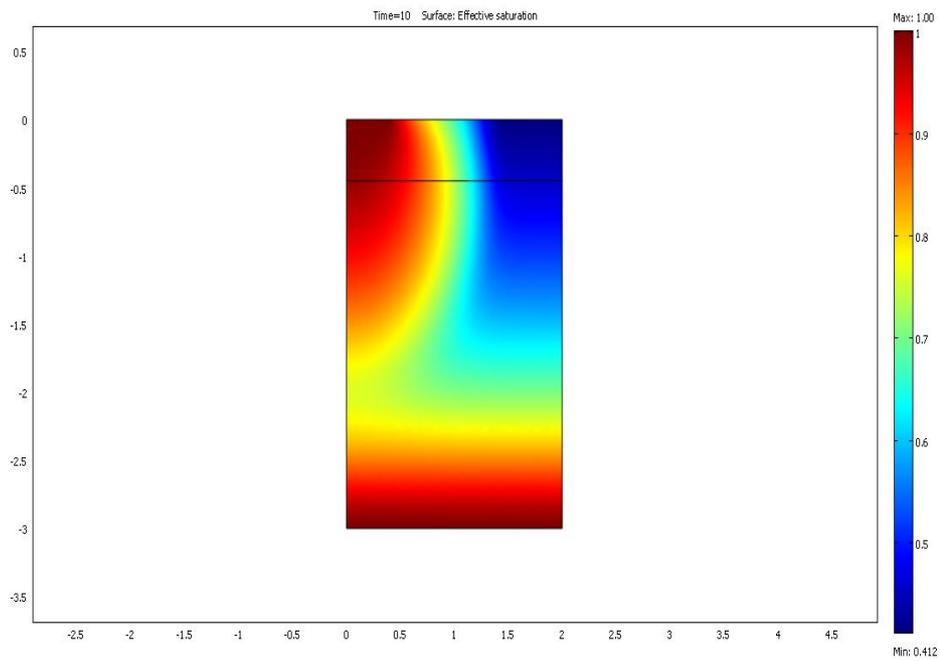
### V.6.2 Présentation des résultats

Nous avons choisi, dans ce cas d'étude, de déterminer les valeurs des charges hydrauliques et des concentrations dans le milieu poreux ainsi que celles de la saturation effective.

Les résultats sont donnés sous forme de courbes (figures de V.5 à V.19).



**Figure V.3** Isovaleurs des charges hydrauliques «H»



**Figure V.4** Isovaleurs des saturations effectives « $S_e$ »

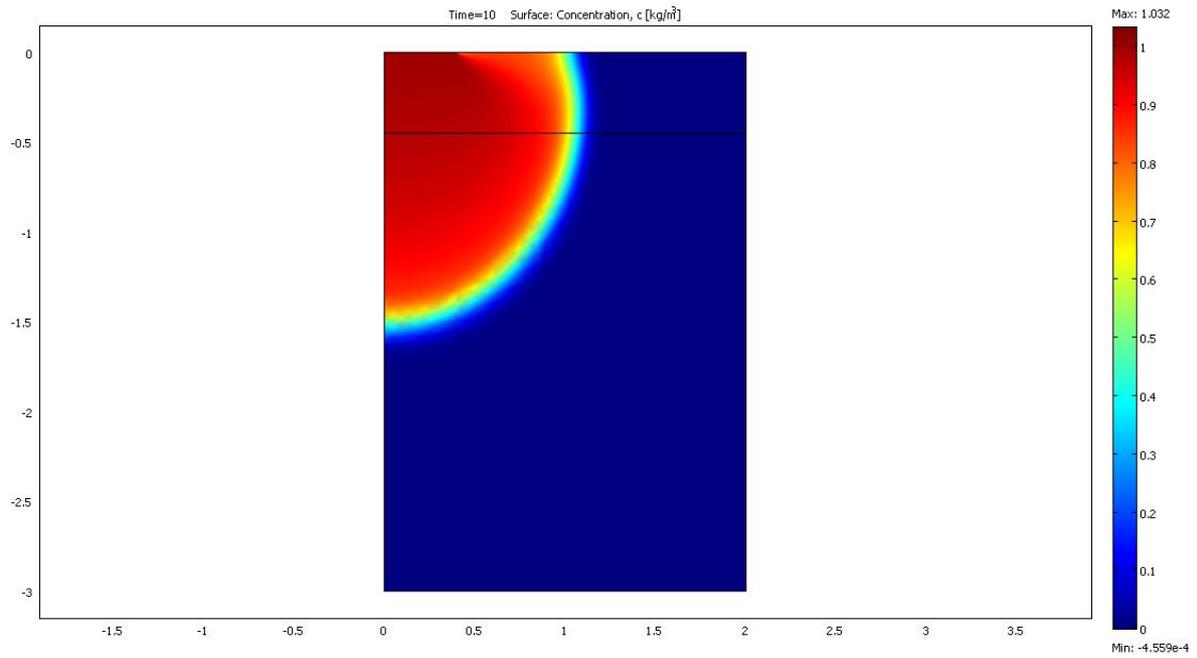


Figure V.5 Isovaleurs des concentrations de soluté «c»

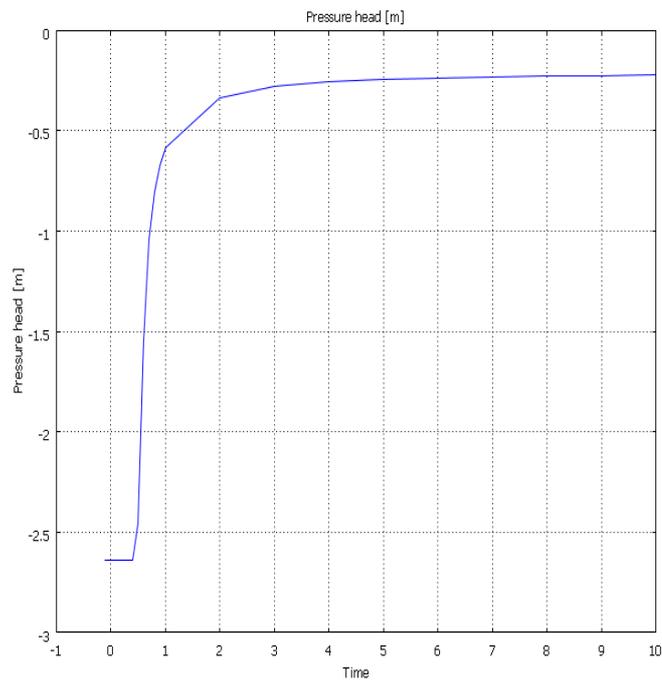
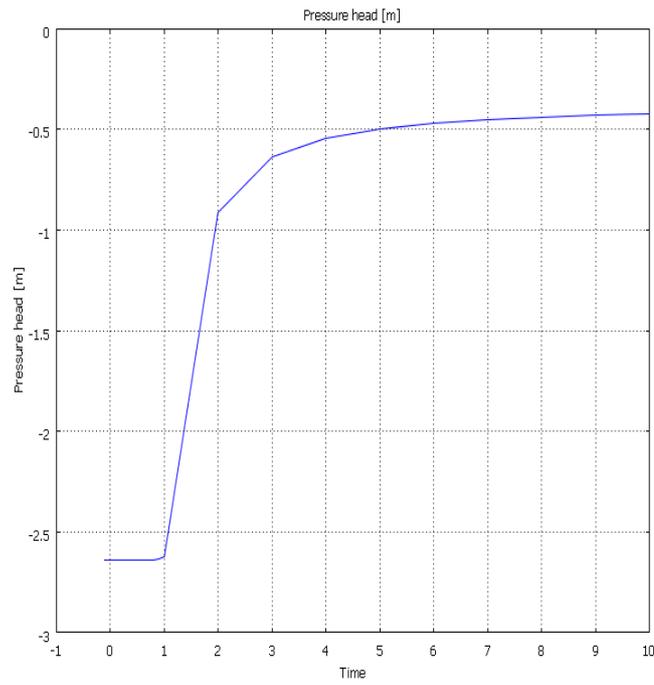
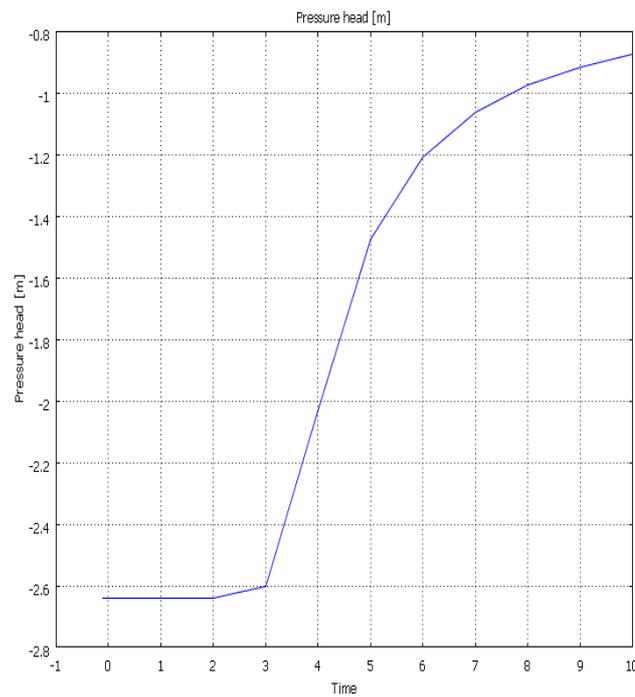


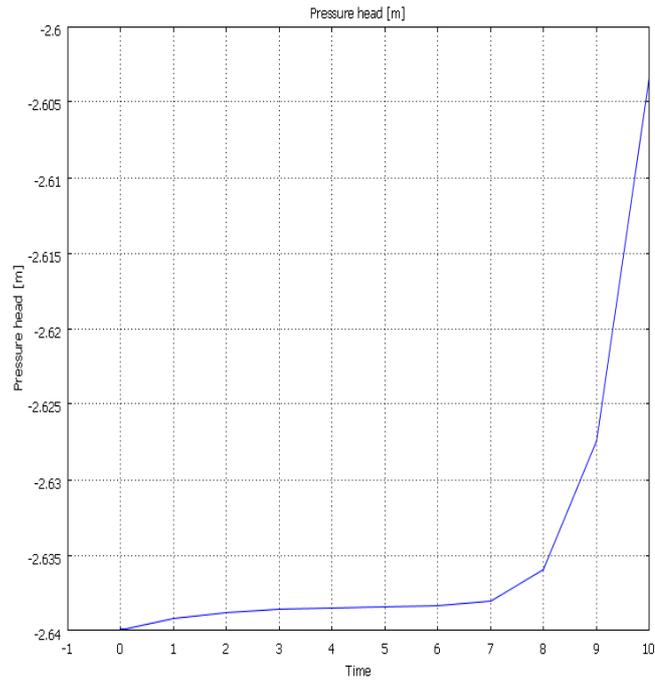
Figure V.6 Courbe des charges hydrauliques «H» pour  $x = 0.5$  m pendant 10 jours



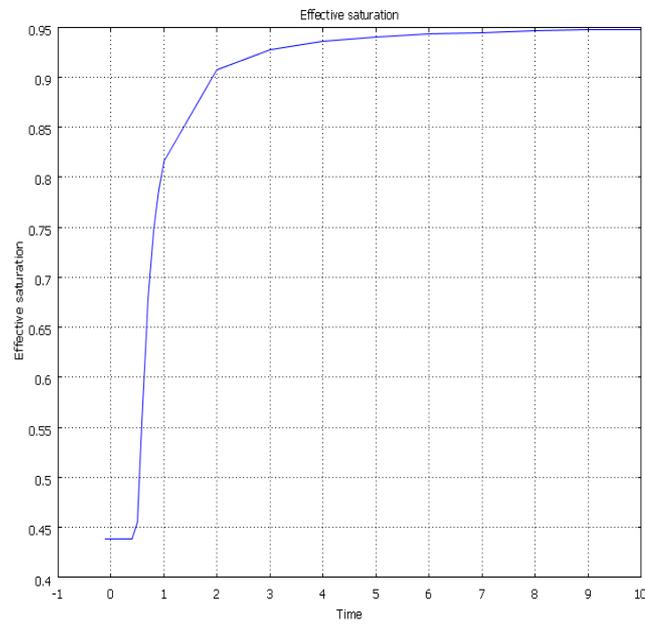
**Figure V.7** Courbe des charges hydrauliques «H» pour  $x = 0.7 m$  pendant 10 jours



**Figure V.8** Courbe des charges hydrauliques «H» pour  $x = 1 m$  pendant 10 jours



**Figure V.9** Courbe des charges hydrauliques «H» pour  $x = 1.5 m$  pendant 10 jours



**Figure V.10** Courbe de saturation effectives « $S_e$ » pour  $x = 0.5 m$  pendant 10 jours

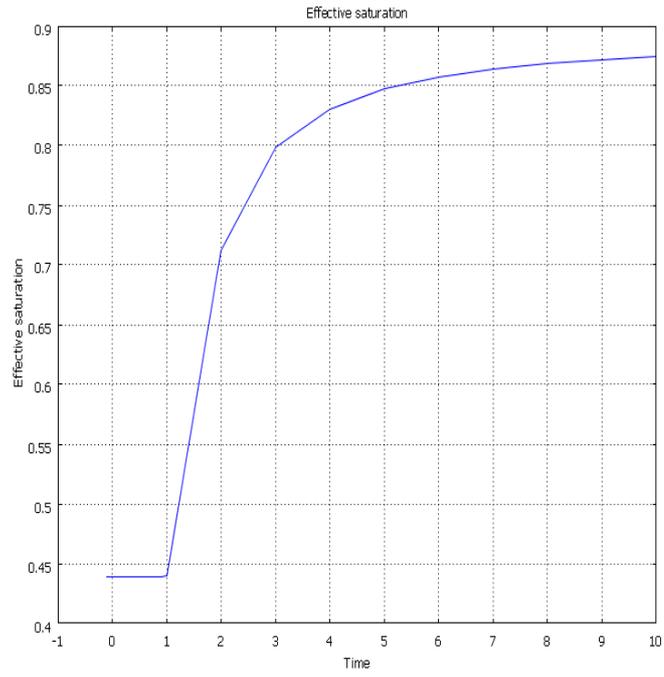


Figure V.11 Courbe de saturation effective « $S_e$ » pour  $x = 0.7$  m pendant 10 jours

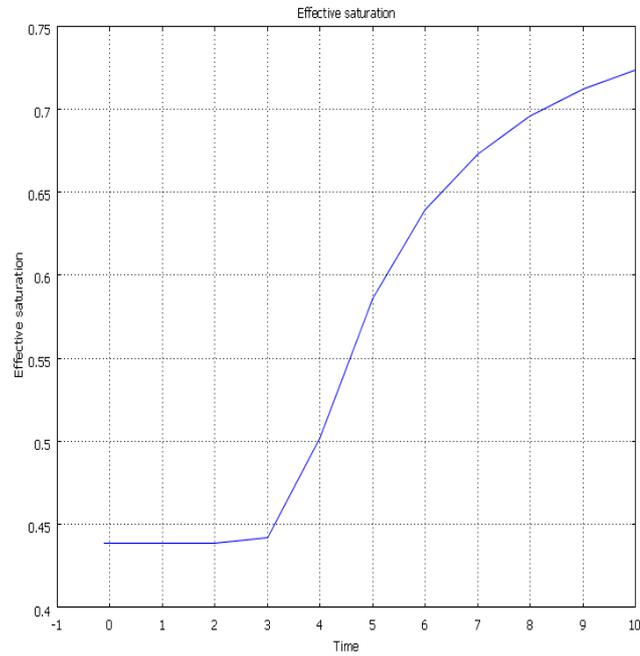
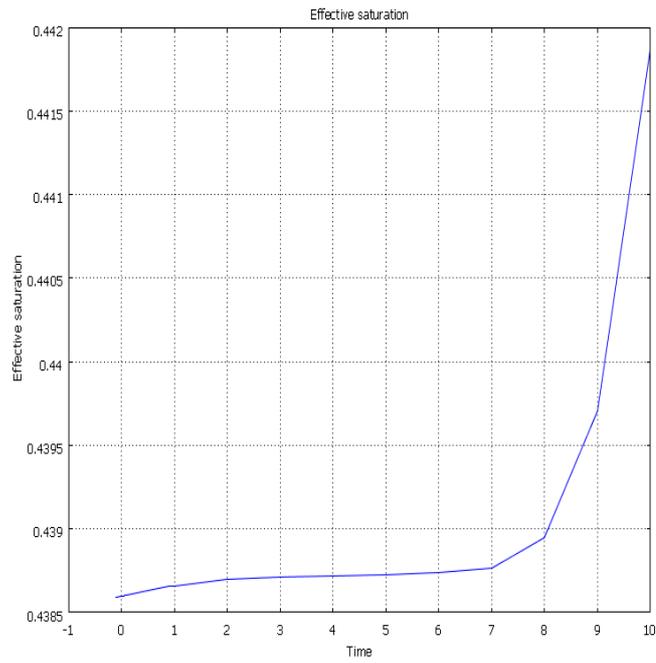
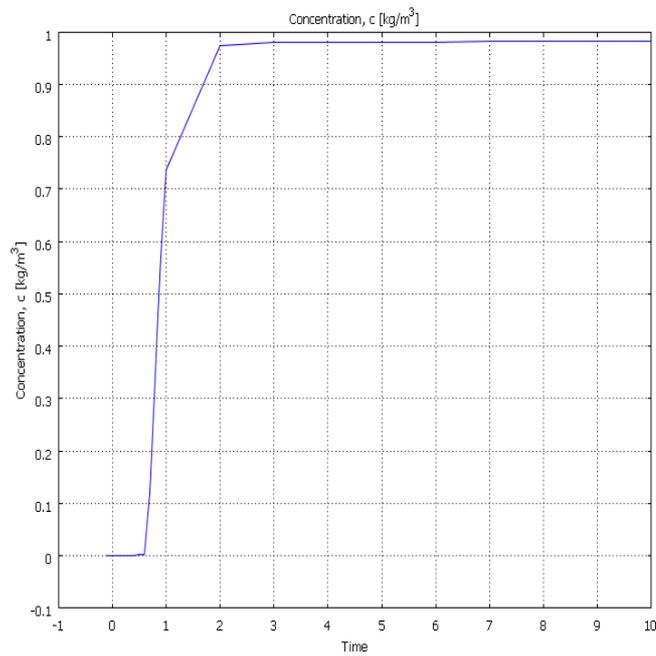


Figure V.12 Courbe de saturation effective « $S_e$ » pour  $x = 1$  m pendant 10 jours



**Figure V.13** Courbe de saturation effective « $S_e$ » pour  $x = 1.5\text{ m}$  pendant 10 jours



**Figure V.14** Courbe des concentrations de soluté « $c$ » pour  $x = 0.5\text{ m}$  pendant 10 jours.

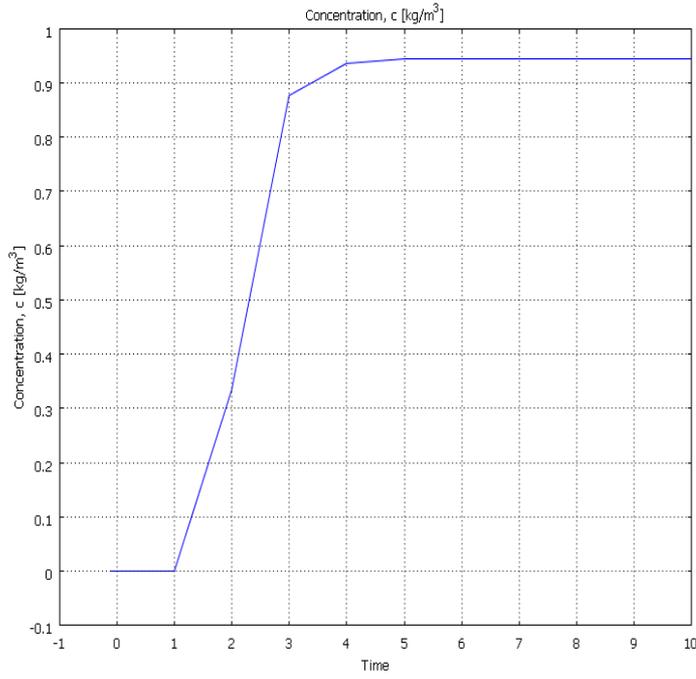


Figure V.15 Courbe des concentrations de soluté «c» pour  $x = 0.7$  m pendant 10 jours

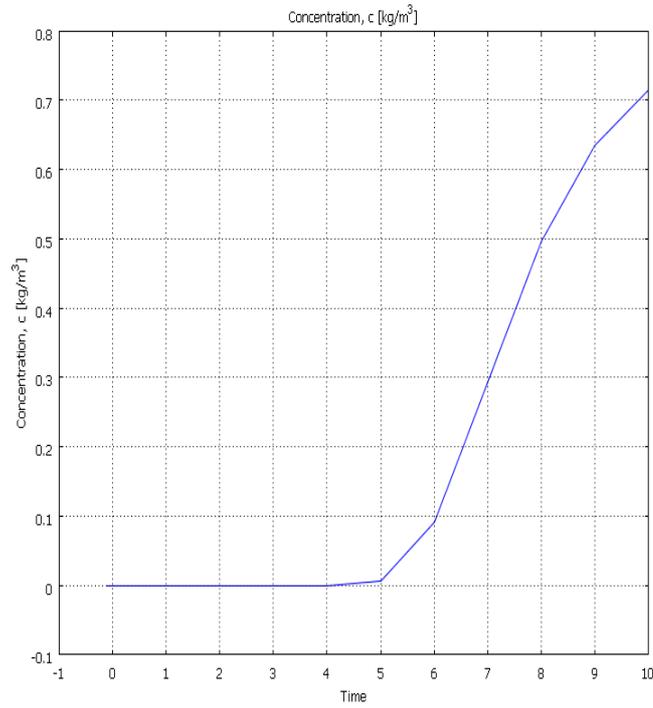
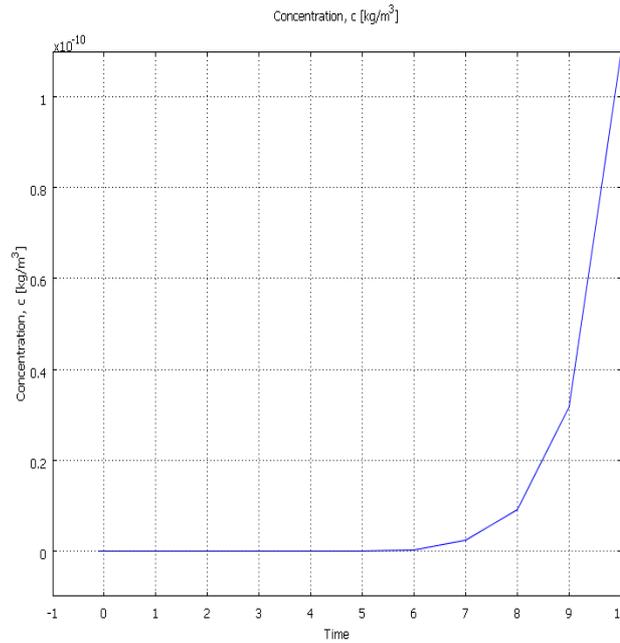


Figure V.16 Courbe des concentrations de soluté «c» pour  $x = 1$  m pendant 10 jours



**Figure V.17** Courbe des concentrations de soluté «c» pour  $x = 1.5 m$  pendant 10 jours

**V.6.3 Interprétation des résultats**

La solution numérique est donnée sous forme discrète dans le temps et dans l’espace. Les variables calculées sont la charge hydraulique, la concentration du soluté, la saturation effective.

Comme on doit s’attendre, la variation de la charge hydraulique sur une colonne verticale du domaine d’écoulement doit être linéaire, en passant d’une valeur positive dans la zone saturée à une valeur négative dans la zone non saturée et en s’annulant au niveau de la surface de saturation. Nous avons suivi alors cette variation sur quatre colonnes verticales correspondant aux abscisses,  $x = 0.5, 0.7, 1$  et  $1.5m$  pour tous les incréments de temps, à partir de  $t = 0.5$  jours jusqu’à  $t = 10$  jours. Nous avons observé que toutes ces variations confirment bien cette linéarité. Nous présentons ci-dessous quelques unes de ces variations, à savoir les figures (V.6) à (V.9).

Sur les figures (V.6) à (V.9), nous illustrons le profil de la charge hydraulique en fonction du temps et pour des  $x = 0.5, 0.7, 1$  et  $1.5m$ . On constate plus que l’on s’éloigne de l’abscisse  $x = 0.4 m$  qui bien est la limite de drain, ces profils sont retardés de plus en plus dans le temps pour montrer une évolution de la charge hydraulique. En d’autres termes, elles (figures (V.6) à (V.9)) montrent l’évolution de la surface de pression nulle ( $\psi = 0$ ) à des intervalles de temps différents,  $[0, 0.5j]$  pour la figure (V.6),  $[0, 1j]$  pour la figure (V.7),  $[0, 2j]$  pour la figure (V.8) et enfin  $[3, 6j]$  pour la figure (V.9) et ce respectivement pour les  $x = 0.5, 0.7, 1$  et  $1.5m$ . Ceci s’explique par le fait que les pores du milieu sont plus ou moins saturés par l’eau et donc le nombre des pores vides diminue avec le temps. Nous obtenons des résultats similaires à ceux obtenus par d’autres auteurs (Moussaoui, 1994 et Ghouli, 2009). La surface de pression nulle représente la limite entre les zones non saturées et saturées du domaine d’écoulement.

Dans l'analyse classique des écoulements à surface libre, celle-ci est représentée comme une limite imperméable et désignée habituellement sous le nom de surface libre.

Comme on peut constater sur les quatre figures l'état isobare de pression lors du drainage à  $t = 10$  jours. Cet état isobare démontre clairement l'existence d'un gradient hydraulique indiquant l'écoulement de haut vers le bas dans la zone non saturée. Cela confirme, aussi, la variation linéaire de la pression avec des valeurs négatives en zone non saturée, positives en zone saturée et égale à zéro sur la limite entre les deux zones.

Sur la figure V.5, on représente les iso-contours de la charge hydraulique. On constate que plus on se rapproche de la nappe phréatique plus les lignes iso-contours se rapprochent.

Nous représentons sur les figures (V.10) à (V.13), l'évolution de la saturation en fonction du temps pour des  $x = 0.5, 0.7, 1$  et  $1.5m$ . On constate que ces profils sont similaires à ceux de la charge hydraulique et qu'ils sont retardés dans le temps. Ceci s'explique par le fait que les pores du milieu sont plus au moins saturés par l'eau. Nous constatons ainsi les mêmes phénomènes observés précédemment en confirmant l'interprétation du profil de la charge hydraulique.

Sur l'isovaleurs des concentrations de soluté de la figure 5, nous présentons l'évolution de la concentration en fonction de la profondeur pour des  $x$  différentes à un instant donné. On remarque que la concentration de la substance mobile diminue avec la profondeur et que cette diminution est retardée dans le temps.

Ce résultat est tout à fait logique puisque d'une part, les profils de concentration se comportent de la même façon que ceux de l'humidité, mais ils se déplacent rapidement à cause de l'ajout de la pression osmotique dans la pression matricielle. D'autre part, plus le temps s'écoule plus le fluide se mélange avec cette substance et peut donc être transporté plus loin. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus par d'autres auteurs (Saâdi et al, 1998) et (Gueraoui et al, 2000) (Ghouli 2009).

On remarque aussi, sur l'isovaleurs des concentrations que, les lignes de courant se rapprochent quand on s'éloigne de l'entrée. Ceci est dû au fait de l'approche de la zone de saturation.

La figures (V.14) à (V.17), illustrent le profil de la concentration au cours du temps pour des  $x = 0.5, 0.7, 1$  et  $1.5m$ . On constate que pour les quatre courbes, la concentration augmente au fur et à mesure que le temps. Ceci est tout à fait logique, puisque au fur et à mesure le temps passe il y a accumulation du polluant dans cette section. On constate que les profils de la concentration suivent la même allure que ceux de la charge hydraulique pour les  $x = 0.5, 0.7, 1$  et  $1.5m$ .

**IX.7 CAS STATISTIQUEMENT HOMOGENE**

**IX.7.1 Présentation**

Dans ce cas d’analyse, les propriétés  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$  varient aléatoirement dans tous le milieu poreux : nous avons effectué 50 calcul, les 50 valeurs de  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$  sont tirées aléatoirement conformément à une loi « Log normale ». Pour chacun des calculs,  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$  sont constants dans tout le massif du sol.

Le maillage et les conditions aux limites sont identiques à ceux pris dans le cas déterministe,

Nous noterons que la génération des valeurs aléatoires de  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$  a été possible grâce à Microsoft Office Excel, en se basant sur les moyennes et les écarts types de ces deux paramètres portés dans le tableau V.3 qui nous montre quelques valeurs obtenues après génération de  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$ .

*Tableau V.3* Quelques valeurs générées des paramètres variables  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$

Conductivité hydraulique de saturation $K_{sat}$ (m/jours)			Teneur en eau volumique de saturation $\theta_{sat}$ (m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> )		
Moy de $K_{sat}$	écart type de $K_{sat}$	Loi Log normale	Moy de $\theta_{sat}$	écart type de $\theta_{sat}$	Loi Log normale
0.1728	0.0864 (8.64%)	0.2360	0.16 (16%)	0.1 (10%)	0.1432
		0.1042			0.2314
		0.2941			0.1595
		0.0474			0.3195
		0.1401			0.2232
		0.1995			0.1407
		0.0839			0.1793
		0.0197			0.2110
		0.2134			0.0869
		0.2225			0.1068
		0.1921			0.3498
		0.2054			0.1504

		0.0080			0.1723
		0.1128			0.0225
		0.1968			0.1934
		0.2300			0.2672
		0.2453			0.1768
		0.1081			0.0158
		0.3489			0.1432
		0.1169			0.2314

**V.7.2 Présentation des résultats**

Chaque calcul permet de déterminer les valeurs des charges hydrauliques, et des concentrations du soluté, choisis pour l'étude de l'écoulement et du transport (figure V.18). Une fois la série des cinquante (50) calculs terminée, il est alors possible de calculer la moyenne, pour chaque paramètre recherché et en chacun des nœuds situés sur la ligne de calcul choisie, à l'aide du programme Excel, ainsi que les paramètres statistiques, tels que l'écart-type, le coefficient de variation ou la loi de distribution des valeurs de la solution, afin d'apprécier l'influence de la variabilité des paramètres de sol sur la solution.

Les résultats obtenus sont résumés sous forme des courbes sur les figures V.19 à V.22, qui représentent l'une ou l'autre des relations suivantes,

- Evolution de la solution probabiliste (valeur moyenne, maximum et minimum des charges hydraulique et des concentrations) le long de la ligne de calcul choisie ( $x = 0.7m$ ).
- Evolution de l'écart-type (ou du coefficient de variation) de la solution le long de ligne de calcul choisie.
- 

Pour toutes les courbes obtenues, nous notons une allure graphique régulière, semblable à celles obtenues dans le calcul déterministe.

**a) Charges hydrauliques**

Les charges hydrauliques, et les concentrations du soluté, sont calculées suivant une ligne de coupe verticale,  $x = 0.7m$ , pour toute la profondeur du sol comme cela est montré sur la figure V. 17.

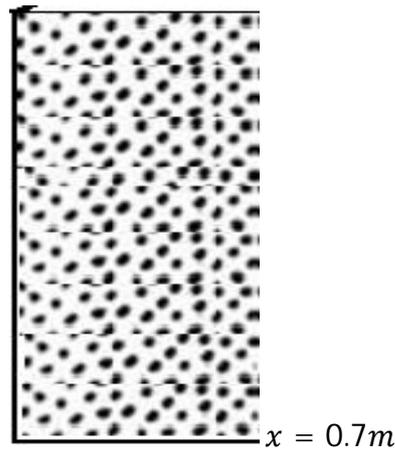


Figure V.18 Ligne de coupe verticale de calcul de l'écoulement et du transport

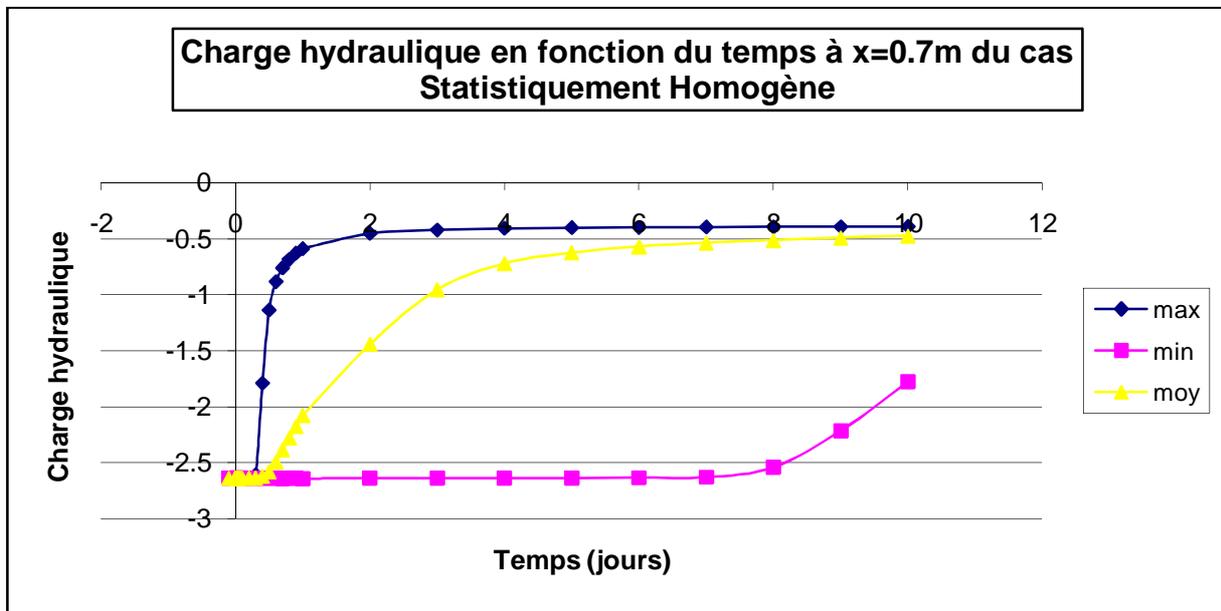


Figure V.19 Courbes des charges hydrauliques « H » de l'écoulement dans le sol

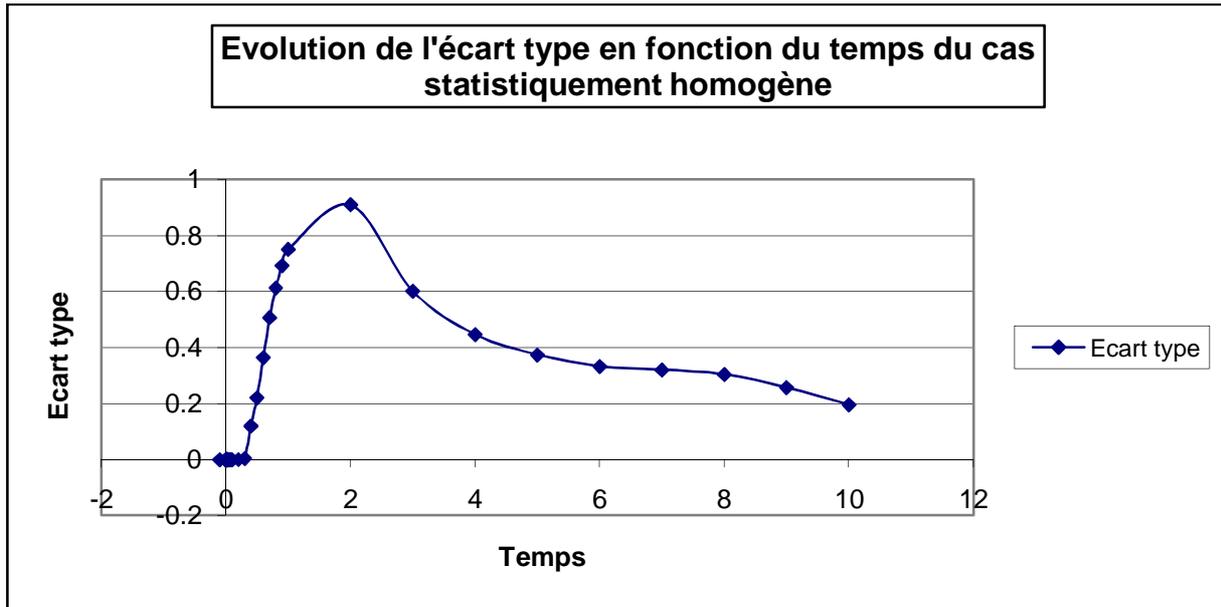


Figure V.20 Evolution des écart-types des charges hydrauliques

b) Concentrations du soluté :

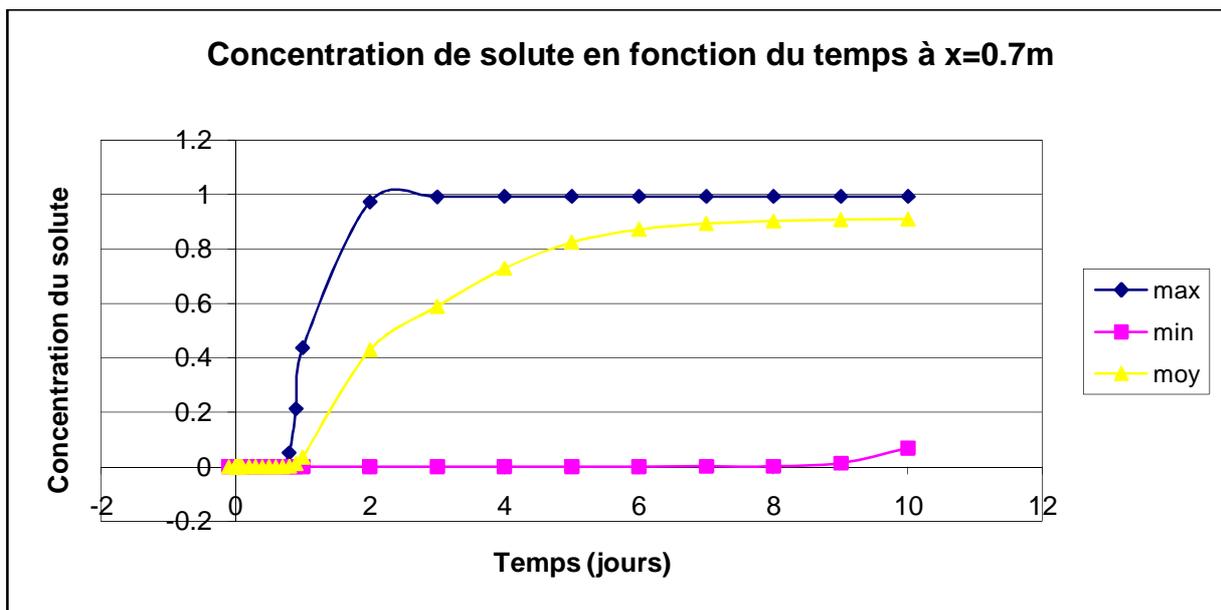


Figure V.21 Courbe des concentrations « c ».dans le sol

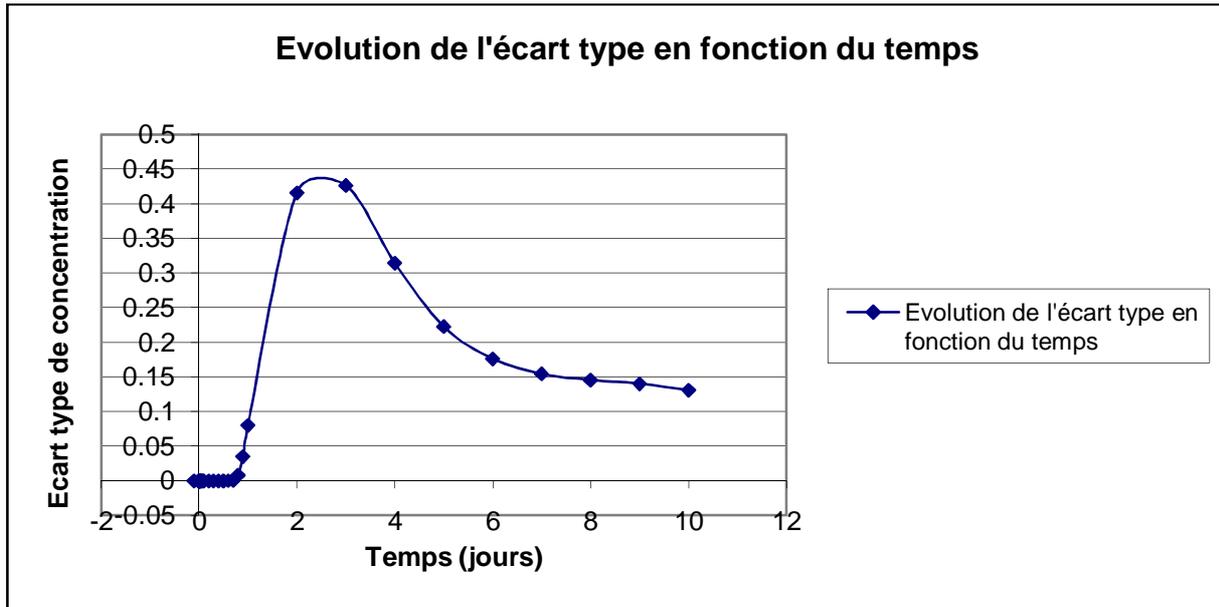


Figure V.22 Evolution des écart-types des concentrations «  $c$  »

### V.7.3 Interprétation des résultats

#### a) Charges hydrauliques

L'examen de l'évolution des charges hydrauliques (figure V.18), appelle les observations suivantes,

- Les courbes suivent la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale de la charge hydraulique en  $x = 0.7 \text{ m}$  est de (- 0.3938 m), on voit qu'elle est proche de celle obtenue par le calcul déterministe (- 0.4254 m),
- La valeur de la charge hydraulique moyenne maximale en  $x = 0.7 \text{ m}$  est de (- 0.4745 m), aussi proche de celle trouvée par le calcul déterministe (- 0.4254 m),
- L'incertitude sur les charges hydrauliques symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne verticale ( $x = 0.7 \text{ m}$ ) de calcul (figure V.20), atteint sa valeur la plus grande au voisinage (- 0.4568 m), du point au on a enregistré la plus grande charge hydraulique (- 0.3938 m).
- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums des charges hydrauliques,
- On remarque sur la figure V.19 que l'évolution des charges hydrauliques en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min), n'est pas vraiment significative, même si elle est un peu semblable à celle du cas déterministe (figure V.7), cela est du essentiellement au cas statistiquement homogène, et à la variabilité prise dans les calculs.

### **b) Concentrations de soluté**

L'examen de l'évolution des concentrations de soluté (figure V.21), appelle les observations suivantes,

- Les courbes suivent la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale de la concentration de soluté en  $x = 0.7 \text{ m}$  est de (0.9933 m), on voit qu'elle est proche de celle obtenue par le calcul déterministe (0.9449 m),
- La valeur de la concentration de soluté moyenne maximale en  $x = 0.7 \text{ m}$  est de (0.9117 m), aussi proche de celle trouvée par le calcul déterministe (0.9449 m),
- L'incertitude sur les concentrations de soluté symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne verticale ( $x = 0.7 \text{ m}$ ) de calcul (figure V.22), atteint sa valeur la plus grande au voisinage (0.9924 m), du point au on a enregistré la plus grande concentration de soluté (0.9933 m).
- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums des concentrations de soluté,
- On remarque sur la figure V.21 que l'évolution des concentrations de soluté en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min), n'est pas vraiment significative, même si elle est un peu semblable à celle du cas déterministe (figure V.15), cela est du essentiellement au cas statistiquement homogène, et à la variabilité prise dans les calculs.

## **V.8 CAS D'ANALYSE D'UN MULTICOUCHE STRATIFIE ET HETEROGENE**

### **V.8.1 Présentation**

#### **a. Description du sol stratifié étudié**

La zone à modéliser est un domaine rectangulaire (position horizontale  $0 < x < 2 \text{ m}$  ; profondeur  $0 < z < 3 \text{ m}$ ) :

#### **b. Les conditions aux interfaces**

A travers l'interface séparant deux couches de sols de nature hydrodynamiques différentes, on doit respecter, en plus, les deux conditions physiques suivantes:

- Continuité de la pression du sol, indépendamment de la séquence des strates, la pression de l'eau du sol est continue à travers l'interface, soit donc,

$$h|_{L-\varepsilon} = h|_{L+\varepsilon}$$

- Continuité du flux massique d'eau : le flux qui sort d'une couche doit être égal à celui qui entre dans la couche sous-jacente. On écrit donc :

$$q|_{L-\varepsilon} = q|_{L+\varepsilon}$$

Où: L, représente la cote de l'interface et  $\varepsilon$  la valeur positive infiniment petite.

Les hétérogénéités se traduisent par des discontinuités dans les coefficients du système d'équations au passage d'une couche à une l'autre. Cependant, certaines quantités physiques restent continues : la vitesse de Darcy, la pression et les flux de contaminants.

Dans ce cas d'analyse, nous avons divisé le sol en 20 couches, chacune d'elle est homogène en  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$ , nous noterons les mêmes conditions initiales et le même maillage (même nombre de nœuds et d'éléments) que ceux présentés précédemment.

Les valeurs attribuées aux paramètres de calcul ( $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$ ) sont générées conformément à une distribution Log normale à l'aide du logiciel Microsoft Office Excel, en utilisant les moyennes et les écarts types du tableau V.2. Le tableau V.8 montre quelques valeurs obtenues après génération de  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$ .

**Tableau V.4** Valeurs générées des paramètres variables  $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$

Conductivité hydraulique de saturation $K_{sat}$ (m/jour)			Teneur en eau volumétrique $\theta_{sat}$ (m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> )		
Moy de $K_{sat}$	Ecart type de $K_{sat}$	Loi Log normale	Moy de $\theta_{sat}$	Ecart type de	Loi Log normale
0.1728	0.0864	0.1675	0.16 (16%)	0.1	0.2172
0.1728		0.2447			0.1964
0.1728		0.2674			0.1100
0.1728		0.2060			0.0693
0.1728		0.3507			0.2615
0.1728		0.2458			0.3737
0.1728		0.2030			0.1490
0.1728		0.0582			0.0334
0.1728		0.2782			0.2309
0.1728		0.1590			0.2524

### **V.8.2 Présentation des résultats**

Nous avons appliqué, au niveau de chaque couche de sol, le modèle de transfert établie. La solution numérique est donnée sous forme discrète dans le temps et dans l'espace. Les variables calculées sont la charge hydraulique et la concentration du soluté.

Chaque calcul permet de déterminer les valeurs des charges hydrauliques, et des concentrations du soluté, choisies pour l'étude de l'écoulement d'eau et du transport de soluté (figures V.23, V.24, V.27, V.28). Une fois la série des cinquante (50) calculs terminée, il est alors possible de calculer la moyenne, pour chaque résultat cherché et en chacun des nœuds situés sur la ligne de calcul choisie ( $x = 0.7m$ ), à l'aide du programme Excel, ainsi que les paramètres statistiques, tels que l'écart-type, le coefficient de variation ou la loi de distribution des valeurs de la solution, afin d'apprécier l'influence de la variabilité des paramètres de sol sur la solution.

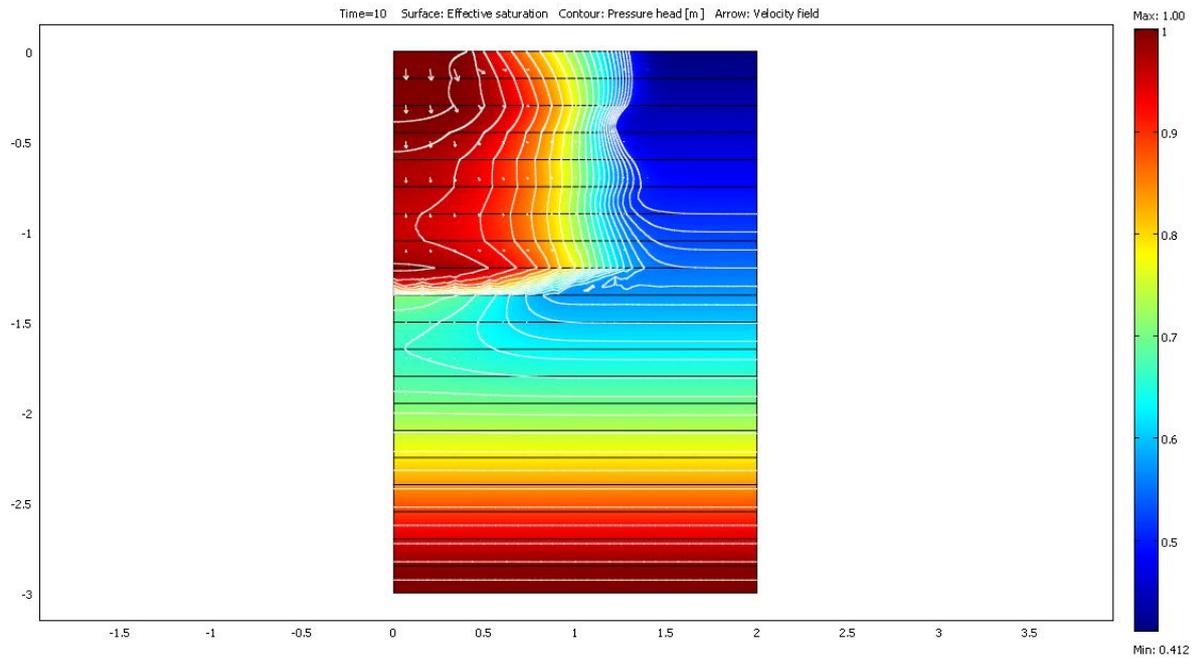
Les résultats obtenus sont résumés sous forme des courbes (figure V.23 à V.30), qui représentent l'une ou l'autre des relations suivantes,

- Evolution de la solution probabiliste (valeur moyenne, maximum et minimum des charges hydrauliques, des concentrations) le long de la ligne de calcul choisie ( $x = 0.7 m$ ),
- Evolution de l'écart-type (ou du coefficient de variation) de la solution le long de ligne de calcul choisie ( $x = 0.7 m$ ).

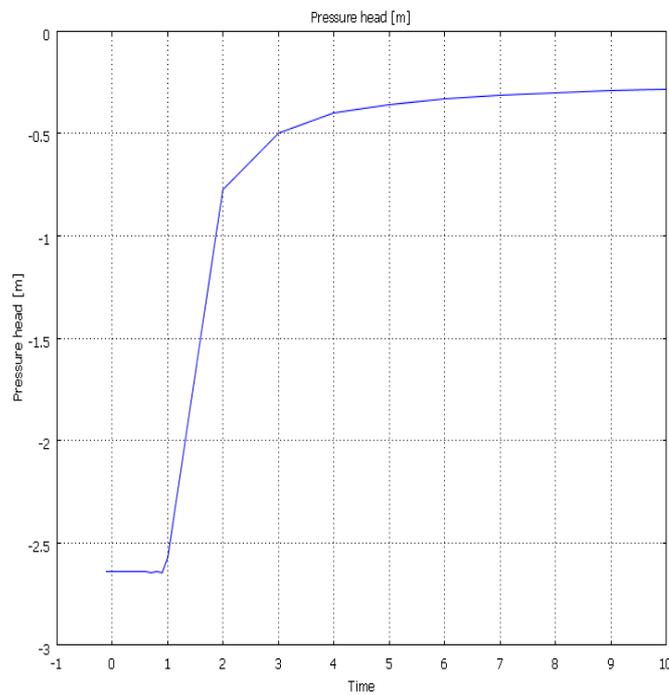
Pour toutes les courbes obtenues, nous notons une allure graphique régulière, semblable à celles obtenues dans le calcul déterministe.

#### **a) Charges hydrauliques**

Les charges hydrauliques, et les concentrations du soluté, sont calculées suivant une ligne de coupe verticale,  $x = 0.7m$ , pour toute la profondeur du sol comme cela est montré sur la figure V. 18.



**Figure V.23** Iso valeurs des charges hydrauliques «  $H$  ».dans le sol



**Figure V.24** Courbe des charges hydrauliques «  $H$  » pour un cas stratifié hétérogène

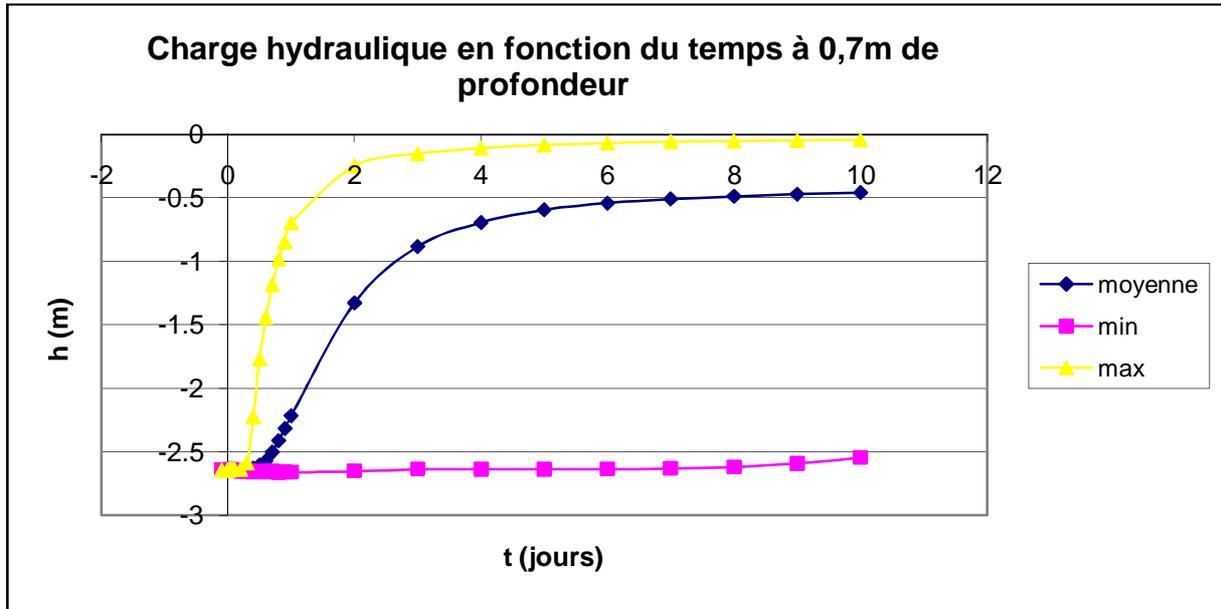


Figure V.25 Courbes des charges hydrauliques « H » de l'écoulement dans le sol

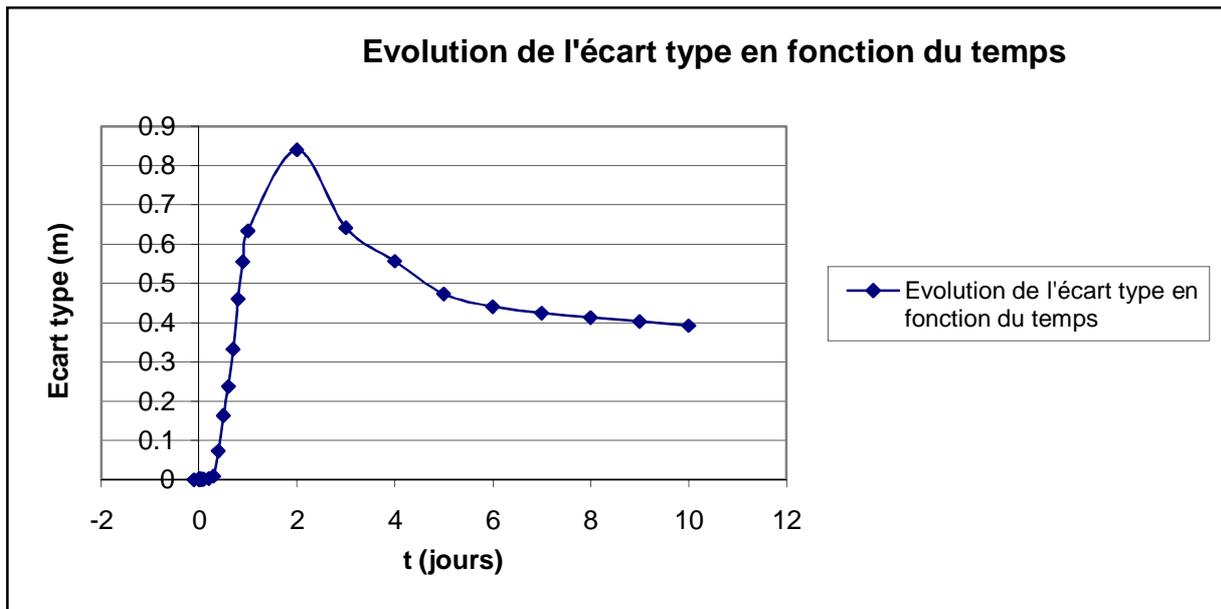


Figure V.26 Evolution des écart-types des charges hydrauliques

b) Concentrations du soluté

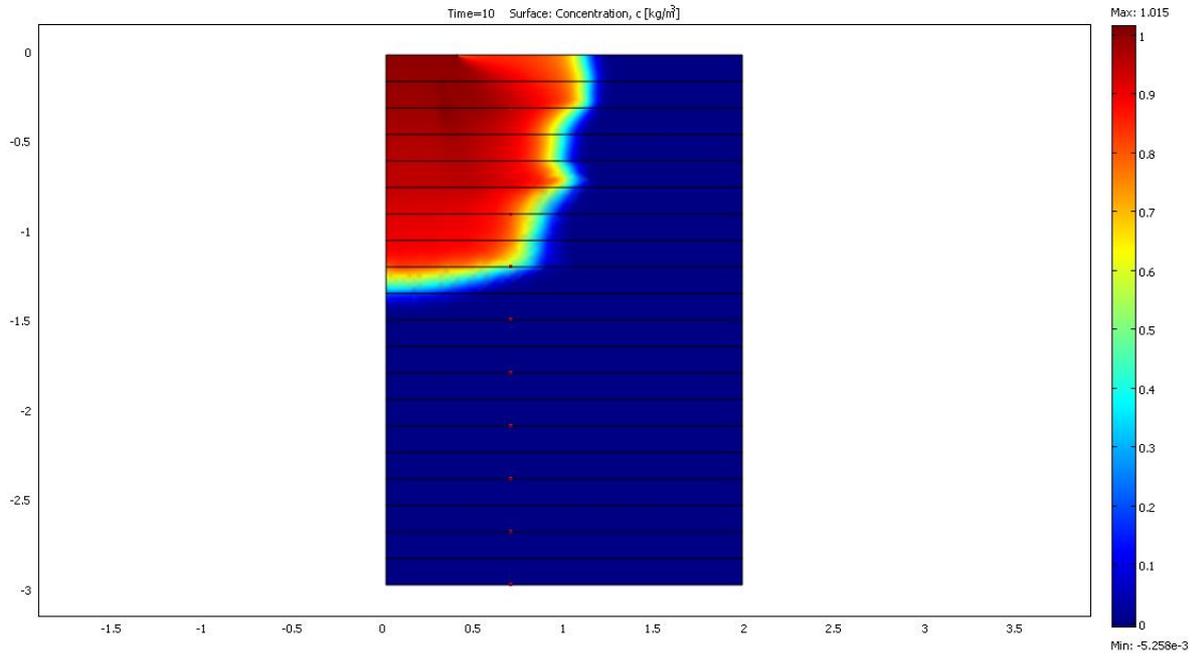


Figure V.27 Iso valeurs des concentrations «  $c$  » pour un cas stratifié

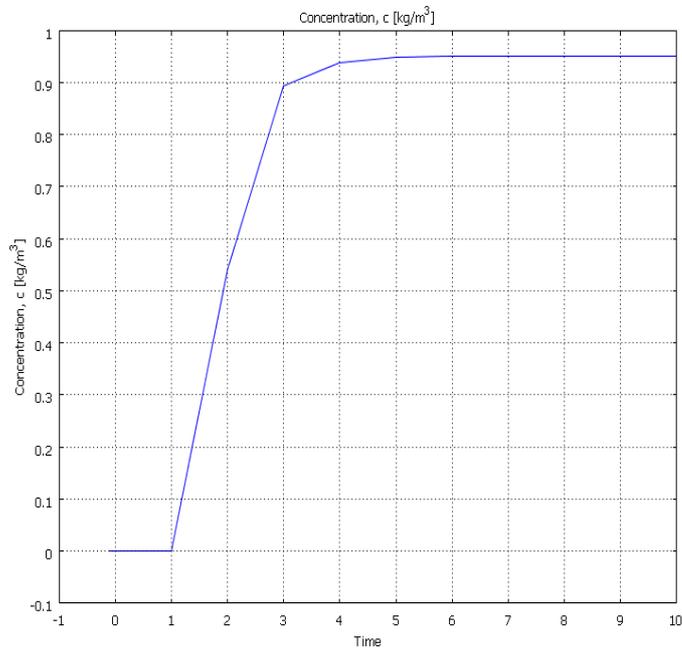


Figure V.28 Courbe des charges hydrauliques «  $H$  » pour un cas stratifié

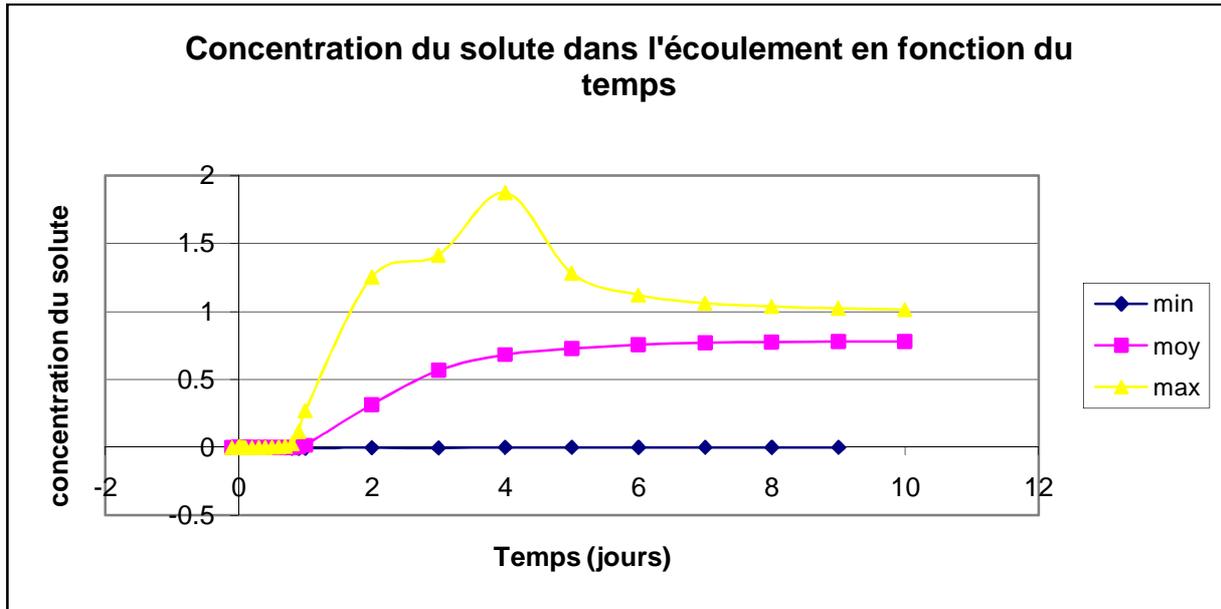


Figure V.29 Courbe des concentrations « c » dans le sol

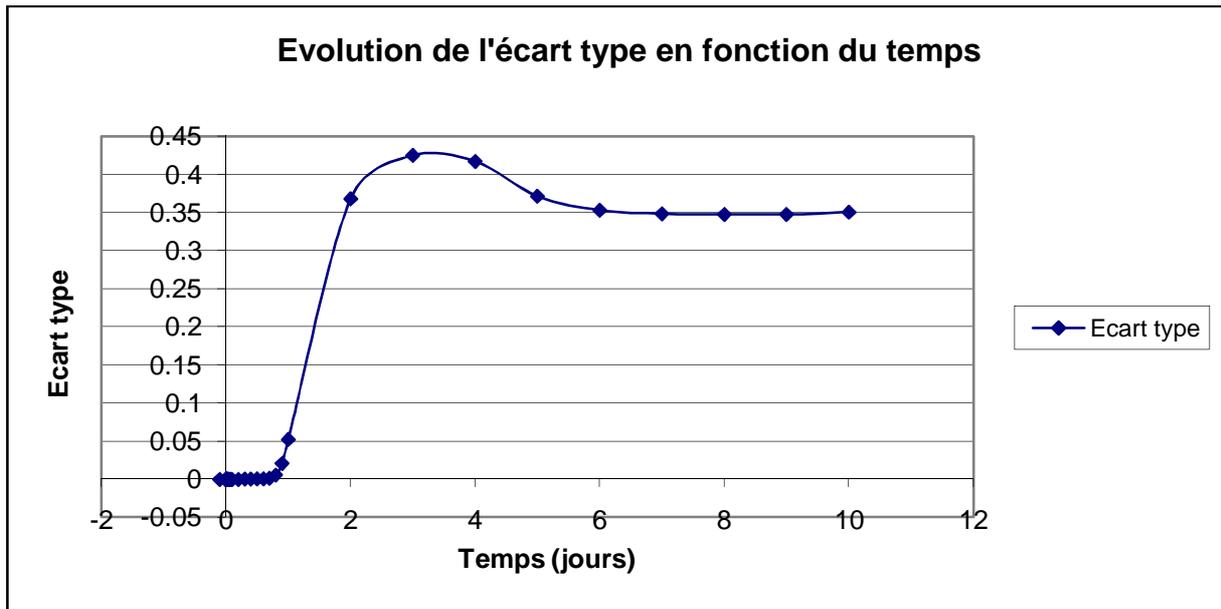


Figure V.30 Evolution des écart-types des concentrations « c »

### V.8.3 Interprétation des résultats

#### a) Charges hydrauliques

L'examen de l'évolution des charges hydrauliques (figure V.29), appelle les observations suivantes,

- La figure V.23 représente l'iso-contours de la charge hydraulique. On remarque d'une part, le même phénomène que le milieu poreux homogène au niveau de la zone proche de l'entrée et de la nappe phréatique et d'autre part, la différence des isocontours selon la variabilité des propriétés physiques de la strate.

- On montre sur les figures 23 et 24 l'évolution temporelle de la charge hydraulique dans chaque couche du profil du sol. Les couches allant de  $z = 1.5\text{m}$  jusqu'à  $z = 3\text{m}$  sous jacents sont caractérisées par des valeurs de charge hydraulique très proches, tout au cours de  $\frac{1}{4}$  jour de simulation. Il en est de même pour les quatre premières couches du fait qu'elles étaient initialement les plus humides.

- Les courbes suivent la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale de la charge hydraulique est de (- 0.0387 m), on voit bien qu'elle est un peu plus loin de celle obtenue par le calcul déterministe (- 0.4254 m), et cela est dû à l'effet de la variabilité des deux paramètres ( $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$ ).
- La valeur de la charge hydraulique moyenne maximale est de (- 0.4567 m), on voit bien qu'elle est proche de celle trouvée par le calcul déterministe (- 0.4254 m),
- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums,
- On remarque sur la figure V.25 que l'évolution des charges hydrauliques en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques), est significative par rapport au calcul statistiquement homogène.

### **b) Concentrations du soluté**

L'examen de l'évolution des concentrations de soluté (figure V.27 et V.28), appelle les observations suivantes,

- Sur l'isovaleurs des concentrations de soluté, nous présentons l'évolution de la concentration en fonction de  $x$  et de  $z$  à un instant donné ( $t=10\text{jours}$ ). On remarque que la concentration de la substance mobile diminue avec la profondeur. C'est évident, puisque les profils de concentration se comportent de la même façon que ceux des profils de l'humidité, mais ils se déplacent rapidement à cause de l'ajout de la pression osmotique dans la pression matricielle. Ces résultats sont similaires à ceux illustrés par d'autres auteurs dans le cas d'un sol homogène non saturé (Gueraoui et al, 2000) et (Sâadi et al, 1999), (Ghouli, 2009).

- La concentration des couches allant de 0 à 1.2 m, a un comportement relativement différent par rapport aux autres couches du fait qu'elles étaient initialement les plus humides.

- La courbe suit la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,

- La valeur maximale de la concentration est de (1.8727 m), on voit bien qu'elle est un peu plus loin celle obtenue par le calcul déterministe (0.9449 m), et cela est dû à l'effet de la variabilité des deux paramètres ( $K_{sat}$  et  $\theta_{sat}$ ).
- Le profil de la courbe des concentrations maximales de soluté est retardée dans le temps pendant un jour (de  $t=0$  jusqu'à  $t=1$  jour) pour augmenter au bout du deuxième jour ( $t=2$  jours) puis subir un deuxième retard au troisième jour, pour ensuite atteindre une valeur maximale et décroître à une valeur inférieure. Ce résultat est tout à fait logique puisque d'une part, les profils de concentration se comportent de la même façon que ceux de l'humidité, mais ils se déplacent rapidement à cause de l'ajout de la pression osmotique dans la pression matricielle.
- D'autre part, plus le temps s'écoule plus le fluide se mélange avec cette substance et peut donc être transporté plus loin, à cela s'ajoute aussi l'effet de la variabilité des paramètres de sol dans le calcul des concentrations de soluté.
- L'incertitude sur les concentrations de soluté symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne de calcul ( $x = 0.7m$ ), (figure V.30), atteint sa valeur la plus grande à  $t=3$  jours, ensuite elle décroît,
- On remarque sur la figure V.29 que l'évolution des concentrations de soluté en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques), est significative par rapport au calcul statistiquement homogène, donc une légère variation de paramètres de sol implique des concentrations significatives.

## **V.9 COMPARAISON DES DIFFÉRENTES ANALYSES EFFECTUÉES**

### **V.9.1 Introduction**

La solution probabiliste du problème de l'écoulement et du transport de soluté est elle influencé par la variabilité des paramètres de sol ? L'incertitude augmente-t-elle en fonction de la dimension de l'analyse ? Donc il est intéressant d'examiner l'effet de la dimension de la variabilité spatiale dans le cas d'une analyse probabiliste des écoulements en milieux poreux hétérogènes.

### **V.9.2 Résultats des calculs**

Les résultats des vingt premiers calculs des trois séries de calcul sont comparés sur les figures V.31 à V.36.

Les résultats de tous les cas étudiés sont montrés dans les figures numérotés 31 à 36. On montre l'évolution de la moyenne arithmétique des charges hydrauliques et des concentrations de soluté à la ligne de calcul ( $x = 0.7m$ ), (figures V.31 et V.34).

De même nous avons montrés dans les figures qui suivent (figures V.35 et V.32) l'évolution des maximums et des minimums des charges hydrauliques et des concentrations de soluté de tous les cas analysés.

Les différents écart-types obtenues dans les différents calculs sont représentés et comparés dans les figures V.33 et V.36.

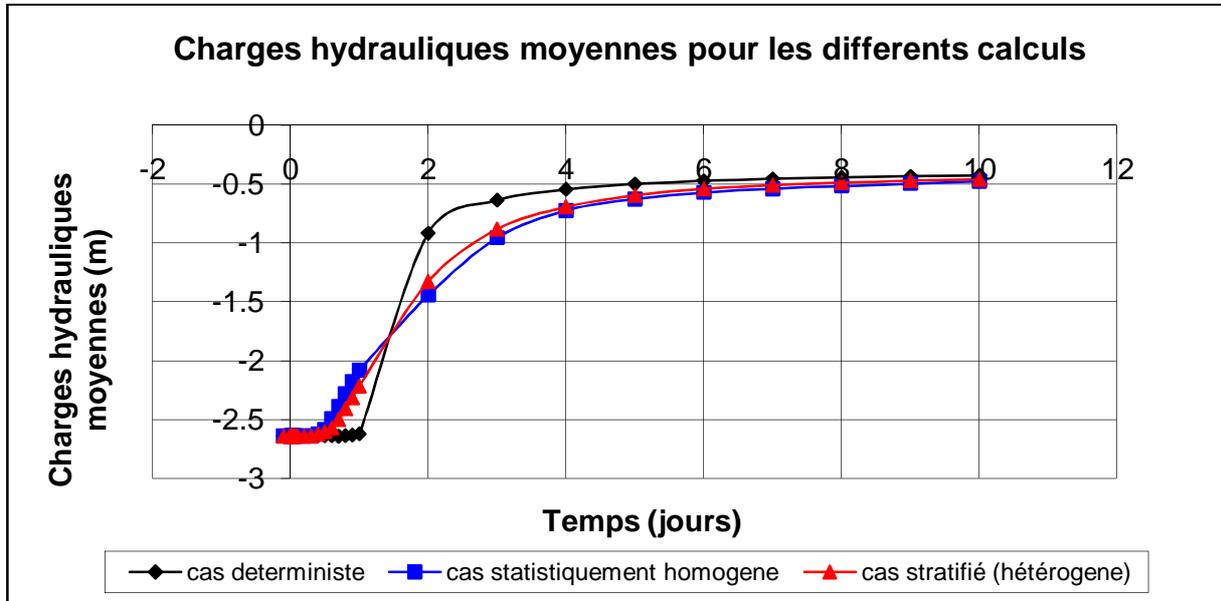


Figure V.31 Courbe des charges hydrauliques « H » moyennes pour les différents cas de calcul

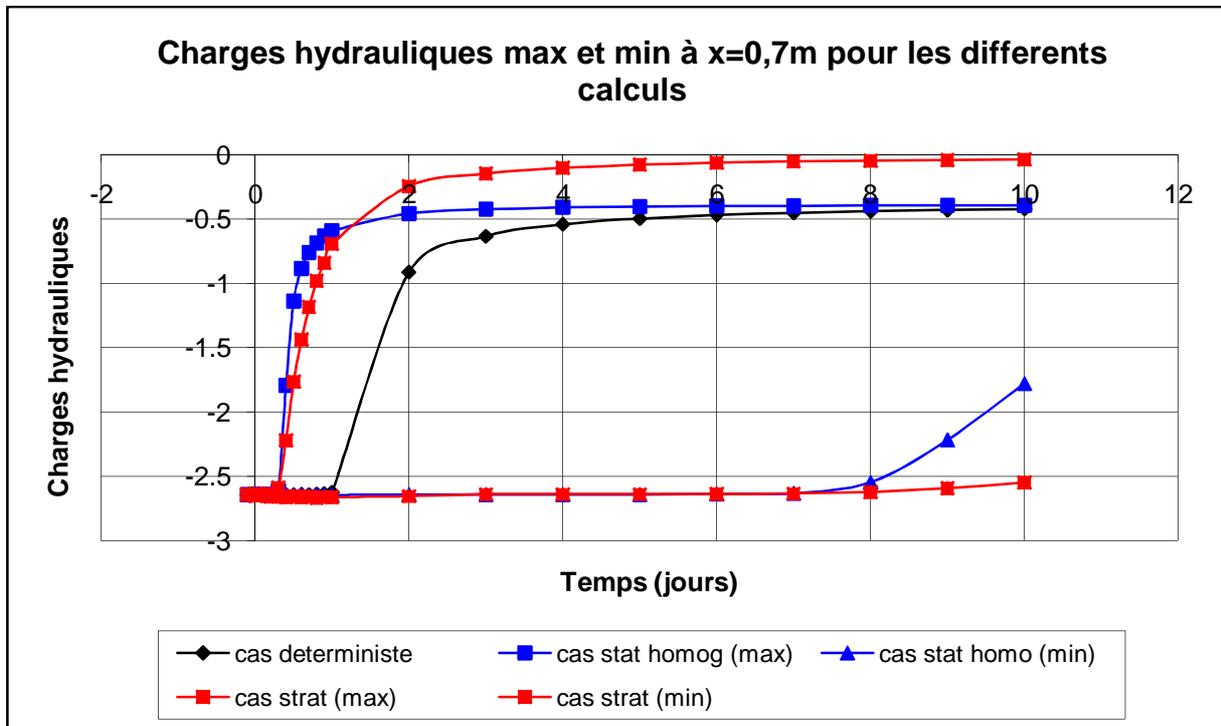


Figure V.32 Courbe des charges hydrauliques « H » max et min pour les différents cas de calcul

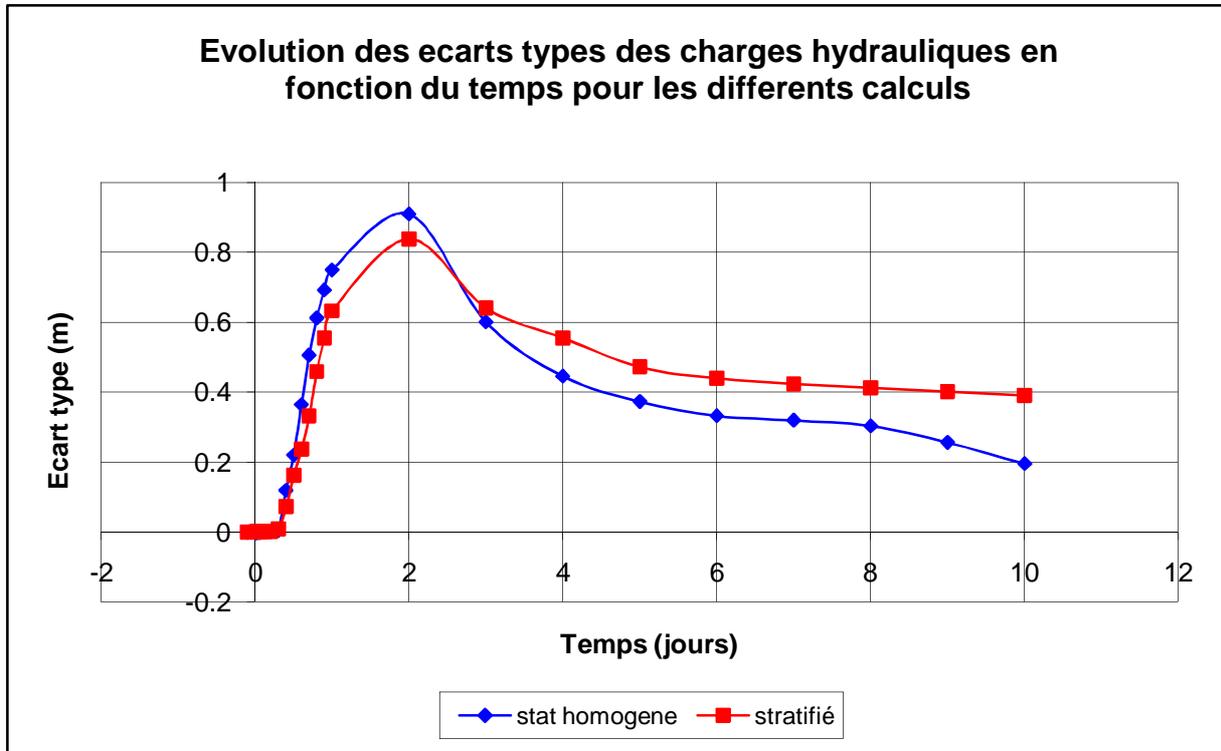


Figure V.33 Evolution des écart-types des charges hydrauliques « H » pour les différents cas de calcul

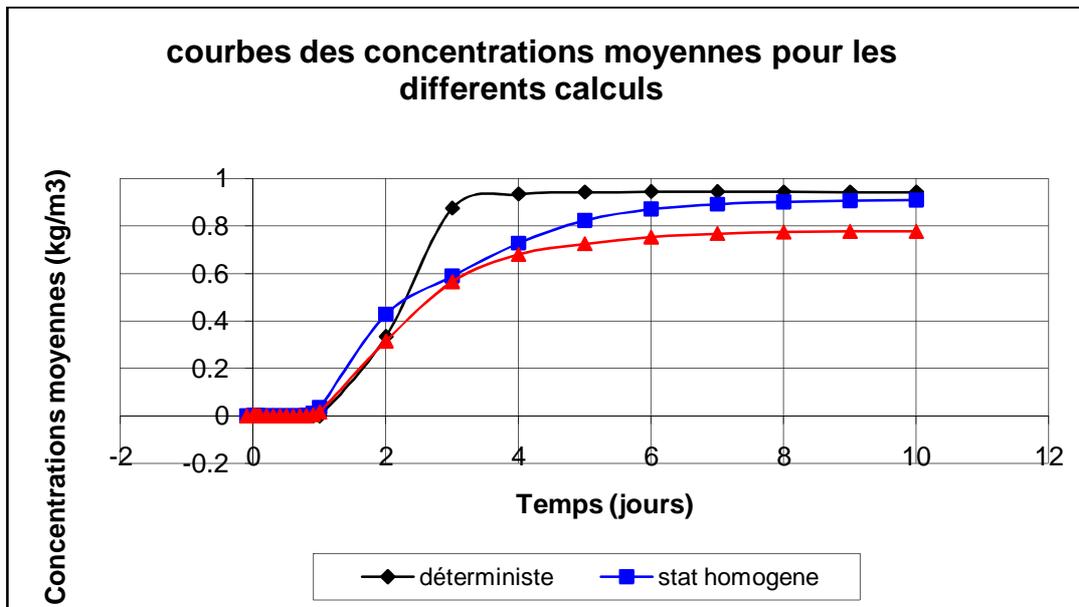


Figure V.34 Courbe des concentrations moyennes « c » pour les différents cas de calcul

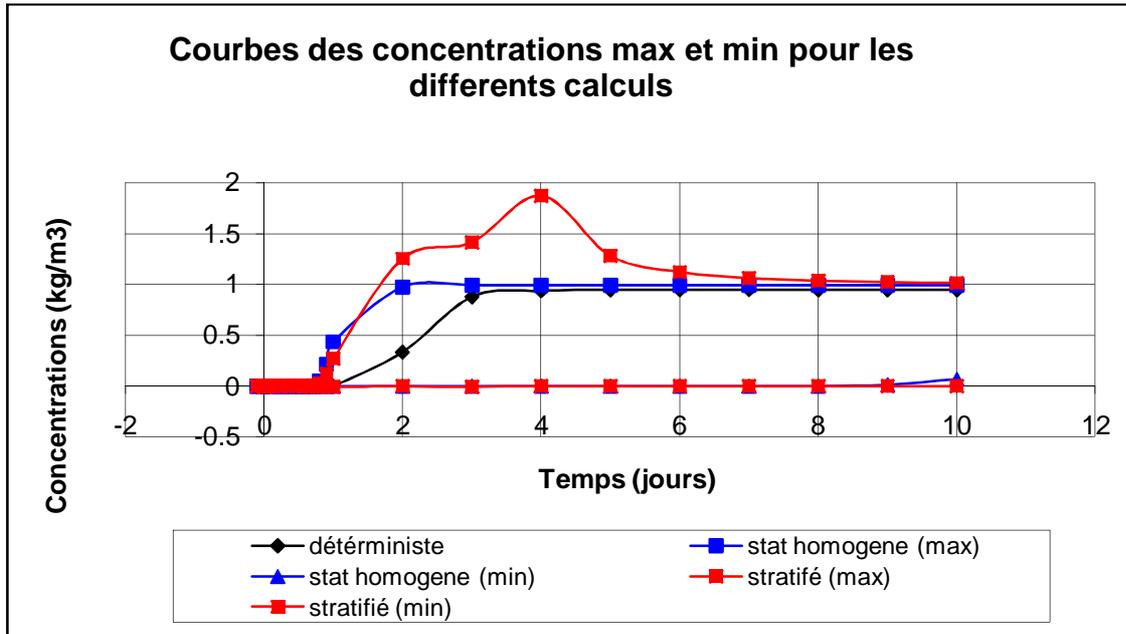


Figure V.35 Courbe des concentrations « c » min et max pour les différents cas de calcul

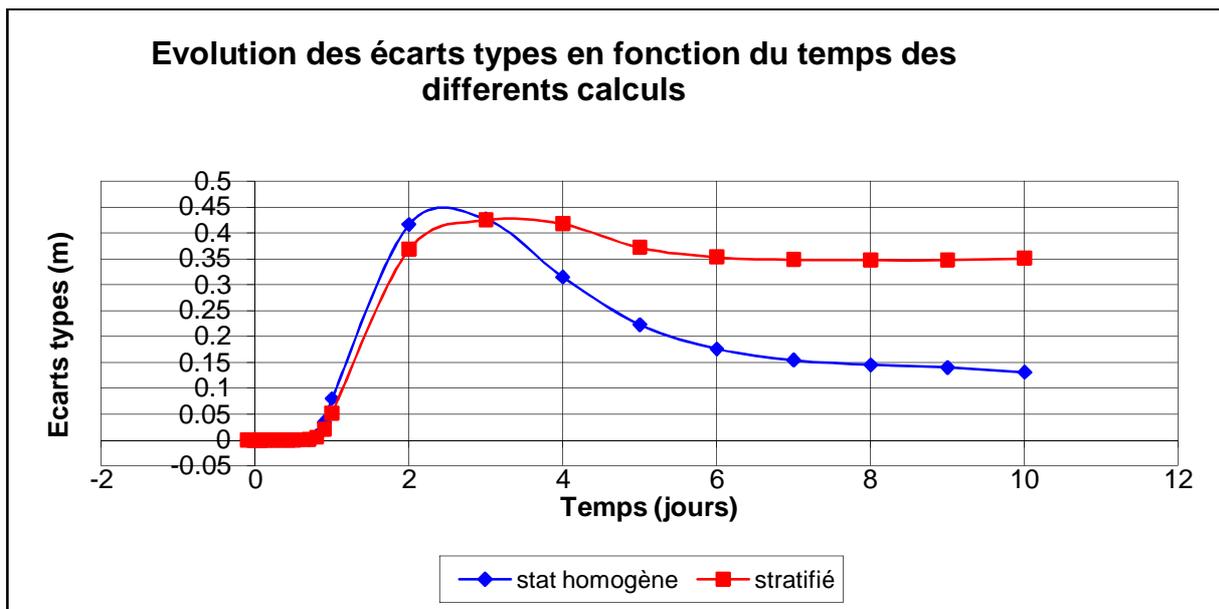


Figure V.36 Evolution des écart-types des concentrations « c » pour les différents cas de calcul.

### V.9.3 Comparaison des résultats obtenus

Il apparaît clairement que, quelles que soient les caractéristiques imposées à la variabilité du sol, les valeurs moyennes des charges hydrauliques et des concentrations de soluté sont proches du cas déterministe.

**a) Charges hydrauliques**

Après observation des résultats illustrés dans les figures V.31 à V.33, on note que,

- Les valeurs des charges hydrauliques moyennes à  $x = 0.7m$  pour les différents cas de calcul sont presque identiques à celles obtenues par le calcul déterministe ;
- La figure V.33 compare les incertitudes sur les charges hydrauliques  $x = 0.7m$  obtenues dans les différents calculs étudiés auparavant ;
- L'aspect hétérogénéité des caractéristiques de sol a plus d'effet sur l'incertitude. De manière générale un calcul hétérogène surestime l'incertitude sur le calcul des charges hydrauliques ;
- L'incertitude sur les charges hydrauliques à  $x = 0.7m$  est plus faible dans le cas du calcul statistiquement homogène.

**b) Concentrations du soluté**

Les figures V.34 à V.36 appellent les remarques suivantes :

- Les valeurs des concentrations de soluté  $x = 0.7m$  pour les différents cas de calcul sont presque identiques à celles obtenues par le calcul déterministe,
- La figure V.36 compare les incertitudes sur les concentrations de soluté  $x = 0.7m$  obtenues dans les différents calculs étudiés auparavant,
- L'aspect du cas stratifié hétérogène des caractéristiques de sol a plus d'effet sur l'incertitude. De manière générale un calcul stratifié hétérogène surestime l'incertitude sur le calcul des concentrations de soluté  $x = 0.7m$ ,
- L'incertitude sur les concentrations de soluté  $x = 0.7m$  est plus faible dans le cas du calcul statistiquement homogène.

Les incertitudes relatives aux concentrations de soluté  $x = 0.7m$ , caractérisées par les écart-types, sont petites dans le cas d'analyse statistiquement homogène, grandes dans le cas stratifié hétérogène (dernier cas analysé).

Les incertitudes sur les charges hydrauliques augmentent du cas statistiquement homogène au calcul stratifié hétérogène (dernier cas analysé).

## *CONCLUSION GENERALE*

L'apparition et le développement des méthodes stochastiques appliquées aux phénomènes hydrodynamiques de l'écoulement et de transport de polluant en milieu poreux ont permis des progrès considérables dans la prise en compte de l'hétérogénéité des systèmes étudiés, qui constitue une des clefs de la résolution de tels problèmes. Les différentes théories développées par Gehlar et Axness (1983), Dagan (1984,1989) et Neuman et Zhang (1990) fournissent ainsi des solutions analytiques dans le cas général de l'écoulement permanent et uniforme dans un milieu infini ou semi-infini qui, même si elles reposent sur de nombreuses hypothèses simplificatrices, se sont avérées applicable dans un grand nombre de cas réels à la lumière de leur confrontation avec des données de terrain (Zhang et Chi, 1995) ou des résultats de simulations numériques (Chin et Wang, 1992 ; Lintea, 2001).

Cependant, du fait essentiellement de la complexification des équations stochastiques dans de tels cas, les problèmes d'écoulement non-uniformes tels que les écoulements au voisinage de puits ou de limites du domaine n'ont été que récemment abordés et n'occupent qu'une petite place dans la littérature alors que de tels cas de figure ne sont pas rares en situation réelle.

Pour suivre cette direction, nous nous sommes intéressés dans le présent travail à une partie d'une série de recherches consacrées à l'évaluation de l'effet de la variabilité spatiale sur le problème d'écoulement et du transport en milieu poreux.

Lors des premières applications des statistiques et probabilités aux domaines hétérogènes, où la variation des paramètres ne peut avoir de représentation fonctionnelle (mathématique), on a cru pouvoir révolutionner les schémas de calculs classiques basés sur des hypothèses approximatives, ces dernières étant alors nécessaires pour passer outre les difficultés posées par la variabilité du milieu.

C'est tout à fait logique que la plupart des auteurs se consacèrent d'abord et surtout à la caractérisation de la variabilité des propriétés physiques et hydrauliques du sol. L'objectif de ces auteurs était l'étude de la variabilité des propriétés des sols, d'abord par les méthodes classiques (loi de distribution, paramètres statistiques, ...), ensuite, plus tard, en tenant compte d'une variation spatiale éventuelle des paramètres, par les fonctions d'autocorrection et les notions de krigeage (analyse structurale).

Les éléments de calculs, dans l'approche stochastique (choix des paramètres de base, lois de distribution attribuées à ces paramètres, relations éventuelles entre ces paramètres, méthodes numériques, autres sources d'incertitudes telle que l'incertitude statistique,...), sont souvent différents, d'un auteur à l'autre. Seule la technique de simulation de Monte Carlo et la méthode numérique par éléments fins semblent faire l'unanimité, depuis l'apparition des moyens de calcul puissants (ordinateur).

Dans notre cas, c'est aussi la technique de simulation de Monte Carlo et la méthode de calcul numérique par éléments finis, du programme COMSOL Multiphysics, qui ont été utilisés pour analyser, d'un point de vue stochastique, le problème de l'écoulement et du transport.

Les propriétés de sol, considérées comme variables aléatoires, sont la conductivité hydraulique de saturation  $K_{sat}$  et la teneur en eau de saturation  $\theta_{sat}$ . La loi de distribution Log normale est choisie pour représenter la répartition des valeurs de ces deux paramètres.

Les résultats essentiels des séries de calculs (deux séries de 50 calculs) peuvent être résumés comme suit :

- L'incertitude sur les charges hydrauliques symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne de calcul ( $x=0.7m$ ) atteint sa valeur la plus grande au voisinage du point au on a enregistré la plus grande charge hydraulique.
- L'incertitude sur les charges hydrauliques le long de la ligne de calcul ( $x=0.7m$ ), atteint sa valeur la plus grande, 0.8387 m, ensuite décroît jusqu'à 0.4 m.
- De même pour les concentrations, l'incertitude symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne de calcul ( $x=0.7m$ ) atteint sa valeur la plus grande au voisinage du point au on a enregistré la plus grande des concentrations.
- L'incertitude sur les concentrations le long de la ligne de calcul ( $x=0.7m$ ), atteint sa valeur la plus grande, 0.4248 m, ensuite elle décroît jusqu'à 0.35 m.

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié la sensibilité des résultats obtenus qui permettent des calculs plus directs et plus rapides. Cette étude de sensibilité a porté en particulier sur les paramètres caractérisant et quantifiant l'hétérogénéité du milieu étudié que sont l'écart-type et la moyenne de  $K_{sat}$  et de  $\theta_{sat}$ .

Les résultats obtenus montrent que, si les ordres de grandeur des sensibilités à ces deux paramètres peuvent varier considérablement selon le type d'injection de polluant dans l'écoulement, le paramètre étudié ou les valeurs des paramètres elles-mêmes, les courbes représentant la sensibilité de la charge hydraulique ainsi que la concentration en fonction du temps permettent de mettre en évidence une tendance forte. On constate en effet que les points de cette courbe ayant la plus grande valeur absolue, qui représentent les valeurs de la charge hydraulique et de la concentration les plus sensibles, sont situés aux environs du temps de percée correspondant à la configuration étudiée en milieu homogène. C'est à cet endroit que se trouve la plus grande quantité d'information caractérisant les paramètres du milieu hétérogène.

Cette conclusion se trouve confortée par la recherche de l'échantillonnage le plus adapté à la caractérisation d'un tel milieu qui utilise les valeurs de sensibilité évaluées précédemment. On montre ainsi qu'il est préférable dans un cas de figure comme celui-ci d'effectuer un nombre réduit de prélèvements d'échantillons autour de la percée (le temps de percée étant connu ou déterminé a priori) plutôt que de s'attacher à reconstituer les courbe de charge hydraulique et de concentration jusqu'à de grands temps de parcours. Dans la même idée, on constate également que le poids de l'information apportée par l'acquisition d'une mesure supplémentaire décroît rapidement avec la taille de l'échantillon, et que l'on peut considérer qu'une petite dizaine de points soigneusement sélectionnés sont suffisants pour déterminer les paramètres recherchés.

Ces résultats sont en accord avec ceux présentés par GHOULI (2004), qui constataient dans leur étude que l'influence de l'hétérogénéité du milieu se traduisait d'abord par la modification de l'allure de la courbe de la charge hydraulique et de la concentration autour du temps de percée, le polluant apparaissant d'autant plus tôt que le milieu est hétérogène.

Les différents résultats obtenus lors de cette étude, s'ils ne permettent pas de résoudre de façon exhaustive le délicat problème de la variabilité des paramètres de sol, nous conduisent à souligner l'importance de cette prise en compte dans le cas particulier de la propagation de polluant dans milieux poreux variablement saturé, dispositif plus que fréquemment rencontré en situation réelle. Les perspectives ouvertes par ces travaux sont donc nombreuses,

- Tout d'abord, il apparaît important de valider les résultats obtenus dans le cadre d'expériences à l'échelle du laboratoire et du terrain, afin de vérifier de façon plus nette que ce qui a pu être effectué précédemment l'influence réelle de la l'incertitude sur les résultats de calcul du problème de l'écoulement et du transport.
- Dans le champ des développements théoriques, il apparaît important de poursuivre les efforts dans le sens d'une prise en compte simple des spécificités du terrain qui limitent souvent l'application des théories stochastiques : dans le cas de la propagation de polluant, outre les conditions aux limites qui, nous l'avons vu, influent notablement sur l'écoulement et donc le transport, nous pouvons également citer les puits partiellement pénétrants, la non uniformité statistique du milieu par exemple.
- La présente étude s'est également limitée au transport d'un soluté dans l'écoulement d'eau, ce qui est largement loin d'être le cas de tous les polluants. Tous les résultats obtenus nécessitent donc également d'être étendus aux cas des produits interagissant avec la matrice poreuse.

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

1. ABDELHAK GHOULI, 2004 « Modélisation mathématique et numérique de la pollution dans un milieu poreux non Saturé. Application : milieux poreux stratifiés ». Thèse de doctorat de l'université de MOHAMMED V – AGDAL de Rabat.
2. Hamza Ali, 2007 « Simulation numérique des écoulements transitoires en milieux poreux saturé et non saturés». Thèse de doctorat de l'université Mouloud MAMMERI de TIZO OUZOU.
3. Ali BOUHERAOUA, (1989), « Influence de la variabilité des propriétés du sol sur la consolidation des massifs de sols argileux », Thèse de doctorat de l'université paris 6.
4. RAHMANI Naima, (2010), « Méthodes stochastiques de calcul de stabilité des pentes » Université Mouloud Mammeri - TIZI OUZOU.
5. BOUAKIZ Laura, (2009), « Etat de l'art des techniques d'analyse des massifs de sols hétérogènes » Université Mouloud Mammeri - TIZI OUZOU.
6. Jean-Pierre MAGNAN, (1982), « Les méthodes statistiques et probabilistes en mécanique des sols » Presse de l'ENPC France.
7. SI SMAIL Ali, 1997 « Simulation numérique des écoulements permanents et transitoires autour d'un puits parfait dans une nappe phréatique ». Thèse de Magister de l'institut hydraulique du centre universitaire de BISKRA.
8. DJELWAH Abderazik , 2009 « Approche probabiliste de la consolidation tridimensionnelle ». de l'université Mouloud MAMMERI de TIZO OUZOU.
9. BAAZIZ Karim, 2011 «Effet de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement ». Thèse de Magister de l'université Mouloud MAMMERI de TIZI OUZOU.
10. Jean-Philippe CARLIER, 2002 «Modélisation du transfert de masse en milieu poreux par approche stochastique ». Thèse de doctorat de l'université LOUIS PASTEUR DE STRASBOURG.
11. Nadia JAMALEDDINE, 2006 « Dispersion capillaire - gravitaire d'un polluant en milieu poreux hétérogène et non saturé ». Thèse de doctorat de l'institut national polytechnique de LORRAINE.

12. Denis ISABEL, 1988 « Modélisation stochastique des pesticides dans la zone vadose ». Thèse de doctorat de l'institut national de la recherche scientifique de l'université de QUEBEC.
13. Stéphan GAGNON, 1996 « Caractérisation de la variabilité spatiale des paramètres hydrogéologiques provenant des sources d'information existantes ». Thèse de doctorat de l'institut national de la recherche scientifique de l'université de QUEBEC.
14. Christine RIVARD, 2001 « Simulation du transport de solutés dans des aquifères hétérogènes à l'aide de réseaux percolants ». Thèse de doctorat de l'institut national de la recherche scientifique de l'université de QUEBEC.
15. Jean JOBIDON, 1990 « Interdépendance des propriétés physiques des sols dans un modèle de contamination des eaux souterraines par des pesticides ». Mémoire de maîtrise de l'institut national de la recherche scientifique de l'université de QUEBEC.
16. Tanguy LE BORGNE, 2004 « Mesure in situ et modélisation de l'hétérogénéité des écoulements dans les milieux géologiques ». Thèse de doctorat de l'université de RENNE I.
17. Ahmad AL BITAR, 2007 « Modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogènes 2D / 3D, avec couplages surface / souterrain et densitaires ». Thèse de doctorat de l'institut national polytechnique de TOULOUSE.
18. Charles DANQUIGNY, 2003 « Etude expérimentale du transfert de masse en milieu poreux hétérogène ». Thèse de doctorat de l'université louis PASTEUR de STRASBOURG.