

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

## Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique et Système

*Présenté par*

**Mohammed BELKALEM**

**Massilva BENABDERRAHMANE**

Thème

## Estimation de l'état de charge d'une batterie lithium-ion en utilisant les observateurs d'état

*Mémoire soutenu publiquement le 02/10/ 2024 devant le jury composé de :*

**M Hcen LAKHLEF**

MCA, UMMTO, Président

**M Saïd DJENNOUNE**

Professeur, UMMTO, Encadrant

**Mme Nouara ARKOUB**

MAB, UMMTO, Examinatrice

**Mme Ouiza ADJEMOUT**

MAA, UMMTO, Examinatrice

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à ma très chère mère, la meilleure mère au monde.

A la mémoire de mon défunt père.

A mes sœurs LEILA, YAMINA et DAMIA.

A mes frères ABBAS, HACENE, MOUSTAPHA, GHILAS, SOFIANE, AMAZIGH et MASSINISSA et mes oncles qui n'ont pas cessés de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur. A mon adorable ami BRAHIM qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour toute la famille, ces parents, sa sœur et son frère, Que Dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

À tous mes cousins, mes voisins et amis, notamment MOHAMMED YACINE, qui m'ont accompagné jusqu'à ce jour. Merci pour leur amour et leur soutien.

Merci pour leurs amours et leurs encouragements.

Sans oublier mon binôme MOHAMMED pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.

**Massilva**

# Dédicaces

Je dédie ce travail à mes parents, pour leur amour, leur soutien inconditionnel et les sacrifices qu'ils ont faits, qui m'ont permis d'atteindre cet objectif.

Je tiens également à dédier ce mémoire à mes chers camarades et amis, ainsi qu'à ma binôme, MASSILVA BENABDERAHMANE, qui ont été à mes côtés tout au long de ce parcours, m'offrant encouragements et compagnonnage dans les moments difficiles comme dans les réussites.

Un remerciement particulier à MOHAMMED YACINE, pour son amitié sincère et son soutien précieux durant cette aventure.

**Mohammed**

# Remerciements

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à Monsieur S. Djennoune, notre encadrant, pour son soutien, sa disponibilité et ses précieux conseils tout au long de la réalisation de cette mémoire. Son expertise et son engagement ont été des atouts inestimables

Nous remercions le chef du département pour son aide et ses orientations, qui ont facilité la réalisation de cette recherche.

Enfin, nous remercions tous les membres du département ainsi que nos collègues pour leur soutien moral et leurs échanges enrichissants tout au long de ce parcours.

# Table des figures

I.1	Schéma du principe de fonctionnement des batteries.	7
I.2	Composants d'une batterie lithium-ion.	9
I.3	Modèle électrique équivalent sans régime transitoire.	10
I.4	Modèle électrique équivalent du premier ordre.	11
I.5	(a) Intégration des cellules (3x7) dans un pack et (b) modèle thermique d'une cellule.	12
I.6	Modèle de Thévenin du $n^{\text{ème}}$ ordre	18
I.7	Modèle de Thévenin du 2ème ordre	20
I.8	Caractéristique de la tension à vide en fonction de l'état de charge.	21
I.9	Schéma de batterie.	23
I.10	Schéma de simulation général.	24
I.11	Courbe de courant $I(t)$ .	25
I.12	Courbe de courant $I_{\text{entrée}}$ .	25
I.13	Courbe de l'OCV ( $V_0$ ).	26
I.14	Courbe de $SoC$ .	27
I.15	Courbe de $VC_1$ .	27
I.16	Courbe de $VC_2$ .	28
I.17	Courbe de $V$ ou $y$ .	28
I.18	Courbe de $y_p$ .	29
II.1	schéma structural de l'observateur de Luenberger.	34
II.2	Système à trois bacs.	44
II.3	La variation du débit d'entrée.	49
II.4	Courbe de $x_1$ (en bleu) et des estimés $\hat{x}_{1L}$ (en vert) et $\hat{x}_{1K}$ (en rouge) en absence du bruit.	50
II.5	Courbe de $x_1$ (en bleu) et des estimés $\hat{x}_{1L}$ (en vert) et $\hat{x}_{1K}$ (en rouge) en absence du bruit en régime permanent.	50
II.6	Courbe de $x_2$ (en bleu) et des estimés $\hat{x}_{2L}$ (en vert) et $\hat{x}_{2K}$ (en rouge) en absence du bruit.	51
II.7	Courbe de $x_2$ (en bleu) et des estimés $\hat{x}_{2L}$ (en vert) et $\hat{x}_{2K}$ (en rouge) en absence du bruit en régime permanent.	51

II.8 Courbe de $x_3$ (en bleu) et des estimés $\hat{x}_{3L}$ (en vert) et $\hat{x}_{3K}$ (en rouge) en absence du bruit.	52
II.9 Courbe de $x_3$ (en bleu) et des estimés $\hat{x}_{3L}$ (en vert) et $\hat{x}_{3K}$ (en rouge) en absence du bruit en régime permanent.	52
II.10 Courbe des erreurs d'estimation $e_{1L}=x_1 - \hat{x}_{1L}$ (en bleu) et $e_{1K}=x_1 - \hat{x}_{1K}$ (en vert) en absence du bruit.	53
II.11 Courbe des erreurs d'estimation $e_{1L}=x_1 - \hat{x}_{1L}$ (en bleu) et $e_{1K}=x_1 - \hat{x}_{1K}$ (en vert) en absence du bruit en régime permanent.	53
II.12 Courbe des erreurs d'estimation $e_{2L}=x_2 - \hat{x}_{2L}$ (en bleu) et $e_{2K}=x_2 - \hat{x}_{2K}$ (en vert) en absence du bruit.	54
II.13 Courbe des erreurs d'estimation $e_{2L}=x_2 - \hat{x}_{2L}$ (en bleu) et $e_{2K}=x_2 - \hat{x}_{2K}$ (en vert) en absence du bruit en régime permanent.	54
II.14 Courbe des erreurs d'estimation $e_{3L}=x_3 - \hat{x}_{3L}$ (en bleu) et $e_{3K}=x_3 - \hat{x}_{3K}$ (en vert) en absence du bruit.	55
II.15 Courbe des erreurs d'estimation $e_{3L}=x_3 - \hat{x}_{3L}$ (en bleu) et $e_{3K}=x_3 - \hat{x}_{3K}$ (en vert) en absence du bruit en régime permanent.	55
II.16 Courbe du niveau réel $N_1$ (en bleu) et de ses estimés $\hat{N}_{1L}$ (en vert) et $\hat{x}_{1K}$ (en rouge).	56
II.17 Courbe du niveau réel $N_1$ (en bleu) et de ses estimés $\hat{N}_{1L}$ (en vert) et $\hat{x}_{1K}$ (en rouge) en régime permanent.	56
II.18 Courbe du niveau réel $N_2$ (en bleu) et de ses estimés $\hat{N}_{2L}$ (en vert) et $\hat{x}_{2K}$ (en rouge).	57
II.19 Courbe du niveau réel $N_2$ (en bleu) et de ses estimés $\hat{N}_{2L}$ (en vert) et $\hat{x}_{2K}$ (en rouge) en régime permanent.	57
II.20 Courbe du niveau réel $N_3$ (en bleu) et de ses estimés $\hat{N}_{3L}$ (en vert) et $\hat{x}_{3K}$ (en rouge).	58
II.21 Courbe du niveau réel $N_3$ (en bleu) et de ses estimés $\hat{N}_{3L}$ (en vert) et $\hat{x}_{3K}$ (en rouge) en régime permanent.	58
II.22 Courbe de la variation $x_1$ et ses estimés $\hat{x}_{1L}$ et $\hat{x}_{1K}$ en présence de bruit.	60
II.23 Courbe de la variation $x_2$ et ses estimés $\hat{x}_{2L}$ et $\hat{x}_{2K}$ en présence de bruit.	61
II.24 Courbe de la variation $x_3$ et ses estimés $\hat{x}_{3L}$ et $\hat{x}_{3K}$ en présence de bruit.	61
II.25 L'erreur d'estimation de $x_1$ de l'observateur Luenberger et celle du filtre de Kalman.	62
II.26 L'erreur d'estimation de $x_2$ de l'observateur Luenberger et celle du filtre de Kalman.	62
II.27 L'erreur d'estimation de $x_3$ de l'observateur Luenberger et celle du filtre de Kalman.	63
II.28 Courbe de niveau réels $N_1$ (en bleu) et ses estimés $\hat{N}_{1L}$ (en vert) et $\hat{N}_{1K}$ (en rouge) en présence de bruit.	63

II.29 Courbe de niveau réels $N_2$ (en bleu) et ses estimés $\hat{N}_{2L}$ (en vert) et $\hat{N}_{2K}$	
(en rouge) en présence de bruit . . . . .	64
II.30 Courbe de niveau réels $N_1$ (en bleu) et ses estimés $\hat{N}_{3L}$ (en vert) et $\hat{N}_{3K}$	
(en rouge) en présence de bruit. . . . .	64
III.1 Courant entrant $I(t)$ . . . . .	70
III.2 Courbes de $x_1$ réel et des estimées $\hat{x}_{1L}$ et $\hat{x}_{1K}$ dans le cas sans bruit . . . . .	71
III.3 Courbes de $x_2$ réel et des estimées $\hat{x}_{2L}$ et $\hat{x}_{2K}$ dans le cas sans bruit . . . . .	72
III.4 Courbes de $x_3$ réel et des estimées $\hat{x}_{3L}$ et $\hat{x}_{3K}$ dans le cas sans bruit . . . . .	73
III.5 Courbes de SoC réel et des estimées $S\hat{o}C_L$ et $S\hat{o}C_K$ dans le cas sans bruit . . . . .	73
III.6 Courbes de $x_1$ et des estimées $\hat{x}_{1L}$ et $\hat{x}_{1K}$ en présence des bruits (30 dB). . . . .	76
III.7 Courbes de $x_2$ et des estimées $\hat{x}_{2L}$ et $\hat{x}_{2K}$ en présence des bruits (30 dB). . . . .	76
III.8 Courbes de $x_3$ et des estimées $\hat{x}_{3L}$ et $\hat{x}_{3K}$ en présence des bruits (30 dB). . . . .	77
III.9 SoC en (%) en présence des bruits (30 dB). . . . .	77
III.10 Erreur d'estimation de l'observateur de Luenberger et filtre de Kalman	
(intensité des bruits 10 dB). . . . .	78
III.11 Erreur d'estimation de l'observateur de Luenberger et filtre de Kalman	
(intensité des bruits 20 dB). . . . .	79
III.12 Erreur d'estimation de l'observateur de Luenberger et filtre de Kalman	
(intensité des bruits 30 dB). . . . .	80
III.13 Erreur d'estimation de l'observateur de Luenberger et filtre de Kalman	
(intensité des bruits 40 dB). . . . .	81
III.14 Erreur d'estimation de l'observateur de Luenberger et filtre de Kalman	
(intensité des bruits 50 dB). . . . .	82

# Liste des tableaux

1	Liste des symboles et acronymes . . . . .	viii
1.1	Exemple de tableau avec équations et conditions aux limites . . . . .	14

# Liste des symboles et acronymes

Symbole/acronymes	Description
SoC	State of Charge (État de charge)
OCV et $V_0$	Open Circuit Voltage (Tension à circuit ouvert)
VE	Véhicule électrique
$R_0$	Résistance interne
$C_1, C_2$	Capacités du modèle de Thévenin
$R_1, R_2$	Résistances du modèle de Thévenin
KF	Kalman Filter (Filtre de Kalman)
UIO	Unknown Input Observer (Observateur à entrée inconnue)
$\text{Li}^+$	Ion lithium
$e^-$	Électron
$\text{CoO}_2$	Dioxyde de cobalt
$\text{LiCoO}_2$	Oxyde de lithium-cobalt
$C_6$	Graphite (Carbone)

TABLE 1 – Liste des symboles et acronymes

# Table des matières

<b>Dédicaces</b>	i
<b>Dédicaces</b>	ii
<b>Remerciements</b>	iii
<b>Liste des Symboles et acronymes</b>	viii
<b>Introduction Générale</b> . . . . .	1
<b>I Revue littéraire sur les batteries à lithium</b>	2
<b>Titre du chapitre</b>	2
<b>1 Introduction et généralités</b> . . . . .	2
<b>1.1 Le rôle et l'importance des batteries électriques</b> . . . . .	2
<b>1.2 Types de batteries</b> . . . . .	2
<b>1.3 Avantages des batteries à lithium-ion</b> . . . . .	3
<b>1.4 Description du fonctionnement de base des batteries</b> . . . . .	6
<b>1.4.1 Composants principaux dans les batteries</b> . . . . .	7
<b>1.5 Description du fonctionnement de base des batteries à lithium-ion</b> . . . . .	8
<b>1.5.1 Réactions chimiques</b> . . . . .	8
<b>2 Modélisation mathématique</b> . . . . .	9
<b>2.1 Les différents modèles</b> . . . . .	9
<b>2.2 Modèles électriques</b> . . . . .	17
<b>3 Simulation du modèle retenu</b> . . . . .	19
<b>3.1 Description du modèle de Thévenin du deuxième ordre</b> . . . . .	19
<b>3.2 Résultats de la simulation</b> . . . . .	22
<b>3.3 Analyse des résultats</b> . . . . .	29
<b>4 Conclusion</b> . . . . .	30
<b>II Observateur de Luenberger et filtre de Kalman-Bucy</b>	31
<b>1 Introduction</b> . . . . .	31
<b>2 Observateur de Luenberger</b> . . . . .	31

3	Filtre de Kalman-Bucy	34
3.1	Rappels sur les variables et signaux aléatoires	34
3.1.1	Variables aléatoires	34
3.1.2	Vecteurs de variables aléatoires	36
3.1.3	Signaux et vecteurs de signaux aléatoires	36
3.1.4	Réponse d'un système linéaire soumis à une entrée aléatoire	37
3.2	Version continue du filtre de Kalman : Filtre de Kalman Bucy	38
3.3	Structure du filtre de Kalman Bucy	39
3.4	Estimateur à variance minimale	40
3.4.1	Solution générale	40
3.4.2	Régime permanent du filtre de Kalman	42
3.4.3	Réglage du filtre de Kalman	42
3.4.4	Les 3 bacs interconnectés	43
3.5	Simulation sans bruit	47
3.6	Simulation avec bruit	58
4	Conclusion	65
<b>III Estimation de l'état de charge de la batterie lithium-ion</b>		<b>66</b>
1	Introduction	66
2	Calculs des observateurs	66
2.1	Observateur de Luenberger	67
2.2	Filtre de Kalman	68
3	Résultats des simulations	70
3.1	Simulation du système sans bruit	70
3.2	Simulation du système avec bruit	74
3.2.1	Modélisation du bruit dans le système	74
3.3	Simulation pour un rapport signal sur bruit (SNR) de 30 dB	74
3.3.1	Résultats des Estimations des Variables d'État	75
3.3.2	Simulations pour différents niveaux de SNR	78
3.4	Discussion	83
3.4.1	Sur l'observateur de Luenberger :	83
3.4.2	Sur le filtre de Kalman :	83
3.4.3	Comparaison globale :	84
3.4.4	Sur le choix du type d'observateur	84
4	Conclusion	85
<b>Conclusion Générale</b>		<b>86</b>

# Introduction Générale

Les batteries électriques sont des dispositifs de stockage de l'énergie électrique sous forme chimique. Ces dispositifs sont capables de libérer l'énergie sous forme électrique. Ils peuvent aussi être rechargés lorsque cela est nécessaire. Les batteries électriques sont utilisées dans de nombreux appareils allant du simple téléphone portable et ordinateurs portables jusqu'aux procédés plus complexes tels que les véhicules électriques (tout électrique ou hybrides), les systèmes photovoltaïques, les avions [1], [2].

Plus particulièrement, la batterie électrique rechargeable est un élément essentiel dans les véhicules électriques récemment introduits dans le secteur automobile afin de remplacer les véhicules à traction thermique et ce pour des raisons écologiques (réduction d'émission de gaz). Plusieurs types de batteries ont été développés. Cependant, la batterie lithium-ion surpasse tous les autres types en raison de sa légèreté, sa haute densité énergétique et sa longue durée de vie. Durant leur utilisation dans un véhicule électrique, la batterie est soumise à des contraintes mécaniques, électriques et thermiques qui peuvent provoquer une dégradation rapide des performances. L'un des paramètres indiquant le bon fonctionnement de la batterie est l'état de sa charge dénommée *SoC* (state of charge).

Les dispositifs de contrôle de batterie embarqués sur les véhicules (BMS : Batteries Management System) ont pour rôle principal de surveiller l'état de charge de la batterie. Cependant, la grandeur *SoC* n'est pas mesurable. La grandeur facilement accessible à la mesure est le courant de charge ou de décharge. La problématique est de mettre en œuvre des stratégies d'estimation de l'état de charge de la batterie à partir de la mesure du courant. Plusieurs techniques ont été proposées. Dans ce présent mémoire, nous utiliserons les estimateurs à base d'observateurs d'état [3].

La conception d'observateur d'état nécessite la connaissance d'un modèle mathématique (modèle d'état en l'occurrence). Dans ce contexte, plusieurs types de modèles mathématiques de la batterie ont été développés.

Nous utilisons le modèle électrique de Thévenin du second ordre car il offre un compromis entre la simplicité et la précision. L'objectif de ce mémoire est de mettre en œuvre deux algorithmes d'estimation de l'état de charge en utilisant l'observateur de Luenberger et le filtre de Kalman. Une étude comparative des résultats de simulation obtenus par les deux algorithmes est menée.

Le présent mémoire est organisé comme suit. Le premier chapitre est consacré aux généralités et définitions sur les batteries électriques.

Dans le second chapitre, nous exposons les deux observateurs utilisés qui sont l'observateur de Luenberger et le filtre de Kalman. Au troisième chapitre, nous présentons les résultats de simulations sur l'estimation de l'état de charge de la batterie lithium-ion. Les résultats obtenus successivement par l'observateur de Luenberger et du filtre de Kalman dans le cas de l'absence du bruit et le cas de présence du bruit sont discutés.

# Chapitre I

## Revue littéraire sur les batteries à lithium

### 1 Introduction et généralités

#### 1.1 Le rôle et l'importance des batteries électriques

Une batterie est un appareil qui stocke de l'énergie sous forme d'énergie chimique. Lorsqu'une batterie se charge, elle convertit l'énergie électrique en énergie chimique. Lorsqu'il se décharge, il transforme l'énergie chimique en énergie électrique. Un cycle de charge/décharge réversible est une des caractéristiques de la batterie.

Le stockage d'énergie dans des batteries rechargeables est devenu central au cours des deux dernières décennies pour les appareils connectés à Internet tels que les ordinateurs portables, les smart-phones, les tablettes, les appareils photo numériques et les livres électroniques, les véhicules électriques.

#### 1.2 Types de batteries

Il existe plusieurs types de batteries : batteries au plomb-acide, batteries alcalines, batteries au nickel. Cette dernière comporte plusieurs types aussi, mais voici les plus utilisés : batteries au nickel-cadmium (Ni-Cd), batteries au nickel-métal-hydrure (Ni-MH). Les batteries au lithium comprennent également plusieurs types de batteries, telles que : batteries au lithium-ion (Li-ion), batteries au lithium-polymère (Li-pol).

Mais les trois principaux sont : **Plomb-acide**, **Nickel-hydrure métallique**, **Lithium-Ion** [1].

Différents types de batteries peuvent être utilisés dans différentes applications, chacune étant conçue pour répondre à des besoins spécifiques.

**Les batteries au plomb** sont utilisées dans les voitures, les motos, les voitures de golf, les systèmes d'urgence, les équipements d'énergie solaire et éolienne, les poussettes,

etc. **Les piles alcalines**, quant à elles, sont principalement utilisées dans les produits de consommation tels que les appareils électroniques comme les télécommandes, les montres, les jouets, les lampes de poche, etc. **Les piles nickel-cadmium (Ni-Cd)** trouvent leur application dans les outils électriques, les équipements électroniques, les appareils médicaux, les jouets, etc. **Les piles nickel-hydrure métallique (Ni-MH)** sont utilisées dans les appareils électroniques portables tels que les téléphones sans fil, les ordinateurs portables, les appareils photo numériques, etc. **Les batteries lithium-ion (Li-ion)** sont largement utilisées dans les smart-phones, les ordinateurs portables, les tablettes, les appareils photo numériques, les véhicules, etc. **Les batteries lithium polymère (Li-pol)** sont utilisées dans les appareils électroniques fins et légers tels que les smart-phones, les tablettes, les drones, etc. Le développement de **batteries sodium-ion (Na-ion)** est orienté vers les grands dispositifs de stockage d'énergie à grande échelle, en particulier les systèmes de stockage d'énergie renouvelable.

### 1.3 Avantages des batteries à lithium-ion

Les batteries lithium offrent plusieurs avantages par rapport aux autres types de batteries, dont le type le plus connu est la batterie à lithium-ion. Ces avantages sont déduits de la comparaison entre différents entrés listés ci-dessous [1] :

#### 1. Densité énergétique et énergie spécifique :

- (a) **Tension Théorique et Pratique** : La **tension théorique** des batteries est déterminée par les matériaux des électrodes et représente la tension maximale théoriquement possible entre les bornes de la batterie. La tension pratique, quant à elle, est la **tension réelle** fournie par la batterie dans des conditions d'utilisation normales. **Cette différence** entre tension théorique et pratique est due à des pertes internes et des inefficacités dans le système de la batterie [2].
  - **Plomb-acide (Pb-acid)** : La tension théorique est d'environ  $2V$ , similaire à la tension pratique.
  - **Nickel-hydrure métallique (Ni-MH)** : La tension théorique est d'environ  $1,2 V$ , mais la tension pratique est d'environ 10 % inférieure.
  - **Lithium-ion (Li-ion)** : La tension théorique est d'environ  $4V$ , similaire à la tension pratique.
- (b) **Énergie Spécifique** : L'énergie spécifique d'une batterie est la quantité d'énergie qu'elle peut stocker par unité de masse. Elle est mesurée en watt-heures par kilogramme (Wh/kg). Cette mesure est importante pour évaluer la densité d'énergie d'une batterie et son efficacité énergétique [4].
  - **Plomb-acide** : Possède la capacité la plus faible à  $166Wh/kg$ .

- **Nickel-hydrure métallique** : Environ  $250Wh/kg$ .
- **Lithium-ion** : Donne théoriquement  $410Wh/kg$ , mais en pratique atteint environ  $150Wh/kg$ .

(c) **Densité d'énergie** :

La densité d'énergie d'une batterie est la quantité d'énergie qu'elle peut stocker par unité de volume. Elle est mesurée en watt-heures par litre ( $Wh/L$ ). Une densité d'énergie plus élevée signifie que la batterie peut stocker plus d'énergie dans un volume donné, ce qui est crucial pour les applications où l'espace est limité [5].

- **Plomb-acide** : La densité d'énergie est la plus faible parmi les trois types de batteries, à seulement  $60$  à  $120Wh/L$ , limitant son utilisation dans les applications nécessitant une densité d'énergie plus élevée.
- **Nickel-hydrure métallique** : Avec une densité d'énergie d'environ  $150$  à  $300Wh/L$ , les batteries Ni-MH offrent une capacité énergétique intermédiaire entre le plomb-acide et le Li-ion, mais elles sont moins efficaces en termes de densité volumétrique.
- **Lithium-ion** : La densité d'énergie à  $250$  à  $700Wh/L$  est nettement supérieure à celle du Ni-MH et du plomb-acide, ce qui la rend avantageuse dans les applications sensibles au poids et au volume comme les véhicules hybrides électriques.

(d) **Efficacité** : L'efficacité d'une batterie fait référence à sa capacité à convertir efficacement l'énergie électrique en énergie chimique lors de la charge et à la convertir en énergie électrique lors de la décharge. L'efficacité coulométrique mesure la quantité d'énergie stockée par rapport à l'énergie fournie pendant la charge, tandis que l'efficacité énergétique mesure la quantité d'énergie restituée par rapport à l'énergie stockée pendant la décharge [6].

Bien que les batteries Li-ion aient un **potentiel théorique plus élevé** en termes d'énergie spécifique, dans la pratique, **aucune des batteries ne parvient à atteindre son potentiel théorique**. Les batteries Li-ion restent cependant les plus performantes en termes d'énergie spécifique et de densité d'énergie, ce qui en fait un choix privilégié pour les applications où le poids et le volume sont des facteurs importants, comme dans les véhicules hybrides électriques [7].

2. **Plage de température de fonctionnement** :

Les batteries peuvent avoir des plages variables en termes de température. Ces plages déterminent les conditions de fonctionnement de manière optimale. Elles sont spécifiques à chaque technologie de batterie et doivent être prises en compte lors de l'utilisation et du stockage.

Les plages de température de fonctionnement des batteries au plomb-acide, des batteries Li-ion et des batteries Ni-MH diffèrent les unes des autres [1].

— **Batteries au plomb-acide**

Les batteries au plomb-acide ont une plage de température de fonctionnement typique allant de -40 à 60°C. Cela signifie que ces batteries peuvent fonctionner efficacement dans des conditions allant de -40 à 60°C.

— **Batteries Li-ion**

Les batteries Li-ion ont une plage de température de fonctionnement moins large que les batteries au plomb-acide. Elles peuvent fonctionner dans des plages de températures allant de -20 à 60°C. Cette plage de fonctionnement étendue permet une utilisation dans des conditions climatiques variées.

— **Batteries Ni-MH**

Les batteries Ni-MH ont tendance à avoir une plage de température de fonctionnement plus étroite par rapport aux batteries au plomb-acide et aux batteries Li-ion. Leur plage de température minimale est généralement de -20°C, ce qui signifie qu'elles peuvent fonctionner dans des conditions aussi basses que -20°C. La plage de température maximale pour les batteries Ni-MH est de 45°C.

— **Remarque**

Ces plages de température de fonctionnement limitées indiquent que ces batteries doivent être utilisées et stockées dans des conditions de température relativement modérées pour assurer leur bon fonctionnement.

Il est important de noter que des températures extrêmes en dehors de cette plage peuvent affecter les performances et la durée de vie des batteries.

3. **Durée de vie :**

La durée de vie des batteries, qu'il s'agisse des batteries Li-ion, des batteries au plomb-acide ou des batteries Ni-MH, est **influencée par plusieurs paramètres**. **Les températures extrêmes** peuvent accélérer la dégradation des batteries au plomb-acide, tandis que les batteries Li-ion et Ni-MH sont plus résistantes à la chaleur. De plus, **la fréquence des cycles de charge et de décharge** affecte également la durée de vie des batteries, les batteries au plomb-acide étant plus sensibles aux cycles profonds. Enfin, **la qualité de fabrication et l'utilisation appropriée des batteries** jouent un rôle crucial dans leur durée de vie [7].

4. **Temps de charge et de décharge :**

Le temps de charge et de décharge d'une batterie dépend de plusieurs facteurs, dont la capacité de la batterie, le courant utilisé et le type de technologie (lithium-ion, nickel-cadmium, etc.). Le temps de charge correspond à la durée nécessaire pour que la batterie atteigne sa pleine capacité après une utilisation. Ce temps varie en fonction du courant de charge : une charge rapide peut réduire ce temps,

mais elle peut aussi entraîner une dégradation prématurée de la batterie. Quant au temps de décharge, il indique la durée pendant laquelle la batterie peut fournir de l'énergie avant d'atteindre un niveau critique. Ce temps dépend principalement de la consommation des appareils connectés et de la capacité initiale de la batterie. Une décharge lente prolonge généralement la durée de vie de la batterie, tandis que des cycles de charge et décharge rapides et fréquents peuvent l'user plus rapidement [8].

#### 5. État de charge et de décharge :

État de charge ou ce qu'on appelle communément en anglais "State of Charge" (SoC) est le niveau de charge d'une batterie électrique par rapport à sa capacité. Les unités de SoC sont des points de pourcentage (0% = vide; 100% = plein). Une forme alternative de la même mesure est la profondeur de décharge ou ce qu'on appelle en anglais "Depth of Discharge" (DoD), l'inverse du SoC (100% = vide; 0% = plein) [9].

## 1.4 Description du fonctionnement de base des batteries

Un dispositif de stockage électrochimique (cellule) crée un courant électrique en échangeant des électrons lors d'une réaction chimique qui se produit à l'intérieur de la batterie. Cette réaction implique deux paires d'oxydants et de réducteurs, étiquetées  $OX^-/Red^-$  et  $OX^+/Red^+$ , correspondant respectivement aux électrodes négative et positive. Ces réactions se déroulent dans un circuit électrique externe, comme l'illustre la Figure I.1 [3].

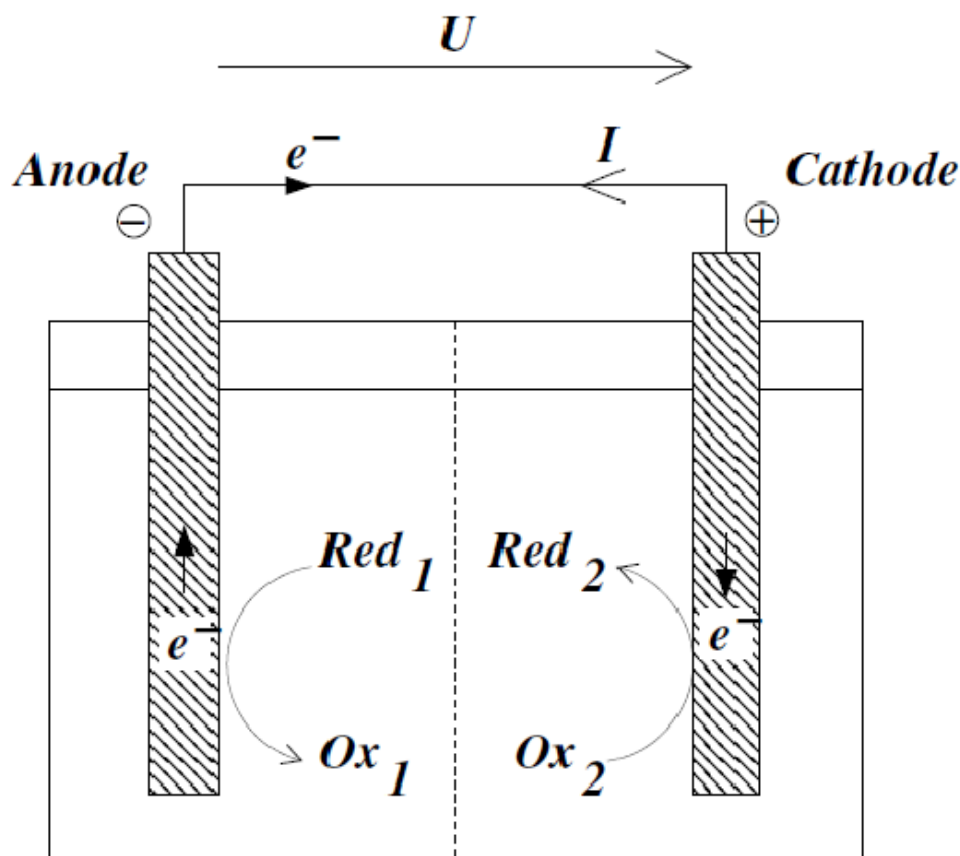


FIGURE I.1 – Schéma du principe de fonctionnement des batteries.

Les électrons s'échangent entre les électrodes (anode et cathode), et les ions se déplacent à travers l'électrolyte pour équilibrer la charge.

Les piles et les accumulateurs ont une caractéristique propre qui nous permet de les distinguer, et cette dernière peut être repérée :

— **électriquement** :

- Si notre diapositive **cette recharge** l'aide d'un générateur donc dans ce cas c'est **une batteries** (accumulateur).
- Si ce n'est pas le cas, c'est **une pile**.

— **chimiquement** :

- Si la réaction chimique est **réversible** au moment de la recharge, l'aide d'un générateur donc c'est **un accumulateur**.
- Sinon c'est **une pile**.

#### 1.4.1 Composants principaux dans les batteries

Les cellules de batterie sont composées de cinq éléments fondamentaux [10] :

- **Cathode** : La cathode contient généralement du dioxyde de cobalt et de lithium ( $\text{LiCoO}_2$ ), qui fournit les ions de lithium nécessaires.
- **Anode** : L'anode est souvent composée de graphite, permettant l'intercalation des ions de lithium lors du processus.
- **Électrolyte** : Les batteries au lithium-ion utilisent un électrolyte liquide contenant des sels de lithium dans un solvant pour faciliter le mouvement des ions. Cet électrolyte permet le transport des ions de lithium entre la cathode et l'anode.
- **Séparateur** : Un séparateur est utilisé pour isoler les électrodes et prévenir les courts-circuits internes. Il permet uniquement le passage des ions de lithium, facilitant ainsi les réactions de charge et de décharge.
- **Terminaux** : Ce sont les sorties qui relient la partie interne de la batterie au côté externe. Ce sont les deux bornes + et - auxquelles on branche les câbles pour utiliser la batterie.
- **Boîtier** : Les boîtiers de batterie sont très importants, ils ont pour objectif de protéger les batteries contre l'humidité, la saleté et les dommages extérieurs.

Les cellules de batterie sont regroupées en une seule unité mécanique et électrique appelée **module de batterie**. Ces modules sont connectés électriquement pour former une batterie qui alimente l'électronique.

## 1.5 Description du fonctionnement de base des batteries à lithium-ion

### 1.5.1 Réactions chimiques

- **Cathode** : La cathode contient généralement du dioxyde de cobalt et de lithium ( $\text{LiCoO}_2$ ), qui fournit les ions de lithium nécessaires. Lors de la décharge, des réactions de réduction se produisent, par exemple :
  - Réduction de l'oxyde de cobalt (décharge) :  $\text{CoO}_2 + \text{Li}^+ + \text{e}^- \rightarrow \text{LiCoO}_2$ .
  - Oxydation de l'oxyde de cobalt (charge) :  $\text{LiCoO}_2 \rightarrow \text{CoO}_2 + \text{Li}^+ + \text{e}^-$ .
- **Anode** : L'anode est souvent composée de graphite, permettant l'intercalation des ions de lithium lors du processus. Lors de la décharge, la réaction d'oxydation du graphite se produit, par exemple :
  - Oxydation du graphite (décharge) :  $\text{LiC}_6 \rightarrow \text{C}_6 + \text{Li}^+ + \text{e}^-$ .
  - Réduction du graphite (charge) :  $\text{C}_6 + \text{Li}^+ + \text{e}^- \rightarrow \text{LiC}_6$ .

En résumé, lors du processus de décharge, les ions de lithium quittent la cathode pour être stockés dans l'anode, tandis que lors de la charge, ils retournent à la cathode.

Ce mouvement constant d'ions entre les électrodes permet le stockage et la libération d'énergie électrique dans les batteries au lithium-ion.

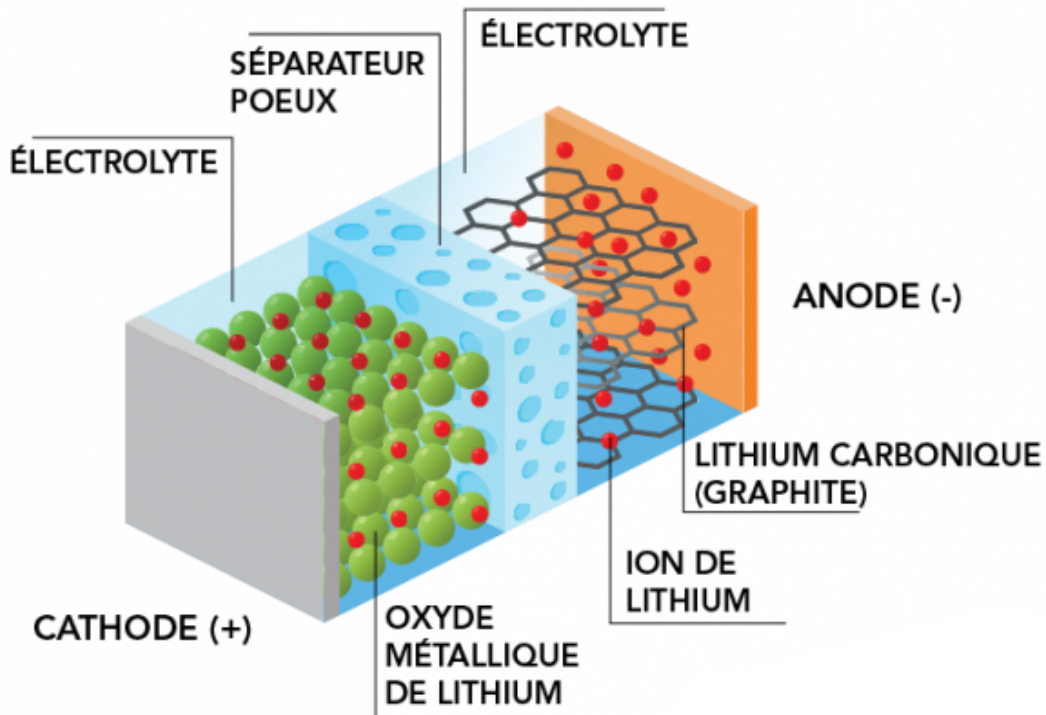


FIGURE I.2 – Composants d'une batterie lithium-ion.

## 2 Modélisation mathématique

### 2.1 Les différents modèles

Un modèle est une représentation mathématique simplifiée d'un phénomène physique. Les modèles permettent de prédire le comportement des systèmes et d'observer des phénomènes parfois impossibles à mesurer dans la réalité. Le modèle peut être grossier ou fin, son détail dépend du problème à résoudre. De nombreux modèles pour la batterie lithium-ion ont été développés comme le modèle électrique, le modèle thermique et le modèle électrochimique à haute résolution [11] pour modéliser le nombre et l'emplacement des électrodes reliant les électrodes aux pôles des éléments cylindriques [12].

1. **Modèles électriques** : La modélisation électrique des batteries est essentielle pour prédire leurs performances et leur fonctionnement. Le modèle doit être capable de reproduire correctement la réponse en tension de la batterie, ainsi que d'estimer

correctement son état de charge et ses pertes ohmiques pour déterminer les sources de chaleur. Le modèle doit être robuste pour pouvoir être testé dans différentes conditions de fonctionnement [13].

La modélisation électrique consiste à reproduire le comportement des batteries au moyen de circuits électriques composés d'éléments passifs (résistances, capacités, inductances) et actifs (force électromotrice, source de courant).

- Le modèle de base : C'est le premier modèle qui vient à l'esprit pour quiconque souhaite modéliser une batterie avec moins d'effort. C'est aussi le plus couramment utilisé. Comme indiqué figure I.3 [14]. Il est constitué d'une source de tension  $E_0 = V_0$  et d'une résistance série  $R_0$ .

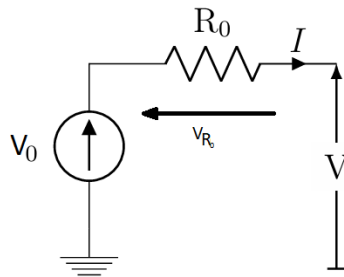


FIGURE I.3 – Modèle électrique équivalent sans régime transitoire.

Ce modèle de base est particulièrement simple à utiliser, mais ne prend pas en compte l'évolution de l'impédance interne de la batterie avec l'état de charge, la concentration en électrolyte, la température ou encore le nombre de cycles. Avec ce modèle, il n'est donc pas possible d'obtenir un modèle exact du comportement dynamique, mais il peut constituer une mesure initiale adéquate de dispositifs électroniques puissants.

- Le modèle de type Thévenin du premier ordre :

Cette conception est également connue [15] [16], c'est une amélioration par rapport à la conception précédente grâce à l'ajout d'un dipôle  $RC$ . Cette dernière introduit une constante de temps, dont la présence est soulignée dans les expériences expérimentales, où les phénomènes à deux couches sont souvent marqués avec un temps très court (quelques millisecondes) [17]. Il est constitué d'une tension à vide  $E_0 = V_0$  et d'une résistance ohmique  $R_0$ ,  $R_1$  représente généralement la résistance de transfert de charges à l'interface électrode-électrolyte,  $C_1$  la capacité de couche double. Compte tenu de la forte dépendance de ces différents éléments aux conditions opératoires, ce modèle ne reste valable qu'autour du point de fonctionnement lorsque l'ensemble des paramètres est fixé [17].

Comme indiqué figure [I.4](#) [\[14\]](#) :

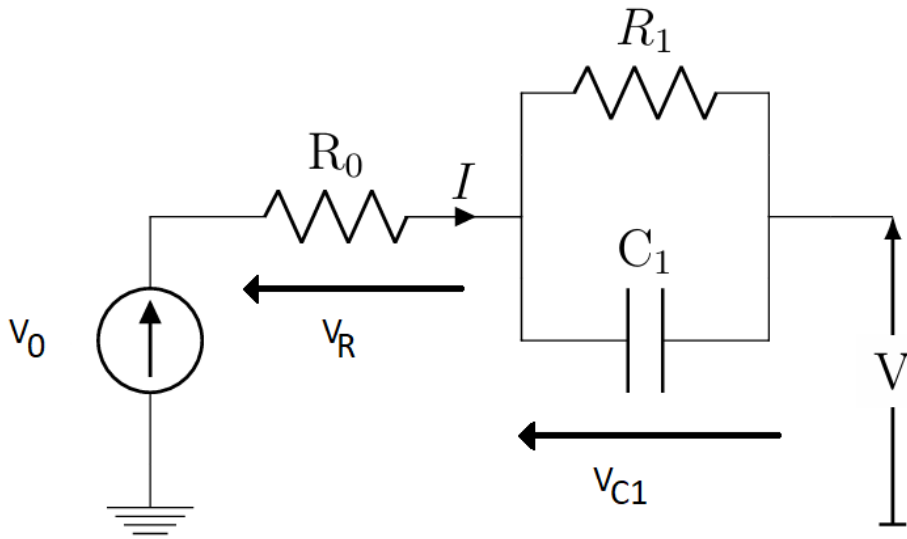


FIGURE I.4 – Modèle électrique équivalent du premier ordre.

Mathématiquement, ces modèles sont exprimés sous forme d'équations différentielles ordinaires. Par exemple, la structure du modèle illustré à la Figure [I.4](#) donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{dV_{C1}(t)}{dt} = \frac{-V_{C1}(t)}{R_1 C_1} + \frac{I(t)}{C_1} \\ V(t) = V_0(t) - R_0 I(t) - V_{C1}(t) \end{cases}$$

Avec :

- $I$  : Le courant qui circule dans le circuit.
- $R_0$  : La résistance.
- $V_{C1} = V_0$  : La tension aux bornes de  $C_1$ .
- $OCV$  : Tension à vide de la batterie.

## 2. Modèles thermiques :

Un modèle à paramètres localisés a été utilisé, également appelé circuit électrique équivalent [\[18\]](#), [\[19\]](#). Cette méthode de modélisation repose sur une analogie formelle entre phénomènes électriques et thermiques. Les nœuds correspondent à des volumes de matière (supposés isothermes), les capacités représentent l'accumulation d'énergie thermique, les résistances au transfert de chaleur (par conduction, convection ou rayonnement), les sources de courant, les sources de chaleur et de tension. Les sources représentent les températures définies (thermostats). Des condensateurs, des sources de courant et de tension sont utilisés entre leur nœud d'application et

le nœud de référence (la masse) du circuit. Pour améliorer la lisibilité des schémas, les sources de tension ont été remplacées par les températures déterminées par celles-ci. Dans notre application, les cellules sont intégrées au package (Figure I.5). Ils sont en contact thermique avec le système de refroidissement (gris) par les surfaces inférieures, réglables thermiquement ou non. Les flux thermiques du système de refroidissement sont représentés par des flèches blanches. Concernant les transferts thermiques horizontaux, trois configurations peuvent être maintenues avec des conditions aux limites différentes [20] :

- Milieu : La cellule peut échanger de la chaleur avec ses voisines par conduction.
- Sur un bord : Une cellule peut échanger de la chaleur avec ses voisines par conduction, mais elle peut aussi en l'échanger avec le reste du colis par convection/rayonnement à travers son autre surface.
- Angle : Une cellule peut échanger de la chaleur avec ses voisines par conduction, mais peut aussi en l'échanger avec le reste du colis par convection/rayonnement à travers ses deux faces.

La cellule a été modélisée avec le circuit thermique illustré à la Figure I.5, avec un nœud central pour le noyau actif de la cellule, un nœud par surface et un nœud par terminal (points noirs). Nous avons montré les phénomènes thermiques les plus importants dans le noyau actif (vert), dans l'enveloppe (rouge) et à l'extérieur de la cellule (bleu) [20].

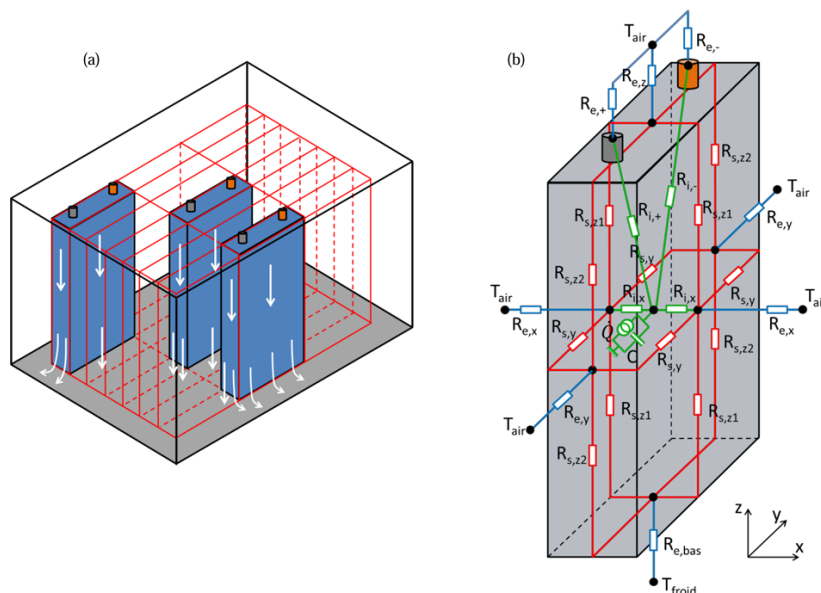


FIGURE I.5 – (a) Intégration des cellules (3x7) dans un pack et (b) modèle thermique d'une cellule.

- a) **Dans le cœur actif (en vert) :** Nous avons représenté la production de chaleur  $\dot{Q}$ , la capacité thermique totale  $C$  et plusieurs transferts de chaleur (indice de résistance  $i$ ). Puisque le noyau actif était constitué d'un empilement

de feuilles selon  $x$  (positif, délimiteur, négatif, délimiteur, positif, etc.), il était traité comme méta matériau. Sa conductivité thermique est donc identique en  $y$  et  $z$  mais différente en  $x$ . Quant à sa chaleur spécifique, elle est supposée homogène. De plus, les transferts de chaleur entre le noyau et la coque se feraient principalement via les surfaces  $x$  (via  $R_{i,x}$ ). En effet, les plaques atteignent leurs bords en  $y$  et  $z$ , ce qui entraîne un mauvais contact thermique. Enfin, le noyau actif est supposé isotherme le long du plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  car les collecteurs de courant des électrodes ont une conductivité thermique importante. Cette hypothèse a été confirmée expérimentalement en surveillant les températures en plusieurs points de la couche interne de la cellule. Enfin, les transferts entre le cœur actif et chacune des bornes de la cellule ont été représentés par  $R_{i,+}$  et  $R_{i,-}$ .

- b) **Dans le boîtier (en rouge)** : Seuls les transferts thermiques le long du corps (indices de résistances  $s$ ) sont modélisés. La capacité thermique des surfaces de la coque a été considérée comme insignifiante par rapport à la capacité thermique  $C$  totale des cellules, env. Cela est dû à l'épaisseur du boîtier, dont la finesse ne permet pas de stocker beaucoup d'énergie thermique par rapport au noyau actif.
- c) **En dehors de la cellule (en bleu)** : Cela s'applique au transfert de chaleur entre l'élément et son environnement (résistances d'index  $e$ ). En particulier,  $R_{e,bas}$  représente la résistance de contact entre la surface inférieure de la cellule et le système de refroidissement. Les autres résistances bleues représentent le transfert de chaleur vers d'autres cellules (conduction) ou vers le reste du boîtier (convection/rayonnement), selon l'endroit où se trouve la cellule dans le boîtier. Les propriétés thermophysiques de tous les matériaux sont supposées constantes, les paramètres du modèle sont donc les mêmes. En particulier, E. Barsoukov et Al [21]. Ont montré que leur dépendance au  $SoC$  est négligeable.

### 3. Modèles électrochimiques :

Le modèle électrochimique est constitué d'un système d'équations algébriques différentielles (EAD) non linéaires qui sont résumées dans le Tableau [L.1]. Les concentrations de  $Li$  dans la phase solide  $c_s$  et d'ions  $Li^+$  dans l'électrolyte  $c_e$  sont obtenues à partir des équations de transport [L.1] et ??.. La conservation de la charge électrique (équations [L.3] et [L.4]) peut être utilisée pour calculer les potentiels biphasés  $\phi_s$  et  $\phi_e$  pour chaque électrode, et la cinétique électrochimique est modélisée par l'équation [L.5]. Majordome-Volmer. La tension élémentaire au temps  $t$ ,  $V(t) = \phi_s(L) - \phi_s(0)$ , peut être exprimée comme la somme des potentiels thermodynamiques  $U_p$  et  $U_n$ , des surtensions  $\eta_p$  et  $\eta_n$  et du potentiel. différence de pas électrolytique dans deux collecteurs de courant  $\phi_e(L) - \phi_e(0)$ .. [22]

Physical and chemical mechanisms	Equation	Boundary conditions
Solid phase : conservation for Li+ species	$\frac{\partial}{\partial t} c_s - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D_s \frac{\partial}{\partial r} c_s \right) = 0 \quad (I.1)$	$\begin{aligned} D_s \frac{\partial}{\partial r} c_s \Big _{r=0} &= 0 \\ -D_s \frac{\partial}{\partial r} c_s \Big _{r=R_s} &= \frac{j^{Li}}{a_s F} \end{aligned}$
Electrolyte phase : conservation for Li+ species	$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_e c_e) - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_e^{eff} \frac{\partial}{\partial x} c_e \right) - (1 - t_+) \frac{j^{Li}}{F} = 0 \quad (I.2)$	$\frac{\partial}{\partial x} c_e \Big _{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} c_e \Big _{x=L} = 0$
Solid phase : charge conservation	$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma^{eff} \frac{\partial}{\partial x} \phi_s \right) - j^{Li} = 0 \quad (I.3)$	$\begin{aligned} -\sigma_n^{eff} \frac{\partial}{\partial x} \phi_s \Big _{x=0} &= -\sigma_p^{eff} \frac{\partial}{\partial x} \phi_s \Big _{x=L} = \frac{I}{A} \\ \frac{\partial}{\partial x} \phi_s \Big _{x=\delta} &= \frac{\partial}{\partial x} \phi_s \Big _{x=L-\delta_s} = 0 \end{aligned}$
Electrolyte phase : charge conservation	$\frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa^{eff} \frac{\partial}{\partial x} \phi_e \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_D^{eff} \frac{\partial}{\partial x} \ln c_e \right) + j^{Li} = 0 \quad (I.4)$	$\frac{\partial}{\partial x} \phi_e \Big _{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \phi_e \Big _{x=L} = 0$
Electrochemical kinetics	$j^{Li} = a_s i_0 \left\{ \exp \left( \frac{\alpha_{ox} F}{RT} (\phi_s - \phi_e - U) \right) - \exp \left( \frac{\alpha_{red} F}{RT} (\phi_s - \phi_e - U) \right) \right\} \quad (I.5)$	
Electrode overpotential	$\eta = \phi_s - \phi_e - U \quad (I.6)$	
Electrolyte ionic diffusivity	$D_e^{eff} = D_{s,e}^{Brugg} \quad (I.7)$	
Electrolyte ionic conductivity	$\kappa^{eff} = \kappa_e^{Brugg} \quad (I.8)$	
Electrolyte ionic diffusional conductivity	$\kappa_D^{eff} = \frac{2RT \kappa^{eff}}{F} (t_+ - 1) \left( 1 + \frac{d \ln f_{\pm}}{d \ln c_e} \right) \quad (I.9)$	
Solid phase electronic conductivity	$\sigma^{eff} = \varepsilon_s \sigma \quad (I.10)$	
Specific interfacial surface area	$a_s = \frac{3\varepsilon_s}{R_s} \quad (I.11)$	

TABLE I.1 – Exemple de tableau avec équations et conditions aux limites

Ainsi, le système d'équations donné dans le tableau [I.1](#) prend en compte [\[22\]](#) :

- Les réactions électrochimiques au niveau des électrodes.
- Les bilans de masse.
- L'équilibre des charges électriques.
- Les bilans énergétiques.

La résolution de ce système d'équations permet à tout moment de déterminer les variables internes suivantes [\[22\]](#) :

- Concentrations de particules actives.
- Tension de la cellule.
- Flux thermique produit par la cellule.
- Température de la cellule.

Selon l'échelle de modélisation utilisée pour décrire le comportement de la cellule, les paramètres définis dans le tableau [I.1](#) peuvent varier en fonction de la localisation spatiale au sein de la cellule. Il existe généralement trois modèles [\[22\]](#) :

- a) **Modèle pseudo-2D** Dans le modèle pseudo-bidimensionnel, le matériau actif solide de chaque électrode est modélisé sous forme de particules sphériques identiques. Par conséquent, les paramètres sont discrétisés dans deux directions, perpendiculairement aux collecteurs de courant (direction  $x$ ) et dans la direction du faisceau suivant le rayon  $r$  des particules sphériques. Bien que cette approche initialement développée par Newman [\[23\]](#) offre une prévisibilité élevée, il est plus intéressant de réduire la discrétisation pour gagner du temps de calcul.
- b) **Modèle de l'électrode poreuse (1D)** Dans le modèle unidimensionnel, la cellule est représentée comme un système de multiples domaines répartis le long d'un axe perpendiculaire au séparateur. Le plus souvent on distingue trois zones, l'électrode négative, le séparateur et l'électrode positive. Ainsi, les variables sont discrétisées uniquement dans la direction  $x$ .
- c) **Modèle réduit (0D)** Dans cette approche, la cellule est considérée comme un milieu homogène [\[24\]](#), [\[25\]](#).

#### 4. Modèle couplé :

Les modèles associés proviennent principalement de la combinaison du modèle électrochimique et du modèle thermique. Tout le sens de cette configuration vient du fait que les phénomènes électrochimiques contribuent à la réflexion de la chaleur générée à l'intérieur de la cellule dans les équations thermiques. De plus, divers paramètres de transport de matériaux et de cinétique électrochimique dépendent de

la température; ils sont exprimés dans les modèles combinés de la loi d'Arrhenius [22] :

$$\Psi = \Psi_{ref} \exp\left(\frac{E_a(\Psi)}{R} \left(\frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T}\right)\right) \quad (\text{I.12})$$

Où  $\Psi$  est un paramètre physique dépendant de la température,  $E_a$  est l'énergie d'activation,  $R$  est la constante des gaz parfaits et  $T_{ref}$  est la température de référence, souvent 25 °C.

La plupart des modèles associés sont basés sur le modèle électrochimique de Doyle et Al. [26] et pour la partie thermique, Bernard et Al. Au bilan énergétique prévu. [27]. Toutefois, récemment, diverses formes de couplage/découplage sont apparues à des degrés divers. La plus courante consiste à combiner un modèle électrochimique P2D ou 1D simplifié avec un modèle thermique 3D. À cet égard, le gradient de température à l'intérieur de la cellule est pleinement pris en compte. À titre d'exemple, Leen et Al. [28] qui a étudié le comportement thermique de grandes cellules cylindriques. Leur modèle combiné a été défini à l'aide de trois sous-modèles [22] :

- Un sous-modèle 1D de particule sphérique pour l'étude de la diffusion du lithium et de la cinétique de transfert des charges dans les électrodes.
- Un sous-modèle 1D de l'électrode poreuse pour la détermination des bilans de matière et des bilans de charge dans les électrodes et dans l'électrolyte.
- Un sous-modèle 3D pour l'étude du transfert de chaleur et de la densité de courant dans le volume de la cellule.

Des modèles couplés ont également été développés à l'échelle du module et du pack. Par exemple, pour estimer la température de surface de cellules individuelles et la température de l'ensemble de l'emballage, Sun et Al. [29] a développé un modèle couplé composé de quatre sous-modèles :

- Un sous-modèle thermique 1D localisé à l'échelle de la cellule.
- Un sous-modèle de circuit équivalent pour coupler le courant et la tension de la cellule.
- Un sous-modèle électrochimique/thermique 3D à l'échelle de la cellule pour déterminer la répartition de la chaleur dans chaque cellule.
- Un sous-modèle 3D au niveau du package pour simuler le changement thermique de la batterie en intégrant les paramètres du système de refroidissement.

L'utilisation de modèles couplés électrochimiques/thermiques (EC-T) et la comparaison de leurs résultats avec des données expérimentales ont permis des avancées dans plusieurs domaines de recherche, tels que :

- Évaluation des sources de chaleur réversibles et irréversibles [30], [31], [32], [33].

- Détermination de la température de surface des cellules et de la température interne [34], [35], [36], [37].
- Prise en compte de l'enroulement en spirale pour les cellules cylindriques [28], [30].
- Étude de l'effet de refroidissement sur la puissance de fuite [38], [29].
- Taille des particules des matériaux actifs et de l'électrode, épaisseur au taux de génération de chaleur [39].
- Limites des fonctions de puissance d'impulsion [40].
- Effet de la température sur le gradient de concentration du lithium en deux phases, liquide et solide [30], [41].
- Effet du vieillissement sur la puissance - et pertes de puissance dans différentes conditions de température [42], [43], [44], [45].
- L'importance de la dissipation thermique à travers les collecteurs de courant métalliques, qui provoque un gradient de température important entre les cellules et affecte fortement leur puissance [46], [31].
- Le nombre, l'emplacement et la taille des bornes électriques de la cellule en fonction de son efficacité et de sa durée de vie [47], [28], [48] etc...

Dans le cadre de ce projet, nous avons utilisé le modèle électrique de Thévenin.

## 2.2 Modèles électriques

Les batteries sont des sources de stockage d'énergie qui jouent un rôle clé dans le développement des véhicules électriques (VE). Parmi elles, la batterie lithium-ion est reconnue comme la batterie verte la plus prometteuse, notamment pour les véhicules à énergie nouvelle, en raison de ses nombreux avantages tels que sa densité énergétique élevée, sa capacité à se charger et se décharger rapidement, ainsi que sa sécurité [49].

Avec l'intensification des recherches sur la simulation des véhicules électriques, la gestion de l'énergie et l'évaluation de l'état de charge (*SoC*) et de l'état de santé (*SoH*) des batteries, la précision des processus de charge et de décharge a considérablement progressé. La conception des batteries, et en particulier des batteries au lithium, reste un axe de recherche majeur [50], [51].

Le modèle de Thévenin d'ordre  $n$  a été sélectionné pour l'analyse du circuit en raison de sa capacité à simplifier des réseaux complexes en un circuit équivalent plus facile à gérer, tout en conservant une représentation précise des caractéristiques du circuit d'origine.

### — Modèle de Thévenin du $n^{\text{ème}}$ ordre :

Contrairement au modèle standard de Thévenin, qui utilise une seule résistance et une seule source de tension, le modèle d'ordre  $n$  (voir figure I.6) inclut plusieurs éléments, permettant ainsi une analyse plus détaillée et précise. Cela implique la

modélisation de plusieurs résistances en série et en parallèle, ainsi que des composants réactifs tels que les inductances et les capacités. Par exemple, dans un circuit d'ordre  $n$ , l'équation de Thévenin peut intégrer des termes supplémentaires pour chaque composant, offrant ainsi une représentation plus fidèle des dynamiques complexes du circuit.

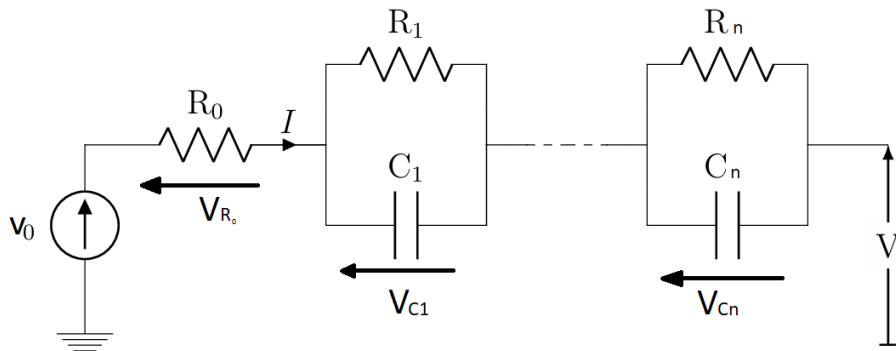


FIGURE I.6 – Modèle de Thévenin du  $n^{\text{ème}}$  ordre

Cette approche est particulièrement avantageuse lorsque le circuit présente des comportements non linéaires ou des réponses dynamiques complexes. En utilisant le modèle de Thévenin d'ordre  $n$ , la complexité des équations différentielles régissant les régimes transitoires est réduite, facilitant ainsi les calculs nécessaires à l'analyse. De plus, cette méthode permet de mieux appréhender l'impact des variations des composants individuels sur l'ensemble du circuit, un aspect crucial pour l'optimisation des performances et de la stabilité du système. La validation des résultats obtenus par simulation avec ce modèle a confirmé l'exactitude de la modélisation initiale, assurant ainsi une meilleure fiabilité des conclusions [52].

Après une première évaluation des besoins du système, il a été conclu que l'utilisation d'un modèle d'ordre 2, tel que le modèle de Thévenin d'ordre 2, était plus appropriée pour capturer les dynamiques complexes du circuit, comme les résonances et les effets d'amortissement. Cette transition permet de mieux représenter les phénomènes non linéaires ayant un impact significatif sur le comportement global du système électrique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_{C1}(t)}{dt} = \frac{-V_{C1}(t)}{R_1 C_1} + \frac{I(t)}{C_1} \\ \frac{dV_{C2}(t)}{dt} = \frac{-V_{C2}(t)}{R_2 C_2} + \frac{I(t)}{C_2} \\ \vdots \\ \frac{dV_{CN}(t)}{dt} = \frac{-V_{CN}(t)}{R_N C_N} + \frac{I(t)}{C_N} \\ V(t) = V_0(t) - R_0 I(t) - V_{C1}(t) - V_{C2}(t) - \dots - V_{CN}(t) \end{array} \right.$$

— **Modèle de Thévenin du 2<sup>ème</sup> ordre :**

Le modèle de Thévenin du second ordre a été validé par des essais expérimentaux. Il offre une représentation réaliste du comportement des batteries tout en demeurant relativement simple à utiliser. Pour ces raisons, le modèle de Thévenin du second ordre a été adopté pour cette étude [53].

### 3 Simulation du modèle retenu

La simulation des batteries lithium-ion revêt une importance capitale dans le domaine de l'électromobilité et de la gestion de l'énergie. Elle permet de modéliser de manière précise le comportement électrique et thermique des batteries, optimisant ainsi leur performance, leur durée de vie et leur sécurité. Dans cette section, le modèle de Thévenin d'ordre 2 pour les batteries lithium-ion est simulé, offrant une meilleure compréhension et prévision des performances des batteries sous diverses conditions d'utilisation.

#### 3.1 Description du modèle de Thévenin du deuxième ordre

Le modèle de Thévenin du deuxième ordre (voir figure ??) représente une batterie lithium-ion avec les éléments clés suivants :

- $I$  : Courant circulant dans le circuit.
- $I_{entee}$  : Courant d'entrée.
- $OCV$  : Tension à vide de la batterie, notée  $V_0$
- $SoC$  : État de charge de la batterie.
- $V_{c1}$  et  $V_{c2}$  : Tensions aux bornes des capacités  $C_1$  et  $C_2$  simulant la diffusion chimique.
- $V$  : Tension totale de la batterie.

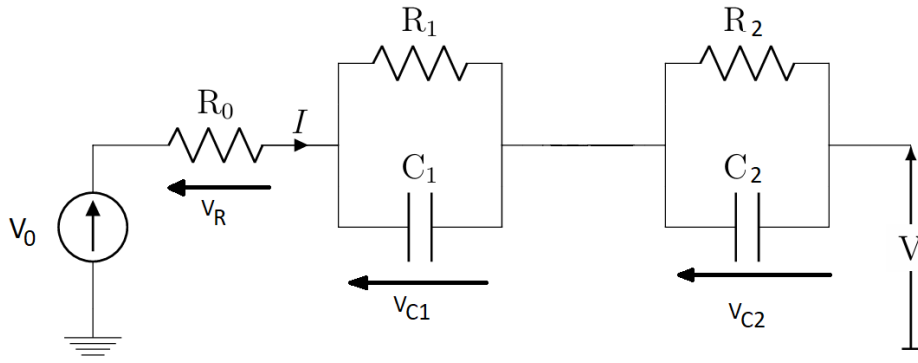


FIGURE I.7 – Modèle de Thévenin du 2ème ordre

Chaque élément du modèle de batterie, qu'il s'agisse d'un paramètre ou d'une variable, joue un rôle unique dans la simulation du comportement de la batterie et affecte sa réponse électrique.

Les équations du modèle donnent par :

$$\frac{dV_{C1}(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_1}V_{C1}(t) + \frac{1}{C_1}I(t) \quad (\text{I.13})$$

$$\frac{dV_{C2}(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_2}V_{C2}(t) + \frac{1}{C_2}I(t) \quad (\text{I.14})$$

$$V(t) = V_0(t) - R_0I(t) - V_{C1}(t) - V_{C2}(t) \quad (\text{I.15})$$

Avec :  $\tau_1 = R_1C_1$  et  $\tau_2 = R_2C_2$

On définit l'état de charge (SoC : State Of Charge) de la batterie par :

$$SoC(t) = \frac{\text{Capacité de charge courante}}{\text{Capacité de charge nominale}} (*100)\% \quad (\text{I.16})$$

De plus on dispose de la relation suivante :

$$SoC(t) = SoC(0) - \frac{\eta}{Q_n} \int_0^t I(\tau) d\tau \quad (\text{I.17})$$

Où  $Q_n$  représente la capacité (quantité de charge) nominale de la batterie (Amph) et  $\eta$  est un coefficient paramétrisant la constante de temps de charge ou de décharge (en général égale à 0.98 pour le cycle de charge et entre 0.86 et 0.9 pour le cycle de décharge). La tension à vide  $V_0$  est une fonction non linéaire de l'état de charge. Elle dépend aussi de la température. De nombreuses relations (empiriques) ont été proposées. Souvent, dans des conditions de température normales (entre 30° et 45°C) on adopte, pour simplifier, une

relation linéaire  $V_0 = a_0 + a_1 SOC(t)$  illustrée par la figure I.8 ci-dessous.

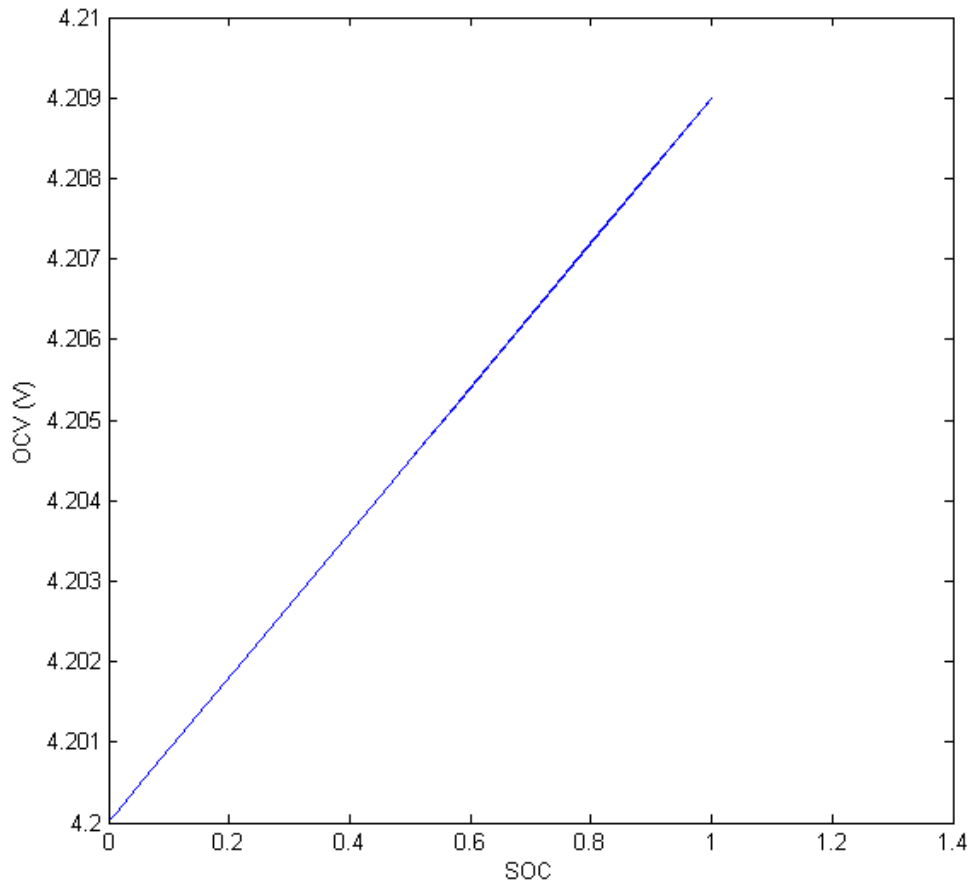


FIGURE I.8 – Caractéristique de la tension à vide en fonction de l'état de charge.

En définissant les variables d'état suivantes  $x_1(t) = V_{C_1}(t)$ ,  $x_2(t) = V_{C_2}(t)$ ,  $x_3(t) = SoC(t)$  et en considérant  $u(t) = I(t)$  comme l'entrée du système, et  $V(t)$  comme sa sortie, écrire le modèle d'état sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y_p(t) = Cx(t) + Du(t)$$

et  $y_p$  c'est l'entrée utilisée pour l'observateur, on a :

$$y_p = V$$

$$y = y_p - Du + h_0$$

$h_0$  représente le terme  $a_0$  dans la loi  $OCV$  en fonction de  $SoC$ .

La valeur de  $D = 0$

Les valeurs numériques des éléments du circuit et des autres coefficients sont :  
 $R_0 = 0.002\Omega$  ,  $R_1 = 0.0077\Omega$ ,  $R_2 = 0.0011\Omega$ ,  $C_1 = 14475.24F$  ,  $C_2 = 98246.01F$ ,  
 $Q_n = 2Amp$  . On prend  $\eta = 1$  pour simplifier et  $a_0 = 4.2V$  et  $a_1 = 0.009$ .

Avec :  $\tau_1=R_1C_1=111.459348s$  et  $\tau_2=R_2C_2=108.070611s$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc la matrice d'évolution est :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0090 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0093 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} \\ -\frac{\eta}{Q} \end{bmatrix}$$

Donc la matrice de commande est :

$$B = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0691 \\ 0.0102 \\ -0.1389 \end{bmatrix}$$

La matrice de sortie est :

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0.009 \end{bmatrix}$$

### 3.2 Résultats de la simulation

Les schéma simulink de la batterie est illustrer dans les figures [L.9](#) et [L.10](#).

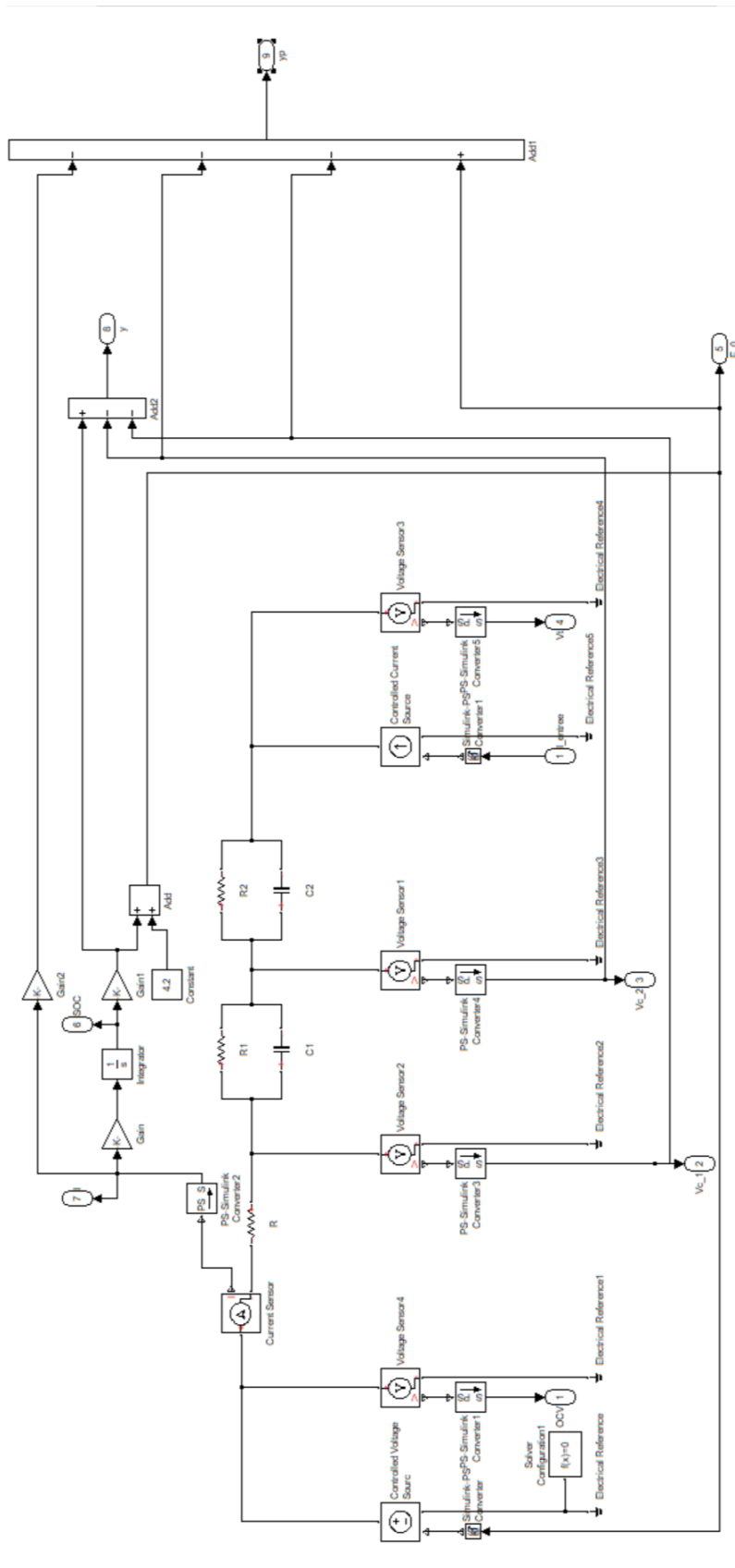


FIGURE I.9 – Schéma de batterie.

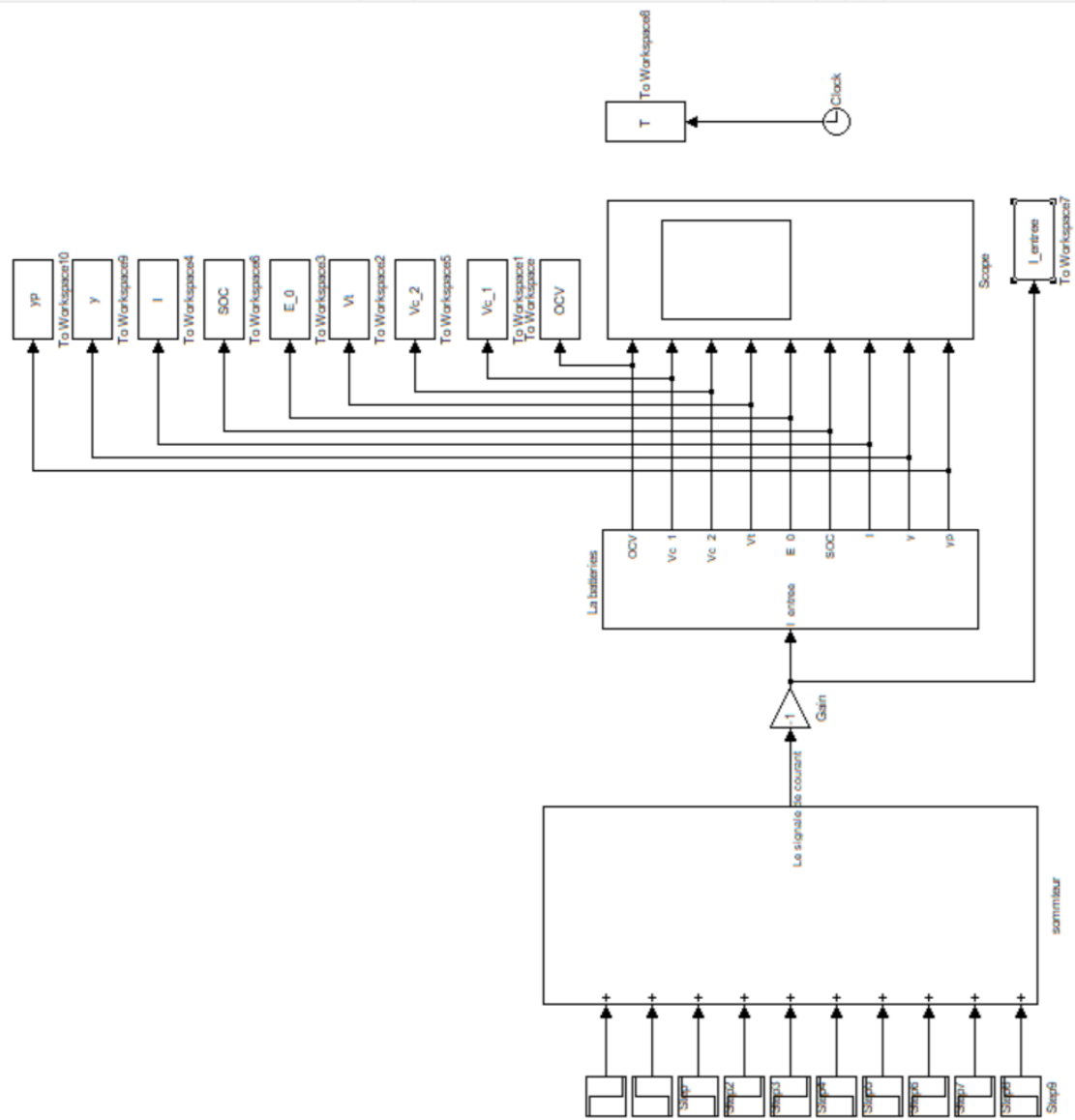


FIGURE I.10 – Schéma de simulation général.

Pour simuler le comportement de la batterie, nous avons généré le courant d'entrée  $I_{entree}$  qui fait apparaître les phases de charge et de décharge.

Cette entrée est illustrée par les figures ci-dessous :

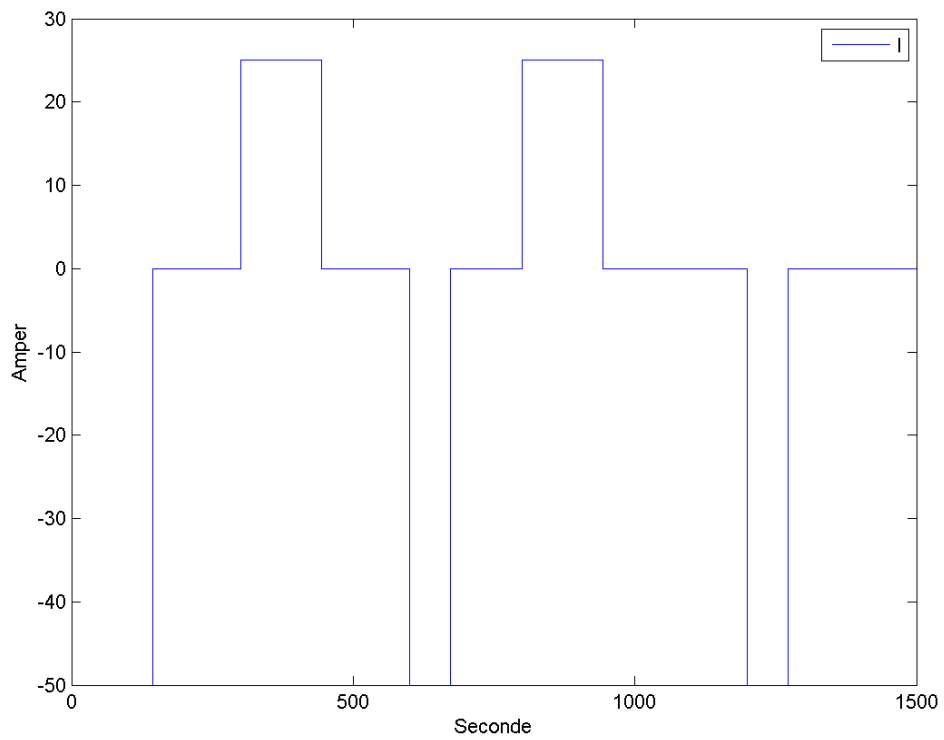


FIGURE I.11 – Courbe de courant  $I(t)$ .

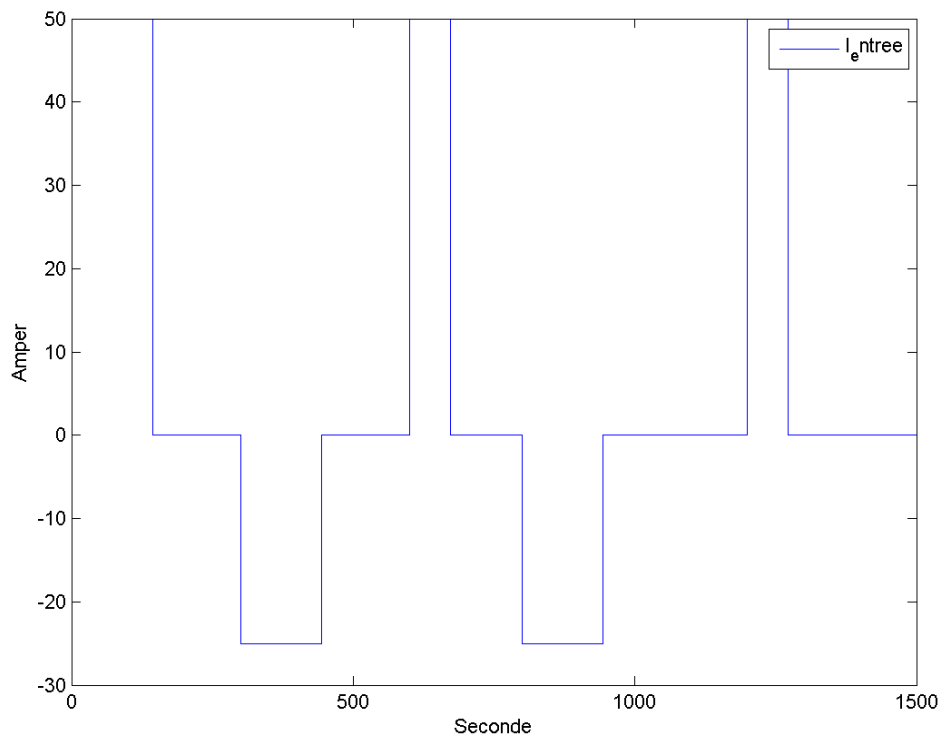


FIGURE I.12 – Courbe de courant  $I_{\text{entrée}}$ .

Les résultats de simulation sont illustrés par les figures ci dessous :

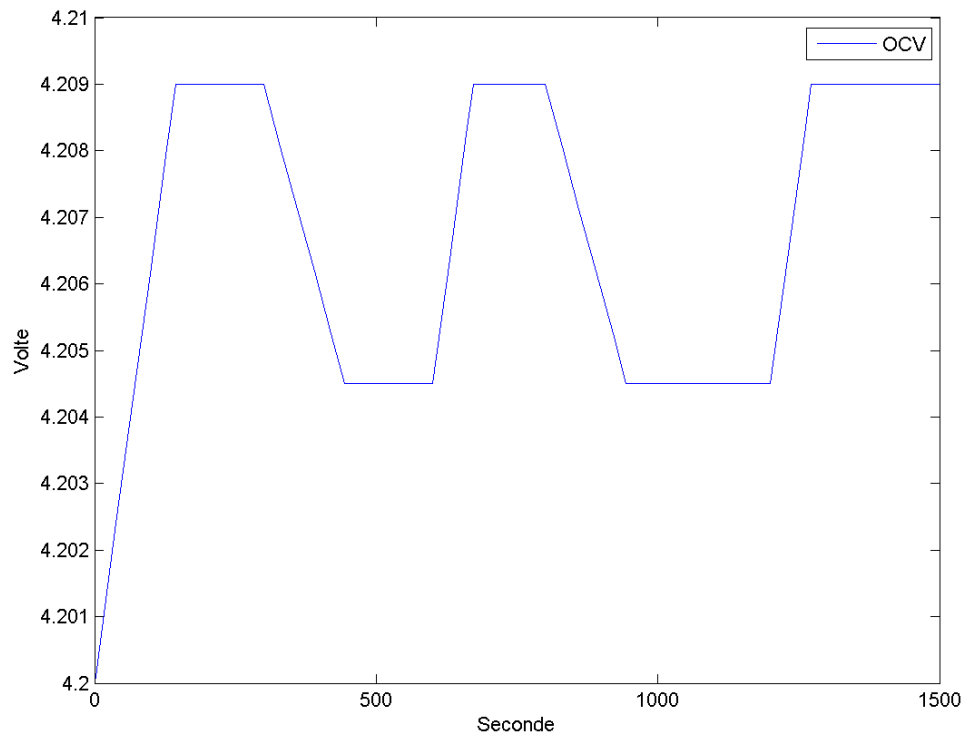


FIGURE I.13 – Courbe de l'OCV ( $V_0$ ).

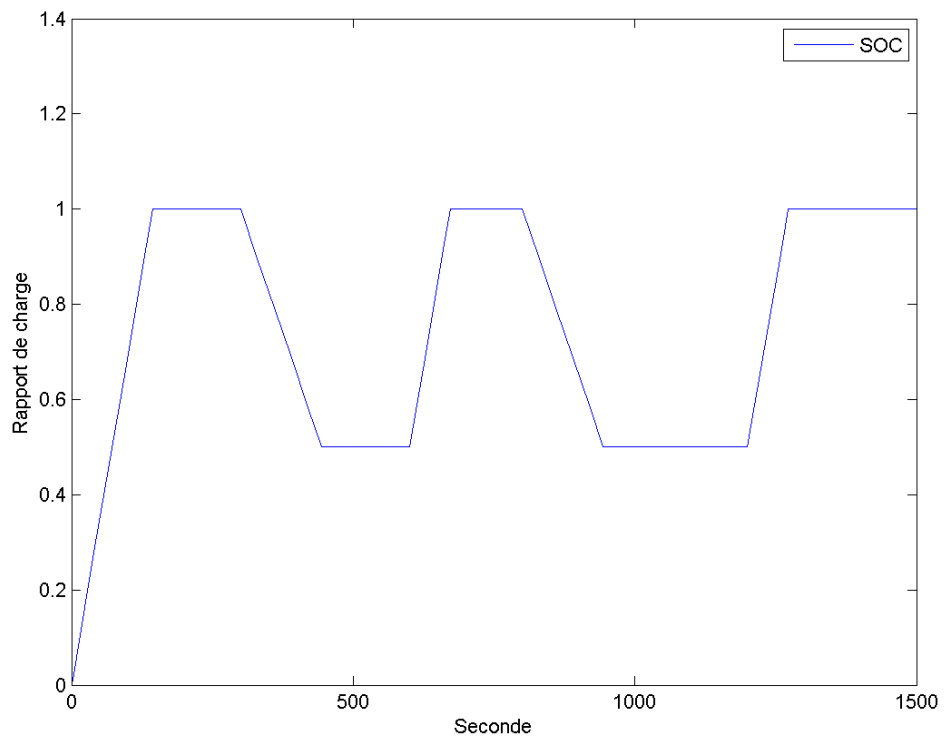


FIGURE I.14 – Courbe de  $SoC$ .

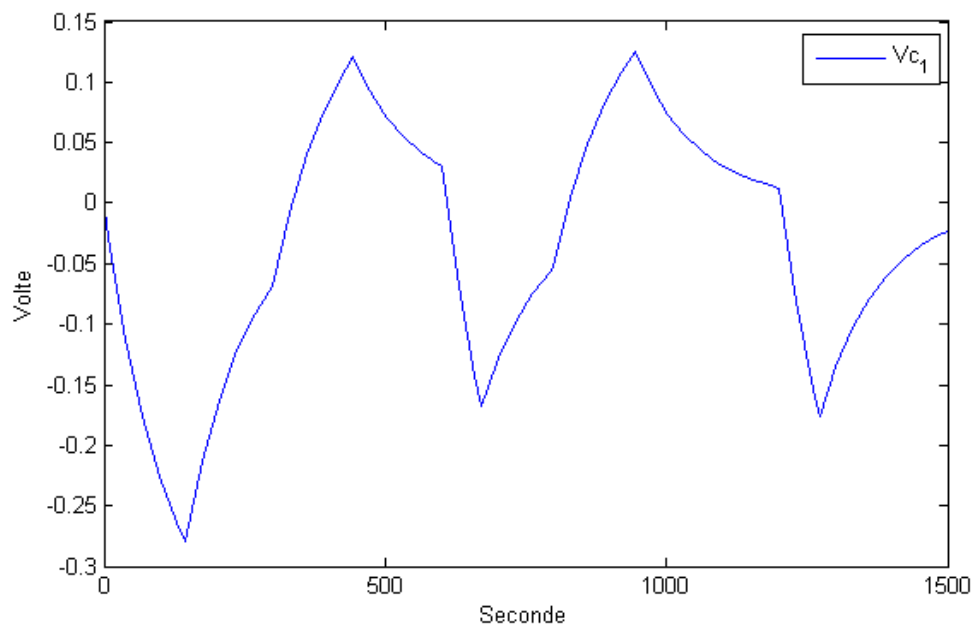


FIGURE I.15 – Courbe de  $V_{C_1}$ .

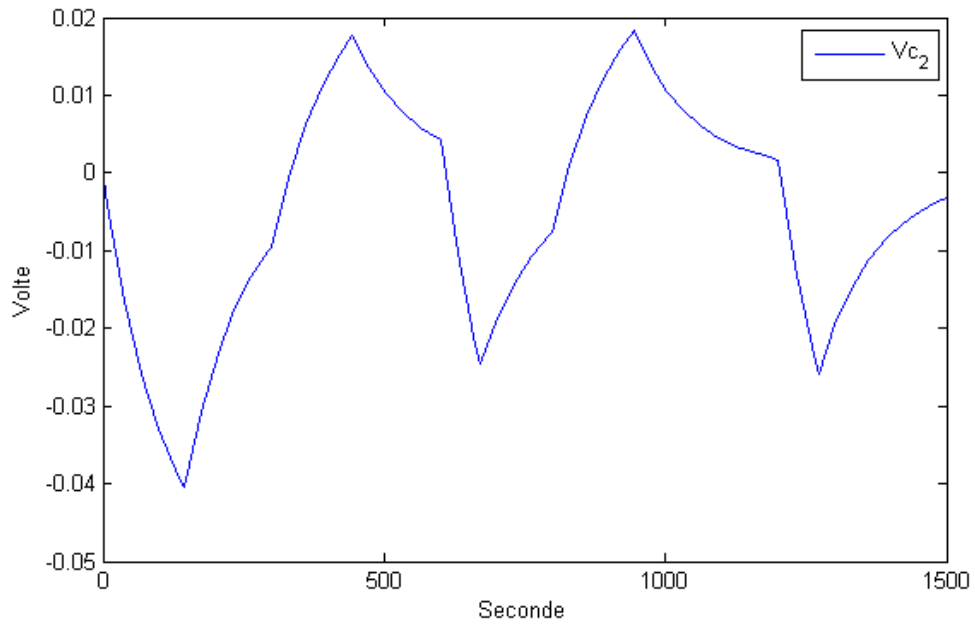


FIGURE I.16 – Courbe de  $V_{C_2}$ .

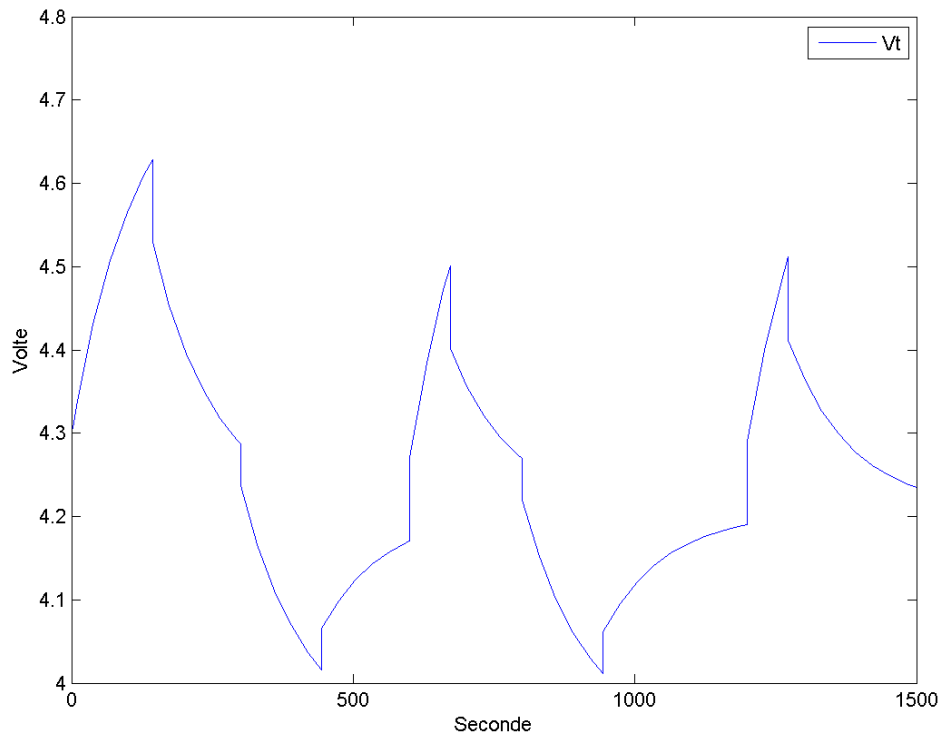


FIGURE I.17 – Courbe de  $V$  ou  $y$ .

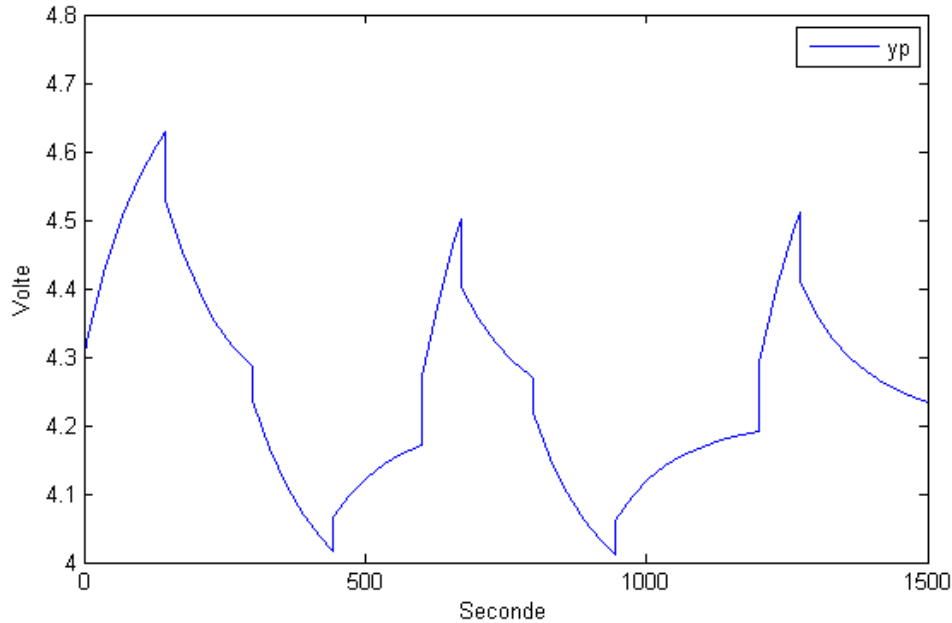


FIGURE I.18 – Courbe de  $y_p$ .

### 3.3 Analyse des résultats

- $I_{\text{entrée}}$  : représente le courant entrant dans la batterie, alimenté par le moteur du véhicule. Ce courant peut prendre trois valeurs principales :
  - Une valeur positive indique que la batterie est en phase de recharge.
  - Une valeur négative signifie que la batterie se décharge, c'est-à-dire qu'elle fournit du courant au système.
  - Lorsque la valeur est zéro, cela indique que la batterie est au repos, lorsqu'elle n'est pas utilisée pour la charge ou la décharge (sans être sollicitée).
- $I$  : correspond au courant circulant dans le circuit de la batterie. C'est en fait le même courant que  $I_{\text{entrée}}$ , mais avec une direction opposée :
  - Une valeur négative indique une décharge.
  - Une valeur positive indique une recharge.
  - Si la valeur est zéro, la batterie est au repos.
- $OCV$  (Open Circuit Voltage) : correspond à la tension à vide de la batterie, c'est-à-dire la tension mesurée lorsque la batterie n'est pas sollicitée par une charge ou une décharge. Initialement nulle, cette tension :
  - Augmente lorsque le courant entrant est positif (recharge).
  - Reste stable lorsque le courant est nul.
  - Diminue lorsque le courant est négatif (décharge).

- *SoC* (State of Charge) : est une mesure de l'état de charge de la batterie, exprimée en pourcentage de la capacité maximale. Le *SoC* varie entre 0 (batterie complètement déchargée) et 1 (batterie entièrement chargée). Il évolue de la manière suivante :
  - Le *SoC* augmente lorsque la batterie se recharge (courant positif).
  - Il diminue lorsque la batterie se décharge (courant négatif).
- $V_{C1}$  et  $V_{C2}$  : représentent les tensions aux bornes des capacités  $C_1$  et  $C_2$ , qui modélisent respectivement les dynamiques lentes et rapides de la batterie. Ces tensions varient selon l'état de la batterie :
  - Lorsque le *SoC* augmente (recharge),  $V_{C1}$  et  $V_{C2}$  prennent des valeurs négatives, car les capacités se déchargent pour permettre l'augmentation de l'état de charge.
  - Lorsque le *SoC* diminue (décharge),  $V_{C1}$  et  $V_{C2}$  deviennent positives, car les capacités se chargent pour compenser la perte de charge.
- $V$  et  $y_p$  : représentent la tension de sortie de la batterie et la sortie du système, respectivement. Comme  $y_p$  suit la même dynamique que  $V$ , leur comportement est le suivant :
  - En phase de recharge, la tension  $V$  (et donc  $y_p$ ) augmente progressivement.
  - En phase de décharge, la tension  $V$  (et  $y_p$ ) diminue.
  - Même lorsque la batterie est au repos, la tension  $V$  (et  $y_p$ ) diminue légèrement en raison des pertes internes et des composants  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_0$ ,  $R_1$ , et  $R_2$ .

## 4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons relevé l'importance des batteries à lithium-ion dans plusieurs applications, en particulier pour les véhicules électriques, en raison de leurs nombreux avantages.

Après avoir décrit brièvement le fonctionnement d'une batterie, nous avons exposé les différents modèles proposés pour décrire mathématiquement ce fonctionnement.

Le modèle de Thévenin du second ordre a été validé sur des essais expérimentaux. Ce modèle sera exploité afin d'élaborer une stratégie d'estimation de l'état de charge de la batterie.

# Chapitre II

## Observateur de Luenberger et filtre de Kalman-Bucy

### 1 Introduction

L'estimation d'état est une problématique centrale en automatique, notamment pour la surveillance et le contrôle des systèmes dynamiques. De nombreux algorithmes ont été développés à cet effet, parmi lesquels l'observateur de Luenberger et le filtre de Kalman se distinguent. Ce chapitre a pour objectif de comparer les performances de ces deux estimateurs sur un système linéaire soumis à des bruits.

Dans un premier temps, nous présenterons les principes de fonctionnement de chacun de ces observateurs. Ensuite, nous mettrons en œuvre une simulation numérique pour évaluer leur efficacité en termes de précision, de vitesse de convergence et de robustesse face au bruit.

### 2 Observateur de Luenberger

Soit un système continu décrit par l'équation d'état déterministe suivante [II.1](#) :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Les vecteurs  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représente le vecteur de commande,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  représente la sortie du système [54](#).

avec :  $A$  c'est la matrice d'évolution de dimension  $(n \times n)$ .

$B$  c'est la matrice d'évolution de dimension  $(n \times m)$ .

$C$  c'est la matrice d'évolution de dimension  $(p \times n)$ .

L'observabilité est la capacité de déterminer si l'état interne d'un système dynamique

peut être reconstruit à partir des sorties observées. En d'autres termes, un système est dit observable si, à partir de ses entrées et de ses sorties, on peut déduire tous les états du système à tout instant.

Le système est observable si les états  $x$  peuvent être déterminés à partir des sorties  $y$ . L'observabilité est cruciale pour la conception d'observateurs, qui est un dispositif permettant d'estimer les états d'un système en utilisant les entrées et les sorties.

Critère d'observabilité : Pour un système linéaire, on peut utiliser la matrice d'observabilité

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Le système est observable si  $O$  est de plein rang (c'est-à-dire, son rang est égal au nombre d'états).

On suppose que le couple  $(A, C)$  est observable.

La théorie de l'observation de Luenberger est basée sur la méthode de la position des pôles. Dans le cas déterministe, l'observateur de Luenberger est décrit par les équations ci-dessous [II.2](#) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Où :

- $\hat{x}(t)$  est l'état estimé.
- $\hat{y}(t)$  est la sortie estimée.

### Dérivation de l'Équation de l'Erreur

Pour obtenir l'équation de l'erreur, nous suivons les étapes suivantes :

- Définition de l'Erreur d'Estimation

L'erreur d'estimation est définie par l'équation ci dessous [II.3](#) :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (\text{II.3})$$

L'objectif est d'analyser la dynamique de cette erreur  $e(t)$ .

— Calcul de la Dérivée de l'erreur

En dérivant l'erreur par rapport au temps, nous obtenons l'équation ci dessous [II.4](#) :

$$\dot{e}(t) = \frac{d}{dt} (x(t) - \hat{x}(t)) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (\text{II.4})$$

— Substitution des Expressions de  $\dot{x}(t)$  et  $\dot{\hat{x}}(t)$

En utilisant les équations [II.1](#) et [II.2](#), nous substituons l'équation ci dessous [II.5](#) :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (Ax(t) + Bu(t)) - (A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t))) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - K(y(t) - \hat{y}(t)) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Les termes  $Bu(t)$  s'annulent, simplifiant l'expression [II.6](#) :

$$\dot{e}(t) = A(x(t) - \hat{x}(t)) - K(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (\text{II.6})$$

— Remplacement de  $y(t)$  et  $\hat{y}(t)$

En utilisant les expressions  $y(t) = Cx(t)$  et  $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$ , nous obtenons :

$$y(t) - \hat{y}(t) = Cx(t) - C\hat{x}(t) = C(x(t) - \hat{x}(t)) = Ce(t) \quad (\text{II.7})$$

— Finalisation de l'équation de l'erreur

En remplaçant cette expression dans l'équation [II.5](#), nous obtenons [II.8](#) :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) - KCe(t) \\ &= (A - KC)e(t) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Ainsi, l'équation de la dynamique de l'erreur est [II.9](#) :

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t) \quad (\text{II.9})$$

Où :

— K est le gain de l'observateur.

La figure [II.1](#) présente le schéma structurel de l'observateur de Luenberger.

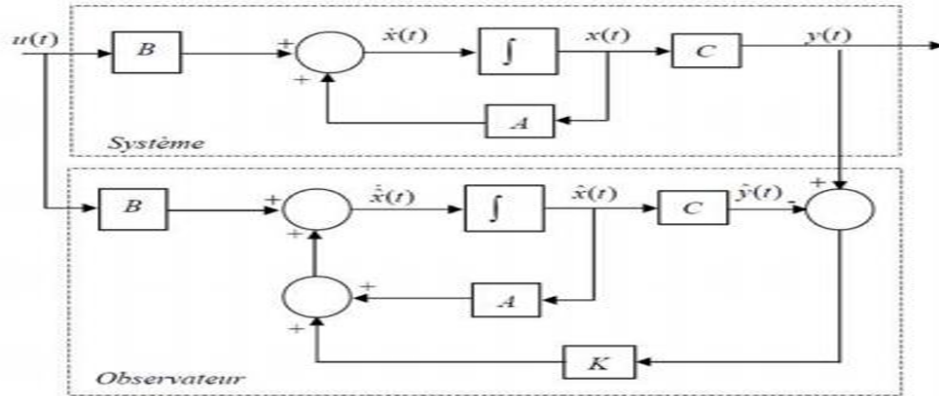


FIGURE II.1 – schéma structural de l'observateur de Luenberger.

En utilisant la méthode de placement des pôles, on choisit simplement le gain  $K$  de l'observateur pour que les valeurs propres de la matrice  $(A - KC)$  soient dans le demi-plan complexe gauche et égales aux valeurs désirées.

Pour ce type d'observateur, on a une grande liberté dans le choix des valeurs propres, mais en pratique, on opte pour une dynamique d'erreur d'estimation plus rapide que celle du système [55].

### 3 Filtre de Kalman-Bucy

Le filtre de Kalman continu linéaire, également appelé filtre de Kalman-Bucy, est un algorithme puissant utilisé pour estimer l'état d'un système dynamique en temps réel, tout en prenant en compte les informations des mesures bruitées et les caractéristiques dynamiques du système. Formulé à l'aide d'équations différentielles et d'équations d'observation linéaires, ce filtre est conçu pour minimiser la variance de l'erreur d'estimation a posteriori, offrant ainsi une estimation optimale dans les systèmes modélisés par des équations linéaires soumises aux bruits. Initialement développé pour le temps discret, il a été étendu au temps continu pour répondre aux besoins de nombreuses applications, telles que la navigation, la robotique, le traitement du signal, le radar et les systèmes de communication [56].

#### 3.1 Rappels sur les variables et signaux aléatoires

##### 3.1.1 Variables aléatoires

Soit  $X$  une variable aléatoire continue qui prend des valeurs de  $\mathbb{R}$ . La fonction de distribution  $F(X)$  relie la probabilité d'un événement que nous observons à un réel  $x$  ( $X < x$ ). On note [57]

$$F(x) = P[X < x] \quad (\text{II.10})$$

La fonction de répartition possède les propriétés suivantes :

1.  $\forall x_1, x_2, P[x_1 \leq X < x_2] = F(x_2) - F(x_1)$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .
3.  $F(x)$  est monotone, non décroissante.

**Remarque 1 :** Variable aléatoire D'autre part, une variable aléatoire  $X$  est discrète si elle prend un nombre fini de valeurs dans  $\mathbb{R}$ . La fonction de distribution correspondante est donc une fonction discrète.

Nous nous concentrons principalement sur les variables aléatoires continues. Les définitions et propriétés présentées ci-dessous peuvent facilement être étendues aux variables aléatoires discrètes.

La densité de probabilité notée  $p(x)$  est définie par :

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (\text{II.11})$$

D'où  $p(x)dx = dF(x) = P[x \leq X < x + dx]$ . La densité de probabilité satisfait la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \quad (\text{II.12})$$

L'espérance mathématique ou moyenne ou encore moment d'ordre 1 est définie par :

$$m_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) \quad (\text{II.13})$$

Le moment d'ordre 2 est défini par

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx \quad (\text{II.14})$$

De manière générale, le moment d'ordre  $k$  est défini par :

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)dx \quad (\text{II.15})$$

Le moment centré d'ordre  $k$  est défini par :

$$E[(X - E[X])^k] \quad (\text{II.16})$$

La variance est le moment centré d'ordre 2 donné par :

$$Var_x = E[(X - E[X])^2] \quad (\text{II.17})$$

On définit l'écart type par :

$$\sigma_x = \sqrt{Var_x} \quad (\text{II.18})$$

La variance mesure la propagation d'une variable aléatoire par rapport à sa moyenne. Les moments d'ordre supérieur ou égal à 3 sont rarement utilisés en raison de la difficulté de leur calcul. Une variable aléatoire gaussienne est complètement définie par sa moyenne  $m$  et son écart type  $\sigma$ . Sa densité de probabilité est donnée par la formule.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{II.19})$$

**Remarque 2 :** Il est facile de montrer que  $E[(X - m)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$ .

### 3.1.2 Vecteurs de variables aléatoires

Considérons un vecteur constitué de  $q$  variables aléatoires :  $X = [X_1 \ X_2 \dots \ X_n]^T$ . On associe la fonction de distribution à ce vecteur [57].

$$F(x_1, x_2, \dots, x_q) = P(X_1 \prec x_1 \text{ et } X_2 \prec x_2 \dots \text{ et } X_q \prec x_q) \quad (\text{II.20})$$

Et la densité de probabilité

$$p(x_1, x_2, \dots, x_q) = \frac{\partial^q F(x_1, x_2, \dots, x_q)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_q} \quad (\text{II.21})$$

On définit

— Moyenne (moment d'ordre 1)

$$E[X] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_q] \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

— Matrice de covariance

$$Cov_x = E[(X - E[X])(X - E[X])^T] \quad (\text{II.23})$$

**Remarque 3 :** La matrice de covariance (variance centrale) est une matrice symétrique dont la dimension ( $q \times q$ ) est définie positive. Si les variables  $X_{i,j} = 1, 2, \dots, q$  sont indépendantes, alors les éléments diagonaux de la matrice de covariance  $Cov_x(i, i)$  montrent la variance de  $X_i$  et les éléments hors diagonale  $Cov_x(i, j)$ ,  $i \neq j$  sont des zéros.

### 3.1.3 Signaux et vecteurs de signaux aléatoires

Un signal aléatoire est un signal qui dépend du temps  $t$  tel que pour un  $t$  fixe il correspond à une variable aléatoire. Notez  $w(t) = [w_1(t) \ w_2(t) \dots \ w_q(t)]^T$  vecteur  $q$  du signal aléatoire  $w_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$ . Ne définit pas [57].

— Moyenne (moment d'ordre 1)

$$m(t) = E[w(t)] = \begin{bmatrix} E[w_1(t)] \\ E[w_2(t)] \\ \vdots \\ E[w_q(t)] \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

— Matrice de variance (moment d'ordre 2)

$$\Phi_{ww}(t, \tau) = E[w(t)w(t + \tau)^T] \quad (\text{II.25})$$

$\Phi_{ww}(t, \tau)$  est une matrice symétrique de dimensions  $q \times q$ , positive définie pour chaque valeur de  $t$  et  $\tau$ . C'est ce qu'on appelle également la fonction d'autocorrélation. En fait, les éléments diagonaux sont les fonctions d'auto corrélation scalaire de chaque  $w_j(t)$ , et les éléments hors diagonale sont les fonctions de corrélation croisée scalaires entre  $w_i(t)$  et  $w_j(t), i \neq j$ .

Un signal aléatoire (vecteur) est dit stationnaire du 2<sup>ème</sup> ordre si sa moyenne est constante  $m(t)=m, \forall t \geq 0$  et sa fonction d'auto corrélation dépend uniquement de  $\tau$ ,  $\Phi_{ww}(t, \tau) = \Phi_{ww}(\tau)$ .

### 3.1.4 Réponse d'un système linéaire soumis à une entrée aléatoire

Dans cette section, nous discutons de deux résultats importants qui sont utiles pour le développement de filtres de Kalman continus et discrets [57].

**Théorème 1** (Système linéaire continu soumis à une entrée aléatoire)

Soit le système linéaire continu suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Mw(t) \quad (\text{II.26})$$

Où  $w(t)$  est un bruit gaussien stationnaire de DSP égal à  $W$ . La réponse  $x(t)$  du système est un signal aléatoire avec une moyenne.

$$m(t) = E[x(t)] = e^{A(t-t_0)}m(t_0) \quad (\text{II.27})$$

Où  $m(t_0)$  est la valeur moyenne initiale de  $x(t)$  et la matrice de covariance.

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T]$$

Solution de l'équation différentielle de Lyapunov.

$$\frac{dP(t)}{dt} = AP(t) + P(t)A^T + MWMT^T \quad (\text{II.28})$$

Avec  $P(t_0)$  la condition initiale.

Si le système est stable (la valeur propre de la matrice  $A$  est à partie réelle négative), alors  $P(t)$  en régime permanent conduit à la solution de la matrice  $P$  dans l'équation variable de Lyapunov.

$$AP + PA^T + MWM^T = 0 \quad (\text{II.29})$$

La version discrète de ce théorème est formulée par le théorème suivant :

**Théorème 2** (Système linéaire discret soumis à une entrée aléatoire).

Soit le système linéaire discret suivant :

$$x(k+1) = A_d x(k) + M_d w(k) \quad (\text{II.30})$$

Où  $w(k)$  est le bruit gaussien centré sur le DSP  $W_d$ . La réponse  $x(k)$  du système est une variable aléatoire de moyenne.

$$m(k) = E[x(k)] = A_d^k m(k_0) \quad (\text{II.31})$$

Où  $m(k_0)$  est la moyenne initiale de  $x(k)$  et de matrice de covariance

$$P(k) = E[(x(k) - m(k))(x(k) - m(k))^T]$$

Solution de l'équation récurrente de Lyapunov discrète.

$$P(k+1) = A_d P(k) + P(k) A_d^T + M_d W_d M_d^T \quad (\text{II.32})$$

Avec  $P(k_0)$  la condition initiale.

Si le système est stable (les valeurs propres de la matrice  $A_d$  sont enfermées dans un cercle de rayon unités), alors  $P(k)$  en régime permanent tend vers la solution réelle de la matrice  $P$  de la variable indépendante de Lyapunov.

$$P = A_d P A_d^T + M_d W_d M_d^T \quad (\text{II.33})$$

### 3.2 Version continue du filtre de Kalman : Filtre de Kalman Bucy

Considérons le système linéaire en temps continu ci-dessous souvent désigné par le modèle stochastique de Kalman [57] :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Où  $w(t)$  et  $v(t)$  sont respectivement les bruits internes et les bruits de mesures. Nous

posons les hypothèses suivantes :

1. Hypothèse 1 : La paire  $(A,C)$  est détectable.

2. Hypothèse 2 : Les signaux  $w(t)$  et  $v(t)$  sont respectivement un bruit blanc gaussien stationnaire centré indépendant (moyenne nulle) et un DSP,  $W$  et  $V$  avec :

$$\begin{aligned} E[w(t)w(t+\tau)^T] &= W\delta(\tau) \\ E[v(t)v(t+\tau)^T] &= V\delta(\tau) \\ E[w(t)v(t+\tau)^T] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

3. Hypothèse 3 :  $V$  est une matrice symétrique définie positive inversible. Si le bruit  $w(t)$  n'est pas centré, c'est-à-dire qu'il a une valeur moyenne non nulle  $m_w(t)$  ( $m_w(t) \neq 0$ ), l'introduction est l'écart de la réponse de l'équation d'état, et le filtre de Kalman introduit également un biais dans les estimations. Cela peut être résolu en réécrivant le système comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \begin{bmatrix} B & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ m_w(t) \end{bmatrix} + M\tilde{w}(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

Avec  $\tilde{w}(t) = w(t) - m_w(t)$  et donc devient un bruit centré. Dans ce qui suit, on suppose que le bruit est centré.

### 3.3 Structure du filtre de Kalman Bucy

La structure générale du filtre de Kalman-Bucy est décrite par le modèle d'état ci-dessous [57] :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_f\hat{x}(t) + B_fu(t) + K_fy(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

$K_f$  est le gain du filtre. En tenant compte des équations du système et celles du filtre, l'erreur d'estimation définie par  $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{e}_x(t) = (A - K_fC)e_x(t) + (A - K_fC - A_f)\hat{x}(t) + (B - B_f)u(t) + Mw(t) - K_fv(t) \quad (\text{II.38})$$

Notez que l'erreur d'estimation dépend des entrées aléatoires. Il y a deux objectifs à atteindre. D'une part, nous devons obtenir une erreur d'estimation non biaisée en régime permanent, c'est-à-dire avec une moyenne statistique nulle, et d'autre part, il faut aussi veiller à la plus petite variance possible pour éviter une forte variance. Les bruits  $w(t)$  et  $v(t)$  sont centrés, c'est-à-dire de moyenne nulle. Ça viendra

$$E[\dot{e}_x(t)] = (A - K_fC)E[e_x(t)] + (A - K_fC - A_f)E[\hat{x}(t)] + (B - B_f)u(t) \quad (\text{II.39})$$

Le premier objectif est réalisé si les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A_f &= A - K_f C \\ B_f &= B \end{aligned} \tag{II.40}$$

$$A - K_f C \text{ matrice stable} \tag{II.41}$$

sont satisfaites. Avec ces relations nous obtenons

$$E[\dot{e}_x(t)] = (A - K_f C)E[e_x(t)] \tag{II.42}$$

La solution est donc

$$E[e_x(t)] = e^{(A - K_f C)(t - t_0)} E[e_x(t_0)] \tag{II.43}$$

Il est clair que si la matrice  $(A - K_f C)$  est stable alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[e_x(t)] = 0$ . Ainsi le premier objectif est atteint. Le filtre de Kalman s'écrit alors

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - K_f C)\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f y(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{II.44}$$

Il y a deux termes dans l'équation d'état. Le premier terme  $A\hat{x}(t) + Bu(t)$  est le terme de prédiction du modèle, et le deuxième terme  $K_f(y(t) - \hat{y}(t))$  représente la mise à jour ou la correction basée sur les mesures (rééchantillonnage).

### 3.4 Estimateur à variance minimale

Le gain  $K_f$  est calculé en fonction de la confiance que l'on a dans le modèle (exprimée en densité spectrale  $W$ ) par rapport à la confiance que l'on a dans la mesure (exprimée en densité spectrale  $V$ ). Si le modèle est très bon ( $W$  très petit) et la mesure très bruitée ( $V$  très grand), le gain  $K_f$  doit être très faible. En fait, parmi tous les gains  $K_f$  satisfaisant la limite [II.41](#), celui qui minimise la variance de l'erreur dans l'estimation de l'état du système  $e_x(t)$  est choisi. Rappelons que  $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  est une variable aléatoire vectorielle gaussienne centrée (non entraînée) (avec  $n$  composantes). La nature gaussienne de cette variable permet d'affirmer que si la variance de l'erreur d'estimation est effectivement minimisée, alors  $\hat{x}(t)$  est bien la meilleure estimation de  $x(t)$  [\[58\]](#).

#### 3.4.1 Solution générale

On cherche  $K_f$  qui minimise le critère d'optimisation suivant :

on a :  $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$J(t) = \sum_{i=1}^n E[e_{xi}(t)^2] = E[e_x^T(t)e_x(t)] \tag{II.45}$$

$$= \text{trace}E[e_x(t)e_x^T(t)] \quad (\text{II.46})$$

$$= \text{trace}P(t) \quad (\text{II.47})$$

$P(t)=E[(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T]$  : matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

En reportant [II.40](#) dans [II.49](#), l'évolution de  $\varepsilon(t)$  est décrite par l'équation d'état :

$$\dot{\varepsilon}_x(t) = (A - K_f C)e_x(t) + \begin{bmatrix} M & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.48})$$

avec :

$$E \left[ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(t+\tau) & v^T(t+\tau) \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} W_{q \times q} & 0_{q \times p} \\ 0_{p \times q} & V_{p \times p} \end{bmatrix} \delta(\tau)$$

Ainsi, nous pouvons appliquer le Régime permanent du filtre de Kalman et [II.51](#), on conclut que la covariance de l'erreur d'estimation  $P(t)$  obéit à l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= (A - K_f C)P(t) + P(t)(A - K_f C)^T + \begin{bmatrix} M & -K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^T \\ -K_f^T \end{bmatrix} \\ &= (A - K_f C)P(t) + P(t)(A - K_f C)^T + MWMT + K_f V K_f^T \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

Pour minimiser la trace de  $P(t)$  par rapport à  $K_f$ , il suffit de minimiser la trace de  $\frac{dP(t)}{dt}$ . En utilisant les propriétés jacobiniennes de la trace et de la trace matricielle, il est facile de montrer que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\text{trace}\dot{P}(t))}{\partial K_f} &= -P(t)C^T - P(t)C^T + 2K_f V \\ \implies K_f(t) &= P(t)C^T V^{-1} \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

En reportant [II.50](#) dans [II.49](#), nous obtenons :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T V^{-1} C P(t) + MWMT \quad (\text{II.51})$$

Cette équation différentielle de Riccati doit être intégrée et initialisée à  $P(t_0)$ , ce qui reflète la confiance que nous avons dans l'initialisation du filtre à  $\hat{x}(t_0)$  :

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - \hat{x}(t_0))(x(t_0) - \hat{x}(t_0))^T]$$

On peut partir de  $P(t)$  et de l'équation [II.50](#), nous obtenons la confirmation  $K_f$ . Le filtre de Kalman est donc stationnaire. Les équations [II.44](#), [II.50](#) et [II.51](#) forment les équations du filtre de Kalman continu à intégrer par l'initialisation  $\hat{x}(t)(t_0)$  et  $P(t_0)$ . L'intégration de [II.51](#) et le calcul de  $K_f$  [II.50](#) peuvent être effectués aussi bien en ligne que hors ligne. Dans ce dernier cas, la loi  $K_f$  doit être stockée dans la calculatrice. En

pratique, la mise en œuvre du filtre de Kalman s'effectue dans un calculateur numérique et donc en temps discret. On peut alors discrétiser l'équation d'état [II.44](#) du filtre de Kalman (intégrer à l'aide d'une formule rectangulaire ou trapézoïdale, utiliser une transformation bilinéaire si seul l'état stationnaire est intéressant, etc.). Enfin, les équations du filtre sont entièrement définies par les données du problème, c'est-à-dire les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $M$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $W$  et  $V$  [\[58\]](#).

### 3.4.2 Régime permanent du filtre de Kalman

Système persistant, une fois l'état transitoire dû aux erreurs d'initialisation terminé, l'erreur d'estimation devient un signal aléatoire fixe. On donc [\[58\]](#) :

$$\dot{P}(t) = 0$$

$P$ , une matrice constante positive représentant la covariance de l'erreur d'estimation en régime permanent, est une solution positive de l'équation algébrique de Riccati :

$$AP + PA^T - PC^T V^{-1} CP + MWM^T = 0 \quad (\text{II.52})$$

Le gain du filtre  $K_f = PC^T V^{-1}$  devient également constant. Nous pouvons vérifier que la positivité de  $P$  indique la stabilité du filtre, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de la matrice  $A - K_f C$  ont une partie réelle négative (d'après le système constant de Lyapounov, équation [II.49](#)).

On trouve dans [\[59\]](#) une méthode générale pour trouver la solution positive de l'équation de Riccati. Sur le plan pratique, sachez que de tels solveurs sont disponibles dans les logiciels de CAO d'automatique : la fonction `le` de Matlab ou Scilab, qui donne directement  $P$  et  $K_f$  (voir aussi Traitements Matlab et fonctions Kalman).

### 3.4.3 Réglage du filtre de Kalman

Pour un certain modèle (matrices  $A$ ,  $B$ ,  $M$ ,  $C$ ,  $D$ ), le gain du filtre  $K_f$  et son évolution en fonction du temps ne dépend que de [\[58\]](#) :

- $W$  : la confiance que l'on a dans l'équation d'état.
- $V$  : la confiance que l'on a dans la mesure.
- $P(t_0)$  : la confiance que l'on a dans l'initialisation.

En régime permanent, si le système et les bruits sont stationnaires, le gain de Kalman  $K_f$  est constant et sa valeur ne dépend plus que de  $W$  et  $V$ . Le gain  $K_f$  et la réponse à l'erreur d'estimation  $\varepsilon(t)$  dépendent du poids relatif de  $P(t_0)$  par rapport à  $V$  (en régime transitoire) et du poids relatif de  $W$  par rapport à  $V$  (en régime permanent). En effet, il est facile de vérifier que le gain  $K_f$  (et donc le filtre) ne change pas en multipliant les trois matrices  $W$ ,  $V$  et  $P(t_0)$  par une constante  $\alpha$ . En revanche, la covariance de

l'erreur d'estimation  $P$  est également multipliée par  $\alpha$ . Ainsi, il faut s'assurer que ces 3 matrices sont réalistes si l'on veut analyser  $P$  pour évaluer la qualité de l'estimation et conclure, par exemple : la probabilité de la  $i$ ème composante de l'état  $x_i(t)$  est de 95%. Implique  $\hat{x}_i(t) - 2\sqrt{P_{(i,i)}(t)}$  et  $\hat{x}_i(t) + 2\sqrt{P_{(i,i)}(t)}$  (une propriété des variables gaussiennes). En pratique, il faut donc valider le filtre de Kalman avec un modèle de validation qui prend en compte des bruits de mesure réalistes et modélise principalement, le plus précisément possible, les perturbations (non-linéarité, etc.) que l'on a ajoutées avec le bruit. Dans le modèle de Kalman.

Quelle que soit la configuration, on peut être sûr que la variance de l'erreur d'estimation  $P(t)$  est toujours inférieure à la variance du bruit spatial se propageant dans l'équation d'état (donnée par  $\dot{P}=AP + PA^T + MWM^T$ ) et la variance de . L'erreur d'estimation de la sortie sans bruit  $y_p=Cx+Du$ , c'est-à-dire  $CP(t)C^T$ , est toujours inférieure à la variance du bruit de mesure (qui est constamment infinie, mais cette remarque n reste valable). Et aussi plus important séparément. Par conséquent, il est préférable d'utiliser  $\hat{y}_p=C\hat{x} + Du$  plutôt que la mesure brute  $y$  pour estimer la véritable performance du système  $y_p$ . On pourra s'appuyer sur les compromis suivants pour régler qualitativement la réponse de l'erreur d'estimation.

**Effet de  $P(t_0)$  par à rapport  $V$  :** Dans l'état transitoire, l'erreur d'estimation initiale 0 est corrigée plus rapidement (et le gain de Kalman est plus grand) car  $P(t_0)$  est grand par rapport à  $V$ . Mais l'estimation est alors contaminée par le bruit de mesure, sur lequel nous sommes très dépendants.

**Effet  $W$  par rapport  $V$  :** Le gain stable  $K_f$  de  $V$  est très faible et l'estimation très douce lorsque  $W$  est très petit par rapport à  $V$  (on fait confiance au modèle). En revanche, si le modèle est affecté par une perturbation que l'on a sous-estimée en réduisant trop  $W$ , que l'estimation ne suit pas, ou qu'elle met beaucoup de temps à se réajuster, la variance de l'erreur d'estimation  $P$  n'est pas non plus représentative de cette perturbation. Ces comportements sont illustres sur l'exemple suivant qui, bien qu'étant très simple (modèle du premier ordre), permet de dégager des conclusions qui restent valables sur des cas plus complexes (continus ou discrets).

### 3.4.4 Les 3 bacs interconnectés

Le système hydraulique a trois bacs interconnectés représentés sous la figure [II.2](#)

Examinons l'ensemble de ces équations différentielles décrivant le débit dans les 3 bacs interconnectés.

Soient  $S_1, S_2$  et  $S_3$  les surfaces respectives des bacs 1, 2 et 3, et  $x_1, x_2$  et  $x_3$  les hauteurs respectives des bacs 1, 2 et 3, et  $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}$  et  $\frac{dx_3}{dt}$  sont les variations des niveaux d'eau dans chaque bac ,  $q_{12}(t)$  le débit entrant du bac 1 vers le bac 2,  $q_{s1}(t)$  et  $q_{s2}(t)$  les débits sortants des bacs 1 et 2,  $q_{23}(t)$  le débit du bac 2 vers le bac 3,  $q_{s3}(t)$  le débit sortant du bac 3, et  $u(t)$  le débit d'entrée dans le système. Les équations différentielles s'écrivent alors :

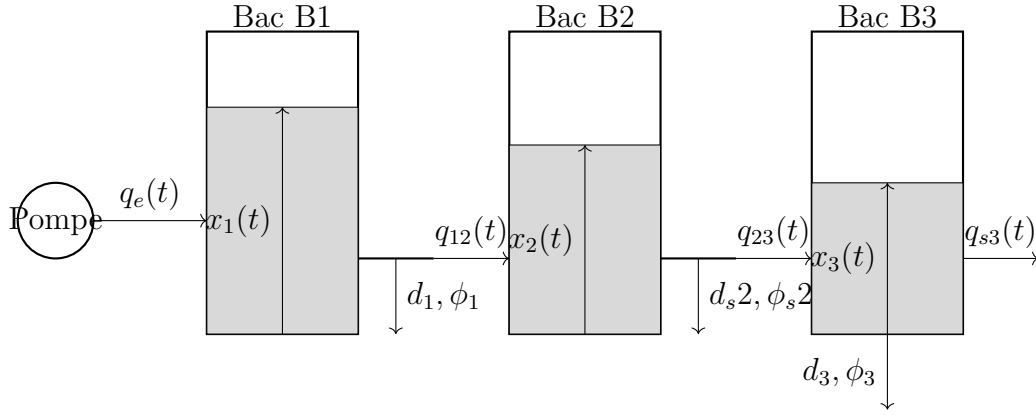


FIGURE II.2 – Système à trois bacs.

$$S_1 \frac{dx_1}{dt} = u(t) - q_{12}(t)$$

$$S_2 \frac{dx_2}{dt} = q_{12}(t) - q_{s2}(t) - q_{23}(t)$$

$$S_3 \frac{dx_3}{dt} = q_{23}(t) - q_{s3}(t)$$

Ces équations traduisent que la variation des niveaux d'eau dans chaque bac, qui est égale à la différence entre les débits entrants et sortants. Ensemble, ce système d'équations différentielles du premier ordre permet de modéliser le comportement dynamique du système à 3 bacs interconnectés, en reliant les niveaux d'eau, les débits et les surfaces des bacs.

Par ailleurs, voici l'analyse du système hydraulique à 3 bacs communicants, en utilisant les lois de Bernoulli :

Équations de Bernoulli pour chaque bac : Bac 1 (B1) :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g x_1 = \text{constante}$$

Bac 2 (B2) :

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g x_2 = \text{constante}$$

Bac 3 (B3) :

$$P_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g x_3 = \text{constante}$$

Loi de Bernoulli sur les débits : Débit entrant dans B1 :  $Q_e(t)$  Débits entre les bacs :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \alpha_d \phi_1 \sqrt{2g(x_1 - x_2)}$$

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \alpha_d \phi_2 \sqrt{2g(x_2 - x_3)}$$

$$Q_{3 \rightarrow \text{sortie}} = \alpha_d \phi_{s3} \sqrt{2gx_3}$$

Conservation des débits :

$$Q_e(t) = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{3 \rightarrow \text{sortie}} + p_1(t)$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = Q_{2 \rightarrow 3} + p_2(t)$$

$$Q_{2 \rightarrow 3} = Q_{3 \rightarrow \text{sortie}} + p_3(t)$$

Autres équations : Hauteurs maximales :  $x_1, x_2, x_3 \leq 50$  cm. Débits maximaux :  $Q_e(t) \leq 140$  L/h,  $Q_0 = 100$  L/h. Sections effectives des bacs :  $S_1 = S_2 = S_3 = 1,3 \times 10^3$  mm<sup>2</sup>. Diamètres des orifices :  $d_1 = 7,2$  mm,  $d_2 = 5,4$  mm,  $d_3 = 3,5$  mm. Coefficient de débit :  $\alpha_d = 0,72$  s<sup>-0,5</sup>.

Ce système d'équations décrit complètement le comportement du système hydraulique à 3 bacs communicants. Ce qui permettra de modéliser et d'analyser le fonctionnement de ce système.

Avec l'entrée de commande notée  $\mathbf{u}(t)$  au lieu de  $\mathbf{w}(t)$ , la fonction  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_e(t))$  s'écrit :

$$f(x, q_e) = \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{S_1} (q_e - a_{12} \sqrt{(x_1(t) - x_2(t))}) \\ \frac{1}{S_2} (a_{12} \sqrt{(x_1(t) - x_2(t))} - a_{s2} \sqrt{x_2(t)} - a_{23} \sqrt{(x_2(t) - x_3(t))}) \\ \frac{1}{S_3} (a_{23} \sqrt{(x_2(t) - x_3(t))} - a_{s3} \sqrt{x_3(t)}) \end{array} \right] \quad (\text{II.53})$$

Où :

- $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$  est le vecteur d'état.
- $\mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_e(t)$  est l'entrée de commande.
- $S_1, S_2, S_3$  sont les sections effectives des bacs.
- $a_{12}, a_{s2}, a_{23}, a_{s3}$  sont des coefficients liés aux orifices.

Le vecteur  $f(x, q_e)$  est la représentation de notre système, qui est non linéaire. On linéariser notre modèle en ayant recours à la Jacobienne. Cette linéarisation est possible uniquement autour du point d'équilibre. Matrice d'évolution  $A(x)$  :

$$A(x) = \frac{\partial f(x, u = q_e)}{\partial x} \quad (\text{II.54})$$

Donc la matrice  $A(x)$  aura la forme :

$$A(x) = \begin{bmatrix} -\frac{a_{12}\sqrt{\frac{\kappa_1}{x_1-x_2}}}{S1} & \frac{a_{12}\sqrt{\frac{\kappa_1}{x_1-x_2}}}{S1} & 0 \\ \frac{a_{12}\sqrt{\frac{\kappa_1}{x_1-x_2}}}{S2} & -\frac{a_{32}\sqrt{\frac{1}{x_2}}-a_{23}\sqrt{\frac{1}{x_2-x_3}}}{S2} & \frac{a_{23}\sqrt{\frac{1}{x_2-x_3}}}{S2} \\ 0 & \frac{a_{23}\sqrt{\frac{1}{x_2-x_3}}}{S3} & -\frac{a_{53}\sqrt{\frac{1}{x_3}}}{S3} \end{bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

Avec :

- Le niveau d'équilibre du bac 1 nommé  $x_{10} = 0.2948m$ .
- Le niveau d'équilibre du bac 2 nommé  $x_{20} = 0.2814m$ .
- Le niveau d'équilibre du bac 3 nommé  $x_{30} = 0.2392m$ .

Matrice de commande  $B(x, t)$  :

$$B(x) = \frac{\partial f(x, q_e)}{\partial q_e} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.56})$$

Matrice de sortie  $C(x)$  :

$$C(x) = [0 \quad 0 \quad 1] \quad (\text{II.57})$$

Matrice de connexion directe entrée sortie  $D(x)$  :

$$D(x) = 0 \quad (\text{II.58})$$

Résultats numériques concrets :

Les valeurs des paramètres de votre système ont les valeurs suivantes :

- $S1, S2, S3$  : les sections effectives des bacs.
- $a_{12}, a_{32}, a_{23}, a_{53}$  : les coefficients liés aux orifices.
- $x_1, x_2, x_3$  : les niveaux dans les 3 bacs.

Calculer numériquement les matrices d'évolution  $A(x)$ , de commande  $B(x, t)$ , d'observabilité  $O(x, t)$  et de passage de l'entrée à la sortie  $C(x, t)$ .

La matrice d'évolution  $A(x)$  est obtenue en remplaçant les valeurs de  $x_1, x_2, x_3$  par  $x_{10}=0.2948, x_{20}=0.2814, x_{30}=0.2392$  dans l'équation II.55 :

$$A = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0.7071 & -0.8062 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.7071 \end{bmatrix} \quad (\text{II.59})$$

Matrice de commande  $B(x)$  :

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.60})$$

Matrice d'observabilité  $C(x)$  :

$$C = [0 \quad 0 \quad 1] \quad (\text{II.61})$$

La matrice  $A$  est une matrice instable et pour remédier, nous avons fait un placement de pôles. Nous considérons la matrice en boucle fermée  $\tilde{A}$  donner par [II.62](#) :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3.7707 & -9.0934 & -41.8419 \\ 0.4319 & -0.5685 & 0.1367 \\ 0 & 0.1367 & -0.1608 \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

### 3.5 Simulation sans bruit

La simulation de l'observateur de Luenberger et du filtre de Kalman sans bruit, ce qui correspond à un cas idéal dans lequel ni le système ni la mesure ne sont affectés par du bruit. Cela simplifie l'analyse et permet de comparer l'efficacité des deux méthodes d'estimation dans un environnement parfaitement contrôlé.

— L'équation [II.64](#) représente le système de l'observateur de Luenberger.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_L = (\tilde{A} - K_L C)\hat{x}_L + K_L y \\ \hat{y}_L = C\hat{x}_L \end{cases} \quad (\text{II.63})$$

$\hat{x}_L$  est le vecteur d'état estimé de l'observateur de Luenberger écrit par l'équation [II.64](#).

$$\hat{x}_L = [ \hat{x}_{1L} \quad \hat{x}_{2L} \quad \hat{x}_{3L} ]^T \quad (\text{II.64})$$

$K$  le gain de l'observateur de Luenberger, sa valeur est :

$$K = \begin{bmatrix} 34.4680 \\ -16.5248 \\ 1.5000 \end{bmatrix} \quad (\text{II.65})$$

— L'équation [II.66](#) représente le système de filtre de Kalman.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_K = (\tilde{A} - K_f C)\hat{x}_K + K_f y \\ \hat{y}_K = C\hat{x}_K \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

$\hat{x}_K$  et le vecteur d'état estimé de filtre de Kalman décrit par l'équation [II.67](#).

$$\hat{x}_K = \begin{bmatrix} \hat{x}_{1K} & \hat{x}_{2K} & \hat{x}_{3K} \end{bmatrix}^T \quad (\text{II.67})$$

$K_f$  le gain de filtre de Kalman, sa valeur est :

$$K_f = \begin{bmatrix} -0.6346 \\ -0.1977 \\ 0.1072 \end{bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

$P$  est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, sa valeur est :

$$P = \begin{bmatrix} 0.4837 & 0.0898 & -0.0635 \\ 0.0898 & 0.0688 & -0.0198 \\ -0.0635 & -0.0198 & 0.0107 \end{bmatrix}$$

La valeur de  $K_f$  le gain du filtre :

$W$  est la matrice de covariance du bruit de processus, sa valeur est :

$$W = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$V$  est la matrice de covariance du bruit de mesure, qui est d'amplitude 0.1.

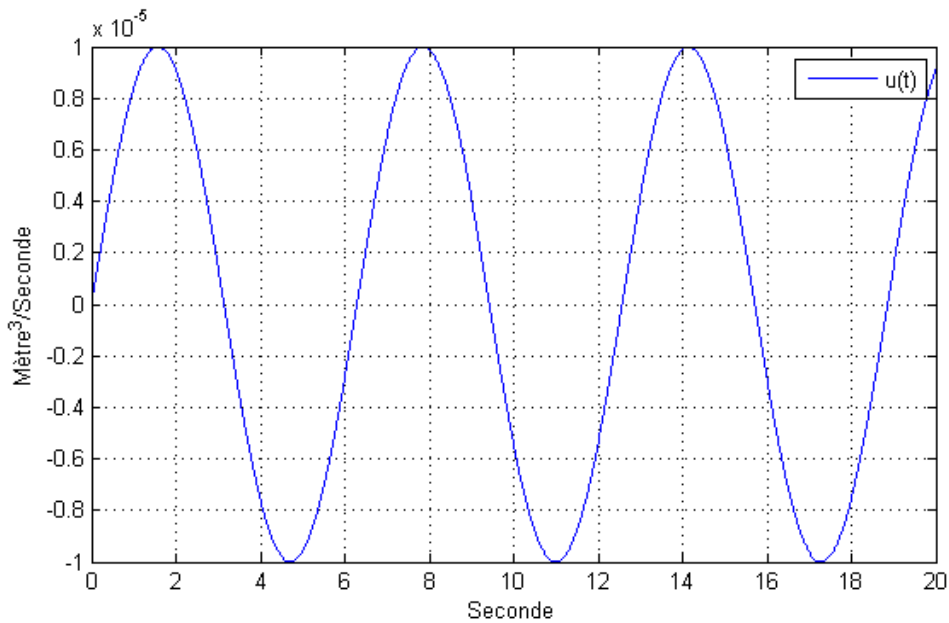


FIGURE II.3 – La variation du débit d’entrée.

La figure [II.3](#) représente  $u(t)$  qui est la variation du débit d’entrée. Il doit être sous forme d’une petite variation autour du point d’équilibre ( $1.5 * 10e - 5 \text{Mètre}^3/\text{Seconde}$ ) et cette dernière ne doit pas avoir une valeur inférieure à  $-1.5 * 10e - 5 \text{Mètre}^3/\text{Seconde}$  sinon la valeur négative risque de représenter une aspiration d’eau et commencer à vider les blocs.

Pour ces raisons, le choix de l’entrée s’est porté sur une entre variable et qui sera autour du point d’équilibre (le signal est une sinusoïde d’amplitude 0.00001).

La figure [II.4](#) illustre la variable du niveau  $x_1$  du bac 1 et de ses estimés  $\hat{x}_{1L}$  et  $\hat{x}_{1K}$  obtenues respectivement par l’observateur de Luenberger et par le filtre de Kalman en l’absence des bruits.

Nous remarquons que les estimés  $\hat{x}_{1L}$  et  $\hat{x}_{1K}$  sont proche ([II.5](#)) de la variable réelle  $x_1$  et ce après un régime transitoire. Dans le régime transitoire, environ 0 et 7s, nous remarquons des dépassements (pics) dus aux conditions initiales.

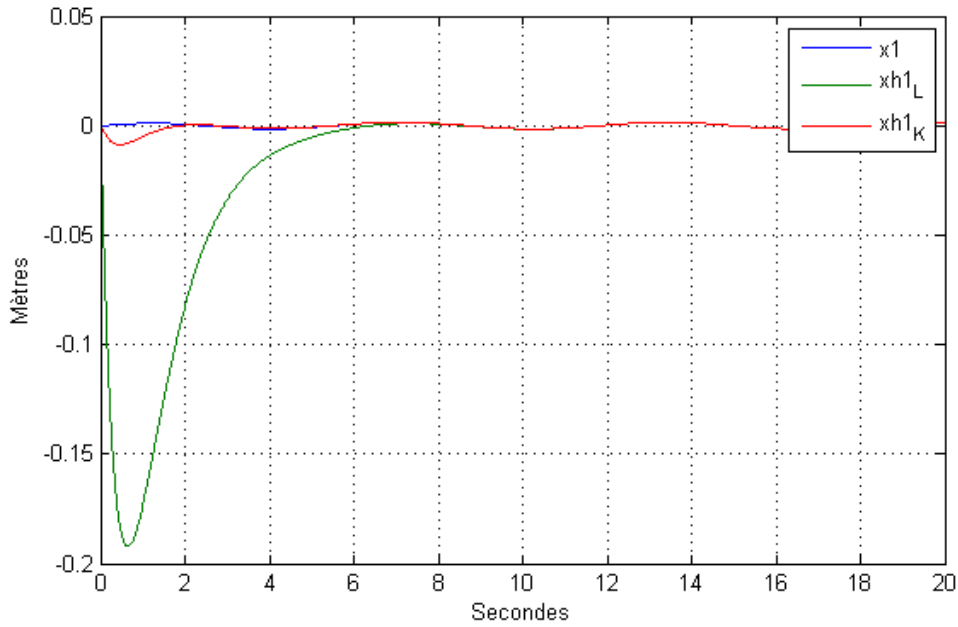


FIGURE II.4 – Courbe de  $x_1$  (en bleu) et des estimés  $\hat{x}_{1L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{1K}$  (en rouge) en absence du bruit.

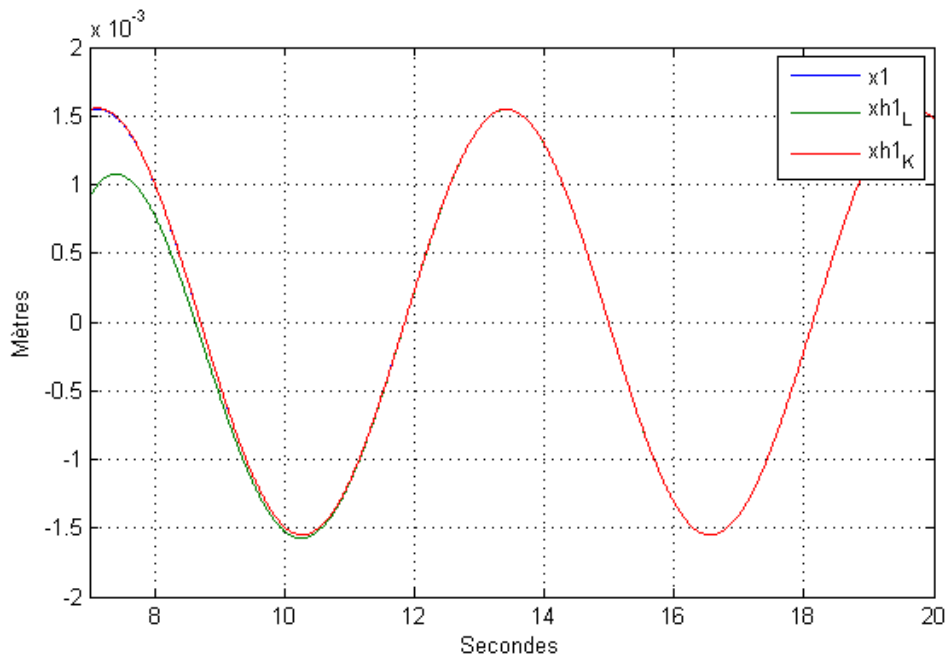


FIGURE II.5 – Courbe de  $x_1$  (en bleu) et des estimés  $\hat{x}_{1L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{1K}$  (en rouge) en absence du bruit en régime permanent.

Les mêmes conditions peuvent être prises pour deux autres variables  $x_2$  et  $x_3$  dont l'évolution des variables réelles et de leurs estimés (II.7, II.9) sont illustrées par les figures II.6 et II.8

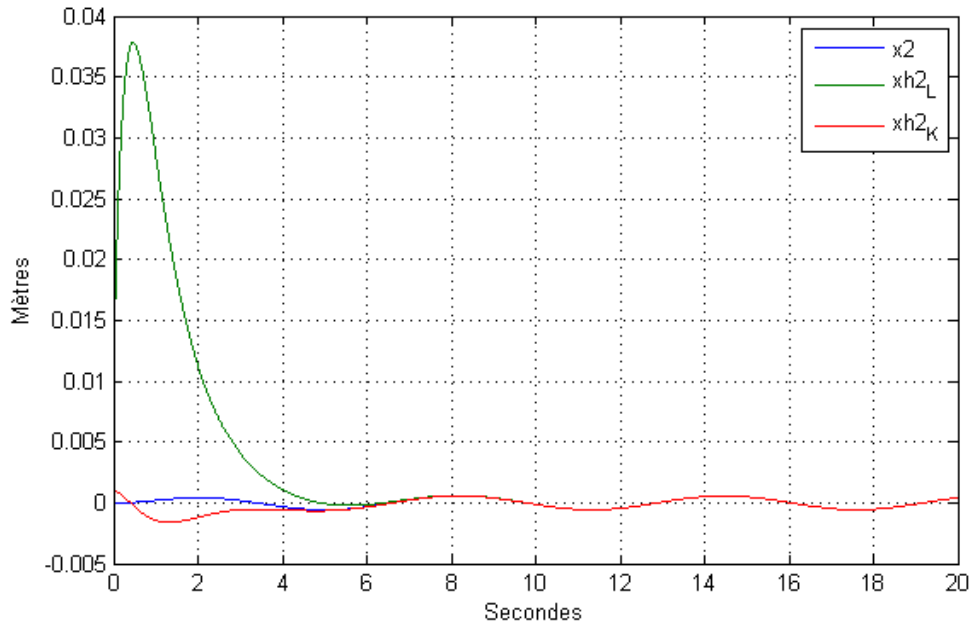


FIGURE II.6 – Courbe de  $x_2$  (en bleu) et des estimés  $\hat{x}_{2L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{2K}$  (en rouge) en absence du bruit.

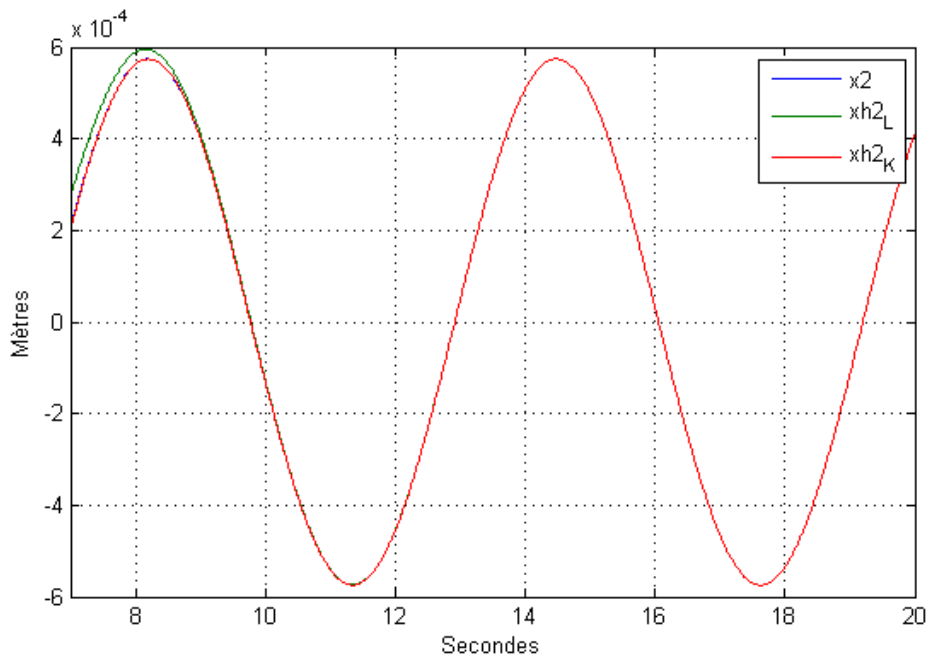


FIGURE II.7 – Courbe de  $x_2$  (en bleu) et des estimés  $\hat{x}_{2L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{2K}$  (en rouge) en absence du bruit en régime permanent.

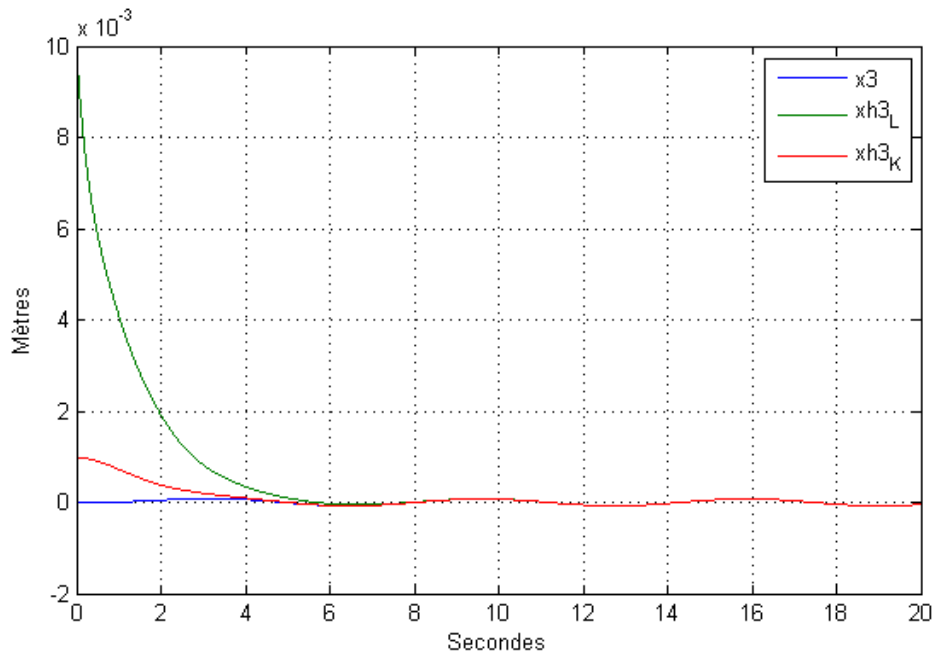


FIGURE II.8 – Courbe de  $x_3$  (en bleu) et des estimés  $\hat{x}_{3L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{3K}$  (en rouge) en absence du bruit.

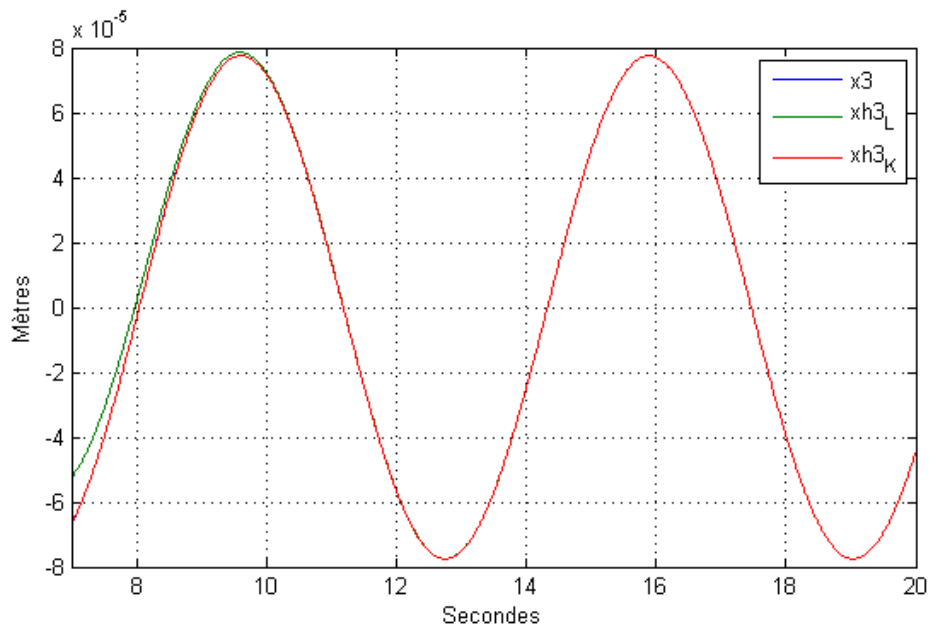


FIGURE II.9 – Courbe de  $x_3$  (en bleu) et des estimés  $\hat{x}_{3L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{3K}$  (en rouge) en absence du bruit en régime permanent.

Les figures [II.11](#), [II.13](#) et [II.15](#) donne les courbes des erreurs d'estimation  $e_{iL}=x_i - \hat{x}_{iL}$  et  $e_{iK}=x_i - \hat{x}_{iK}$ ,  $i=1, 2, 3$ .

Les erreurs convergent bien vers zéro après un régime transitoire, ce qui confirme de la bonne conception des deux observateurs ([II.11](#), [II.13](#), [II.15](#)).

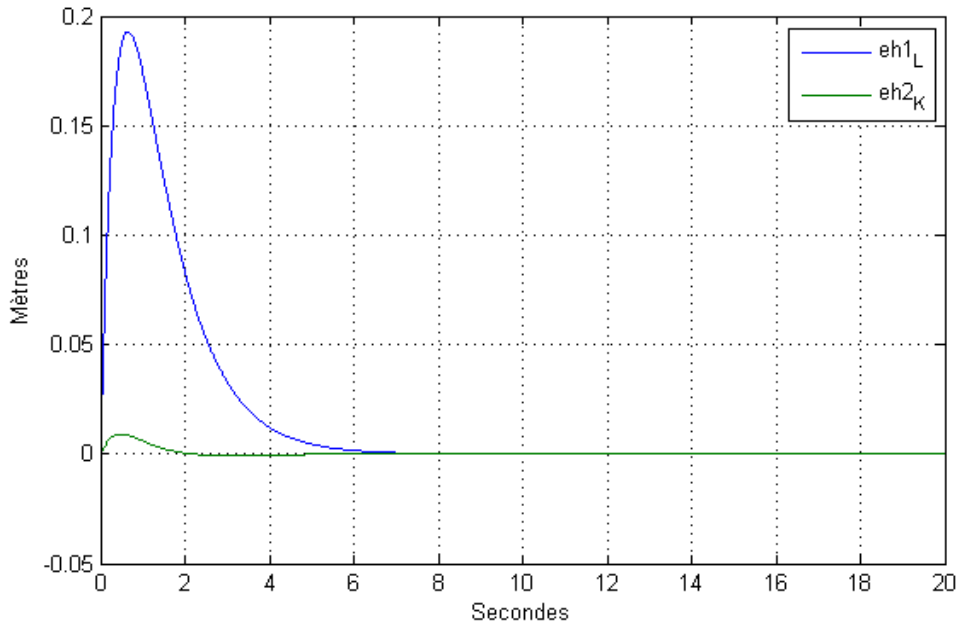


FIGURE II.10 – Courbe des erreurs d’estimation  $e_{1L}=x_1 - \hat{x}_{1L}$  (en bleu) et  $e_{1K}=x_1 - \hat{x}_{1K}$  (en vert) en absence du bruit.

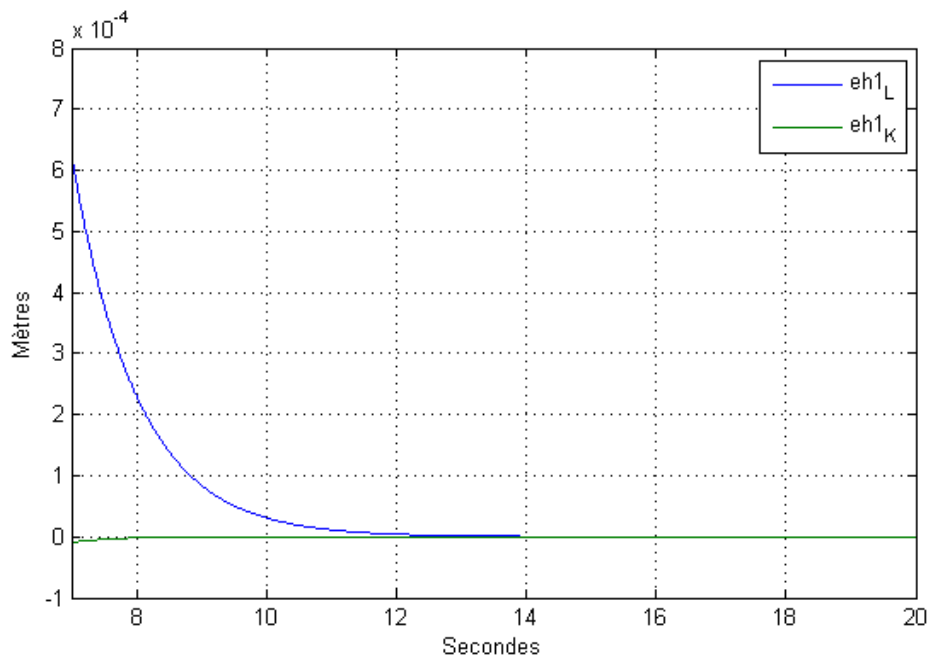


FIGURE II.11 – Courbe des erreurs d’estimation  $e_{1L}=x_1 - \hat{x}_{1L}$  (en bleu) et  $e_{1K}=x_1 - \hat{x}_{1K}$  (en vert) en absence du bruit en régime permanent.

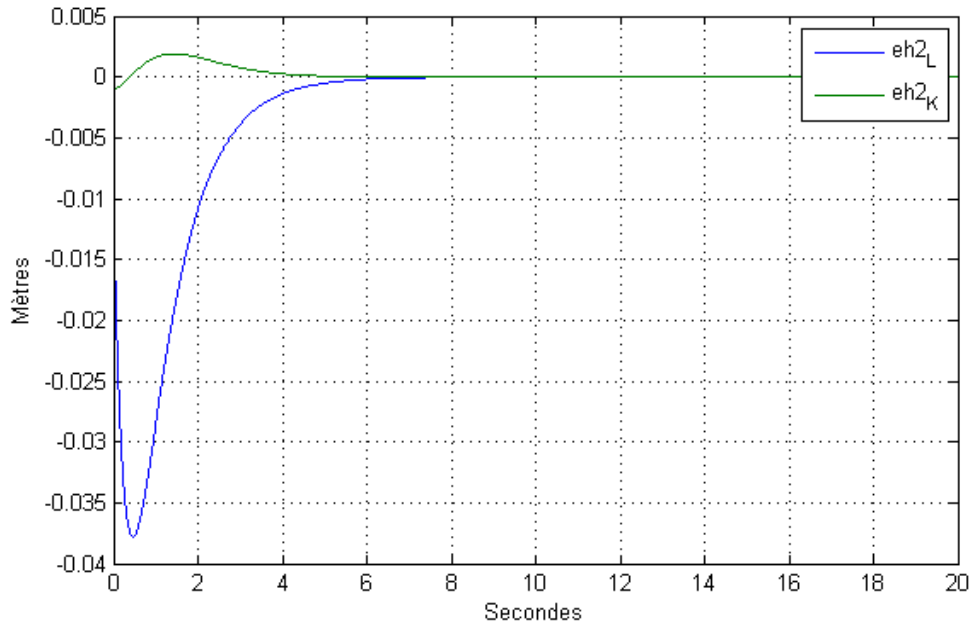


FIGURE II.12 – Courbe des erreurs d’estimation  $e_{2L}=x_2 - \hat{x}_{2L}$  (en bleu) et  $e_{2K}=x_2 - \hat{x}_{2K}$  (en vert) en absence du bruit.

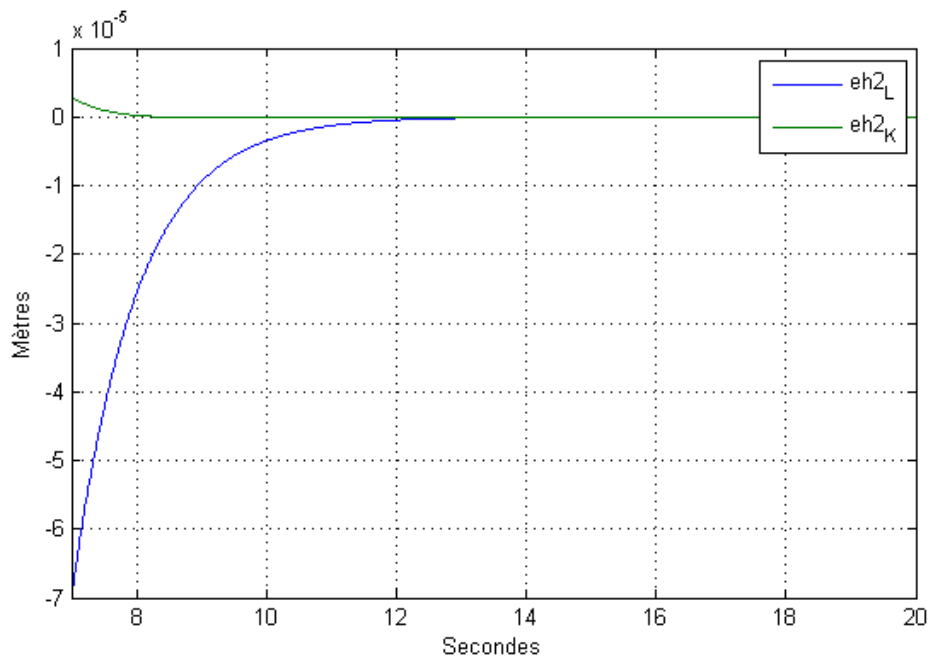


FIGURE II.13 – Courbe des erreurs d’estimation  $e_{2L}=x_2 - \hat{x}_{2L}$  (en bleu) et  $e_{2K}=x_2 - \hat{x}_{2K}$  (en vert) en absence du bruit en régime permanent.

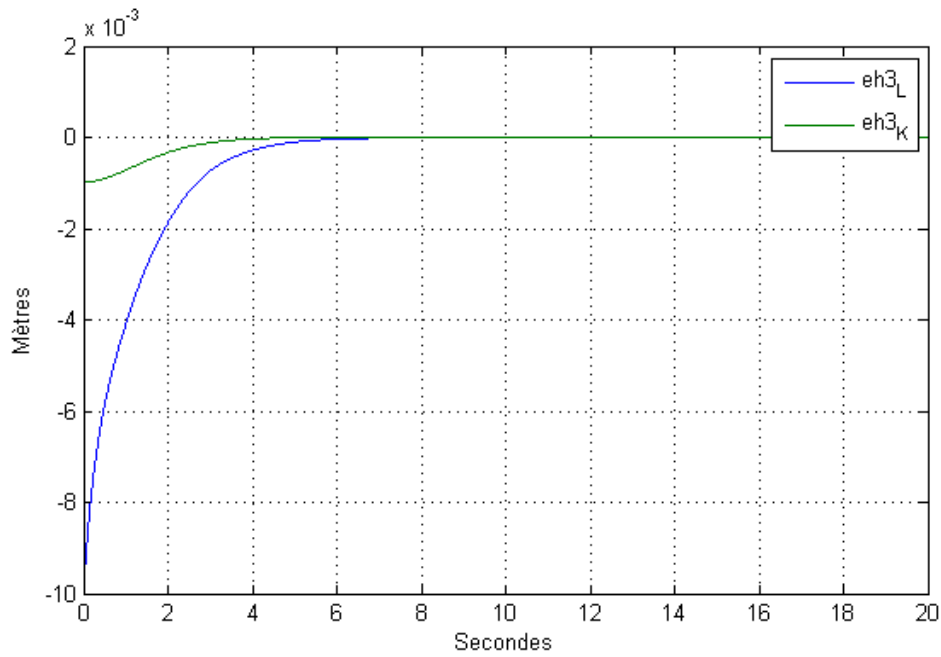


FIGURE II.14 – Courbe des erreurs d’estimation  $e_{3L}=x_3 - \hat{x}_{3L}$  (en bleu) et  $e_{3K}=x_3 - \hat{x}_{3K}$  (en vert) en absence du bruit.

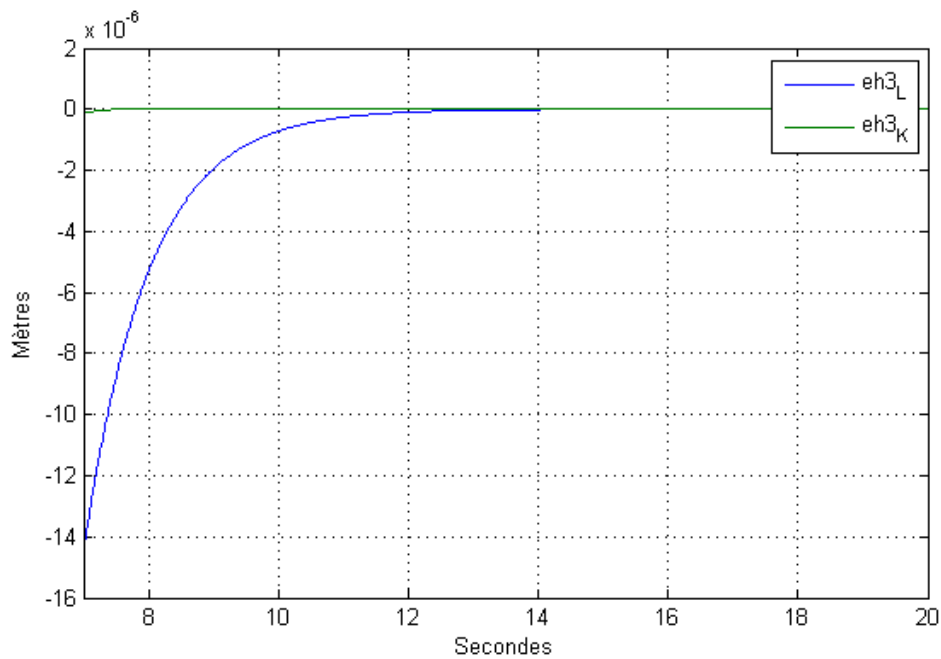


FIGURE II.15 – Courbe des erreurs d’estimation  $e_{3L}=x_3 - \hat{x}_{3L}$  (en bleu) et  $e_{3K}=x_3 - \hat{x}_{3K}$  (en vert) en absence du bruit en régime permanent.

Nous donnons aussi dans les figures , et les courbes des niveaux réels  $N_e=x_i + x_{10}$ ,  $i=1, 2, 3$ , où  $x_{10}$  sont les valeurs d’équilibre ainsi que celle de leurs estimés  $\hat{N}_{iL}=\hat{x}_{iL} + x_{10}$  et  $\hat{N}_{iK}=\hat{x}_{iK} + x_{10}$ ,  $i=1, 2, 3$  (II.17, II.19, II.21).

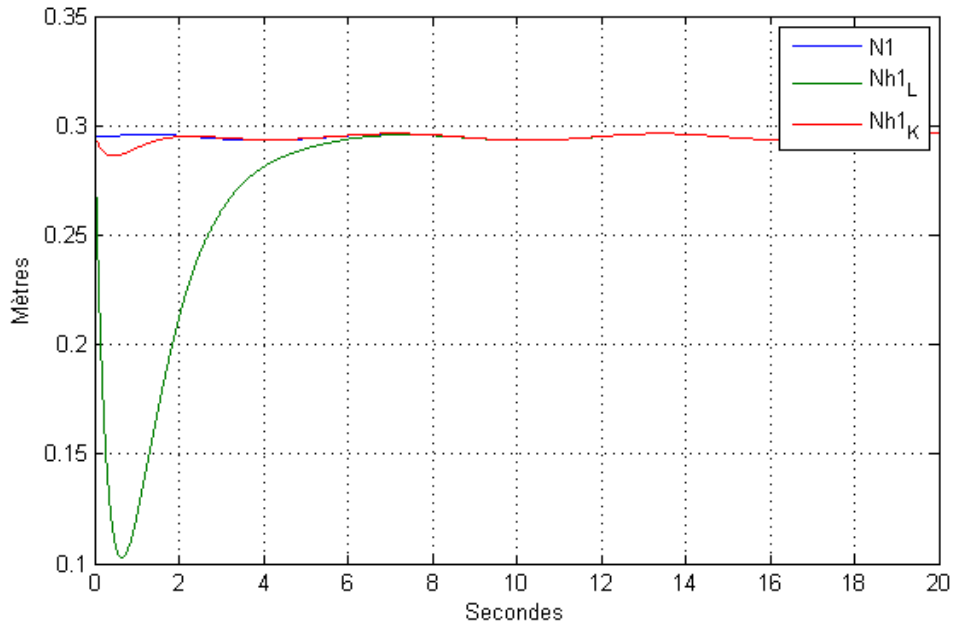


FIGURE II.16 – Courbe du niveau réel  $N_1$  (en bleu) et de ses estimés  $\hat{N}_{1L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{1K}$  (en rouge).

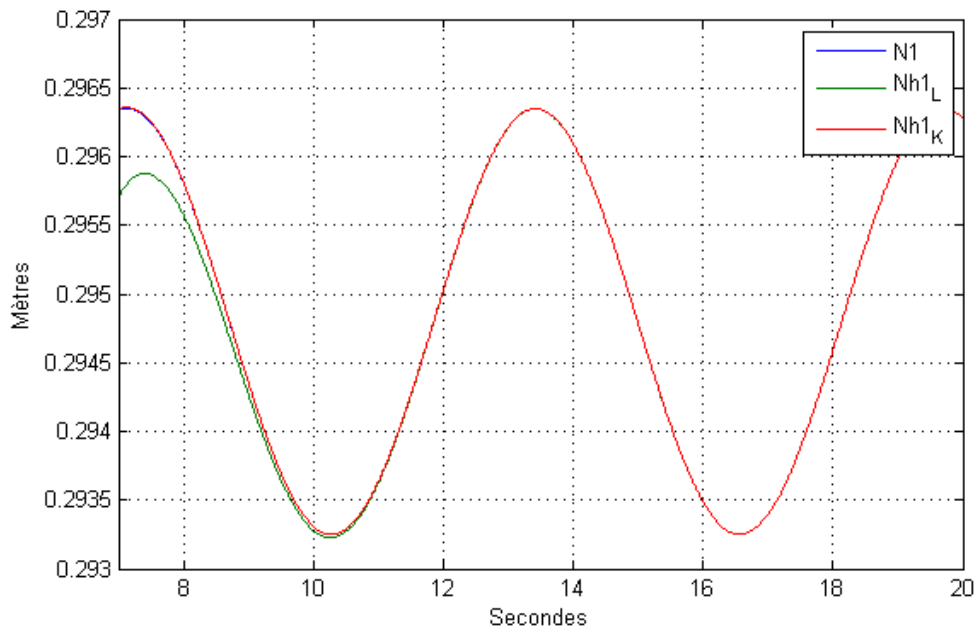


FIGURE II.17 – Courbe du niveau réel  $N_1$  (en bleu) et de ses estimés  $\hat{N}_{1L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{1K}$  (en rouge) en régime permanent.

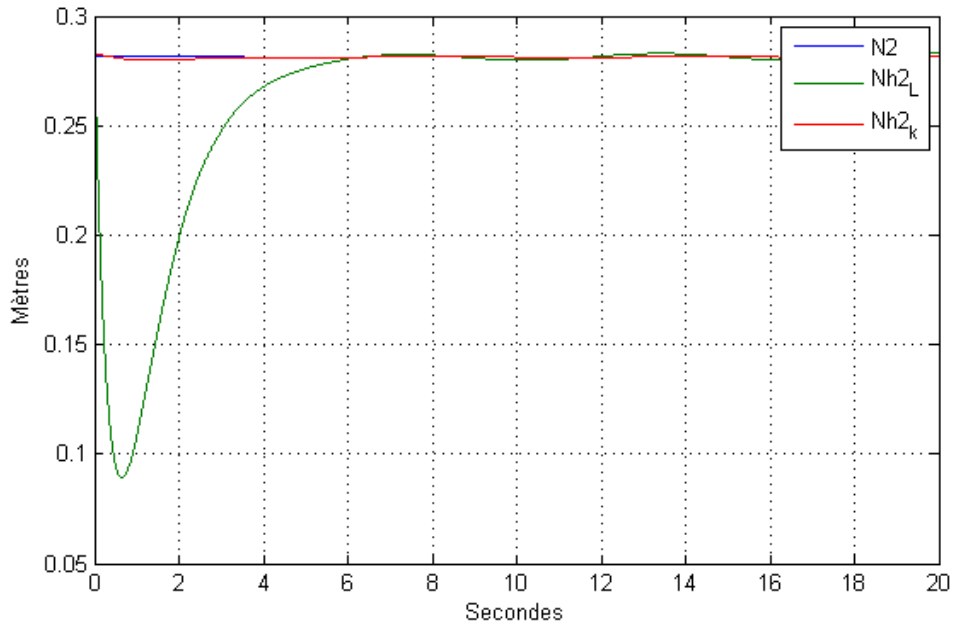


FIGURE II.18 – Courbe du niveau réel  $N_2$  (en bleu) et de ses estimés  $\hat{N}_{2L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{2K}$  (en rouge).

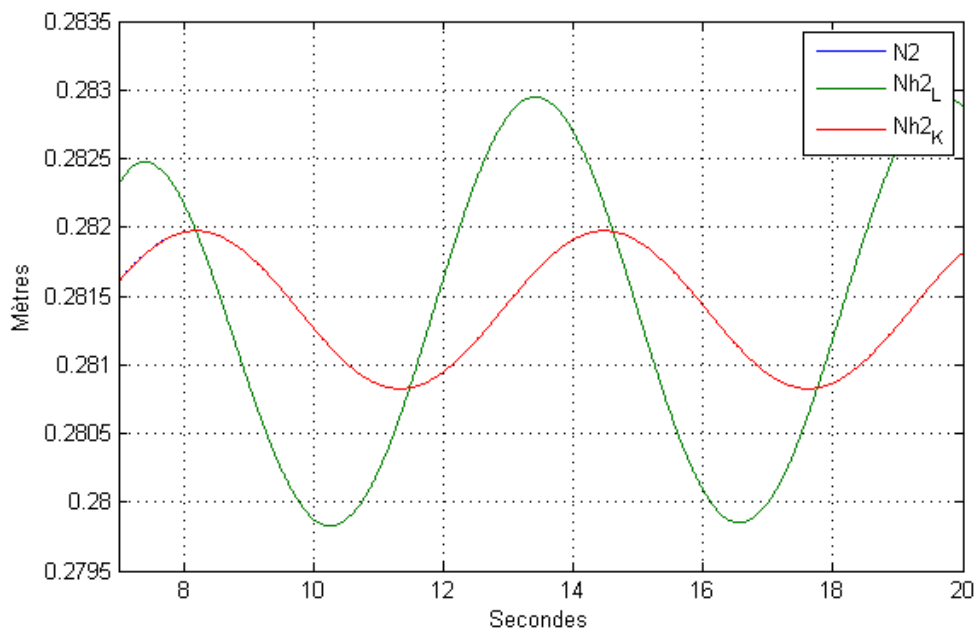


FIGURE II.19 – Courbe du niveau réel  $N_2$  (en bleu) et de ses estimés  $\hat{N}_{2L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{2K}$  (en rouge) en régime permanent.

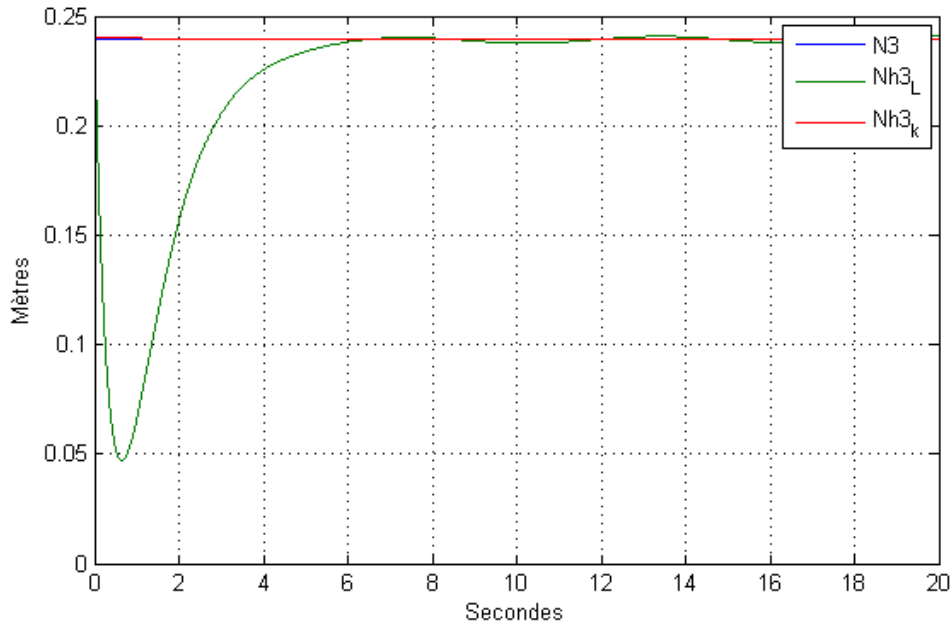


FIGURE II.20 – Courbe du niveau réel  $N_3$  (en bleu) et de ses estimés  $\hat{N}_{3L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{3K}$  (en rouge).

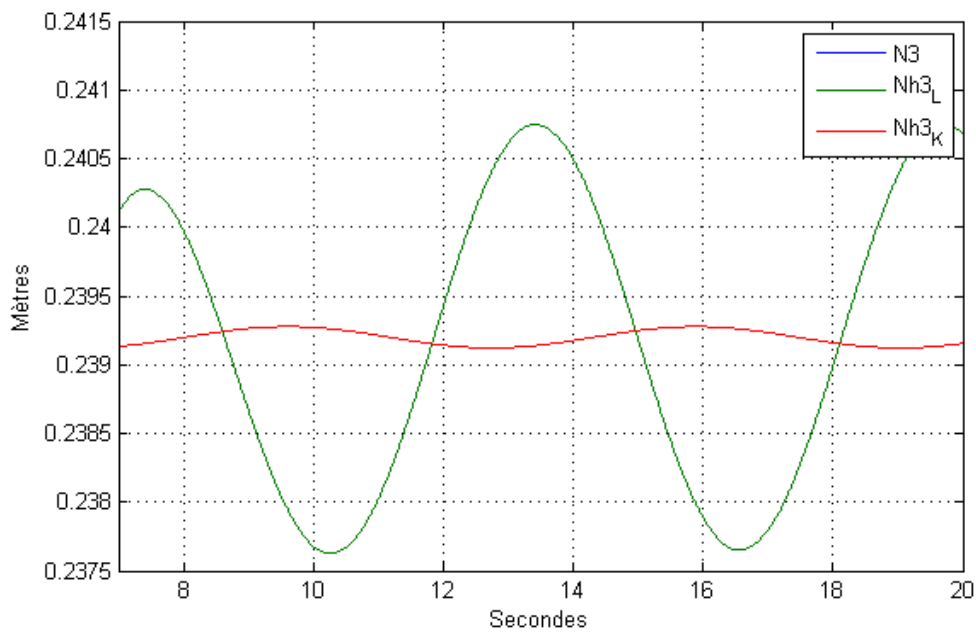


FIGURE II.21 – Courbe du niveau réel  $N_3$  (en bleu) et de ses estimés  $\hat{N}_{3L}$  (en vert) et  $\hat{x}_{3K}$  (en rouge) en régime permanent.

### 3.6 Simulation avec bruit

l'équation [II.69](#) représente le système avec bruit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + v \end{aligned} \tag{II.69}$$

La simulation de l'observateur de Luenberger et du filtre de Kalman avec bruit. En

**II.70**

$$\begin{aligned} w &= 0.1\psi(3, N)\sqrt{(W)}, \\ v &= 0.1\xi(1, N)\sqrt{(V)} \end{aligned} \tag{II.70}$$

Avec :

- $w \in \mathbb{R}^m$  est le bruit de processus.
- $v \in \mathbb{R}$  est le bruit de mesure.
- $W$  est la matrice de covariance du bruit de processus.
- $V$  est la matrice de covariance du bruit de mesure (Scalaire).
- $\psi$  est une matrice aléatoire de dimension (généralisé par l'instruction *randn* dans Matlab (3, N) ).
- $\xi$  est un bruit (généralisé par l'instruction *randn* dans Matlab (1, N)).

On a :

$$N = \frac{t_f - t_0}{h}$$

$N$  le nombre d'échantillon,  $t_0=0$  et  $t_f=20$ ,  $h=0.01$  c'est le pas de simulation.

$W$  est diagonal donc :

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{(W)} = \begin{bmatrix} \sqrt{(w_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{(w_2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{(w_3)} \end{bmatrix}$$

La valeur de  $W$  est :

$$W = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

La valeur de  $V$  est d'amplitude 0.1.

Ces bruits sont modélisés comme des variables aléatoires gaussiennes. L'ajout de bruit à faible intensité (0.1) simule un environnement réaliste dans lequel des incertitudes affectent l'évolution du système et les observations. Ces bruits, dans notre cas, peuvent être dus à plusieurs choses telles que (la chaleur qui peut vaporiser l'eau, la pluie qui peut

s'introduire dans les bacs,... ) . Dans ce contexte, l'observateur de Luenberger continue de corriger l'estimation de l'état en fonction des erreurs d'observation, mais il n'est pas spécifiquement conçu pour gérer le bruit de manière optimale. En revanche, le filtre de Kalman est une approche probabiliste qui intègre directement les informations sur les covariances des bruits de processus et de mesure ( $W$  et  $V$ ), ce qui lui permet de mieux estimer les états du système en présence de ces perturbations. La simulation permet ainsi de comparer l'efficacité des deux méthodes, en mettant en évidence la supériorité du filtre de Kalman dans des environnements bruyants.

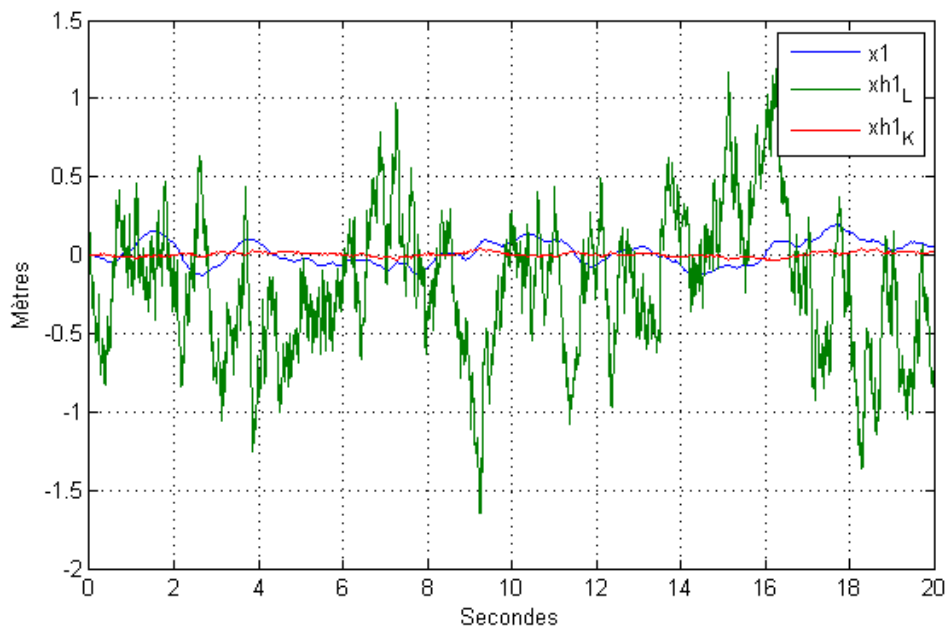


FIGURE II.22 – Courbe de la variation  $x_1$  et ses estimés  $\hat{x}_{1L}$  et  $\hat{x}_{1K}$  en présence de bruit.

La figure [II.22](#) représente la variable  $x_1(t)$  et celles de ses estimés  $\hat{x}_{1L}$  et  $\hat{x}_{1K}$  obtenues respectivement par l'observateur de Luenberger et par le filtre de Kalman en présence du bruit. L'amplitude du bruit est fixée à 0.1.

Nous constatons que la présence du bruit influence sur l'estimation.

En particulier, nous remarquons que l'observateur de Luenberger est fortement sensible au bruit, tandis que le filtre de Kalman offre des estimations plus ou moins proches des variables réelles.

Cette constatation est aussi visible sur les autres variables d'état illustrées dans les figures [II.23](#) et [II.24](#).

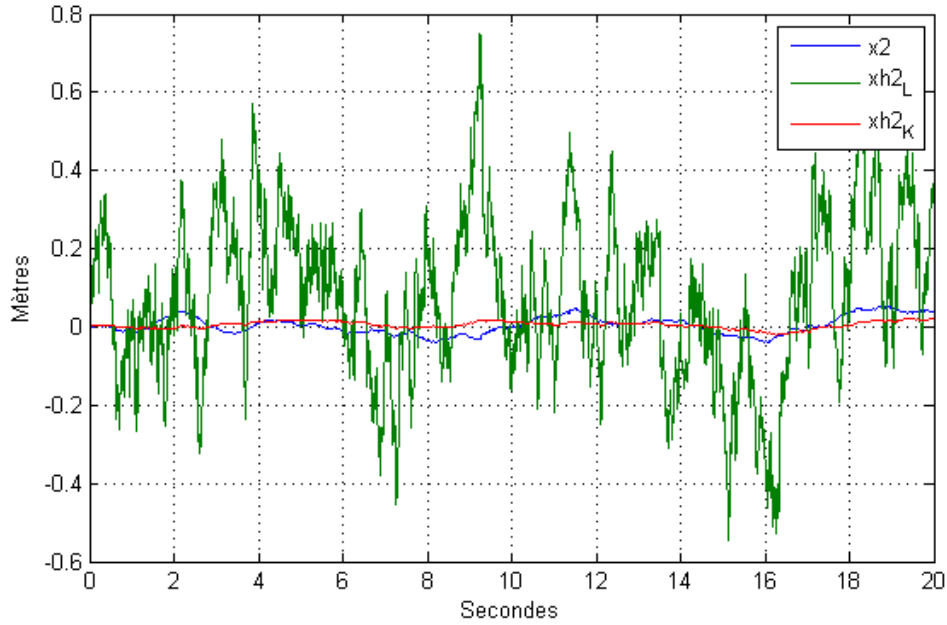


FIGURE II.23 – Courbe de la variation  $x_2$  et ses estimés  $\hat{x}_{2L}$  et  $\hat{x}_{2K}$  en présence de bruit.

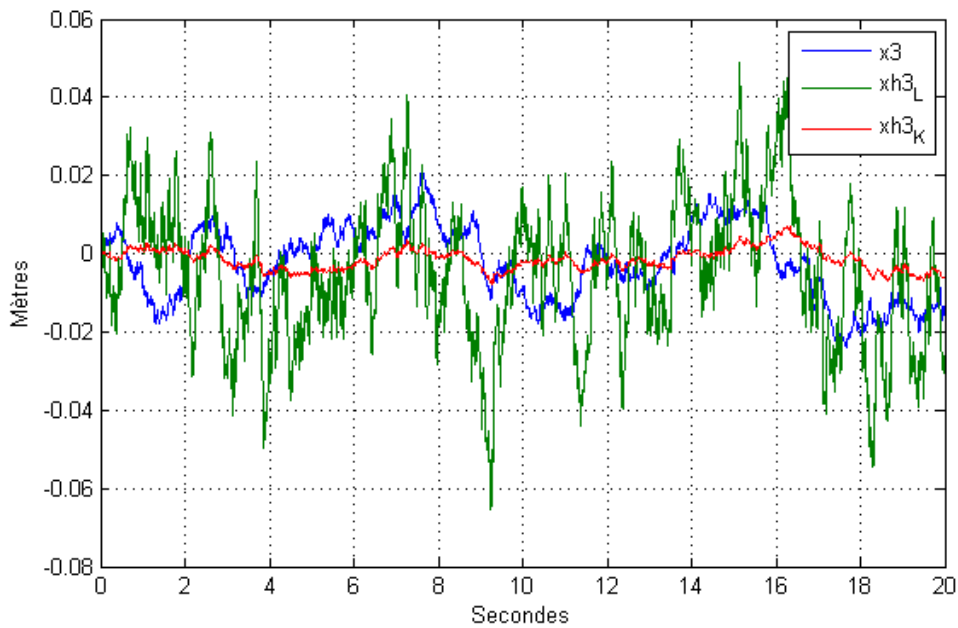


FIGURE II.24 – Courbe de la variation  $x_3$  et ses estimés  $\hat{x}_{3L}$  et  $\hat{x}_{3K}$  en présence de bruit.

De même les courbes des erreurs d'estimation représenté dans les figures [II.25](#), [II.26](#) et [II.27](#) montre la capacité du filtre de Kalman à réduire l'effet du bruit et forte dégradation de l'estimation obtenue par l'observateur de Luenberger.

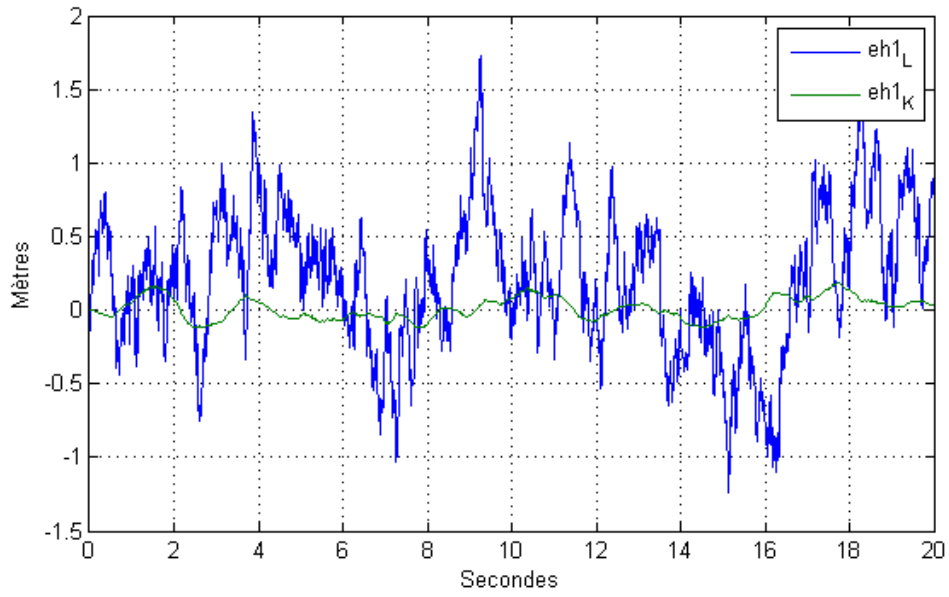


FIGURE II.25 – L'erreur d'estimation de  $x_1$  de l'observateur Luenberger et celle du filtre de Kalman .

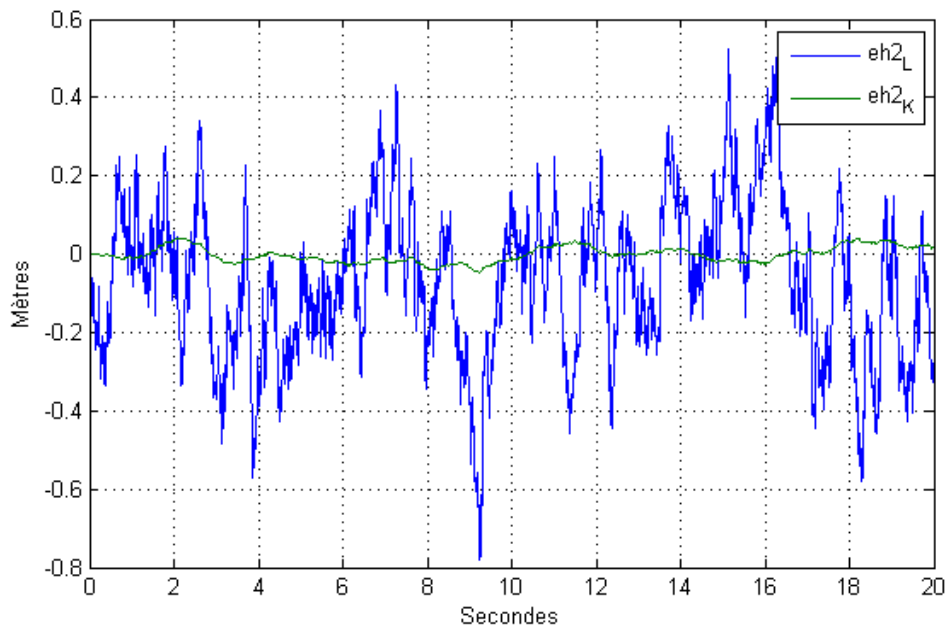


FIGURE II.26 – L'erreur d'estimation de  $x_2$  de l'observateur Luenberger et celle du filtre de Kalman .

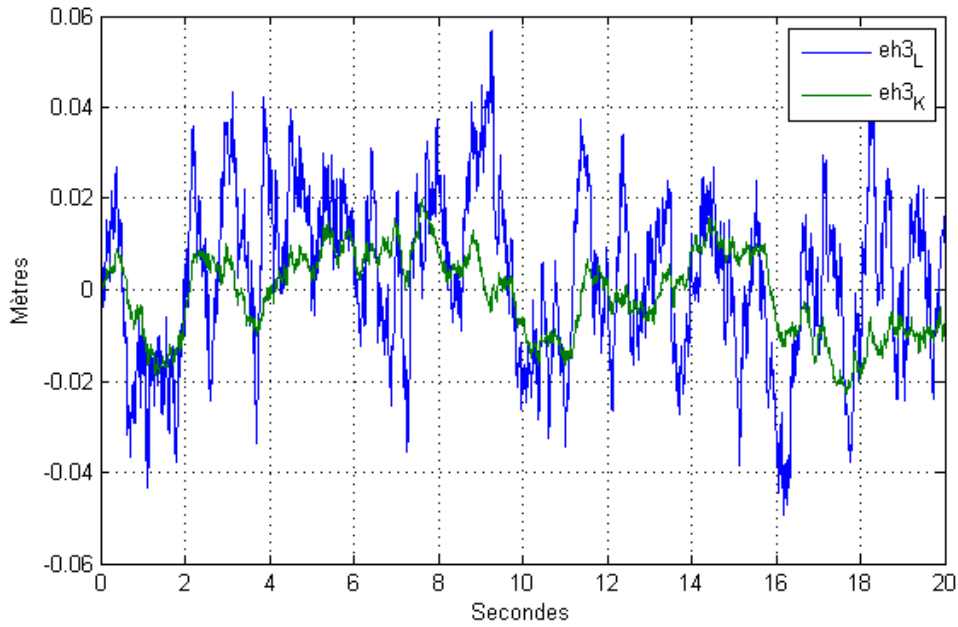


FIGURE II.27 – L'erreur d'estimation de  $x_3$  de l'observateur Luenberger et celle du filtre de Kalman .

Enfin, nous donnons dans les figures [II.28](#), [II.29](#) et [II.30](#) les courbes des niveaux réels  $N_i$ ,  $i=1, 2, 3$  et leurs estimés correspondants  $N_{iL}$  et  $N_{iK}$ ,  $i=1, 2, 3$ . Les conclusions relevées ci-dessous s'appliquant aussi aux niveaux.

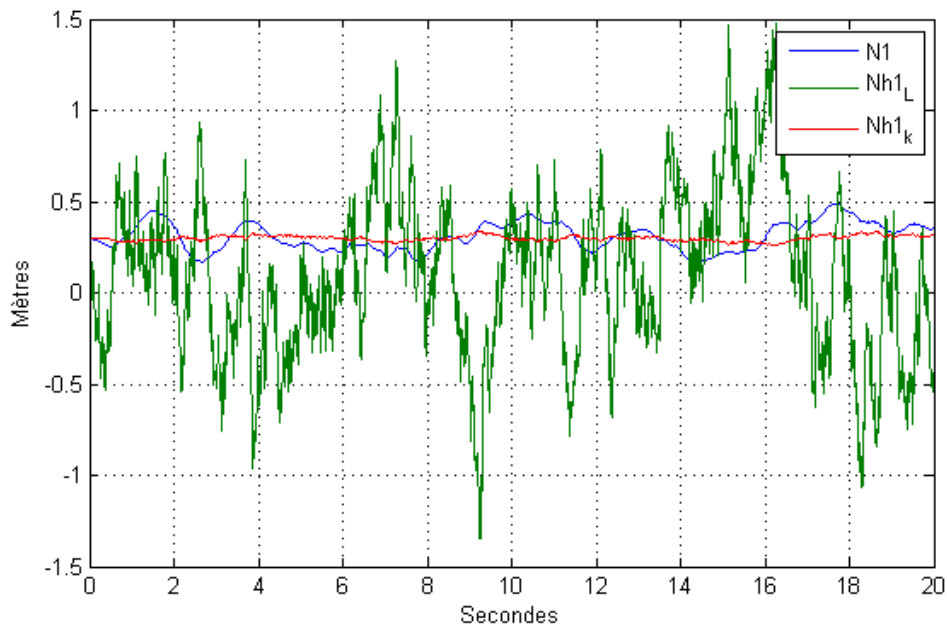


FIGURE II.28 – Courbe de niveau réels  $N_1$  (en bleu) et ses estimés  $\hat{N}_{1L}$  (en vert) et  $\hat{N}_{1K}$  (en rouge) en présence de bruit.

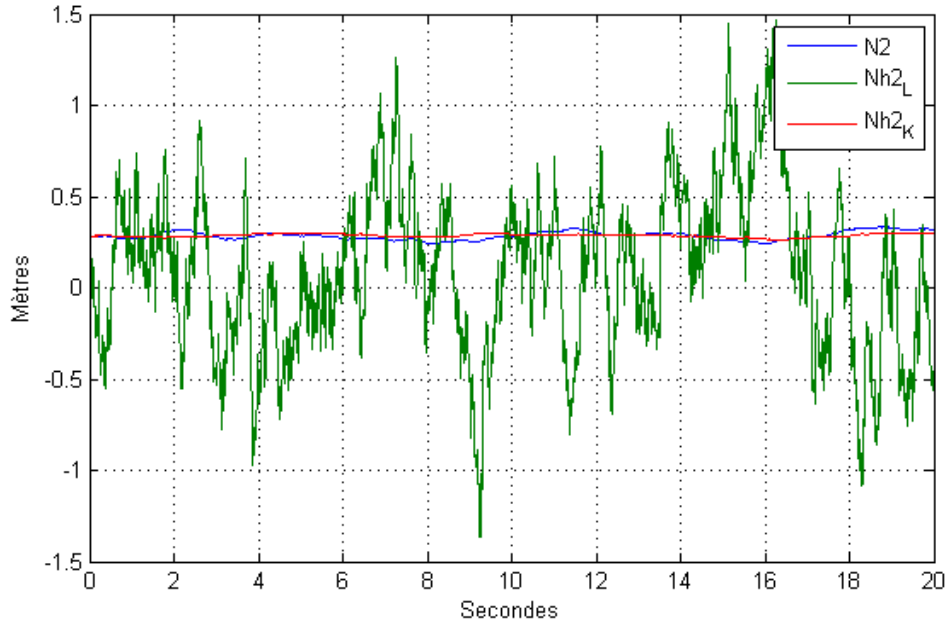


FIGURE II.29 – Courbe de niveau réels  $N_2$  (en bleu) et ses estimés  $\hat{N}_{2L}$  (en vert) et  $\hat{N}_{2K}$  (en rouge) en présence de bruit .

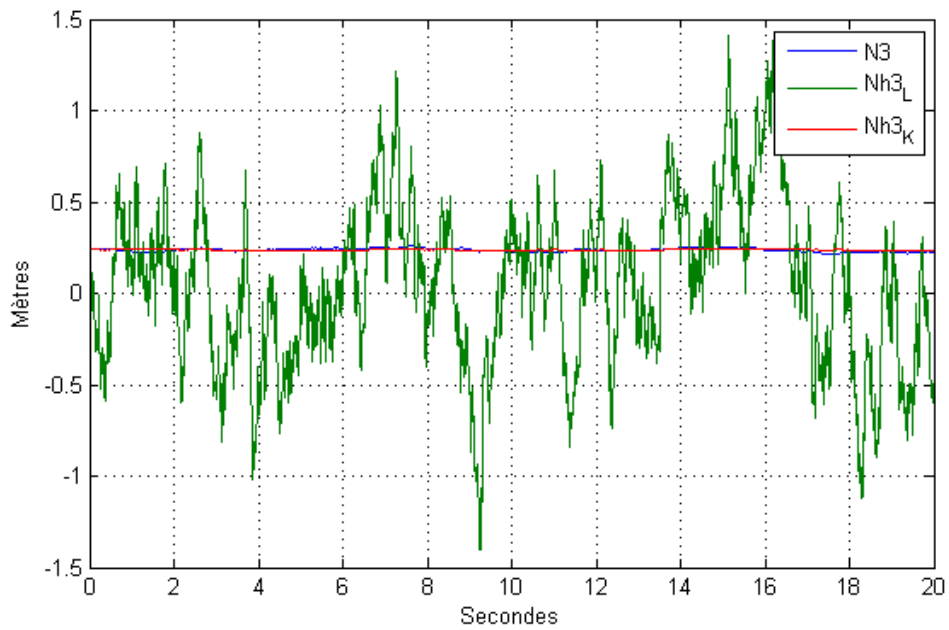


FIGURE II.30 – Courbe de niveau réels  $N_1$  (en bleu) et ses estimés  $\hat{N}_{3L}$  (en vert) et  $\hat{N}_{3K}$  (en rouge) en présence de bruit.

## 4 Conclusion

Cette étude a permis de comparer les performances de l'observateur de Luenberger et du filtre de Kalman pour l'estimation d'état d'un système linéaire soumis à des bruits externes de mesures et aux bruits internes. Les résultats de la simulation montrent que le filtre de Kalman est généralement plus précis, mais l'observateur de Luenberger est plus simple à mettre en œuvre. Le choix de l'observateur dépend des spécifications du système, des contraintes de calcul et aussi de l'ampleur des bruits.

En conclusion, le filtre de Kalman s'avère être un outil puissant pour l'estimation d'état, notamment en présence de bruit. Cependant, l'observateur de Luenberger reste une alternative intéressante pour des applications où la complexité de calcul est une contrainte.

# Chapitre III

## Estimation de l'état de charge de la batterie lithium-ion

### 1 Introduction

L'estimation précise de l'état de charge (State of Charge, SoC) est cruciale pour les véhicules électriques (EV), car elle détermine l'autonomie restante du véhicule, permettant une gestion optimale de l'énergie. Une mauvaise estimation du SoC peut entraîner des conséquences graves, telles qu'une réduction significative de la durée de vie des batteries, des arrêts soudains, ou encore des risques de surcharge ou de décharge profonde. Ces derniers peuvent provoquer une surchauffe de la batterie, augmentant ainsi le risque d'explosion, particulièrement pour les batteries lithium-ion, largement utilisées dans les EV.

Le SoC joue un rôle central dans les systèmes de gestion de batterie (BMS), influençant les décisions de recharge et les stratégies de gestion thermique, indispensables pour maintenir la sécurité, la longévité et les performances des batteries.

Dans ce chapitre, nous évaluons les performances de deux techniques d'estimation du SoC, l'observateur de Luenberger et le filtre de Kalman-Bucy, appliqués au modèle de Thévenin du second ordre de la batterie.

### 2 Calculs des observateurs

La simulation des batteries lithium-ion est essentielle pour optimiser leur performance et leur sécurité, notamment dans les domaines de l'électromobilité et de la gestion énergétique. Elle permet de modéliser précisément leur comportement électrique et thermique.

Cette section présente la simulation du modèle de Thévenin, un outil clé pour comprendre et prédire le fonctionnement des batteries dans diverses conditions.

Rapprenons le modèle de Thévenin de la batterie décrit dans le Chapitre I par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Où :

$$x = [V_{C1} \quad V_{C2} \quad Soc]^T$$

La matrice  $A$  décrit la dynamique interne du système, c'est-à-dire comment les états du système évoluent dans le temps en fonction des états précédents donc :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0090 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0093 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice  $B$  représente comment les entrées (comme le courant d'entrée) affectent les états du système est :

$$B = \begin{bmatrix} 0.0691 \\ 0.0102 \\ -0.1389 \end{bmatrix}$$

La matrice  $C$  est utilisée pour déterminer comment les états du système se traduisent en sorties mesurables est :

$$C = [ -1 \quad -1 \quad 0.009 ]$$

Il est facile de vérifier que le système est observable. Nous pouvons donc concevoir les deux observateurs.

## 2.1 Observateur de Luenberger

La théorie de l'observation de Luenberger repose sur la méthode de placement des pôles. Dans le cadre déterministe, l'observateur de Luenberger est décrit par les équations suivantes : III.1 :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(k) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où :

- $\hat{x}(t)$  est l'état estimé.
- $\hat{y}(k)$  est la sortie estimée.

La dynamique de l'erreur d'estimation  $e(t)=x(t) - \hat{x}(t)$  s'exprime par :

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t) \quad (\text{III.2})$$

Où  $K$  est le gain de l'observateur.

En utilisant la méthode de placement des pôles, on calcule le gain  $K$  de l'observateur pour que les valeurs propres [III.3](#) de la matrice  $(A-KC)$  soient dans le demi-plan complexe gauche et égales aux valeurs désirées [III.4](#). Les valeurs propres du système (valeur propres de la matrice d'état  $A$ ) sont :

$$p_s = \begin{bmatrix} -0.0090 & -0.0093 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.3})$$

Pour ce type d'observateur, une grande liberté est laissée dans le choix des valeurs propres, mais en pratique on choisit la dynamique d'erreur d'estimation plus rapidement que le système (dix fois plus rapide) [55](#). Dans notre cas les pôles désirés de l'observateur sont choisis comme suit :

$$p_o = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\tau_1} & -\frac{2}{\tau_2} & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.02 & -0.03 \end{bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

En utilisant la méthode de placement de pôles, on détermine le gain de l'observateur  $K$  dont la valeur est donnée par :

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\tau_1} & -\frac{2}{\tau_2} & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.0945 & -0.0640 & 8.0303 \end{bmatrix}^T$$

.

## 2.2 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman-Bucy est un observateur optimal utilisé pour estimer l'état d'un système dynamique continu en présence des bruits. Il s'applique aux systèmes linéaires affectés par des bruits de processus et de mesure, et il est basé sur la minimisation de l'erreur de l'estimation de l'état.

### 1. Modèle d'état du filtre de Kalman-Bucy

L'état estimé et la sortie du filtre de Kalman-Bucy sont décrits par les équations suivantes [57](#) :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - K_f C) \hat{x}(t) + Bu(t) + K_f y(t) \\ \hat{y}(t) &= C \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

- $\hat{x}(t)$  : l'état estimé du système à l'instant  $t$ .
- $\hat{y}(t)$  : la sortie estimée.
- $K_f$  : le gain du filtre de Kalman-Bucy.

—  $A - K_f C$  est la matrice d'évolution du filtre et  $K_f$  le vecteur gain du filtre.

Le gain  $K_f$  est calculé en fonction de la confiance que l'on a dans le modèle (exprimée en densité spectrale  $W$ ) par rapport à la confiance que l'on a dans la mesure (exprimée en densité spectrale  $V$ ). Si le modèle est très bon ( $W$  très petit) et la mesure très bruitée ( $V$  très grand), le gain  $K_f$  doit être très faible [58].

## 2. Choix de $W$ et $V$

Dans le filtre de Kalman, les matrices  $Q$  et  $V$  jouent un rôle crucial car elles modélisent les incertitudes associées au système. Ces matrices influencent la manière dont le filtre combine l'information du modèle dynamique avec celle des mesures pour estimer l'état du système. Voici ce que représentent chacune de ces matrices [64] :

— **Matrice  $W$  : Covariance du bruit de processus.**

$W$  modélise l'incertitude ou le bruit lié au modèle du système, c'est-à-dire l'erreur associée à la dynamique du système elle-même. Ce bruit est souvent appelé bruit de processus. Il reflète les perturbations imprévues, les approximations dans le modèle, ou toute autre source d'incertitude interne affectant l'évolution de l'état.

— **Choix de  $W$  :**

Si les dynamiques du système sont bien connues et précises, ainsi, il est possible de choisir une matrice  $W$  de petite taille.

Si le modèle du système est incertain ou si le processus est perturbé par des facteurs imprévisibles,  $W$  doit être plus grand pour permettre au filtre de s'adapter plus rapidement.

La valeur de  $W$  est :

$$W = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0100 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0100 \end{bmatrix}$$

— **Matrice  $V$  : Covariance du bruit de mesure.**

$V$  modélise l'incertitude ou le bruit dans les mesures du système, également appelé bruit de mesure. Ce bruit provient généralement des capteurs utilisés pour observer le système, et il capture les erreurs aléatoires dans les observations.

— **Choix de  $V$  :**

Si les capteurs sont très précis (faible bruit), nous allons opter pour une matrice  $V$  de faible dimension.

Si les capteurs sont bruyants ou imprécis, alors  $V$  doit être plus grand pour que le filtre donne moins de poids aux mesures et s'appuie davantage sur le modèle du système, et  $V = 0.0100$ .

### 3. Valeur de $P$

$P$  c'est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Elle évolue en fonction du modèle et des mesures. La résolution

La valeur de  $P$  est :

$$P = \begin{bmatrix} 0.2890 & -0.2600 & 0.7734 \\ -0.2600 & 0.2883 & 0.7381 \\ 0.7734 & 0.7381 & 171.4632 \end{bmatrix}$$

Le filtre s'adapte continuellement en fonction de l'information disponible, corrigeant l'estimation pour rendre le système plus précis et résilient face aux bruits et incertitudes. La valeur du  $K_f$  est :

$$K_f = \begin{bmatrix} -0.2194 & -0.2160 & 0.3162 \end{bmatrix}^T \quad (\text{III.6})$$

## 3 Résultats des simulations

### 3.1 Simulation du système sans bruit

La simulation de l'observateur de Luenberger et du filtre de Kalman sans bruit correspond à un cas idéal dans lequel ni le système ni les mesures ne sont affectés par du bruit. Cela simplifie l'analyse et permet de comparer l'efficacité des deux méthodes d'estimation dans un environnement parfaitement contrôlé et  $I(t)$  c'est le courant entrant fourni par la batterie voir figure [III.1](#).

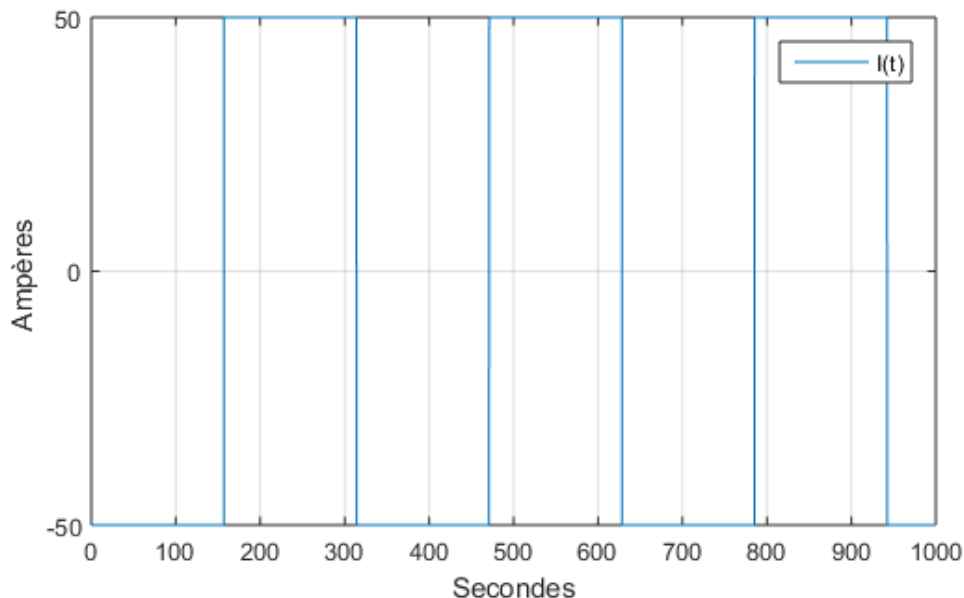


FIGURE III.1 – Courant entrant  $I(t)$

Les courbes des trois variables d'état réelles  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  qui sont respectivement la tension  $V_{C1}$ , la tension  $V_{C2}$  et l'état de charge  $SoC$  ainsi que leurs estimées correspondantes

$\hat{x}_{iL}$ ,  $i = 1, 2, 3$  obtenues par l'observateur de Luenberger et  $\hat{x}_{iK}$ ,  $i = 1, 2, 3$  obtenues par le filtre de Kalman sont données par les figures III.2, III.3 et III.4. Nous remarquons que les estimées délivrées par les deux observateurs suivent correctement les variables d'état originales. La figure III.5 donne la courbe de SoC en pourcentage. Nous remarquons qu'en simulation, la valeur estimée peut dépasser les 100%, ce qui n'est pas réaliste. De même, le modèle de Thévenin peut produire une valeur de SoC supérieure à 100% ce qui est aussi non réaliste. En fait, le modèle mathématique de Thévenin n'intègre pas cette contrainte pratique. Nous avons utilisé l'instruction de saturation afin de limiter SoC à sa valeur maximale de 100%. Nous concluons que l'état de charge SoC est bien estimé par les deux observateurs en l'absence des bruits.

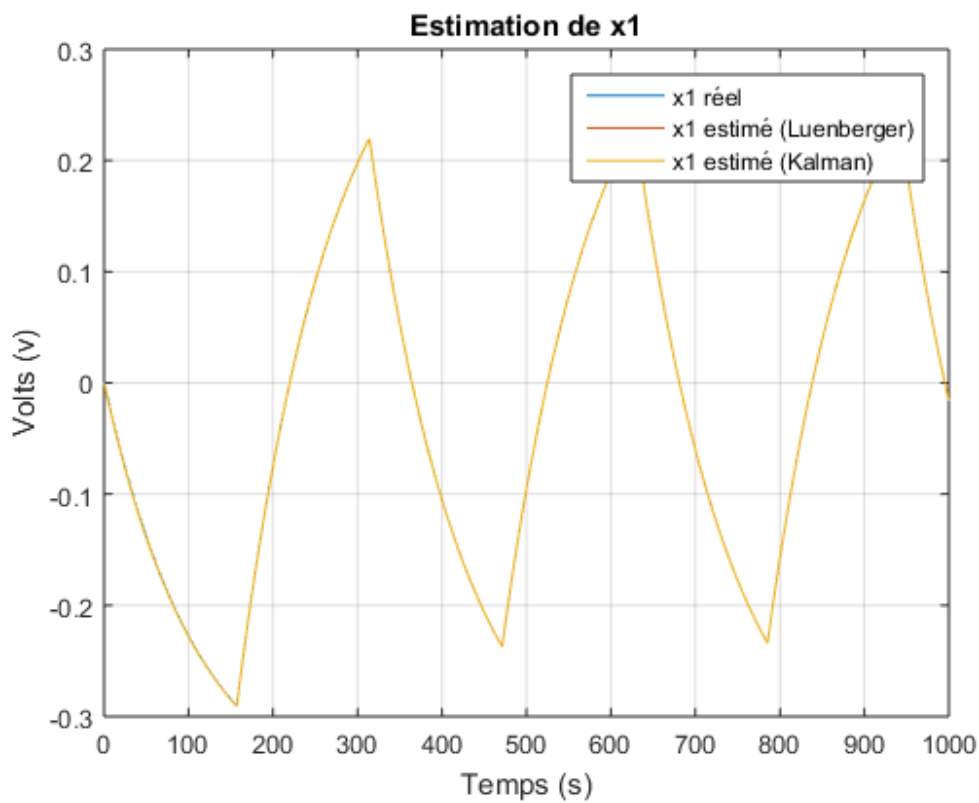


FIGURE III.2 – Courbes de  $x_{1réel}$  et des estimées  $\hat{x}_{1L}$  et  $\hat{x}_{1K}$  dans le cas sans bruit

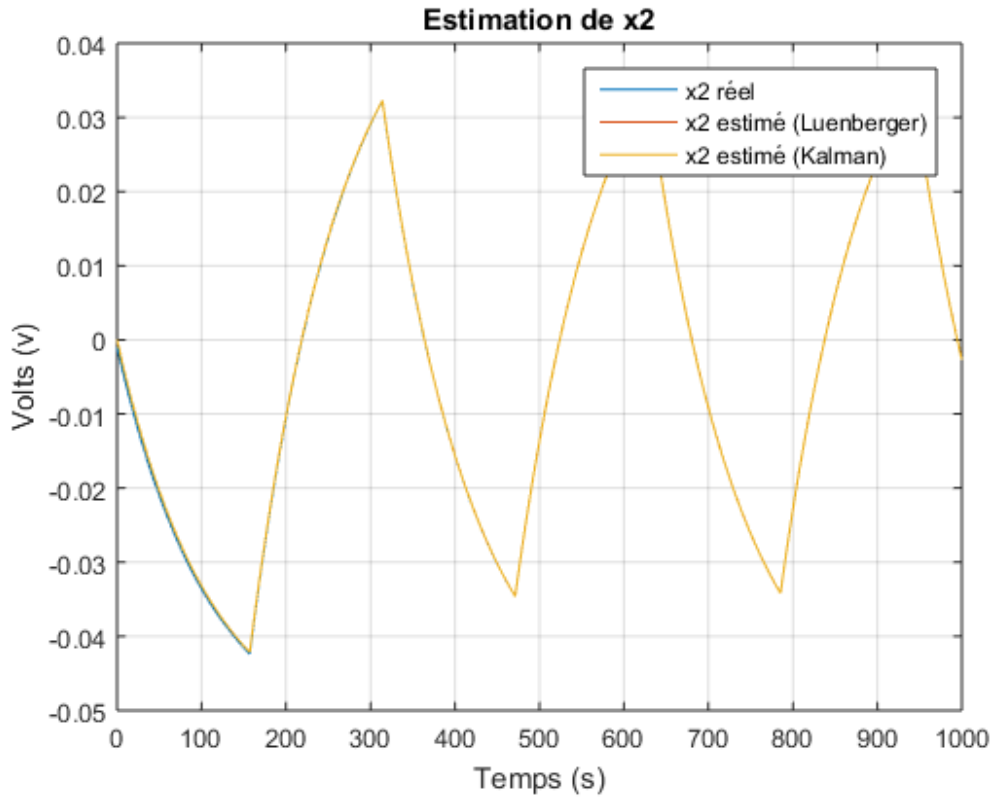


FIGURE III.3 – Courbes de  $x_2$  réel et des estimées  $\hat{x}_{2L}$  et  $\hat{x}_{2K}$  dans le cas sans bruit

Le SOC correspond à  $100 * x_3$ , mais il bornée entre 0 et 100.

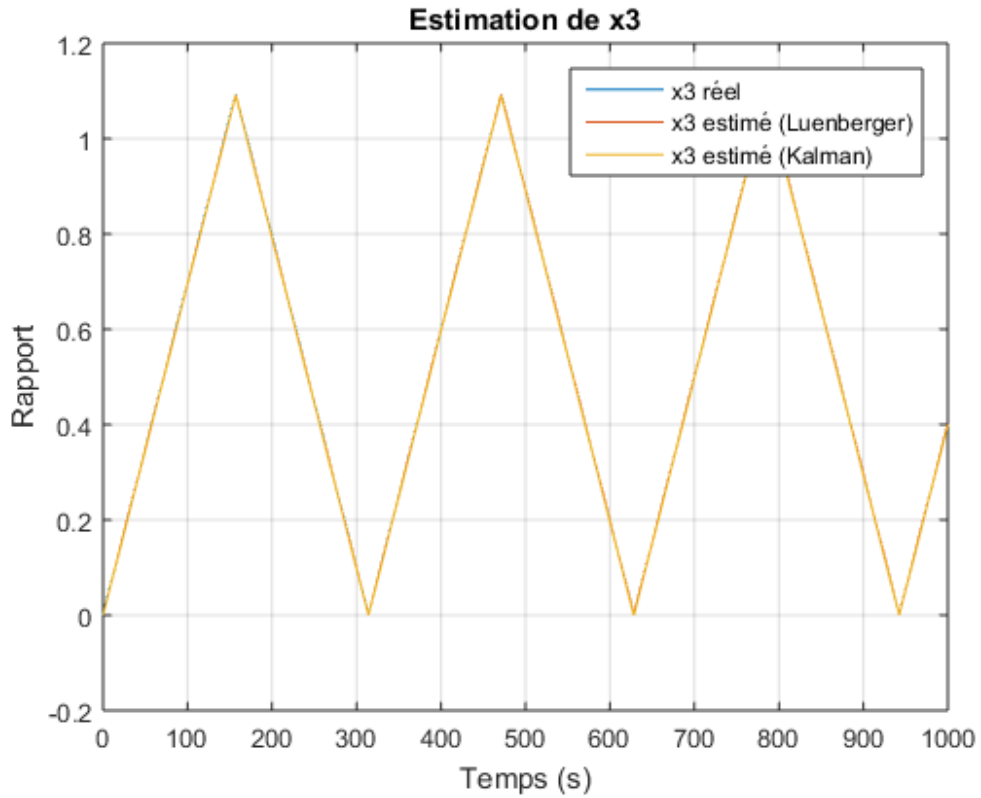


FIGURE III.4 – Courbes de  $x_{3réel}$  et des estimées  $\hat{x}_{3L}$  et  $\hat{x}_{3K}$  dans le cas sans bruit

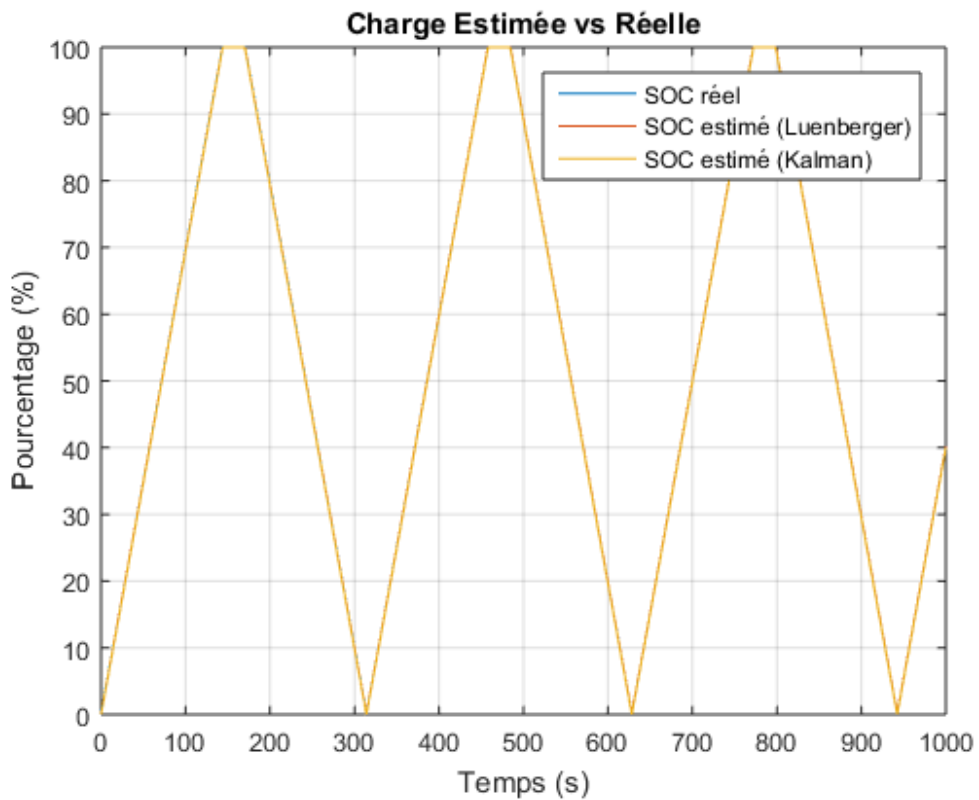


FIGURE III.5 – Courbes de SoC réel et des estimées  $\hat{SoC}_L$  et  $\hat{SoC}_K$  dans le cas sans bruit

## 3.2 Simulation du système avec bruit

Dans cette partie, nous présentons les simulations du modèle dynamique du système en tenant compte de la présence de bruit. Le bruit est représenté par un bruit blanc gaussien ajouté aux équations du système, et son impact est analysé en fonction du rapport signal sur bruit (SNR), qui exprime la proportion entre la puissance du signal et celle du bruit.

### 3.2.1 Modélisation du bruit dans le système

Le modèle initial du système sans bruit est décrit par les équations suivantes :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{III.7})$$

$$y = Cx \quad (\text{III.8})$$

Après l'introduction du bruit blanc gaussien, les équations modifiées deviennent :

— **Équation d'état bruitée :**

$$\dot{x}_{\text{bruitée}} = Ax + Bu + w \quad (\text{III.9})$$

où  $w$  représente le bruit blanc gaussien affectant la dérivée de l'état.

— **Équation de sortie bruitée :**

$$y_{\text{bruitée}} = Cx + v \quad (\text{III.10})$$

où  $v$  est le bruit blanc gaussien affectant la sortie.

Le niveau de bruit est contrôlé par le rapport signal sur bruit (SNR). Cette relation est essentielle pour comprendre l'impact du bruit sur les performances du système simulé.

## 3.3 Simulation pour un rapport signal sur bruit (SNR) de 30 dB

Avant d'aborder les simulations pour différents niveaux de SNR, examinons en détail la simulation avec un SNR de 30 dB. Cette valeur correspond à une situation où le signal est nettement dominant par rapport au bruit. Un SNR de 30 dB est souvent utilisé pour modéliser des systèmes dans lesquels il existe une perturbation modérée, mais le signal reste suffisamment propre pour être interprétable.

Dans cette simulation, du bruit blanc gaussien est injecté à la fois dans les équations d'état et de sortie. La puissance du bruit est ajustée pour correspondre à un rapport signal sur bruit de 30 dB, ce qui signifie que la puissance du signal ( $P_{\text{signal}}$ ) est 1000 fois

supérieure à celle du bruit ( $P_{\text{bruit}}$ ). Mathématiquement, cela se traduit par le rapport suivant :

$$\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} = 1000 \quad (\text{III.11})$$

Les équations du système sont alors modifiées pour inclure ce bruit et peuvent être exprimées ainsi :

1. **\*\*Équation d'état :\*\***

$$\dot{x}_{\text{bruitée}} = Ax + Bu + w_{30} \quad (\text{III.12})$$

où  $w_{30}$  est le bruit blanc gaussien ajouté au modèle.

2. **\*\*Équation de sortie :\*\***

$$y_{\text{bruitée}} = Cx + v_{30} \quad (\text{III.13})$$

où  $v_{30}$  est le bruit blanc gaussien affectant la sortie.

Dans ce scénario, bien que le bruit soit présent dans le système, son influence est relativement faible. Le bruit, qui peut provenir de diverses sources telles que des capteurs ou des perturbations environnementales, est représenté par des fluctuations aléatoires superposées aux signaux d'état réels. Dans les simulations, ces fluctuations sont modélisées par un bruit gaussien de moyenne nulle, permettant d'analyser leur impact sur les variables d'état.

### 3.3.1 Résultats des Estimations des Variables d'État

Les courbes des trois variables d'état réelles  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , qui sont respectivement la tension  $V_{C1}$ , la tension  $V_{C2}$  et l'état de charge (SoC), ainsi que leurs estimées correspondantes  $\hat{x}_{iL}$  (pour  $i = 1, 2, 3$ ) obtenues par l'observateur de Luenberger et  $\hat{x}_{iK}$  (pour  $i = 1, 2, 3$ ) obtenues par le filtre de Kalman est donné par les figures [III.6](#), [III.7](#) et [III.8](#). Le (SoC) en pourcentage dans la figure suivante [III.9](#), respectivement.

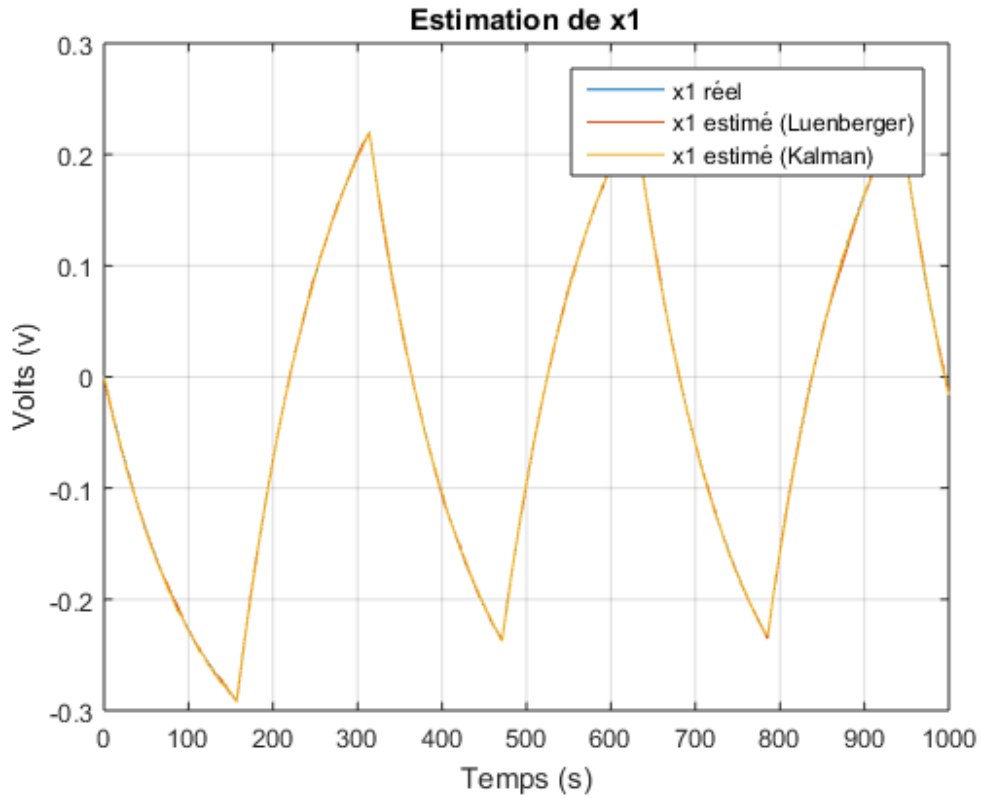


FIGURE III.6 – Courbes de  $x_1$  et des estimées  $\hat{x}_{1L}$  et  $\hat{x}_{1K}$  en présent des bruits (30 dB).

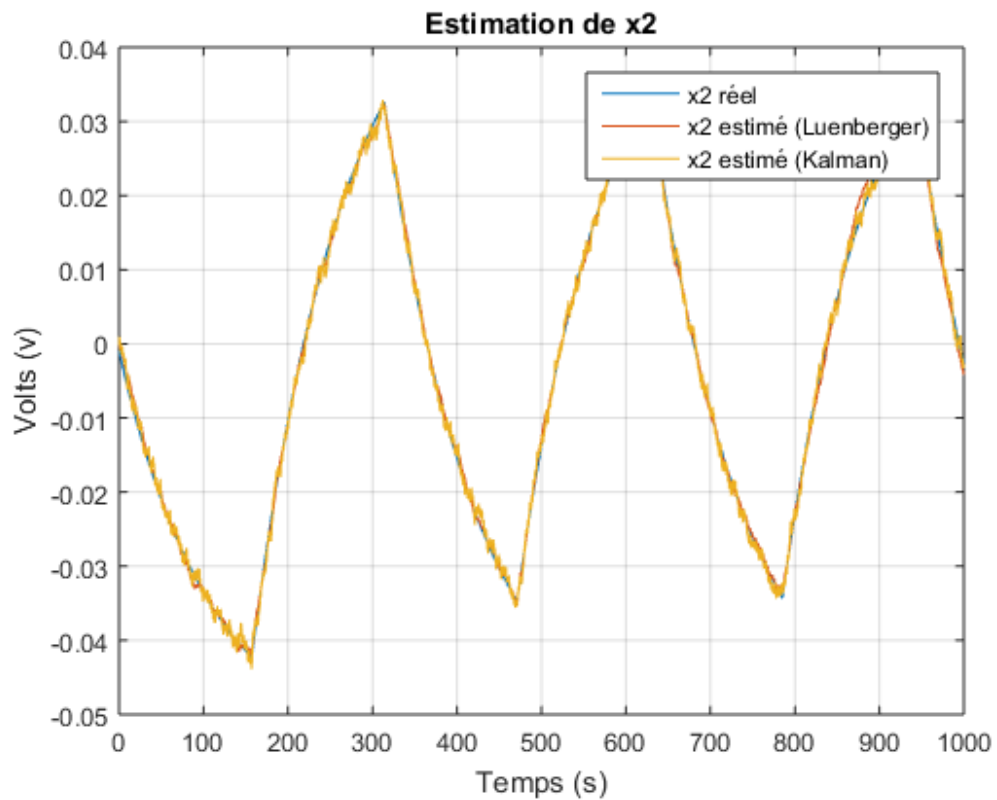


FIGURE III.7 – Courbes de  $x_2$  et des estimées  $\hat{x}_{2L}$  et  $\hat{x}_{2K}$  en présent des bruits (30 dB).

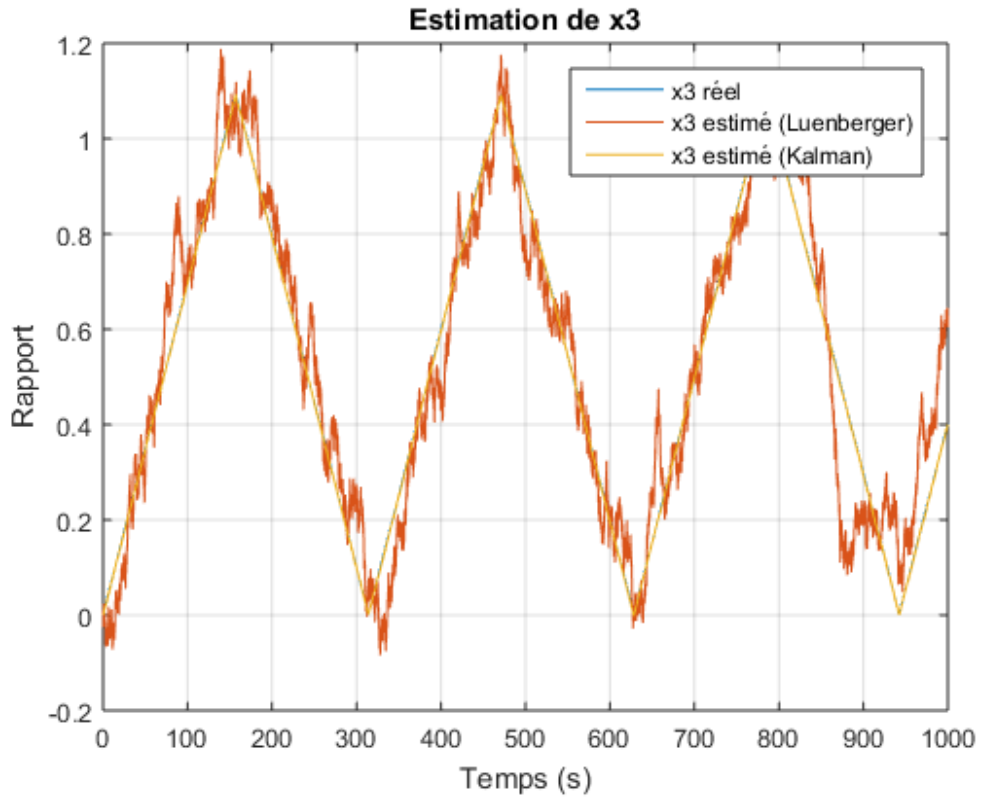


FIGURE III.8 – Courbes de  $x_3$  et des estimées  $\hat{x}_{3L}$  et  $\hat{x}_{3K}$  en présent des bruits (30 dB).

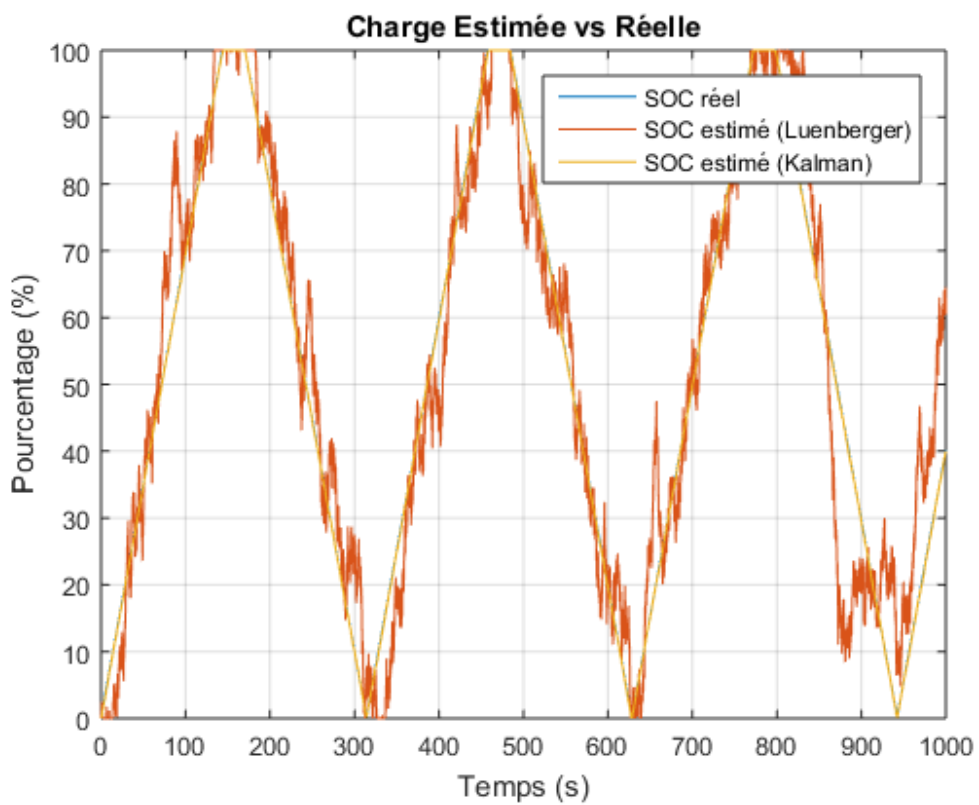


FIGURE III.9 – SoC en (%) en présent des bruits (30 dB).

### 3.3.2 Simulations pour différents niveaux de SNR

Les simulations ont été réalisées pour les valeurs de SNR suivantes : 10, 20, 30, 40 et 50 dB. À chaque niveau de SNR, le bruit ajouté est ajusté en fonction du rapport entre la puissance du signal et celle du bruit.

**SNR = 10 dB** : le rapport signal sur bruit est modéré avec  $\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} = 10$ . L'équation devient :

$$\dot{x}_{\text{bruitée}} = Ax + Bu + w_{10} \quad (\text{III.14})$$

$$y_{\text{bruitée}} = Cx + v_{10} \quad (\text{III.15})$$

Dans ce cas, le bruit est assez fort avec un rapport signal sur bruit (SNR) de 10 dB, ce qui signifie que le bruit  $w_{10}$  (bruit de système) et  $v_{10}$  (bruit de mesure) sont comparables au signal.

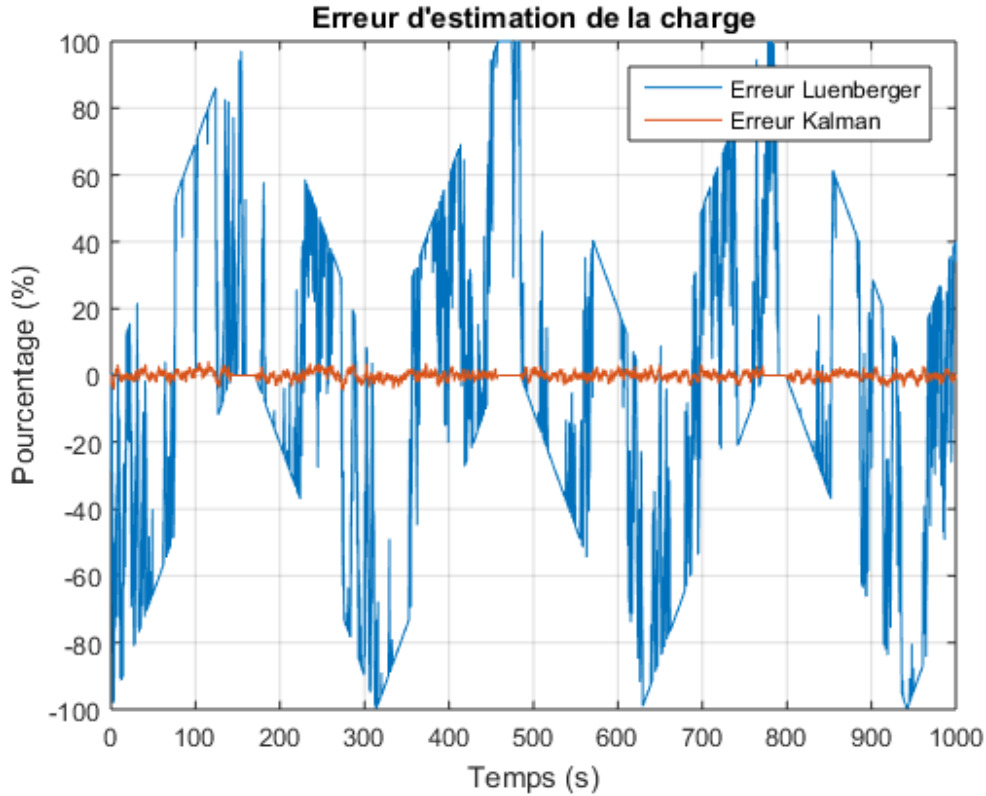


FIGURE III.10 – Erreur d'estimation de l'observateur de Luenberger et filtre de Kalman (intensité des bruits 10 dB).

**SNR = 20 dB** : Le bruit est atténué par rapport au signal, avec  $\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} = 100$ . L'équation devient :

$$\dot{x}_{\text{bruitée}} = Ax + Bu + w_{20} \quad (\text{III.16})$$

$$y_{\text{bruitée}} = Cx + v_{20} \quad (\text{III.17})$$

Le bruit est moins présent ici, ce qui rend  $w_{20}$  et  $v_{20}$  plus faibles par rapport au signal.

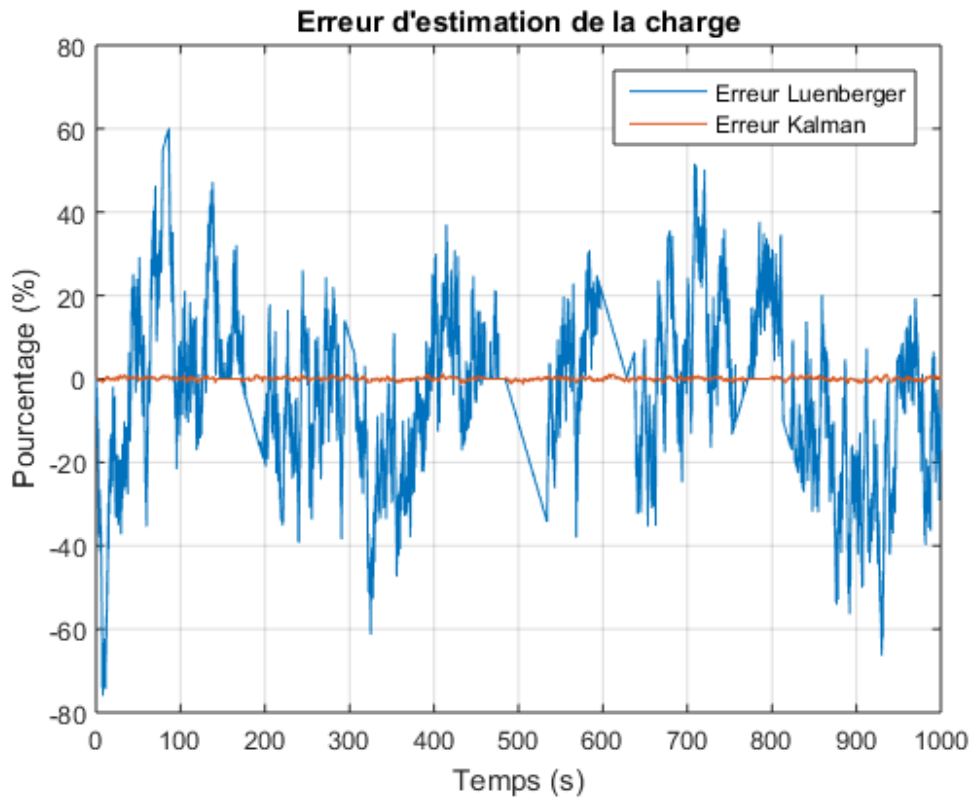


FIGURE III.11 – Erreur d’estimation de l’observateur de Luenberger et filtre de Kalman (intensité des bruits 20 dB).

**SNR = 30 dB** : Le signal devient beaucoup plus dominant, avec  $\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} = 1000$ . L’équation devient :

$$\dot{x}_{\text{bruitée}} = Ax + Bu + w_{30} \quad (\text{III.18})$$

$$y_{\text{bruitée}} = Cx + v_{30} \quad (\text{III.19})$$

Le bruit  $w_{30}$  et  $v_{30}$  est encore plus faible par rapport au signal dominant.

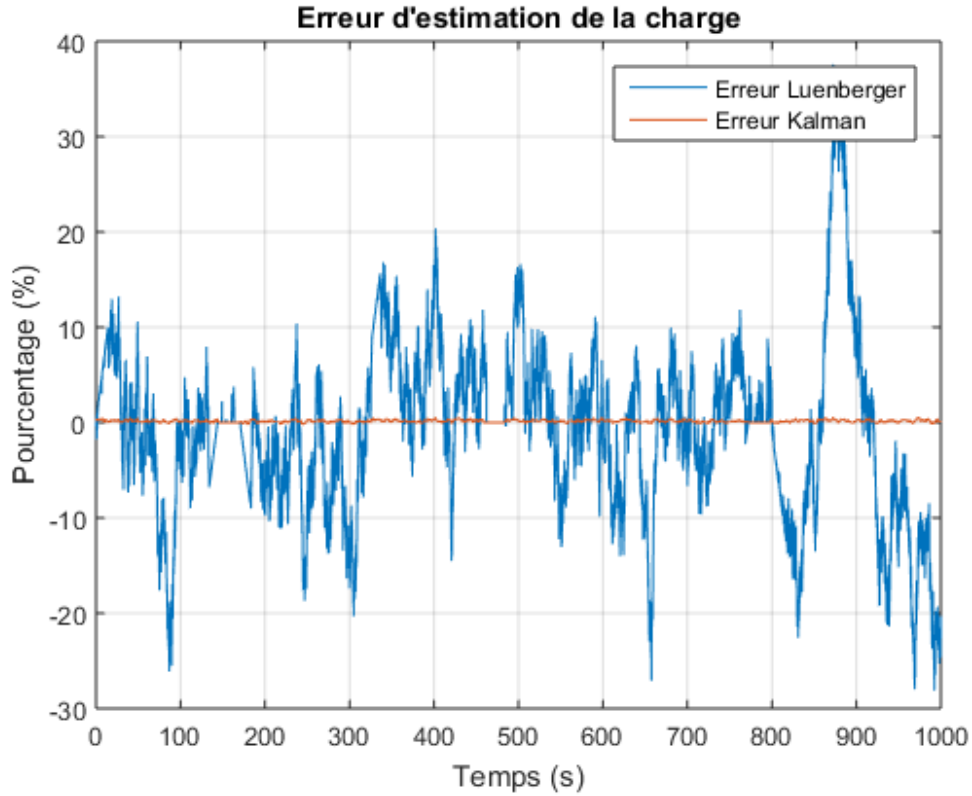


FIGURE III.12 – Erreur d’estimation de l’observateur de Luenberger et filtre de Kalman (intensité des bruits 30 dB).

**SNR = 40 dB** : Le bruit est très faible par rapport au signal, avec  $\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} = 10000$ . L’équation devient :

$$\dot{x}_{\text{bruitée}} = Ax + Bu + w_{40} \quad (\text{III.20})$$

$$y_{\text{bruitée}} = Cx + v_{40} \quad (\text{III.21})$$

Ici, le bruit  $w_{40}$  et  $v_{40}$  est extrêmement faible, le signal est largement prédominant.

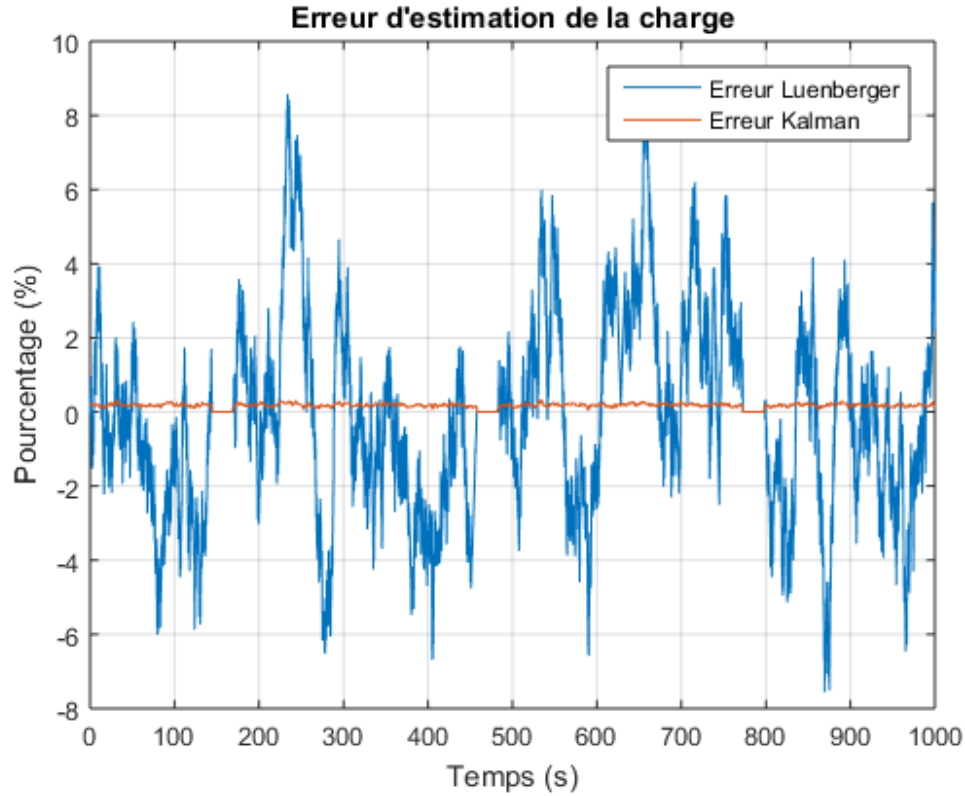


FIGURE III.13 – Erreur d’estimation de l’observateur de Luenberger et filtre de Kalman (intensité des bruits 40 dB).

**SNR = 50 dB** : Le bruit devient négligeable, avec  $\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} = 100000$ . L’équation devient :

$$\dot{x}_{\text{bruitée}} = Ax + Bu + w_{50} \quad (\text{III.22})$$

$$y_{\text{bruitée}} = Cx + v_{50} \quad (\text{III.23})$$

Dans ce cas,  $w_{50}$  et  $v_{50}$  représentent un bruit si faible qu’il est pratiquement négligeable comparé au signal.

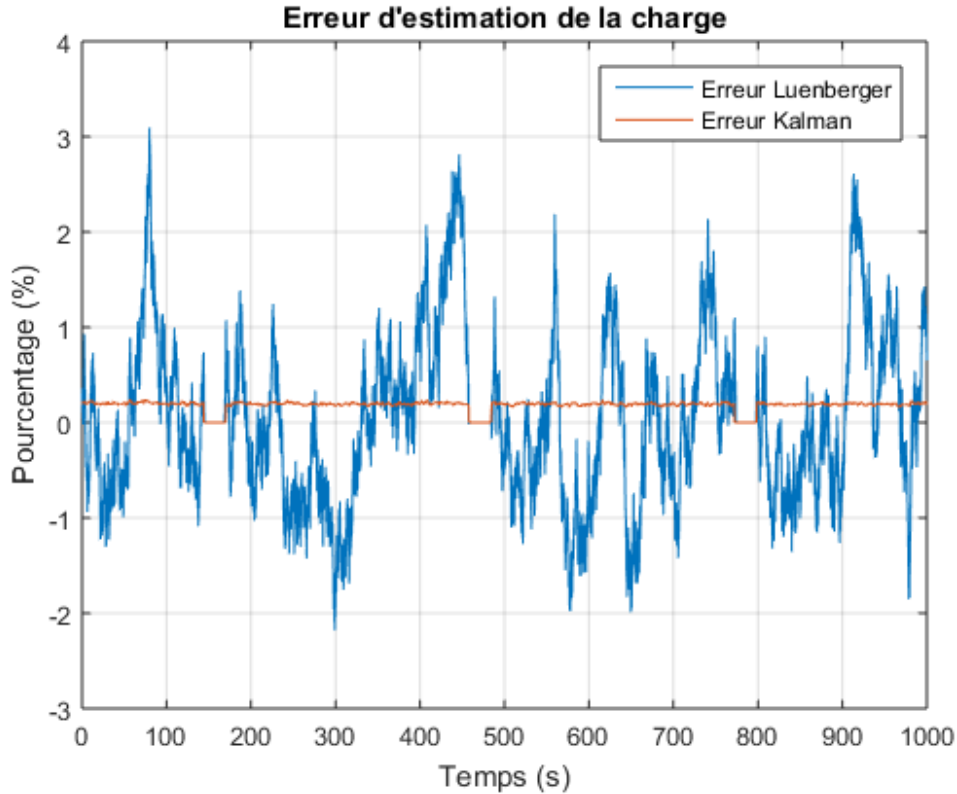


FIGURE III.14 – Erreur d’estimation de l’observateur de Luenberger et filtre de Kalman (intensité des bruits 50 dB).

Les simulations montrent que pour des valeurs de SNR faibles (comme 10 dB), le bruit affecte considérablement le signal, rendant difficile la récupération des informations d’origine. À mesure que le SNR augmente (20 dB, 30 dB, 40 dB, 50 dB), le signal devient de plus en plus dominant et l’impact du bruit diminue. Les simulations confirment que des valeurs de SNR élevées sont nécessaires pour assurer une bonne performance du système en présence de perturbations.

Les courbes des erreurs d’estimation de l’état de charge *SoC* obtenues par l’observateur de Luenberger et le filtre de Kalman sont tracées sur les figures [III.10](#), [III.11](#), [III.12](#), [III.13](#) et [III.14](#).

Pour des bruits faibles (Figure [III.14](#)), les deux méthodes offrent des performances presque similaires, car l’observateur de Luenberger corrige efficacement les petites erreurs et le filtre de Kalman utilise ses informations probabilistes pour minimiser les effets du bruit. Cependant, à mesure que l’intensité du bruit augmente, l’observateur de Luenberger montre une dégradation plus marquée dans ses estimations, car il n’est pas conçu pour modéliser explicitement le bruit. En revanche, le filtre de Kalman continue de fournir des estimations plus précises, car il s’ajuste en fonction des covariances des bruits. Pour les niveaux de bruit plus élevés ( $\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} = 1000$  et  $\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} = 100$ ) (Figures [III.11](#) et [III.12](#)),

la différence devient encore plus notable : le filtre de Kalman maintient une meilleure performance, tandis que l'erreur d'estimation de l'observateur de Luenberger augmente de façon significative.

Cette simulation met en évidence la supériorité du filtre de Kalman en environnement bruité, surtout lorsque les perturbations deviennent importantes. Mais même le filtre de Kalman à partir de certaines valeurs de bruit élevé ( $\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} = 10$ ) montre une dégradation (Figure III.10).

## 3.4 Discussion

### 3.4.1 Sur l'observateur de Luenberger :

— Sans bruit :

- Hypothèse : L'observateur de Luenberger fonctionne en supposant que le modèle est exact et que les mesures sont fiables.

- Résultats attendus : Lorsque le bruit est absent, l'observateur de Luenberger peut estimer correctement les états  $x_1, x_2, x_3$  ainsi que le SoC, car il suit la dynamique du modèle. Les erreurs d'estimation tendent à disparaître avec le temps si le gain de l'observateur est bien ajusté.

- Commentaire : Le comportement de l'observateur sans bruit est souvent idéal. Il n'y a pas d'incertitude dans le modèle ou dans les mesures, et l'estimation des états converge rapidement.

— Avec bruit :

- En présence de bruit, l'observateur de Luenberger peut être moins efficace, car il ne prend pas explicitement en compte les perturbations.

- Résultats attendus : Le bruit peut entraîner des erreurs plus importantes dans les estimations. La convergence de l'observateur peut être affectée, et les estimations peuvent osciller ou se décaler.

- Commentaire : L'observateur de Luenberger ne gère pas bien les bruits aléatoires dans les systèmes non idéaux, car il est basé sur un modèle déterministe. Cela peut rendre les estimations du SoC moins fiables lorsque le bruit est présent.

### 3.4.2 Sur le filtre de Kalman :

— Sans bruit :

- Le filtre de Kalman, même sans bruit, optimise ses estimations en fonction de la covariance de l'erreur, mais il excelle surtout en présence de bruit.

- Résultats attendus : En l'absence de bruit, il peut fournir des résultats similaires à ceux de l'observateur de Luenberger. Cependant, ses avantages ne sont pleinement visibles que lorsque le bruit est pris en compte.

- Commentaire : Dans un contexte sans bruit, la performance du filtre de Kalman est similaire à celle de Luenberger, mais il se distingue par sa capacité à intégrer des informations probabilistes sur l'incertitude.
- Avec bruit :
  - Le filtre de Kalman est conçu pour fonctionner en présence de bruit. Il minimise les erreurs de manière optimale en prenant en compte la covariance du bruit dans les mesures et les états.
  - Résultats attendus : Le filtre de Kalman peut fournir des estimations plus précises des états  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  et du SoC en présence de bruit. Sa capacité à modéliser le bruit de manière statistique améliore la qualité des estimations, même lorsque les mesures sont bruyantes.
  - Commentaire : Le filtre de Kalman est particulièrement efficace pour les systèmes avec bruit, car il utilise la covariance du bruit pour ajuster ses estimations de manière optimale. Cela en fait un choix supérieur à l'observateur de Luenberger dans ce contexte, avec une estimation du SoC plus stable et plus précise.

### 3.4.3 Comparaison globale :

- Sans bruit : Les deux méthodes fournissent des résultats similaires, l'observateur de Luenberger étant plus simple à implémenter, tandis que le filtre de Kalman peut être perçu comme plus complexe sans offrir de gains significatifs dans ce cas.
- Avec bruit : Le filtre de Kalman montre des performances supérieures, car il gère le bruit de manière probabiliste, alors que l'observateur de Luenberger peut rencontrer des difficultés pour estimer les états de manière précise lorsque le bruit est présent.

### 3.4.4 Sur le choix du type d'observateur

- Performance du Luenberger : Simple à mettre en œuvre et efficace pour des systèmes sans bruit, mais limité lorsqu'il y a des perturbations stochastiques.
- Performance du Kalman : Robuste face au bruit, il offre des estimations plus fiables des états et du SOC, mais est plus complexe à paramétrer, en particulier pour les systèmes non linéaires.
- Choix de l'observateur : Pour un système avec des mesures bruitées (comme c'est souvent le cas dans les systèmes réels), le filtre de Kalman est préférable. Toutefois, si le bruit est négligeable, l'observateur de Luenberger peut suffire et offre une solution plus simple.

En résumé, la simulation montre la robustesse du filtre de Kalman face au bruit et son adaptation probabiliste, tandis que l'observateur de Luenberger fonctionne bien dans un cadre idéal sans bruit, mais est moins performant dans les conditions bruitées.

## 4 Conclusion

Les résultats de cette étude montrent que le filtre de Kalman-Bucy offre de meilleures performances en termes de précision et de robustesse par rapport à l'observateur de Luenberger pour l'estimation de l'état de charge d'une batterie lithium-ion. Cependant, l'observateur de Luenberger peut être une alternative intéressante pour des applications où la complexité de calcul est une contrainte. Des travaux futurs pourraient porter sur l'intégration d'un modèle de vieillissement dans le modèle de Thévenin afin d'évaluer l'impact du vieillissement sur les performances des estimateurs. De plus, l'utilisation de données expérimentales permettrait de valider les résultats obtenus par simulation.

# Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'estimation de l'état de charge (SoC) des batteries à travers l'application de deux méthodes : l'observateur de Luenberger et le filtre de Kalman-Bucy, sur un modèle de Thévenin du second ordre. L'importance d'une estimation précise du SoC est indéniable, surtout dans le contexte des véhicules électriques, où chaque élément de performance est lié à la sécurité, l'efficacité énergétique et la durabilité des batteries.

Les résultats des simulations ont montré que chaque méthode présente des avantages spécifiques. L'observateur de Luenberger se distingue par sa rapidité et sa simplicité, ce qui le rend adapté à des applications en temps réel. En revanche, le filtre de Kalman-Bucy offre une robustesse supérieure face aux incertitudes et aux bruits, garantissant des estimations plus fiables dans des conditions variables.

Néanmoins, ces techniques ne sont pas sans limitations. L'observateur de Luenberger peut souffrir de sensibilités aux erreurs de modèle, tandis que l'efficacité du filtre de Kalman-Bucy repose sur des hypothèses précises concernant les caractéristiques du bruit, souvent difficiles à établir en pratique.

En somme, notre étude souligne la nécessité d'une estimation précise du SoC pour assurer la sécurité et l'efficacité des systèmes de batteries, tout en ouvrant des pistes pour des recherches futures. Comme perspectives, sans être exhaustifs, nous pouvons dégager les différents points suivants

- Dans ce mémoire, nous avons simplifié la relation entre l'état de charge et la tension à vide en considérant une relation linéaire. Dans la réalité, cette relation est plus complexe et de forme non linéaire. Les observateurs non linéaires, comme le filtre de Kalman étendu, s'imposent alors.
- Des approches hybrides ou des modèles plus avancés pourraient améliorer encore la dynamique des estimations, contribuant ainsi à optimiser la gestion de l'énergie dans les véhicules électriques. Ces avancées sont essentielles pour favoriser l'adoption généralisée des technologies de transport durable, en garantissant non seulement la performance mais aussi la sécurité des utilisateurs.

- Il serait aussi souhaitable d'envisager une implémentation expérimentale moyennant des circuits numériques reconfigurables (micro contrôleurs PIC, carte Arduino, carte FPGA) afin de valider aussi bien le modèle que les stratégies d'estimation.

# Bibliographie

- [1] C. D. Rahn and C-Ya Wang. *Battery Systems Engineering*, Wiley, 2013.
- [2] Battery University - The Battery.  
[http://batteryuniversity.com/learn/article/the\\_battery](http://batteryuniversity.com/learn/article/the_battery), consulté en septembre 2024.
- [3] A. M. Boudiba, T. Sellami *Système de gestion de batteries – Estimation de l'état de charge*. Mémoire de Master, Faculté des Sciences de l'Ingénierie, Département Électronique, Promotion 2020-2021.
- [4] Energy.gov - Energy Storage.  
<http://www.energy.gov/eere/vehicles/energy-storage>, consulté en septembre 2024.
- [5] Battery University - Energy Density.  
[http://batteryuniversity.com/learn/article/energy\\_density](http://batteryuniversity.com/learn/article/energy_density), consulté en septembre 2024.
- [6] Battery University - Coulombic and Energy Efficiency with the Battery.  
[http://batteryuniversity.com/learn/article/coulombic\\_and\\_energy\\_efficiency\\_with\\_the\\_battery](http://batteryuniversity.com/learn/article/coulombic_and_energy_efficiency_with_the_battery), consulté en septembre 2024.
- [7] J. Warner. *Handbook of Lithium-Ion Battery Pack Design : Chemistry, Components, Types and Terminology*. Elsevier, 2015.
- [8] G. Plett, M. Scottus Trimboli, *Battery Management Systems*, Artech House, 2024.
- [9] Lithium Battery Factory, *État de charge (SOC) des batteries au lithium*.  
<https://www.lithium-battery-factory.com/fr/lithium-battery-state-of-charge/#:~:text=>, consulté septembre 2024.
- [10] S. Dhameja. *Electric Vehicle Battery Systems*, Newnes, 2001.
- [11] K.-J. Lee, K. Smith, A. Pesaran, and G.-H. Kim, Three dimensional thermal-, electrical-,and electrochemical-coupled model for cylindrical wound large format lithium-ion batteries, *Journal of Power Sources*, 241, pp. 20–32, 2013.
- [12] F-A LeBel, *Méthode de dimensionnement et modélisation de batteries lithium-ion*, Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke (Québec), Canada, 2017.

- [13] D. Allart, *Gestion et modélisation électrothermique des batteries lithium-ion*, Thèse Doctorat, Université de Normandie, 2017.
- [14] Pierre Blondel HAL Id (Archives Ouvertes), 2019, <https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02096451>.
- [15] H. L. Chan, A new battery model for use with battery energy storage systems and electric vehicles power systems, IEEE Power Engineering Society Winter Meeting Conference, vol. 1, pp. 470-475, Singapore, January 2000.
- [16] Y-H Kim, H-D Ha, Design of interface circuits with electrical battery models, IEEE Transactions on Industrial Electronics, 44, n° 1, pp.81-86, February 1997.
- [17] M. Urbain, *Modélisation électrique et énergétique des accumulateurs Li-Ion. Estimation en ligne de la SOC et de la SOH*, Thèse de Doctorat, Université de Lorraine, 2009.
- [18] C. Forgez, D. Vinh Do, G. Friedrich, M. Morcrette, C. Delacourt, Thermal modeling of a cylindrical LiFePO<sub>4</sub>/graphite lithium-ion battery, Journal of Power Sources, 195, pp. 2961–2968, 2010.
- [19] K&K Associates, *Thermal Network Modeling Handbook*, Westminster, Handbook, Westminster, 1999.
- [20] N. Damay, *Modélisation thermique d'une batterie Li-ion prismatique de grande capacité et validation expérimentale*, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2017.
- [21] E. Barsoukov, J. H. Jang, H. Lee, Thermal impedance spectroscopy for Li-ion batteries using heat-pulse response analysis, Journal of Power Sources, 109, pp. 313–320, 2002.
- [22] S. Abada, Compréhension et modélisation de l'emballage thermique de batteries Li-ion neuves et vieilles, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2017.
- [23] J. Newman, W. Tiedemann, Porous-electrode theory with battery applications, AIChE, 21 pp. 25–41, 1975.
- [24] B. Wu, R. Dougal, R. E. White, Resistive companion battery modeling for electric circuit simulations, J. Power Sources, 93, 186–200, 2001.
- [25] E. Prada, D. Di Domenico, Y. Creff, J. Bernard, V. Sauvant-Moynot, F. Huet, Simplified electrochemical and thermal model of LiFePO<sub>4</sub>-graphite Li-ion batteries for fast charge applications, Journal of The Electrochemical Society, 159, pp. 1508-1519, 2012.
- [26] M. Doyle, T. F. Fuller, J. Newman, Modeling of galvanostatic charge and discharge of the Lithium/Polymer/Insertion cell, Journal of The Electrochemical Society, 140, pp. 1526–1533, 1999.

- [27] D. Bernardi, E. Pawlikowski, J. Newman, A general energy balance for battery systems, *Journal of The Electrochemical Society*, 132, pp. 5–12, 1985.
- [28] K. J. Lee, K. Smith, A. Pesaran, G. H. Kim, Three dimensional thermal-, electrical-, and electrochemical-coupled model for cylindrical wound large format lithium-ion batteries, *J. Power Sources*, 241, pp 20–32, 2013.
- [29] H. Sun, X. Wang, B. Tossan, R. Dixon, Three-dimensional thermal modeling of a lithium-ion battery pack, *J. Power Sources*, 206, pp. 349–356, 2012.
- [30] X. Zhang, Thermal analysis of a cylindrical lithium-ion battery, *Electrochimica Acta*, 56, pp. 1246–1255, 2011.
- [31] L. H. Saw, Y. Ye, A. Tay, Electrochemical–thermal analysis of Lithium Iron Phosphate cell, *Energy Conversion and Management*, 75, pp. 162–174, 2013.
- [32] M. Xiao, S. y. Choe, Theoretical and experimental analysis of heat generations of a pouch type LiMn<sub>2</sub>O<sub>4</sub>/carbon high power Li-polymer battery, *J. Power Sources*, 241, pp. 46-55, 2013.
- [33] C. Zhu, X. Li, L. Song, L. Xiang, Development of a theoretically based thermal model for lithium ion battery pack, *J. Power Sources*, 22, pp. 155–164, 2013.
- [34] N. Baba, H. Yoshida, M. Nagaoka, C. Okuda, S. Kawauchi, Numerical simulation of thermal behavior of lithium-ion secondary batteries using the enhanced single particle model, *J. Power Sources*, 252, pp. 214–228, 2014.
- [35] L. Zhang, C. Lyu, G. Hinds, L. Wang, W. Luo, J. Zheng, K. Ma, Parameter sensitivity analysis of cylindrical LiFePO<sub>4</sub> battery performance using multi-physics modeling, *Journal of The Electrochemical Society*, 161, pp. 762-776, 2014.
- [36] X. Lin, H. E. Perez, S. Mohan, J. B. Siegel, A. G. Stefanopoulou, Y. Ding, M. P. Castanier, A lumped-parameter electro-thermal model for cylindrical batteries, *J. Power Sources*, 257, pp. 1–11, 2014.
- [37] T. Wang, K. J. Tseng, S. Yin, X. Hu, Development of a one-dimensional thermal electrochemical model of lithium ion battery : IECON 2013 - 39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, pp. 6709–6714, 2013.
- [38] J. Christensen, D. Cook, P. Albertus, An efficient parallelizable 3D thermoelectrochemical model of a Li-ion cell, *Journal of The Electrochemical Society*, 160 pp. 2258-2267, 2013.
- [39] W. Wu, X. Xiao, X. Huang, The effect of battery design parameters on heat generation and utilization in a Li-ion cell, *Electrochimica Acta*, 83, pp. 227–240, 2012.
- [40] K. Smith, C.-Y. Wang, Power and thermal characterization of a lithium-ion battery pack for hybrid-electric vehicles, *J. Power Sources*, 160 pp. 662–673, 2006.
- [41] Y. Ye, Y. Shi, N. Cai, J. Lee, X. He, Electro-thermal modeling and experimental validation for lithium ion battery, *J. Power Sources*, 199 pp. 227–238, 2012.

- [42] E. Prada, D. Di Domenico, Y. Creff, J. Bernard, V. Sauvant-Moynot, F. Huet, A simplified electrochemical and thermal aging model of LiFePO<sub>4</sub>-graphite Li-ion batteries : power and capacity fade simulations, *Journal of The Electrochemical Society*, 160, pp. 616-628, 2013.
- [43] A. Awarke, S. Pischinger, J. Ogrzewalla, Pseudo 3D modeling and analysis of the SEI growth distribution in large format Li-ion polymer pouch cells, *Journal of The Electrochemical Society*, 160, pp. 172-181, 2012.
- [44] L. Liu, J. Park, X. Lin, A. M. Sastry, W. Lu, A thermal-electrochemical model that gives spatial-dependent growth of solid electrolyte interphase in a Li-ion battery, *J. Power Sources*, 268, pp. 482–490, 2014.
- [45] J. Vazquez-Arenas, L. E. Gimenez, M. Fowler, T. Han, S.-k. Chen, A rapid estimation and sensitivity analysis of parameters describing the behavior of commercial Li-ion batteries including thermal analysis, *Energy Conversion and Management*, 87, pp 472-482, 2014.
- [46] S. Allu, S. Kalnaus, W. Elwasif, S. Simunovic, J. A. Turner, S. Pannala, A new open computational framework for highly-resolved coupled three-dimensional multiphysics simulations of Li-ion cells, *J. Power Sources*, 246, pp. 876–886, 2014.
- [47] M. Guo, R. E. White, A distributed thermal model for a Li-ion electrode plate pair, *J. Power Sources*, 221, pp. 334–344, 2014.
- [48] D. A. H. Mc. Cleary, J. P. Meyers, B. Kim, Three-dimensional modeling of electrochemical performance and heat generation of spirally and prismatically wound Lithium-ion batteries, *Journal of The Electrochemical Society* 160, pp. 1931-1943, 2013.
- [49] B. Kennedy, D. Patterson, S. Camilleri, *Utilisation de batteries lithium-ion dans les véhicules électriques*, *Journal of Power Sources*, 90 pp. 156-162, 2000.
- [50] H. Hongwen, X. Rui, F. Jinxin, Évaluation des modèles de circuits équivalents aux batteries lithium-ion pour l'estimation de l'état de charge par une approche expérimentale, *Energies*, 4, pp 582-598, 2011.
- [51] S. Lee, J. Kim, J. Lee, B. Cho, Estimation de l'état de charge et de la capacité d'une batterie lithium-ion à l'aide d'une nouvelle tension en circuit ouvert par rapport à l'état de charge, *Journal of Power Sources*, 185 pp. 1367-1373, 2005.
- [52] J. Dupont, *Analyse des circuits électroniques : Approche Thévenin et Norton d'ordre N*. Éditions Techniques, 2020.
- [53] A. Smith, *et al.*, *Advanced Circuit Analysis Techniques : Models and Applications*. Wiley, 2018.
- [54] M. Benamrani O. Mahkloufi *Observateur non linéaire de Luenberger pour estimer les grandeurs d'états d'un moteur asynchrone*, Mémoire de Master Université Ahmed Draia ADRAR, 2020.

- [55] , H. Bouchared *Observateur non linéaire mode glissant*, Mémoire de magister, Université Ferhat Abbas-Sétif 1, 2013.
- [56] F. Belmahdi, *Application du filtre de Kalman pour le débruitage des signaux*, Mémoire de Magister, UMMTO, 2015.
- [57] Support de Cours. «Observateurs et diagnostic des véhicules électriques». Master 2 CVPE, Département Automatique UMMTO, 2024.
- [58] M. Jaiti, *Introduction au filtre de Kalman : Exercices corrigés et sessions Matlab*, Université Cadi Ayyad, 2019.
- [59] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit et G. Ferreres, *Robustesse et Commande Optimale*, Cepadues Editions, 1990.
- [60] Aquaportail, *Filtre de Kalman*, Disponible à : <http://www.aquaportail.com/definition-5274-filtre-de-kalman.html>, consulté en septembre 2024.
- [61] D. Alazard, *Introduction au filtrage de Kalman*, Notes de cours, 2011.
- [62] R. Belhadji, R. Larabi, *Prédiction à l'aide du Filtre de Kalman des Symboles M-QAM dans une Transmission Mono Porteuse*, Mémoire de Master 2, Université de Blida 2015.
- [63] Mohinder S. Grewal et Angus P. Andrews, *Kalman Filtering : Theory and Practice with MATLAB*, Wiley, [2001].
- [64] G. Welch, G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, University of North Carolina at Chapel Hill, 2006, [https://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman\\_intro.pdf](https://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf)