

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZIOUZOU  
FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES DE GESTION ET DES SCIENCES COMMERCIALES  
DEPARTEMENT DES SCIENCES COMMERCIALES

MATHEMATIQUES 1 et 2  
(PREMIERE ANNEE LICENCE)  
AMGHROUS SMAIL , MCB

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2024/2025

## **Sommaire :**

### **Introduction**

**Chapitre1 : L'analyse combinatoire**

**Chapitre2 : Les suites numériques**

**Chapitre3 : Etude d'une fonction numérique d'une seule variable**

**Chapitre4 : La fonction logarithme et la fonction exponentielle.**

**Chapitre5 : Les intégrales et les primitives**

**Chapitre 6 : Les fonctions à plusieurs variables**

**Chapitre7 : Les matrices et les déterminants**

**Chapitre8 : Les systèmes d'équations linéaires**

**Bibliographie :**

## **Introduction :**

Ce manuel s'adresse aux étudiants de premières années sciences économiques, de gestion et des sciences commerciales. Il contient des cours, des séries d'exercices et leurs corrigés.

Même si les mathématiques ne sont pour les économistes, qu'un outil, un minimum de formation mathématique est indispensable pour une meilleure compréhension des phénomènes et des mécanismes économiques. Les différents chapitres présentés ont un lien directe avec beaucoup de modules de spécialité tels que la microéconomie, les mathématiques financières, les mathématiques de l'entreprise, les probabilités statistiques...

## **Chapitre 1 : L'analyse combinatoire**

**Introduction :** L'analyse combinatoire est une branche de mathématiques qui étudie comment dénombrer les objets.

### **1)Notions d'analyse combinatoire**

**1.1)Principe fondamental :** Considérons un ensemble E formé de vecteurs de p composantes tel que :

- La composante n°1 est choisie dans un ensemble de  $N_1$  éléments distincts
- La composante n°2 est choisie dans un ensemble de  $N_2$  éléments distincts
- La composante n°p est choisie dans un ensemble de  $N_p$  éléments distincts

$$\text{Donc card } E = N_1 * N_2 * \dots * N_p$$

Ce résultat porte le nom du principe fondamental d'analyse combinatoire .

**Exemple :** Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 02 plats et 04 desserts.

On applique le principe fondamental de l'analyse combinatoire . On peut donc composer  $3*2*4=24$  menus différents

### **2)Les méthodes de dénombrement**

#### **2.1 les arrangements**

##### **a) Les arrangements sans répétition**

**Définition :** On appelle arrangements de  $p$  éléments parmi  $n$  éléments de  $E$  ( $p \leq n$ ) toute suite ordonnée et sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$ .

**Théorème :** le nombre d'arrangements de  $p$  éléments parmi  $n$  est :  $A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$

**Remarque :**  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n! = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\text{Donc } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \dots (n-p+1)$$

Si  $p=0$ , par convention on aura  $A_n^0 = 1$

**Exemple :** Combien de nombres de deux chiffres distincts peut on former avec les chiffres 1,2,3,4,5

$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$ . On peut alors former 20 nombres de deux chiffres distincts avec les chiffres 1,2,3,4,5.

## b) Arrangements avec répétition

**Définition :** On appelle arrangement avec répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  toute suite ordonnée de  $p$  éléments parmi  $n$  avec répétition d'un ou plusieurs éléments parmi  $n$ .

**Théorème :** Si on note  $A_n^p$  le nombre d'arrangements avec répétition de  $p$  éléments parmi  $n$ , alors  $A_n^p = n^p$

Exemple : Combien de nombres de deux chiffres peut on former avec les chiffres 1,2,3,4,5 .

On voit bien que c'est un arrangement avec répétition de 02 éléments parmi 05, c'est-à-dire  $A_5^2 = 5^2 = 25$ . On peut alors former 25 nombres de deux chiffres avec les chiffres 1,2,3,4,5.

## 2.2) Les permutations

### a) permutations sans répétition :

**Définition :** On appelle permutation sans répétition de  $n$  éléments distincts tout arrangement de  $n$  éléments parmi  $n$ . Ainsi, le nombre de permutation de  $n$  éléments est donné par :  $p_n = n!$ .

$p_n$  est le nombre de permutations de  $n$  objets distincts.

Dans le cas où  $n=1$ , il n'y a qu'une seule permutation possible  $p_1 = 1$

Si  $n > 2$  on obtient  $p_n = n \times (n - 1) \times \dots \times 1$ .

Ce produit est noté  $n!$  (factorielle  $n$ ). On a ainsi :  $p_n = n!$ .

Par commodité on pose  $0! = 1$

**Exemple :** Le nombre de permutations des lettres du mot IMAGE est  $p_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

### b) permutation avec répétition

**Définition :** Le nombre de permutation de  $n$  éléments avec répétition est donnée par :

$$p'_n(r_1, r_2, \dots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} \text{ où } r_1, r_2, \dots, r_k \text{ désignent le nombre d'objets identiques.}$$

**Exemple :** Considérons le mot « CELLULE ». Le nombre de mots possibles (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres est :  $p'_7 = \frac{7!}{2!3!} = 420$  mots possibles, en considérons deux groupes de lettres identiques L (3 fois) et E (2 fois).

### 2.3) Les combinaisons

**Définition :** On appelle combinaison de  $p$  éléments parmi  $n$  toute partie de  $E$  à  $p$  éléments.

**Théorème :** Si on note  $C_n^p$  le nombre de combinaison de  $p$  éléments parmi  $n$ , alors :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

**Exemple :** Dans une classe de 30 élèves, on doit élire deux délégués. Quel est le nombre de choix possible ?

Il s'agit d'une combinaison de 02 éléments distincts parmi 30, c'est-à-dire :

$$C_{30}^2 = \frac{30!}{(30-2)!2!} = \frac{30!}{28!2!} = \frac{30 \times 29 \times 28!}{28!2!} = \frac{30 \times 29}{2} = 29 \times 15 = 435$$

**Propriétés :**  $C_n^n = 1$ ,  $C_n^0 = 1$ ,  $C_n^p = C_n^{n-p}$ ,  $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

### Binôme de Newton :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n$$

$$\text{Si } n = 2, (a + b)^2 = \sum_{p=0}^2 C_2^p a^{2-p} b^p = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^{2-1} b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Résumé :**

**Les arrangements sans répétition :**  $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

**Arrangements avec répétition :**  $A_n^p = n^p$

**Permutations sans répétition :**  $p_n = n!$

**Permutation avec répétition :**  $p_n(r_1, r_2, \dots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$

**Les combinaisons :**  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! p!} = \frac{A_n^p}{p!}$

## **Exercices :**

### **Exercice 1:**

Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

### **Exercice 2:**

A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze.

Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr...) ?

### **Exercice 3:**

Le groupe des élèves de Terminale doit s'inscrire à un concours. Il faut établir une liste de passage. Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste ? ( il y a 24 élèves dans la classe )

### **Exercice 4:**

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATH ?

### **Exercice 5:**

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot TABLEAU ?

### **Exercice 6:**

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

### **Exercice 7:**

Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués

- 1) Quel est le nombre de choix possibles ?
- 2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille
- 3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?

### Corrigé

**Ex1** : On applique le principe fondamental de l'analyse combinatoire

Cette femme peut s'habiller  $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$  façons

**Ex2** : il ya  $A_{18}^3$  distributions possibles , soit  $A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} = 4896$

**Ex3** : il s'agit d'une permutation sans répétition . il ya donc  $P_{24} = 24!$

**Ex4** : il ya  $P_4$  anagrammes du mot MATH soit  $P_4 = 4! = 24$

**Ex5** : il y a  $P'_7(2)$  anagrammes du mot « TABLEAU », soit  $P'_7(2) = \frac{7!}{2!} = 2520$

**Ex6** : il y a  $C_8^2$  rencontres possibles , soit  $C_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!2!} = 28$

**Ex7** : 1) il y a  $C_{32}^2$  choix possibles soit 496

2) il ya  $C_{19}^1 * C_{13}^1$  choix possibles soit 247

3) il y a  $C_{19}^2$  choix possibles soit 171

## Chapitre 2 : Les suites numériques

**Introduction :** Les suites numériques sont utilisées pour modéliser les phénomènes socio-économiques. Par exemple, la production d'une entreprise peut s'écrire ou s'exprimer sous forme d'une suite numérique. L'évolution de la population dans un pays, du chômage, de la dette extérieure peut s'exprimer également sous forme d'une formule mathématique. Pour le calcul des annuités lors de l'achat à crédit d'un véhicule, d'utilisation des suites est inévitable.

### 1) Définitions :

Une suite numérique est une application de l'ensemble des entiers naturels ( $\mathbb{N}$ ) dans l'ensemble des nombres réels ( $\mathbb{R}$ ), qui à  $n \in \mathbb{N}$  fait correspondre  $U_n \in \mathbb{R}$ , ce que l'on note

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow f(n) = U_n$$

Exemple : La suite numérique  $(U_n)$  définie par  $U_n = \frac{1}{n}$  sur  $\mathbb{N}^*$  comprend les termes suivants :  $U_1 = 1, U_2 = \frac{1}{2}, U_3 = \frac{1}{3} \dots$  C'est une suite infinie.

- Une suite  $(U_n)$  est dite croissante lorsque  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$

\*La suite est dite strictement croissante lorsque  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} > U_n$

- Une suite  $(U_n)$  est dite décroissante lorsque  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$
- Une suite  $(U_n)$  est dite strictement décroissante lorsque  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} < U_n$
- $U_n$  stationnaire ou constante lorsque  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n$
- Une suite est dite monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante. Elle est strictement monotone lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- Une suite est dite majorée si :  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}$  tel que  $U_n \leq a$
- Une suite est dite minorée si :  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{R}$  tel que  $U_n \geq b$
- Une suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.
- La suite  $U_n$  est convergente lorsque :  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}, \lim U_n = a$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

- Toute suite monotone et bornée est convergente
- Toute suite convergente est bornée , c'est-à-dire qu'il existe des nombres  $m$  et  $M$  tels que  $m \leq U_n \leq M$

**2) Les suites arithmétiques :**

a) **Définition :** On appelle suite arithmétique de raison ( $r$ ) , la suite  $(U_n)$  définie par l'équation de récurrence suivante :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r, U_0$  est donné.

On peut écrire cette suite par le relation suivante :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + nr$

**b) Calcul du terme général ( $U_n$ ) en fonction de  $U_1$  et de  $n$**

$$U_2 = U_1 + r$$

$$U_3 = U_2 + r$$

$$U_n = U_{n-1} + r$$

$$U_2 + U_3 + \dots + U_n = (U_1 + r) + (U_2 + r) + \dots + (U_{n-1} + r)$$

En simplifiant , on obtient :  $U_n = U_1 + (n-1)r$

**c) Suite arithmétique de  $n$  termes :**

**1) Termes équidistants des termes extrêmes :**

On considère les ( $n$ ) termes d'une suite arithmétique de raison ( $r$ ) ,  $U_1, U_2, \dots, \dots, U_n$

Les termes extrêmes sont  $U_1$  et  $U_n$

On considère les termes équidistants des termes extrêmes :

$$U_2 = U_1 + r \quad \text{et} \quad U_{n-1} = U_n - r$$

$$U_3 = U_1 + 2r \quad \text{et} \quad U_{n-2} = U_n - 2r$$

En additionnant les termes équidistants des termes extrêmes on obtient :

$$U_2 + U_{n-1} = U_1 + r + U_n - r = U_1 + U_n$$

$$U_3 + U_{n-2} = U_1 + 2r + U_n - 2r = U_1 + U_n$$

**On en déduit que dans une suite arithmétique finie , la somme de deux termes équidistants des termes extrêmes est égale à la somme des termes extrêmes**

**Exemple :** La suite  $\{1,3,5,7,9,11\}$  a pour somme des extrêmes  $(1+11) = 12$ . Les termes 3 et 9 sont à la même distance des termes extrêmes. on dit qu'ils sont équidistants des termes extrêmes, et leur somme est égale aussi à 12.

**2) Calcul de  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$**

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + U_n$$

$$S_n = U_n + U_{n-1} + \dots + U_2 + U_1$$

$$2S_n = (U_1 + U_n) + (U_2 + U_{n-1}) + \dots + (U_n + U_1)^1$$

$$2S_n = n(U_1 + U_n), \text{ donc } S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

**Remarque :** Les trois nombres  $a, b, c$  pourraient être trois termes d'une suite arithmétique si et seulement si :  $a + c = 2b$

**3) Les suites géométriques :**

**a) Définition :** On appelle suite géométrique, toute suite telle que chacun de ses termes, autre que le premier, est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre appelé raison.

Autrement dit, une suite géométrique est toute suite  $\{a_n\}$  telle que  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . La constante  $q$  s'appelle la raison.

Si  $V_n$  désigne la suite géométrique de raison ( $q$ ), de premier terme  $V_1$ , alors :

$$V_{n+1} = V_n \cdot q, n \in N^*$$

si  $q = 1$ ,  $V_{n+1} = V_n : \forall n \in N^*$ , la suite est constante.

**b) Calcul de  $V_n$  en fonction de  $V_1$  et de  $n$**

si  $q \neq 0$  et  $V_1 \neq 0$ , on aura :

---

<sup>1</sup> Si on considère  $U_0$  comme premier terme de la suite, alors la suite  $U_n$  comporte  $(n+1)$  termes. Si on considère  $U_1$  comme premier terme, la suite  $U_n$  aura  $(n)$  termes.

$$V_2 = V_1 \cdot q$$

$$V_3 = V_2 \cdot q$$

$$V_n = V_{n-1} \cdot q$$

En multipliant les (n-1) termes, on obtient après la simplification :

$$V_n = V_1 q^{n-1}$$

**Exemple :** Le nombre d'habitants d'une ville est de 3000 en 2005, il est de 3630 en 2007. On suppose que  $\alpha$  est le taux d'accroissement de la population par an. Il est constant.

- Déterminez  $\alpha$
- Quel sera le nombre d'habitants de la ville en 2030

**Solution :**

On suppose que le nombre d'habitants en 2005 est  $H_1 = 3000$

$$H_2 = H_1 + \alpha H_1 = H_1(\alpha + 1)$$

$$H_3 = H_2 + H_2 \alpha = H_2(1 + \alpha) = H_1(1 + \alpha)^2 = 3630$$

$$\text{Donc } (1 + \alpha)^2 = \frac{H_3}{H_1} = \frac{3630}{3000} = 1.21, \quad 1 + \alpha = \sqrt{1.21} = 1.10, \quad \alpha = 0,1 = 10\%$$

$$H_n = H_1(1 + \alpha)^{n-1}$$

$$\text{En 2030, } n=26 \text{ soit } H_{26} = H_1(1 + \alpha)^{26-1} = 3000(1.1)^{25} = 32504$$

**c)Produit des termes équidistants des termes extrêmes.**

On considère les n termes d'une suite géométrique finie de raison (q) . les termes extrêmes sont  $V_1$  et  $V_n$

les termes équidistants des extrêmes sont :

$$V_2 = V_1 \cdot q \quad \text{et} \quad V_{n-1} = \frac{V_n}{q}$$

$$V_3 = V_1 \cdot q^2 \quad \text{et} \quad V_{n-2} = \frac{V_n}{q^2}$$

En multipliant les termes équidistants des termes extrêmes, on obtient  $V_2 \cdot V_{n-1} = V_1 \cdot q \cdot \frac{V_n}{q} = V_1 \cdot V_n = V_3 \cdot V_{n-2}$

On en déduit que dans une suite géométrique finie, le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égale au produit des termes extrêmes.

**d) Calcul de  $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$**

$$S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1} + V_n$$

$$qS_n = q(V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1} + V_n)$$

$$qS_n = V_2 + V_3 + \dots + V_n + qV_n$$

$$S_n - qS_n = V_1 - qV_n = V_1 - q(V_1 q^{n-1}) = V_1 - V_1 q^n$$

$$S_n = V_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

**Exemple :** La somme des sept premiers termes d'une suite géométrique de premier terme  $V_1 = 2$  et de raison  $q = 4$  est de  $S_7 = 10922$

#### 4) Applications des suites numériques en économie :

- a) **L'intérêt simple :** On place un capital  $k_0$  pendant  $n$  périodes aux taux périodique de  $t$  %. Chaque année, on retire les intérêts produits par le capital placé. Ainsi, chaque année, le montant des intérêts reste le même que l'année précédente. On dit que le placement est à intérêts simples.

$$\text{On a : } I = \frac{t}{100} k_0 = I_n$$

$$k_1 = k_0 + I$$

$$k_2 = k_1 + I = k_0 + 2I$$

$$k_n = k_0 + nI = k_0 + n \frac{t}{100} k_0 = k_0 \left( 1 + n \frac{t}{100} \right)$$

**Remarque:** La formule des intérêts simples sert essentiellement pour les opérations bancaires d'une durée inférieure à un an.

**Exemple :** Calculer la valeur au 26 mars d'un capital de 100 000 DA placé depuis le 15 mars à un taux annuel de 5%

Solution :  $k_n = 100152$  DA

**Remarque :** Par convention, l'année compte 360 jours.

**b) L'intérêt composé :** On place un capital  $k_0$  pendant  $n$  périodes au taux périodique de  $t$  % . Chaque année, on laisse les intérêts produits avec le capital placé, afin qu'ils produisent eux même des intérêts l'année suivante. On dit que le placement est à intérêts composés.

On a :  $I_n = \frac{t}{100} K_{n-1}$  , cet intérêt n'est pas constant

$$K_1 = k_0 + I_1 = k_0 + \frac{t}{100} k_0 = k_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

$$K_2 = K_1 + I_2 = k_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right) + \frac{t}{100} K_1$$

$$= k_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right) + \frac{t}{100} k_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

$$= k_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right) \left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

$$= k_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2$$

$$K_n = k_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

**Remarque :** La formule des intérêts composés est utilisée pour la plupart des opérations bancaires dont la durée dépasse une année. la période de capitalisation et le taux doivent être impérativement exprimés dans la même base. Par exemple si le taux est trimestriel, la période doit être exprimée en trimestres.

**EXEMPLE :** Calculer la valeur acquise au bout de cinq an par un capital de 100 000 placés à intérêts composés au taux semestriels de 2,4%

**Solution :**  $K_n = 126\ 765$ .

**Exercices :**

**EX 1 :** Calculer  $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{10}$ , sachant que  $U_n = \frac{2^n}{3}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

**EX2 :** Etudier le sens de variation des suites  $(U_n)$ , sachant que  $U_n = 2 \cdot 3^n$ ,  $U_n = \frac{-4}{5^n}$

**EX 3 :** Trouver trois nombres  $(a, b, c)$  formants une suite arithmétique, connaissant leur somme qui est de 30 et leur produit qui de 910. On pose  $a = x - r$ ,  $b = x$ ,  $c = x + r$

**Exercice 4 :** vérifiez si les expressions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F)

Une suite est dite majorée si  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}$ , tel que  $U_n \geq a$

Une suite est dite minorée si  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{R}$ , tel que  $U_n \leq b$

Une suite est dite convergente si  $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq a$

Une suite est dite stationnaire si  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$

Une suite est dite majorée si  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}$ , tel que  $U_n \leq a$

Une suite est dite minorée si  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{R}$ , tel que  $U_n \geq b$

Une suite est dite convergente si  $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \geq a$

Une suite est dite stationnaire si  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n$

Une suite est dite convergente si  $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = a$

Une suite est dite stationnaire si  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$

**EX5 :** Soit  $U_n$  une suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par,  $U_n = \frac{4^n}{n^2}$ , montrez que  $U_n$  est croissante

**Ex 6 :** Soit  $U_n$  une suite définie par  $U_0 = 4$  et  $U_{n+1} = \sqrt{U_n}$  Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , ,

$$U_n > 1 \text{ et } U_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

**EX7 :** Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  comme suit :

$$U_n = \begin{cases} U_0 = 7 \\ 3U_{n+1} = U_n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) Calculer  $U_1, U_2$
- 2) Démontrer que la suite  $U_n$  est une suite décroissante minorée par 2
- 3) Montrer que la suite  $U_n$  est convergente et déterminer sa limite

4) On considère la suite  $(V_n)$  définie comme suit :  $V_n = U_n - 2$

a) Montrer que  $V_n$  est une suite géométrique

b) Donner  $V_n$  en fonction de  $n$  puis déduire  $U_n$  en fonction de  $n$

c) Calculer en fonction de  $n$  la somme :

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

**Solutions :**

**EX 1 :** Calculer  $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{10}$ , sachant que  $U_n = \frac{2^n}{3}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

Pour calculer cette somme il va falloir connaître d'abord la nature de cette suite.

Pour ce faire, nous allons calculer le rapport entre  $U_{n+1}$  et  $U_n$ .

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3}}{\frac{2^n}{3}} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^n} = 2. U_n \text{ est donc une suite géométrique dont la raison } q = 2 \text{ et}$$

le premier terme  $U_0 = \frac{1}{3}$

$$S = U_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1}{3} \frac{2^{n+1} - 1}{1}$$

**EX2 :** Etudier le sens de variation des suites  $(U_n)$ , sachant que  $U_n = 2 \cdot 3^n$ ,  $U_n = \frac{-4}{5^n}$

$$U_n = 2 \cdot 3^n$$

Pour calculer le sens de variation de cette suite nous pouvons utiliser deux méthodes :

**Première méthode :**

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} = 3 > 1, \text{ donc cette suite est strictement croissante}$$

**Deuxième méthode :**

$U_{n+1} - U_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 2 \cdot 3^n = 2 \cdot 3^n (3 - 1) = 4 \cdot 3^n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . La suite est donc strictement croissante.

$$U_n = \frac{-4}{5^n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{-4}{5^{n+1}}}{\frac{-4}{5^n}} = \frac{-4 \cdot 5^n}{-4 \cdot 5^{n+1}} = \frac{1}{5} < 1$$

Mais comme  $U_n = \frac{-4}{5^n} < 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{U_{n+1}}{U_n} * U_n > U_n \Rightarrow U_{n+1} > U_n \forall n \in \mathbb{N}$

La suite est donc strictement croissante

**EX 3 :**

On a  $a+b+c=30$  soit  $x-r+x+x+r=30$  soit  $3x=30$ . Donc  $x=10$

Par ailleurs,  $a.b.c=910$  soit  $(x-r).x.(x+r)=910$

$(10-r).10.(10+r)=910$  soit  $10^2-r^2=91$ , donc  $r^2=9$  et  $r=\pm 3$

Si  $r=3$ ,  $a=7$ ,  $b=10$ ,  $c=13$ . C'est une suite arithmétique croissante

Si  $r=-3$ ,  $a=13$ ,  $b=10$ ,  $c=7$ . C'est une suite arithmétique décroissante

**EX4 :** vérifiez si les expressions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F)

Une suite est dite majorée si  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}$ , tel que  $U_n \geq a$  F

Une suite est dite minorée si  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{R}$ , tel que  $U_n \leq b$  F

Une suite est dite convergente si  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq a$  F

Une suite est dite stationnaire si  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$  F

Une suite est dite majorée si  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}$ , tel que  $U_n \leq a$  V

Une suite est dite minorée si  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{R}$ , tel que  $U_n \geq b$  V

Une suite est dite convergente si  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \geq a$  F

Une suite est dite stationnaire si  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n$  V

Une suite est dite convergente si  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = a$  V

Une suite est dite stationnaire si  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$  F

**EX5 :** Soit  $U_n$  une suite définie sur  $N^*$  par,  $U_n = \frac{4^n}{n^2}$ , montrez que  $U_n$  est croissante

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{4^n}{n^2}} = \frac{n^2 \cdot 4^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot 4^n} = \frac{4n^2}{(n+1)^2} \cdot U_n \text{ est dite croissante si } \frac{4n^2}{(n+1)^2} \geq 1$$

$$\frac{4n^2}{(n+1)^2} - 1 \geq 0, \text{ soit } 4n^2 - (n+1)^2 \geq 0 \cdot ((n+1)^2 \text{ est supérieur à } 0 \forall n \in N).$$

$$4n^2 - n^2 - 2n - 1 \geq 0, \text{ soit } 3n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

$$\Delta = 16, n_1 = 1, n_2 = \frac{-1}{3}$$

Le polynôme  $3n^2 - 2n - 1$  a le même signe que  $a=+3$  en dehors de l'intervalle  $\left] \frac{-1}{3}, 1 \right[$

C'est-à-dire que  $3n^2 - 2n - 1 \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc  $U_n$  est croissante sur  $\mathbb{N}^*$

**EX6 :**

$U_0 = 4$  et  $U_{n+1} = \sqrt{U_n}$  Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n > 1$  et  $U_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

On a  $U_0 = 4 > 1$ ,  $U_1 = \sqrt{U_0} = 2 > 1$

On suppose que  $U_n > 1 \forall n \in \mathbb{N}$

On démontre que  $U_{n+1} > 1 \forall n \in \mathbb{N}$

On a  $U_n > 1$

Donc  $\sqrt{U_n} > \sqrt{1}$ , soit  $U_{n+1} > 1 \forall n \in \mathbb{N}$

**Deuxième cas :**

On a  $U_2 = \sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$

On suppose que  $U_{n+1} \leq \frac{3}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

On démontre que  $U_{n+2} \leq \frac{3}{2}$

On a  $\sqrt{U_n} \leq \frac{3}{2}$  par hypothèse

Donc  $\sqrt{\sqrt{U_n}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}$

$\sqrt{U_{n+1}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}$  soit  $U_{n+2} \leq \frac{3}{2}$

**Ex7 :**

$$U_n = \begin{cases} U_0 = 7 \\ 3U_{n+1} = U_n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1)  $U_1 = \frac{11}{3}, U_2 = \frac{23}{9}$

2)  $U_n$  est décroissante si  $U_{n+1} - U_n \leq 0$

$$3U_{n+1} - 3U_n \leq 0$$

$$U_{n+1} - U_n \leq 0$$

$$-U_n + 2 \leq 0$$

Démonstration par récurrence : on pose  $p(n) : U_{n+1} - U_n \leq 0$

$U_1 - U_0 \leq 0$  donc  $p(0)$  est vraie

On suppose que  $p(n)$  est vraie soit  $-U_n + 2 \leq 0$  et on démontre que  $p(n+1)$  est vraie soit  $U_{n+2} - U_{n+1} \leq 0$ . Autrement dit,  $U_{n+1} \geq 2$ .

On a par hypothèse  $-U_n + 2 \leq 0$

$$U_n \geq 2$$

$$U_n + 4 \geq 2 + 4$$

$$\frac{U_{n+4}}{3} \geq \frac{2+4}{3} \quad . \text{ donc } U_{n+1} \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$P(n+1)$  est vraie, donc  $p(n)$  est vraie

$U_n$  est décroissante et minorée par 2 pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

3) La suite  $U_n$  est décroissante et minorée par 2 donc elle est convergente

On a  $\lim U_n = l$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$

De même  $\lim U_{n+1} = l$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$

Donc  $3l = l + 4$ , soit  $2l = 4$ ,  $l = 2$ .

4)  $V_n = U_n - 2$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 2$$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+4}}{3} - 2 = \frac{U_n - 2}{3}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{U_n - 2}{3}}{U_n - 2} = \frac{U_n - 2}{3(U_n - 2)} = \frac{1}{3}$$

$U_n$  est donc une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{3}$  et de premier terme  $V_0 = 5$

$$V_n = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ soit } U_n = V_n + 2 = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2$$

$$S = V_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 5 \frac{1 - \frac{1}{3}^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

## Chapitre 03 : Etude d'une fonction numérique d'une variable

### I) Limites de fonctions numériques

- 1) **Définition :** Soit  $f$  une fonction numérique. La notion de limite permet d'associer soit un nombre fini, soit l'infini, à un réel qui n'a pas d'image par la fonction. La notion de limite permet également d'étudier le comportement de la fonction lorsque la variable  $(x)$  prend des valeurs infinies.

On écrit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

$x_0$  et  $l$  peuvent être finis ou infinis

### 2) Théorèmes généraux sur les limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0^+ , \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0^- , \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty , \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty ,$$

### 3) Limites de sommes, produits et quotients de fonctions

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques. Soit  $F$  une fonction définie à partir de  $f$  et  $g$

$F(x)$	$\text{Lim } F(x)$
$Kf(x)$	$K \lim f(x)$
$f(x) + g(x)$	$\text{Lim } f(x) + \text{lim } g(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$\text{Lim } f(x) \cdot \text{lim } g(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}, g(x) \neq 0$

**Remarque :** les formes d'indétermination sont :  $+\infty - \infty$ ,  $0 \cdot (\infty)$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$

**Théorème de l'Hospital :** Pour lever une indétermination, il faut parfois utiliser la règle de l'Hospital plusieurs fois de suite.

Soient  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions dérivables au voisinage  $]a - \delta, a + \delta[$  d'un point  $a$  (à l'exception possible de  $a$ ) et telles que  $g(x)$  et  $g'(x)$  ne s'annulent pas dans ce voisinage.

Si  $\lim_{n \rightarrow a} f(x) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow a} g(x) = 0$  et si le rapport  $(\frac{f'(x)}{g'(x)})$  tend vers une limite finie ou infinie lorsque  $x$  tend vers  $a$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  existe et :  $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =: \lim_{n \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{3x^2 - 4x - 4} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{6x - 6}{6x - 4} = \frac{3}{4}$

**4) Limite d'un polynôme au voisinage de l'infini**

Lorsque la variable  $(x)$  tend vers l'infini, un polynôme admet la même limite que son terme de plus haut degré

Exemple :  $f(x) = 4x^3 + 10x^2 - 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty$

**5) Limite d'un quotient de polynômes au voisinage de l'infini**

Lorsque la variable  $(x)$  tend vers l'infini, le rapport de deux polynômes admet la même limite que le rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple :  $f(x) = \frac{5x^3 + 2x^2 + x}{4x^3 + 6x + 1}$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{5x^3}{4x^3} = \frac{5}{4}$

**II) Les continuités**

Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $(x_0)$ , on dit que  $f$  est définie au voisinage de  $x_0$

**1) Définition :** soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$ ,  $f$  est continue en  $x_0$

Si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**2) Continuité à gauche et à droite**

On dit que  $f$  est continue à gauche de  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

On dit  $f$  est continue à droite en  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

### III) La fonction dérivée d'une fonction numérique

a) **Le nombre dérivé** : Le nombre dérivé d'une fonction numérique en un point  $x_0$  du domaine de définition, que l'on note  $f'(x_0)$  est la limite si elle existe, du taux d'accroissement de  $f$  entre les points  $x$  et  $x_0$ , lorsque  $x$  tend vers  $x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Exemple:  $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 \end{aligned}$$

**Remarque** :  $f'(x_0)$  peut s'écrire également comme suit :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

la fonction  $f'$  est parfois notée  $\frac{df}{dx}$

### b) Interprétation géométrique du nombre dérivé

#### 1) Tangente en un point d'une courbe

Soit  $f$  une fonction dérivable au point  $x_0$  et  $(c)$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan rapporté au repère cartésien  $(o, i, j)$ . Soit  $M_0$  un des points de  $(c)$  d'abscisse  $x_0$ .

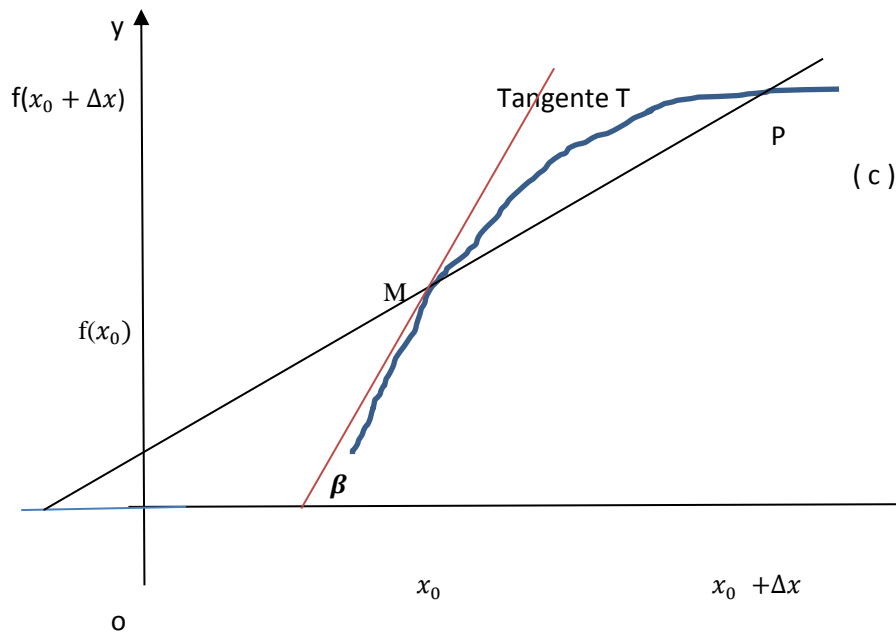
Le nombre dérivé d'une fonction  $f$  en un point  $x_0$  représente le coefficient directeur, ou pente de la tangente à la courbe de  $f$  au point  $M_0$  d'abscisse  $x_0$

La tangente à la courbe  $y=f(x)$  en  $M$  est la position limite de la sécante  $MP$  lorsque le point  $P$  tend vers le point  $M$  ( c'est-à-dire quand  $\Delta x \rightarrow 0$ )

$$\text{Tan } \beta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Soit  $\text{Tan } \beta = f'(x)$

Donc, la dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $y=f(x)$  est la pente de la tangente à la courbe  $(c)$  au point d'abscisse  $x$



**Théorème :** Le nombre dérivé d'une fonction  $f$  au point  $x_0$  est le coefficient directeur de la tangente à courbe d'équation  $y=f(x)$  au point d'abscisse  $x_0$

## 2)équation de la tangente en $M_0$

L'équation d'une droite passant par le point  $M_0 (x_0, y_0)$  de coefficient directeur  $A$  est

$y-y_0 = A(x - x_0) = f'(x_0) (x-x_0)$  qui est donc l'équation de la tangente .

#### IV) les dérivées usuelles

f	f'
$f(x)=k$	0
$f(x)= kx$	K
$f(x)=x^n$	$nx^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}, x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)= KU(x)$	$K U'(x)$
$f(x)=U^n(x)$	$nU(x)^{n-1}U'(x)$
$f(x)=\frac{1}{U(x)}$	$-\frac{U'}{U^2}$
$f(x)=\sqrt{U(x)}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U(x)}}$
$f(x)= U(x)+V(x)$	$f' = U' + V'$
$f(x)= U(x).V(x)$	$f' = U'.V + UV'$
$f(x)=\frac{U(x)}{V(x)}, V(x) \neq 0$	$f' = \frac{U'.V - U.V'}{V^2}$

#### V) Les branches infinies

Soit f une fonction numérique donnée et  $D_f$  son domaine de définition, (c) sa courbe.

L'étude des branches infinies s'effectue lorsque x ou y ou (x et y) tend (ent) vers l'infini.

##### 1) Asymptote verticale.

On suppose que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , on dit que la courbe (c) admet la droite d'équation  $x = x_0$  comme asymptote verticale.

**Exemple :**  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ , donc  $x=1$  est une asymptote verticale à (c)

## 2) Asymptote horizontale :

On suppose que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$ , on dit donc que la courbe ( c ) admet la droite d'équation  $y = y_0$  comme asymptote horizontale.

**Exemple :**  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ , donc  $y=2$  est une asymptote horizontale à la courbe ( c )

**3) Asymptote oblique :** Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ,  $a \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ , alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote oblique à la courbe ( c ) .

( quand x se rapproche de l'infini, la courbe se rapproche de cette droite)

**Exemple :**  $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$   $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 1$  donc la droite d'équation  $y = x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe ( c )

## 4) Branches paraboliques :

\*Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a = \infty$  alors la courbe ( c ) admet une branche parabolique de direction (oy )

**Exemple :**  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

\*Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a = 0$ , alors ( c ) admet une branche parabolique de direction (ox )

**Exemple :**  $f(x) = \ln(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

\*Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b = \infty$

Alors ( c ) admet une branche parabolique de direction de la droite de pente « a »

## VI) Application à l'économie

### 1) Fonction du coût total et coût moyen :

Les économistes entendent par cout total, la somme de toutes les dépenses engagées dans le but de produire une certaine quantité de biens .

Si  $x$  est le nombre d'unités de production, le cout total ( $C_T$ ) est lié à  $x$  par la relation

$$C_T = f(x)$$

Le coût moyen ( $C_M$ ) est le cout d'une seule unité de production. Donc,  $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$

### 2) La fonction du coût marginal

Le cout marginal pourrait se définir comme le quotient de l'accroissement du cout total par l'augmentation de la production soit :

$$C_m \text{ (coût marginal)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = C'_T(x)$$

**3) L'élasticité :** La dérivée permet également de mesurer la sensibilité d'une fonction aux variations de sa variable.

Le lien existant entre la variation relative de la variable ( $\frac{\Delta x}{x}$ ) et la variation relative de la fonction  $\frac{\Delta f}{f}$  est mesuré par ce que l'on appelle l'élasticité de  $f$  par rapport à  $x$

**Définition :** L'élasticité de  $f$  par rapport à  $x$  se définit à partir du rapport des taux de variation de  $f$  et de  $x$  . Elle est représentée par (e)

$$\text{Donc : } e = \frac{x}{f} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ ( quand } \Delta x \text{ tend vers } 0) = \frac{x}{f} f'$$

**Remarque :** Si l'élasticité est positive, une augmentation de  $x$  entraîne une augmentation de  $f(x)$

Si l'élasticité est négative, une augmentation de  $x$  entraîne une diminution de  $f(x)$

La notion d'élasticité est couramment employée dans les services marketing pour la fixation du prix d'un nouveau produit.

**Exemple :** La demande d'un produit diminue lorsque le prix augmente, l'élasticité est alors négative .

Soit la fonction de demande exprimée en centaines d'unités d'un produit A de prix unitaire  $x$  .

$$F(x) = \frac{1000-x}{3}$$

Quelle est l'incidence d'une augmentation du prix de 1% sur la demande du produit A ?

**Solution :**  $f' = -\frac{1}{3}$  , donc  $e = -\frac{x}{1000-x}$

Si le prix de A est de 40 DA , la demande de A sera de  $f(40) = 320$  U

$$e = -\frac{40}{960} = -0.04$$

ce qui signifie que si le prix de 40 DA subit une hausse de 1% ( $\frac{\Delta x}{x} = 0.01$ ) , la demande baissera de 0.04 % . La demande du produit A passera alors de 32000 unités à 31987 unités .

$$\frac{\Delta f}{f} = e \frac{\Delta x}{x} = -0.04 \frac{\Delta x}{x} = -0.04(0.01)$$

$$\frac{\Delta f}{f} = -0.0004$$

**$\Delta f = -12.8$  , donc  $f_2 - f_1 = -12.8$**

$$f_2 = -12.8 + f_1 = 32000 - 12.8 = 31987 \text{ unités.}$$

## Chapitre 4 : La fonction logarithme et exponentielle

### I) La fonction logarithme

1) **Définition :** La fonction logarithme népérien ( base e ) , appelée aussi logarithme naturel ou logarithme hyperbolique est définie sur :  $]0; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$

$$\text{Ln} : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \ln x$$

La fonction logarithme est continue , dérivable et strictement croissante sur :  $]0; +\infty[$

### 2) Propriétés :

Pour tout réel x strictement positif , on a :

- $e^{\ln x} = x.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- **$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$**

Pour tout réel x, on a :

- $\ln e^x = x$
- $\text{Ln } 1 = 0$
- $\text{Ln } e = 1$

Pour tout réels a et b strictement positifs on a :

- $\text{Ln}(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{1}{a} = - \ln a$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$
- *Pour tout*  $n \in \mathbb{Z}$  ,  $\ln a^n = n \ln a$

### 3) Etude de la fonction logarithme Népérien

La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$

**Conséquences :** Pour tous réels strictement positifs a et b on a :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a=b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$
- si  $0 < a < 1$  alors  $\ln a < 0$

La fonction  $\ln$  est continue et dérivable sur  $R_+^*$  et pour tout  $x \in R_+^*$ , on a  $\ln'x = \frac{1}{x}$

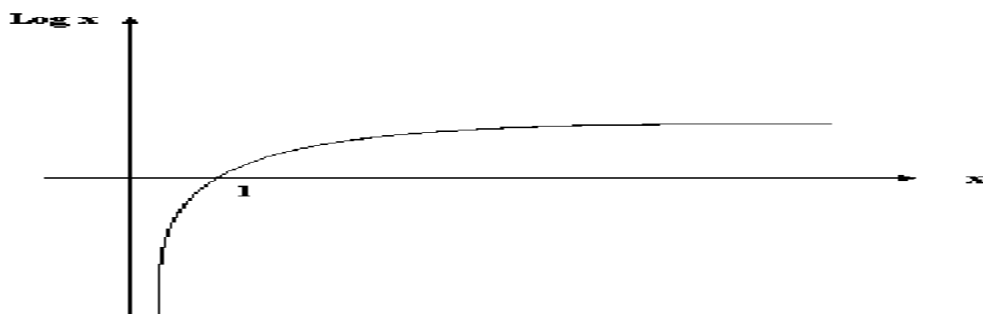
**Les limites :**

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \lim_{n \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- **Tableau de variations**

<b>x</b>	<b>0</b>	<b>e</b>
	$+\infty$	
$\ln(x)'$ $= \frac{1}{x}$		+
$\ln x$		<p style="text-align: right;"><math>+\infty</math></p> <p style="text-align: left;"><math>-\infty</math></p>

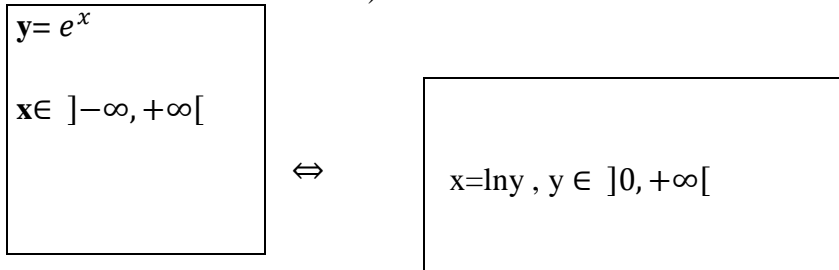
On a vu que  $\lim_{n \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  , donc la courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (oy) . On a vu également que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  , donc la courbe de la fonction logarithme népérien admet une branche parabolique dans la direction (ox) .

Les fonctions exponentielles et logarithmes népérien étant réciproques l'une de l'autre , leurs courbes dans un repère orthogonal sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y=x$ .



## II) La fonction exponentielle

1) **Définition :** La fonction logarithme étant une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $] -\infty, +\infty[$ , elle admet une fonction réciproque appelée exponentielle et notée  $\exp$  ( ou  $x \rightarrow e^x$ )



### 2) Propriété :

En remplaçant dans le cadre de droite  $y$  par sa valeur tirée du cadre de gauche , on a :

$$\forall x \in ]-\infty, +\infty[ \quad \ln e^x = x$$

De même, en remplaçant dans le cadre de gauche  $x$  par sa valeur tirée du cadre de droite , on a (en remplaçant  $y$  par  $x$ ) :  $\forall x \in ]0, +\infty[ , e^{\ln x} = x$

$$\forall x \in ]-\infty, +\infty[ , e^x > 0$$

### 3) Propriété algébrique de la fonction exponentielle

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^{a+b} = e^a e^b$
- $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (e^a)^n = e^{na}$

### 4) Etude de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent :

$$*\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

$$*\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

**Les limites :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

### 5) La dérivée :

La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$

#### Tableau de variation

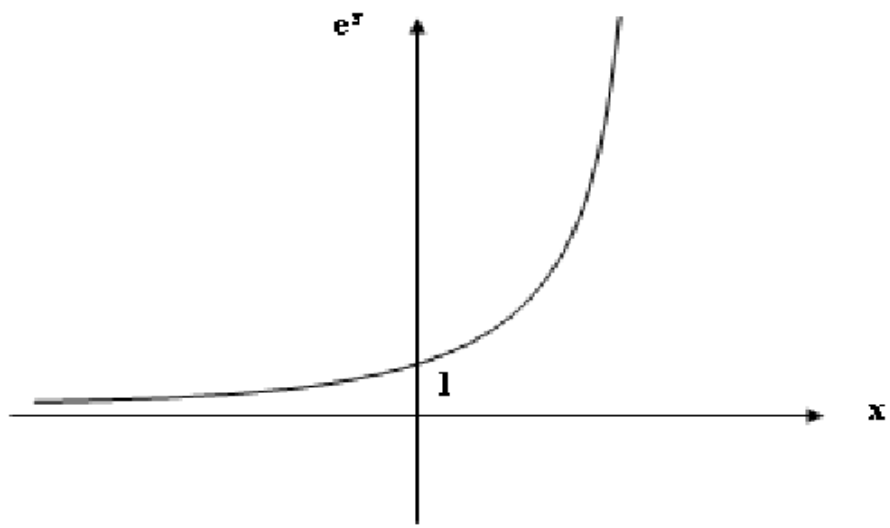
<b>x</b>	$-\infty$	0	1	$+\infty$
<b>f'(x)</b>	+			
<b>f(x)</b>				

### 6) La représentation graphique

$\lim_{n \rightarrow -\infty} e^x = 0$  donc la fonction exponentielle admet l'axe (ox) comme asymptote horizontale.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ , donc la fonction exponentielle admet une branche parabolique dans la direction (oy).

Les fonctions exponentielles et logarithmes népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthogonal sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y=x$ ,



## Exercices

**Ex1 :** Donnez l'ensemble de définition et les limites des fonctions :

1)  $f(x) = \frac{3x^2+7x-10}{x^2+4x-5}$  en 1

2)  $f(x) = \frac{3x^2-2}{x^2+1}$  en  $-\infty, 1, -1$

**Ex2 :** soit  $f(x)$  une fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{-x^2+4x-1}{x-1}$

1) Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$

2) Déterminer les réels  $a, b, c$  tels que  $f(x) = ax+b+\frac{c}{x-1}$

3) En déduire que la courbe (c) admet une droite d'équation  $y = -x+3$  comme asymptote au voisinage de  $+\infty$

**Ex3 :** soit  $f(x) = 1 + \frac{2}{4-x^2}$

1) Déterminer les asymptotes verticale et horizontale de la courbe ©

2) Déterminer la position de (c) par rapport à l'asymptote horizontale

**Ex4 :** Soit la fonction de bénéfice  $B = -0,012 p^2 + 5400p - 600\,000\,000$

Quelle est la valeur du prix (p) qui maximise le bénéfice ?

**Ex5 :** Résoudre l'équation  $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$

Résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} \ln(x) + \ln y^2 = \ln 20 \\ x - y^2 = 1 \end{cases}$$

**Ex6 :** Simplifier les expressions suivantes

$$A = \exp(12 \ln 6 + 6 \ln 18 - 18 \ln 2 - 30 \ln 3)$$

$$B = \exp(4 \ln 21 - 3 \ln 14) * \exp(-\ln 7 - 4 \ln 3)$$

**Ex7 :** Résoudre dans l'ensemble des nombres réels les équations :

1)  $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln 12$

2)  $\ln|x+1| + \ln|x+5| = \ln 12$

**Solution :**

**EX1 :** Donnez l'ensemble de définition et les limites des fonctions :

$$1) f(x) = \frac{3x^2+7x-10}{x^2+4x-5} \text{ en } 1$$

$$D_f = \{x/x \in R, x^2 + 4x - 5 \neq 0\}$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = -5, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = 1$$

$$D_f = R - \{-5, 1\} = ]-\infty, -5[ \cup ]-5, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0} \text{ forme d'indétermination}$$

$$f(x) = \frac{3x^2+7x-10}{x^2+4x-5} = \frac{(x-1)(ax+b)}{(x-1)(x+5)} = \frac{ax^2+bx-ax-b}{(x-1)(x+5)} = \frac{ax^2+(b-a)x-b}{(x-1)(x+5)}$$

Par analogie on obtient :

$$a=3, b-3=7 \text{ soit } b=10$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x+10)}{(x-1)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x+10)}{(x+5)} = \frac{13}{6}$$

$$2) f(x) = \frac{3x^2-2}{x^2-1}$$

$$D_f = \{x/ x \in R, x^2 - 1 \neq 0\}$$

$$D_f = R - \{-1, +1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1}^> \frac{3x^2-2}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1}^< \frac{3x^2-2}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1}^> \frac{3x^2-2}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1}^< \frac{3x^2-2}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

**Ex2 :** soit  $f(x)$  une fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{-x^2+4x-1}{x-1}$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 4x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

$$2) f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{x - 1} = ax + b + \frac{c}{x - 1} = \frac{(ax + b)(x - 1) + c}{x - 1} = \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x - 1} = \frac{ax^2 + (b - a)x + c - b}{x - 1}$$

Par analogie on obtient :

$$a = -1, b + 1 = 4 \text{ soit } b = 3, c - 3 = -1 \text{ soit } c = 2$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{x - 1} = -x + 3 + \frac{2}{x - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y = 0)?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -x + 3 + \frac{2}{x - 1} + x - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x - 1} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Donc la courbe (c) représentative de la fonction f(x) admet l'équation  $y = -x + 3$  comme asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$

**Ex3 :** soit  $f(x) = 1 + \frac{2}{4 - x^2}$

$$1) D_f = \{x / x \in \mathbb{R}, 4 - x^2 \neq 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$  donc la courbe (c) admet la droite d'équation  $y = 1$  comme asymptote horizontale

$$\lim_{x \rightarrow \pm 2^+} f(x) = 1 + \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 2^-} f(x) = 1 + \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Donc (c) admet l'équation  $x = 2$  comme asymptote verticale

De même

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1 + \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1 + \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Donc (c) admet l'équation  $x = -2$  comme asymptote verticale .

2) Pour déterminer la position de (c) par rapport à l'asymptote horizontale d'équation  $y = 1$ , il faut étudier le signe de  $f(x) - y$  soit  $1 + \frac{2}{4 - x^2} - 1$ .

Le signe de  $\frac{2}{4 - x^2}$  est celui du dénominateur ( $4 - x^2$ )

$4 - x^2 = 0$  donc  $x = \pm 2$ . Ici,  $y = 1$  coupe la courbe (c)

$4 - x^2 > 0$  soit  $-x^2 > -4 \Rightarrow -x^2(-1) < -4(-1)$ . Donc  $x^2 < 4$

Donc  $x \in ]-2, 2[$

Ici, la courbe (c) se situe en dessus de  $y = 1$

$4 - x^2 < 0$ , donc  $x^2 > 4$

Donc  $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$   
 Ici la courbe ( c ) se situe en dessous de  $y=1$

**Ex4 :** Soit la fonction de bénéfice  $B = -0,012 p^2 + 5400p - 600\,000\,000$

Pour déterminer la valeur  $p$  qui maximise le bénéfice (B) , nous allons étudier la fonction B

- Domaine de définition de la fonction B est  $[0, +\infty[$
- $B(0) = -6 \cdot 10^8$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} B = \lim_{p \rightarrow +\infty} -0,012 p^2 = -\infty$$

- $B' = -0,024 p + 5400$

$$B' = 0, \quad p = \frac{5400}{0,024} = 2,25 \cdot 10^5$$

$$B' > 0, \quad p < 2,25 \cdot 10^5$$

$$B' < 0, \quad p > 2,25 \cdot 10^5$$

- Tableau de variation

<b>x</b>	0	$2,25 \cdot 10^5$	$+\infty$
$B'$	+	0	-
<b>B</b>	$-6 \cdot 10^8$	$B(2,25 \cdot 10^5)$	$-\infty$

Sur la base du tableau de variation nous déduisons que la valeur  $p$  qui maximise B est  $p = 2,25 \cdot 10^5$

**Ex5 :**

1)  $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$

$$\ln(x+3)(x+2) = \ln(x+11)$$

$$\text{Donc } (x+3)(x+2) = x+11$$

$$\text{Soit } x^2 + 3x + 2x + 6 = x + 11$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16-4(-5) = 36$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = -5, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = 1$$

A ce niveau, il va falloir déterminer le domaine de définition pour savoir lesquelles des deux valeurs  $x_1, x_2$  choisir.

$$D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R}, x + 3 > 0\} = ]-3, +\infty[$$

$$D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R}, x + 2 > 0\} = ]-2, +\infty[$$

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R}, x + 11 > 0\} = ]-11, +\infty[$$

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} = ]-2, +\infty[$$

$$x_1 = -5 \notin ]-2, +\infty[ \text{ donc } S = \{1\}$$

$$2) \begin{cases} \ln(x) + \ln y^2 = \ln 20 \dots (1) \\ x - y^2 = 1 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

A partir de (2) on obtient  $y^2=x-1$

On remplace dans (1),  $\ln(x) + \ln(x-1) = \ln 20$

$$\ln(x)(x-1) = \ln 20$$

$$x^2-x-20=0$$

$$\Delta = \mathbb{1}^2 - 4\mathbb{1}\mathbb{20} = (-1)^2-4(1)(-20)=81$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-9}{2} = -4, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+9}{2} = 5$$

$$\mathbb{D}_{\mathbb{1}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y \neq 0\}$$

Or,  $x_1 = -4 \notin \mathbb{D}_{\mathbb{1}}$ , donc on retient  $x_2 = 5$

$$y^2=x-1=5-1=4 \text{ soit } y = \pm 2$$

$$S = \{(5, 2), (5, -2)\}$$

**Ex6 :**

$$A = \exp(12 \ln 6 + 6 \ln 18 - 18 \ln 2 - 30 \ln 3) = \exp(12 \ln 2 + 12 \ln 3 + 6 \ln 2 + 12 \ln 3 - 18 \ln 2 - 30 \ln 3)$$

$$A = \exp(-6 \ln 3) = \exp(0 - 6 \ln 3) = \exp(\ln 1 - 6 \ln 3) = \exp(\ln \frac{1}{3^6}) = \frac{1}{3^6}$$

$$B = \exp(4\ln 2 - 3\ln 4) * \exp(-\ln 7 - 4\ln 3) = \exp(4\ln 3 + 4\ln 7 - 3\ln 2 - 3\ln 7 - \ln 7 - 4\ln 3) = \exp((-3\ln 2) = \exp(\ln 1 - 3\ln 2) = \exp(\ln \frac{1}{2^3}) = \frac{1}{2^3}$$

**Ex7 :**

$$1) \ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln 12$$

$$\ln(x+1)(x+5) = \ln 12$$

$$\ln(x^2 + 6x + 5) = \ln 12$$

$$\text{donc } x^2 + 6x + 5 - 12 = 0$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(-7) = 64$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 8}{2} = -7, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 8}{2} = 1$$

$$\mathbb{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 1 > 0, x + 5 > 0\} = ]-1, +\infty[$$

$$x_1 = -7 \notin \mathbb{D}_f \text{ donc } S = \{1\}$$

$$2) \ln|x + 1| + \ln|x + 5| = \ln 12$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 1 \neq 0 \text{ et } x + 5 \neq 0\}$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} - \{-1, -5\}$$

$$|x + 1||x + 5| = \pm(x + 1)(x + 5)$$

**Si**  $|x + 1||x + 5| = (x + 1)(x + 5)$ , on obtient  $x^2 + 6x - 7 = 0$  et  $x_1 = -7, x_2 = 1$

**Si**  $|x + 1||x + 5| = -(x + 1)(x + 5)$ , on obtient  $-x^2 - 6x - 5 = 12$

Soit  $-x^2 - 6x - 5 - 12 = 0$ , donc  $-x^2 - 6x - 17 = 0$ ,  $\Delta = \mathbb{R}^2 - 4\mathbb{R}^2 = 36 - 4(-1)(-17) = -32 < 0$

Donc  $S = \emptyset$

## Chapitre 5 : Les intégrales et les primitives

- 1. Définition :** Soient deux fonctions  $F$  et  $f$  définies dans un certain intervalle.  $F$  est dérivable dans cet intervalle. On dit que la fonction  $F$  est la fonction primitive de la fonction  $f$ , si et seulement si, la dérivée de  $F$  est égale à  $f$ , soit  $F'(x) = f(x)$

On symbolise l'ensemble des fonctions primitives par le symbole  $\int f(x)dx = F(x) + c$ , et on l'appelle l'intégrale indéfinie. On le lit « somme de  $f(x) dx$  »

### 2. La règle générale de l'intégrale indéfinie

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\text{Exemples : } \int x^5 dx = \frac{1}{5+1} x^{5+1} + c = \frac{1}{6} x^6 + c$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

### 3. Les propriétés

$$* \int af(x) dx = a \int f(x)dx, a \text{ est une constante}$$

$$\text{Exemple : } \int 2x^3 dx = 2 \int x^3 dx = \frac{1}{2} x^4 + c$$

$$\bullet \int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Tapez une équation ici.

$$\text{Exemple : } \int (x^3 + x^2)dx = \int x^3 dx + \int x^2 dx = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + c$$

$$\bullet \int (f_1(x) - f_2(x)) dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx$$

### 4. Calcul de l'intégrale indéfinie

#### a) La méthode de changement de variables

$$\text{Exemple1 : } \int (2x + 3)^7 dx = ?$$

$$\text{On pose } 2x+3 = t \Rightarrow dt = 2dx$$

$$\int t^7 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^7 dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{8} t^8 \right) + c = \frac{1}{16} (2x + 3)^8 + c$$

$$\text{Exemple2 : } \int (x - 1) \sqrt{x + 1} dx = ?$$

$$\text{On pose } x+1 = t \Rightarrow dt = dx$$

$$\int (t - 1 - 1) \sqrt{t} dt = \int (t - 2) \sqrt{t} dt = \int (t\sqrt{t} - 2\sqrt{t}) dt = \int t^{\frac{3}{2}} dt - 2 \int t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1} t^{\frac{3}{2}+1} - 2 \frac{1}{\frac{1}{2}+1} t^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{5} \sqrt{t^5} - \frac{4}{3} \sqrt{t^3} + c = \frac{2}{5} \sqrt{(x+1)^5} - \frac{4}{3} \sqrt{(x+1)^3} + c$$

## b) La méthode d'intégration par parties

Soient deux fonctions f et g dérivables dans un intervalle.

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f$$

$$\int (f \cdot g)' = \int (f' \cdot g + g' \cdot f) = \int f' \cdot g + \int g' \cdot f$$

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int g' \cdot f$$

Exemple : Calculer une primitive sur l'intervalle  $]-1, +\infty[$ , de la fonction f définie par f(x)

$$= \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

On pose f(x) = x soit f' = 1

$$g' = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \text{ soit } g = 2\sqrt{1+x}$$

Les fonctions f et g sont continues, dérivables sur  $]-1, +\infty[$ , on peut donc écrire :

$$\int f g' = \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = f \cdot g - \int f' g$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = 2x\sqrt{1+x} - 2 \int 1\sqrt{x+1} dx = 2x\sqrt{1+x} - \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{1+x}$$

## 5. Les fonctions intégrables au sens de Reimann (intégrales définies)

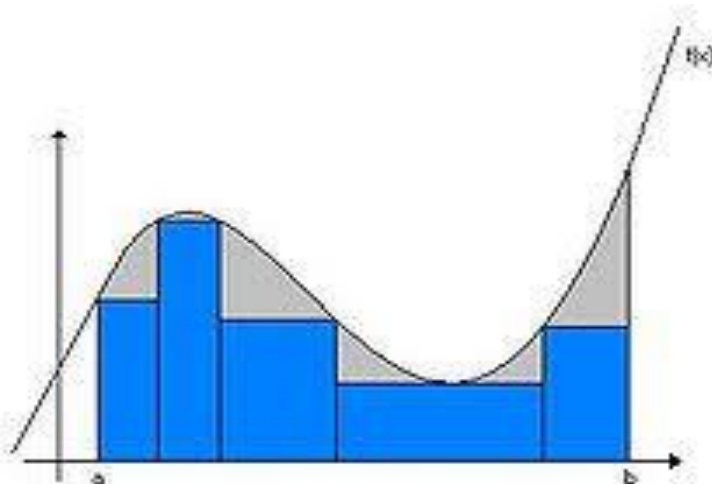
**a) Définition :** soit f une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ . Soit (c) sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

On appelle intégrale de a à b de la fonction f et on note  $\int_a^b f(x)dx$ , le réel mesurant l'aire de la partie limitée par la courbe ©, l'axe des abscisses (ox) et les droites d'équations x=a et x=b

### Remarques :

\* On dit que a et b sont des bornes de l'intégrale

\* L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$



Si les repères ont pour unités graphiques 2 cm sur (ox) et 3 cm sur (oy) , alors l'unité d'aire est de 6 cm<sup>2</sup>

**Exemple :** Soit une fonction définie sur [0,1] par  $f(x) = x^2$ .

L'intégrale de f sur [0,1] s'écrit :  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$  UA

#### a) Propriétés

- L'intégrale est une fonction linéaire : soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions intégrables sur  $[a, b]$  et deux nombres réels  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . La fonction  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ , est intégrable sur  $[a, b]$ .
- $\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x)dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x) dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)dx$
- $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$
- Si f est intégrable sur  $[a, b]$ , alors f est intégrable sur tout intervalle inclus dans  $[a, b]$  , et si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2, \alpha_3$  désignent trois nombre réels de  $[a, b]$ , donc,  $\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} f(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

## 6. Les primitives et les intégrales

**a) définition :** La fonction  $f(x) = x^r$  ( $r \neq -1$ ) admet pour primitive sur tout intervalle de son domaine de définition la fonction F définie par  $F(x) = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$ .

Si F est une primitive de f sur  $D_f$ , le nombre  $F(b) - F(a)$  est appelé intégrale de a à b de f et est noté  $\int_a^b f(x) dx$ . On lit "somme de a à b de f(x) dx"

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Remarque :** Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle .

### b) Les primitives usuelles .

f	Intervalle de référence	F( primitive )
$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$\text{Ln}(x)$
$\frac{1}{x}$	$] -\infty, 0[$	$\text{Ln}(-x)$
$\text{Ln}(x)$		$x \ln(x) - x$
$e^x$	$] -\infty, +\infty[$	$e^x$
0	$] -\infty, +\infty[$	c
a	$] -\infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$	$ax + c$
x	$] -\infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$	$\frac{1}{2} x^2 + c$
$\frac{1}{x^2}$	$] -\infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{2}{x^3}$	$] -\infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$	$-\frac{1}{x^2} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$] -\infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + c$
$n f' f^{n-1}$	$] -\infty, +\infty[$	$f^n + c$
$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$D_f$	$\sqrt{f} + c$

**Remarque :** Le produit FG n'est pas une primitive de f.g

### 7. Application économique

Lorsque la fonction de consommation  $c$  est telle que  $c=f(y)$ ,  $y$  représente le revenu, la propension marginale à consommer est représentée par la fonction  $P_{mc} = f'(y)$ . Sachant que  $P_{mc} = 0.8$  et la consommation est de 40 quand le revenu est nul, trouver la fonction de consommation

$$c = \int f'(y) dy = \int 0.8 dy = 0.8y + k$$

$$\text{Si } y=0, c=k=40, \text{ donc } c = 0.8y+40$$

**Exercices :**

**Ex1 :** Calculer  $\int x\sqrt{x^2-1} dx$ ,  $\int \frac{dx}{(3x-5)^5}$  en effectuant une intégration par changement de variable

**Ex2 :** Calculez  $\int 4x(x+1)^3 dx$ ,  $\int \frac{5x dx}{(x-1)^2}$ ,  $\int_1^2 x \ln(x) dx$ ,  $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$ ,  $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ , en effectuant une intégration par parties

**Ex3 :** Calculez les intégrales suivantes  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ ,  $\int_3^2 \frac{1}{2x+3} dx$ ,  $\int_1^2 \frac{3-x}{x^2-6x+1} dx$

: Déterminez les fonctions primitives des fonctions suivantes

$$f(x) = x^3 - 3x + 5 \text{ sur l'ensemble des nombres réels}$$

$$g(x) = \frac{2}{x^2} \text{ sur } ]-\infty, 0[$$

$$h(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ sur } ]0, +\infty[$$

**Ex5 :** La fonction du coût total (CT) peut se calculer à partir du coût marginal (Cm), le coût marginal étant la variation du coût total dû à une augmentation d'une unité de production.

$$Cm = (CT)'$$

Donc  $CT = \int Cm dp$ ,  $p$  étant la quantité fabriquée. Sachant que  $Cm = 25 + 30p - 9p^2$

Trouver la fonction du coût total sachant qu'il existe un coût fixe de 55

**Solutions :**

**Ex1 :** Calculer  $\int x\sqrt{x^2 - 1} dx$ ,

On pose  $x^2-1=t$  donc  $dt=2xdx$  soit  $xdx=\frac{dt}{2}$

On obtient  $\int \sqrt{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C$

Donc  $\int x\sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + C$

$$\int \frac{dx}{(3x - 5)^5} = ?$$

On pose  $3x-5=t$  donc  $dt = 3dx$  soit  $dx = \frac{dt}{3}$

On obtient  $\frac{1}{3} \int \frac{dt}{(t)^5} = \frac{1}{3} \frac{t^{-5+1}}{-5+1} = \frac{1}{3} \frac{t^{-4}}{-4} = \frac{1}{-12} t^{-4} = \frac{1}{-12} (3x - 5)^{-4} + C$

**Ex2 :** Calculez  $\int 4x(x + 1)^3 dx$

$$\int gf' = f \cdot g - \int (g'f) dx$$

On pose  $g=4x$  donc  $g'=4$

$$f' = (x + 1)^3 \text{ donc } f = \frac{1}{4}(x + 1)^4$$

$$\int 4x(x + 1)^3 = f \cdot g - \int (g'f) dx = 4x \cdot \frac{1}{4}(x + 1)^4 - 4 \int \frac{1}{4}(x + 1)^4 dx$$

$$= 4x \cdot \frac{1}{4}(x + 1)^4 - \int (x + 1)^4 dx = 4x \cdot \frac{1}{4}(x + 1)^4 - \frac{1}{5}(x + 1)^5 + C$$

$$\int \frac{5x dx}{(x-1)^2} = ?$$

$$\text{On a } \int gf' = f \cdot g - \int (g'f) dx$$

On pose  $g=5x$  soit  $g'=5$

$$f' = \frac{1}{(x-1)^2} \text{ donc } f = \frac{-1}{x-1}$$

$$\int \frac{5x \, dx}{(x-1)^2} = 5x \cdot \frac{-1}{x-1} - 5 \int \frac{-1}{x-1} dx = 5x \cdot \frac{-1}{x-1} + 5 \ln|x-1| + c$$

$$\int_1^2 x \ln(x) \, dx = ?$$

On a  $\int g f' = f \cdot g - \int (g' f) dx$

On pose  $g = \ln x$  soit  $g' = \frac{1}{x}$

$f' = x$  donc  $f = \frac{x^2}{2}$

$$\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$

$$\int_1^2 x \ln(x) \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 = 2 \ln 2 - 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \text{ unités d'aires.}$$

$$\int_0^1 (2x + 1) e^x \, dx = ?$$

On a  $\int g f' = f \cdot g - \int (g' f) dx$

On pose  $g = 2x + 1$  soit  $g' = 2$

$f' = e^x$  donc  $f = e^x$

$$\int (2x + 1) e^x dx = e^x (2x + 1) - 2 \int e^x dx = e^x (2x + 1) - 2e^x + c$$

$$\int_0^1 (2x + 1) e^x \, dx = [e^x (2x + 1) - 2e^x]_0^1 = 3e - 2e - (-1) = e + 1 \text{ UA.}$$

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx = ?$$

On a  $\int g f' = f \cdot g - \int (g' f) dx$

On pose  $g = \ln x$  soit  $g' = \frac{1}{x}$

$f' = \frac{1}{x^2}$  soit  $f = \frac{-1}{x}$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \ln x \left(\frac{-1}{x}\right) - \int \frac{-1 dx}{x^2} = \ln x \left(\frac{-1}{x}\right) - \frac{1}{x} + c$$

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \left[ \ln x \left(\frac{-1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \text{ UA}$$

**Ex3 :**

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \text{ UA}$$

$$\int_3^2 \frac{1}{2x+3} = - \int_2^3 \frac{1}{2x+3} = - [\ln(2x+3)]_2^3 = -\ln(2 \cdot 3 + 3) + \ln(2 \cdot 2 + 3) = \ln 7 - \ln 9 \text{ UA.}$$

$$\int_1^2 \frac{3-x}{x^2-6x+1} dx = - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{-2(3-x)}{x^2-6x+1} dx = -\frac{1}{2} [x^2 - 6x + 1]_1^2 = -\frac{1}{2} [\ln(4 - 12 + 1) - \ln(1 - 6 + 1)] = -\frac{1}{2} [\ln|-7| - \ln|-4|] = \frac{-1}{2} \ln 7 + \frac{1}{2} \ln 4 \text{ UA}$$

**Ex4**

$$f(x) = x^3 - 3x + 5 \text{ donc } F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$$

$$g(x) = \frac{2}{x^2} \text{ donc } G(x) = \frac{-2}{x} + c$$

$$h(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ donc } H(x) = \frac{-3}{2x^2} - 2\sqrt{x} + c$$

**Ex5**

$$CT = \int C_m dp = \int (25 + 30p - 9p^2) dp = 25p + 15p^2 - 3p^3 + C_F$$

$$\text{Si } p=0, CT = C_F = 55$$

$$\text{Donc } CT = 25p + 15p^2 - 3p^3 + 55$$

## Chapitre 6 : Les fonctions à plusieurs variables

### I) Définitions

- 1) **définition d'une fonction à plusieurs variables** : une fonction de n variables f est une application de l'ensemble  $R^n$  dans R

$$f : R^n \rightarrow R$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

**Exemple :**

$$f : R^3 \rightarrow R$$

$$(x, y, z) \rightarrow x \cdot y \cdot z$$

$$g : R^2 \rightarrow R$$

$$((p_1, p_2) \rightarrow 50p_1 + 102p_2$$

g peut représenter le chiffre d'affaires réalisé par la vente de deux produits de prix respectifs  $p_1, p_2$  et en quantités respectives 50 et 120.

### 2. Domaine de définition

Le domaine de définition d'une fonction de n variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est le sous ensemble  $D_f$  de  $R^n$

Exemple :  $f(x, y) = x^2 - 3y$ ,  $D_f = R^2$

$$f(x, y) = \frac{\ln x}{y}, D_f = \{(x, y) \in R^2 \text{ tel que } x > 0 \text{ et } y \neq 0\}$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$D_f = \{(x, y, z) \in R^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

### II) Les dérivées partielles

Elles permettent de mesurer l'effet de la variation de chacune des variables sur la fonction, lorsque les autres variables restent inchangées.

#### 1) Dérivées partielles premières par rapport à chacune des variables.

Soit une fonction f définie par :

$$f : R^2 \rightarrow R$$

$$f(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

La dérivée partielle de f par rapport à x est la limite, si elle existe, du rapport

$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$  quand  $\Delta x$  tend vers 0. Ce rapport est un taux d'accroissement de la fonction  $f$  évalué pour le cas où  $x$  varie seule de  $\Delta x$ ,  $y$  reste constante.

On note cette dérivée  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$

La dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $y$  sera la limite, si elle existe, du rapport  $\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$  quand  $\Delta y$  tend vers 0

On note cette dérivée  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ , et sera calculée en considérant  $f$  comme fonction de  $y$  seule,  $x$  reste constante.

**Exemples :**  $f(x, y) = x^3 + xy$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 + y$$

$$f(x, y, z) = 4x^5 - 2x^2z + 3y^2$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 20x^4 - 4xz, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = 6y$$

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x} + x$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{-1}{x^2} y^2 + 1$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{2y}{x}$$

## 2. Les dérivées partielles secondes

**Définition :** Chacune des dérivées  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  étant une fonction de deux variables, elles peuvent être dérivées de nouveau soit par rapport à  $x$ , soit par rapport à  $y$ . On obtient les dérivées secondes suivantes :

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

Exemple :

$$F(x, y) = x^3 + xy$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

**Remarque :** de façon générale, les dérivées secondes  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$  sont égales.

### III )Utilisation des dérivées partielles pour le calcul des élasticités.

1. **L'élasticité directe :** Elle est définie comme étant l'incidence d'une variation du prix du produit sur la demande de ce produit.

Soit  $f(x,y)$  une fonction de deux variables  $x$  et  $y$ .

$$e = \lim_{\Delta x} \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}}{\frac{f}{x}} \text{ quand } \Delta x \text{ tend vers } 0, y \text{ reste constante.}$$

$$\text{D'où } e = \lim_{\Delta x} \frac{x \Delta f}{f \Delta x} \text{ quand } \Delta x \text{ tend vers } 0 .$$

$$\text{Donc } e = \frac{x}{f} \frac{\partial f}{\partial x}$$

Exemple : La demande d'un bien A s'exprime par la fonction  $q = 2500 - 20x + 10y$

$$\text{L'élasticité directe est la fonction } e = \frac{x}{q} \frac{\partial q}{\partial x} \text{ soit } e = -20 \frac{x}{2500 - 20x + 10y}$$

Si  $x=30, y=10$ , alors  $q=2000$  et  $e_d = -0.3$

Une augmentation de 5% du prix de A ( $\frac{\Delta x}{x} = 0.05$ ), le prix de B reste constant

(10), entraîne une baisse des ventes de A ( $\frac{\Delta q}{q}$ ) de  $0.3 * 5\%$  donc de 1.5% .

$$\text{On a } \frac{\Delta q}{q} = e \frac{\Delta x}{x}$$

Donc, si le prix de A passe de 30 à 31.5 le produit B valant 10, la demande de A passera de 2000 à 1970 unités .

2. **L'élasticité croisée.**

Elle mesure l'incidence d'une variation du prix de la concurrence sur la demande du produit.

$$e = \lim_{\Delta y} \frac{\frac{\Delta f}{\Delta y}}{\frac{f}{y}} \text{ quand } \Delta y \text{ tend vers } 0, x \text{ reste constante}$$

$$\text{D'où } e = \lim_{\Delta y} \frac{y \Delta f}{f \Delta y} \text{ quand } \Delta y \text{ tend vers } 0 .$$

$$\text{Donc } e = \frac{y}{f} \frac{\partial f}{\partial y}$$

**Exemple :** En reprenant l'exemple précédent , on obtient ,

$$e_c = \frac{y}{q} \frac{\partial q}{\partial y} = 10 \frac{y}{2500 - 20x + 10y}$$

$$\text{Si } x=30, y=10, e_c = 0.05$$

Une augmentation de B de 10 % ( $\frac{\Delta y}{y}=0.10$ ) , le prix de A reste constant ( 30) , entraine une augmentation des ventes de A ( $\frac{\Delta q}{q}$ ) de  $0.05 * 10\%$  donc de 0.5%

Si le prix de B passe de 10 à 11 , le produit A valant 30, la demande de A passera de 2000 à 2010.

#### IV)Extremum d'une fonction de plusieurs variables.

**1.Extremum avec des variables libres :** On considère une fonction de deux variables  $f(x, y)$  où  $x$  et  $y$  peuvent prendre des valeurs quelconques sur  $D_f$ .

**1.1Définition :**  $f$  admet un maximum ( respectivement minimum) en  $(x_0, y_0)$ , si pour les couples  $(x,y)$  voisins de  $(x_0, y_0)$ , on a  $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ ( respectivement  $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ ) .

#### 1.2)Conditions du premier ordre, ou conditions nécessaires d'existence d'un extremum

Si  $f$  admet un extremum en  $(x_0, y_0)$ , la fonction  $f(x, y_0)$ , fonction de  $x$  seule admet un extremum en  $x_0$ .

Donc sa dérivée par rapport à  $x$  doit être nulle. Soit  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$

$f(x_0, y)$  admet un extremum en  $y_0$ , donc sa dérivée par rapport à  $y$  doit être nulle , soit  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$ .

Donc la condition d'existence d'un extremum de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  est que ses dérivées partielles premières en  $(x_0, y_0)$  soient nulles.

**Exemple :**  $f(x,y)=x^2+y^2$  définie sur  $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$$

Les dérivées partielles s'annulent en  $(0,0)$ , donc  $f$  admet un extremum de valeur  $f(0,0) = 0$ .

On a  $f(x,y) \geq 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$  et  $f(x,y) \geq f(0,0) \forall (x,y)$ . On a donc un minimum absolu en  $(0,0)$

**Remarque:** Cette condition d'annulation des dérivées est une condition nécessaire, mais non suffisante pour être en présence d'un extremum.

**Exemple :**  $f(x,y)=x^2-y^2$  définie sur  $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y$$

S'il y a un extremum, c'est en  $(0,0)$  point où les dérivées partielles s'annulent et la valeur de cet extremum serait  $f(0,0) = 0$

Ici, en réalité, on a pas d'extremum en  $(0,0)$ , car pour certains points très proches de  $(0,0)$  on aura  $f(x,y) \leq f(0,0)$ , et pour d'autres points  $f(x,y) \geq f(0,0)$

**Exemple :**  $f\left(\frac{1}{100}, 0\right) = \left(\frac{1}{100}\right)^2 > 0$ , mais,  $f\left(0, \frac{1}{100}\right) = -\left(\frac{1}{100}\right)^2 < 0$

$f(x,y)$  ne pouvant pas être toujours supérieur à  $f(0,0)$  ou toujours inférieur à  $f(0,0)$  au voisinage de  $(0,0)$ . On a pas de minimum ni de maximum.

### 1.3 Conditions de second ordre d'existence d'un extremum :

Soit un point  $(x_0, y_0)$  « candidat » à correspondre à un extremum pour  $f$ . Les conditions permettant de conclure à l'existence effective d'un extremum en  $(x_0, y_0)$  :

Soit l'expression :  $A(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2$

Si  $A < 0$ , il n'existe pas d'extremum en  $(x_0, y_0)$

Si  $A > 0$ , il existe un extremum en  $(x_0, y_0)$  : \* un maximum si  $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$

\* Un minimum si  $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$

Si  $A = 0$ , une étude supplémentaire doit être faite pour conclure

**Exemple :**  $f(x,y)=x^2+2xy+2y^2+y$

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

S'il ya un extremum , il serait au point  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

**Vérification :**

$$\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\partial y^2} = 4, \frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\partial x \partial y} = -2$$

$$\text{Donc } A = 2 \cdot 4 - (-2)^2 = 8 - 4 = 4$$

$A > 0$ , on a donc un extremum .

De plus ,  $\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\partial x^2} > 0$  , donc cet extremum est un minimum .

f admet un minimum en  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ . Cette valeur minimale est  $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

**Remarque :** Les conditions énoncées ci-dessus ne s'appliquent qu'aux fonctions de deux variables.

## 2. Extremum avec des variables liées ou extremum sous contraintes.

On considère une fonction de deux variables  $f(x,y)$  où  $x$  et  $y$  ne peuvent pas prendre des valeurs quelconques sur le domaine de définition , car elles sont liées par une ou plusieurs contraintes .( On suppose que les contraintes sont de type  $g(x,y)=k$ )

**Définition :**  $f$  admet un maximum (respectivement un minimum) en  $(x_0, y_0)$  si pour tous les couples  $(x, y)$  satisfaisant la (ou les contraintes) , on a  $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$  ( respectivement  $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ )

**Ecriture du problème :** Dans le cas d'une recherche d'extremum d'une fonction de deux variables  $f(x,y)$  soumises à une contrainte  $g(x,y)=k$  , le problème s'écrira :

$$\begin{cases} \text{maximiser } f(x,y) \\ \text{sous la contrainte } g(x,y) = k \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \text{minimiser } f(x,y) \\ \text{sous la contrainte } g(x,y) = k \end{cases}$$

La fonction  $f(x,y)$  s'appelle la fonction objectif et la fonction  $g(x,y)$  s'appelle la fonction contrainte.

On distingue deux sortes de contraintes de types  $g(x,y) = k$

- Une contrainte où il est possible d'exprimer l'une des variables en fonction de l'autre. Par exemple,  $x+y = 5$  peut se transformer en  $x = 5-y$
- Une contrainte où il n'est pas possible d'exprimer l'une des variables en fonction de l'autre par une seule relation. Par exemple  $x^2y+xy^2 = 1$

### 2.1) Première méthode de recherche de l'extrémum (la méthode de substitution) .

Avec le premier type de contrainte, la recherche de l'extremum peut s'effectuer avec la méthode de substitution.

Exemple : 
$$\begin{cases} \text{maximiser } f(x, y) = x + 2y \\ \text{sous la contrainte } y + x^2 = 0 \end{cases}$$

La contrainte  $y+x^2=0$  peut s'écrire  $y=-x^2$  .  $f(x,y)$  peut alors s'écrire  $F(x)=x-2x^2$

Le problème revient alors à rechercher le maximum de  $F(x)$ . On calcul  $F'(x)=0$ , soit  $1-4x=0$  donc  $x=\frac{1}{4}$ . Comme  $y+x^2=0$  donc  $y = \frac{-1}{16}$

La fonction  $f(x,y) = x+2y$  admet sous la contrainte  $y+x^2=0$  un maximum valant  $\frac{1}{4}+2(-\frac{1}{16})=\frac{1}{8}$  obtenu au point  $(\frac{1}{4}, \frac{-1}{16})$

### 2.2) Deuxième méthode de recherche de l'extrémum ( la méthode de Lagrange)

Elle peut s'utiliser dans tous les cas de recherche d'extremum, mais elle est indispensable lorsqu'il n'est possible d'exprimer une variable en fonction de l'autre à partir de la contrainte.

Exemple : 
$$\begin{cases} \text{maximiser } f(x, y) = x + y \\ \text{sous la contrainte } y^2 + x^2 = 1 \end{cases}$$

#### Écriture de Lagrange

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(g(x,y)-k)=x+y+\lambda(y^2+x^2-1)$$

#### Écriture du système des dérivées premières

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} = 0 \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ (y^2 + x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2y} \quad \text{donc} \quad \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{2y} \quad \text{et} \quad x=y$$

On a  $y^2+x^2-1=0$  donc  $2x^2-1=0$  d'où  $x^2=\frac{1}{2}$  et  $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc  $(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  ou  $(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

Si la fonction  $f(x,y) = x+y$  admet un maximum, c'est nécessairement en l'un des point

$(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  ou  $(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

**Exercices :**

**Ex1 :** Calculez les dérivées partielles premières et secondes de la fonction  $f(x,y) = x^3 + \frac{x}{y}$

**Ex2 :** Soit  $f(x,y) = x^2ye^{xy}$ , calculez ses dérivées partielles premières

**Ex3 :** La demande d'un produit est donnée par la fonction  $q = k p_1^{-0.34} p_2^{0.27}$ , où  $p_1$  est le prix unitaire du produit et  $p_2$  est le prix unitaire d'un autre produit présent sur le marché.  $K$  est une constante. Calculer les élasticité directes et croisées de la demande. Quelle remarque peut-on faire ?

**Ex4 :** Soit la fonction  $f(x,y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$

Maximiser cette fonction :

- a) Sans contrainte
- b) Avec la contrainte  $x + 5y = 2$
- c) Avec la contrainte  $x + 5y = 1$

**Solutions :**

**Ex1 :**  $f(x,y) = x^3 + \frac{x}{y}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{-1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$$

**EX2 :**

$$f(x,y) = x^2ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xye^{xy} + e^{xy} x^2y^2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2e^{xy} + e^{xy} yx^3$$

$$\mathbf{Ex3} : q = k p_1^{-0.34} p_2^{0.27}$$

$$e_d = \frac{p_1}{q} \frac{\partial q}{\partial p_1} = -0.34k \frac{p_1 p_2^{0.27} p_1^{-0.34-1}}{k p_1^{-0.34} p_2^{0.27}} = -0.34$$

$$e_c = \frac{p_2}{q} \frac{\partial q}{\partial p_2} = 0.27k \frac{p_2 p_2^{0.27-1} p_1^{-0.34}}{k p_1^{-0.34} p_2^{0.27}} = 0.27$$

Les élasticités sont constantes, donc la variation de la demande ne dépend pas de la variation des prix.

**Ex4 :**

$$f(x,y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$$

a)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x + 1 - y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -x + 1 - 2y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 1 - y = 0 & (1) \\ -x + 1 - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1),  $y = -2x + 1$ . On remplace dans (2), on obtient  $-x + 1 - 2(-2x + 1) = 0$

Soit  $x = \frac{1}{3}$  et  $y = \frac{1}{3}$

$$b) \begin{cases} \text{maximiser } f(x,y) = -x^2 + x - xy + y - y^2 \\ \text{sous la contrainte de } x + 5y = 2 \end{cases}$$

la contrainte  $x + 5y = 2$  peut s'écrire  $x = 2 - 5y$

$f(x,y)$  peut alors s'écrire  $F(y) = -(2-5y)^2 + 2-5y - (2-5y)y + y - y^2 = -(4+25y^2-20y) + 2-5y-2y+10y^2+y-y^2$

$$F(y) = -4 - 25y^2 + 20y + 2 - 5y - 2y + 10y^2 + y - y^2 = -2 - 16y^2 + 14y$$

$$\frac{\partial F(y)}{\partial y} = -32y + 14 = 0 \text{ soit } y = \frac{14}{32} = \frac{7}{16} \text{ et } x = \frac{-3}{16}$$

La f atteint un maximum au point  $x = \frac{-3}{16}$  et  $y = \frac{7}{16}$

$$c) ) \begin{cases} \text{maximiser } f(x, y) = -x^2 + x - xy + y - y^2 & (1) \\ \text{sous la contrainte de } x + 5y = 1 & (2) \end{cases}$$

de (2)  $x = 1 - 5y$

On remplace dans (1) on obtient :  $F(y) = -(1-5y)^2 + 1 - 5y - (1-5y)y + y - y^2$

$$F(y) = -21y^2 + 5y$$

$$\frac{\partial F(y)}{\partial y} = -42y + 5 = 0 \text{ soit } y = \frac{5}{42} \text{ et } x = \frac{17}{42}$$

La fonction atteint un maximum au point  $x = \frac{17}{42}$  et  $y = \frac{5}{42}$

## Chapitre 7 : Les Matrices

**I) Définitions :** On appelle matrice A à m lignes et n colonnes , ou de format (m,n) ou m\*n , une famille  $\{a_{ij}\}$  de nombres réels , avec  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$  que

l'on représente sous la forme du tableau suivant : 
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemple :  $A(2,2) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $A(4,1) \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $A(1,3) [11 \quad 13 \quad 5]$ ,  $A(3,2) \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 9 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$

On dit que A est de format (m,n) ou de type (m,n) pour indiquer que A est une matrice avec m lignes et n colonnes , que l'on pourra noter  $A(m,n)$  . On désigne  $\mathcal{M}(m,n)$  l'ensemble des matrices de format (m,n) .

Si  $n=1$  ,  $A(m,1)$  est dite matrice colonne . Exemple :  $A(4,1)$

Si  $m=1$   $A(1,n)$  est dite matrice ligne . Exemple  $A(1,3)$

Si on échange les lignes et les colonnes d'une matrice A à m lignes et n colonnes , on obtient sa matrice transposée notée  $A^T$  à n lignes et m colonnes .

Exemple  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ,  $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ,  $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

Donc si  $A = (a_{ij})_{i=1 \dots m}$

$$j=1 \dots n \quad , \quad \text{alors } A^T = (a_{ji})_{j=1 \dots n}$$

$$i=1 \dots m$$

On notera la propriété évidente  $(A^T)^T = A$

Si  $m=n$  ,  $A(n,n)$  est dite matrice carrée d'ordre n. Exemple : la matrice (3,3) .

Les éléments  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , forment la diagonale principale de A .

Si tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et les autres nuls , A est appelée matrice unité d'ordre n , et notée  $A = I_n$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est la matrice unité d'ordre 3}$$

## II) Opérations sur les matrices

### a) Egalité de deux matrices de même format

Deux matrices  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  sont égales si elles sont de même format (m,n) et si elles ont les mêmes coefficients.

### b) Addition de deux matrices de même format

Soient deux matrices de même format (m, n),  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$ .

On définit la somme  $A+B$  de A et B par  $A+B = (a_{ij}+b_{ij})$ ,  $i=1, \dots, m$  et  $j=1, \dots, n$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

### c) Produit d'une matrice par un scalaire

Soit  $A = (a_{ij})$ ,  $i=1, \dots, m$  et  $j=1, \dots, n$ , matrice de format (m,n) et  $\alpha \in R$  un scalaire .

On définit le produit et  $\alpha \in R$  par A :

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}), \quad i=1, \dots, m \text{ et } j=1, \dots, n$$

Exemple :  $2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

### d) Produit de deux matrices

Soit  $A = (a_{ij})$ ,  $i=1, \dots, m$  et  $j=1, \dots, n$ , matrice de format (m,n) et  $B = (b_{ij})$  matrice de format (p,n),  $i=1, \dots, p$  et  $j=1, \dots, n$ .

On définit le produit  $AB$  de A par B par :

$AB = (c_{ij}), i=1, \dots, m$  et  $j=1, \dots, n$  ; avec  $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$

**Remarques :**

\*le produit  $AB$  n'est défini que si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$

\* La matrice  $AB$  est de format  $(m,n)$  où  $m$  est le nombre de lignes de  $A$  et  $n$  le nombre de colonnes de  $B$ .

**Exemple :** Le produit d'une matrice ligne  $A(1,p) = (a_{11} \ a_{12} \dots \ a_{1p})$  par une matrice

colonne  $B(p,1) = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$ . La matrice produit  $AB$  de format  $(1,1)$  est  $AB = (c_{ij}) \ i=1, j=1$ .

Donc  $AB = (c_{11}) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \dots + a_{1p}b_{p1}$

**Application :**

$$[1 \ 2 \ 3] * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 10 \text{ car } 1*2 + 2*1 + 3*2 = 10$$

**Remarque :** La matrice ligne  $A$  doit avoir autant de colonnes que la matrice  $B$  de lignes pour que le produit  $AB$  soit défini.

**Exemple1 :**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Pour faciliter les calculs on pourra les présenter de la manière suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Dans cet exemple , les matrices AB et BA sont toutes les deux définis . Elles ne sont pas égales. Donc , le produit de deux matrices n'est pas commutatif .

**Exemple2 :**  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  et  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$C=BA$  , donc le format de c est obtenu comme suit :

- Le nombre de lignes de de C =nombre de lignes de B
- Le nombre de colonnes de C = nombre de colonnes de A .

Pour calculer C , on écrira :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 11 & -2 & 2 \\ 13 & 0 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$

**e) Puissance d'une matrice**

Par analogie avec les nombres réels, on pose :

$$A^2=A.A$$

$$A^3=A.A.A=A^2.A=A.A^2$$

$$A^n=A.A.....A(n \text{ termes})$$

$$(A+B)^2= (A+B).(A+B) = A^2+BA+AB+B^2$$

L'égalité  $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$  ne se produira que dans le cas où  $AB=BA$

$$\text{De meme } (A-B)(A+B) =A^2-BA+AB-B^2 \neq A^2-B^2$$

**Remarque :** Les formules usuelles ne s'appliquent pas aux matrices sauf dans le cas particulier où A et B commutent.

**f)Propriétés :** 1) Soient deux matrices A et B et deux réels K et L

$$(K+L) A = K.A+L.A$$

$$K(A+B) = KA+KB$$

$$K(LA) = (KL)A$$

2) Soient A,B et C trois matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes :

- Commutativité :  $AB=BA$
- Associativité :  $A+(B+C)=(A+B)+C$
- Existence d'un élément neutre :  $A+(0)=A$
- Existence d'une symétrie :  $A+(-A)=0$

$$\text{Exemple : } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad -A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A+(-A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'une manière générale si  $A=(a_{ij})$  est une matrice à n lignes et p colonnes , sa symétrie par rapport à l'addition est la matrice (-A) de terme général  $A=(-a_{ij})$

$$A+(-A) = (a_{ij}-a_{ij}) = (0)$$

### 3)Propriétés de la multiplication des matrices carrées

Soient 3 matrices carrées A,B,C d'ordre n :

- Associativité :  $A(BC)=(AB)C$
- Distributivité :  $A(B+C) = AB+AC$
- Élément neutre : il existe une matrice I telle que  $AI=IA=A$

La matrice I est la matrice diagonale dont les termes de la diagonale sont tous égaux à 1.

$$\text{Exemple : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ d'où } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### III) L'inverse d'une matrice carrée

**1) Définition :** Soit  $A=(a_{ij})$ ,  $i = 1 \dots \dots \dots n$  et  $j = 1 \dots \dots \dots n$ , une matrice carrée d'ordre  $n$ . La matrice  $A$  est inversible ( on dit aussi régulière), s'il existe une matrice  $B$ , carrée d'ordre  $n$  telle que :

$$AB = BA = I_n, \text{ où } I_n \text{ est la matrice unité d'ordre } n. \text{ Si } B \text{ existe, on note } B=A^{-1}.$$

$A^{-1}$  est appelée la matrice inverse de  $A$ . On montre que  $AB = I_n$  ou  $BA = I_n$  pour être assuré de l'existence de  $B=A^{-1}$  la matrice inverse de  $A$ .

**Théorème :** Une matrice  $A$  est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro. Dans ce cas  $A^{-1}$  est donnée par :  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (t_{Com(A)})$

Où  $t_{Com(A)}$  est la transposée de la matrice des cofacteurs de  $A$

#### Exemple1 :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Det  $A = 3$  donc  $A$  est inversible

$$C(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_{C(A)} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [t_{Com(A)}] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

**Exemple2 : soit**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Det  $A = 4$  donc  $A$  est inversible

$$\text{Com}(A) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t_{Com(A)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [t_{Com(A)}] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

## 2) Recherche de l'inverse d'une matrice.

Exemple : Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

La recherche de  $A^{-1}$  revient à résoudre l'équation matricielle  $AB = I_3$

On pose  $B = \begin{bmatrix} a & \alpha_1 & x \\ b & \alpha_2 & y \\ c & \alpha_3 & z \end{bmatrix}$

$$\text{Donc : } \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \alpha_1 & x \\ b & \alpha_2 & y \\ c & \alpha_3 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} a + 5b - c = 1 \\ -2b + c = 0 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=0, c=0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{-1}{3}, \alpha_3 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x + 5y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 2y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**Remarque :** la matrice inverse de A notée  $A^{-1}$  est unique si elle existe et  $AA^{-1}=A^{-1}A$

**Cas d'une matrice diagonale :**

Soit  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ , la matrice inverse de A dans le cas où tous les termes de la

diagonale sont non nuls est  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{-1} \end{bmatrix}$

Ce résultat se généralise au cas d'une matrice diagonale d'ordre  $n=4,5,\dots$

**Exemple 1:**

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**Exemple2 :** Soient les matrices

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } N = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$MN = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -4I$$

$$\text{Donc } MN = -4I \Rightarrow \frac{-1}{4} MN = I \Rightarrow M\left(\frac{-1}{4}N\right) = I \Rightarrow M^{-1} = \frac{-1}{4}N = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

#### IV) Le calcul des déterminants

**Définition :** Un déterminant est un nombre ( réel ou complexe ) associé à un tableau carré de nombres ( réels ou complexes ) que l'on appelle ses éléments . Ce nombre est noté en plaçant le tableau entre deux barres verticales. Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n > 1$ . Le mineur  $M_{ij}$  de l'élément  $a_{ij}$  est le déterminant de la matrice d'ordre  $n-1$  obtenue en supprimant ( d'une manière fictive) la ligne  $i$  et la colonne  $j$ . Le cofacteur  $A_{ij}$  de l'élément  $a_{ij}$  est  $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

$$\text{Exemple : } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Par suppression des lignes et des colonnes de  $A$ , nous obtenons :  $M_{1,1} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -14$ ,

$$M_{2,1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 15, M_{2,2} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -21$$

On obtient les cofacteurs en plaçant le signe adéquat devant les mineurs correspondants :

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1}M_{1,1} = -14$$

$$A_{2,1} = (-1)^{2+1}M_{2,1} = -15$$

$$A_{2,2} = (-1)^{2+2}M_{2,2} = -21$$

**1) Déterminant d'ordre 2 :** soit la matrice  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Le déterminant  $A$  noté  $\det A$  est égale à :  $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

C'est-à-dire on fait le « produit en croix . » soit  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$\text{Exemple : } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2(-4) - (0.3) = -8$$

## 2) Déterminant d'ordre 3 (Méthode de Sarrus)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Pour calculer le déterminant d'ordre 3 de cette matrice, on utilise la règle de Sarrus. Ainsi, on écrit les trois colonnes de la matrice puis on répète la première et la deuxième colonne comme illustré ci-dessous. Ensuite, on fait le produit des nombres situés sur chacune des diagonales indiquées et on l'affecte du signe correspondant. Le déterminant est la somme des termes ainsi obtenus.

$$\begin{array}{cccccc}
 & + & & + & & + & & - & & - & & - \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} & & & & \\
 a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} & & & & \\
 a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow
 \end{array}$$

$$\text{Det}(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

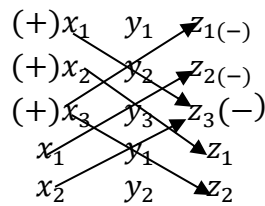
$$\begin{array}{cccccc}
 & + & & + & & + & & - & & - & & - \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & & & \\
 2 & & 1 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 3 & & 2 & & 0 & & 3 & & 2 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow
 \end{array}$$

$$\text{Det } A = 1(1)(0) + 0(1)(3) + 1(2)(2) - 0(2)(0) - 1(1)(2) - 1(1)(3) = 4 - 2 - 3 = -1$$

On peut également procéder autrement :

On écrit le déterminant et on répète en dessous les deux premières lignes. En ajoutant les produits des termes de chaque diagonale « descendante » puis en soustrayant les produits des termes de chaque diagonale « montante » :

Si on a  $\det(x,y,z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$



On obtient  $x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 - x_3y_2z_1$

$$\det(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1 \quad 5 \quad -7$$

$$2 \quad -4 \quad 1$$

$$\det(x,y,z) = (1)(-4)(4) + (2)(2)(-7) + (3)(5)(1) - (2)(5)(4) - (1)(2)(1) - (3)(-4)(-7) = -155$$

**Remarque : Cette méthode n'est valable que pour les déterminants d'ordre 3**

### 3) Règle générale du calcul des déterminants

On peut développer le calcul du déterminant de A suivant une ligne ou une colonne.

Développement suivant la ligne i :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Développement suivant la colonne j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Le terme  $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$  est appelé le cofacteur du terme  $a_{ij}$ , et le terme  $\det(A_{ij})$  est appelé le mineur du terme  $a_{ij}$ .

Exemple 1 :  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Pour calculer son déterminant on va utiliser un développement par rapport à une ligne ou une colonne. Si on choisit la première ligne on obtient :

$$\text{Det}(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 0 + 1 = -1$$

Si on choisit la troisième colonne on obtient :

$$\text{Det}(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 3 - 2 + 0 = -1$$

$$\text{Exemple 2 : } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On choisit la première colonne :

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Pour le premier déterminant on choisit la première colonne et pour le second la deuxième colonne.

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \left[ -1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \right] \\ &= 4 - 1 + 2[-2 + 1] = 4 - 1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Exemple 3 : Calculons } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

On va développer selon la première colonne car , elle contient un zéro.

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

On développe chaque déterminant par rapport à sa première ligne, on obtient :

$$\begin{aligned} &2 \left( 2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) + 3 \left( 1 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) - \\ &5 \left( 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \right) = 2(-5-10) + 3(5-20) - 5(-6-3+18) = -120 \end{aligned}$$

**Remarque :** Pour faciliter les calculs on choisit généralement la ligne ou la colonne où il y a le plus de termes nuls.

### V) Utilisation des matrices en économie

On considère une exploitation agricole qui produit de la viande ovines et bovines. Pour produire 1 tonne de viandes bovines, il faut 1000 L d'eau, 10 qx d'aliments , 50 qx de fourrages .Pour produire 1 tonne de viandes ovines , il lui faut 1000 L d'eau, 5 qx d'aliments, 40 qx de fourrages .

Les quantités de matières premières requises peuvent être représentées par une matrice dite technologique. Chaque colonne donne les quantités de chaque matière première utilisée pour produire chaque produit. Chaque ligne donne les quantités de matières premières nécessaires pour produire 1 tonne de viande bovines et 1 tonne de viande ovines.

La matrice technologique est donc :

$$\begin{array}{cc}
 1 \text{ T bov} & 1 \text{ T ovin ( outputs)} \\
 \left( \begin{array}{cc}
 1000 & 1000 \\
 10 & 5 \\
 50 & 40
 \end{array} \right) & \text{inputs}
 \end{array}$$

On désigne par  $(a_{ij})$  le nombre d'unités de l'input nécessaires à la fabrication de l'output

$a_{ij}$ , est le coefficient technique ou coefficient « input-output »

La matrice  $A=(a_{ij})$  est la matrice technologique de production ou la matrice « d'input-output »

$$A=(a_{ij})= \begin{array}{cccc}
 & p_1 & p_2 & \dots \dots & p_p \\
 \left[ \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots \dots & a_{1p} \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

**Exercices :**

**Exercice1 :** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

\* Calculer s'il est possible :  $AB$  ,  $BA$ ,  $CB$ ,  $BC$ ,  $AC$ ,  $D^2$  ,  $[(CB)^t + 2I_3]$  ,  $\det A$

\* Montrer que  $D$  est inversible, puis calculer sa matrice inverse  $D^{-1}$

**Exercice2** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

\* Montrer que  $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$

\* En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse  $A^{-1}$

**Exercice3 :** Soit la matrice  $A_\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) suivante :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

\* pour quelle valeur de  $\alpha$ ,  $A_\alpha$  est inversible ?

\* Calculer  $A_\alpha^{-1}$  pour que  $\alpha=0$

**Exercice4 :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculer  $AB$  et  $BA$
- Que peut-on en déduire ?

**Exercice5 :** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer leurs inverses

**Exercice6 :** Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solution :**

**Ex01:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

AB n'est pas définie car le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a=3(2)+2(0)+0(-1)=6, b=3(0)+2(1)+0(1)=2, c=3(-1)+2(1)+0(2)=-1, d=1(2)+2(0)+1(-1)=1$$

$$e=1(0)+2(1)+1(1)=3, f=1(-1)+2(1)+1(2)=3$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad CB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a=-4(3)+7(1)=-5, b=-4(2)+7(2)=6, c=-4(0)+7(1)=7, d=0(3)+2(1)=2, e=0(2)+2(2)=4$$

$$f=0(0)+2(1)=2, g=-2(3)+5(1)=-1, h=-2(2)+5(2)=6, i=-2(0)+5(1)=5$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad BC = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 25 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$$

$$a = 3(-4)+2(0)+0(-2)=-12, b=3(7)+2(2)+0(5)=25, d = 1(-4)+2(0)+1(-2)=-6, e = 1(7)+2(2)+1(5)=16$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad AC = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -2 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$a = 2(-4) + 0(0) - 1(-2) = -6$ ,  $b = 2(7) + 0(2) - 1(5) = 9$ ,  $d = 0(-4) + 1(0) + 1(-2) = -2$ ,  $e = 0(7) + 1(2) + 1(5) = 7$ ,  $h = -1(7) + 1(2) + 2(5) = 5$ ,  $g = -1(-4) + 1(0) + 2(-2) = 0$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad D^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -8 & 5 & 6 \\ -4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$a = -1(-1) + 0(0) - 1(-4) = 5$ ,  $b = -1(0) + 0(1) - 1(2) = -2$ ,  $c = -1(-1) + 0(2) - 1(2) = -1$ ,  $d = 0(-1) + 1(0) + 2(-4) = -8$ ,  $e = 0(0) + 1(1) + 2(2) = 5$ ,  $f = 0(-1) + 1(2) + 2(2) = 6$ ,  $g = -4(-1) + 2(0) + 2(-4) = -4$ ,  $h = -4(0) + 2(1) + 2(2) = 6$ ,  $i = -4(-1) + 2(2) + 2(2) = 12$

$$[(CB)^t + 2I_3] = ?$$

$$CB = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{donc } (CB)^t = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$[(CB)^t + 2I_3] = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 6 \\ 7 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(2-1) - 1(0+1) - 2(-1) = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(D) = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -1(2-4) - 1(+4) = -2$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det(D)} (\text{Com}(D))^t$$

$$\text{Com}(D) = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} + & \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{array} & - & \begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ -4 & 2 \end{array} & + & \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{array} \\ \hline - & \begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{array} & + & \begin{array}{c|c} -1 & -1 \\ -4 & 2 \end{array} & - & \begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ -4 & 2 \end{array} \\ \hline + & \begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{array} & - & \begin{array}{c|c} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{array} & + & \begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -6 & +2 \\ 1 & +2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Com}(D)^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -8 & -6 & +2 \\ 4 & +2 & -1 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{-2} \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Exercice2** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0 ?$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & +3 \\ +3 & -6 & +3 \\ -3 & +3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

**On a**  $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$  donc  $A(A-3) = -2I_3$

$$\frac{A(A-3)}{-2} = I_3$$

Donc la matrice  $A$  admet une matrice inverse  $A^{-1} = \frac{(A-3)}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{-2} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{-2} & \frac{-1}{-2} & \frac{1}{-2} \\ \frac{1}{-2} & \frac{1}{-2} & \frac{1}{-2} \\ \frac{2}{-2} & \frac{2}{-2} & \frac{2}{-2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Exercice3** : Soit la matrice  $A_\alpha$  ( $\alpha \in R$ ) suivante :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Det}(A_\alpha) = 1 - \alpha^2 \neq 0$  soit  $\alpha \neq \pm 1$  Pour que  $A_\alpha$  soit inversible

$$A_{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice4 :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

AB et BA ne sont pas commutatives

**Exercice5 :** Soient A et B deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & +1 & -1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice6 :** Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Det (A)=46 , det (B)= 0

## Chapitre 8: Les systèmes d'équations linéaires

### 1) Définition :

On appelle système d'équations linéaires à  $m$  équations et  $n$  inconnues l'ensemble suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Cet ensemble *peut s'écrire* sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

*ou simplement*  $AX=B$

Les éléments  $a_{ij}$  sont les coefficients du système

$A$  est la matrice du système

$X$  est le vecteur des inconnues du système

$B$  est le vecteur du second membre du système

La résolution du système consiste à déterminer les inconnues telles que toutes les équations soient satisfaites. Trois cas sont possibles :

**Premier cas** : il existe une et une seule solution.

**Deuxième cas** : il existe une infinité de solutions.

**Troisième cas** : il n'y a pas de solution. On dit alors que le système est incompatible.

**Exemple :** La matrice du système est :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Le vecteur du second membre est  $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$d'où \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2) La résolution des systèmes d'équations linéaires

### 2.1) la résolution des systèmes d'ordre 2.

Si  $ad-bc \neq 0$ , le système  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  a pour unique solution :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed-bf}{ad-bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af-ec}{ad-bc}$$

Exemple :  $\begin{cases} 4x + 2y = 24 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 2 \\ 16 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{24*3-16*2}{4*3-2*2} = \frac{40}{8} = 5, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 24 \\ 2 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{4*16-2*24}{4*3-2*2} = \frac{16}{8} = 2$$

### 2.2) La résolution des systèmes d'équations linéaires par la méthode de Cramer

**Définition :** Le système  $AX=B$  est dit de Cramer si  $A$  est une matrice carrée et le  $\det(A)$  est non nul. Dans ce cas le système de Cramer admet une solution unique vérifiant  $AX=B$ .

**Remarque :** la résolution à l'aide de la méthode de Cramer n'est possible que dans le cas où le nombre d'équations est égal à celui des inconnues.

Pour résoudre un système de Cramer on procède de la façon suivante :

- On calcule le déterminant de A
- On calcule les déterminants ( $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ )
- On divise chacun de ces déterminants par le déterminant de A

$$\det(A) = \Delta = \det [A_1 A_2 \dots A_n] \text{ avec } A_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det(A_1) = \det [B A_2 \dots A_n] = \begin{bmatrix} b_1 a_{12} \dots a_{1n} \\ b_2 a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ b_n a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \det(A_2) = \det [A_1 B \dots A_n] = \begin{bmatrix} a_{11} B_1 \dots a_{1n} \\ a_{22} B_2 \dots a_{2n} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1} B_n \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

On obtient :  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Exemple : 
$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = d_3 \end{cases}$$

On pose  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Le système admet une solution unique si et seulement si  $\det(A) \neq 0$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

**Exemple 2:** Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

On peut appliquer le système de Cramer du fait qu'on a 3 équations et 3 inconnues , mais il faut vérifier que  $\det(A)$  est non nul .

$$\det(A) = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -16$$

$$d'où: x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2$$

### 2.3) Résolution par inversion de la matrice du système

On a  $AX=B$

La résolution d'un tel système n'est possible que si la matrice  $A$  est inversible .

On note  $A^{-1}$  la matrice inverse de  $A$  . On multiplie les deux membres de l'équation par  $A^{-1}$  :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\text{Exemple : } \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ y + z = 4 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

Ce système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$d'où \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{4} \\ \frac{10}{4} \\ \frac{6}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$d'où \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

### 2.4) La résolution des systèmes par la méthode du pivot de Gauss.

#### Principe

La méthode de Gauss permet de transformer un système de  $m$  équations linéaires à  $n$  inconnues en un système triangulaire équivalent :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & (L_m) \end{cases}$$

qui peut s'écrire de façon plus ramassée sous la forme :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1, \dots, m$$

Où  $i$  désigne la  $i$ -ème équation et l'indice  $j$  la  $j$ -ème variable,  $a_{ij}$  représente le coefficient  $j$ -ème variable dans la  $i$ -ème équation.

Les solutions d'un tel système ( si elles existent ) demeurent inchangées si :

- i) On y permute deux équations ( par exemple , on remplace la première équation par la deuxième, et la deuxième par la première)
- ii) On multiplie les deux membres de ses équations par un scalaire non nul
- iii) On remplace l'une de ses équations par la somme d'elle-même et d'une autre équation

Deux systèmes d'équations linéaires qui se déduisent en appliquant (un nombre fini de fois) les règles i), ii) et iii) sont dits équivalents car comme ils ont les mêmes solutions ( si elles existent ) trouver celles de l'un équivaut à trouver celles de l'autre.

Le terme  $a_{11}$  s'appelle le pivot de cet ensemble d'opérations. On élimine ainsi l'inconnue  $x_1$  des équations  $L_2, L_3 \dots L_m$  et l'on obtient le système équivalent( $S'$ ) :

$$(S') : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Le système ( $S'$ ) est formé de la première équation de ( $S$ ) et d'un système de  $(m-1)$  équations à  $(n-1)$  inconnues avec lequel on se trouve ramené à la solution initiale. Il reste à trouver un second pivot et à recommencer le même ensemble d'opérations.

**Exemple 1:** soit le système d'équations linéaires  $S$  :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 & (1) \\ 2x + y - z = 2 & (2) \\ x + 2y + 2z = 6 & (3) \end{cases}$$

On maintient la première équation et on fait disparaître  $x$  de la deuxième et troisième équation

$$S' \begin{cases} x + y + z = 2 & (1) \\ y + 3z = 2 & (2) - 2(1) \\ y + z = 4 & (3) - (1) \end{cases}$$

On crée un autre système équivalent  $S''$  on faisant disparaître  $y$  de la troisième équation et on maintenant la première équation et la deuxième ( qui sert maintenant de pivot) . On soustrait donc la deuxième équation de  $S'$  de la troisième.

on obtient :

$$S'' \begin{cases} x + y + z = 2 & (1) \\ y + 3z = 2 \\ -2z = 2 \end{cases}$$

Le système  $S''$  est dit triangulaire. A partir de la dernière équation on obtient  $z = -1$ . On reporte cette valeur dans deuxième équation on obtient  $y = 5$ , enfin à partir de la première équation on tire  $x = -2$

Donc  $x = -2, y = 5, z = -1$

### Exemple 2 :

$$\begin{cases} x + 4y - z = 1 & L1 \\ 2x + y + 2z = 3 & L2 \\ 3x - 2y + z = 2 & L3 \end{cases}$$

On maintient  $L1$  et on élimine la variable  $x$  de  $L2$  et  $L3$

$$\text{Soit } \begin{cases} L1 \\ L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ L3 \leftarrow L3 - 3L1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x + 4y - z = 1 & L1 \\ -7y + 4z = 1 & L2' \\ -14y + 4z = -1 & L3' \end{cases}$$

On maintient  $L1$  et  $L2'$  et on élimine  $y$  de  $L3'$

$$\begin{cases} x + 4y - z = 1 & L1 \\ -7y + 4z = 1 & L2' \\ L3' \leftarrow L3' - 2L2' \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x + 4y - z = 1 & L1 \\ -7y + 4z = 1 & L2' \\ -4z = -3 \end{cases}$$

Donc  $z = \frac{3}{4}$ . On remplace dans  $L2'$  pour obtenir  $y = \frac{2}{7}$  et enfin dans  $L1$  pour obtenir  $x = \frac{17}{28}$

**Exemple 3 :**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(2)-2(1) \text{ et } (3)-\frac{3}{2}(1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(3) - (2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ -4x_3 = -1 \end{cases}$$

Le système admet une solution unique  $(1, \frac{5}{4}, \frac{1}{4})$

**Exemple4:** 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 & (1) \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 & (2) \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 20x_4 = 50 & (3) \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 16x_4 = 39 & (4) \end{cases}$$

On garde (1) et (2) et on élimine  $x_1$  dans (3) et (4)

$$(3) - (1) \text{ et } (4) - (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 27 \\ x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 16 \end{cases}$$

On élimine  $x_2$  dans (3) et (4)

$$(3) - 3(2) \text{ et } (4) - (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à éliminer  $x_3$  dans (4)

$$(4) - 2(3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3=1, x_2 = 1, x_1 = -2$$

Le système admet une solution unique qui est ( -2, 1,1,2)

## Exercices

**Exercice1** : Résoudre le système linéaire (S) avec deux méthodes différentes

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

**Exercice2** : On veut résoudre un système d'équation  $A \cdot X=B$

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 9 \\ -x - 4y + 2z = 1 \\ x + 3y - 2z = -6 \end{cases}$$

- Donner la matrice A et le vecteur B
- Résoudre le système en utilisant la méthode de la matrice inverse et la méthode de pivot de Gauss

**Exercice3** : On considère, le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 4x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

- Posez le système sous forme matricielle
- Déterminez les solutions de ce système par la méthode de Cramer et par inversion de la matrice

**Exercice 4** : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

**Solution :**

**La méthode de Pivot de Gauss**

On a

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 & L1 \\ 2x + y + z = 2 & L2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 & L3 \end{cases}$$

On maintient L1 et on élimine la variable x de L2 et L3 . soit :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 & L1 \\ 2x + y + z = L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ 4x + 2y + 3z = 3 & L3 \leftarrow L3 - 4L1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x + 2y + z = 1 & L1 \\ -3y - z = 0 & L2' \\ -6y - z = -1 & L3' \end{cases}$$

On maintient L1 et L2' et on élimine y de L3'

Soit

$$\begin{cases} L1 \\ L2' \\ L3' \leftarrow L3' - 2L2' \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3y - z = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$-3y + 1 = 0, y = \frac{1}{3}$$

$$x + 2\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 1 \text{ soit } x = \frac{4}{3}$$

Le système admet une solution unique  $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -1)$

**La méthode de Cramer**

Le nombre d'équations est égale au nombre d'inconnues

$$\det(A) = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$d' où: x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1}{-3}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1$$

### Exercice2 :

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 9 & L1 \\ -x - 4y + 2z = 1 & L2 \\ x + 3y - 2z = -6 & L3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \\ 1 & +3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

### La méthode de pivot de Gauss

On maintient la première ligne et on supprime x et z de L2 et L3

$$\text{Soit } \begin{cases} 2x - y - 2z = 9 & L1 \\ L2 \leftarrow 2L2 + L1 \\ L3 \leftarrow -2L3 + L1 \end{cases} \quad \text{Soit } \begin{cases} 2x - y - 2z = 9 & L1 \\ -9y + 2z = 11 & L2' \\ -7y + 2z = 21 & L3' \end{cases}$$

On supprime z de L3' et on maintient L1 et L2'

$$\text{Soit } \begin{cases} 2x - y - 2z = 9 & L1 \\ -9y + 2z = 11 & L2' \\ L3' \leftarrow -L3' + L2' \end{cases} \quad \text{soit } \begin{cases} 2x - y - 2z = 9 & L1 \\ -9y + 2z = 11 & L2' \\ +7y - 2z - 7y + 2z = -21 + 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 9 & L1 \\ -9y + 2z = 11 & L2' \\ +7y - 2z - 9y + 2z = -10 & L3'' \end{cases} \quad \text{soit } \begin{cases} 2x - y - 2z = 9 & L1 \\ -9y + 2z = 11 & L2' \\ -2y = -10 \end{cases}$$

Donc  $y = 5$  ,  $z = 28$  ,  $x = 35$

### La méthode de la matrice inverse

On a  $A.X=B$

$A^{-1}.A.X=B$ .  $A^{-1}$  Soit  $X= B. A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (c(A)^t)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & +2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} -4 & +2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +2(8-6) + 1(2-2) - 2(-3+4) = 4-2 = 2$$

$$\text{Com}(A) = \begin{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -8 & -2 & -7 \\ -10 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Com}(A)^t = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -10 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -7 & -9 \end{pmatrix} \text{ donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{-9}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{-9}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } x = 9 - 4 + 30 = 35, y = 0 - 1 + 6 = 5, z = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} - \left(\frac{-9}{2}\right) \cdot (-6) = 28$$

**Exercice3 :** On considère, le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 4x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

**La méthode de Cramer**

$$\det(A) = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 17$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 45$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 50$$

$$d'où: x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{17}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{45}{17}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{50}{17}$$

## La méthode de la matrice inverse

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 4x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (C(A)^t)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - (-2 \cdot 12) + 4 + 4 = 17$$

$$\text{Com}(A) = \begin{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 14 & +8 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Com}(A)^t = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 14 & -5 & -1 \\ +8 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{17} & \frac{3}{17} & \frac{4}{17} \\ \frac{14}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{-1}{17} \\ \frac{+8}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-3}{17} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{-5}{17} & \frac{3}{17} & \frac{4}{17} \\ \frac{14}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{-1}{17} \\ \frac{+8}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-3}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 45 \\ 17 \\ 50 \\ 17 \end{pmatrix}$$

**Exercice 4 :** Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad (x, y, z) = (2, 1, 1)$$

## **Bibliographie :**

Olivier Ferrier (2003) « Maths pour économistes, l'analyse en économie » Vol.1 les fonctions d'une seule variable », Edition De Boeck Université, Rue des Minimes 39 B-1000 Bruxelles.

Olivier Ferrier (2003) « Maths pour économistes, l'analyse en économie » Vol.2 les fonctions de plusieurs variables », Edition De Boeck Université, Rue des Minimes 39 B-1000 Bruxelles.

Bernard Guerrien(1997) « Algèbre linéaire pour économistes » economica, 49 rue Héricart, 75015, paris ( 4<sup>e</sup> édition).

Gérard Klotz (1993) « Mathématiques pour l'économie, ensembles, matrices, équations linéaires », Armand Colin Editeur, Paris, 1993

Alain Planche (1998) « Mathématiques pour économistes. » Dunod, Paris, 1998 ( 2<sup>e</sup> édition) .

Anne-Marie Spalanzani (2000) « Précis de mathématiques pour la gestion et l'économie » Collection « Gestion en + », Presses universitaires de Grenoble.