

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique  
Département d'Automatique

**Mémoire de Fin d'Etudes  
de MASTER ACADEMIQUE**  
Spécialité : **Automatique**  
Option : **Commande des systèmes**

*Présenté par*  
**Mahni ELDJAALA**  
**Smail HADJ MOHAND**

Mémoire proposé et dirigé par **G.IDIRI**

Thème

**Identification des systèmes d'ordre  
fractionnaire**

*Mémoire soutenu publiquement le 22 septembre 2014 devant le jury composé de :*

**M<sup>me</sup> Safia YOUSFI**

**Président**

**M<sup>me</sup> F. CHEBALLAH**

**Examineur**

**M<sup>R</sup> S.GUERMAH**

**Examineur**

**M<sup>R</sup> A. MAIDI**

**Rapporteur**

# Remerciements

## Remerciements

Nous tenons d'abord à remercier tout particulièrement G.IDIRI pour la confiance qu'elle nous a accordée, sa disponibilité, son aide et conseils, tout au long de ce travail

Nous remercions vivement Monsieur Ahmed MAIDI, maitre de conférences classe A à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour son aide.

Nos remerciements vont également aux membres du jury pour avoir accepté de juger notre travail.

Pour finir, nous exprimons nos sincères remerciements à nos très chers parents, nos amis qui de près ou de loin nous ont soutenu et encouragé tout au long de ce mémoire.

Introduction Générale.....	1
Chapitre 1. Généralité sur les systèmes d'ordre fractionnaire .....	3
1. Introduction .....	3
2. Définitions mathématiques .....	4
2.1. Définition de l'intégrale fractionnaire.....	4
2.2. Dérivation d'ordre fractionnaire .....	5
2.2.1. Définition de Riemann-Liouville.....	5
2.2.2. Définition de Caputo.....	6
2.2.3. Définition de Grünwald-Letnikov.....	6
3. Propriétés principales .....	8
4. Evaluation numérique des operateurs d'ordre fractionnaire.....	9
5. Représentation mathématique d'un système d'ordre fractionnaire.....	10
6. Conclusion .....	10
Chapitre 2. Simulation des systèmes d'ordre fractionnaire.....	11
1. Introduction .....	11
2. Simulation des systèmes dynamiques.....	11
2.1. Méthodes analytiques.....	11
2.2. Méthodes numériques.....	12
2.3. Méthodes itératives.....	12
3. Simulation des systèmes fractionnaire en utilisant la définition Grünwald-Letnikov .....	12
4. Méthode des itérations variationnelles fractionnaire (FVIM) .....	14
5. Exemple d'application .....	18
a. Simulation du système d'ordre fractionnaire par la première méthode basée sur la définition Grünwald-Letnikov .....	18
b. Simulation par la Méthode des itérations variationnelles fractionnaire (FVIM) .....	18
6. Conclusion .....	25

Chapitre 3. Identification des systèmes d'ordre fractionnaire .....	26
1. Introduction .....	26
2. Etapes de l'identification.....	26
2.1. Collecte des mesures.....	26
2.2. Traitement des mesures (filtrage, normalisation, .....	27
2.3. Choix de la structure du modèle.....	27
2.4. Identification des paramètres.....	27
2.5. Validation du modèle.....	27
3. Méthode d'identification .....	27
a. Méthodes graphiques.....	27
b. Méthode des moindres carrés .....	28
c. Méthode du modèle .....	28
d. Méthodes récursives .....	28
4. Méthode du modèle .....	28
4.1 Principe de la méthode du modèle.....	29
5. Méthode de Newton .....	31
6. Exemple d'identification d'un système d'ordre fractionnaire par la méthode du modèle.....	32
7. Conclusion.....	34
Conclusion générale.....	36

**Liste des symboles :**

$I^\alpha f(t)$  : ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), Intégrale non entière d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$

${}_{t_0}^L D_t^\alpha f(t)$  : Dérivée d'ordre non entière  $\alpha$  selon Grünwald-Letnikov

${}_{t_0}^R D_t^\alpha f(t)$  : Dérivée d'ordre non entière  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  selon la définition de Riemann

${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t)$  : Dérivée d'ordre non entière  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  selon la définition de Caputo

$D^\alpha$  : Operateur de dérivation d'ordre non entier  $\alpha$

$\frac{d}{dt}$  : Operateur de dérivation

$h$  : Période d'échantillonnage

$\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$  : Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

$\Gamma(\cdot)$  : Fonction Gamma d'Euler

$\binom{n}{j}$  : ( $n \in \mathbb{N}$ ), désigne la combinaison de  $j$  éléments parmi  $n$ , binôme de Newton

$\binom{\alpha}{j}$  : ( $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ), désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels

$\delta$  et  $n$  : paramètres de récurrence de l'approximation

$\theta$  : Vecteur des paramètres du modèle

$J$  : Critère quadratique

$\nabla$  : Gradient

$\nabla^2$  : Hessien

## Table des figures :

Figure.1.1: Principe de généralisation de l'opération de dérivation à des ordres non entiers.....	5
Figure. 1.2 : Simulation du système d'ordre fractionnaire par la méthode basée sur la dérivée de Letnikov avec $\alpha = 0.9$ .....	21
Figure. 1.3 : Simulation du système d'ordre fractionnaire par méthode FVIM avec $\alpha = 0.9$ .....	22
Figure. 1.4 : Simulation du système d'ordre fractionnaire par la méthode basée sur la dérivée de Letnikov avec $\alpha = 0.7$ .....	23
Figure. 1.5 : Simulation du système d'ordre fractionnaire par méthode FVIM avec $\alpha = 0.7$ .....	24
Figure.2 : Principe de la méthode du modèle.....	29

La modélisation d'un système dynamique consiste à décrire sous forme d'équations mathématiques les relations liant les différentes variables caractéristiques du système (entrées, sorties, états et perturbations)[11]. Le modèle peut être décrit sous forme d'équations différentielles ordinaires, de fonction de transfert ou de représentation d'état.

En automatique, le modèle mathématique d'un système dynamique est utilisé pour l'étude de son comportement, pour l'analyse de ses propriétés structurelles (stabilité, commandabilité et observabilité) et pour la conception de la loi de commande.

Pour l'obtention d'un modèle mathématique, il existe deux approches. La première approche, appelée modélisation mathématique, consiste à écrire les lois physiques régissant le fonctionnement du système (relations mathématiques entre les variables du système) en considérant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, physiquement, acceptables. La deuxième approche, appelée modélisation expérimentale, consiste à déterminer un modèle mathématique à partir des mesures entrées-sorties. Les paramètres du modèle sont alors déterminés par des techniques d'identification.

L'identification est une technique expérimentale qui s'appuie sur l'utilisation des procédures et des algorithmes manipulant les mesures expérimentales et qui a pour but d'élaborer les paramètres du modèle de telle sorte que le comportement du modèle soit identique à celui du système [2] [11][12].

L'identification des systèmes dynamiques par des équations différentielles d'ordre entier a connu un grand succès, du fait de leur capacité à décrire le comportement réel du système. Cependant, dans les dernières décennies, de nombreux mathématiciens ont affirmé que l'usage des équations différentielles d'ordre fractionnaire peut mieux décrire le comportement réel d'un système. Dans plusieurs domaines, la modélisation avec la dérivée non entière permet d'accroître davantage la précision du modèle. Ainsi, l'utilisation d'un modèle très précis permet une analyse fiable de ses propriétés fondamentales (commandabilité, observabilité et stabilité) et d'améliorer ses performances.

Quoique les modèles fractionnaires soient recommandés, pour la description dynamique du comportement du système, l'obtention de tels modèles en écrivant les équations mathématiques régissant les phénomènes physiques est une tâche très délicate. Par

conséquent, la modélisation expérimentale (identification) constitue une approche alternative intéressante. La caractérisation consiste à choisir la structure du modèle puis chercher à déterminer ses paramètres par des techniques d'identification.

L'identification peut se faire dans le domaine temporel ou le domaine fréquentiel. L'identification des systèmes d'ordre fractionnaires est un domaine de recherche actif et peu de contributions sont proposées dans la littérature. La plupart des méthodes sont basées sur l'approximation des modèles fractionnaires par des modèles entiers puis d'utiliser les techniques d'identification développées pour ce type de modèle.

L'objectif de ce mémoire est l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire. Pour la simulation des équations d'ordre fractionnaire, pour avoir les mesures, on propose d'utiliser la méthode des itérations variationnelles fractionnaire et pour l'identification des paramètres du modèle on utilise la méthode du modèle.

Le mémoire est organisé en trois chapitres dont les contenus sont comme suit :

Le **premier chapitre** présente les différentes définitions mathématiques de l'intégrale et de dérivée d'ordre fractionnaire : Riemann Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov, ainsi que les principales propriétés de la dérivation d'ordre fractionnaire, l'évaluation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire et la représentation mathématique d'un système d'ordre fractionnaire.

Dans le **deuxième chapitre**, deux méthodes numériques pour la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire sont présentées. La première méthode est basée sur l'approximation numérique de la dérivée d'ordre fractionnaire, selon la définition de Grünwald-Letnikov et la deuxième méthode est la méthode des itérations variationnelles fractionnaire (FVIM). Les deux méthodes de simulation ont été appliquées pour la simulation d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire.

Le **dernier chapitre** présente le principe de la méthode du modèle utilisée en identification des systèmes. Le chapitre présente également la méthode d'optimisation numérique de Newton. Un exemple d'application pour l'identification des paramètres d'un système linéaire d'ordre fractionnaire en utilisant la méthode du modèle basée sur la méthode des itérations variationnelles est abordé à la fin du chapitre.

## 1. Introduction :

Les systèmes d'ordre fractionnaire sont des systèmes qui sont modélisés par des équations différentielles d'ordre non entier (fractionnaire). Ces équations sont basées sur la notion de dérivation et d'intégration d'ordre non entier.

La question de dérivation et intégration fractionnaire (calcul fractionnaire) était posée très tôt dans l'histoire. Elle est abordée dès 1695 dans un courrier échangé entre l'Hôpital et Leibniz, lorsque l'Hôpital demande que pourrait être le résultat de la dérivée d'ordre un demi de la fonction  $x(t)$  par rapport à la variable  $t$ , Leibniz répond que cela mène à un paradoxe, et un jour quelqu'un pourra atteindre d'utiles conséquences de cette expression, depuis, le calcul fractionnaire est né, donc, c'était au cours de 19<sup>ème</sup> siècle [4]. Cent ans plus tard, après quelque travaux d'un grand nombre de mathématiciens tel qu'Abel, Liouville, Riemann, Bien qu'il ne soit pas nouveau, le calcul différentiel et intégral d'ordre fractionnaire est redevenu un sujet d'étude dans la deuxième moitié du 20<sup>ème</sup> siècle. Ce calcul fractionnaire est une généralisation de la notion de dérivée d'ordre entier  $\alpha$  d'une fonction  $x(t)$  par rapport à la variable  $t$ . Différentes définitions de la dérivation et de l'intégrale d'ordre fractionnaire (non entier) ont été établies.

De nombreux systèmes physiques comme systèmes thermiques et électrochimiques peuvent être décrits par des équations différentielles à dérivée non entière (fractionnaire) [3].

L'absence d'outils mathématiques permettant la simulation, la modélisation et l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire est la raison de l'utilisation de modèles basés sur des équations à dérivées entières. Pour cela, plusieurs recherches ont été entamées pour pouvoir utiliser le calcul fractionnaire pour décrire correctement le comportement de nombreux systèmes physiques. L'opérateur d'ordre fractionnaire est une généralisation d'intégration et de différentiation en un seul opérateur d'ordre non entier  ${}_a D_t^\alpha$  [3] où :

$a$  et  $t$  sont les bornes de l'opération et  $\alpha$  est l'ordre de la dérivée fractionnaire.

L'opérateur integro-différentiel continu est défini comme suit :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\alpha \in R$  est l'ordre de l'opération.

Dans ce chapitre, nous présenterons les différentes définitions de la dérivée fractionnaire, les propriétés principales, l'interprétation de la dérivée fractionnaire ainsi que, l'évaluation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire.

## 2. Définitions mathématique [9] :

Dans cette partie, nous présenterons en premier une définition unique de l'intégration d'ordre fractionnaire et les différentes définitions de la dérivée d'ordre fractionnaire.

### 2.1 Définitions de l'intégration fractionnaire :

Soit  $f(t)$  une fonction réelle de la variable  $t$ , continue et intégrable sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

L'intégration répétée  $k$  fois d'une fonction réelle  $f(t)$  de la variable réelle  $t$ , appelée également l'intégrale  $k^{\text{ème}}$  de  $f(t)$ , noté  $I^k f(t)$ , exprimée par la formule de Cauchy :

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 dt_2 dt_3 \dots dt_k = I^k f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{k-1} f(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

Avec  $k$  nombre entier positif.

Riemann a proposé de remplacer la fonction factorielle par la fonction Gamma qui est la généralisation aux nombre réelle, pour la généralisation de la formule de Cauchy (1.2) à un nombre réel  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , puis on obtient la fonction d'intégration non entière (fractionnaire) :

$${}_t I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

Avec  $\Gamma$  fonction Gamma d'Euler définie par :

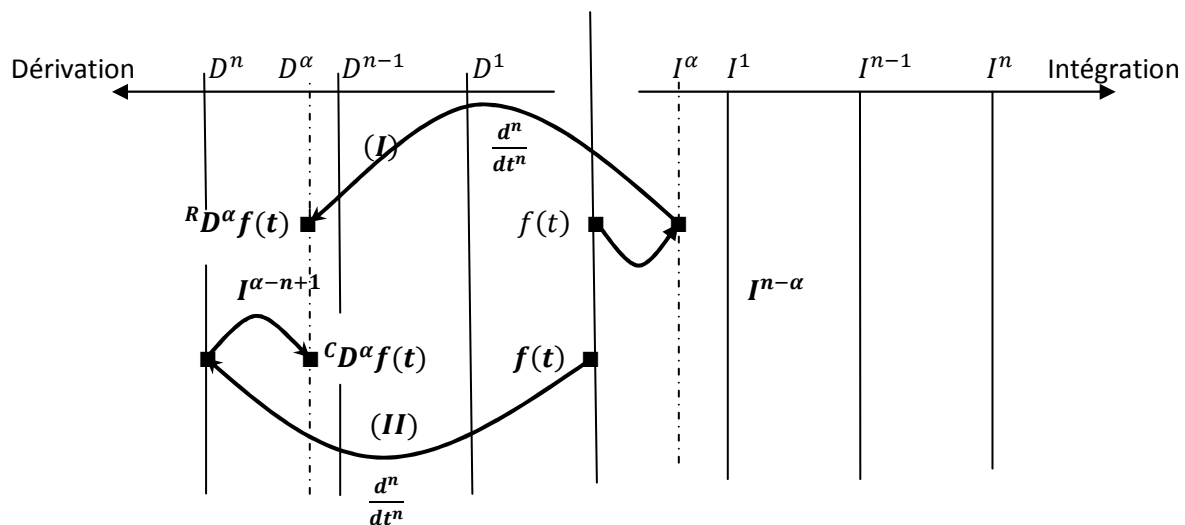
$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\lambda-1} dx \quad (1.4)$$

Avec :  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{Z}, x \in \mathbb{C}$

## 2.2. Dérivation d'ordre non entier :

La dérivation d'ordre non entier est la généralisation de la dérivée d'ordre entier à des ordres quelconques (c'est-à-dire à des ordres non entiers). A partir de cette généralisation on trouve la définition de Riemann-Liouville, la définition de Caputo et la définition de Grünwald-Letnikov qui est basée sur la définition usuelle de la dérivée d'ordre entier.

Pour mieux expliquer les deux premières définitions, considérons le schéma de principe de la figure (1.1) suivant [9] :



**Fig.1.1:** Principe de généralisation de l'opération de dérivation à des ordres non entiers

Avec :

$n$ : un entier positif

$f$ : une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, \infty]$

Plusieurs définitions pour la dérivée fractionnaire existent dans la littérature. Dans ce qui suit, on présente les définitions les plus utilisées.

### 2.2.1. Définition de Riemann-Liouville :

Cette définition obtenue par deux étapes (figure 1.1)

- En intégrant la fonction à l'ordre non entier  $n - \alpha$ .
- En dérivant le résultat obtenu à l'ordre entier  $n$ .

Cette définition est appelée définition de Riemann-Liouville. Elle très utilisée pour des dérivées d'ordre fractionnaire.

Sa définition mathématique est :

$${}_{t_0}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\} \quad (1.5)$$

${}_{t_0}^R D_t^\alpha f(t)$ : la dérivée d'ordre non entier  $\alpha$  par rapport à  $t$  de la fonction  $f(t)$  entre  $t_0$  et  $t$  selon la définition de Riemann-Liouville.

### 2.2.2 Définition de Caputo :

Caputo a introduit une autre définition de la dérivée non entière.

Elle est aussi obtenue par deux étapes (figure 1.1).

- En dérivant la fonction à l'ordre entier  $n$ .
- En intégrant le résultat obtenu à l'ordre non entier  $\alpha - n + 1$ .

Sa définition mathématique est:

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1.6)$$

${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t)$  : la dérivée d'ordre non entier  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  entre  $t_0$  et  $t$  selon la définition de Caputo.

### 2.2.3 Définition de Grünwald-Letnikov

Elle est basée sur la généralisation de la dérivée d'une fonction  $f(t)$  d'ordre  $n \in N$ , elle obtenue en utilisant la définition entière usuelle.

En effet, partant de la dérivée première :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (1.7)$$

$h$  : le période d'échantillonnage.

La dérivée seconde donne :

$$D^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (1.8)$$

Généralisation à l'ordre  $n \in \mathbb{N}$  donne :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \quad (1.9)$$

Avec :

$n$ : un nombre entier.

$\binom{n}{k}$  : la combinaison de  $k$  élément parmi  $n$

Où :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{cases} \quad (1.10)$$

La généralisation aux ordres non entiers (fractionnaires)  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  de l'équation (1.9) donne la définition de Grunwald-Letnikov suivante :

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad (1.11)$$

Avec :

$\binom{\alpha}{k}$  : binôme de Newton généralisé à des ordres réels :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha - k + 1)} \quad (1.12)$$

Où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma généralisée aux nombres fractionnaire, définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (1.13)$$

### 3. Propriétés principales [3] :

Les principales propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires sont les suivantes :

1. Si  $f(t)$  est une fonction analytique en  $t$  alors sa dérivée fractionnaire est  ${}_0D_t^\alpha f(t)$  une fonction analytique en  $t$  et  $\alpha$ .
2. Pour définir un opérateur d'ordre fractionnaire il est nécessaire de connaître les deux paramètres  $\alpha$  et  $t$ .
3. Pour  $\alpha = n$ , où  $n$  est un nombre entier, l'opération  ${}_0D_t^\alpha f(t)$  produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.
4. La dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de l'intégrale de même ordre d'une fonction donne la fonction elle-même avec  $\alpha > 0$ .

$${}_0D_t^\alpha \{I_t^\alpha f(t)\} = f(t) \quad \text{avec } \alpha > 0 \quad (1.14)$$

5. Pour  $\alpha = 0$ , l'opérateur  ${}_0D_t^\alpha$  est l'opérateur identité, ainsi :

$${}_0D_t^\alpha f(t) = f(t) \quad (1.15)$$

6. La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérations linéaires.

$$D_t^\alpha (\gamma f(t) + \delta g(t)) = \gamma D_t^\alpha f(t) + \delta D_t^\alpha g(t) \quad (1.16)$$

#### 4. Evaluation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire [3] :

Nous décrivons dans cette partie une méthode simple et efficace pour l'évaluation des dérivées fractionnaire. Cette approche est basée sur une approximation de la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov.

Nous pouvons ainsi utiliser cette approximation pour l'évaluation numérique de l'intégrale et de la dérivée d'ordre fractionnaire en choisissant une valeur appropriée du pas d'échantillonnage  $h$ , soit :

$${}_{t_0} D_t^\alpha y(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(t - kh) \quad (1.17)$$

Pour une fonction causale  $y(t)$ , et pour  $t = kh$  nous aurons l'approximation suivante :

$${}_{t_0} D_t^\alpha y(t) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} y(kh - jh) \quad (1.18)$$

Où  $\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor$  désigne la partie entière et  $\binom{\alpha}{j}$  sont des coefficients binomiaux et

$$W_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad (j = 1, 2, 3 \dots)$$

Le calcul des coefficients se fait par la formule de récurrence suivante.

$$W_0^\alpha = 1, \quad W_j^\alpha = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) W_{j-1}^\alpha \quad (1.19)$$

## 5. Représentation mathématique d'un système d'ordre fractionnaire :

Comme pour les systèmes d'ordre entier, un système d'ordre fractionnaire peut être représenté par :

Des équations différentielles d'ordre fractionnaires comme suit

$$D^\alpha x(t) + x(t) = u(t) \quad (1.20)$$

Une représentation d'état comme suit

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.21)$$

Une fonction de transfert comme suit

$$G(s) = \frac{b_1 s^{\alpha_1} + b_2 s^{\alpha_2} + \dots + b_m s^{\alpha_m}}{a_1 s^{\gamma_1} + a_2 s^{\gamma_2} + \dots + a_n s^{\gamma_n}} \quad (1.22)$$

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'identification, dans le domaine temporel, des systèmes d'ordre fractionnaires représentés par des équations d'état dont la structure est supposée connue. L'objectif est de déterminer les paramètres du modèle à partir des mesures.

## 6. Conclusion :

1. Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes définitions mathématique de la dérivation fractionnaire, nous avons commencé par la définition mathématique d'une intégrale d'ordre fractionnaire, ensuite nous avons donné la définition mathématique de la dérivée d'ordre fractionnaire selon les définitions données par Riemann Liouville, Caputo et celle de Grünwald-Letnikov, aussi leurs propriétés principales, l'évaluation numérique des operateurs d'ordre fractionnaire et Représentation mathématique d'un système d'ordre fractionnaire.

Dans le chapitre suivant, nous aborderons les méthodes de simulation des systèmes d'ordre fractionnaire.

## 1. Introduction :

La simulation des systèmes d'ordre fractionnaire consiste à résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire décrivant les dynamiques de ces systèmes. En simulation des méthodes numériques sont utilisées.

Dans notre travail, la simulation est utilisée pour récupérer les mesures (solutions) obtenues en considérant des paramètres connus pour le modèle dont la structure est connue. Puis, en utilisant des techniques d'identification, on détermine les valeurs de ces paramètres.

Dans ce chapitre deux méthodes de simulation seront utilisées pour la simulation des équations d'ordre fractionnaire. La première méthode est basée sur l'approximation numérique de la dérivée d'ordre fractionnaire, en utilisant la définition de Grunwald-Letnikov et la deuxième méthode est la méthode des itérations variationnelles fractionnaire (FVIM).

Dans ce chapitre, nous présentons en détail ces deux méthodes de simulation des systèmes d'ordre fractionnaire et qui seront appliquées pour la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire.

## 2. Simulation des systèmes dynamiques :

La simulation d'un système dynamique consiste à déterminer l'évolution de ces variables indépendants, à partir d'un état initial, en fonction de la variable temps.

De point de vue mathématique, la simulation consiste à déterminer les solutions des équations différentielles du modèle à partir des conditions initiales supposées connues.

Les méthodes de résolution des équations différentielles peuvent être scindées en trois classes :

### 2.1. Méthodes analytiques :

Dans ce cas la solution est déterminée analytiquement en utilisant des méthodes bien déterminées (transformée de Laplace, méthode des caractéristiques, méthode de séparation de variables). Généralement, l'obtention de la solution analytique est impossible. Seules quelques équations simples peuvent être résolues analytiquement, par exemple l'équation différentielle ordinaire du premier ou de second ordre.

## 2.2. Méthodes numériques :

Dans ce cas la solution est obtenue numériquement en faisant des itérations à partir de la condition initiale, par exemple la méthode d'Euler (des différences finies), la méthode Runge-Kutta, développement en série de Taylor. Dans ce cas des conditions de stabilité de la méthode doivent être vérifiées et la qualité de la solution dépend de certains paramètres de la méthode par exemple le pas d'intégration.

## 2.3. Méthodes itératives :

Dans ce cas la solution est déterminée en utilisant des formules récurrentes à partir d'une solution estimée de la solution puis en faisant des itérations, on détermine une solution analytique qui approxime la solution. Par exemple la méthode des itérations variationnelles fait partie de cette classe.

## 3. Simulation des systèmes fractionnaires en utilisant la définition Grünwald-Letnikov :

Soit un système linéaire d'ordre fractionnaire décrit par l'équation suivante

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec :

$x(t)$  : L'état de système.

$u(t)$  : L'entrée de système.

$D^\alpha$  : L'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire  $\alpha$ .

$a, b, c, d$  : Les paramètres de système.

Pour la simulation du système d'ordre fractionnaire décrit par l'équation (2.1), la dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\alpha x(t)$  est donnée par la définition de Grünwald-Letnikov qui est donnée par (1.11). On a donc :

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x(t - jh) \quad (2.2)$$

Avec :

$$w_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad (2.3)$$

En remplaçant l'expression (2.3) dans (2.2), on obtient :

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t}{h}} w_j^{(\alpha)} x(t - jh) \quad (2.4)$$

En remplaçant l'expression de la dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\alpha x(t)$  donnée par (2.4) dans l'équation (2.1), l'équation d'état du système d'ordre fractionnaire devient comme suit :

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t}{h}} w_j^{(\alpha)} x(t - jh) = ax(t) + bu(t) \quad (2.5)$$

On peut écrire l'équation (2.5) comme suit :

$$\frac{1}{h^\alpha} x(t) + \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=1}^{\frac{t}{h}} w_j^{(\alpha)} x(t - jh) = ax(t) + bu(t) \quad (2.6)$$

On met  $x(t)$  en facteur, l'équation (2.6) devient :

$$\left(\frac{1}{h^\alpha} - a\right)x(t) = -\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=1}^{\frac{t}{h}} w_j^{(\alpha)} x(t-jh) + bu(t) \quad (2.7)$$

Ce qui donne la solution de l'équation (2.1) sous la forme suivante :

$$x(t) = \frac{h^\alpha}{1-ah^\alpha} \left(-\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t}{h}} w_j^{(\alpha)} x(t-jh) + bu(t)\right) \quad (2.8)$$

Dans le cas discret, on a :  $\frac{t}{h} = m$  c'est à dire  $t = mh$ , ce qui donne :

$$x(mh) = \frac{h^\alpha}{1-ah^\alpha} \left(-\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^m w_j^{(\alpha)} x(h(m-j)) + bu(mh)\right) \quad (2.9)$$

La solution de l'équation (2.1) est :

$$x(m) = \frac{h^\alpha}{1-ah^\alpha} \left(-\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^m w_j^{(\alpha)} x(m-j) + bu(m)\right) \quad (2.10)$$

#### 4. Méthode des itérations variationnelles fractionnaire (FVIM)

La méthode des itérations variationnelles fractionnaire permet de résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire d'une manière itérative. En générale la méthode converge vers la solution exacte après un nombre acceptable des itérations.

Pour expliquer le principe de cette méthode, on considère un système non linéaire d'ordre fractionnaire décrit par un ensemble d'équations différentielles fractionnaires comme suit :

$$D^\alpha x_i(t) = f(x_i(t), \dots, x_n(t)), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.11)$$

Avec :  $x_i(t)$  sont les états de système.

$f(t)$  : est une fonction non linéaire.

$D^\alpha$  : L'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire  $\alpha$

L'algorithme de la méthode des itérations variationnelles fractionnaire est donné par l'équation suivante [5] :

$$x^{(k+1)}(t) = x^{(k)}(t) + \int_0^t \lambda(\varepsilon) [D^\alpha x(\varepsilon) - f(\tilde{x}_i(\varepsilon), \dots, \tilde{x}_n(\varepsilon), \varepsilon)] d\varepsilon \quad (2.12)$$

Où :

$\lambda$  : Multiplicateur de Lagrange

$\tilde{x}_i$  : sont des variations représentent les variations strictes ( $\delta \tilde{x}_i^t(\varepsilon) = 0$ )

$k$  : le nombre d'itérations

Pour déterminer la valeur du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  on utilise la théorie le calcul des variations et on considère l'ordre de la dérivée fractionnaire  $\alpha$  est égal à un, c'est à dire  $\alpha = 1$ . L'algorithme de la méthode FVIM qui est donné par (2.12) sera comme suit :

$$x^{(k+1)}(t) = x^{(k)}(t) + \int_0^t \lambda(\varepsilon) [\dot{x}(\varepsilon) - f(\tilde{x}_i(\varepsilon), \dots, \tilde{x}_n(\varepsilon), \varepsilon)] d\varepsilon \quad (2.13)$$

Le calcul des variations donne:

$$\delta x^{(k+1)}(t) = \delta x^{(k)}(t) + \delta \int_0^t \lambda(\varepsilon) [\dot{x}(\varepsilon) - f(\tilde{x}_i(\varepsilon), \dots, \tilde{x}_n(\varepsilon), \varepsilon)] d\varepsilon \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) peut être écrite comme suit :

$$\delta x^{(k+1)}(t) = \delta x^{(k)}(t) + \int_0^t \lambda(\varepsilon) \delta \dot{x}(\varepsilon) - \int_0^t \lambda(\varepsilon) \delta f(\tilde{x}_i(\varepsilon), \dots, \tilde{x}_n(\varepsilon), \varepsilon) d\varepsilon \quad (2.15)$$

Dans le cas non linéaire, le dernier terme de l'équation (2.15) est nul puisque les variables

$\tilde{x}_i(\varepsilon)$  représentent des variations strictes, c'est-à-dire  $\delta \tilde{x}_i^{(k)}(\varepsilon) = 0$

Par conséquent :

$$\delta x^{(k+1)}(t) = \delta x^{(k)}(t) + \int_0^t \lambda(\varepsilon) \delta \dot{x}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2.16)$$

L'intégration par partie de l'intégrale de l'équation (2.16) donne:

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda(\varepsilon) \delta \dot{x}^{(k)}(\varepsilon) d\varepsilon &= \lambda(\varepsilon) \delta x^{(k)} \Big|_0^t - \int_0^t \dot{\lambda}(\varepsilon) \delta x^{(k)} d\varepsilon \\ &= \lambda(t) \delta x(t) - \lambda(0) \delta x(0) - \int_0^t \dot{\lambda}(\varepsilon) \delta x^{(k)} d\varepsilon \end{aligned} \quad (2.17)$$

Comme la variation de  $x(0)$  est nulle, c'est à dire  $\delta x(0) = 0$ , l'équation (2.17) peut être écrite comme suit :

$$\int_0^t \lambda(\varepsilon) \delta \dot{x}^{(k)}(\varepsilon) d\varepsilon = \lambda(t) \delta x(t) - \int_0^t \dot{\lambda}(\varepsilon) \delta x^{(k)} d\varepsilon \quad (2.18)$$

En remplace (2.18) dans (2.16), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta x^{(k+1)}(t) &= \delta x^{(k)}(t) + \lambda(t) \delta x^{(k)}(t) - \int_0^t \dot{\lambda}(\varepsilon) \delta x^{(k)} d\varepsilon \\ &= \delta x^{(k)}(t) (1 + \lambda(t)) - \int_0^t \dot{\lambda}(\varepsilon) \delta x^{(k)} d\varepsilon \end{aligned} \quad (2.19)$$

En force la variation a zéros ( $\delta x^{(k+1)}(t) = 0$ ), qui nous donnent

$$\delta x^{(k)}(t)(1 + \lambda(t)) - \int_0^t \dot{\lambda}(\varepsilon) \delta x^{(k)} d\varepsilon = 0 \quad (2.20)$$

Ce qui donne les conditions de stationnarité suivantes

$$\begin{cases} 1 + \lambda(t) = 0 & (2.21) \\ \dot{\lambda}(t) = 0 & (2.22) \end{cases}$$

La résolution de l'équation (2.22) et la condition (2.21), conduit au multiplicateur de Lagrange suivants :

$$\lambda(t) = -1 \quad (2.23)$$

En remplaçant l'équation (2.23) dans l'équation (2.13), l'algorithme de la méthode FVIM devient comme suit :

$$x^{(k+1)}(t) = x^{(k)}(t) - \int_0^t [D^\alpha x(\varepsilon) - f(\tilde{x}_1(\varepsilon), \dots, \tilde{x}_n(\varepsilon), \varepsilon)] d\varepsilon \quad (2.24)$$

Ces formules itératives données par (2.24) permettent de calculer la solution approximative de l'équation (2.12). La précision des solutions obtenues dépend du nombre des itérations effectuées. Après un nombre acceptable des itérations, on obtient la solution avec une précision acceptable.

La solution exacte de la méthode des itérations variationnelles fractionnaire est donnée par :

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k(t) \quad (2.25)$$

### 5. Exemple

Soit un système linéaire d'ordre fractionnaire décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -x(t) + u(t) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

$x(t)$  : L'état de système.

$u(t)$  : L'entrée de système.

$D^\alpha$  : L'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire  $\alpha$ .

#### a. Simulation du système d'ordre fractionnaire par la première méthode :

Pour la résolution du système par la première méthode en utilisant la définition de Grünwald-Letnikov, la solution est :

$$x(m) = \frac{h^\alpha}{1+h^\alpha} \left( -\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^m w_j^{(\alpha)} x(m-j) + 1 \right) \quad (2.27)$$

Dans cet exemple, la période d'échantillonnage est  $h = 0.01$ , la valeur de la dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha = 0.9$ , et le nombre de période d'échantillonnage  $m = \frac{t_f}{h} = 100$ ,  $t_f = 1$

Le résultat de simulation est donné par la figure.1.2 en page21

#### b. Simulation par la Méthode des itérations variationnelles fractionnaire (FVIM) :

Pour la résolution de l'équation (2.27), par la méthode FVIM, l'algorithme itératif de la méthode est donné par l'équation suivante:

$$x^{(k+1)}(t) = x^{(k)}(t) - \int_0^t [D^\alpha x(\varepsilon) - f(\tilde{x}_i(\varepsilon), \dots, \tilde{x}_n(\varepsilon), \varepsilon)] d\varepsilon \quad (2.28)$$

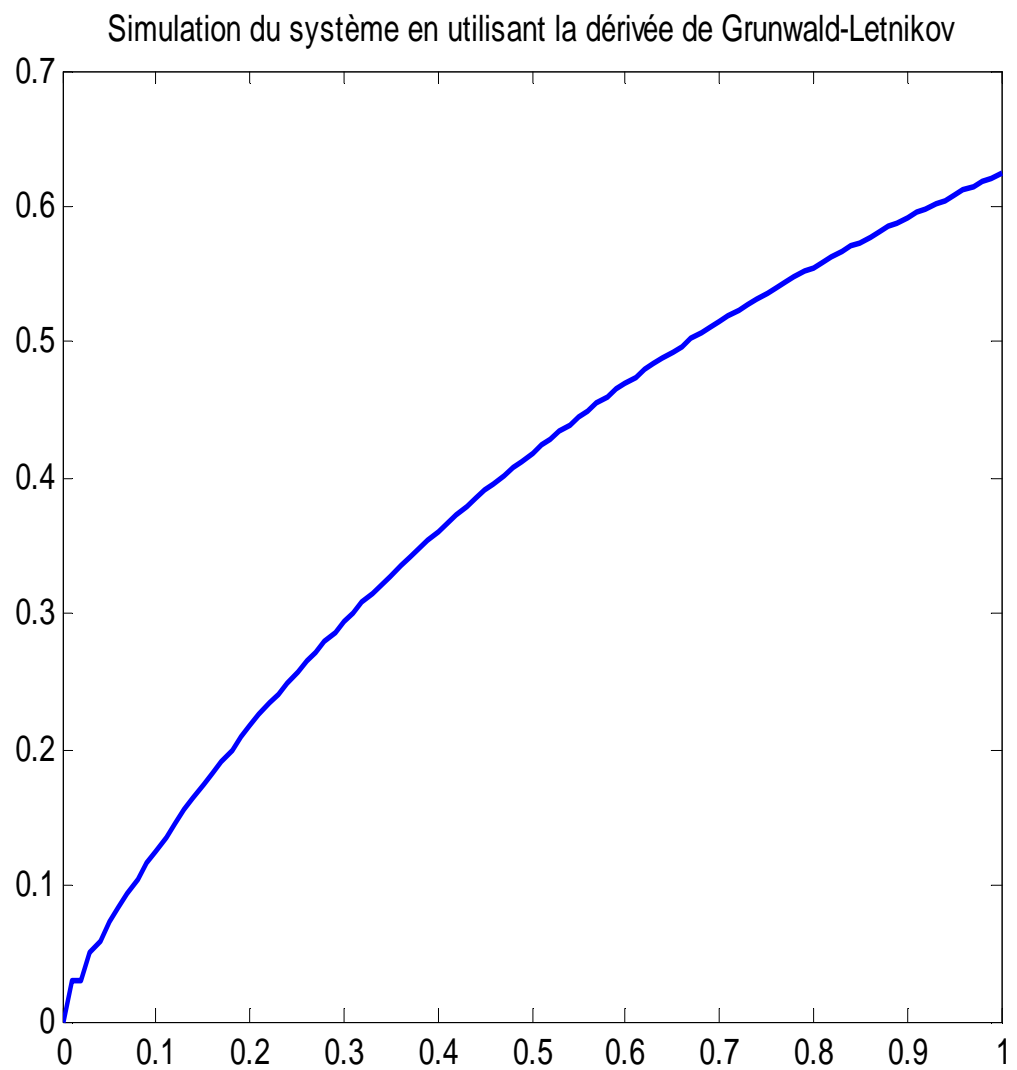
Après avoir discrétisé le temps, à la première itération, c'est-à-dire pour  $k=0$  on obtient :



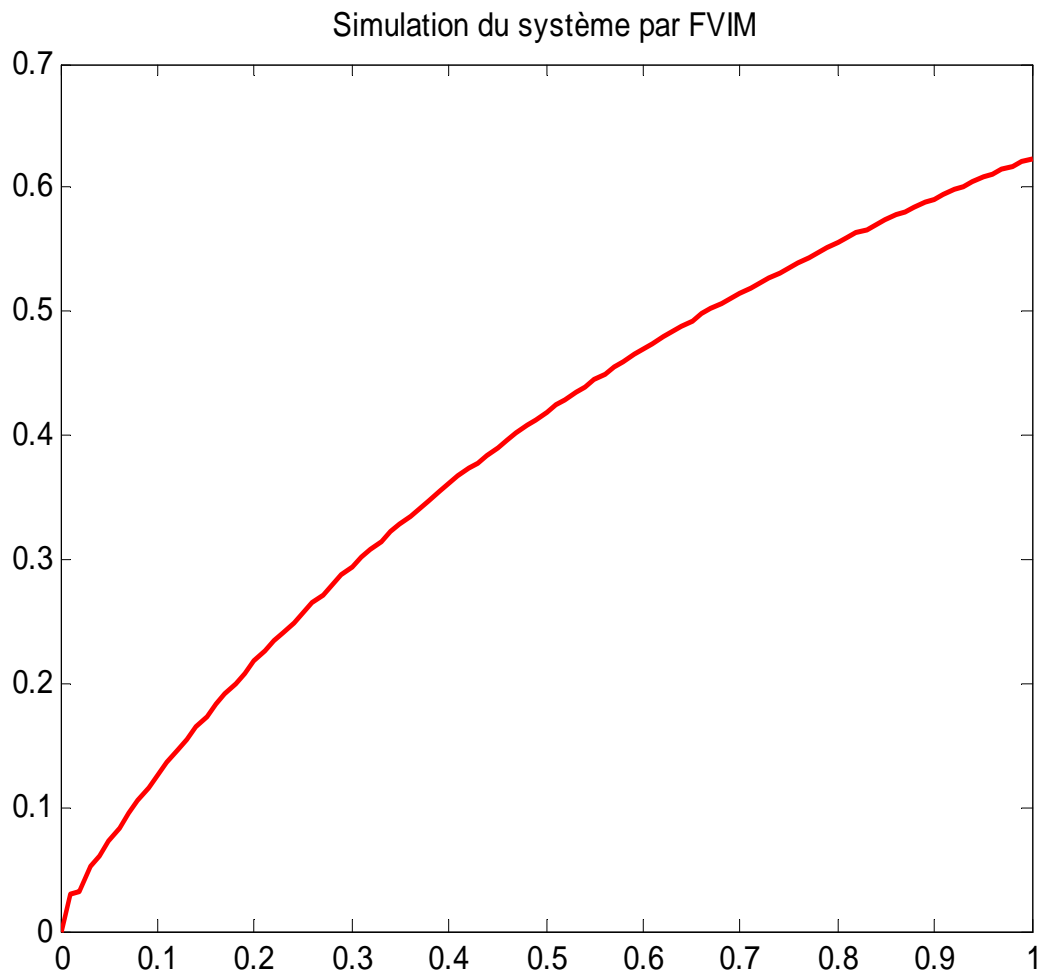
$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(6)}(0) = x^{(5)}(t) - \int_0^0 (D^\alpha x^{(5)}(0) + x^{(5)}(0) - 1)d\xi \\ x^{(6)}(dt) = x^{(5)}(dt) - \int_0^{dt} (D^\alpha x^{(5)}(dt) + x^{(5)}(dt) - 1)d\xi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{(6)}(tf) = x^{(5)}(tf) - \int_0^{tf} (D^\alpha x^{(5)}(tf) + x^{(5)}(tf) - 1)d\xi \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Pour les mêmes valeurs de l'ordre de la dérivée fractionnaire  $\alpha$ , de la période d'échantillonnage  $h$  et de nombre de période d'échantillonnage  $m$ , le résultat de simulation est donné par la figure.1.3

Les figures 1.2 et 1.3 donnent les résultats de simulation de l'équation d'ordre fractionnaire donnée par (2.26), en utilisant les deux méthodes de simulation.



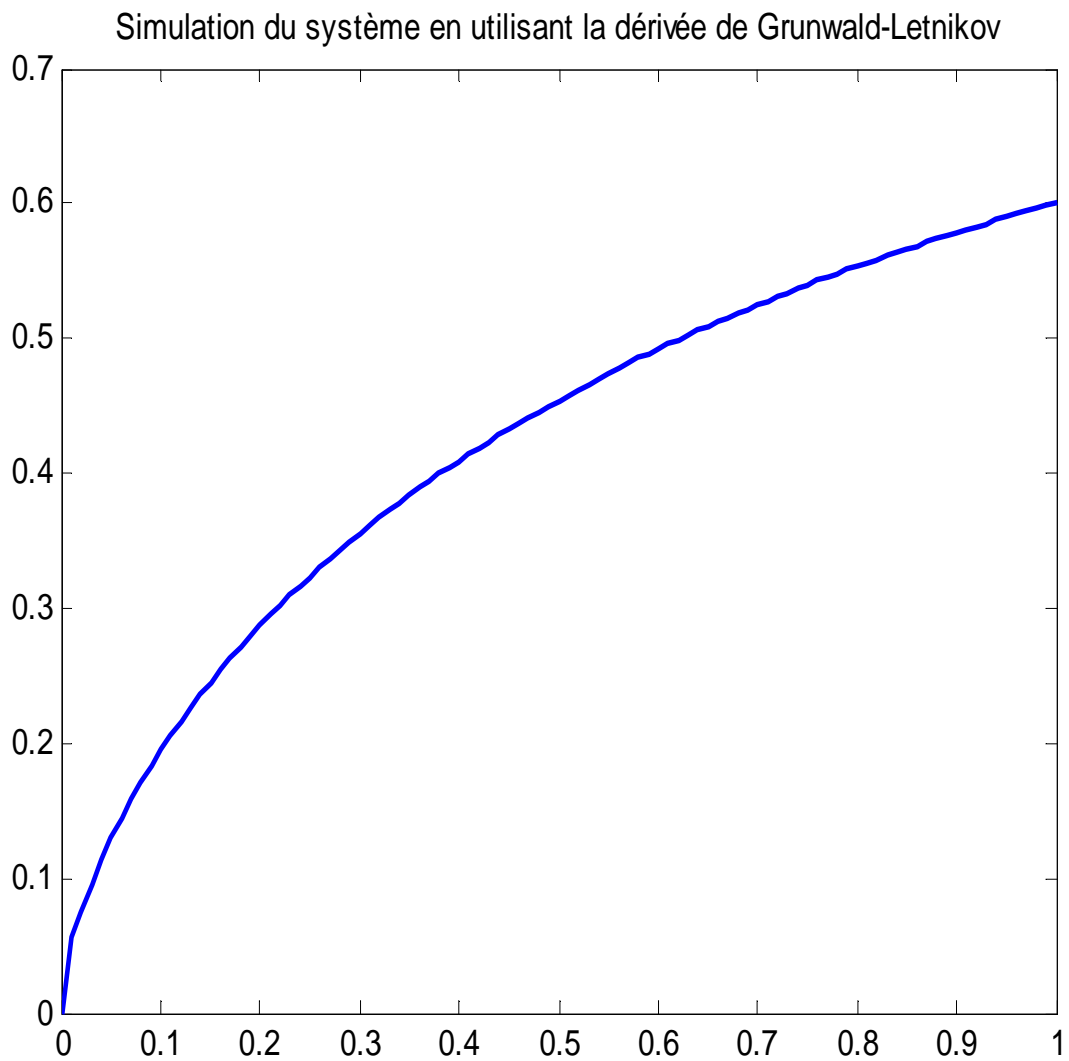
**Figure 1.2 :** Simulation du système d'ordre fractionnaire par la méthode Letnikov



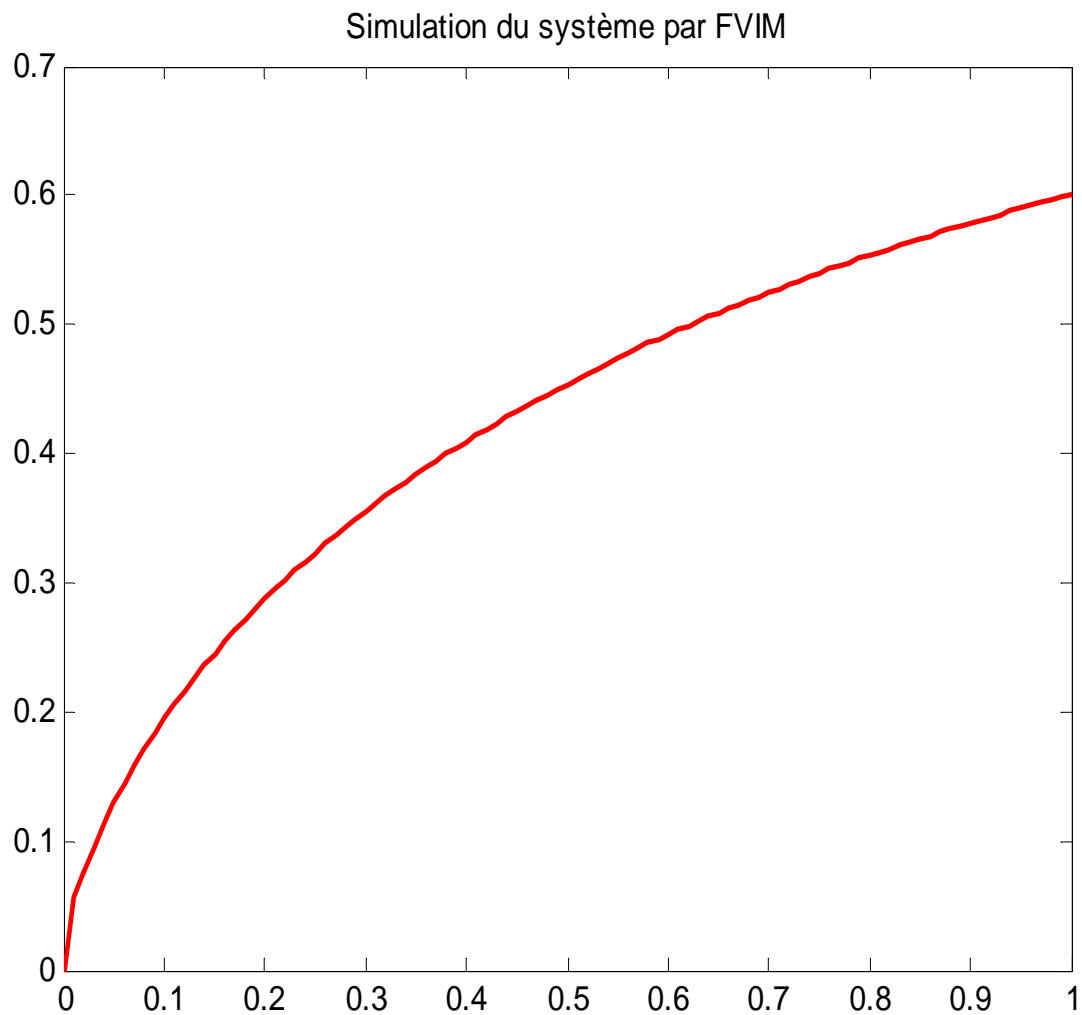
**Figure 1.3:** Simulation du système d'ordre fractionnaire par la méthode FVIM

- Pour une notre valeur de  $\alpha = 0.7$  :

Après avoir refait la simulation avec les deux méthodes Letnikov et FVIM nous obtenons les figures 1.4 et 1.5 suivantes :



**Figure.1.4:** Simulation du système d'ordre fractionnaire par la méthode Letnikov avec  $\alpha = 0.7$



**Figure 1.5:** Simulation du système d'ordre fractionnaire par la méthode FVIM avec  $\alpha = 0.7$

### Interprétation des résultats :

Les figures 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5 représentent l'état du système d'ordre fractionnaire simulé respectivement par la méthode directe en utilisant la définition de Grunwald- Letnikov et par la méthode des itérations variationnelle fractionnaire (FVIM). La solution obtenue par la méthode des itérations variationnelles fractionnaire converge vers la solution obtenue par la

méthode directe après six itérations, ce qui montre l'intérêt et la précision de la méthode FVIM.

## **6. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux méthodes numériques utilisées pour la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire, La première méthode est basée sur l'utilisation de la définition de Grunwald-Letnikov et la deuxième méthode est la méthode des itérations variationnelles fractionnaire (FVIM).

Pour comparer les résultats obtenus par les deux méthodes, on les a appliqués pour la simulation d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire. Les résultats de simulation obtenus sont identiques ce qui montre l'intérêt des deux méthodes de simulation.

Le chapitre suivant aura pour objectif d'approfondir l'application de la méthode des itérations variationnelles fractionnaire (FVIM) pour l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire.

## 1. Introduction :

De nombreux problèmes issus de la réalité (en particulier les processus industriels) sont modélisés par des systèmes d'équations (différentielles, aux dérivées partielles,...), dans lesquelles un certain nombre de paramètres sont inconnus. Ces inconnus doivent alors être déterminés ou identifiés. On parle donc de l'identification des paramètres d'un modèle mathématique. L'identification donc est une technique expérimentale qui s'appuie sur l'utilisation des procédures et des algorithmes manipulant les mesures expérimentales et qui a pour but d'ajuster les paramètres du modèle de telle sorte à ce que le comportement du modèle soit identique à celui du système [7] [12]. Il existe plusieurs méthodes pour l'identification des paramètres d'un modèle mathématique.

Ces méthodes existantes peuvent être divisées en trois classes. La première classe regroupe les méthodes graphiques (par exemple la méthode de Strejc), la seconde les méthodes non récursives (comme la méthode des moindres carrés et la méthode du modèle) et la troisième les méthodes récursives (par exemple la méthode des moindres carrés récursifs).

Dans ce chapitre, pour l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire, on propose d'utiliser la méthode du modèle [1][2].

## 2. Etapes de l'identification :

Pour l'identification d'un système dynamique, on suit les étapes suivantes

1. Collecte des mesures,
2. Traitement des mesures (filtrage, normalisation, ...),
3. Choix de la structure du modèle,
4. Identification des paramètres
5. Validation du modèle

Notons que si les résultats de l'étape 5 ne sont pas concluants, alors on reprend la procédure en considérant d'autres choix, par exemple prendre une structure du modèle ou considérer une autre méthode d'identification.

### 2.1. Collecte des mesures :

Elle consiste à exciter un système par un signal d'entrée riche en fréquences et récupérer le signal de sortie.

## **2.2. Traitement des mesures :**

Généralement les mesures sont entachées de bruit, alors pour une identification de qualité, on peut filtrer les mesures.

## **2.3. Choix de la structure du modèle :**

Cette étape est importante pour le succès de l'identification, elle consiste à choisir la structure du modèle (ordre du système et la forme (linéaires ou non linéaires) et le nombre des équations.

## **2.4. Identification des paramètres :**

Cette étapes consiste à utiliser des algorithmes permettant de minimiser l'erreur entre les mesures et les sorties prédites par le modèle. Généralement, à partir d'une estimation des paramètres du modèle, les algorithmes tentent de déterminer de nouveau paramètres permettant de minimiser cette erreur. La plupart des algorithmes implémentent des méthodes d'optimisation déterministes ou stochastiques.

## **2.5. Validation du modèle :**

Cette étape consiste à évaluer la qualité du modèle obtenue en faisant confronter les sorties prédites par le modèle avec les mesures en considérant d'autres signaux d'excitation autre que celui utilisé pour l'identification.

## **3. Méthodes d'identification :**

Les méthodes d'identification peuvent être classées comme suit :

### **a. Méthodes graphiques :**

On les qualifie ainsi, parce qu'elles sont basées sur une réponse du procédé à un échelon. Elles ne permettent pas d'obtenir des résultats très précis, mais peuvent conduire à un modèle suffisant pour régler un correcteur PID. De plus, elles permettent d'avoir une idée des paramètres essentiels de la réponse à savoir le gain, le retard et la constante de temps principale. Ceux-ci sont nécessaires pour pouvoir déterminer un plan d'expérience efficace avant de recourir éventuellement à des méthodes plus sophistiquées.

**b. Méthode des moindres carrés :**

Cette méthode n'est pas la meilleure, mais c'est la plus simple car elle fournit une solution analytique.

**c. Méthode du modèle :**

Cette méthode est nettement meilleure que la précédente, et nécessite moins de précautions de la part de l'utilisateur. La contrepartie est qu'elle est plus difficile à mettre en œuvre car la solution doit être calculée par optimisation numérique.

**d. Méthodes récursives :**

Elles sont la base de la plupart des régulations adaptatives modernes. Il est donc intéressant d'en connaître le principe.

Dans ce travail, on utilise la méthode du modèle pour l'identification d'un système d'ordre fractionnaire.

**4. Méthode du modèle :**

La méthode du modèle reste l'une des méthodes d'identification la plus efficace [1][6]. Son principe consiste à proposer, en se référant aux résultats expérimentaux, une structure (fonction de transfert) pour le modèle puis de formuler un problème d'optimisation dont la fonction objectif consiste à minimiser l'écart entre les mesures expérimentales et celles prédites par le modèle. Les paramètres du modèle représentent les variables de décision.

#### 4.1. Principe de la méthode du modèle :

Le principe de la méthode du modèle est donné par la figure 2.

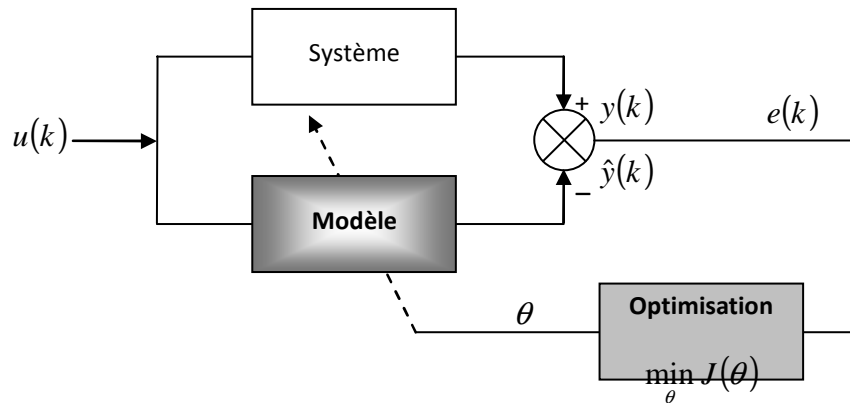


Figure 2. Principe de la méthode du modèle.

Le principe est de minimiser l'écart entre les mesures expérimentales  $y(k)$  et les sorties  $\hat{y}(k)$  obtenues par la simulation du modèle mathématique [1], en utilisant un algorithme d'optimisation qui adapte les paramètres du modèle d'une manière à avoir l'erreur  $e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$  proche de zéro. Dans ce cas le modèle et le système physique sont soumis à une même entrée  $u(k)$  supposée suffisamment excitante pour toutes les dynamiques du système (par exemple un signal SBPA). Par conséquent, le problème d'identification des paramètres du modèle mathématique, devient un problème d'optimisation qui consiste à minimiser une fonction objectif (critère) qui dépend explicitement de l'erreur  $e(k)$ . Généralement, cette fonction objective prend la forme suivante :

$$J = \sum_{k=0}^{+\infty} f(e(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(y(k) - \hat{y}(k)) \quad (3.1)$$

Où  $f$  est l'écart entre la sortie mesurée et la sortie obtenue par la simulation du modèle mathématique, i.e.  $y(k)$  et  $\hat{y}(k)$ , généralement elle est non linéaire.

La sortie  $\hat{y}(k)$  est obtenue par la simulation du modèle mathématique d'ordre fractionnaire. Le modèle mathématique est en fonction des paramètres à identifier. Pour la simulation de ce dernier on utilise la méthode FVIM.

Dans le cas discret, cette sortie est donnée comme suit :

$$\hat{y}(k) = g(\theta) \quad (3.2)$$

Avec  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_i)$  représente le vecteur des paramètres du modèle à identifier et  $g$  est une fonction généralement non linéaire.

Ainsi, en remplaçant  $\hat{y}(k)$  par son expression (3.2) dans la fonction objective (3.1), il vient :

$$J = \sum_{k=0}^{+\infty} f(y(k) - g(\theta)) \quad (3.3)$$

Comme les mesures  $y(k)$  sont connues, il est clair que le critère  $J$  dépend explicitement du vecteur des paramètres  $\theta$  à identifier. Par conséquent,

$$J(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(y(k) - g(\theta)) \quad (3.4)$$

Le problème d'identification des paramètres, regroupés dans le vecteur désigné par  $\theta$ , se ramène à la résolution du problème d'optimisation globale suivant :

$$\min_{\theta} J(\theta) = \min_{\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} f(y(k) - g(\theta)) \quad (3.5)$$

La difficulté du problème d'optimisation dépend de la fonction  $f$  considérée. Généralement, cette fonction prend la forme quadratique telle que :

$$f(e(k)) = e^2(k) = (y(k) - \hat{y}(k))^2 \quad (3.6)$$

D'où le critère à minimiser est :

$$J(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} (y(k) - g(\theta))^2 \quad (3.7)$$

Ce problème d'optimisation peut être résolu par plusieurs méthodes qui sont généralement itératives (méthode du Gradient, méthode du Gradient conjugué, méthode de Newton, ... etc).

Dans ce travail la méthode de Newton sera utilisée pour la résolution du problème d'optimisation donné par (3.5)

### 5. Méthode de Newton [8] :

Pour expliquer le principe de l'algorithme de Newton, on considère la fonction  $g(x_1, \dots, x_n)$  de classe  $C^{(2)}$  sur  $R^n$ . Le problème de recherche d'un minimum est donné comme suit:

$$\min_{x_1, \dots, x_n} g(x_1, \dots, x_n) \quad (3.8)$$

Qui signifie que l'on cherche des points  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$  vérifiant :

$$\min_{x_1, \dots, x_n} g(x_1, \dots, x_n) = g(x_1^*, \dots, x_n^*) \quad (3.9)$$

Soit:  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ .

La condition nécessaire pour que  $x^*$  soit un minimum s'écrit :

$$\nabla_x g(x^*) = 0, \quad \forall x^* \in R^n \quad (3.10)$$

$\nabla_x g(x^*) = \left( \frac{\delta g}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta g}{\delta x_n} \right)$  est le gradient de la fonction  $g(x)$  par rapport à  $x$

Si le gradient de  $g(x)$  ( $\Delta g(x)$ ) est continue et dérivable dans le voisinage proche de  $x^*$ , on peut écrire :

$$\nabla_x g(x^*) = \nabla_x g(x + \Delta x) = \nabla_x g(x) + \nabla_x^2 g(x) \Delta x = 0 \quad (3.11)$$

D'où, avec les équations (3.10) et (3.12), connaissant un estimé  $x^{(k)}$  proche de  $x^*$  :

$$\Delta x^{(k)} = - \left( \nabla_x^2 g(x^{(k)}) \right)^{-1} \nabla_x g(x^{(k)}) \quad (3.12)$$

La résolution de ce système linéaire nous donne une direction de descente et l'on calcule :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \quad (3.13)$$

L'algorithme de Newton est donc un algorithme itératif qui, partant d'un point initial  $x^{(0)}$  appartient à  $R^n$  (choisi généralement arbitrairement), va définir le vecteur  $x^{(k+1)}$  à partir de  $x^{(k)}$  par la formule :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left( \nabla_x^2 g(x^{(k)}) \right)^{-1} \nabla_x g(x^{(k)}) \quad (3.14)$$

Pour déterminer le nombre des itérations à effectuer, on a la condition suivante à vérifier à chaque itération :

$$\| \nabla g(x^{(k)}) \| < \varepsilon \quad (3.15)$$

Avec :  $\varepsilon$  est la tolérance.

## 6. Exemple d'identification d'un système d'ordre fractionnaire par la méthode du modèle :

Le modèle du système d'ordre fractionnaire à identifier est donné sous forme d'une équation mathématique d'ordre fractionnaire (modèle d'état). Pour générer les mesures expérimentales ( $y(k)$ ), on propose de fixer d'abord les vraies valeurs pour les paramètres du modèle, puis de simuler le modèle mathématique d'ordre fractionnaire par la première méthode de simulation (voir le deuxième chapitre) pour récupérer les valeurs de la sortie correspondante à une entrée convenablement choisie (une entrée échelon). Les valeurs obtenues pour la sortie ( $y(k)$ ) seront considérées comme les mesures expérimentales et seront utilisées pour l'identification.

Le modèle du système linéaire d'ordre fractionnaire à identifier est donné comme suit :

$$D^\alpha x(t) = a x(t) + b u(t) \quad (3.16)$$

$\alpha$  est l'ordre de la dérivée d'ordre fractionnaire,  $x$  est la variable d'état,  $u(t)$  est l'entrée du système,  $a$  et  $b$  sont les paramètres à identifier.

Pour calculer les valeurs de la sortie  $\hat{y}(k)$ , c'est-à-dire les valeurs réelles du système d'ordre fractionnaire (les mesures), on fixe les valeurs suivantes pour les paramètres du modèle comme suit :

$$a = -1, b = +1 \quad (3.17)$$

Ensuite on applique la première méthode de simulation présentée dans le deuxième chapitre pour la simulation de l'équation du modèle (3.16) avec les paramètres qui sont

donnés par (3.18). La simulation du modèle pour  $\alpha = 0.9$ ,  $x_0 = 0$  et pour une entrée échelon, donne les sorties mesurées  $y(k)$ ,  $y$  est un vecteur de dimension :  $m * 1$ .

Avec :

$$m = \frac{t_f}{h} + 1 = \frac{2}{0.05} + 1 = 41, \quad (3.18)$$

$t_f = 2s$  est le temps final.

$h = 0.05s$  est la période d'échantillonnage.

$m = \frac{t_f}{h}$  est le nombre de périodes d'échantillonnage.

La simulation du modèle d'état d'ordre fractionnaire (3.16) par l'algorithme FVIM, après 12 itérations donne la sortie du modèle comme suit:

$$\hat{y}(k) = g(\hat{a}, \hat{b}) \quad (3.19)$$

$\hat{y}$  et  $g$  sont des vecteurs de dimension  $41 * 1$ .

Ainsi le critère à minimiser prend la forme suivante :

$$J(\theta) = \sum_{k=0}^{40} (y(k) - g(\hat{a}, \hat{b}))^2 \quad (3.20)$$

Et le vecteur de variables de décision qui est le vecteur de paramètres à identifier est

$$\theta = (\theta_1, \theta_2)^T = (\hat{a}, \hat{b})^T \quad (3.21)$$

Pour la résolution de ce problème d'optimisation (3.20), on applique la méthode de Newton (présentée dans la section précédente) avec l'estimé de départ :

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ +0.5 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

La condition d'arrêt est choisie comme suit :

$$\|\nabla J(\theta)\| < 10^{-5} \quad (3.23)$$

L'algorithme de Newton converge vers la solution après 30 itérations et le vecteur des paramètres est :

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9020 \\ +0.9371 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

On reprend le même problème pour  $\alpha = 0.8$  et  $a = -2$  et  $b = +2$ .

Le programme converge après 40 itérations et donne les résultats suivants.

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7006 \\ 1.7641 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

## 7. Conclusion

Ce chapitre a pour objectif l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire par la méthode du modèle. Cette méthode permet de ramener le problème d'identification à un problème d'optimisation, dont les variables de décision sont les paramètres du modèle à identifier. Ce problème d'optimisation consiste à minimiser l'erreur entre la sortie mesurée et celle prédite par le modèle. Pour la résolution du problème d'identification, l'algorithme de Newton a été utilisé.

Pour montrer l'intérêt de l'approche utilisée, un exemple d'application pour l'identification des paramètres d'un système d'ordre fractionnaire a été présenté. Pour avoir la sortie réelle (les mesures réelles), on fait la simulation du modèle mathématique par la première méthode de simulation, en considérant des valeurs pour les paramètres du modèle. Puis l'objectif est de retrouver les mêmes paramètres en faisant une identification par la

méthode du modèle. La simulation du modèle mathématique par la méthode FVIM permet d'obtenir la sortie prédite qui est en fonction des paramètres à identifier. Le problème d'optimisation obtenu a été résolu par la méthode de Newton. Les résultats d'identification obtenus sont très proches des valeurs des paramètres considérés, ce qui montre l'intérêt de l'approche utilisée.

Le travail réalisé dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'identification des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire linéaires. L'objectif du travail consiste, en premier lieu, à étudier deux méthodes numériques pour la simulation des équations différentielles d'ordre fractionnaire et de les comparer. La première méthode est basée sur l'approximation numérique de la dérivée fractionnaire en utilisant la définition de Grünwald-Letnikov. La deuxième est la méthode des itérations variationnelles fractionnaire (FVIM). En second lieu, à exploiter la méthode du modèle pour l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire en utilisant la méthode des itérations variationnelles fractionnaire. Cette technique permet de ramener le problème d'identification à un problème d'optimisation dont les variables de décision sont les paramètres à identifier.

Dans le premier chapitre nous avons présenté des notions relatives aux systèmes d'ordre fractionnaires utilisées le long du mémoire. Le deuxième chapitre est consacré à la résolution des équations ordinaires d'ordre fractionnaire en utilisant deux méthodes différentes. L'identification des systèmes dynamiques en utilisant la méthode du modèle a fait l'objet du troisième chapitre avec une application à un système d'ordre fractionnaire.

Ainsi, pour l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire, la méthode d'identification du modèle a été utilisée. Une application à l'identification des paramètres d'un modèle mathématique a été présentée. L'objectif est de minimiser l'écart entre la sortie mesurée et la sortie prédite par le modèle mathématique. Pour avoir les mesures réelles, on fait la simulation du modèle mathématique en utilisant la première méthode de simulation étudiée en considérant des valeurs pour les paramètres du modèle. Puis l'objectif est de retrouver ces paramètres en faisant une identification par la méthode du modèle. Ainsi, après le choix de la structure du modèle, on fait une résolution du modèle en utilisant la méthode des itérations variationnelles. Cette méthode permet de déterminer la sortie du modèle en fonction des paramètres à identifier. En substituant cette expression dans le critère à minimiser (différence entre la sortie mesurée et celle prédite par le modèle), on obtient un problème d'optimisation dont les paramètres à identifier sont les variables d'optimisation. La résolution du problème d'optimisation est réalisée en utilisant la méthode de Newton.

Les résultats d'identification obtenus montrent que l'approche utilisée permet d'identifier avec une précision appréciable les paramètres du modèle puisque les valeurs estimées sont très proches des valeurs réelles.

Comme perspectives du présent travail, on peut penser à étendre l'approche proposée à des systèmes fractionnaires non linéaires et multivariés.

## Bibliographie

---

- [1] A.BAYSSE. Contributions à l'identification paramétrique de modèles à temps continu : Extensions de la méthode à erreur de sortie Développement d'une approche spécifique aux systèmes à boucles imbriquées .thèse de doctorat .Université de Toulouse.2010.
- [2] A. HADJ ABDELKADER, Identification des systèmes linéaires, Octobre 2007, Université ABOU BEKR BELKAÏD – Tlemcen Faculté de Technologie, Document de cours pour les étudiants de M1 en contrôle de processeur, basé principalement sur le cours de Y. TANGUY, supelec, paris.
- [3] A. Si Ammour. Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire. Thèse de Doctorat en Automatique, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2011.
- [4] Duarte Valério and José Sà da Costa. An introduction to fractional control. The Institution of Engineering and Technology, 2013.
- [5] J.Biazar, H.Ghazvini. He's variational iteration method for solving linear and non-linear systems of ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 191, pp. 287-297, 2007.
- [6] J. Pol GUILLEMET, résumé d'optimisation, M15 Master Pro 1<sup>er</sup> année, Département de mathématiques. Nantes 2010/2011
- [7] L. BAKO, contribution à l'identification de systèmes dynamiques hybrides, thèse doctorat, université des sciences et technologique de Lille (spécialité Automatique et informatique industrielle). 21, novembre 2008
- [8] Pierre Puiseux, cours de calcul scientifiques 1, université de peu et des pays de l'Adour, département de mathématiques, semestre 4, mai 2010
- [9] R. Mansouri. Contribution à l'analyse et la synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire par représentation d'état. Thèse de doctorat en Automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2008.
- [10] Szymon Racewicz , Identification et modélisation d'ordre fractionnaire des machines synchrones fonctionnant comme générateur, thèse doctorat , Université de Grenoble Et de l'Université Technologique de Gdansk, 30 novembre 2010

## **Bibliographie**

---

[11] T.Bastogne, Modélisation Expérimentale des Système Dynamique Interconnectes- Application en biologie systématiques, thèse doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy 1, 20 juin 2008.

[12] Y. ROCHDI, identification des systèmes dynamique, 2008.