REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI OUZOU

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire en vue de l'obtention du diplôme de Master en

Recherche Opérationnelle

Option

Aide à la décision

Programmation bi-niveaux stochastique pour la tarification dans l'aviation civile.

Présenté par

Mr ZEGANE Koceila

Dirigé par

Mr GUETTAF Rabah

Devant le jury

Mr CHEBAH Mohamed	**MCB**	UMMTO	**Président**
Mr ZIRAM Ferhat	**MCB**	UMMTO	**Examinateur**
Mr GUETTAF Rabah	**MCB**	UMMTO	**Raporteur**

2019/2020

Dédicaces

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

A ma chère grand-mère pour ses encouragements permanents, et son soutien moral,

A ma chère sœur, pour qui je suis un motif de fierté, pour ses encouragements, et sa croyance sans faille en moi.

En l'hommage aussi de mon défunt grand-père, qui fut et restera mon modèle et mon héro, tant c'était un grand homme.

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Une dédicace pour mon promoteur, sans qui rien ne serait possible, pour son aide si précieuse a l'élaboration de mon travail.

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infaillible,

Merci d'être toujours là pour moi.

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance au promoteur de ce mémoire, Monsieur Rabah GUETTAF, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je désire aussi remercier les enseignants de l'université de MOULOUD MAMMERI Tizi-Ouzou, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

Je tiens à remercier spécialement Monsieur Kamal KASDI, qui fut le premier à me faire découvrir le sujet qui a guidé mon mémoire.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Un grand merci à Monsieur Ferhat ZIRAM pour ses conseils concernant, les probabilités et mon style d'écriture, qui ont grandement facilité mon travail.

Enfin, je tiens à témoigner toute ma gratitude à Anis SERRAH et Lyasmine HAROUCHE pour leur confiance et soutien inestimable.

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, de nombreuses études dans le domaine de la Recherche Opérationnelle ont été dédiées au secteur du transport aérien en considérant des problèmes de planification, d'opération et de tarification. En général les études développées considèrent les effets immédiats des décisions à prendre sans tenir compte des effets de feedback qui peuvent se mettre en place entre les différents acteurs du transport aérien, tel que la direction de l'aviation civile, les compagnies aériennes, la tour de contrôle…etc...car en réalité aucune de ces structures opérationnelles et décisionnelles ne peuvent prendre une décision unilatéralement sans y perdre au change. Ceci conduit souvent en des décisions qui sur le plus long terme se révèlent largement sous optimales, ou en d'autres termes, des décisions qui ne réalisent pas le potentiel maximal du secteur, ce qui ce traduit par un manque à gagner important.

Ainsi dans cette étude une approche globale est proposée pour modéliser le problème de la tarification des services du contrôle du trafic aérien (ATC) et de sa gestion (ATM). On considère tout d'abord que l'objectif des compagnies aériennes est de maximiser leur profit, en faisant en sorte de prendre les meilleurs décisions possibles en tenant en compte de toutes les contraintes qui puisse exister, afin d'avoir le meilleur gain possible. Elles intègrent donc dans le prix des billets d'avion et du fret aérien leurs coûts résultant des taxes ATC/ATM. Ces coûts représentent aujourd'hui entre 10 % et 20 % de leurs coûts opérationnels. Ainsi la tarification des services du contrôle et de la gestion du trafic aérien affecte indirectement les niveaux de la demande de transport aérien (passagers et fret) qui est réactive au prix du transport aérien. Les cas où les opérateurs ATC/ATM sont soit privés soit publics sont analysés et particularisés dans cette étude. Ceci conduit à formuler un problème d'optimisation bi-niveau, un problème a deux niveaux de décisions, ce qui correspond le mieux a un problème du genre ou la décision ce prend de manière bilatérale, mais avec un niveau hiérarchique différent, selon la marge de manœuvre et l'importance de chacune des parties. Comme dans notre cas, le premier niveau serra représenté par les services ATC/ATM, et le deuxième niveau la compagnie aérienne. Le cas mono dimensionnel ou chaque niveau représente un seul acteur a été étudié et il a été montré qu'il est possible de résoudre de façon optimale le problème de tarification qui est un problème de programmation bi niveau, par un processus de négociation implicite entre le fournisseur de service (public ou privé) et le secteur des compagnies aérienne.

Dans la présente étude, on aborde le problème de tarification dans le cas multi dimensionnel ou chaque niveau est représenté par plusieurs acteurs de même nature (plusieurs secteurs de contrôle, plusieurs paires d'aéroports, etc.). On considère que la tarification adoptée par l'opérateur public de l'ATC/ATM suit un triple objectif qui est de, favoriser le service de transport aérien à ses usagers finaux, les passagers et le fret en maximisant le niveau de la demande satisfaite, garantir une couverture acceptable des coûts d'opération et d'investissements du service ATC/ATM et finalement garantir un niveau de rentabilité acceptable pour le secteur des compagnies aériennes. En ce qui concerne l'opérateur privé du service ATC/ATM, il s'agira de maximiser son profit en s'assurant que les compagnies aériennes trouvent des conditions économiques qui leur permettent d'assurer la poursuite de leur activité de transport aérien. Dans ces deux situations, il semble donc indispensable de tenir compte du comportement de maximisation du profit des compagnies aériennes dans leur prise de décision concernant le déploiement de leur offre de transport, fréquence de vols, capacité de remplissage des avions et leur politique de prix. Ceci conduit donc dans les deux cas à formuler des problèmes d'optimisation bi niveaux. Afin de limiter la complexité de cette étude, on considère ici l'ensemble du secteur des compagnies aériennes sans prendre en compte les effets de la concurrence existante entre elles, car cella nous obligerais à étendre nos critères, a ajouter des contraintes, et donc a rajouté énormément de complexité a notre problème, alors que notre but est de trouver un prix qui servira de référence. Ainsi l'étude se concentre sur les effets de feedback entre l'ATC/ATM, qui obéit au principe d'unicité de l'opérateur pour un espace donné, le secteur des compagnies aériennes et les usagers. Dans cette première approche, on ne considère que le transport de passagers et on adopte un tarif aérien uniforme par liaison aérienne. On considère dans cette étude le cas d'une région relativement étendue et présentant un trafic peu dense. Compte tenu des hypothèses adoptées en ce qui concerne la structure des réseaux opérés par les compagnies aériennes et la structure de la demande potentielle (région de faible trafic), la solution du problème d'optimisation de l'offre de transport aérien (capacité en sièges et tarifs proposés par liaison aérienne) est obtenue sous forme analytique en fonction des tarifs ATC/ATM adoptés. Ceci permet alors de condenser le problème de niveau inférieur et de se ramener à des problèmes d'optimisation à un seul niveau, bien plus simples à résoudre.

1- Programmation Linéaire mono-objectif

1-1- Introduction a la Programmation Linéaire

Un problème de programmation linéaire consiste à minimiser ou à maximiser une fonction linéaire sous contraintes linéaires.

Tout problème de programmation linéaire peut se formuler de la manière suivante :

Trouver les valeurs des variables $x = \left(x_j / j = \overline{1,n}\right)$ qui maximisent ou minimisent la fonction objectif suivante : [2]

$$Z(x) = Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \rightarrow \max(min) \qquad (1).$$

Sous les contraintes suivantes :

$$(P_1)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2i}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{ii}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \ \ \forall\, j \in \{1,\dots,n\} \qquad (3)$$

c_j *où* $j \in \{1,\dots,n\}$ représente les couts(profit) des différents produits (les coefficients c_j).

$a_{ij}\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ sont supposés être des nombres réels, en plus on considère que l'entier m est inférieur ou égal à n

Les nombres $b_i\left(i = \overline{1,m}\right)$ sont tous positifs ou nuls et le rang du système (2) est inférieur ou égal à m.

Définition 1

-La fonction Z est appelée la fonction objectif.

-Les contraintes (2) sont appelées les contraintes principales.

-Les contraintes (3) sont dites contraintes directes.

Remarque 1

Si l'objectif consiste à minimiser une fonction linéaire Z telle que $Z(x) = Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$ alors on maximisera la fonction linéaire opposée:

$\overline{Z}$ telle que $\overline{Z}(x) = -Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots\dots - c_jx_j - \cdots - c_nx_n$.

1-2- Méthodes de résolution d'un programme linéaire

Les méthodes exactes sont utilisées dans la recherche opérationnelle afin de trouver une solution ou des solutions optimales éventuelles pour les problèmes de programmation linéaire, et parmi ces méthodes on s'intéresse à la méthode du simplexe.

1-2-1. Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une méthode itérative. Elle démarre d'un point extrême (point de départ) et passe au sommet voisin, et ceci constitue une itération de l'algorithme du simplexe. Pour cela, on doit définir le point extrême de départ et le test d'arrêt par rapport au critère d'optimalité.

Soit (P_1) le problème standard de programmation linéaire avec une maximisation, (P_1) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante [2] :

$$\{c'x \rightarrow \max, Ax = b;\ x \geq 0\}.$$

Où

$I = \{1, 2, \dots, m\}$ est l'ensemble des indices de lignes de A.

$J = \{1,2, \dots, n\}$ est l'ensemble des indices de colonnes de A.

· $A = A(I, J)$ est la matrice des conditions;avec:

· $a_j = A(I, j)$ les colonnes de A; $j = 1,2, \dots, n$

· $b = b(I)$ est le vecteur des contraintes (second membre);

· $x = x(J) = (x_j / j \in J)$ est le vecteur des variables;

· $c' = c'(J)$ est le vecteur des profits;

1-2-2. Problème standard et solution de base

Définition 1 [2]

Tout vecteur x vérifiant les contraintes (2) et (3) de (P_1) est appelé solution réalisable (solution admissible) du problème $(1) - (2) - (3)$

Définition 2 [2]

Une solution réalisable x est dite de base si $(n - m)$des composantes sont nulles. Aux autres $x_{j1},\ x_{j2}$, ..., x_{jm} correspondent m vecteurs $a_{j1},\ a_{j2},\ a_{jm}$ de la matrice de condition A linéairement indépendants. l'ensemble $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ est appelé ensembles des indices de base.

$J_H = J \backslash J_B$ ensemble des indices hors base.

Autrement :

La solution réalisable $x = x(J)$ est solution de base si $x_H = x(J_H) = 0;$ det $A_B \neq 0;$ où $A_B = A(I, J_B);\ x(J_B) \geq 0$

La matrice A_B est appelée matrice de base; $x(J_B)$ sont les composantes de base; $x(J_H)$ sont les composantes hors base.

Définition 3 [2]

Une solution réalisable x° de base est optimale si $c'x^\circ = max\,(c'x)$, pour toute solution réalisable x.

Une solution réalisable de base x est dite non dégénérée si $x_j > 0, j \in J_B$.

Définition 4 [2]

L'accroissement de la fonctionnelle de la fonction objectif Z est égale à

$\triangle Z = Z(\overline{x}) - Z(x) = c'\overline{x} - c'x = c' \triangle x$, (tel que x est une solution de base de départ réalisable et non dégénérée). Construisons le m-vecteur $y = y(I)$ des potentiels :

$y' = c'_B A_B^{-1}$ et le vecteur $\triangle = \triangle\,(J) = \left(\triangle_j, j \in J\right)$, dit vecteur des estimations:

$$\left\{\triangle' = y'A - c', \triangle_j = y'a_j - c'_j, \qquad j \in J\right\}$$

1-2-3. Critère d'optimalité

Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable de base de départ. L'inégalité $\triangle_H = \triangle(J_H) \geq 0$ est suffisante et dans le cas de non dégénérescence elle est nécessaire pour l'optimalité de $\{x, A_B\}$.

1-2-4. Algorithme du Simplexe

Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable de base de départ et supposons que le critère d'optimalité $\triangle_j \geq 0, j \in J_H$ n'est pas vérifié.

Choisissons l'indice $j_0 \in J / \triangle_{j_0} = min\ (\triangle_j / \triangle_j < 0, j \in J_H)$.

Le but de l'itération est de faire rentrer cet indice j_0 dans la base. Donc il faut trouver un indice $j_1 \in J_B$, qui sortira de la base. Ceci constitue l'itération qui procède au passage de la solution de base (point extrême) $\{x, A_B\}$ à la solution $\{\overline{x}, \overline{A}_B\}$ tel que $z(\overline{x}) \geq z(x)$.

La nouvelle solution de base $\overline{x}$ sera trouvée de la manière :

$\overline{x} = x + \theta l$, où l est la direction du changement de x et θ le pas le long de cette direction

Construisons la direction l de la manière suivante :

sur J_H, posons :

$$l_j = \begin{cases} 0, & j \in J_H \backslash j_0 \\ 1, & j = j_0 \end{cases}$$

Sur J_B : $\overline{x}$ doit être réalisable, donc elle doit vérifier $A\overline{x} = b$ et comme $Ax = b$ c'est à dire $Al = 0$.

De cette dernière relation on obtient :

$$l_B = l(J_B) = -A_B^{-1} A_H l_H$$

De là $\overline{x}_H = x_H + \theta l_H = \theta l_H \geq 0$ et $\overline{x}_B = x_B + \theta l_B \Rightarrow \overline{x}_j = x_j - \theta A_B^{-1} a_{j_0}$ si les composantes du vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$, alors $\overline{x}_j \geq 0, \forall \theta \geq 0$, donc on peut prendre $\theta = \infty$ et on aura une solution infinie;

Si non, Parmi les composantes du vecteur $A_B^{-1} a_{j_0}$, ils existent celles qui sont positives

Pour avoir $\bar{x}_B$, il faut prendre un pas maximal θ^0

$\theta^0 = min \quad \theta_j, \quad (j \in J_B) \quad \theta_j = min \quad \{\frac{x_j}{x_{jj_0}} / x_{jj_0} > 0, j \in J_B\} = \theta_{j_1}, \quad j_1 \in J_B$, où $x_{j_0 j}$ est de la $j^{éme}$composante de $A_B^{-1} a_{j_0}$ et $\bar{J}_B = (J_B \backslash j_0) \cup j_1$ et $\overline{A}_B = (A_B \backslash a_{j_0}) \cup a_{j_1}$.

Tableau du simplexe

les différents calculs qu'on aura a effectuer et les différentes étapes de résolution seront disposés dans le tableau suivant

c			c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_j	...	c_n	
c_B	base	B	a_1	a_2	..	a_m	a_{m+1}	...	a_j	...	a_n	θ_j
c_1	a_1	$b_1 = x_1$	1	0	..	0	$x_{1,m+1}$	..	x_{1j}	..	x_{1n}	θ_1
c_2	a_2	$b_2 = x_2$	0	1	..	0	$x_{2,m+1}$	..	x_{2j}	..	x_{2n}	θ_2
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
c_m	a_m	$b_m = x_m$	0	0	..	1	$x_{m,m+1}$	..	x_{mj}	..	x_{mn}	θ_m
Z		$\triangle$	$\triangle_1$	$\triangle_2$	..	$\triangle_m$	$\triangle_{m+1}$	..	$\triangle_j$	..	$\triangle_n$	

1-3- Exemple de résolution

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$(PL_1) \begin{cases} max\ z = x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad \text{(forme canonique)}$$

on ajoute les variables d'écart pour (PL1) afin d'obtenir la forme standard suivante :

$$(PL2) \begin{cases} max\ z = x_1 + 2x_2 \\ sous\ les\ contraintes: \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \qquad \text{(forme standard)}$$

(x_3, x_4, x_5) sont des variables d'écarts :

Initialisation

	c	1	2	0	0	0	
base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
x_3	2	-3	2	1	0	0	1
x_4	4	-1	2	0	1	0	2
x_5	5	1	1	0	0	1	5
z=0	$\triangle_j$	-1	-2	0	0	0	

$\rightarrow j_1 = 3$

$\uparrow$

$j_0 = 2$

$1^{ére}$ itération

	c	1	2	0	0	0	
base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
x_2	1	-3/2	1	1/2	0	0	><
x_4	2	2	0	-1	1	0	1
x_5	4	5/2	0	-1/2	0	1	8/5
z=4	$\triangle_j$	-4	0	1	0	0	

$\rightarrow j_1 = 4$

$\uparrow$

$j_0 = 1$

$2^{ème}$ itération

	c	1	2	0	0	0	
base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
x_2	5/2	0	1	-1/4	3/4	0	><
x_1	1	1	0	-1/2	1/2	0	><
x_5	3/2	0	0	3/4	-5/4	1	4/3
z=6	$\triangle_j$	0	0	-1	2	0	

$\rightarrow j_1 = 5$

$\uparrow$

$j_0 = 3$

$3^{ème}$ itération

	C	1	2	0	0	0	
Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	Θ
x_2	3	0	1	0	1/3	1/3	
x_1	2	1	0	0	-1/3	2/3	
x_3	2	0	0	1	-5/3	4/3	
z=8	$\triangle_j$	0	0	0	2	4/3	

condition d'arrêt vérifiée $\left(\triangle_j \geq 0\right)$ donc on arrête. la solution optimale est : $x^* = (2,3,2,0,0)$ et (Z) optimale : $Z^0 = 8$.

2- Programmation Linéaire multi-objectifs

2-1- Introduction

Les ingénieurs se heurtent quotidiennement à des problèmes technologiques de complexité grandissante, qui surgissent dans des secteurs très divers. Le problème à résoudre peut fréquemment être exprimé sous la forme générale d'un problème d'optimisation, dans lequel on définit une fonction objectif, ou fonction Coût, que l'on cherche à minimiser (ou maximiser) par rapport à tous les paramètres concernés.*[5]*

L'optimisation multi-objectif optimise simultanément plusieurs fonctions objectives qui sont souvent contradictoires ou conflictuelles, on cherche à trouver la meilleure solution suivant un ensemble de performance du problème (temps de réponse plus la robustesse, temps de réponse plus temps de monté plus la robustesse,…etc), où le résultat d'un problème d'optimisation multicritère est généralement un assortiment de solutions, qui se distinguent par différents compromis réalisés entre les objectifs. Cet assortiment est connu sous le nom de *Pareto-optimal.[5]*

Donc le but de l'optimisation multicritère, est d'obtenir les solutions de *Pareto*, par conséquent, à connaître l'ensemble des compromis possibles entre les objectifs. La résolution d'un problème d'optimisation multicritère, a conduit les chercheurs à proposer des méthodes de résolution de plus en plus performantes.

Dans ce chapitre, nous présentons les principes de base de l'optimisation multi-objectif, et nous donnerons aussi une présentation de différents méthodes d'optimisation multi-objectif.

2-2- Concepts en optimisation multi-objectifs

Tout d'abord nous définissons les notions communes à n'importe quelle méthode d'optimisation multicritère :

Fonction objectif : Une fonction objectif est une fonction qui modélise le but à atteindre

Dans le problème d'optimisation sur l'ensemble des critères. Il s'agit de la fonction qui doit être optimisée. Elle est notée $f(x)$et de manière générale $f(x)$ est un vecteur de fonctions :

$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]\ , avec\ k :\ le\ nombre\ de\ critères..$

Elle est aussi appelée : *critère d'optimisation*, *fonction coût*, *fonction d'adaptation*, ou encore *performance*.

Paramètres : Un paramètre du problème d'optimisation, est une variable qui exprime une donnée quantitative ou qualitative sur une dimension du problème: coût, temps, taux d'erreurs,...etc.

Ces paramètres correspondent aux variables de la fonction objectif. Ils sont ajustés pendant le processus d'optimisation, pour obtenir les solutions optimales. On les appelle aussi variables d'optimisation, variables de conception ou de projet.

Vecteur de décision : Un vecteur de décision est un vecteur correspondant à l'ensemble des variables du problème, il est noté : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Avec n : le nombre de variables ou dimension du vecteur.

Critère de décision : est un critère sur lequel sont jugés les vecteurs de décision pour déterminer le meilleur vecteur. Un critère peut être une variable du problème ou une combinaison de variables.

Contraintes : Une contrainte du problème est une condition que doivent respecter les vecteurs de décision du problème. Une contrainte est notée : $g_i(x)$ avec : $i = 1, \dots, m$

m: le nombre des contraintes.

Espace de recherche : représentant l'ensemble des valeurs pouvant être prises par les variables, il est noté $X(par\ exemple\ \mathbb{R}^n)$.

Espace réalisable : représentant l'ensemble des valeurs des variables satisfaisant les contraintes, il est noté E.

Espace des objectifs : ensemble image de l'espace de recherche, déterminé par toutes les valeurs possibles des fonctions objectifs.

Minimum local : Un point $x \in X$ est un minimum local du problème si et seulement si :

$\forall\, x' \in V(X), f(x) \leq f(x')$ où $V(X)$ définit un voisinage de x .

Minimum global : Un point $x \in X$ est un minimum global du problème si et seulement si :

$\forall\, x' \in X, f(x) \leq f(x')$ (il appartient alors à l'ensemble des minimiseurs).

2-3- Problème d'optimisation multicritère

Les problèmes réels invoquent souvent de multiples mesures de performance ou objectifs, qui doivent être optimisés simultanément. En pratique, ceci n'est pas toujours possible car les objectifs peuvent être conflictuels, du fait qu'ils mesurent différents aspects de la qualité de la solution. Dans ce cas, la qualité d'un individu est décrite non pas par un scalaire mais par un vecteur. La performance, la fiabilité et le coût sont des exemples d'objectifs conflictuels.

Un problème d'optimisation multicritère consiste à trouver le vecteur de décision idéal x^* tel que les contraintes $g_i(x^*)$ soient satisfaites et dont $F(x^*)$ est optimal.

En conséquence, le problème d'optimisation multicritère peut être défini formellement comme suit :

$$(MOP) \ldots \begin{cases} Optimiser\ f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)] \\ \quad Sc: \quad g_i(x) \leq 0 \\ \quad ou \quad g_i(x) \geq 0 \\ \quad x \in X \end{cases}$$

MOP : Multi-Objectifs Problem.

2-4- Formulation d'un Problème d'optimisation multicritère

Ces objectifs multiples sont souvent concurrents où l'amélioration de l'un entraîne la détérioration de l'autre ou des autres, Ce conflit entre les objectifs s'explique facilement : de façon générale, des structures de haute performance tendent à avoir un coût élevé, alors que des dispositifs plus simples et usuellement peu coûteux auront des performances moindres. Selon les contraintes du cahier des charges, une solution intermédiaire (performance satisfaisante et coût acceptable) peut être optimale.

Dans les problèmes multi-objectifs, l'optimum n'est plus une simple valeur comme pour les problèmes mono-objectif, mais un ensemble de points, appelé l'ensemble des meilleurs compromis ou le front Pareto Tous les énoncés et définitions seront donnés dans le cadre de problèmes de minimisation. En effet un problème de maximisation peut être aisément transformé en un problème de minimisation en considérant l'équivalence suivante :

$$Maximiser\ f(x) \iff Minimiser\ -f(x)$$

2-5- Dominance

Définition :

On dit que le vecteur $x = (x_1; x_2; \ldots; x_k)^t$ *domine le vecteur* $y = (y_{1;} y_2; \ldots; y_k)^t$ *si :*

- x est au moins aussi bon que y sur tous les objectifs.

- x est strictement meilleur que y sur au moins un objectif.

C'est-à-dire si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$f_i(x) \leq f_i(y)\ \forall\ i\ \in\ \{1 \ldots k\}\ et\ \exists\ i \in \{1 \ldots k\}\ tel\ que\ f_i(x)\ < f_i(y).$$

Et *on dit que le vecteur* $x = (x_1; x_2; \ldots; x_k)^t$ *domine strictement le vecteur* $y = (y_{1;} y_2; \ldots; y_k)^t$ *si :*

x est strictement meilleur que y sur tous les objectifs, C'est-à-dire si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$f_i(x) < f_i(y)\ , \forall\ i\ \in\ \{1 \ldots k\}.$$

Si *la solution x domine la solution y*, nous allons écrire $x \prec y$.

Notons que pour toute paire de solutions *x* et *y*, une et seulement une des affirmations suivantes est vraie.

- *x* domine y.

- *x* est dominé par y.

- x et y sont équivalentes au sens de la dominance (appelées aussi solutions Pareto-équivalentes).

Propriété de la relation de dominance :

La relation binaire de dominance $\prec$, telle qu'elle est définie ci-dessus,

- *n'est pas réflexive*, car une solution ne se domine pas elle-même ;

- *n'est pas symétrique*, car on n'a jamais $(x \prec y)\ et\ (y \prec x)$;

- *est transitive*, car $(x \prec y)\ et\ (y \prec z)$ implique $(x \prec z)$

La relation de dominance est donc une *relation d'ordre partiel strict* sur l'espace des objectifs.

Définition : une relation binaire est dite relation d'ordre partielle stricte si :

-Elle est asymétrique et transitive.

-Elle est iréflexive et transitive.

Conclusion : la relation binaire de dominance ($\prec$) et une relation d'ordre partielle stricte sur l'espace des objectifs.

2-5-1. Dominance au sens de Pareto

Définition : Soit $x = (x_1; x_2; \dots; x_k)^t$ un vecteur de décision avec : $x \in X$ (L'espace réalisable) x est dit *Pareto optimal*, s'il n'existe pas une solution x^* dominant x. Une solution Pareto optimal appelée aussi : solution efficace, non inférieur ou non dominée solution.

Ou x^* *Pareto optimale si et seulement si :*

$$\nexists!\, x \in E \text{ tel que } f_i(x) \leq f_i(x^*)\ \forall\, i \in \{1 \dots k\} \text{ et } \exists\, j \in \{1 \dots k\} \text{ tel que } f_j(x) < f_j(x^*).$$

x^* *est faiblement efficace si et seulement si :*

$$\nexists!\, x \in E \text{ tel que } f_i(x) \leq f_i(x^*)\ \forall\, i \in \{1 \dots k\}$$

Appellations :

-Le front (frontière) de Pareto est l'ensemble des solutions Pareto optimales qui sont composées des points, ne sont dominés par aucun autre Le front de Pareto appelé aussi surface de compromis ou l'ensemble des solutions efficaces.

-Dans l'espace réalisable de critères, l'image de l'ensemble Pareto est appelée frontière de Pareto, surface de Pareto ou Front de Pareto.

Remarque :

Résoudre un MOP revient à trouver soit l'ensemble Pareto (ensemble des solutions réalisables, Pareto optimales) ou les frontières Pareto (les vecteurs non-dominées équivalents).

'Opt' : Optimiser, qui veut dire maximiser ou minimiser, tout en travaillant dans le sens de la minimisation.

Solutions Supportées et non Supportées :

La définition de Front Pareto se réfère à l'espace des objectifs, et deux types de solutions peuvent être différenciés :

- les solutions supportées, appartenant aux portions convexes du Front Pareto.

- les solutions non-supportées, appartenant aux portions concaves du Front Pareto, mais ne sont pas dominées pour autant.

2-6- Points Particuliers

S'il apparait naturel de limiter la considération des solutions qui sont efficaces, l'ensemble de celles-ci est généralement très vaste, dans le cas discret même infini dans le cas continu.*[9]*

La sélection d'une solution efficace spécifique comme candidat de meilleur compromis exige une certaine connaissance de la structure de préférence du décideur, cette information se traduit parfois en termes de paramètres de préférence, les paramètres les plus courants sont :

(1) Les points reflétant l'importance relative de chaque critère.
(2) Les points de références qui sont définis par niveaux d'aspiration (valeurs souhaitables) sur chaque critère.
(3) Les points de réservations qui sont définis par niveaux de réservation (valeurs non souhaitables) sur chaque critère.

Parmi tous ces points de référence ou de réservation, on peut citer plus particulièrement les points Nadir, Idéal et Anti-idéal, qui appartiennent à l'espace des critères.

2-6-1. Point Idéal

Définition : soit $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*) \in R^k$ est le vecteur qui optimise chaque fonction objectif f_i , $i = 1 \dots k$, séparemment.

C'est-à-dire $$z_i^* = opt\big(f_i(x)\big)\,, i = 1 \dots k\,, x \in X.$$

Ou bien $$z^* = \big(z_1^* = opt\ f_1(x), z_2^* = opt\ f_2(x), \dots, z_k^* = opt\ f_k(x)\big).$$

Remarque : Le point idéal n'est généralement pas dans l'espace des critères réalisables, puisque les objectifs sont souvent contradictoires est conflictuels, c'est pour cela qu'on l'appelle point Utopique.

2-6-2. Point Anti-Idéal

Définition : soit $z^A = (z_1^A, z_2^A, \dots, z_k^A)^t \in R^k$ est le vecteur qui optimise chaque fonction objectif f_i , $i = 1 \dots k$, séparément tel que puisque l'objectif est de minimiser alors l'optimisation ici serrait de maximiser les critères.

C'est-à-dire $z_i^A = opt(f_i(x))$, $i = 1 \dots k$, $x \in X$.

Ou bien $z^A = \left(z_1^A = opt\ f_1(x),\ z_2^A = opt\ f_2(x), \dots, z_k^A = opt\ f_k(x)\right)$.

2-6-3. Point Nadir

Définition : soit $z^{nad} = \left(z_1^{nad}, z_2^{nad}, \dots, z_k^{nad}\right) \in R^k$ est le vecteur qui optimise chaque fonction f_i , $i = 1 \dots k$, séparément mais cette fois dans l'espace de la surface de Pareto qu'on nomme P.

$$z_i^{nad} = opt(f_i(x)) , i = 1 \dots k , x \in P$$

Remarque : le point Nadir sert à restreindre l'espace de recherche.

Le graphe suivant représente les points cités ci-dessus :

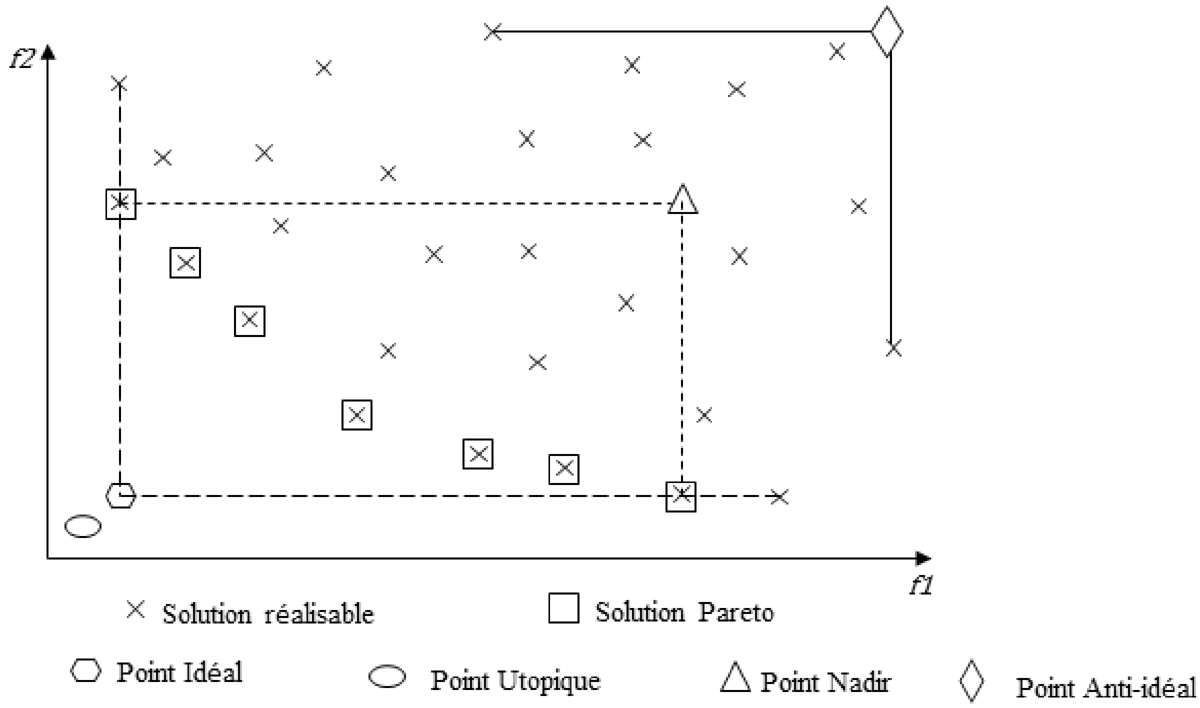


Figure.3

2-7- Approches de résolution de Problèmes Multi-Objectifs

Les méthodes d'optimisation multicritères s'intéressent aux problèmes essayant d'optimiser simultanément plusieurs objectifs. Elles peuvent être classées selon le schéma suivant :

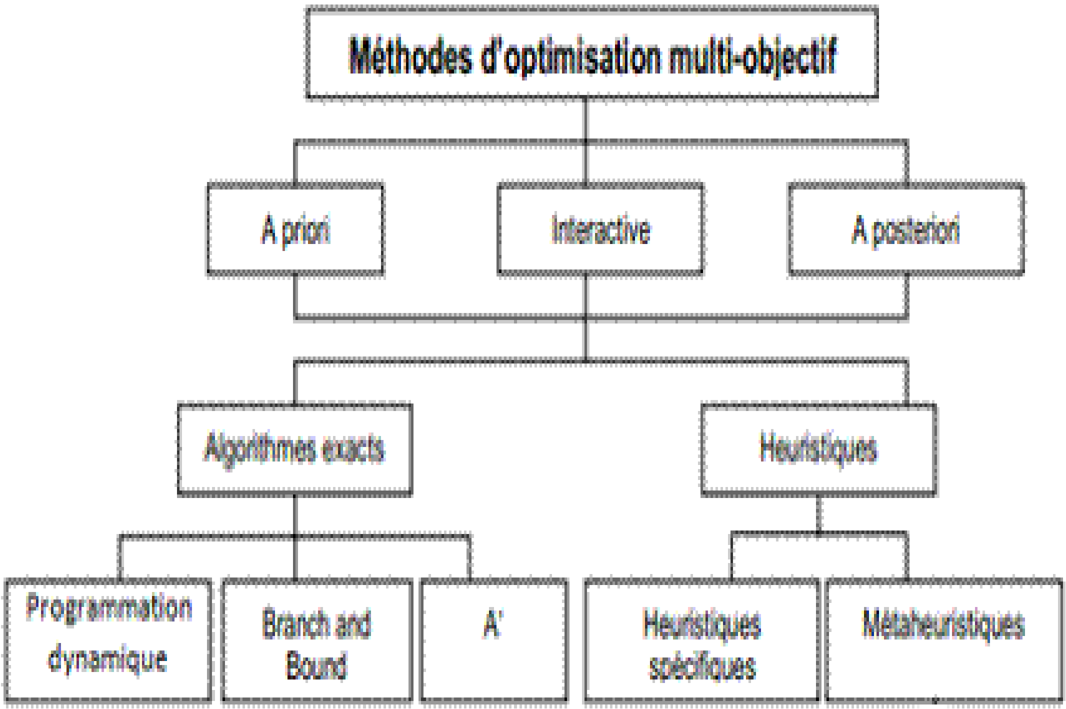


Figure.4

Nous allons nous intéressés plus particulièrement a l'approches Pareto, dont on a défini les principes précédemment dans le chapitre :

Définition 1 : (Décideur)

Un décideur est un individu/un groupe d'individus, qui face a une décision a la responsabilité d'évaluer les différentes alternatives possibles afin de proposer de mettre en œuvre une solution.

Définition 2 : (analyste)

Il est responsable de la définition et de la présentation des résultats au décideur.

La difficulté principale d'un MOP est qu'il n'existe pas de définition de solution optimale, le décideur peux simplement exprimer le fait qu'une solution est préférable a une autre mais il n'existe pas de solutions meilleurs qu'une autre.

Dés lors, résoudre un MOP ne consiste pas à rechercher la solution optimale mais l'ensemble de solutions de compromis pour lesquelles on ne pourra pas effectuer une opération de classement.*[9]*

On distingue deux approches comme le montre la figure suivante:

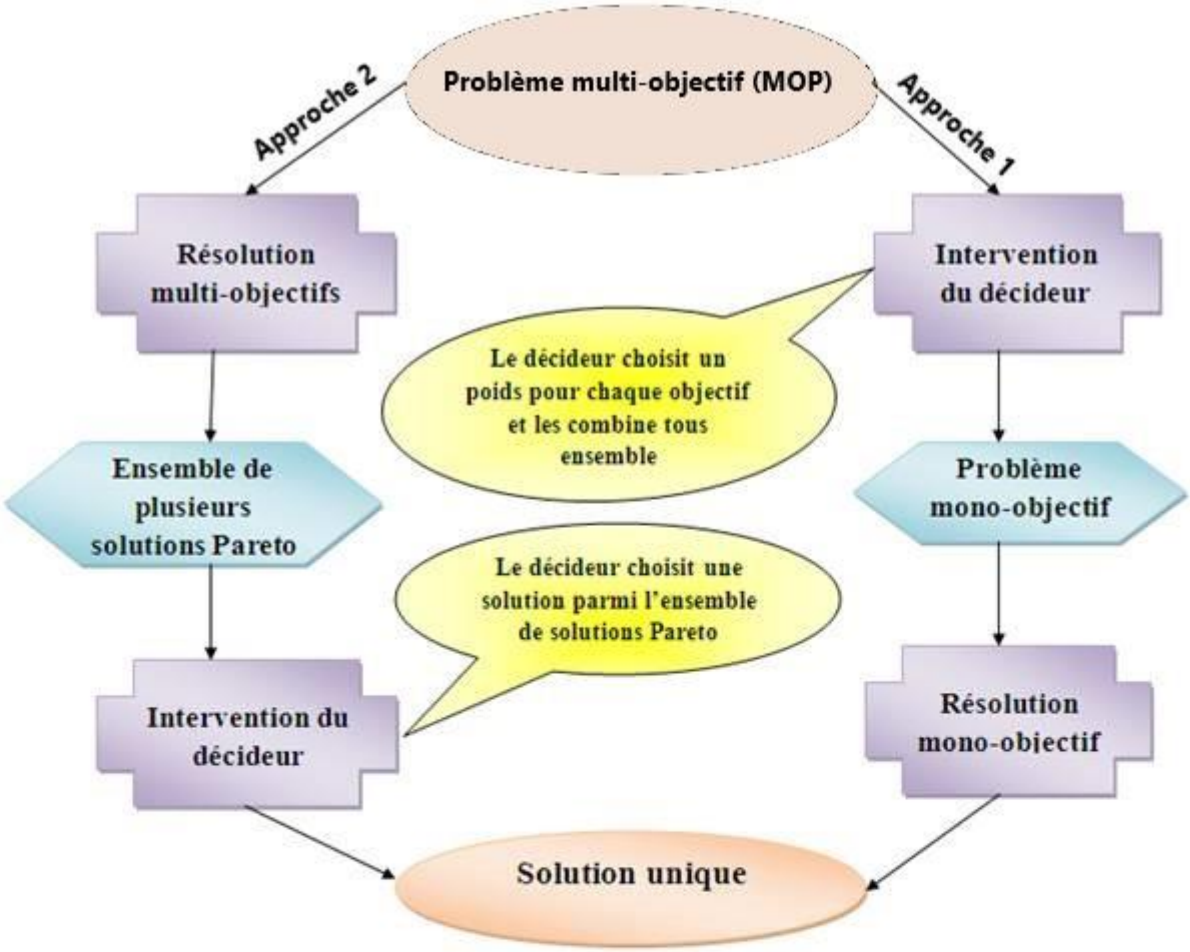


Figure.5

Approche 1: elle consiste à ramener ou bien transformer le MOP en Problème mono-objectif.

Approche 2: elle consiste à proposer des solutions en prenant compte de l'ensemble des objectifs simultanément.

2-7-1. Approche mono-objectif

Elle caractérise les méthodes dite « a priori » (Décideur → Recherche), nous allons détailler deux méthodes des plus utilisées dans la littérature.

Méthode de la somme pondérée :

Appelée aussi méthode d'agrégation des objectifs. Cette méthode consiste a ramener le MOP a un problème de d'optimisation d'une combinaison linéaire des objectifs initiaux de la manière suivante :

$$(MOP) \dots \begin{cases} Optimiser\ f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)] \\ \quad Sc: \qquad g_i(x) \leq 0 \\ \quad ou \qquad g_i(x) \geq 0 \\ \qquad\qquad x \in X \end{cases}$$

Qui serra transformer en problème paramétrique tel que :

$$(P_\lambda) \dots \begin{cases} Optimiser \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) \\ Sc: \qquad g_i(x) \leq 0 \\ ou \qquad g_i(x) \geq 0 \\ \qquad x \in X \end{cases}$$

Ou $\lambda_i \geq 0\ avec\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Les poids λ_i sont choisis en fonction de l'importance portée par le décideur au critère.

Tel que la solution optimale du problème paramétrique (P_λ) est une solution Pareto Optimale pour le (MOP).

Méthode ε-contrainte :

Une autre façon de transformer le (MOP) en un problème Mono-Objectif est d'optimiser l'objectif jugé prioritaire par le décideur et de convertir les autres critères en contraintes, tel que le problème transformer s'écrira comme suit :

$$(P_\varepsilon) \ldots \begin{cases} \quad Optimiser\ \ f_i(x) \\ Sc: \qquad\qquad g_i(x) \leq 0 \\ ou \qquad\qquad\ \ g_i(x) \geq 0 \\ \qquad\qquad x \in X \\ f_j(x) \leq \varepsilon_j \forall j = 1 \ldots k, j \neq i \end{cases}$$

Tel que la solution optimale du problème paramétrique (P_ε) est une solution Pareto Optimale pour le (MOP).

Remarque :

(1) Les poids λ_i , et les paramètres $\varepsilon_j$sont définis par le décideur.

En les faisant varier dans les deux méthodes, on trouve un sous-ensemble de poids et paramètres Pareto Optimaux pour le (MOP).

2-7-2. Approche progressive

Cette approche contient les méthodes progressives et les méthodes dites « a postériori ».

Méthodes « a postériori » : (Recherche → Décideur)

Le décideur prend sa décision d'après un ensemble de solutions calculées par un solveur

Méthodes interactives : (progressives)

Dans ces méthodes, le processus de décision et d'optimisation sont alternées, par moments le décideur intervient de manière à modifier certaines variables ou contraintes afin de diriger le processus.

Le décideur modifie ainsi interactivement les compromis entre ses préférences et les résultats.

3- Programmation Linéaire bi-niveaux

3-1- Introduction

Un problème de programmation bi-niveaux est un comme son nom l'indique, un problème a deux niveaux de décisions, qui est caractérisé par un problème d'optimisation classique avec la spécificité d'avoir les contraintes en parties déterminées par un autre problème d'optimisation, donc deux problèmes d'optimisation, deux niveaux de décisions, ce qui lui a valu d'être classifié comme un problème d'optimisation hiérarchique a deux échelons, en références à la chaine de commandement militaire, comparaison vite trouvée car la décision au niveau supérieur, c'est-à-dire au niveau de la fonction objectif est prioritaire par rapport à l'échelon inférieur. Il est aussi appelé dans la littérature programmation en escalier a deux étages, pour la forme de sa formulation mathématique, qui fait référence en quelques sortes a un escaliers.*[6]*

Alors, La programmation bi-niveaux est un outil puissant de l'aide a la décision dans certains contextes ou la prise de décision n'est pas centralisée, donc ne se prend pas unilatéralement, bien sûr le niveau supérieur appelé Leader garde le coté prioritaire, puisque le champ d'action du niveau inférieur appelé Suiveur (Follower .en Anglais) est limité par les choix du Leader, comme un Chef de Gouvernement qui délègue a son ministère de la défense le soin de s'occuper des affaires courantes en rapport avec la défense du territoire, le Président (Leader) soumet sa Politique parmi les choix qui s'offrent a lui en tenant compte des contraintes, le Ministère (Suiveur) fait au mieux son travail en prenant compte des directives et éventuellement des contraintes auxquels il doit faire face.*[8]*

Aussi, il existe deux voies a emprunter pour modéliser et résoudre ce genre de problème, Stackelberg a donc prit ça sous l'angle de la théorie des jeux, en traitant ce problème duopole comme un jeu a deux joueurs a somme nulle. Bracken, McGill et Bard eux le prennent sous l'angle de la Programmation Mathématique, utilisant les outils de l'optimisation. C'est cette seconde voie que nous allons emprunter et traiter au fil de ce chapitre.

3-2- Formulation générale d'un Problème bi-niveaux

Dans sa forme générale, un problème de programmation bi-niveaux est formulé comme suit :*[11]*

$$(PB)\begin{cases} \max F(x,y) \\ s.c. G(x,y) \ \leq 0 \\ \max f(x,y) \\ s.c. g(x,y) \ \leq 0, \end{cases} \qquad (1)$$

où les variables sont divisées en deux classes, les variables $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ du niveau supérieur et les variables $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ du niveau inférieur. Les fonctions $F : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f\colon \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement les fonctions objectifs du niveau supérieur et niveau inférieur, et les fonctions vectorielles $G : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ et $g : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ sont les contraintes du niveau supérieur et niveau inférieur respectivement.

Dans le problème (1), en ajoutant l'hypothèse de linéarité des fonctions $F(x,y)$, (x,y) , $G(x,y)$ et $g(x,y)$, on obtient un programme linéaire qu'on appelle *Programme* bi-*niveaux linéaire* et qu'on notera (*PBL*)

3-3- Formulation mathématique d'un Problème bi-niveaux linéaire

La programmation bi-niveaux linéaire est l'un des modèles de base de l'optimisation bi-niveaux, où les fonctions objectifs et les contraintes du Leader et du Suiveur sont linéaires. Dans cette section, nous allons voir, à travers des exemples, les propriétés de base des problèmes de programmation bi-niveaux linéaire.

Un problème de programmation bi-niveaux linéaire (*PBL*) peut être écrit sous sa forme générale :

$$(PBL)\begin{cases} \max F(x,y) = c_1^t x + d_1^t y \\ \quad s.c A_1 x + B_1 y \leq b_1 \\ \quad\quad x \geq 0 \\ \max f(x,y) = c_2^t x + d_2^t y \\ \quad s.c A_2 x + B_2 y \leq b_2 \\ \quad\quad y \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

où $F : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$; $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions objectifs du Leader et du Suiveur respectivement; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^{n_1}$; $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$; $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$,

$b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$; $A_1 - m_1 \times n_1$ -matrice, $B_1 - m_1 \times n_2$ -matrice, $A_2 - m_2 \times n_1$ -matrice et $B_2 - m_2 \times n_2$-matrice.

3-4- Exemple de programme bi-niveaux

Problème de contrôle de ressources :

Le problème bi-niveaux linéaire de contrôle de ressources est formulé de la manière suivante:*[7]*

$$\begin{cases} \max_x F(x,y) = c_{11}^t x + c_{12}^t y \\ \max_y f(x,y) = c_{21}^t x + d_{22}^t y \\ A_1 x + A_2 y \leq b \\ \qquad\qquad \mathrm{x}, \mathrm{y} \geq 0 \end{cases}$$

Ce modèle a été proposé pour analyser la répartition d'un budget fédéral entre plusieurs états. Le vecteur x représente la répartition du budget de chaque état. Au deuxième niveau, chaque état peut choisir de manière indépendante le financement de projets en respectant son budget. Le niveau de financement est représenté par le vecteur y.

3-5- Définitions

Considérons le problème (2). Nous avons les définitions suivantes.

Définition 1.

a) Le domaine S des contraintes du (PBL) est défini par :

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} : A_1 x + B_1 y \leq b_1, A_2 x + B_2 y \leq b_2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

b) L'ensemble des solutions réalisables du Suiveur pour un x fixé est noté par

$S(x)$ et défini par :

$$S(x) = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} : B_2 y \leq b_2 - A_2 x, y \geq 0\}.$$

c) La projection de S sur l'ensemble des décisions du Leader :

$$P(X) = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} : \exists y \in \mathbb{R}^{n_2}, A_1 x + B_1 y \leq b_1, A_2 x + B_2 y \leq b_2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

d) L'ensemble des réactions rationnelles du Suiveur pour $x \in P(X)$, est donné par :

$$R(x) = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} : y = \arg\max [f(x,\hat{y}) : \hat{y} \in S(x)]\},$$

Avec $\quad \arg\max\,[f(x,\hat{y}) : \hat{y} \in S(x)] = \{y \in S(x) : f(x,y) \geq f(x,\hat{y}), \forall \hat{y} \in S(x)\}.$

e) La région induite (ou ensemble induit) :

$$RI = \{(x,y) \in S, y \in R(x)\}.$$

Le Leader peut obtenir différentes réactions rationnelles du Suiveur en attribuant différentes valeurs à x. L'union de toutes les valeurs possibles, x, que le Leader peut sélectionner ainsi que les réactions rationnelles correspondantes $y \in R(x)$ forment la région induite RI définie précédemment

3-6- Exemples de reformulation

La majorité des résultats obtenus dans la littérature concernent la version particulière du (PBL) sans contraintes du Leader (i.e. sans les contraintes $A_1x + B_1y \leq b_1, x \geq 0$). Il a été remarqué que la présence de ces contraintes, appelées parfois contraintes couplantes, ou contraintes de connexion, pourrait influencer considérablement la structure de l'ensemble réalisable du (PBL) (région induite). Elle pourrait le rendre déconnecté et parfois même vide.

Dans la pratique, la position des contraintes n'est pas arbitraire dans un (PBL) et dépend fortement de l'application considérée. Les problèmes avec des contraintes du niveau supérieur peuvent surgir par exemple si le Leader n'est pas disposé à accepter certaines décisions optimales du Suiveur. De plus, il faut noter que le déplacement de telles contraintes vers le niveau inférieur peut changer complètement le modèle.

Pour le traitement du (PBL) avec contraintes du Leader, il existe une nouvelle définition alternative à la définition 1. La différence entre les deux définitions est que la nouvelle définition implique que le Suiveur est tenu de respecter les contraintes du Leader, ce qui n'est pas le cas pour le (PBL) Les auteurs motivent leur nouvelle définition en donnant une instance du (PBL) pour laquelle aucune solution ne peut être trouvée en utilisant la définition 1. , même si $S \neq \emptyset$. Ils montrent que cette instance possède une solution et que le fait de ne pas trouver cette solution est une défaillance de la définition classique du (PBL).

Mais après analyse de cette nouvelle définition il est démontré qu'elle est simplement équivalente à transférer les contraintes du niveau supérieur au niveau inférieur ce qui n'est pas permis comme nous l'avons déjà mentionné. Ils ont montré que la solution optimale du (PBL) original n'est plus optimale après déplacement de ces contraintes (voir les exemples 2 et 3).

Exemple 1. Considérons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \max\ F(x,y) = -x + 4y \\ s.c. \max\ f(x,y) = -y \\ -x - y \leq -3 \\ -2x + y \leq 0 \\ 2x + y \leq 12 \\ -3x + 2y \geq -4 \\ \qquad \mathrm{x, y} \geq 0 \end{cases}$$

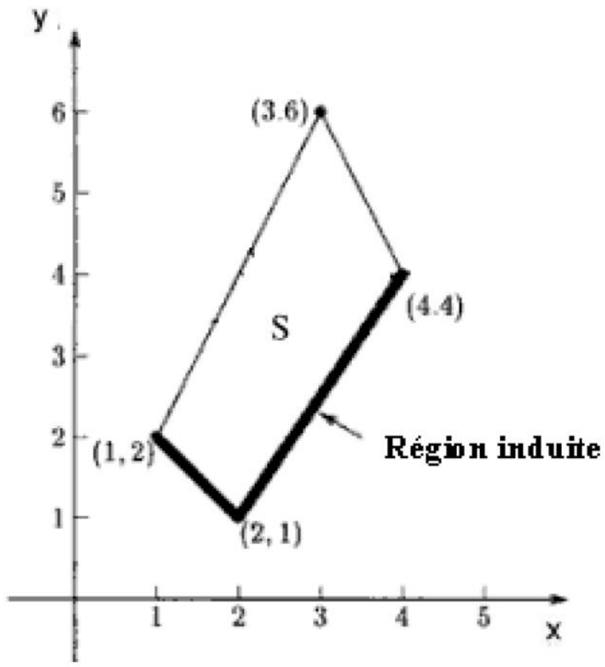


Figure.6

Suivant la définition 1, nous avons : · $P(X) = \{x: 1 \leq x \leq 4\}$.

- L'ensemble des solutions réalisables $S(x)$ du Suiveur pour un $x \in P(X)$ fixé est représenté par une ligne verticale contenue dans le polyèdre S au point particulier x.

- Ensemble des réactions rationnelles du Suiveur: puisque la fonction objectif du Suiveur est de minimiser y, donc $R(x)$ est le plus petit point réalisable y sur la ligne verticale. Il est donné

par $$R(x) = \begin{cases} -x + 3, si\ 1 \leq x \leq 2, \\ (3x - 4)/2, si\ 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

- La région induite RI est la portion en gras du périmètre de S.

Complexité du (PBL)

Le problème de programmation bi-niveaux linéaire est un problème compliqué et difficile à résoudre.*[10]* Malgré que les fonctions objectifs et les contraintes du niveau inférieur et du niveau supérieur sont toutes linéaires, le (PBL) est ni continu partout, ni convexe. Il a été prouvé que le problème du niveau supérieur était non-convexe avec un exemple pratique, ainsi que le (PBL) est un problème NP-difficile. En outre, il a même étais établi que le (PBL) est fortement NP-difficile. Car établir l'optimalité stricte ou locale d'une solution est également NP - difficile.

Propriétés du (PBL)

Dans la définition 1. du (PBL), l'ensemble des contraintes représente toutes les combinaisons de choix que le Leader et le Suiveur peuvent faire. L'objet le plus important dans cette définition est la région induite. Elle représente l'ensemble réalisable du (PBL) sur lequel le Leader peut optimiser sa fonction objectif et est composée de l'union de faces de l'ensemble S. Cet ensemble est polyédral, souvent non convexe et, en présence des contraintes du niveau supérieur, il peut être discontinu et même vide.*[11]*

Afin d'illustrer les propriétés citées ci-dessus, nous proposons les exemples suivants :

Exemple 2. Considérons le problème suivant :

$$(P1)\begin{cases} \max x + 2y \\ \max y \\ s.c. -3x + y \leq -3 \\ 3x + y \leq 30 \\ 2x - 3y \geq -12 \\ x + y \leq 14 \\ \qquad \mathrm{x}, \mathrm{y} \geq 0 \end{cases}$$

La région des contraintes de ce problème est représentée dans la figure.7 On remarque que cet ensemble est convexe. La solution de cet exemple est le point $B = (6,8)$

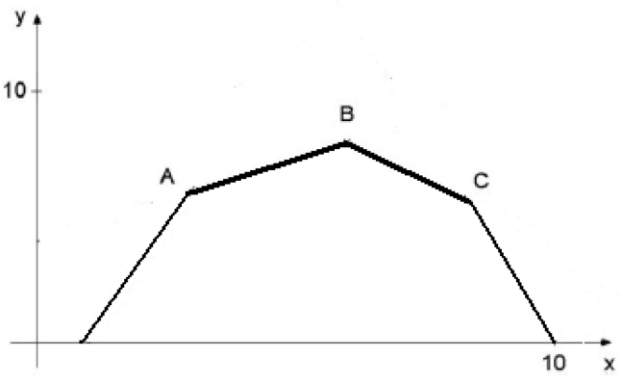


Figure.7

La région induite est représentée par des traits en gras. On voit bien qu'elle est non convexe mais continue (connectée). Dans le cas de présence des contraintes du niveau supérieur (le Leader), cette région est souvent discontinue (voir exemple 3.).

Exemple 3. Considérons le (PBL) de l'exemple 2. où les deux dernières

contraintes du Suiveur sont déplacées vers le niveau supérieur;

$$(P2)\begin{cases} \max x+2y \\ s.c.\,2x-3y \geq -12 \\ x+y \leq 14 \\ \max y \\ s.c.\,-3x+y \leq -3 \\ 3x+y \leq 30 \\ \qquad \mathrm{x,y} \geq 0 \end{cases}$$

La région des contraintes ainsi que la région induite en gras sont représentées dans la figure 8

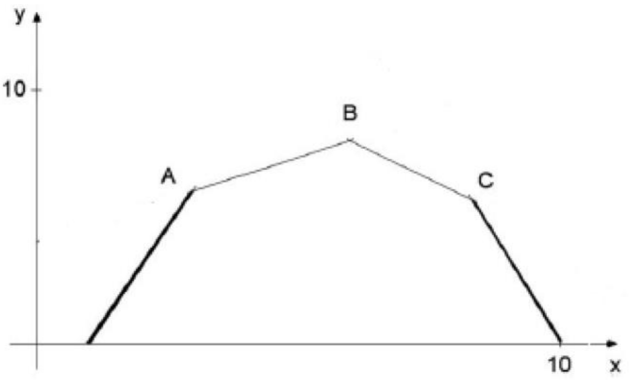


Figure.8

On voit bien d'après le graphe de l'exemple 3. que la région induite est discontinue. Ceci est dû à la présence des contraintes du niveau supérieur. La solution globale de cet exemple est le point $C = (8,6)$ et A est une solution locale.

Comme nous l'avons déjà mentionné, la région induite peut être vide dans le cas de présence des contraintes du niveau supérieur. Regardons l'exemple suivant [73].

Exemple 4.

$$(P3)\begin{cases}\max \quad F(x,y) = -x + 4y \\ s.c. -x - y \leq -3 \\ -3x + 2y \geq -4 \\ \max \quad f(x,y) = -x - y \\ s.c \ -2x + y \leq 0 \\ 2x + y \leq 12 \\ \qquad\qquad x, y \geq 0\end{cases}$$

Le graphe de cet exemple donné dans la figure 9 nous montre que la région induite est vide : nous avons la région des contraintes S, et pour un x fixé l'ensemble réalisable du Suiveur est représenté par une ligne vertical; par exemple pour $x = 2$, $S(2)$ est représenté par la ligne en gras dans la figure 9. Puisque l'objectif du Suiveur est de minimiser $f(x,y) = x + y$, l'ensemble des réactions rationnelles de ce dernier est l'ensemble $R(x) = \{0\}$ (voir figure 9). En utilisant la définition 1. , nous avons bien $RI = \emptyset$.

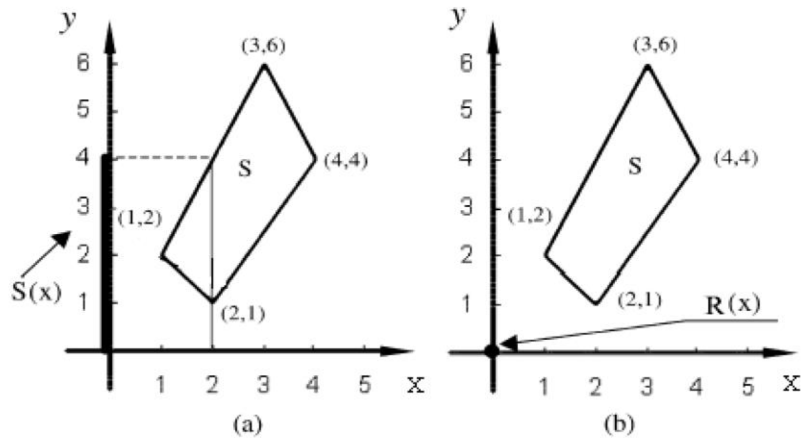


Figure.9

Solutions optimales et multiplicité des solutions

Considérons le (PBL) et supposons que l'ensemble des réactions rationnelles du Suiveur est constitué d'un seul point (au plus) pour tout $x \in P(X)$, i.e. $|R(x)| \leq 1, \forall x \in P(X)$.

Définition 2.

Un point $(x^*, y^*) \in RI$ *est optimal pour le (PBL) si :*

$$c_1^t x^* + d_1^t y^* \geq c_1^t x + d_1^t y, \forall (x, y) \in RI.$$

Cette définition d'une solution optimale du (PBL) est valable uniquement dans les conditions citées ci-dessus. Par contre, dans le cas où l'ensemble $R(x)$ *est constitué de plus d'un élément (multiplicité de solutions optimales du Suiveur) pour un* $x \in P(X)$ *fixé, le raisonnement est différent. En effet, dans ce cas il existe dans la littérature deux approches principales pour formuler la solution du (PBL) : l'approche pessimiste (ou forte) et l'approche optimiste (ou faible).[7]*

1. Approche pessimiste: cette approche est appropriée pour le cas où la coopération entre le Leader et le Suiveur n'est pas autorisée et que le Leader ne peut influencer le choix du Suiveur. Dans ce cas, il est rationnel que le Leader se protège en limitant le dommage résultant d'une sélection indésirable du Suiveur tout en respectant son objectif. Donc, son problème sera formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \max \ \min \ F(x, y) \\ s.c. (x, y) \in S \\ y \in R(x) \end{cases}$$

2. Approche optimiste: dans ce cas, le Leader peut supposer la coopération du Suiveur, dans le sens où ce dernier va choisir à chaque fois une solution qui est la meilleure du point de vue du Leader. Ce cas se formule de la même manière que le (*PBL*), i.e.

$$\begin{cases} \max \ F(x, y) \\ s.c. (x, y) \in S \\ y \in R(x) \end{cases}$$

En se mettant dans les conditions de la formulation optimiste du (*PBL*), le Suiveur va choisir

$$y \in \arg\max \{c_1^t x + d_1^t y : y \in R(x)\},$$

ce qui signifie la meilleure solution dans $R(x)$ *du* point de vue du Leader. Le (*PBL*) peut donc être écrit d'une manière équivalente sous forme d'un programme mathématique standard :

$$\max \{F(x, y) : (x, y) \in RI\}, \qquad (PBL)'$$

et dans ce cas la définition 2. pour une solution optimale du (*PBL*) reste valable. Cette définition peut être formulée autrement en utilisant la définition suivante :

Définition 3.

Considérons un (PBL) et soit S *son ensemble des contraintes. Alors*

1. (x, y) *est un point réalisable si* $(x, y) \in S$.

2. (x, y) *est un point admissible si* (x, y) *est un point réalisable et* $y \in S(x)$.

Une solution optimale du (PBL) sera alors définie comme suit :

Définition 4.

Un point (x^*, y^*) *est une solution optimale du (PBL) si* (x^*, y^*) *est admissible et pour tout point admissible* (x, y) *on a :*

$$F(x^*, y^*) \geq F(x, y) .$$

Remarque 2. *Il faut noter qu'en l'absence des contraintes du niveau supérieur, toute solution rationnelle est aussi solution admissible. Dans le cas de présence de ces contraintes, l'inverse n'est pas toujours vrai.*

3-7- Approches de résolution

Soit le problème de programmation bi-niveaux linéaire (PBL) et soit $u \in \mathbb{R}^{m_2}, v \in \mathbb{R}^{n_2}$ les variables duales associées aux contraintes $A_2x + B_2y \leq b_2$ et à $y \geq 0$ respectivement. Nous avons la proposition suivante.

Proposition

Une condition nécessaire pour que (x^*, y^*) *soit solution* du *(PBL) est qu'il existe* u^* *et* v^* *tels que* (x^*, y^*, u^*, v^*) *résout le système :*

$$(PBL)\ KKT \quad \begin{cases} \max F(x, y) = c_1^t x + d_1^t y \\ A_1x + B_1y \leq b_1 \\ A_2x + B_2y + w = b_2 \\ B_2^t u - v = d_2 \\ v^t y + u^t w = 0 \\ x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0 \end{cases}$$

Cette formulation du (PBL) va jouer par la suite un rôle important dans le développement d'algorithmes de résolution du (PBL) Le problème d'optimisation $(PBL)_{KKT}$ est linéaire à l'exception des contraintes de complémentarité $(v^t y + u^t w = 0)$.

Méthodes de résolution du (*PBL*)

Pour la résolution du (*PBL*), de nombreux algorithmes ont été mis au point et particulièrement pour le cas linéaire. Ces algorithmes peuvent être classés en trois principales catégories de méthodes basées sur la reformulation KKT, et les méthodes développées dans cette catégorie sont nombreuses et requièrent la transformation du problème en un problème d'optimisation à un seul niveau en utilisant les conditions KKT. Donc au lieu de travailler avec le problème (*PBL*) on travaille avec le problème $(PBL)_{KKT}$. A cause de la présence des contraintes de complémentarité dans le système KKT, le problème résultant est non linéaire. Les approches développées dans cette catégorie peuvent être résumées en:

- *Approche basée sur la programmation entière mixte* : il a été proposé, pour la résolution du problème $(PBL)_{KKT}$ de convertir les contraintes de complémentarité en contraintes linéaires en ajoutant des variables binaires.

- *Approche du pivot de complémentarité* : L'algorithme du pivot de complémentarité (PCP) il calcule à chaque itération un point réalisable (x, y) pour le problème original de telle façon que la fonction objectif du Leader prenne une valeur au plus égale à un nombre α. Ce paramètre est mis à jour à chaque itération et le processus s'arrête lorsque aucune solution réalisable ne peut être trouvée.

- Approche basée sur les techniques Branch and Bound : l'idée de cette approche est de supprimer le terme de complémentarité et résoudre le programme linéaire résultant. A un nœud donné de l'arbre Branch and Bound qui ne vérifie pas les contraintes de complémentarité, la séparation se fait de la manière suivante: deux nœuds seront créés, l'un avec $(v, u) = 0_{\mathbb{R}^{n_2+m_2}}$ comme une contrainte additionnelle et l'autre avec $(y, w) = 0_{\mathbb{R}^{n_2+m_2}}$.

4- Programmation Linéaire stochastique

4-1- Introduction

L'Optimisation Stochastique est née de la nécessité de trouver une meilleure approche de modélisation et de résolution pour les problèmes réels, ou dans certains cas les variables revêtent un caractère aléatoire, et que les méthodes de résolution conventionnelles ne peuvent résoudre les programmes résultant, du fait qu'ils soient inadaptés.*[12]*

4-2- Rappels sur les probabilités :

4-2-1. Tribu

Définition :

Soient Ω *un ensemble et* $\mathcal{T}$ *une partie de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *ou* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est l ensemble des parties de* Ω*, on dit que* $\mathcal{T}$ *est une tribu (ou* σ*-algèbre) sur* Ω *si*:

i. $\Omega \in \mathcal{T}$.
ii. $\forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$
iii. $\forall \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$.

Remarque:

Si $A_n = \emptyset$, a partir d'un certain rang n, alors:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=0}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$

dans ce cas $\mathcal{T}$ est appelée *algèbre*.

Exemple :

Soit l'ensemble $\Omega = \{y, \beta, \gamma\}$

·$\mathcal{T}_1 = \{\Omega, \phi\}$ *est une algèbre.*

·$\mathcal{T}_2 = \{\{y, \beta\}, \{\gamma\}\}$ *n'est pas une algèbre puisque* $\Omega \notin \mathcal{T}_2$.

4-2-2. Espace probabilisable

Définition :

Soient Ω *un ensemble et* $\mathcal{T}$ *une tribu, le couple* $(\Omega, \mathcal{T})$ *est appelé espace probabilisable* ou espace mesurable.

4-2-3. Tribu de Borel

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ *un espace topologique. On appelle tribu Borélienne (ou tribu de Borel de* Ω*) la* σ*-algèbre engendrée par l'ensemble des ouverts de* Ω*, elle est notée* $\mathcal{B}(\Omega)$ *ou* $\mathcal{B}_{\Omega}$.

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}$ *on* la *note par* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *ou bien* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Elle *est engendrée par des intervalles ouverts* $]a; b[$ où a *et* b *sont des* éléments de $\mathbb{R}$.

4-2-4. Espace probabilisé

Définition:

Soit un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$, on appelle mesure de *probabilité ou probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{T})$ *toute application* $\mathbb{P}$ *de* $\mathcal{T}$ *dans* $[0, 1]$ *vérifiant* :

i. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

ii. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints, on a :

$$\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

on dit que $\mathbb{P}$ *est une mesure* σ-additive.

Le triplet $(\Omega, T, \mathbb{P})$ *est appelé espace probabilisé.*

4-2-5. Variable aléatoire

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité* e*t* X une application de Ω *dans* $\mathbb{R}$. On dit que X est *une variable aléatoire (en abrégé v-a) si pour tout* B dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$:

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{T}.$$

1. *X est une variable aléatoire continue, si $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$.*
2. *X est une variable aléatoire discrète, si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.*

4-2-6. Loi de probabilité de *X*

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une v-a. on appelle loi de probabilité (ou loi) de* X, *la probabilité* $\mathbb{P}_{\mathrm{X}}$ *définie pour tout* B *dans* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *par* :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{X}}(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

- Si X est une v-a discrète, alors:

$$\forall x \in B \;\; \mathbb{P}_{\mathrm{X}}(B) = \sum_{x \in B} \mathbb{P}(X = x)$$

- Si X est une v-a continue, alors pour tout intervalle $B = (a; b)$ (ouvert ou non) de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}_{\mathrm{X}}(B) = \mathbb{P}(X \in (a; b))$$

4-2-7. Fonction de Répartition

Définition :

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une v-a. On appelle fonction de répartition* (*ou distribution*) de X la fonction définie par:

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

$$\mathrm{x} \longmapsto \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x})$$

Théorème:

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une v-a. soit* $\mathrm{F_X}$ *sa fonction de repartition,* alors :

- $\mathrm{F_X}$ est une fonction croissante.
- $\mathrm{F_X}$ est continue à droite.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F_X}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{F_X}(x) = 0$.

Définition :

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *et* Y *deux v-a.* X *et* Y sont indépendantes si

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)$$

4-2-8. Fonction de densité

Définition :

Une fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité de X si elle vérifie les conditions suivantes:

- Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $f_X(x) \geq 0$.
- f_X est continue sur $\mathbb{R}$.
- f_X est telle que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$$

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dt.$$

Par suite : $\frac{dF_X}{dx}(x) = f_X(x)$

4-2-9. Esperance mathématique

Définition :

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une v-a de densité* f_X, *o*n dit que X admet une *espérance mathématique :*

- Pour X discrète, si :

$$\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x) < +\infty \quad \text{et on note} \quad E(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x).$$

- Pour X continue, si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx < +\infty \quad \text{et on note} \quad E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx.$$

Propriétés :

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux v-a possédants des espérances mathématiques, alors:*

i. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

ii. $\forall a,b \in \mathbb{R},\ E(aX+b)=aE(X)+b$

iii. $\forall a \in \mathbb{R},\ E(a)=a$

iv. *Si* $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

4-2-10. Variance et covariance

Définition :

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux v-a admettant des espérances mathématiques. On appelle covariance de* X *et* Y *le nombre réel:*

$$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

Si $X=Y$ *on appelle variance, le nombre réel :*

$$V(X)=E[(X-E(X))]^2$$

Le nombre réel positif

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

est appelé écart-type.

Remarque :

Si $Cov(X,Y)$ *existe alors :*

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$Cov(X,Y)=0$$

de même si V(X) existe, alors :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Propriétés :

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux v-a admettant une variance, alors:*

i. $\forall a \in \mathbb{R};\ V(aX) = a^2 V(X)$

ii. $\forall c \in \mathbb{R};\ V(c) = 0 \quad et \quad V(X+c) = V(X)$

i. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ V(aX+bY) = a^2V(X) + 2abCov(X,Y) + b^2V(Y)$

En particulier, si X et Y sont indépendantes;

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$$

4-2-11. Loi uniforme et loi normale

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une v-a continue.*

La loi uniforme

Définition :

La v-a X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$, si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ \ x \in\ [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et sa fonction de répartition définie par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x < b \\ 1 & si x \geq b \end{cases}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Sa variance est :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Loi Normale

Définition :

La v-a X suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ et on note $X \leadsto \mathcal{N}(m, \sigma)$, si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$$

Si $m = 0$ *et* $\sigma = 1$ *on dit que X suit une loi normale centrée réduite et on note* $X \leadsto \mathcal{N}(0,1)$.

Remarque :

Si X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors, on a :

$$E(X) = m \;\; et \;\; V(X) = \sigma^2$$

La v-a :

$$X = \frac{X-m}{\sigma^2} \leadsto N(0,1).$$

Si $X \leadsto N(0,1)$, *sa fonction de répartition est définie par :*

$$\phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

Pour tout nombre réel α *avec* $0 \leq \alpha \leq 1$, *on peut déterminer d'après la table de la loi normale centrée réduite le nombre* u_α *tel que :*

$$\mathbb{P}(X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

4-2-12. Matrice de covariance

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une v-a* à valeur dans $\mathbb{R}^d$, on dit que X est un vecteur aléatoire et on note $X = (X_1, \dots, X_d)^t$. Les variable aléatoires réelles $X_1, \dots, X_d$ sont appelées composantes de X, leurs lois de probabilité sont appelées lois marginales de X. On définit l'espérance de X par :

$$m_x = E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_d) \end{pmatrix}$$

et la matrice de covariance est donnée par:

$$\Gamma = (Cov(X_i, X_j))_{1 \le i,j \le d} = E[(X - E(X))^t (X - E(X))]$$

ou

$$E[(X - E(X))^t (X - E(X))] = \begin{pmatrix} V(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \dots & Cov(X_1, X_d) \\ Cov(X_2, X_1) & V(X_2) & \dots & Cov(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_d, X_1) & Cov(X_d, X_2) & \dots & V(X_d) \end{pmatrix}$$

4-3- Programmation stochastique

Lors de la formulation mathématique d'un problème de décision ou d'optimisation qui se ramène à un programme linéaire uni-objectif ou multi-objectifs. Supposer que les données sont déterministes ou constantes est une hypothèse peu réaliste compte tenu du fait qu'elles peuvent être aléatoires de par leurs variabilités et des expériences précédentes, donc représentées par des variables aléatoires. Ce qui a donné naissance à la programmation linéaire stochastique uni-objectif ou multi-objectifs.

4-4- Formulation d'un problème de programmation linéaire stochastique

Un programme linéaire stochastique est un programme linéaire en présence de variable(s) aléatoire(s) définie(s) sur un espace de probabilité $(\Omega, F, \mathbb{P})$ de distribution connue.*[14]*

Considérons le programme linéaire stochastique suivant :

$$(Ps)\begin{cases} \max c'(\omega)x \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i = 1 \dots m \\ x_j \geq 0, j = 1 \dots n \end{cases}$$

Avec $c(\omega) = (c_1(\omega) \dots c_n(\omega))$ ou $c_j(\omega), a_{ij}(\omega)\ et\ b_i(\omega)$ pour $i = 1 \dots m\ et\ j = 1 \dots n$ sont des variables aléatoires de distribution connue sur l'espace de probabilité $(\Omega, F, \mathbb{P})$, et les $x_j \geq 0, j = 1 \dots n$ sont des nombres réels positifs.

4-5- Approches de résolution

Il y a essentiellement deux différents types de modèles en programmation linéaire stochastique qui sont :

1. méthode passive ou "'wait and see"

2. méthode active ou "'here and now"

Méthode passive :

Le décideur peut attendre la réalisation des variables aléatoires et résoudre le programme déterministe résultant. Dans ce modèle, on s'intéresse généralement à la distribution de probabilité de la valeur optimale ou à son espérance mathématique et/ou sa variance. Comme l'approche passive, relevant de la philosophie du "wait and see", concerne plus les problèmes prévisionnels, nous allons dans ce travail focaliser sur la philosophie du "'here and now"'.*[12]*

Méthode active :

Cette méthode est basée sur la décision sur x ou stratégie sur x qui est prise à l'avance, avant les réalisations des variables aléatoires.

Résoudre un (Ps), revient à lui associer un programme déterministe équivalent, comme suit :

4-5-1. Programme équivalent dans le cas d'une fonction objectif stochastique

Considérons le programme linéaire stochastique sous la forme suivante :

$$(Ps)\begin{cases} \max c'(\omega)x \\ \\ x \in D = \{x \,/ Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

Ou c est un vecteur aléatoire et $A = (a_{ij})$ et $b = (b_i)$ sont déterministes.

Pour établir la fonction objectif du problème équivalent, nous avons plusieurs modèles. Parmi elle, nous considérons les méthodes suivantes :

4-5-1.1. E-Modèle

Cette méthode et la plus utilisée, elle consiste à remplacer la variable aléatoire de l'objectif par son espérance mathématique pour obtenir le programme linéaire déterministe suivant :

$$(Ps)_1\begin{cases} \max E\big(c'(\omega)\big)x \\ x \in D = \{x \,/ Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

4-5-1.2. V-Modèle

Cette méthode consiste à minimiser la variance de l'objectif notée $\sigma^2(c^t(\omega)x)$, pour cela il nous faut calculer la matrice covariance notée V, il en résultera la variance $\sigma^2(c^t(\omega)x) = (x^tVx)$, ce qui nous donnera le programme déterministe suivant :

$$(Ps)_2 \begin{cases} \min\ x^tVx \\ x \in D = \{x\ /Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

4-5-1.3. E-V Modèle

Cette méthode est une extension du V-modèle, et cela consiste à rajouter un niveau de rendement minimum noté c_0 à l'espérance de l'objectif, fixé préalablement par le décideur, en le mettant comme contrainte additionnelle du problème, comme suit :

$$(Ps)_3 \begin{cases} \min\ x^tVx \\ E\big(c'(\omega)\big)x \geq c_0 \\ x \in D = \{x\ /Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

Mais le problème de cette méthode et de choisir un c_0 convenable.

4-5-1.4. P-Modèle

Cette méthode consiste en la maximisation de la probabilité que la valeur de l'objectif est au moins égale à un certain niveau $u$choisi préalablement par le décideur, ce qui nous donnera le programme suivant :

$$(Ps)_4 \begin{cases} \max\{P_u(c'(\omega)x) = P(\omega/c'(\omega)x \geq u)\} \\ x \in D = \{x\ /Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

La solution de ce problème, dans le cas gaussien, est donnée par le programme fractionnel suivant :

$$(Ps)_4{}' \begin{cases} \max \dfrac{(E\big(c'(\omega)\big)x - u)}{\sqrt{x^t V x}} \\ \\ x \in D = \{x \,/ Ax \le b, x \ge 0\} \end{cases}$$

Soit $c(\omega)$ un vecteur aléatoire Gaussien, avec :

$$E(c'(\omega)x) = \bar{c}x$$
$$\sigma^2(c'(\omega)x) = x^t V x$$

$c(\omega)$ suit une loi normale $N(\bar{c}x, x^t V x)$

En utilisant le théorème central limite (TLC), on obtient donc :

$$\frac{(E\big(c'(\omega)\big)x - u)}{\sqrt{x^t V x}} \backsim N(0,1)$$

$$P(\omega / c'(\omega)x \ge u) = P(\omega / \frac{(c'(\omega)x - \bar{c}x)}{\sqrt{x^t V x}} \ge \frac{(u - \bar{c}x)}{\sqrt{x^t V x}})$$

$$= P(\omega / \frac{(-c'(\omega)x + \bar{c}x)}{\sqrt{x^t V x}} \le \frac{(-u + \bar{c}x)}{\sqrt{x^t V x}}) = \emptyset(\frac{(-u + \bar{c}x)}{\sqrt{x^t V x}})$$

Alors $$\max \frac{(E\big(c\prime(\omega)\big)x - u)}{\sqrt{x^t V x}} = \max \emptyset\left(\frac{(-u + \bar{c}x)}{\sqrt{x^t V x}}\right)$$

4-5-1.5. Critère (ou méthode) de Katoka

Cette méthode consiste en la maximisation α-fractile de la fonction de distribution de l'objectif ou le risque $\alpha \in [0,1]$ est choisi par le décideur, comme suit :

$$(Ps)_5 \begin{cases} \max\, u \\ \{P(\omega \,/ c'(\omega)x \ge u) = \alpha\} \\ \\ x \in D = \{x \,/ Ax \le b, x \ge 0\} \end{cases}$$

Dans le cas gaussien on a :

$$P(\omega\ /c'(\omega)x \geq u) = \alpha \Leftrightarrow P(\omega\ /\ c'(\omega)x \leq u) = 1 - \alpha.$$

Et $\qquad P(\omega\ /c'(\omega)x \leq u) = P\left\{\omega\ /\ \frac{c\prime(\omega)x - \bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}} \leq \frac{u - \bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}}\right\} = \emptyset\left(\frac{u - \bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}}\right)$

Ou $\emptyset$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée et réduite.
Donc :

$$P(\omega\ /c'(\omega)x \geq u) = \alpha \Leftrightarrow \emptyset\left(\frac{u - \bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow u = \bar{c}x - \emptyset^{-1}(\alpha)\sqrt{x^tVx}$$

Par conséquent, résoudre le $(Ps)_5$revient dans ce cas a résoudre le problème suivant :

$$(Ps)_5{}' \begin{cases} \max\ \bar{c}x - \emptyset^{-1}(\alpha)\sqrt{x^tVx} \\ \\ x \in D = \{x\ /Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

$\bar{c}x - \emptyset^{-1}(\alpha)\sqrt{x^tVx}$ Est concave si $\emptyset^{-1}(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{2}$.
Si on revient au problème $(Ps)_5$ et que $P(\omega\ /c'(\omega)x \geq u) = \alpha \geq \frac{1}{2}$, cela veux dire qu'il faut avoir le maximum de gain avec une probabilité supérieure ou égale a $\frac{1}{2}$.

Remarque : Si $\alpha = 1$ on revient à l'E-modèle.

4-5-2. Programme équivalent dans le cas de contraintes stochastiques

Dans cette partie nous allons considérer l'objectif comme étant déterministe, et montrer que les méthodes utilisées dans le cas de l'objectif aléatoire ne peuvent être utilisées dans le cas présent.

Exemple :

Considérons le programme linéaire stochastique suivant :

$$(P_s)\begin{cases} \min \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{4}x_2 \\ a(\omega)x_1 + x_2 \geq 8 \\ b(\omega)x_1 + x_2 \geq 16 \\ c(\omega)x_1 + x_2 \geq 23 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le triplet de variables aléatoires $(a(\omega), b(\omega), c(\omega))$ est uniformément distribué sur les intervalles $\{(\alpha, \beta, \gamma)/\ 0 \leq \alpha \leq 1, 1 \leq \beta \leq 4, 2 \leq \gamma \leq 5\}$.
D'espérances,

$$E(a(\omega)) = 1/2$$
$$E(b(\omega)) = 5/2$$
$$E(c(\omega)) = 7/2$$

Comme dans l'E-modèle, nous allons remplacer les variables aléatoires des contraintes par leurs espérances.

$$(P_d)\begin{cases} \min \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{4}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 8 \\ \frac{5}{2}x_1 + x_2 \geq 16 \\ \frac{7}{2}x_1 + x_2 \geq 23 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Après résolution par la méthode du simplexe, on obtient la solution optimale suivante :

$$x_1^* = 5\ , x_2^* = \tfrac{11}{2}.$$

Maintenant, cherchons la probabilité pour que cette solution optimale soit réalisable :

$P\{a(\omega)x_1^* + x_2^* \geq 8, b(\omega)x_1^* + x_2^* \geq 16, c(\omega)x_1^* + x_2^* \geq 23\ \} =$

$P\left\{a(\omega) \geq \frac{1}{2}, b(\omega) \geq \frac{5}{2}, c(\omega) \geq \frac{7}{2}\right\} = \implies$

Car $(a(\omega), b(\omega), c(\omega))$ sont des variables aléatoires indépendantes.

$$\Rightarrow = P\left(a(\omega) \geq \frac{1}{2}\right).P\left(b(\omega) \geq \frac{5}{2}\right).P\left(c(\omega) \geq \frac{7}{2}\right) =$$

$$(1 - P\left(a(\omega) \leq \frac{1}{2}\right)).(1 - P\left(b(\omega) \leq \frac{5}{2}\right)).(1 - P\left(c(\omega) \leq \frac{7}{2}\right)) =$$

$$\left(1 - F_a\left(\frac{1}{2}\right)\right).\left(1 - F_b\left(\frac{5}{2}\right)\right).\left(1 - F_c\left(\frac{7}{2}\right)\right)$$

Puisque les variables aléatoires $(a(\omega), b(\omega), c(\omega))$ sont uniformément distribués sur leurs intervalles, soit les fonctions de répartitions suivantes :

$$F_a\left(\frac{1}{2}\right) = 1/2$$

$$F_b\left(\frac{5}{2}\right) = 1/2$$

$$F_c\left(\frac{7}{2}\right) = 1/2$$

Alors, $P\left\{a(\omega) \geq \frac{1}{2}, b(\omega) \geq \frac{5}{2}, c(\omega) \geq \frac{7}{2}\right\} = \frac{1}{8}$.

Donc la probabilité de réalisation de la solution optimale trouvée après résolution de programme déterministe résultant, est de 12.5%, elle est donc très faible, et n'est donc que très peu fiable, ce qui montre clairement que ces méthodes-là ne sont pas adaptés à la résolution de ce genre de problèmes.

Pour y remédier, on trouve principalement deux méthodes de résolution pour ce type de problèmes.*[14]*

4-5-2.1. Chance Constrained Programming

Cette méthode consiste à transformer les contraintes stochastiques du programme (Ps) en des contraintes déterministes équivalentes en considérant la probabilité de leurs réalisations, simultanément ou séparément, au moins égale à un seuil ou à des seuils choisi(s) par le décideur, en d'autres mots, cette méthode accepte la violation des contraintes, jusqu'à un certain seuil choisi par le décideur.

Puisque cette méthode ce concentre sur les contraintes, nous allons considérer que l'objectif est déterministe, comme suit :

$$(Ps)\begin{cases} \max c'x \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i = 1 \ldots m \\ x_j \geq 0, j = 1 \ldots n \end{cases}$$

Avec $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$ pour $i = 1 \ldots m$ et $j = 1 \ldots n$ sont des variables aléatoires de distribution connue sur l'espace de probabilité (Ω, F, P), et les $x_j \geq 0, j = 1 \ldots n$ sont des nombres réels positifs.

Il y a principalement deux modèles pour cette méthode :

1. **Model avec seuil unique**

   Ce model consiste à remplacer l'ensemble des contraintes par la probabilité jointe de leurs réalisations simultanées au moins égale à un seuil α préalablement choisi par le décideur.

$$Ps)\begin{cases} \max c'x \\ P\{\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i = 1 \ldots m\} \geq \alpha \\ x_j \geq 0, j = 1 \ldots n \end{cases}$$

2. **Model avec seuils multiples**

   Ce model consiste à remplacer chaque contrainte par la probabilité de sa réalisation au moins égale à un certain seuil α_i $i = 1 \ldots m$, préalablement choisi par le décideur.

$$(Ps)\begin{cases} \max c'x \\ P\{\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\} \geq \alpha_i, i = 1 \ldots m \\ x_j \geq 0, j = 1 \ldots n \end{cases}$$

Cette méthode est la plus avantageuse, car elle permet au décideur de mettre à un seuil à chaque contrainte individuellement, et ne lie pas les réalisations des variables aléatoires.

Soient :

$$X(\alpha) = \{x \geq 0/P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i = 1 \dots m) \geq \alpha\}$$

$$X_i(\alpha_i) = \{x \geq 0/P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i\}$$

Les ensembles de solutions admissibles dans respectivement les deux modèles, et la question qui se pose dans ce cas, c'est est ce que ces ensembles la sont convexes ? Citons donc les conditions de convexité :

1. Les variables aléatoires des contraintes sont de distribution de probabilité discrète.
   Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, et la distribution de probabilité discrète et finie $p(\omega_k) = p_\omega, k = 1,2, \dots, r$ et $\sum_{k=1}^{k=r} p_k = 1$
   Alors :

   - pour $\alpha > 1 - \min_{k\in(1,2,\dots,r)} p_k$ l'ensemble $X(\alpha)$ est convexe.
   - pour $\alpha_i > 1 - \min_{k\in(1,2,\dots,r)} p_k$ l'ensemble $X_i(\alpha_i)$ est convexe.

2. Les variables aléatoires des contraintes sont de distribution de probabilité normale.

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$ les composantes de la matrice $A(m * n)$ et du vecteur $b(m * 1)$ respectivement.
Si a_{i1} , a_{i2} , ... , a_{in} , b_i sont $(n + 1)$ variables aléatoires normales d'espérances mathématiques $\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{in}$, λ_i et de variances $\sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, \dots, \sigma_{in}^2$, δ_i^2 respectivement,
Alors :
Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, l'ensemble $X(\alpha)$ est convexe.
Pour $\alpha_i > \frac{1}{2}$, l'ensemble $X_i(\alpha_i)$ est convexe.

Preuve :

Montrons que $X_i(\alpha_i)$ est convexe.

Posons $y_i(x,\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)$, $i = 1 \dots m$ c'est une combinaison linéaire de $n+1$ variables aléatoires normales. Donc $y_i(x,\omega)$ est P une variable aléatoire normale de moyenne $E(y_i(x,\omega)) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}x_j - \lambda_i$ et de variance $V\,(y_i(x,\omega)) = z^t S_i z$ où $z = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)^t$ *et* $S_i((n+1)(n+1))$ est la matrice de covariance suivante :

$$S_i = \begin{pmatrix} V(a_{i1}) & \cdots & Cov(a_{i1}, b_i) \\ Cov(a_{i2}, a_{i2}) & & Cov(a_{i2}, b_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(a_{in}, a_{i1}) & \cdots & Cov(a_{in}, b_i) \\ Cov(b_i, a_{i1}) & & V(b_i) \end{pmatrix}$$

Ou V et Cov représentent respectivement la variance et la covariance.

Posons :

$$m_{y_i}(x) = E(y_i(x,\omega)) \text{ et } \sigma_{y_i}(x) = \sqrt{V\,(y_i(x,\omega))}$$

Nous avons :

$$y_i(x,\omega) \backsim N(m_{y_i}(x), {\sigma_{y_i}}^2(x))$$

En appliquant le théorème central limite, on aura :

$$\frac{y_i(x,\omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \backsim N(0,1)$$

$$P(\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) = P(\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega) \leq 0)$$

$$= P(\omega / \frac{y_i(x,\omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \leq \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}) = \phi(\frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}) \geq \alpha_i$$

Tel que ϕ est la fonction de répartition de $\frac{y_i(x,\omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \backsim N(0,1)$

$$\frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \geq \phi^{-1}(\alpha_i) \Leftrightarrow \phi^{-1}(\alpha_i).\sigma_{y_i}(x) + m_{y_i}(x) \geq 0$$

Donc

$$X_i(\alpha_i) = \{x \geq 0/P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i\} = \{x \geq 0/P(\omega/\phi^{-1}(\alpha_i).\sigma_{y_i}(x) + m_{y_i}(x) \geq 0\}$$

Puisque $\sigma_{y_i}(x)$ *et* $m_{y_i}(x)$ sont convexes, donc la convexité de $X_i(\alpha_i)$ depend de si $\phi^{-1}(\alpha_i) \geq 0 \Rightarrow \alpha_i \geq \phi(0) = 1/2$ (de la table de la loi normale centrée et réduite)

De là, on conclut donc que $X_i(\alpha_i)$ est convexe pour $\alpha_i \geq 1/2$. Cqfd

3. Cas ou les a_{ij} déterministes, et les b_i aléatoires

$$\begin{cases} X_i(\alpha_i) \text{ est toujours convexe} \\ X_i(\alpha_i) \text{ est convexe si la distribution des composantes de } b_i \text{ est quasi} - \text{concave}^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i(\omega) \leq 0) \geq \alpha_i &= P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \\ &= 1 - P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i(\omega)) \geq \alpha_i = P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i(\omega)) \\ &\leq 1 - \alpha_i = F_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) \leq 1 - \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq F^{-1}{}_i(1 - \alpha_i) \end{aligned}$$

Tel que F est la fonction de répartition de la variable aléatoire $b_i(\omega)$, donc :

$$X_i(\alpha_i) = \{x \geq 0/P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i\} = \{x \geq 0/P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq F^{-1}{}_i(1 - \alpha_i))\}$$

4-5-2.2. Programmation avec recours

Cette méthode appelée aussi méthode a deux étapes, avec l'ajout d'un second niveau de décision après transformation du problème initial dit rigide ou stricte, en un problème permettant d'avoir plus de largesses dans le respect des contraintes, mais avec néanmoins sa répercussion sur la fonction objectif.

Partons donc du problème originel,

$$(Ps)\begin{cases} \min c'(\omega)x \\ \\ A(\omega)x \quad \leq b \quad (\omega) \\ \quad x \quad \geq 0, \end{cases}$$

Soit y une décision corrective appelée recours, prise pour compenser une violation $q(\omega)$, un vecteur de pénalisation du recours, et $q(\omega)y$ est la pénalité introduite pour compenser ces violations. Et soit le problème de second niveau suivant :

$$Q(x,\omega) = min\{y/q^t(\omega)y/\, W(\omega)y = b(\omega) - A(\omega)x, x \geq 0, y \geq 0\}$$

On aura donc le problème déterministe avec recours suivant :

$$P_d\{\min E(c'(\omega)x + Q(x,\omega))\}$$

Avec $\omega \in \Omega, x \in R^n/\, Q(x,\omega) \leq +\infty$, ce qui veut dire qu'il existe au moins un évènement réalisable, autrement dit, que le recours est possible.

Et soit P_ω une distribution de probabilité :

$$\bar{c} = E_\omega\big(c(\omega)\big) = \int_\Omega \; c(\omega)dP_\omega \text{Et } Q(x) = \int_\Omega \; Q(x,\omega)dP_\omega$$

Finalement, le problème avec recours s'écrira comme suit :

$$P_d\{\min \bar{c}x + Q(x)\}\; avec\; x \in \; R^n/\, x_j \geq 0\;, j = 1 \ldots n$$

Et dans le cas d'une distribution de probabilité P_ω discrète et finie,

$$P_\omega(\omega_k) = p_k, k = 1 \ldots r\; et\; \textstyle\sum_{k=1}^r p_k = 1\,, on\; aura\; Q(x) = \sum_{i=1}^r p_i q(\omega_i) y_i$$

alors, le programme s'écrira :

$$(Pd)\begin{cases} \min \bar{c}x + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} p_i q(\omega_i) y_i \\ \\ A(\omega_i)x \quad + W(\omega_i)y_i = b \quad (\omega_i), i = 1 \ldots r \\ \quad x \quad , y_i \geq 0, \end{cases}$$

Il y'a aussi une autre sorte de recours, comme suit :

Recours simple :

Dans le cas ou W est non stochastique, elle est appelée dans ce cas matrice de recours simple, et s'écrit $W = (I, -I)\ ou\ I(m * m)$ est la matrice identité de rang m, donc $W(2m * m)$.

Les violations des contraintes originales qui apparaissent après le choix de la décision $x \in B$ et la réalisation de $A(\omega)$ et $b(\omega)$ valent $q(\omega)$.

Il est préférable de représenter le deuxième étage du programme sous la forme suivante :

$$\begin{cases} Q(x,\omega) = min\{q^+(\omega)y^+ + q^-(\omega)y^-\} \\ y^+ - y^- = b(\omega) - A(\omega)x \\ y^+ \geq 0\ , y^- \geq 0 \\ y^+, y^- \in R^m \end{cases}$$

Le vecteur de décision $y = (y^+, y^-)$, ou y^+est le vecteur des variables d'écart par défaut, et , y^-les variables d'écart par excès.

Et le vecteur de pénalisation $q(\omega) = (q^+(\omega), q^-(\omega))$, avec :

$$q^+(\omega)[b(\omega) - A(\omega)] si\ b(\omega) - A(\omega) \geq 0$$

$$q^-(\omega)[A(\omega) - b(\omega)] si\ b(\omega) - A(\omega) \leq 0$$

$Q(x,\omega)$ est fini, si et seulement si $q^+(\omega) + q^-(\omega) \geq 0$ est un évènement certain.

4-6- Programmation Linéaire Stochastique Multi-objectifs

Soit le programme linéaire stochastique multi-objectifs suivant :

$$(Pmos)\begin{cases} \max(c_1(\omega)x, c_2(\omega)x, \dots, c_k(\omega)x) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i = 1 \dots m \\ x_j \geq 0, j = 1 \dots n \end{cases}$$

Avec $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega) \dots c_{rn}(\omega))$ où $c_{rj}(\omega), a_{ij}(\omega)\ et\ b_i(\omega)$ pour $i = 1 \dots m, r = 1 \dots k\ et\ j = 1 \dots n$

sont des variables aléatoires de distribution connue sur l'espace de probabilité (Ω, F, P), et les $x_j \geq 0, j = 1 \dots n$ sont des nombres réels positifs.

Pour la résolution de ce type de problèmes, on recensera principalement, deux méthodes :

4-6-1. Programme du risque minimal multiple

On considère le problème stochastique multi-objectifs, avec des contraintes déterministes suivant :

$$(Pmos)\begin{cases}\max(c_1'(\omega)x, c_2'(\omega)x, \dots, c_k'(\omega)x) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1 \dots m \\ x_j \geq 0, j = 1 \dots n\end{cases}$$

Avec $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega) \dots c_{rn}(\omega))$ ou $c_{rj}(\omega)$, $r = 1 \dots k$ et un vecteur de variables aléatoire de distribution connue sur l'espace de probabilité (Ω, F, P) , et $a_{ij}(\omega)\ et\ b_i(\omega)$ pour $i = 1 \dots m\ et\ j = 1 \dots n$ sont des variables déterministes et les $x_j \geq 0, j = 1 \dots n$ sont des nombres réels positifs.

On Pose : $D = \left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1 \dots m\ /\ x_j \geq 0, j = 1 \dots n\right\}$

Cette méthode consiste en la maximisation de la probabilité individuelle des k objectifs qu'ils soient au moins égales à des seuils préalablement choisis par le décideur μ_k, il en résulte le programme multi-objectifs déterministe suivant :

$$(Pmod)\begin{cases}\max(P(\omega/c_1'(\omega)x \geq \mu_1), P(\omega/c_2'(\omega)x \geq \mu_2), \dots, P(\omega/c_k'(\omega)x \geq \mu_k)) \\ x \in D\end{cases}$$

Ce problème est appelé, problème a risque minimal multiple a niveaux μ_k.

En supposant que les vecteurs aléatoires sont gaussiens, d'espérance $\bar{c}_r$ et de matrice de covariance V_r, les solutions de bons compromis peuvent être obtenues en considérant le problème de deux manières :

$$\text{Comme ceci } (Pmod)' \dots \begin{cases}\max \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\omega/c_i'(\omega)x \geq \mu_i)) \\ x \in D\end{cases}$$

Ou en maximisant la probabilité jointe des objectifs :

$$(Pmod)'' \ldots \begin{cases} \max P(\omega / {c_1}'(\omega)x \geq \mu_1, {c_2}'(\omega)x \geq \mu_2), \ldots, {c_k}'(\omega)x \geq \mu_k) \\ \\ x \quad \in D \end{cases}$$

Pour la résolution du $(Pmod)$, Stancu-Minasian a proposé la méthode suivante :

$$\begin{cases} \max P(\omega / {c_1}'(\omega)x \geq \mu_1) \\ \\ x \quad \in D \end{cases}$$

Soit p_1 la valeur optimale du problème précèdent, résolvons le problème suivant :

$$\begin{cases} \max P(\omega / {c_2}'(\omega)x \geq \mu_2) \\ \\ P(\omega / {c_1}'(\omega)x \geq \mu_1) \geq p_1 - \varepsilon_1 \\ x \quad \in D \end{cases}$$

Ou ε_1 est une infime quantité positive donnée, et $P(\omega / c_1(\omega)x \geq \mu_1) \geq p_1 - \varepsilon_1$ a pour équivalent déterministe $\bar{c}_1 x + \Phi^{-1}(1 - p_1 + \varepsilon_1)\sqrt{x^t V_1 x} \geq \mu_1 \ldots$ et ainsi de suite…

$$\begin{cases} \max P(\omega / {c_k}'(\omega)x \geq \mu_k) \\ P(\omega / {c_1}'(\omega)x \geq \mu_1) \geq p_1 - \varepsilon_1 \\ \vdots \\ P(\omega / {c_{k-1}}'(\omega)x \geq \mu_{k-1}) \geq p_{k-1} - \varepsilon_{k-1} \\ x \quad \in D \end{cases}$$

Qui a pour équivalent déterministe le programme suivant :

$$\begin{cases} \max \dfrac{\bar{c}_k x - \mu_k}{x^t V_k x} \\ \bar{c}_1 x + \Phi^{-1}(1 - p_1 + \varepsilon_1)\sqrt{x^t V_1 x} \geq \mu_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_{k-1} x + \Phi^{-1}(1 - p_{k-1} + \varepsilon_{k-1})\sqrt{x^t V_{k-1} x} \geq \mu_{k-1} \\ x \quad \in D \end{cases}$$

4-6-2. Stochastic Goal Programming

Dans le cas où les variables aléatoires sont normales et dont l'espérance mathématique et la variance sont données. On établit une équivalence entre le programme stochastique et un programme quadratique déterministe dont le but est de maximiser la probabilité que la fonction objectif appartienne à une région bien déterminée.*[12]*
Cela consiste a rajouté un vecteur aléatoire $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ qui suit une loi normale d'espérance 0 et de matrice de covariance V, représentant un facteur de perturbation donné.
Ceci revient donc à maximiser un certain

$$z_k = c_{k1}(\omega) + c_{k2}(\omega) + \cdots + c_{kn}(\omega) + \mu_k(\omega) = c'_k(\omega) + \mu_k(\omega)\ , k = 1 \dots r.$$

Soient $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)$ *et* $\bar{z}_i$ la valeur que le décideur souhaite qu'elle soit atteinte par z_i L'egalité $z_i = \bar{z}_i$ ne peut avoir lieu à cause des perturbations dues au facteur aléatoire μ.

Alors un domaine Y^* tel que $\bar{z} \in Y^*$ est choisi au départ, ensuite le problème revient à déterminer le vecteur x qui maximise la probabilité que $z \in Y^*$ d'où le modèle suivant :

$$(P)\begin{cases} \max P(z(x) \in Y^*) \\ \\ \quad\quad x \quad \in D \end{cases}$$

Tel que $Y^* = \{y = (y_1, y_2, \dots y_r,)/(y - \bar{z}^t)V^{-1}(y - \bar{z}) \le e^2\}$,
e convenablement choisi.

5. Programmation bi-niveaux stochastique

5-1. Introduction

La programmation bi-niveaux stochastique, est donc une variante de la programmation bi-niveaux qu'on a adapté a nos besoins, en remplaçant quelques variables en variables aléatoires, pour mieux représenter leur nature stochastique, pour avoir un résultat plus proche de la réalité, en utilisant leur caractéristiques dans la méthode de résolution.

Et pour ce, nous avons choisis d'utiliser la méthode avec recours, pour illustrer tout cela.*[14]*

5-2. Méthode avec recours

On a considéré que toutes les variables doivent être fixées avant que les paramètres aléatoires soient révélés, dans certains cas seules certaines variables (dites de premier niveau) sont soumises à cette règle, les autres variables (de deuxième niveau ou de **recours**) permettent d'ajuster la solution une fois les paramètres aléatoires révélés, ces variables de recours permettent en général d'assurer la réalisabilité des solutions de premier niveau. *[14]*

Soient :

- **x** vecteur de variables de décision de premier niveau
- **y** vecteur de variables de décision de second niveau (recours)
- **c** vecteur coût des variables de premier niveau
- **c̃** vecteur coût des variables de second niveau (stochastique)

A, b sont respectivement, matrice des contraintes et second membre du premier niveau, $\breve{T}, \widetilde{W}, \tilde{d}$ matrices des contraintes et second membre du deuxième niveau (stochastiques).

Premier niveau

$$min\ \boldsymbol{c'x}\ +\ E[h(x, \tilde{c}, \widetilde{\boldsymbol{T}}, \widetilde{\boldsymbol{W}}, \widetilde{\boldsymbol{d}}\,)]$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{Ax}\ \geq\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}\ \geq\ 0 \end{cases}$$

Deuxième niveau

$$h\left(x, \tilde{c}, \widetilde{\boldsymbol{T}}, \widetilde{\boldsymbol{W}}, \widetilde{\boldsymbol{d}}\,\right) =\ min\ \tilde{\mathbf{c}}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{y}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} + \widetilde{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{y} \geq \widetilde{\boldsymbol{d}} \\ \quad \boldsymbol{y}\ \geq\ 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'une généralisation de l'optimisation stochastique à deux niveaux. Les paramètres aléatoires sont progressivement révélés dans une série d'étapes (niveau).

1. A chaque étape les variables du niveau e sont fixées (action)
2. Les paramètres aléatoires du niveau e sont révélés (observation)
3. Les variables de recours du niveau e sont fixés (réaction)

Le processus répète jusqu'au niveau final. L'objectif est la minimisation de l'espérance du coût total.

5-3. Exemple

Soient Q la quantité de journaux à commander. v le coût d'achat d'un exemplaire. p le prix de vente d'un exemplaire. ***g*** la remise sur invendu d'un exemplaire. ***B*** le coût de perte de clientèle. La demande $\tilde{\boldsymbol{d}} \sim \boldsymbol{U}[\underline{\boldsymbol{d}}, \overline{\boldsymbol{d}}]$.

Problème d'optimisation stochastique de minimisation du coût

$$\min_{Q>0} E[C(Q,\tilde{d})] \quad où \quad C(Q,\tilde{d}) = \begin{cases} vQ - p\tilde{d} - g(Q-\tilde{d}) \; si \; \tilde{d} \le 0 \\ vQ - pQ - B(\tilde{d} - Q) \; si \; \tilde{d} \ge 0 \end{cases}$$

On vend $min\ (\tilde{d}, Q)$ journaux. On paye $B\ max(\tilde{d} - Q, 0)$en coût de rupture de stock. On récupère g max (Q $- \tilde{d}$, 0) en invendus. Le coût peut donc s'écrire :

$$C(Q,\tilde{d}) = vQ - pmin(\tilde{d},Q) + Bmax(\tilde{d} - Q, 0) - gmax(Q - \tilde{d}, 0)$$

On remarque que $min(\tilde{d}, Q) = \tilde{d} - max(\tilde{d} - Q, 0)$, on obtient:

$$C(Q,\tilde{d}) = vQ - p\tilde{d} - gmax(Q - \tilde{d}, 0) + (B+p)max(\tilde{d} - Q, 0)$$

Si $f(x)$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X, on rappelle que l'espérance d'une fonction $\emptyset(x)$ de cette variable aléatoire est :

$$E(\emptyset(X)) = \int_0^\infty \emptyset(x)f(x)dx.$$

On a donc

$$E(C(Q,\tilde{d})) = \int_0^\infty C(Q,x)f(x)dx = \int_0^Q C(Q,x)f(x)dx + \int_Q^\infty C(Q,x)f(x)dx$$

$$E[C(Q,\tilde{d})] = \mathrm{vQ} - \mathrm{pE}[\tilde{\mathrm{d}}] - \mathrm{g}\int_0^Q (Q-x)f(x)dx + (B+p)\int_Q^\infty (x-Q)f(x)dx$$

$E[C(Q,\tilde{d})]$ est une fonction convexe continue quel que soit la valeur de la variable aléatoire, son minimum est atteint lorsque sa dérivée est nulle.

L'inégalité de Leibniz nous dit que :

$$\frac{d}{dx}\int_{y^0}^{y^1} f(x,y)dy = \int_{y^0}^{y^1} \frac{\delta}{\delta x} f(x,y)dy$$

$$E[C(Q,\tilde{d})] = vQ - pE[\tilde{d}] - g\int_0^Q (Q-x)f(x)dx + (B+p)\int_Q^\infty (x-Q)f(x)dx$$

En dérivant par rapport à Q (en appliquant l'inégalité de Leibniz) et en annulant au point Q^* on obtient

$$v - g\int_0^{Q^*} f(x)dx - (B+p)\int_{Q^*}^\infty f(x)dx = 0$$

Et en remarquant que $\int_0^{Q^*} f(x)dx = 0$ est la fonction de répartition de $F(Q^*)$ ainsi que $\int_{Q^*}^\infty f(x)dx = 1 - F(Q^*)$, on obtient :

$$F(Q^*) = \frac{B+p-v}{B+p-g}$$

Si $\tilde{d} \sim U[\underline{d}, \overline{d}]$, on a $F(Q^*) = \frac{Q^*-\underline{d}}{\tilde{d}-\underline{d}}$ et finalement

$$Q^* = \underline{d} + (\overline{d} - \underline{d})\frac{B+p-v}{B+p-g} = \frac{(v-g)\underline{d} + (B+p-v)\overline{d}}{B+p-g}$$

6. Modélisation d'un problème de tarification stochastique bi-niveau linéaire

6.1. Optimisation de la tarification de l'ATC

Le fournisseur des services ATC (Air Traffic Control) est un acteur essentiel dans les réseaux de l'aviation civile. Il joue un rôle central dans l'opération d'un avion, distribution de lignes aériennes, le pilotage et les aéroports. L'opérateur ATC a besoins de plusieurs infrastructures, des ressources humains et matériels qui ont un coût significatif.
La situation se complique par la nature spécifique du service ATC. Le principal objectif est en premier lieu est d'assurer un très haut niveau de sécurité dans le trafic aérien. Alors la question de probabilité peut être élevée. Cela correspond au dilemme général entre les opérateurs public et privé, lorsque la sécurité est en jeu.

La nature (public ou privé) du fournisseur de service ATC est critique car plusieurs conditions qui leurs sont liées ont l'aspect économique. Dans cette étude deux cas sont traités (public et privé), en des points différents.

Toutefois, considérons le problème de sécurité est résolu, la question de consolider le service ATC est plus simple à débattre. L'ICAO (Organisation Internationale de l'Aviation Civile) recommande de fixer la rétribution des usagers, lesquels signifie seulement les usagers payant pour le service de l'ATC (et non pas la contribution direct au budget général de l'état). Toutefois chaque état possède une réponse à ce sujet.

Autre issue principale pour le fournisseur de service ATC est aussi une partie du problème général : le réseau aérien et de plus en plus engorgé, la solution est commune à tous les états. L'engorgement et l'harmonisation sont deux issues qui peuvent influencer la tarification du service de l'ATC.

Ici, on considère le cas du péage de l'ATC sur chaque billet vendu par la compagnie aérien. Alors, plusieurs questions se posent autour comment définir le prix le plus efficace qui soit discutable. Le prix est pris dans le compte du coût de la sécurité, nombre de vols, la durée du vol et des paramètres complexes lesquels sont définis à mesure de la complexité du trafic ou le type de vol.

Cette étude vise à optimiser la tarification de l'ATC afin de trouver un équilibre général dans le secteur. La programmation bi-niveaux est considérée parce que le péage de l'ATC n'est pas payé par le dernier usager. C'est pourquoi Le second niveau, le niveau de la ligne aérien est étudié à l'intérieur du problème d'optimisation de l'ATC.

On veut considérer ici le cas simple afin de simplifier la tarification de l'ATC, lequel nous donne quelque premiers résultats. Une première interprétation peut être alors approfondie sur ce cas afin de comprendre les différentes influences sur les enjeux.

6.1.1. Pratique actuelle de tarification pour ATC / ATM

Le financement des activités des services de navigation aérienne (prestataires de services ATC / ATS (Air Traffic Secteur)) en général se fait en faisant payer aux compagnies aériennes leur espace aérien.

L'OACI publie des lignes directrices générales périodiquement mises à jour sur les prix,*[17]* Les redevances de navigation aérienne représentent une part importante du coût d'un vol pour une compagnie aérienne,*[15]* qui doit augmenter le billet prix pour les couvrir. Ces charges représentent souvent entre 10% et 20% du coût d'un vol,*[16]* La Convention de Chicago du 1947 qui a fondé l'OACI, a donné la base de la tarification actuelle systèmes pour services de navigation aérienne.
Une formule détaillée pour le calcul des redevances de trafic aérien n'était pas proposé à l'époque, mais il a été recommandé aux États d'établir une méthode de calcul le montant des frais pour couvrir les frais d'utilisations personnelles et équipement (ordinateurs, radars et communications systèmes) pour assurer la sécurité du trafic aérien. Différents frais sont collectés aujourd'hui pour la navigation aérienne (route, approche et aérodrome
frais) et d'autres services aéroportuaires.
Dans le cas de l'Europe, dans le contexte du ciel unique européen opération,*[17]* le bureau central des redevances en route (CRCO) de Eurocontrol est en charge du calcul et de la perception des redevances payés par les utilisateurs de l'espace aérien et de les réaffecter aux pays membres services de trafic. La formule empirique suivante a été utilisée pour calculer les charges R_i reçues par chaque état à partir d'un vol:

$$R_i = T_i \times \frac{D_i}{100} \times \sqrt{\frac{M}{50}} \quad , \quad R = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (1)$$

R charge totale où n est le nombre d'états considérés, T_i est le taux unitaire adopté par l'état i, D_i est la distance parcourue en kilomètres par ce vol dans l'espace aérien de l'état i, et M est le décollage maximal poids en tonnes de l'aéronef utilisé dans ce vol. Ce taux unitaire varie dans les pays européens de 22 (Irlande) à 90 (Belgique) Euros.

Aux États-Unis, le budget fédéral couvre tous les coûts d'exploitation et d'investissement liés à l'ATC/ATM (Air Traffic Managment) puisqu'il n'y a aujourd'hui aucun frais ou redevances effectifs pour les utilisateurs de l'espace aérien américain. L'espace aérien et ses ressources sont gratuits pour tout avion de toute taille conforme aux règles de l'administration fédérale. Cependant, les billets d'avion comportent un ensemble de taxes liées à cette utilisation et qui sont collectées par les compagnies aériennes. L'exception concerne les vols qui transitent par l'espace aérien contrôlé par les États-Unis sans partir ni atterrir aux États-Unis.

Dans ce cas, les redevances de survol tiennent compte de taux différents pour les composantes en route et océanique d'un vol. Différents taux exprimés par 100 milles marins mesurés le long de la distance du grand cercle entre les points d'entrée et de sortie dans l'espace aérien contrôlé par les États-Unis sont appliqués. Les redevances sont calculées avec la formule qui ne tient pas compte de la masse ou de la taille de l'aéronef:

$$R_{ij} = r_E * DE_{ij} / 100 + r_O * OD_{ij} / 100 \qquad (2)$$

où R_{ij} est le montant total facturé aux aéronefs volant entre le point d'entrée i et le point de sortie j, DO_{ij} est la distance totale parcourue à travers chaque segment d'espace aérien en route entre le point d'entrée i et le point de sortie j, DO_{ij} est la distance totale parcourue à travers chacun segment d'espace aérien océanique entre le point d'entrée i et le point de sortie j, r_e *et* r_0 sont les tarifs en route et océanique, respectivement autour de 60 et 25 US $. La FAA(Americain Air Federation) examine ces tarifs au moins une fois tous les deux ans et les ajuste pour refléter le coût et le volume actuels des services fournis.

Cas Simple : hypothèses

Ici, on considère le cas d'un système élémentaire de transport aérien composé d'une seule paire d'aéroports relié par une simple ligne aérien.
Il y a un unique opérateur ATC et un unique opérateur de ligne aérien entre ces deux aéroports.

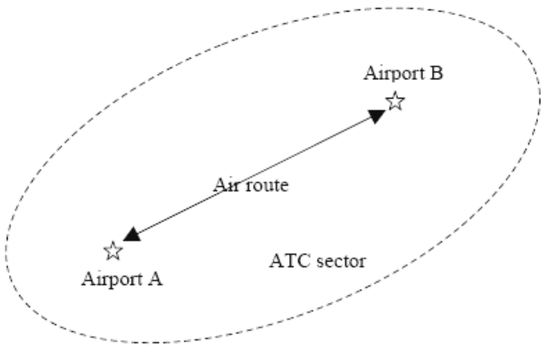


Figure 10 Le cas de l'ATC élémentaire

Hypothèses :

- une simple paire d'aéroport
- une unique ligne aérienne
- un unique opérateur ATC
- une unique route aérienne
- un secteur ATC unique

Tarif apparent :

Pour la simplicité on suppose qu'il y a une unique classe de voyageurs et qu'il y a un unique prix apparent adopté pour une ligne aérienne donnée.
Le paramètre λ représente un indice de taxe appliqué par l'état pour chaque billet d'avion vendu.

$$\tilde{\pi} = \pi(1+\lambda) = \pi + \lambda\pi$$

$$\begin{cases} \bullet\ \pi \quad \textit{c'est la partie qui revient à la compagnie aérienne} \\ \bullet\ \lambda\pi \quad \textit{la partie que reçoivent les autorités public comme Taxe} \end{cases}$$

Demande Potentielle

D_0 demande potentielle absolue

ρ est un paramètre qui caractérise le changement des prix du marché.

$$\phi = D_0 - \rho\pi$$

Remarque :

D'autres modèles peuvent être adaptés aussi. Tel que le modèle exponentiel avec "$\phi = D_0 e^{-\rho\pi}$" ou d'autre modèle tel que "$\phi = D(\tilde{\pi})$" avec une hypothèse adéquate : $\partial D / \partial\tilde{\pi} \leq 0$ *et* $\partial^2 D / \partial\tilde{\pi}^2 \geq 0$.

ATC

Le fournisseur de services ATC, pour son payement on lui assigne une proportion $\alpha(\alpha \in [0,1])$ de la taxe λ au dessus.

Capacité de transport

La capacité de transport de la ligne aérienne est lié à une fréquence maximale qu'on peut atteindre de service f_{max}, elle est relié au nombre d'avions dont dispose celle-ci. Ici pour des simplifications pour une période de temps donne f peut être le plus grand nombre d'avions, f est pris comme un réel.

Coûts des opérations d'une ligne aérienne

Lorsque la fréquence de service f est adoptée, les coûts des opérations sont supposés donnés par :

C_{ALN}^{F} qui fixe qui relate avec la dimension de l'avion et l'équipage de la ligne aérienne avec les caractéristiques de l'opérateur du réseau.

(c) est un paramètre positif(coût variable avec la fréquence). Il relate avec le prix du fioul, le coût de l'équipage et la longueur du vol.

$$(c + v)f + C_{ALN}^{F}$$

(v) est le tarif appliqué par l'ATC sur un vol, Incluant le contrôle de la route et le contrôle de l'aéroport.

Remarque :

On ne fait pas distinction entre les taxes de l'aéroport et les charge d'une route.

Profit d'une ligne aérienne

Solde totale des billets

$$P_{ALN} = \pi\phi - ((c + v) + C_{ALN}^{F}) \qquad (4.1)$$

Coût de l'opération

Opérateur ATC public ou privé

Dans cette étude, deux cas différents sont analysés : le cas fournisseur de services de l'ATC public et le cas du fournisseur de services privé. Leurs objectifs sont substantiellement différents.
L'opérateur de l'ATC public est supposé vise à maximiser la demande ϕ .
L'opérateur privé son but est de maximiser son bénéfice.

Dans la modélisation du problème un nombre de contraintes est définit dans la suite, en premier le modèle est complété en s'assurant qu'il soit possible de l'adapté à la réalité.

6.1.2. case du fournisseur de service de l'ATC est public

On suppose que l'objectif final du fournisseur de services ATC est de maximiser la demande en garantissant un rendement économique minimum, R_{ATC} et un rendement minimum R_{ALN} pour la ligne aérienne.

σ est un paramètre positif (coût variable avec la fréquence). Il relate principalement la longueur du vol.

C_{ATC} est le coût fixe appliqué relate avec les caractéristiques du contrôleur de l'espace aérien avec la dimension du personnel l'ATC.

$$\sigma f + C_{ATC}^{F}$$

Dans cette étude on considère qu'il n'y a pas d'effet de saturation avec les conséquences dû à la fonction coût du fournisseur de services de l'ATC et de la ligne aérienne.

Profit de fournisseur de services de l'ATC

Cout de la ligne aérienne

Cout de l'opération

$$P_{ATC} = \nu f + \alpha\lambda\pi\phi - (\sigma f + C_{ATC}^{F}) \qquad (4.2)$$

Remboursement des autorités public

6.1.3. la programmation bi-niveaux du fournisseur de services ATC Public

Du côté du fournisseur de services de l'ATC, le problème est de maximiser la demande par adaptation de son tarif V à la ligne aérienne. Il est supposé que la ligne aérienne essaye de maximiser son profit pris de la fonction coût et du tarif de l'ATC.

$$\max_{\nu \geq 0} \phi$$

$$sous : \begin{cases} \nu f + \alpha\lambda\pi\phi - (\sigma f + C_{ATC}^F) \geq R_{ATC} & (3) \\ \pi\phi - ((c+\nu) f + C_{ALN}^F \geq R_{ALN} & (4) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\rightarrow \quad \max_{\pi, f} \pi\phi - ((c+\nu) f + C_{ALN}^F)$$

$$sous : \begin{cases} \phi \leq D_0 - \rho\pi & (3') \\ 0 \leq f \leq f_{\max} & (4') \end{cases}$$

6.1.4. Cas où on a Plusieurs Aéroports Intérieur et Extérieur (fournisseur public)

Dans ce cas, le problème de l'optimisation de la tarification des services ATC/ATM peut se formuler de la façon suivante :

$$\max_{v_u \geq 0} \sum_{u \in U} \phi_u + \sum_{e \in E} \phi_e \qquad (5)$$

avec :

$$\sum_{u \in U} ((v_u - \sigma_u) f_u + \alpha_u \lambda_u \pi_u \phi_u) + \sum_{e \in E} ((w_e - \sigma_e) f_u + \alpha_e \lambda_e \pi_e \phi_e) - C_{ATC}^F \leq R_{ATC} \qquad (6)$$

$$\sum_{u \in U} (\pi_u^{\text{int}} P.\phi_u^{\text{int}} - (c_u + v_u) P. f_u^{\text{int}}) - C_{ALN}^F \leq R_{ALN} \qquad (7)$$

où : ϕ_u est la demande effectivement satisfaite pour la liaison locale u et ϕ_e est la demande effectivement satisfaite sur la liaison internationale *e*, f_u^{int} est le flux d'aéronefs sur la liaison locale *u* et f_e^{ext} est le flux d'aéronefs sur la liaison internationale *e*, v_u est le tarif ATC/ATM appliqué sur une liaison locale *u* et w_e est le tarif ATC/ATM appliqué sur la liaison internationale *e*, C_{ATC}^F est le coût fixe associé aux services ATC/ATM dans la région considérée, σ_u^{int} est le coût moyen variable associé aux services ATC/ATM sur la liaison locale *u*, σ_e^{ext} est le coût moyen variable associé aux services ATC/ATM sur la liaison internationale *e*, λ_u^{int} est la taxe appliquée aux usagers du transport aérien sur la liaison locale *u*, λ_e^{ext} est la taxe appliquée aux usagers du transport aérien sur la liaison internationale *e*, α est un taux de subvention reversée au prestataire de services ATC/ATM, π_u^{int} est le tarif passager moyen sur la liaison locale *u*, C_{ALN}^F est le coût fixe des compagnies aériennes, c_u est le coût moyen variable des compagnies aériennes, R_{ATC} est le résultat économique minimum escompté pour l'opérateur ATC/ATM (celui-ci pourra être pris même légèrement négatif dans le cas d'un opérateur public) et R_{ALN} est le résultat économique minimum escompté pour le secteur des compagnies aériennes (en général supposé positif).

Dans cette étude on ne considère pas de contraintes sur le résultat économique des compagnies aériennes internationales. Il est seulement supposé que les coûts ATC/ATM restent inférieurs à un certain pourcentage des recettes sur une liaison internationale :

$$w_e\, f_e^{ext} \leq \eta_e\, \phi_e^{ext} \pi_e^{ext} \quad avec\ \ 0 < \eta_e < 1 \ \ pour \quad e \in E \tag{8}$$

L'offre des compagnies aériennes (π_u et f_u, $u \in U$) qui maximise leur profit est solution du problème :

$$\phi \leq \ D_0^u - \rho \pi_u \ u \in U_i,\, i \in I \tag{9}$$

où U_i, $i \in I$ est l'ensemble des arcs opérés par des avions de capacité q_i, les ensembles U_i constituent une partition de U.
et sous la contrainte :

$$\max_{\pi_u,\, f_u} \ \sum_{u \in U} (\pi_u\, \phi_u - ((c_u + \nu_u)\, f_u) - C_{ALN}^F \tag{10}$$

La demande potentielle pour la liaison locale

$$0 \leq \sum_{u \in U_i} L_u\, f_u \leq (\sum_{u \in U} L_u)\ f_{\max}^i \qquad i \in I$$

elle est supposée être donnée par:

$$D_u(\pi) = D_0^u - \rho_{uu} \pi_u (1-\lambda) + \sum_{v \neq u} \rho_{uv} \pi_u (1-\lambda_v) \qquad u \in U \tag{11}$$

où les ρ_{uv} sont des paramètres positifs supposés connus, alors que ϕ_u représente la demande satisfaite.

La demande sur la liaison internationale e est supposée être donnée par (où ρ_e est un paramètre positif supposé connu):

$$D_e = D_0^e - \rho_e \pi_e (1+\lambda_e) \qquad e \in E \tag{13}$$

Ainsi, le problème global de maximisation de (1) sous les contraintes (2) et (3) sachant que $\pi_u^{\text{int}}, f_u \; u \in U_i, i \in I$ est solution du problème (5),(6),(7) et (8), constitue un problème d'optimisation bi niveaux où le leader est le fournisseur de service ATC/ATM et le suiveur est le secteur des compagnies aériennes. On a donc le schéma:

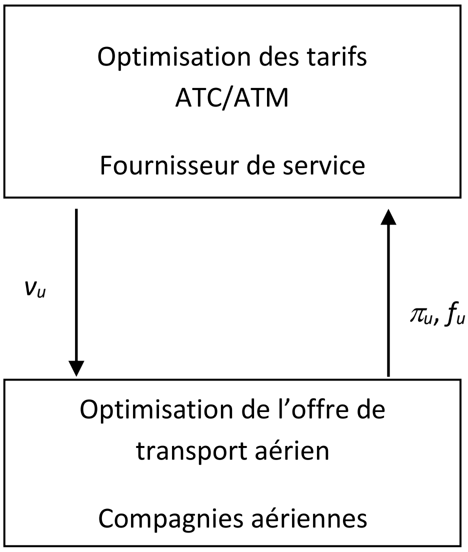


Figure 11 Structure bi niveaux de prise de décision

On aura le problème bi-niveaux à résoudre :

$$\max_{v_u \geq 0} \sum_{u \in U} \phi_u + \sum_{e \in E} \phi_e \qquad (1)$$

avec :

$$\sum\nolimits_{u \in U} ((v_u - \sigma_u) f_u + \alpha_u \lambda_u \pi_u \phi_u) + \sum\nolimits_{e \in E} ((w_e - \sigma_e) f_u + \alpha_e \lambda_e \pi_e \phi_e) - C_{ATC}^F \leq R_{ATC} \qquad (2)$$

$$\sum_{u \in U} (\pi_u^{\text{int}} P.\phi_u^{\text{int}} - (c_u + v_u) P.f_u^{\text{int}}) - C_{ALN}^F \leq R_{ALN} \qquad (3)$$

$$\max_{\pi_u, f_u} \sum_{u \in U} (\pi_u \phi_u - ((c_u + v_u) f_u) - C_{ALN}^F \qquad (4)$$

avec

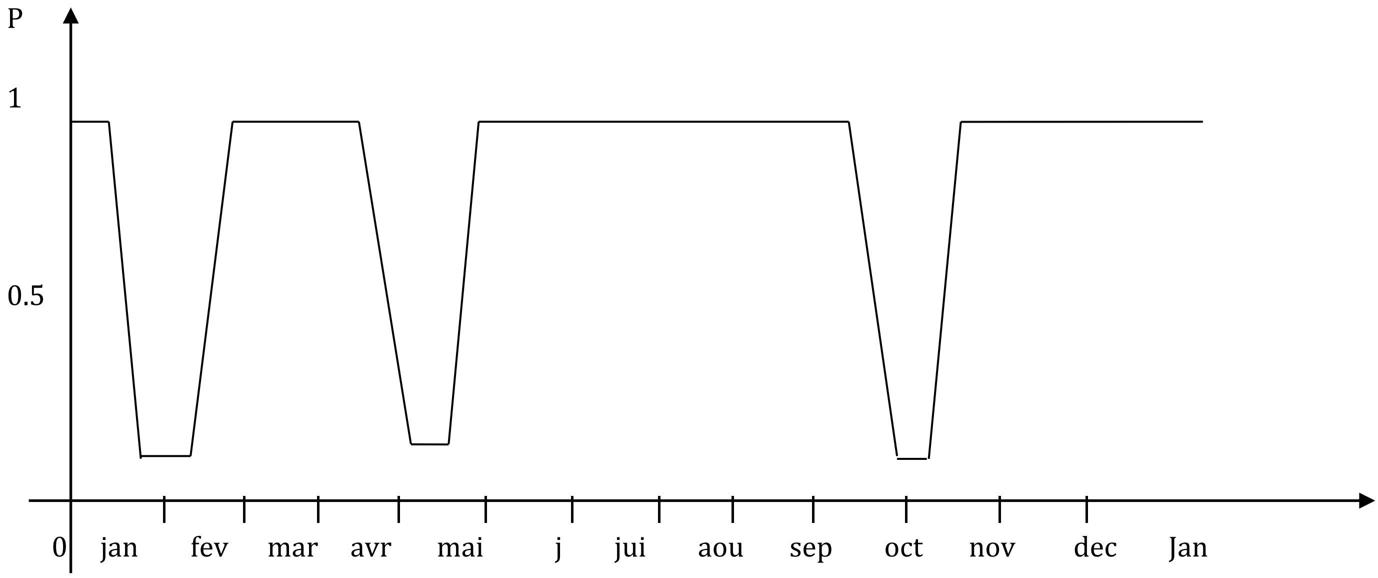
$$\phi \leq D_0^u - \rho_u \pi_u \; u \in U_i, i \in I \qquad (5)$$

$$0 \leq \sum_{u \in U_i} L_u f_u \leq (\sum_{u \in U} L_u) \; f_{\max}^i \qquad i \in I \; (6)$$

6.2. Modélisation d'un problème de tarification stochastique bi-niveau linéaire

La demande Ø et la fréquence f sont liées à une probabilité P dont chaque compagnie aérienne la probabilité suit une loi qui sera déterminée suivant la demande des années écoulées.

6.2.1 Graphe de la loi de probabilité suivant les demandes durant une année



Jan : Janvier Fev : Février m : Mai mar : Mars avr : Avril aou: Aout sep: Septembre Oct : Octobre nov :Novembre j : juin jui : juillet dec : Decembre

6.2.2 Tableau de décisons suivant les probabilités

P	**Décison**
$0.75 \leq P \leq 1$	- Recrutement du personnel saisonnier - Augment de vols et de fréquence avec $f_{\max}$
$0.5 \leq P \leq 0.75$	- Déminution du personnel saisonnier - Démunition de fréquence
$0.15 \leq P \leq 0.5$	- Libération de tous le personnel saisionnier - Déminution des vols et de vréquence
$0.05 \leq P \leq 0.15$	- Démunition des vols et de fréquence

6.2.3. Modélisation stochastique de la tarification

La demande Ø et la fréquence *f* sont liées avec une probabilité P :

$$\max_{V_u \geq 0} \sum_{u \in U} P.\phi_u + \sum_{e \in E} P.\phi_e \qquad (1)$$

avec :

$$\sum_{u \in U} ((v_u - \sigma_u) f_u + \alpha_u \lambda_u \pi_u \phi_u) + \sum_{e \in E} ((w_e - \sigma_e) f_u + \alpha_e \lambda_e \pi_e \phi_e) - C_{ATC}^F \leq R_{ATC} \quad (2)$$

$$\sum_{u \in U} (\pi_u^{\text{int}} P.\phi_u^{\text{int}} - (c_u + v_u) P.f_u^{\text{int}}) - C_{ALN}^F \leq R_{ALN} \qquad (3)$$

$$\max_{\pi_u, f_u} \sum_{u \in U} (\pi_u P.\phi_u - (c_u + v_u) P.f_u) - C_{ALN}^F \qquad (4)$$

avec

$$P.\phi \leq P.D_0^u - \rho_u \pi_u \quad u \in U_i, i \in I \qquad (5)$$

$$0 \leq \sum_{u \in U} L_u P.f_u \leq (\sum_{u \in U} L_u) P.f_{\max}^i \quad u \in U_i, i \in I \qquad (6)$$

Pour avoir la demande maximale on doit avoir la probabilité P=1 , ce qui nous ramène à optimiser le programme suivant :

$$\max_{V_u \geq 0} \sum_{u \in U} \phi_u + \sum_{e \in E} \phi_e \qquad (1)$$

avec :

$$\sum_{u \in U} ((v_u - \sigma_u) f_u + \alpha_u \lambda_u \pi_u \phi_u) + \sum_{e \in E} ((w_e - \sigma_e) f_u + \alpha_e \lambda_e \pi_e \phi_e) - C_{ATC}^F \leq R_{ATC} \quad (2)$$

$$\sum_{u \in U} (\pi_u^{\text{int}} \phi_u^{\text{int}} - (c_u + v_u) f_u^{\text{int}}) - C_{ALN}^F \leq R_{ALN} \qquad (3)$$

$$\max_{\pi_u, f_u} \sum_{u \in U} (\pi_u \phi_u - (c_u + v_u) f_u) - C_{ALN}^F \qquad (4)$$

avec :

$$\phi \leq D_0^u - \rho_u \pi_u \quad u \in U_i, i \in I \qquad (5)$$

$$0 \leq \sum_{u \in U} L_u f_u \leq (\sum_{u \in U} L_u) f_{\max}^i \quad u \in U_i, i \in I \qquad (6)$$

En Appliquant le théorème de Karush-Khun –Tuker on obtient le programme linaire suivant avec relaxation.

Le lagrangien du suiveur :

$$L(\pi, f) = \sum_{u\in U}(\pi_u\phi_u - (c_u + v_u) f_u) - C_{ALN}^F + \zeta(D_0^u - \rho_u\pi_u - \phi_u) + \varepsilon(L_u f_u)$$

$$\nabla_\pi L = \phi_u - \zeta\rho_u \quad , \quad \nabla_f L = -(c_u + v_u) + \varepsilon L_u$$

$$\nabla_\phi L = \pi_u f_u - \zeta + \varepsilon L_u$$

$$\max_{V_u \geq 0} \sum_{u\in U}\phi_u + \sum_{e\in E}\phi_e \qquad (1)$$

Avec :

$$\sum_{u\in U} ((v_u - \sigma_u) f_u + \alpha_u\lambda_u\pi_u\phi_u) + \sum_{e\in E} ((w_e - \sigma_e) f_u + \alpha_e\lambda_e\pi_e\phi_e) - C_{ATC}^F \leq R_{ATC} \quad (2)$$

$$\sum_{u\in U}(\pi_u^{\text{int}}\phi_u^{\text{int}} - (c_u + v_u) f_u^{\text{int}}) - C_{ALN}^F \leq R_{ALN} \qquad (3)$$

$$\sum_u (\phi_u - \zeta\rho_u) = 0 \qquad (4)$$

$$\sum_u (-c_u - v_u + \varepsilon L_u) = 0 \qquad (5)$$

6.3. Exemple de résolution

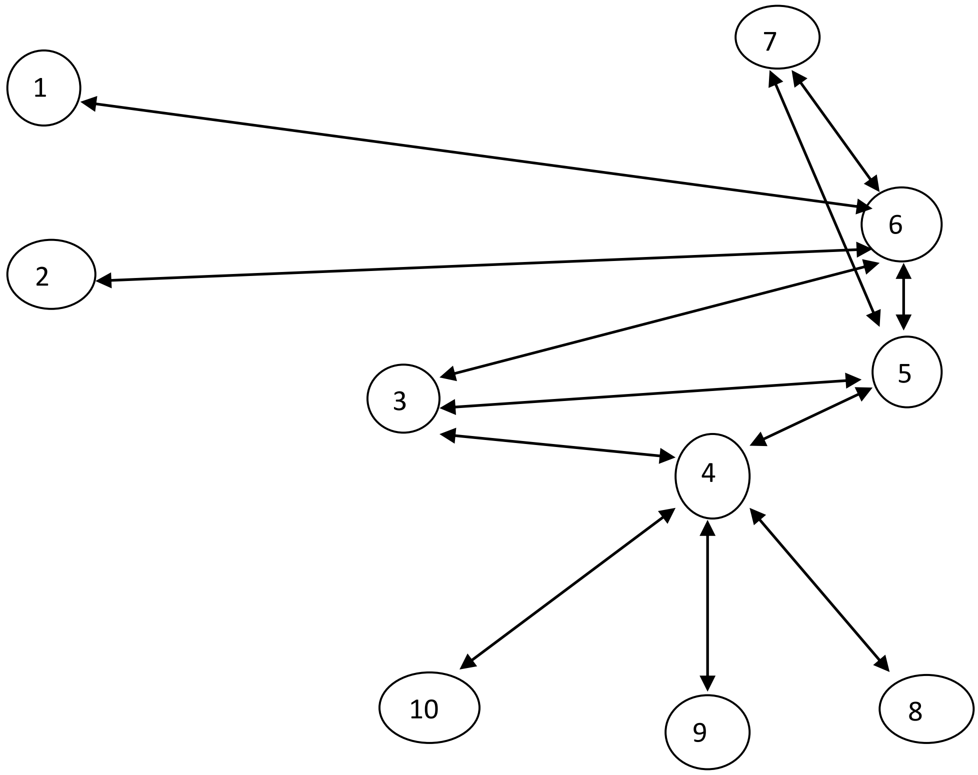


Figure 12. Graph1

- 1 à 7 aéroports intérieurs
- 8 à 10 aéroports extérieurs

$$\max_{V_u \geq 0} \varphi_u + \phi_e \tag{1}$$

Avec :

$$((v_u - \sigma_u) f_u + \alpha_u \lambda_u \pi_u \phi_u) + ((w_e - \sigma_e) f_u + \alpha_e \lambda_e \pi_e \phi_e) - C_{ATC}^F \leq R_{ATC} \tag{2}$$

$$(\pi_u \phi_u - (c_u + v_u) f_u) - C_{ALN}^F \leq R_{ALN} \tag{3}$$

$$(\phi_u - \zeta \rho_u) = 0 \tag{4}$$

$$(-c_u - v_u + \varepsilon L_u) = 0 \tag{5}$$

Les variables : $\pi_u,\ f_u,\ \pi_e,\ f_{e,}\ \zeta, \varepsilon \geq 0$

Données : u=1, pour les arcs 1-7

La contrainte (2) devient :

$$((v_u - \sigma_u) f_u + \alpha\lambda_u \pi_u \phi_u) - C^F_{ATC} \leq R_{ATC} \quad (6)$$

les contraintes (3) et (4) deviennent :

$$\zeta = 866.67 \ , \varepsilon = 0.08 \quad (7)$$

On pose les valeurs suivantes :

$$D_0 = 130,\ \ v_1 = 120,\ \ \sigma_1 = 40\ ,\ \rho_1 = 0.15,\ L_1 = 2000.$$

$$C^F_{ATC} = 200,\ \ R_{ATC} = 450,\ R_{ALN} = 7000,\ C^F_{ALN} = 2200$$

$$\lambda = 0.21, \qquad \alpha = 0.08, \qquad c_u = 40$$

On a aussi la relation suivante :

$$\emptyset_u = D_0 + \rho_u \pi_u \qquad (8)$$

Avec laquelle on remplacera (1)

Puis, en utilisant le E-modèle pour les contraintes, on remplace la demande par son espérance dans notre programme, tel que :

$$E(\emptyset_u) = D_0$$

Car, selon le graphe de la loi de probabilité de la demande sur une année, la probabilité que la demande soit maximale est de :

$$P(\emptyset = \emptyset_{max}) = \frac{8}{12} = 0.66$$

Et la probabilité pour que la demande soit supérieure ou égale a la moyenne est :

$$P(\emptyset \geq D_0) = \frac{10}{12} = 0.83$$

ce qui est une probabilité de réalisation très satisfaisante.

Notre problème ce réduira donc a :

$$\max_{u \in U} D_0 + \rho_u \pi_u \tag{8}$$

Avec :

$$((v_u - \sigma_u) f_u + \alpha \lambda_u \pi_u D_0) - C^F_{ATC} \leq R_{ATC} \tag{9}$$

$$(\pi_u D_0 - (c_u + v_u) f_u) - C^F_{ALN} \leq R_{ALN} \tag{10}$$

Enfin, on résout le programme avec la méthode du simplexe :
On pose :

$$X_1 = f_u \ \ , X_2 = \pi_u \ \ , Z = \rho_u \pi_u.$$

On remplace les variables et les coefficients, ce qui nous donnera :

$$\max Z = 0.15 X_2$$

$$\begin{cases} 80\, X_1 \ + \ 2.184\, X_2 \leq \ 650 \\ -16\, X_1 \ + \ 13\, X_2 \ \leq \ 920 \\ X_1, X_2 \geq \ 0 \end{cases}$$

On transforme le problème sous sa forme canonique en ajoutant des variables d'excès, d'écart et artificielles :

- Comme la contrainte 1 est de type '≤' il est nécessaire d'ajouter la variable d'écart X_3.
- Comme la contrainte 2 est de type '≤' il est nécessaire d'ajouter la variable d'écart X_4.

MAXIMISER: $Z = 0.15X_2$
sous les contraintes

$$80\ X_1 + 2.184\ X_2 \leq 650$$
$$-16\ X_1 + 13\ X_2 \leq 920$$

$X_1, X_2 \geq 0$

MAXIMISER: $Z = 0.15X_2$
sous les contraintes

$$80\ X_1 + 2.184\ X_2 + X_3 = 650$$
$$-16\ X_1 + 13\ X_2 + X_4 = 920$$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Nous avons construit le premier tableau de la méthode du Simplexe.

Tableau 1			0	0.15	0	0
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
P3	0	650	80	2.184	1	0
P4	0	920	-16	13	0	1
Z		0	0	-0.15	0	0

La variable qui sort de la base est P4, et celle qui entre est P2.

Tableau 2			0	0.15	0	0
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
P3	0	495.44	82.688	0	1	-0.168
P2	0.15	70.769230769231	-1.2307692307692	1	0	0.076923076923077
Z		10.615384615385	-0.18461538461538	0	0	0.011538461538462

La variable qui sort de la base est P3, et celle qui entre est P1.

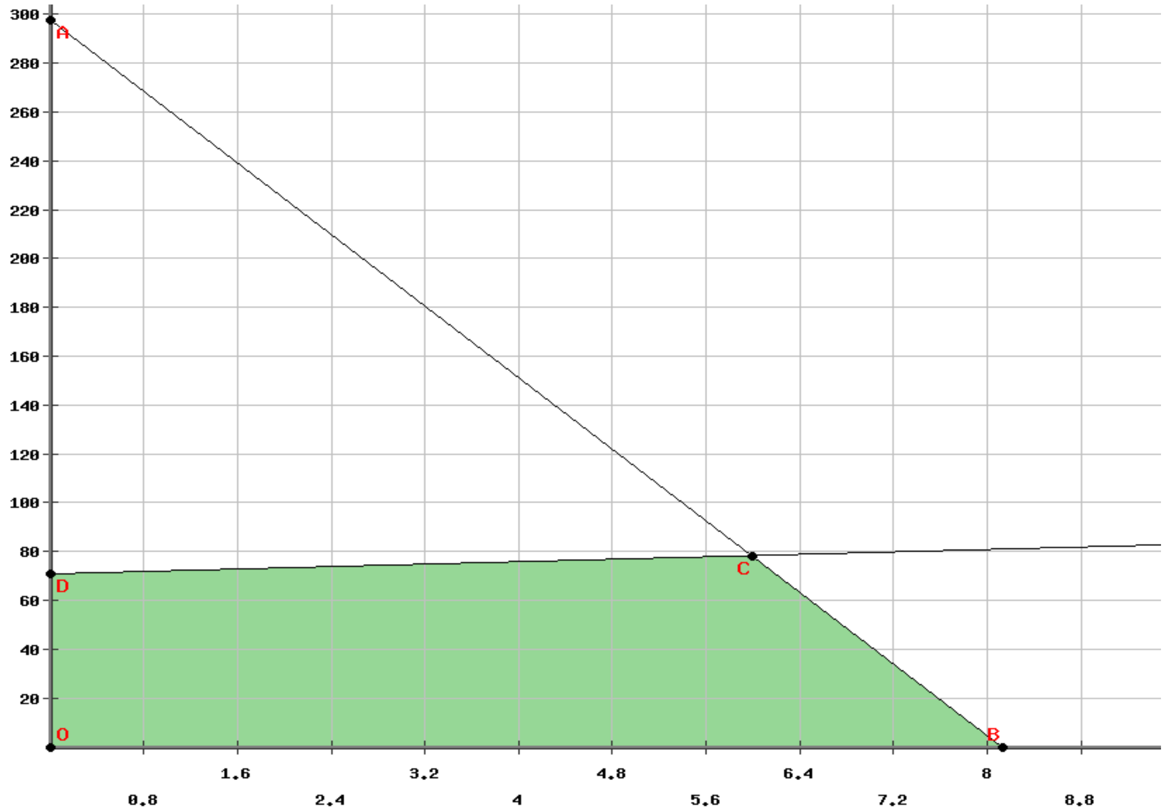
Tableau 3			0	0.15	0	0
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
P1	0	5.9916795665635	1	0	0.012093653250774	-0.00203173374613
P2	0.15	78.143605620386	0	1	0.014884496308645	0.074422481543225
Z		11.721540843058	0	0	0.0022326744462967	0.011163372231484

La solution optimale est $Z = 11.721540843058$

$X_1 = 5.9916795665635$

$X_2 = 78.143605620386$

En utilisant la méthode graphique, nous obtenons les résultats suivants :



Point	Coordonnée X (X_1)	Coordonnée Y (X_2)	Valeur de la fonction (Z)
O	0	0	0
A	0	297.61904761905	44.642857142857
B	8.125	0	0
C	5.9916795665635	78.143605620386	11.721540843058
D	0	70.769230769231	10.615384615385

Remarque:

1. En vert, les points dont on trouve la solution.
2. En rouge, les points qui ne satisfont pas les contraintes.

Donc, le point C est la solution qui correspond au mieux à nos attentes.

Ce qui nous donne, les résultats suivants.

$$\pi_1 = 78{,}14 \qquad f_1 = 6 , \ \zeta = 866.67 \ \varepsilon = 0.08$$

$$\emptyset_1 = D_0 + Z = 130 + 11.72 = 141.72 \approx 142$$

Un prix de 78,14 dollar, une fréquence de 6 vols par semaine pour cette liaison. Ces résultats sont satisfaisants, au-dessus du prix du marché qui est de 90 dollars. Avec une activité aérienne plus importante, ce qui satisfait la compagnie et les autorités compétentes d'une part ainsi les usagers.

Tableau de décisons suivant les probabilités et la fréquence calculée pour une période d'une semaine.

P	Décison	Fréquence
$0.75 \leq P \leq 1$	- Recrutement du personnel saisonnier - Augment. de vols et de la fréquence avec $f = f_{max}$	$f = 6$
$0.5 \leq P \leq 0.75$	- Diminution du personnel saisonnier - Diminution de la fréquence	$f = 4$
$0.15 \leq P \leq 0.5$	- Libération de tout le personnel saisonnier - Diminution des vols et de la fréquence	$f = 2$
$0.05 \leq P \leq 0.15$	- Dimunition des vols et de la fréquence	$f = 1$

Conclusion générale

Depuis plusieurs années, les problèmes d'incertitude (ou de nature aléatoires) et les problèmes a multiple niveaux de décisions sont considérés difficiles à résoudre, mais après l'apparition des méthodes de résolution ces problèmes sont devenues faciles a résoudre et cela on transforme ces problèmes stochastiques en problème déterministes qui sont des problèmes pris en charge par la programmation mathématique.

Ces dernières années, des travaux ont été réalisés dans la prise en compte de l'aléatoire en programmation mathématique. Dans ce modeste travail après avoir donné une vue panoramique sur les méthodes d'optimisation à utiliser (linéaire, mono objectif et multi objectifs, bi niveau, et stochastique), ces méthodes sont basées sur la transformation des problèmes stochastiques bi niveau en problème déterministes avant d'arriver à la solution optimale. On a, en premier lieu, généralisé les différentes approches (passive et active) de la programmation linéaire stochastique bi niveau, et les critères d'optimisations du problème équivalent qui aident à résoudre les problèmes stochastiques.

Puis, on a utilisé tout cela, après avoir définis les normes en vigueur en matière de réglementation dans l’aviation civile, puis modélisé le problème en programme bi niveau stochastique. Pour transformer cela en un simple programme linéaire à résoudre avec la méthode de deux phases du simplexe, qui nous a donné des résultats plus que satisfaisants.

Cette expérience, m’a permis de parfaire mes connaissances en matière de programmation mathématique et programmation mathématique stochastique, et de découvrir la programmation bi niveau, qu’on n’a pas étudiée lors de notre cursus, m’ouvrant a de nouvelles perspectives dans la programmation mathématique, qui est un domaine si riche, et encore, pas totalement exploré.

Bibliographie

[1]*S. Le DIGABEL, Optimisation linéaire : Théorie, Ecole Polytechnique de Montréal 2018.*

[2]Bertrand LE CUN, Programmation linéaire, Université de Paris-Ouest-Nanterre-La Défense 2011.

[3] Adrien GOEFFON, Algorithme du simplexe, Université d'Angers 2007.

[4] Michel BIERLAIRE, Optimisation Linéaire. EPFL Laboratoire Transport et Mobilité – ENAC 2009.

[5] Madame Ouiza BOUARAB, L'Optimisation Non Linéaire Multiobjectif, UMMTO 2013. Doctorat

[6] Chris FRICKE, An Introduction to Bilevel Programming, Department of Mathematics and Statistics, University of Melbourne 2008.

[7]*A. ABOUSSOROR, Introduction a l'optimisation a deux niveaux, Université Cadi Ayyad, Laboratoire LMC 2014.*

[8]*Mlle Aicha ANZI, Résolution d'un problème de Programmation bi-niveaux linéaire, Université ABDERRAHMANE MIRA de Béjaia 2009. Magister.*

[9]*Daniel VANDERPOOTEN, Aide multicritère à la décision : optimisation multiobjectif, LAMSADE – Université Paris Dauphine 2011. Doctorat.*

[10]*Mme HARRACHE Fazia, Application de la Programmation bi-niveaux au problème de Contrôle Optimal, UMMTO 2013. Magister.*

[11]*Mme Aicha ALOU OUMAROU, Approche bi-niveaux de la tarification des services de la navigation aérienne, Université de Toulouse 2009. Doctorat.*

[12]*Farid AICHE, Sur la programmation linéaire multi-objectifs floue stochastique, UMMTO 2013. Doctorat.*

[13]*Mlle BOUIBED Karima, Etude des concepts de solution dans les problèmes bi-niveaux multi-objectifs,UMMTO 2016. Doctorat.*

[14]*Stefanie KOSUCH, Stochastic Optimization Problems. Université Paris XI Orsay.2010*

[15]*Marianne RAFFARIN, Congestion in European Airspace: A Pricing solution , Part 1, January 2004.*

[16]*ICAO, Tariffs for Airports and Air Navigation Services, 2010 Edition.*

[17] GAO, Assigning Air Traffic Control Costs to Users Elements of FAA's, October 2010.