



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI TIZI-OUZOU

FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU
DIPLOME MASTER EN GENIE MECANIQUE**

Spécialité : Construction Mécanique

THEME

*Analyse expérimentale et numérique d'un disque en époxy comprimé
entre solides avec et sans revêtement à différentes épaisseurs et
rigidités.*

Présenté par :

- ABA Melissa
- ABDELLAH Kamélia

Devant le jury d'examen composé de :

- | | |
|----------------------|--------------|
| - Mr LARBI Said | Président |
| - BELDI Mustapha | Promoteur |
| - BILEK Ali | Co-promoteur |
| - Mme MANSOURI. Lila | Examinatrice |

Promotion 2019/2020

Remerciement

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé à l'Université Mouloud MAMMARI de Tizi Ouzou. Nos vifs remerciements vont en premier lieu, à « ALLAH » de nous avoir accordé le courage, la patience et la détermination jusqu'à l'accomplissement de ce modeste mémoire.

Notre gratitude et notre profonde reconnaissance s'adressent tout d'abord à notre promoteur Monsieur BELDI Mustapha pour sa disponibilité, ses précieux conseil et son soutien tout au long de la préparation de ce mémoire. Nous remercions aussi vivement notre co-promoteur Monsieur Ali BILEK.

Nous remercierons également tous les membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, Monsieur LARBI Saïd d'être président et Madame MANSOURI.L notre examinatrice.

Enfin, nos remerciements et notre profonde gratitude sont adressés à tous ceux qui ont contribué à ce travail de près et de loin.

DEDICACE

Je dédie ce mémoire

A mes parents pour leur patience et leur amour, ainsi qu'à mon grand père

A mes frères et sœurs pour leurs aides et leurs soutiens

A mes amis pour leurs encouragements et leurs compagnies durant toutes ces années

A toutes les personnes que j'aime.

Je dédie particulièrement ce mémoire à moi-même pour avoir fait preuve de patience et de persévérance.

MELISSA

DEDICACE

Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie du fond du cœur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant la gratitude et la reconnaissance durant toute notre existence.

Je dédie ce modeste mémoire à mes chers parents RACHID et FATMA, puisse dieu les garder.

A mes frères et sœurs ainsi qu'à leurs enfants MOHOUCHA et TOUFIKA, qui m'ont soutenues et qui ont toujours été à mes côtés.

A tous mes amis qui m'ont beaucoup aidé et soutenu. A tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

A la mémoire de ma grand mère.

A toutes les personnes que j'aime.

KAMELIA

Sommaire

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I Etude bibliographique

I.1	Introduction	3
I.2	Quelques travaux réalisés dans le problème de contact.....	3
I.3	Contraintes développées dans un contact de Hertz.....	6
I.4	Application de la photoélasticimétrie au problème du contact.....	8
I.4.1	Méthodes d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie bidimensionnelle.....	9
I.5	Quelques travaux en photoélasticimétrie bidimensionnelles.....	11
I.5.1	Méthodes d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie tridimensionnelle	13
I.5.2	Méthodes non destructives.....	14
I.6	Quelques travaux réalisés à l'aide de la méthode de photoélasticimétrie tridimensionnelle.....	17
I.7	Conclusion	22

Chapitre II Généralités sur la photoélasticimétrie

II.1	Introduction	24
II.2	La photoélasticité.....	24
II.3	Principe de la photoélasticimétrie.....	24
II.4	La biréfringence.....	26
II.4.1	La biréfringence naturelle.....	27
II.4.2	La biréfringence accidentelle.....	28
II.5	Intérêts et applications	29
II.5.1	Applications industrielles	29
II.5.2	Applications en architecture	29
II.5.3	Applications en biomécanique.....	29
II.6	Le polariscope.....	29
II.6.1	Différents types de polariscopes:.....	30
II.6.2	Les éléments du polariscope circulaire.....	32
II.7	Sources lumineuses.....	34
II.8	La polarisation de la lumière	34
II.8.1	Lumière polarisée rectilignement	35
II.8.2	Lumière polarisée elliptiquement	36
II.8.3	Lumière polarisée circulairement	36

II.9	Notion de champ claire et champ obscure.....	37
II.10	Description de la réfraction.....	37
II.10.1	Définition de l'indice de réfraction.....	38
II.11	La constante de frange	38
II.12	Les isoclines.....	39
II.12.1	Propriétés des isoclines.....	39
II.12.2	Élimination des isoclines	39
II.12.3	Analyse des isochromes.....	40
II.12.4	Caractéristique d'un point isotrope.....	41
II.12.5	Les isostatiques.....	41
II.12.6	Propriétés des isostatiques	42
II.13	Conclusion	43

Chapitre III La théorie de Hertz et la mécanique des contacts

III.1	Introduction.....	44
III.2	Historique.....	44
III.3	Surface de contact.....	45
III.4	Contact de Hertz.....	47
III.5	Principe générale de résolution du problème de Hertz	49
III.6	Contraintes développées dans un contact de Hertz	49
III.6.1	Distribution des contraintes du contact cylindre/cylindres	49
III.6.2	Cylindre sur plan	51
III.6.3	Contact plan sur plan (poinçon / plan)	52
III.6.4	Contact sphère - plan.....	53
III.7	Conclusion	57

Chapitre IV Partie Expérimentale

IV.1	Introduction.....	58
IV.2	Identification des modèles	58
IV.3	Vérification du modèle.....	60
IV.3.1	Définition des contraintes résiduelles	60
IV.4	Analyse expérimentale du contact dans le modèle	61
IV.4.1	Dispositif expérimental	61
IV.4.2	Étalonnage du dynamomètre.....	62
IV.5	Détermination de la constante de frange.....	63
IV.5.1	Essaie flexion quatre point.....	63
IV.5.2	Principe de détermination de la constante de frange.....	64

IV.5.3	Calcul de la constante de frange.....	64
IV.6	Analyse expérimentale des contraintes	68
IV.6.1	La variation de la contrainte de cisaillement maximale suivant l'axe [AB]	68
IV.6.2	Contact époxy-acier/ époxy-époxy	69
IV.6.3	Revêtement époxy 0.5 mm (Modèle 2).....	71
IV.6.4	Revêtement aluminium 0.5 mm (modèle 3).....	74
IV.6.5	Les franges isoclines (modèle 2).....	76
IV.7	Analyse numérique des contraintes.....	77
IV.7.1	Calcul des champs de contraintes à l'aide du logiciel CASTEM.	77
IV.7.2	Les différentes étapes de l'étude modèle avec revêtement 0.5mm en époxy.	78
IV.8	Comparaison des résultats expérimentaux a ceux numériques.....	85
IV.8.1	Comparaison des réseaux d'isochromes.	85
IV.8.2	Comparaison des isoclines	86
IV.8.3	Comparaison de l'évolution de la différence des contraintes principales suivant le segment [AB] pour les trois modèles.	87
IV.8.4	Comparaison des courbes numériques pour les trois modèles.....	90
IV.8.5	Comparaison de la contrainte de cisaillement maximal pour les différentes épaisseurs en époxy.....	90
IV.8.6	Comparaison de la contrainte cisaillement maximale pour les différentes épaisseurs en aluminium.	91
IV.9	Discussion des résultats	92
IV.10	Conclusion	93
	Conclusion générale	94
	Bibliographie	98
	Annexe	

Liste des figures

Chapitre I : Etude bibliographique

Figure I - 1 : Sphère sous chargement normal et tangentiel.....	5
Figure I - 2 : (a) modèle sphérique avant le contact, (b) pendant la déformation élastique et (c) pendant la déformation plastique.....	<u>5</u>
Figure I - 3 : Contact de deux cylindres à axes parallèles.....	7
Figure I - 4: Franges isochromes en photoélasticimétrie bidimensionnelle (Contours des contraintes de cisaillement maximales).....	8
Figure I - 5 : Schéma de principe d'un polariscope bidimensionnelle.....	9
Figure I - 6: Réseaux de franges en photoélasticimétrie à deux longueurs d'ondes.....	11
Figure I - 7 : Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ sombre.....	12
Figure I - 8 : Courbes (expérimentale et numérique) décrivant l'évolution de τ_{\max} pour le contact pignon-pignon.....	12
Figure I - 9 : Courbes (expérimentale et numérique) décrivant l'évolution de τ_{\max} pour pignon-crémaillère.....	12
Figure I - 10 : Découpage optique d'un modèle photoélastique.....	15
Figure I - 11 : Polarisation de la lumière diffusée.....	16
Figure I - 12 : Schéma du modèle de Cheng.....	17
Figure I - 13: Isoclines obtenues sur le polariscope en lumière plane.....	18
Figure I - 14 : Franges expérimentales obtenues pour une tranche de 10mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge.....	19
Figure I - 15 : Franges simulées pour une tranche de 10 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge.....	19
Figure I - 16 : Différence des déformations principales secondaires sur un plan vertical suivant l'épaisseur parallèle au plan y-z.....	21
Figure I - 17 : Différence des déformations principales secondaires sur un plan suivant l'épaisseur à 45° par rapport au plan y-z.....	21
Figure I - 18 : Profils des déformations principales secondaires suivant une droite dans le plan médian de l'éprouvette.....	22

Chapitre II : Généralités sur la photoélasticimétrie

Figure II - 1 : Propagation de la lumière à travers un modèle photoélastique	26
Figure II - 2 : Phénomène de biréfringence naturelle.....	27
Figure II - 3 : Corps avec biréfringence accidentelle	28
Figure II - 4 : Polariscope à réflexion.....	30
Figure II - 5 : Polariscope plan à transmission.....	32
Figure II - 6: Essais photoélastique à l'aide d'un polariscope circulaire	33
Figure II - 7 : Lame quart d'onde.....	34
Figure II - 8 : Lumière polarisée rectilignement suivant x.....	36
Figure II - 9 : Onde polarisée elliptiquement.....	36
Figure II - 10: Images d'un modèle relevées sur les différentes configurations du polariscope	37
Figure II - 11 : schéma de réfraction de la lumière	38
Figure II - 12: Représentation des Franges éléments finis pour une tranche	41
Figure II - 13: Tracé des isostatiques à partir des isoclines.....	43

Chapitre III : La théorie de Hertz et la mécanique des contacts

Figure III - 1: Surface de contact et contrainte au contact entre deux sphères.....	45
Figure III - 2: Trois familles de contacts.....	46
Figure III - 3: Représentation d'application technologique des différentes familles de contact.....	47
Figure III - 4: Zone de contact de Hertz.....	48
Figure III - 5 : Contact entre deux cylindres le long de leurs génératrices et distribution de la Pression dans la zone de contact.....	50
Figure III - 6: Contact hertzien particulier de type cylindre/plan.....	51
Figure III -7: Isovaleurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{\max}	53
Figure III - 8: Condition du contact sphère – plan.....	54

Chapitre IV : Partie Expérimentale

Figure IV - 1 : Les dimensions du modèle utilisé pour les trois méthodes.....	59
Figure IV - 2 : Forme du modèle utilisé.....	60

Figure IV - 3 : Observation des contraintes résiduelles sur la plaque et le cylindre déformables.	61
Figure IV - 4 : Observation du modèle utilisé placé sur le polariscope plan.	61
Figure IV - 5 : Courbe d'étalonnage du dynamomètre.	62
Figure IV - 6 : Observation du modèle utilisé placé sur le polariscope plan.	63
Figure IV - 7 : Eprouvette de l'essai de flexion.	64
Figure IV - 8 : Les franges isochromes obtenues en flexion 4 points.	64
Figure IV - 9 : Relevé de l'ordre de frange au bord de l'éprouvette.	67
Figure IV - 10 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope (modèle 1).	69
Figure IV - 11 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie supérieure (modèle 1).	70
Figure IV - 12 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie inférieure (modèle 1).	70
Figure IV - 13 : Evolution de τ_{\max} relevée expérimentalement le long de la droite AB (modèle 1).	71
Figure IV - 14 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope (modèle 2).	72
Figure IV - 15 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie supérieure (modèle 2).	72
Figure IV - 16 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie supérieure (modèle 2).	72
Figure IV - 17 : Evolution de τ_{\max} relevée expérimentalement le long de la droite AB (modèle 2).	74
Figure IV - 18 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope (modèle 3).	74
Figure IV - 19 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie supérieure (modèle 3).	75
Figure IV - 20 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie inférieure (modèle 3).	75
Figure IV - 21 : Evolution de τ_{\max} relevée expérimentalement le long de la droite AB (modèle 3).	76
Figure IV - 22 : Relevée des isoclines par rotation par pas de 10°	77
Figure IV - 23 : Représentation de la surface maillée pour la partie supérieure.	78
Figure IV - 24 : Représentation de la surface maillée pour la partie inférieure.	78
Figure IV - 25 : Représentation des déplacements imposés.	79
Figure IV - 26 : Représentation des zones de contact.	79

Figure IV - 27 : Représentation de la déformation.....	80
Figure IV - 28 : Représentation des réactions sur le modèle.	80
Figure IV - 29 : Extraction des efforts correspondants au déplacement imposé.....	81
Figure IV - 30 : Les franges isochromes simulées en champ claire.....	82
Figure IV - 31 : Les différentes franges isoclines obtenues pour les différentes valeurs de l'angle isocline α	83
Figure IV - 32 : Evolution de τ_{\max} relevée numériquement pour le modèle avec revêtement 0.5mm d'époxy.....	83
Figure IV - 33 : Evolution de τ_{\max} relevée numériquement pour le modèle avec revêtement 0.5mm d'aluminium.	84
Figure IV - 34 : Evolution de τ_{\max} relevée numériquement pour le modèle en acier.....	85
Figure IV - 35 : Isochromes simulées à l'aide du logiciel CASTEM et isochromes expérimentales.....	86
Figure IV - 36 : Comparaison des isoclines obtenues numériquement avec leurs correspondantes obtenues expérimentalement.	87
Figure IV - 37 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux avec revêtement en époxy.	88
Figure IV - 38 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour le revêtement en aluminium.....	88
Figure IV - 39 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour le modèle en acier.	89
Figure IV - 40 : Superposition des résultats numériques pour les trois modèles.	90
Figure IV - 41 : Contrainte de cisaillement maximale pour les différentes épaisseurs de revêtement en époxy.....	91
Figure IV - 42 : Contrainte de cisaillement maximal pour les différentes épaisseurs de revêtement en aluminium.	92

Liste des tableaux

Tableau I - 1: Intensité lumineuse $I(x, y)$ pour différentes configurations du polariscope.	10
Tableau IV- 1: Caractéristiques mécaniques et dimensions des pièces utilisées.	59
Tableau IV- 2 : Valeur de τ_{\max} relevée le long [AB] (modèle 1).....	71
Tableau IV- 3 : Relevé d'ordre de frange le long [AB]. (Modèle2)	73
Tableau IV- 4 : Relevé d'ordre de frange le long [AB]. (Modèle 3).	76

NOMENCLATURE ET SYMBOLES

R: Rayon du cylindre [mm]

C: Constante optique relative du matériau biréfringent

C_0 : La vitesse de la lumière dans le vide

V : vitesse de la lumière dans le milieu considéré

E_1 : Module de Young de l'époxy [MPa]

E_2 : Module de Young de l'acier [MPa]

E_3 : Module de Young de l'aluminium [MPa]

E_{eq} : Module de Young équivalent [MPa]

N: Ordre de frange du modèle

H : Point de Hertz

P_0 : Pression maximale [MPa]

U : Direction d'observation

V : Direction de propagation

X : Axe du polariseur

Y : Axe de l'analyseur

f : Constante de frange du modèle

e : épaisseur du modèle [mm]

b : Demi largeur de contact [mm]

σ_{xx} : Contrainte normale sur la face xx

σ_{zz} : Contrainte normale sur la face zz

σ_{xz} : Contrainte normale sur la face xz

σ_{xy} : Contrainte de cisaillement

τ_{max} : Contraintes de cisaillement maximales [MPa]

λ : Longueur d'onde

μ_1 : Coefficient de Poisson du modèle en époxy

μ_2 : Coefficient de Poisson du modèle en acier

I(x,y) : Intensité lumineuse

Introduction générale

D'un point de vue expérimental, lorsqu'un contact a lieu entre des pièces mécaniques, des déformations et des contraintes apparaissent au sein des solides, ce qui entraîne l'usure de ces pièces, la dégradation et l'amorçage des fissures. Il est très important aux concepteurs de machines de connaître les contraintes et les déformations au voisinage et dans la zone de contact afin d'évaluer les dégradations, pour cela il est impératif d'étudier les contacts et d'évaluer les types et les amplitudes des contraintes imposées.

Dans ce présent travail, un problème de contact entre des pièces mécaniques a été résolu à l'aide de deux méthodes, une expérimentale et l'autre numérique. Cette étude a pour objectif de valider les résultats numériques par ceux obtenus expérimentalement et de montrer que nous pouvons traiter des problèmes complexes de contact mécanique à l'aide de codes de calculs éléments finis tel que le contact mécanique des revêtements. L'analyse des champs de contraintes dues au contact mécanique a été faite dans un disque en époxy déformable comprimé entre deux plaques, l'une des plaques est en époxy considérée comme solide déformable et l'autre en acier sans et avec revêtements par des plaques minces en époxy puis en aluminium avec différentes épaisseurs considérées comme un multicouche, nous réalisons plusieurs modèles à différents types de revêtements. Afin d'analyser les champs de contraintes développées au voisinage des zones de contact dans le modèle, ce disque a été analysé par les deux méthodes (expérimentale et numérique).

Dans la partie expérimentale nous avons utilisé un matériau biréfringent « l'époxy » afin de pouvoir observer par photoélasticimétrie les effets induits par les sollicitations mécaniques. En parallèle, une étude numérique a été développée à l'aide de Castem.

Le travail effectué dans le cadre du présent mémoire de Master est organisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre consacré à la bibliographie traitera des différents travaux effectués dans les domaines de la mécanique des contacts.

Le deuxième chapitre est consacré à quelques rappels importants sur la photoélasticimétrie et à la description du phénomène de biréfringence.

Le chapitre trois est consacré à la théorie de Hertz sur le contact mécanique.

Les différents essais réalisés sont présentés dans la dernière partie de ce mémoire. Les différents réseaux d'isochromes et d'isoclines obtenus à l'aide de la photoélasticimétrie et de la méthode des éléments finis sont analysés et comparés pour valider la solution éléments finis.

Enfin nous terminons ce mémoire par une conclusion générale et perspectives.

Chapitre I

Etude bibliographique

I.1 Introduction

Dans l'industrie, le contact mécanique demeure un problème de mécanique des solides qui présente les non-linéarités les plus difficiles à prendre en compte. La nature de ces phénomènes est liée à l'interaction purement mécanique qui exige une attention très particulière à prendre dans ce domaine.

Les théories initiées par Hertz ont permis de modéliser ces contacts d'une manière très fidèle, en déterminant l'aire de contact et le champ de contraintes induit par les efforts appliqués.

L'étude et la résolution analytique du problème de contact mécanique datent de 1882 avec les travaux de Hertz. Il a formulé une analyse satisfaisante du problème de contact entre deux solides, ses travaux permettent d'évaluer les phénomènes d'écrasement, les surfaces de contact, les pressions de contact et important encore les valeurs des contraintes principales et les valeurs de la contrainte de cisaillement maximale à l'intérieure des modèles. [1]

Aujourd'hui, la plupart des techniques de résolution numérique avancées ont permis de traiter des problèmes de contact de plus en plus complexes. A titre d'exemple, la méthode des éléments finis permet la discrétisation de surfaces, de formes quelconques et la prise en compte aisée des diverses conditions aux limites. Elles offrent ainsi un outil de calcul puissant pour l'étude des problèmes de contact. Ces techniques s'appuient sur une modélisation simplifiée du contact et s'inspirent bien souvent des méthodes employées en dynamique des structures. Cependant, elles rencontrent des difficultés qui sont le traitement des conditions de contact et la détermination efficace des zones de contact. [2]

I.2 Quelques travaux réalisés dans le problème de contact

L'analyse des contraintes dans les structures mécaniques est d'une importance capitale dans la conception des composants de machines et aussi l'une des plus anciennes techniques dans la mécanique, elle a été étudiée en premier lieu par Hertz en 1882, qui a apporté la solution du contact élastique entre deux massifs ellipsoïdaux avec des surfaces lisses et sans frottement.

- **M.Budirim** a présente une procédure numérique pour le problème d'élasticité bidimensionnelle. Dans son modèle numérique de contact de Hertz entre deux solides, on considère l'état de contrainte plan. Il a montré une bonne corrélation avec les résultats théoriques. Les contraintes de contact ont été calculées en utilisant des matériaux ayant des modules d'élasticité différents: un cylindre en aluminium sur une plaque rectangulaire en acier. Il a montré que la contrainte normale maximale a lieu au centre de la surface de contact et qu'elle décroît invariablement vers zéro à l'extrémité. Il en résulte donc que les surfaces de contact sont fonction des modules de Young des deux solides en contact. Il a étudié l'effet de la friction avec le même couple de matériaux. Il a aussi analysé les conditions d'adhérence et de glissement pour des matériaux de modules de Young différents. [3]

- **Kogut** Dans son travail, a présenté une analyse par éléments finis d'un contact élastique-plastique d'une sphère parfaitement déformable sollicitée par un plan rigide, le contact élastique plastique d'une sphère sur plan est d'une importance fondamentale dans la mécanique des contacts. Elle trouve son application dans l'étude des problèmes d'usure, de frottement et aussi dans la conductivité thermique et électrique entre des surfaces de contacts rugueuses. [4]

Kogut utilise le critère de (VON MISES) pour détecter la transition locale entre les déformations élastiques et plastiques. Il a montré une évolution du contact élastique plastique avec trois étapes qui vont du contact purement élastique au contact élastique plastique et finalement au contact purement plastique. (Figure I - 1)

Dans une autre étude, Kogut a montré que la charge maximale tangentielle que peut supporter le contact sphérique au commencement de glissement a été calculée. Cette analyse a été combinée avec une solution analytique en utilisant une approche basée sur l'utilisation de lois de comportement appropriées à tout mode de déformation, que ce soit élastique ou plastique. [5]

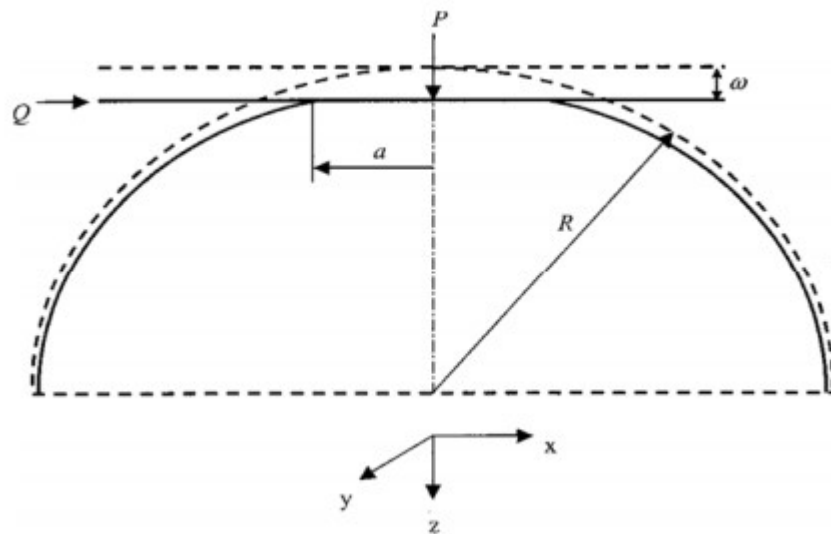


Figure I - 1 : Sphère sous chargement normal et tangentiel. [5]

- α : Rayon de la surface de contact
- u : Déplacement
- P : Effort normal
- Q : Effort tangentiel

Dans cette étude, deux modes de rupture différents ont été identifiés en fonction de la nature de la charge normale initiale. Lorsque celle-ci est inférieure à la charge critique de Hertz, la rupture se produit sur l'aire du contact. Si la charge est supérieure à celle critique une défaillance se produit au-dessous de la zone de contact.

-Robert L. Jackson, a présenté une étude par éléments finis d'une sphère élastique parfaitement plastique en contact sans frottement avec un plan rigide (figure I - 2). [6]

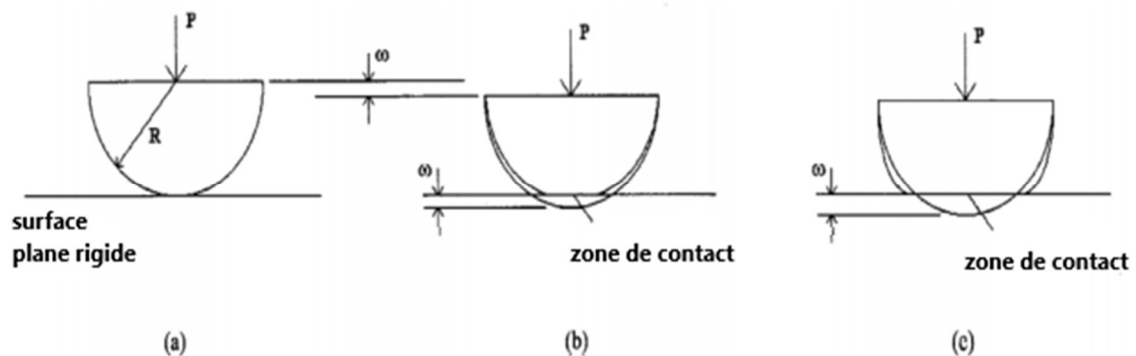


Figure I - 2 : (a) modèle sphérique avant le contact, (b) pendant la déformation élastique et (c) pendant la déformation plastique. [5]

La pression moyenne d'un contact complètement plastique, varie avec la géométrie déformée du contact qui à son tour dépend des propriétés du matériau. Ce travail révèle de grandes différences entre les modèles analytiques approchés et d'autres solutions numériques. Plus important encore, la zone du contact et la contrainte sont particulièrement fonction de la géométrie déformée dans tous les régimes et dépendent des propriétés du matériau et des méthodes expérimentales.

-Pendant ces 100 dernières années plusieurs chercheurs ont développé des théories pour décrire la distribution des contraintes dans les solides en contact. Cependant pour beaucoup d'entre eux il était difficile de faire des expériences pour valider les théories. Il y a eu quelques exemples où la photoélasticité est l'une des méthodes expérimentales utilisées pour analyser la distribution des contraintes mais généralement ces études ont été limitées par le temps nécessaire pour leur mise en application et aussi pour l'exploitation des frange isochromes et isoclines obtenues. Le développement de la photoélasticimétrie automatique a permis d'améliorer ces analyses. La distribution des contraintes de cisaillement peut ainsi être obtenue très rapidement et les contraintes principales peuvent alors être séparées.

I.3 Contraintes développées dans un contact de Hertz

Le contact de Hertz se réfère aux contraintes localisées qui se développent lorsque deux solides de révolution sphériques sont mis en contact sous l'effet d'un effort normal, l'aire de contact est un cercle de rayon (a). Et le degré de déformation dépend de l'élasticité du matériau en contact (module d'élasticité). La théorie de Hertz consiste à calculer la contrainte dans la zone de contact en fonction de la force normale appliquée, des propriétés élastiques et de la géométrie du contact. [7]

La figure I-3 montre un exemple de contact entre deux cylindres à axes parallèles. Les contraintes développées au voisinage de la zone de contact à l'intérieur du modèle sont représentées sur la moitié gauche de la figure. On remarque qu'effectivement la contrainte de cisaillement maximale est nulle à l'origine puis augmente et atteint un maximum égale à $0,3 P_0$ au point de Hertz qui est situé à une distance « a » $z = 0,78a$, étant la demi largeur de contact. Sur la partie droite du graphe on remarque les contours d'égales contraintes de cisaillement maximales. Ces contours sont comparables aux franges isochromes obtenues en photoélasticimétrie (figure I-4) [1]

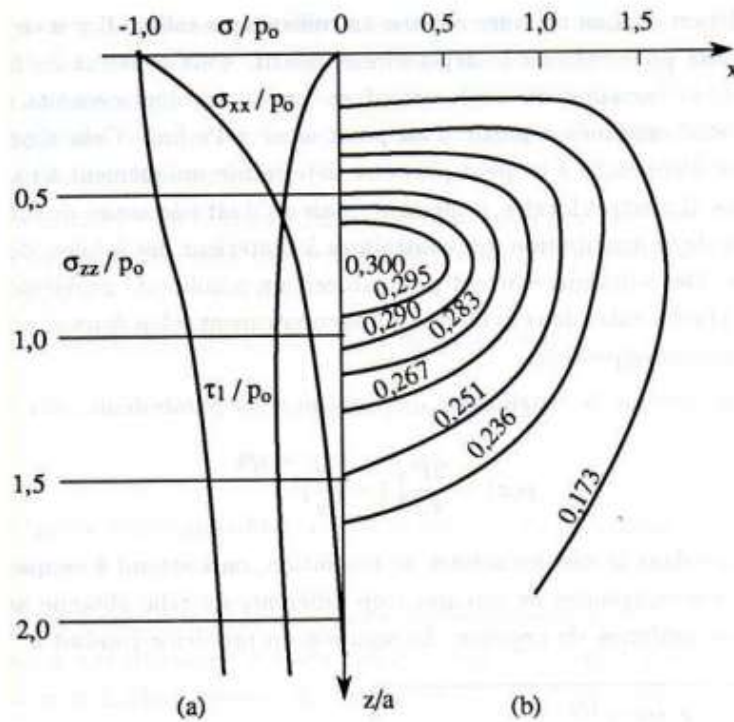


Figure I - 3 : Contact de deux cylindres à axes parallèles. (a) Contraintes le long de l'axe de symétrie z, (b) Contours d'égales contraintes de cisaillement maximales. [2]

La figure (I-3) montre les franges isochromes en photoélasticimétrie bidimensionnelle pour différentes charges.

Pour le premier cas de la charge ponctuelle (figure I-4 a) : les franges isochromes sont concentrées au niveau du point d'application de la charge. Le deuxième cas utilisant une pression uniforme (figure I-4 b) se traduit par des franges presque horizontales dans la zone d'application de la pression. Pour le cas du poinçon rigide plat (figure I-4c), on observe une concentration des contraintes sur les bords du poinçon.

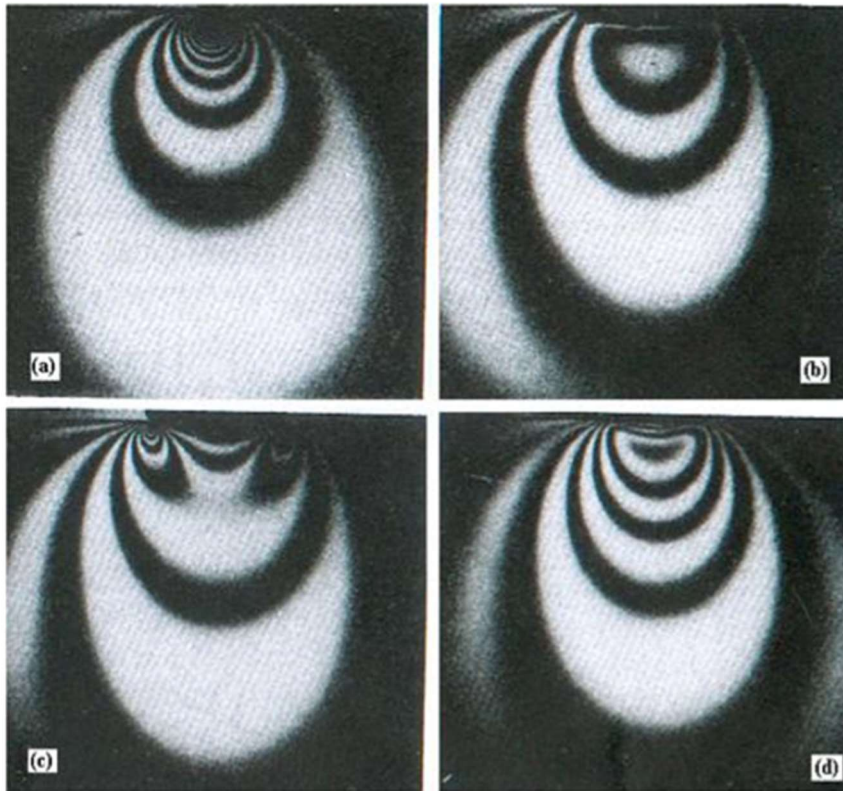


Figure I - 4: Franges isochromes en photoélasticimétrie bidimensionnelle (Contours des contraintes de cisaillement maximales). pour (a) une charge ponctuelle, (b) une pression uniforme, (c) un poinçon rigide plat et (d) un contact de deux cylindres. [2]

I.4 Application de la photoélasticimétrie au problème du contact

Au début des années 1930 une technique d'analyse des contraintes dans les matériaux appelée « Photoélasticimétrie » fut développée par E.G. Coker et L.N.G. Fillon. Cette technique fait appel au phénomène de biréfringence que présente certains matériaux transparents lorsqu'ils sont chargés mécaniquement. La biréfringence, mise en évidence par Brewster en 1816, caractérise la propagation anisotrope de la lumière, ou encore une variation de l'indice optique au sein du matériau. En utilisant les équations de Maxwell sur la propagation de la lumière, il est possible de relier les variations de l'indice optique aux contraintes principales, et la direction des contraintes principales à la direction de polarisation de la lumière transmise. Le montage développé au laboratoire (un polariscope 2D Figure I-5) est constitué d'une source lumineuse (mono ou polychromatique), d'un polariseur et d'un analyseur, la section étudiée se situant entre ces deux derniers. La lumière en sortie du polariscope est constituée d'une série de franges (isochromes et isoclines) que l'on peut relier aux contraintes. [8] [9]

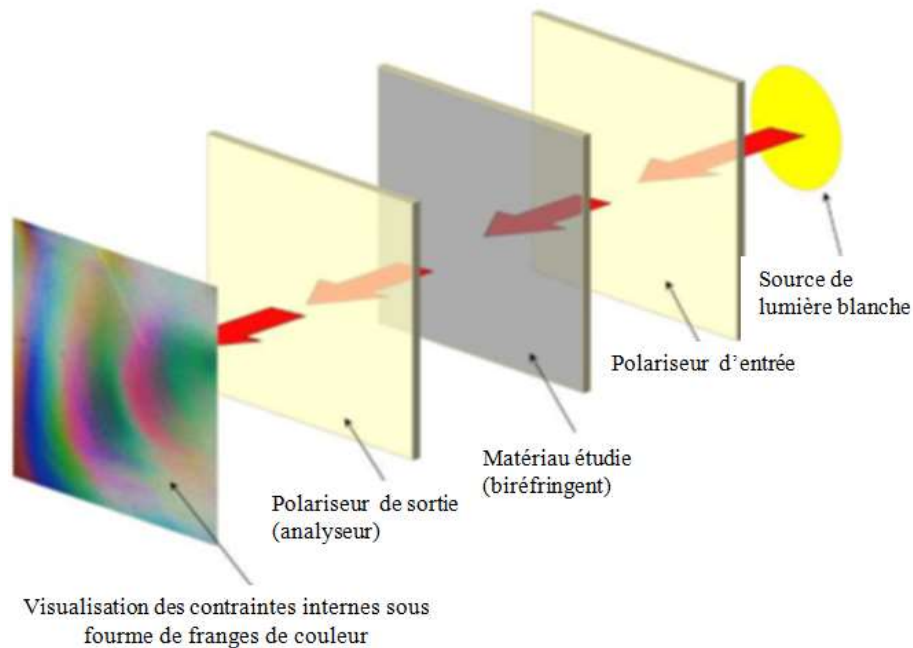


Figure I - 5 : Schéma de principe d'un polariscope bidimensionnel.

Le choix de la technique à utiliser en photoélasticimétrie varie selon la forme du modèle à étudier. Pour un modèle uniforme et également petit par rapport aux autres dimensions dans le plan on utilise la photoélasticité bidimensionnelle. Lors de l'étude de modèles, de forme complexe ou avec une épaisseur importante par rapport aux autres dimensions, l'état de contrainte ne peut plus être considéré comme plan, il varie en amplitude et en direction suivant l'épaisseur. De ce fait on ne peut plus analyser le modèle en photoélasticimétrie 2D. Différentes techniques en photoélasticimétrie sont alors développées pour l'étude des cas tridimensionnels. [10]

I.4.1 Méthodes d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie bidimensionnelle

La photoélasticimétrie 2D est basée sur la propriété de biréfringence de la plupart des matériaux transparents. Un matériau est biréfringent quand il est optiquement anisotrope de manière naturelle (biréfringence naturelle) ou lorsqu'il est contraint (biréfringence accidentelle). L'anisotropie correspond à une variation du tenseur des indices de réfraction du matériau. En élasticité, on peut relier le tenseur des indices au tenseur des contraintes et obtenir l'orientation (paramètre isocline) et la différence des contraintes principales.

De nouvelles techniques d'analyse de franges isoclines et isochrones se développent et l'automatisation de ces méthodes devient évidente.

Les premières générations des méthodes automatiques furent développées. En général ces systèmes sont basés sur un polariscope avec des éléments optiques tournants et des capteurs photométriques mesurant la variation de l'intensité lumineuse en un point.

La seconde génération de méthodes automatiques s'est développée vers la fin des années 1970. Dans les années 1980, la venue de l'image digitale développe considérablement les méthodes classiques utilisant une source de lumière monochromatique. Des caméras vidéo captent les images qui seront transmises à un ordinateur dédié à l'analyse numérique de ces images. [11]

I.4.1.1 Méthodes utilisant plusieurs configurations de polariscope

Toutes les méthodes expérimentales utilisant plusieurs configurations de polariscope sont basées sur le même principe :

Quel que soit le polariscope utilisé, on peut déterminer l'expression générale de l'intensité lumineuse émergente. Cette expression est toujours fonction du paramètre isocline α et du paramètre isochrome φ . La combinaison de ces équations permet de déterminer les paramètres isoclines λ et isochromes φ en tout point du modèle. L'intensité lumineuse $I = (x,y)$ pour les différents types de polariscopes sont représentés sur le tableau ci-après : [12]

Types de polariscope	Champ clair	Champ sombre
Rectiligne	$I(x, y) = I_0 - I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$
Circulaire	$I(x, y) = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

Tableau I - 1: Intensité lumineuse I (x, y) pour différentes configurations du polariscope.

Les franges isochromes sont obtenues à partir d'une image du modèle placée dans un polariscope circulaire en champ clair ou obscure à plusieurs longueurs d'onde. Pour déterminer leurs ordres de franges, on étudie l'évolution des franges en fonction de la longueur d'onde. En effet, pour deux longueurs d'ondes différentes (λ_1, λ_2), les réseaux d'isochromes observés sont différents, puisque la valeur de la constante de frange est proportionnelle à la longueur d'onde. La seule frange qui ne change pas avec la longueur d'onde est la frange d'ordre zéro, elle est donc facilement observable. On observe sur le polariscope deux réseaux d'isochromes obtenus pour deux longueurs d'ondes différentes. On les superpose pour identifier les franges d'ordre zéro, qui sont les seules à se superposer parfaitement. Ensuite, partant de ces franges, un programme numérique identifie les autres franges en comparant les deux réseaux entre eux. En

un point donné de l'éprouvette, l'état de contrainte est le même quel que soit la longueur d'onde, l'ordre de frange est différent.

Pour déterminer la variation de la différence des contraintes principales, on doit visualiser le réseau d'isochromes sur le polariscope. Après la détermination des ordres de franges, la loi de Maxwell peut être alors utilisée pour déterminer l'intensité des contraintes.

On peut donc écrire

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{N_1 \lambda_1}{C.e} = \frac{N_2 \lambda_2}{C.e} = \dots = \frac{N_i \lambda_i}{C.e} \quad (I-1)$$

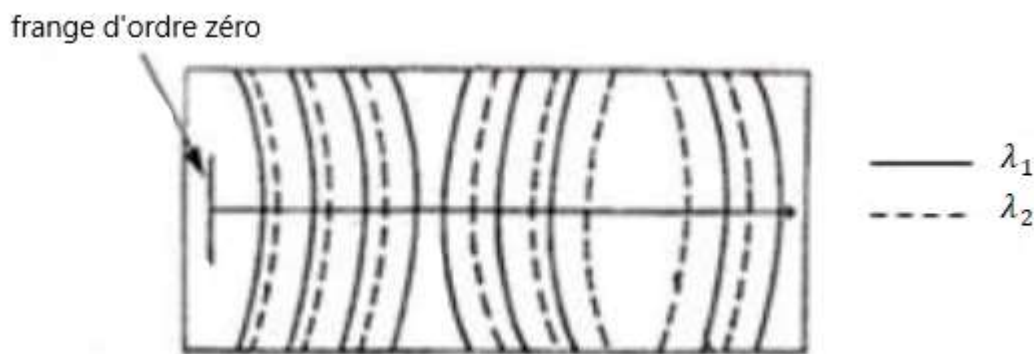


Figure I - 6: Réseaux de franges en photoélasticimétrie à deux longueurs d'ondes. [13]

Lorsque chaque frange a été identifiée, les valeurs des points situés entre les franges sont calculées par interpolation linéaire.

I.5 Quelques travaux en photoélasticimétrie bidimensionnelles.

-**T. Touat** [14] dans son étude a traité d'abord deux problèmes mécaniques de contact en 2D à l'aide de la photoélasticimétrie et la méthode des éléments finis sur des modèles en contact.

Un dispositif de chargement fabriqué au Hall de technologie lui a permis d'appliquer l'effort normal et l'effort tangentiel. Il a utilisé un cylindre rigide et un poinçon rigide plat en aluminium. Le plan déformable est en époxy son module de Young est faible devant celui de l'aluminium.

Les contraintes ont été déterminées à l'aide des réseaux de franges isochromes. L'évolution de la courbe de la différence des contraintes principales a été obtenue le long de l'axe vertical. Les isoclines ont servi à tracer les isostatiques qui sont les trajectoires des contraintes principales.

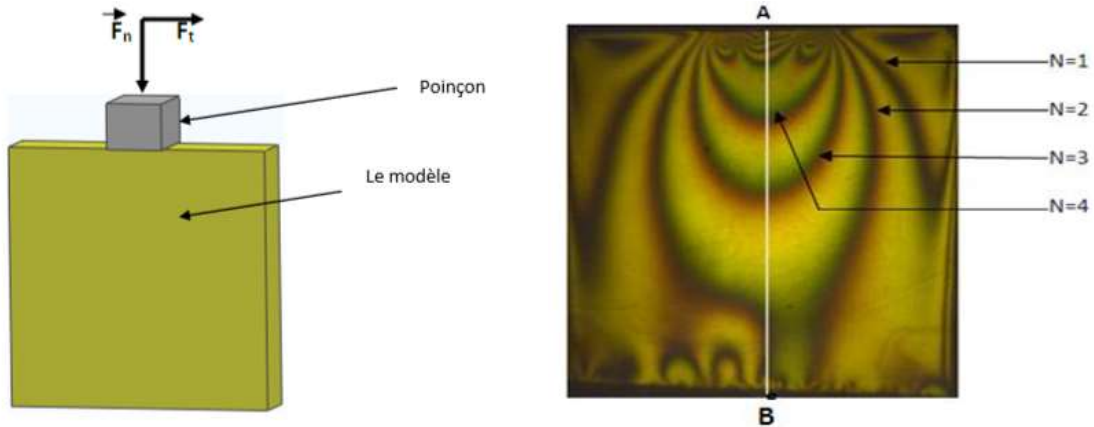


Figure I - 7 : Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ sombre. [14]

BELDIM, [15] A réalisés une étude pour déterminer les champs des contraintes et leurs directions principales dans deux modèles. Le premier modèle est un engrenage pignon-pignon et le deuxième est un engrenage pignon - crémaillère. L'engrènement dans les deux modèles s'effectue à l'aide de deux dispositifs de chargement. Dans la première manipulation ils ont utilisés un dispositif de chargement pour un contact pignon-pignon, dans la deuxième manipulation ils ont utilisés un dispositif de chargement pour un contact pignon-crémaillère.

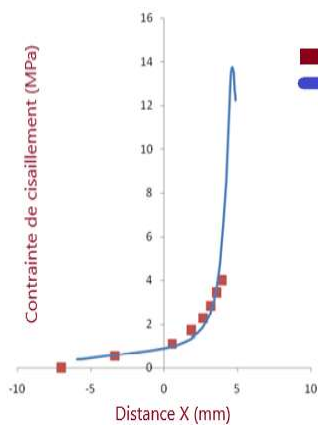


Figure I - 8 : Courbes (expérimentale et numérique) décrivant l'évolution de τ_{max} pour le contact pignon-pignon.

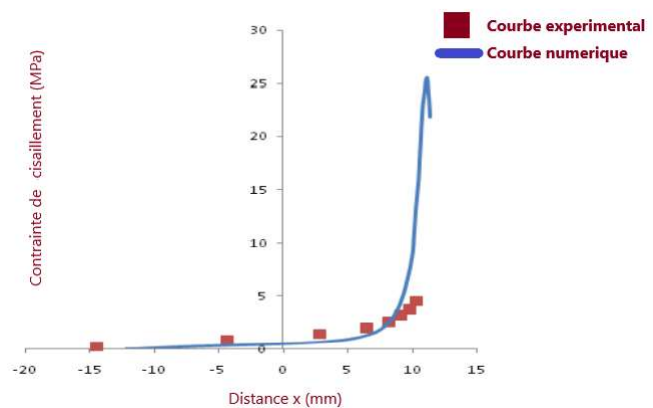


Figure I - 9 : Courbes (expérimentale et numérique) décrivant l'évolution de τ_{max} pour pignon-crémaillère.

Ils ont constaté que pour chacun des deux modèles, les différents réseaux d'isochromes relevés expérimentalement peuvent être comparés directement au réseau numérique. Les figures (I-8) et (I-9), représentent une superposition de deux courbes (expérimentale et numérique). Ils ont obtenu ces courbes par les tracés de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximale (τ_{max}) suivant un segment pris sur les deux modèles. Pour les deux

figures, ils ont remarqué que les deux courbes se rapprochent sauf dans certaines zones, notamment au point d'application de la charge. [15] [14]

I.5.1 Méthodes d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie tridimensionnelle

En photoélasticimétrie 2D, on place une éprouvette plane transparente entre deux polariseurs. On observe des franges mettant en évidence le phénomène de biréfringence dans l'éprouvette sous chargement. Les différences des contraintes principales doivent être constantes dans l'épaisseur, d'où l'analyse de modèle plan. Dans le cas d'une répartition 3D des contraintes, le phénomène de biréfringence est toujours présent mais il n'est plus possible de déterminer les paramètres de la même manière. Plusieurs approches ont été développées dans le but d'observer l'état de contrainte dans les modèles 3D.

Cependant, lors de l'étude de pièces épaisses ou à géométrie complexes, l'état des contraintes ne pourra plus être considéré plan, il varie en amplitude et en direction. De ce fait on ne pourra plus parler de différence de contraintes principales ($\sigma_1 - \sigma_2$), mais de différence des contraintes principales secondaires ($\sigma' - \sigma''$) car l'analyse de feuillet ne se fera pas nécessairement dans les axes principaux des contraintes. Les contraintes principales secondaires correspondent aux contraintes principales projetées sur la section plane illuminée. Quoique la biréfringence soit toujours présente dans les modèles 3D, la détermination des paramètres ne pourra plus se faire de la même manière que dans l'hypothèse 2D. [16]

I.5.1.1 Méthode de figeage et découpage mécanique

Cette méthode consiste à figer les contraintes à l'intérieur d'un modèle photoélastique 3D, Ce dernier sera découpé mécaniquement en plusieurs tranches; ensuite analysée sur un polariscope.

-G Oppel a montré en 1936 que lorsqu'un modèle sera chargé dans un état hautement élastique à une température de transition vitreuse (environ 130° pour l'époxy), puis refroidie lentement, le polymère conserve pratiquement les déformations et la biréfringence acquise dans l'état hautement élastique et une très grande partie de la déformation est conservée.

Cette méthode est basée sur le comportement diphasique de certains polymères quand ils sont chauffés. En effet, ces polymères sont composés de deux types de chaînes reliant les molécules, les chaînes principales et les chaînes secondaires.

Les deux chaînes supportent le chargement appliqué à la température ambiante. Lorsque la température du polymère augmente jusqu'à la température de transition vitreuse les chaînes secondaires cèdent et les chaînes principales supportent alors le chargement. Lors du refroidissement lent du polymère jusqu'à la température ambiante, les chaînes secondaires se reforment entre les chaînes principales. Après le figeage des contraintes, le modèle est découpé mécaniquement en tranches suivant une direction choisie. Les sections obtenues seront alors analysées avec un polariscope classique.

Le découpage mécanique en tranches peut engendrer des contraintes résiduelles qui peuvent perturber la visualisation des franges isochromes et isoclines sur le polariscope. Il est donc nécessaire de bien lubrifier et d'utiliser des disques en diamant. Une analyse complète des contraintes en 3D d'un modèle par la méthode de figeage nécessite de découper le modèle dans trois directions orthogonales. Les tranches sont alors étudiées par une méthode de photoélasticimétrie bidimensionnelle. [12] [17]

I.5.2 Méthodes non destructives

I.5.2.1 Méthode de découpage optique

-R.Desailly et A.Lagarde [16] ont développé une technique non-destructive dans la photoélasticimétrie 3D a champ complet. Elle consiste à isoler une tranche ou feuillet de l'éprouvette photoélastique découpée optiquement par deux plans lasers parallèles et de traiter les champs de lumière diffusée (figure I-10). Lorsqu'un faisceau plan de lumière cohérent traverse un milieu diffusant, chaque point de la section éclairée se comporte comme une source lumineuse. Ces sources cohérentes entre elles interfèrent et peuvent donner naissance à des régions d'intensité maximale ou minimale qui constituent le champ de granularité. Les possibilités d'interférences des rayonnements des deux sections éclairées dépendent de la biréfringence du feuillet ainsi isolé.

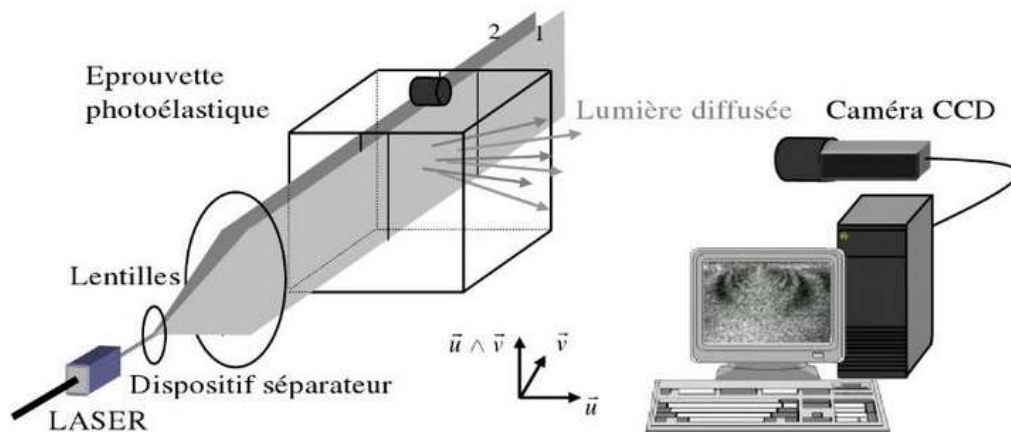


Figure I - 10 : Découpage optique d'un modèle photoélastique. [9]

Perpendiculairement aux faisceaux plans, on observe donc un champ de granularité provenant de l'interférence des rayonnements diffusés par chacune des deux sections éclairées. Cependant, expérimentalement, la visualisation des franges isoclines et isochromes est impossible. Pour extraire ces informations il est nécessaire d'étudier les caractéristiques de la lumière diffusée.

-R.Desailly [16] a proposé une méthode utilisant le rayonnement monochromatique pour obtenir les deux faisceaux plans. Il enregistre le champ résultant diffusé sur film holographique. Cette méthode, développée au laboratoire de Poitiers consiste à remplacer l'enregistrement holographique par une caméra numérique à capteur CCD pour révéler les franges photoélastiques. Pour que la lumière puisse être diffusée, de la poudre de silice très fine ($< 1\mu\text{m}$) est incorporée en petite quantité au modèle photoélastique lors de son élaboration.

L'épaisseur du feuillet peut varier entre 0,5 mm et 10mm. Pour éviter tout phénomène de réflexion et de réfraction, les plans lasers doivent arriver perpendiculairement à la surface de l'éprouvette. De plus, la direction d'observation est perpendiculaire à ces plans laser. Dans les cas de modèle de forme complexe, pour éviter ces problèmes optiques, la pièce est plongée dans une cuve de liquide du même indice optique que le matériau du modèle.

I.5.2.2 Méthode de la lumière diffusée

Cette méthode est basée sur le phénomène de diffusion, lorsqu'un faisceau lumineux de polarisation quelconque traverse un corps transparent, une partie de l'énergie lumineuse est diffusée perpendiculairement à la direction de propagation de la lumière.

R WELLER en 1939 a proposée d'utiliser une technique qui consiste à éclairer une section plane du modèle photoélastique par un faisceau lumineux plan polarisé rectiligne et à observer dans diverses directions normales au faisceau incident. Utilisant la diffusion comme analyseur, supposant que les directions principales ne changent pas d'orientation le long de faisceau lumineux incident. [18]

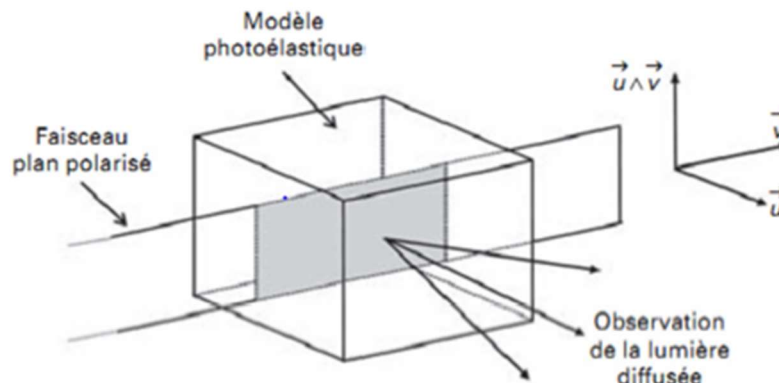


Figure I - 11 : Polarisation de la lumière diffusée. [9]

Si on observe suivant la direction d'observation U normale à la direction V de propagation du faisceau, l'intensité lumineuse diffusée est polarisée rectilignement suivant la direction U^V (Loi de Rayleigh), tout se passe comme si un polaroid se trouvait à l'intérieur du modèle. Ce polaroid fictif peut être utilisé comme un analyseur ou comme un polariseur. Il est associé à un polaroid réel placé à l'extérieur du modèle. En changeant la position du polaroid fictif à l'intérieur du modèle on peut accéder aux paramètres photoélastiques du modèle. La méthode de la lumière diffusée permet, d'une façon non destructive, la détermination des paramètres photoélastiques du modèle à savoir les directions principales ainsi que les contraintes principales. Le modèle peut avoir subi ou non un figeage des contraintes.

- Méthode de Cheng

Cette technique utilise le phénomène de diffusion comme analyseur, permet d'enregistrer simultanément les intensités de la lumière diffusée suivant deux directions d'observation faisant un angle de 45 degrés dans un plan perpendiculaire au faisceau. Les paramètres photoélastiques sont ensuite évalués à partir de ces enregistrements.

La figure I-12 montre le schéma du dispositif utilisé par Cheng. Cet appareil est composé d'un laser de gaz en hélium-néon à onde continue utilisé comme source de lumière. Il émet un faisceau polarisé linéairement, intense et monochromatique de 2 mm de diamètre.

Une lame quart d'onde est orientée pour produire un faisceau polarisé circulairement. Le modèle a été pris en charge sur une plate-forme dans la cuve d'immersion. Un fluide d'immersion (un mélange de naphthalène chloré et l'huile de paraffine), comportant le même indice de réfraction que le matériau du modèle, a été utilisé pour éliminer la réfraction et la réflexion à la surface du modèle.

Le point d'observation, O, dans le modèle a été défini comme le point d'intersection de la poutre et un plan transversal, comme indiqué sur la figure I-12. [19]

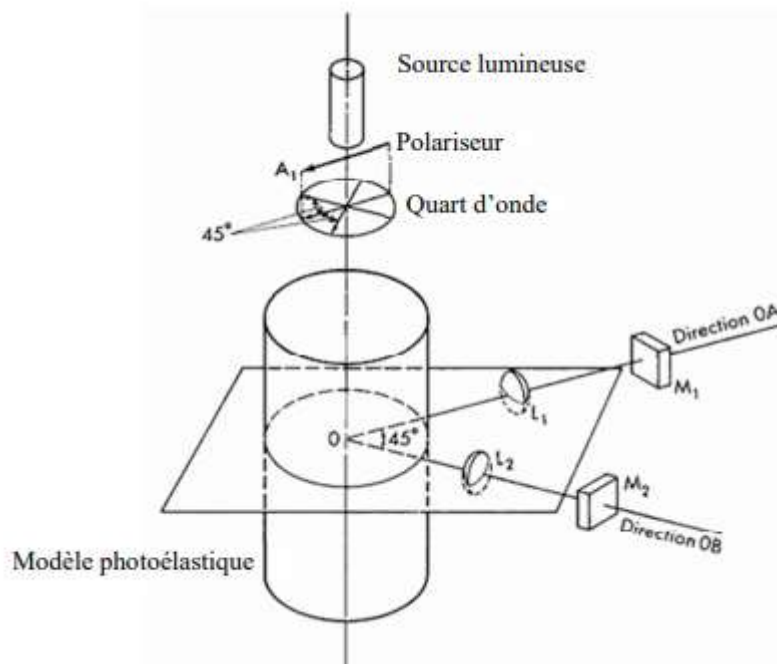


Figure I - 12 : Schéma du modèle de Cheng. [19]

I.6 Quelques travaux réalisés à l'aide de la méthode de photoélasticimétrie tridimensionnelle.

A.Bilek, dans son étude d'un emmanchement forcé de deux pièces cylindriques, a déterminé expérimentalement le champ des contraintes développé dans les deux pièces sous l'application de la pression après assemblage. Il a utilisé un exemple bidimensionnelle traité avec le logiciel PHOTO2D pour le traitement des images recueillies sur le polariscope. Les deux pièces emmanchées sont disposées sur le polariscope pour l'enregistrement des différentes images pour le traitement. Le logiciel permet de calculer le paramètre isocline et le paramètre isochrome (figure I-13). La valeur de la différence des contraintes principales est déterminée automatiquement le long d'une ligne quelconque appartenant au modèle. Les réseaux des

isostatiques sont tracés automatiquement par simple cliquer de la souris sur toute la surface du modèle. [12]

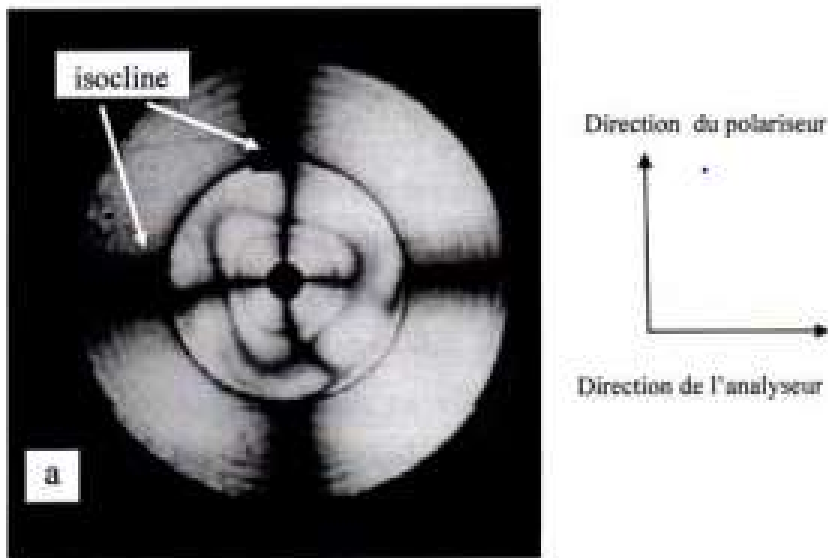


Figure I - 13: Isoclines obtenues sur le polariscope en lumière plane. [12]

Il a aussi fait une étude dans le cas d'un contact tridimensionnel entre un cylindre rigide en aluminium de 10 mm de diamètre pour appliquer une charge de 200daN sur un parallélépipède déformable en époxy. L'analyse expérimentale est réalisée à l'aide de la méthode de découpage optique. Les franges obtenues sont représentées sur la figure I-14 et la figure I-15.en analyse tridimensionnelle en utilisant le logiciel PHOTO3D. [12]



Figure I - 14 : Franges expérimentales obtenues pour une tranche de 10mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge. [12]



Figure I - 15 : Franges simulées pour une tranche de 10 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge. [12]

Les franges isochromes obtenues ne se referment pas sur elles même ; l'isocline cache les isochromes au centre de l'image. Une étude par éléments finis réalisée avec le logiciel CASTEM a été utilisée pour obtenir le champ de contraintes développé à l'intérieur du modèle. Dans le calcul par éléments finis le comportement du modèle a été considéré isotrope purement élastique. Les fichiers images obtenues à l'aide de CASTEM ont été traités à l'aide du logiciel SURFER pour obtenir des franges en noir et blanc et pour permettre la comparaison avec les franges expérimentales. Les franges simulées sont relativement comparables aux franges expérimentales.

A. Bilek a analysé un contact entre un cylindre rigide en aluminium de diamètre 15 mm pour appliquer un chargement de 20 N sur un cylindre déformable. Les contraintes ont été figées à l'intérieur du volume du cylindre à l'aide du processus de figeage. Le cylindre est ensuite introduit dans la cuve à liquide d'indice puis analysé en isolant des tranches de 6.5 mm d'épaisseur à l'aide des plans laser.

Les franges photoélastiques obtenues expérimentalement ont été comparées à celles obtenues par calcul à l'aide de la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel CASTEM.

Les contraintes développées dans les différentes tranches diminuent en s'éloignant de la direction d'application de charge. Par contre, les franges photoélastiques sont visibles et sont les mêmes sur la partie inférieure du modèle.

- A.Germaneau, [20] dans son travail a mené une étude sur le développement de techniques de mesures dans le volume. Trois approches ont été développées pour étudier les effets mécaniques 3D dans les matériaux et les structures. Une approche par Corrélation d'Images Volumiques (CIV) associée à la microtomographie par rayons X, une approche en photoélasticimétrie 3D par découpage optique qui permet d'observer les différences de contraintes ou de déformations principales au cœur de structures fabriquées dans un matériau transparent et une approche par Corrélation d'Images Volumiques associée à la tomographie par découpage optique. Dans son travail il a exposé deux approches pour l'utilisation de ces méthodes. La première partie montre leur application pour l'étude d'un même système mécanique. Un chargement de compression effectué avec une touche plate cylindrique a été imposé sur une éprouvette contenant de la poudre de silice agglomérée. Celle-ci à l'avantage de provoquer une diffusion mixte de la lumière créant ainsi le phénomène de diffusion par les plus grosses particules et aussi la diffusion de Rayleigh. D'un côté, on suit l'évolution d'un mouchetis 3D par corrélation volumique et de l'autre, on relève les variations des indices optiques par photoélasticimétrie 3D. il a présenté un essai de compression à touche sphérique réalisé sur deux éprouvettes identiques respectivement étudiées par photoélasticimétrie 3D et par corrélation volumique.

Pour comparer les résultats donnés par les deux techniques, la Figure I-16 et la Figure I-17 montrent les différences de déformations principales projetées suivant deux plans dans l'épaisseur du volume : sur un plan vertical suivant l'axe de chargement et sur un plan à 45° par rapport à la direction du chargement.

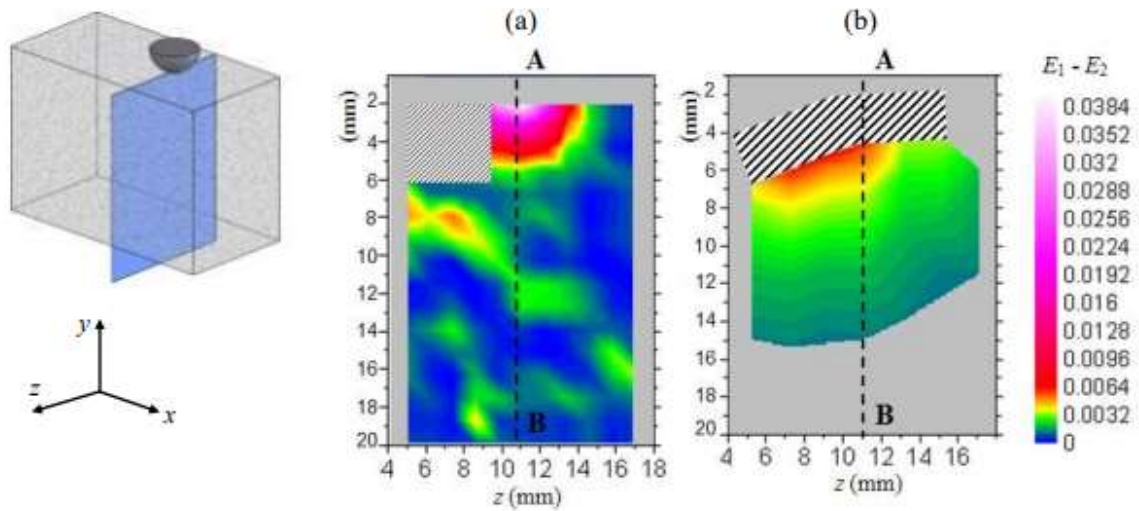


Figure I - 16 : Différence des déformations principales secondaires sur un plan vertical suivant l'épaisseur parallèle au plan y-z. [20]

- (a) A partir du champ de déplacement donné par la corrélation volumique
- (b) A partir des franges photoélastiques

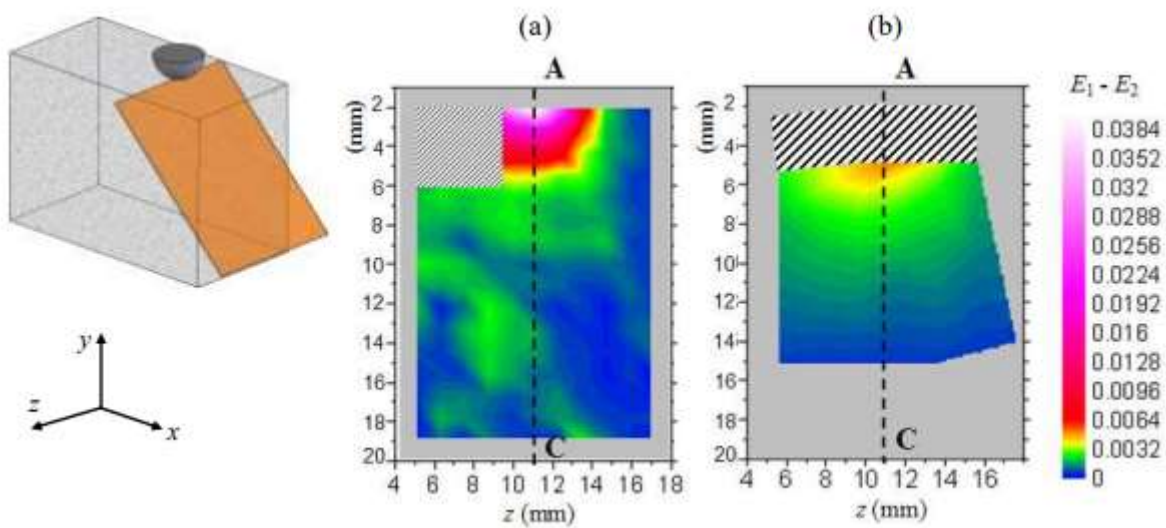


Figure I - 17 : Différence des déformations principales secondaires sur un plan suivant l'épaisseur à 45° par rapport au plan y-z . [20]

- (a) A partir du champ de déplacement donné par la corrélation volumique.
- (b) A partir des franges photoélastiques

La figure I- 18 montre le profil des déformations principales secondaires suivant une droite dans le plan médian de l'éprouvette.

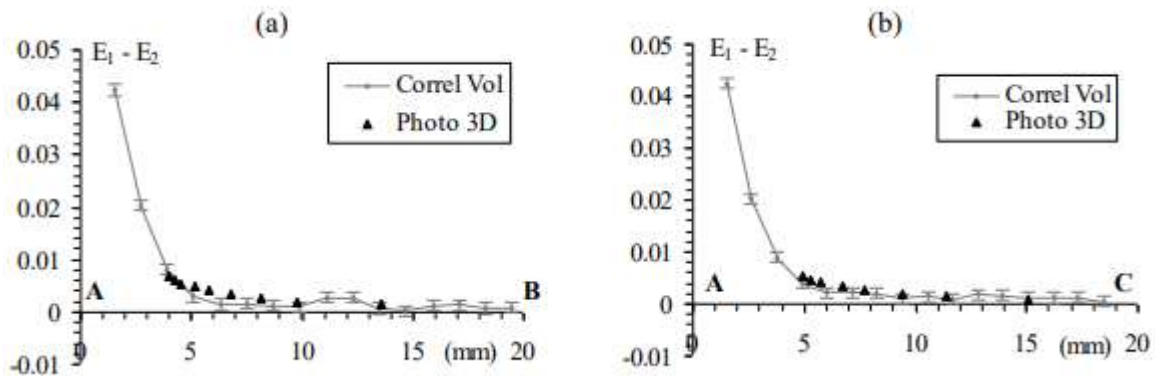


Figure I - 18 : Profils des déformations principales secondaires suivant une droite dans le plan médian de l'éprouvette. [20]

(a) Suivant la droite AB dans le plan parallèle au plan y-z

(b) Suivant la droite AC dans le plan à 45° du plan y-z

Les deux méthodes sont utilisées dans des conditions optimales afin de pouvoir évaluer leurs performances et leurs champs d'application. Dans ce cas, l'incertitude de mesure sur la différence des déformations est d'environ $2 \cdot 10^{-4}$ pour la photoélasticimétrie 3D et de $1 \cdot 10^{-3}$ pour la mesure des déformations par corrélation volumique. Cet essai de compression localisée présentant différents gradients de déformation confirme le fait que ces méthodes sont complémentaires. La photoélasticimétrie 3D est mieux adaptée dans le cas de petites déformations et elle permet de visualiser quasiment instantanément l'état de contrainte à l'intérieur d'une structure. En revanche, la corrélation volumique, qui est plus coûteuse en temps de calcul, présente de meilleures performances pour la mesure en grandes déformations et donne directement toutes les composantes des champs de déplacements et de déformations. Les deux méthodes peuvent être utilisées pour une étude de structures fabriquées dans un matériau modèle. [20]

I.7 Conclusion

Grâce au progrès de l'informatique et au développement des logiciels de simulations, le problème de contact mécanique peut être analysé numériquement. L'étude expérimentale prend en charge le problème de contact mécanique en utilisant la méthode de la photoélasticimétrie qui exploite le caractère biréfringent des modèles en époxy pour visualiser les réseaux d'isochromes et d'isoclines.

Dans ce chapitre on a cité quelques travaux liés aux problèmes du contact mécanique, qui ont été étudiés et on a exposé les différentes méthodes d'analyse par la photoélasticimétrie qui exploitent le caractère biréfringent des modèles en époxy pour visualiser les réseaux d'isochromes et d'isoclines. Cette méthode expérimentale, est d'un appui primordial aux méthodes numériques développées grâce aux progrès de l'informatique et de logiciels de simulation car elle permet de valider les modèles éléments finis.

Chapitre II

Généralités sur la photoélasticimétrie

II.1 Introduction

Le présent chapitre a pour but de présenter la méthode de la photoélasticité qui est une technique expérimentale fondée sur la physique des ondes lumineuses et la biréfringence de certains matériaux. C'est une méthode principalement optique qui permet l'analyse des champs de contraintes dans le modèle qui vient compléter des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis. Cependant, ce chapitre met l'accent sur les franges photoélastiques permettant la mesure des champs de contraintes.

La photoélasticimétrie s'est développée au début du 20^{ème} siècle, c'est Maxwell qu'il a réalisé la première étude de photoélasticimétrie plane.

Les méthodes de mesures optiques sont couramment utilisées dans les domaines du contrôle industriel et de la caractérisation mécanique expérimentale. Ces méthodes permettent d'avoir accès à des cartographies de grandeurs physiques comme l'analyse complète du champ des contraintes. Par ailleurs, les techniques optiques permettent de simuler des structures complexes, on utilise généralement des modèles biréfringents en époxy donc peu coûteux, toujours sans contact et souvent sans préparation de surface, ce qui rajoute à leur intérêt.

II.2 La photoélasticité

La photoélasticité est une technique expérimental d'analyse des contraintes qui est particulièrement utile pour les éléments ayant une géométrie complexe, des conditions de charge ou les deux. Dans ces cas, les méthodes d'analyse (méthodes strictement mathématiques) peuvent être lourdes ou impossibles et l'analyse par une approche expérimentale peut être plus appropriée. Étant une méthode optique, la photoélasticité présente l'avantage de fournir des informations tant visuelles que quantitatives en plein champ. [21]

II.3 Principe de la photoélasticimétrie

La photoélasticimétrie est une technique qui est basée sur les variations d'indice optique d'un matériau transparent. Le matériau isotrope optiquement au repos devient anisotrope

lorsqu'il est soumis à un chargement mécanique, cette propriété est le phénomène de biréfringence.

Ce phénomène peut être étudié en analysant la façon dont la polarisation de la lumière est transformée après le passage à travers le matériau. Par exemple, une onde lumineuse polarisée rectilignement pourra ressortir polarisée elliptiquement. Cela s'explique par le fait que les deux composantes de l'onde subissent un retard l'une par rapport à l'autre. Ce retard est directement relié aux contraintes dans le matériau. On peut donc mesurer les contraintes grâce à cette modification de la polarisation. Le retard entre les deux composantes de l'onde correspond à un déphasage qui dépend de la longueur d'onde, c'est-à-dire de la couleur. C'est pourquoi les images obtenues avec de la lumière blanche présentent des irisations colorées. Expérimentalement, sur un polariscope: une lumière monochromatique, polarisée à l'aide d'un polariseur, est envoyée sur le modèle à analyser, puis passe à travers un second polaroid (analyseur).

Principalement; la lumière polarisée rectilignement va se réfracter selon le trajet qu'elle emprunte dans le matériau et se décompose en deux rayons distincts autonomes qui ont la même fréquence mais sont déphasés l'un par rapport à l'autre avec un retard optique δ . L'analyseur va donc éteindre ou pas cette lumière, on verra ainsi apparaître des zones claires ou sombres. De plus, en utilisant de la lumière blanche, chaque couleur éclaircirait des zones différentes, et on verrait apparaître des irisations colorées. [19]

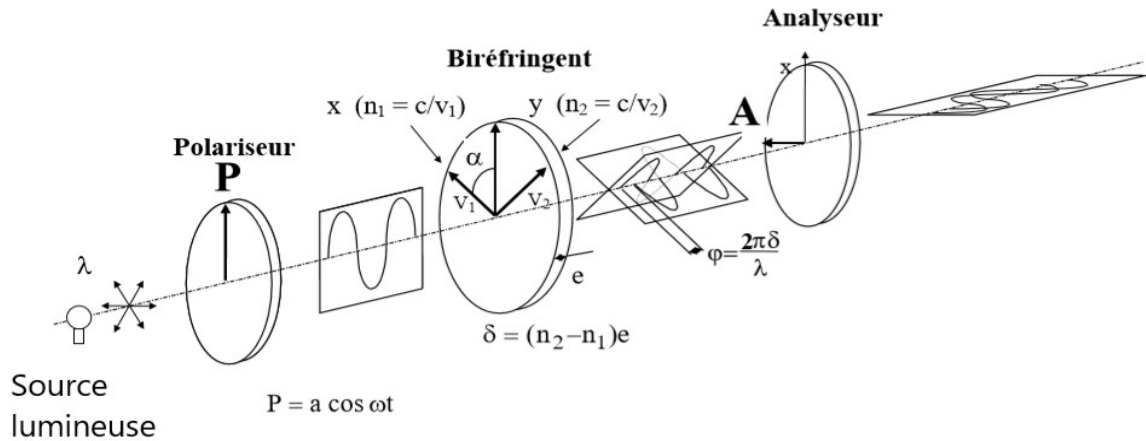


Figure II - 1: Propagation de la lumière à travers un modèle photoélastique.[20]

L'intensité lumineuse obtenue sur l'analyseur (Figure II-1) est donnée par la relation suivante :

$$I = a^2 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (\text{II-1})$$

Les termes $\sin^2 2\alpha$ et $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ donnent, respectivement, les directions principales des contraintes et les valeurs de leur différence avec la relation suivante (équation II-2) :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e} \quad (\text{II-2})$$

Où N est l'ordre de la frange obtenu expérimentalement à partir du modèle de frange isochromatique, e est l'épaisseur de la tranche et f est la constante de la frange qui dépend de la longueur d'onde de la lumière λ utilisée et de la constante optique C du matériau modèle. [23]

$$f = \frac{\lambda}{C} \quad (\text{II-3})$$

La valeur de la constante de la frange f est déterminée expérimentalement avant de faire les essais.

II.4 La biréfringence

La biréfringence est un phénomène physique qui peut se caractériser de la façon suivante : si une lumière plane se présente suivant une direction de polarisation quelconque par rapport

aux axes du modèle biréfringent, à l'intérieur du modèle tout se passe comme si elle était décomposée en deux ondes perpendiculaires qui progressent avec des vitesses de propagation différentes. À la sortie du modèle, deux ondes P_x et P_y se trouvent en présence avec des directions de polarisation perpendiculaires dont l'une est en retard par rapport à l'autre, mais qui progressent de nouveau à la même vitesse. Ce retard optique δ est une caractéristique du phénomène de biréfringence. Ainsi si on observe un objet quelconque à travers une lame biréfringente, ce dernier nous apparaîtra dédoublé. Ils existent deux types de biréfringence, la biréfringence naturelle et la biréfringence accidentelle. [23]

II.4.1 La biréfringence naturelle

La biréfringence naturelle a lieu par exemple dans les matériaux tels que les cristaux où la vitesse de propagation varie suivant les directions propres du milieu. Le phénomène de biréfringence se caractérise par un retard optique (δ) entre les deux composantes à la sortie du corps biréfringent, certains corps présentent naturellement ce phénomène aussi appelé double réfraction. L'indice de réfraction passe par des valeurs minimum et maximum selon des directions qu'on appelle axes optiques principaux ou encore axes de biréfringence. Lorsqu'elle traverse un corps biréfringent, une lumière plane polarisée se divise en deux composantes autonomes (ondes polarisées planes) parallèles aux axes optiques principaux. [20]

Un corps transparent, naturellement biréfringent, placé entre deux polaroïds à axes perpendiculaires, l'un quelconque de ses axes étant parallèle à la direction de polarisation, ne modifie pas la zone d'extinction (figure II-2 a). Ce même corps biréfringent, placé obliquement laisse passer la lumière avec une couleur qui dépend de la biréfringence du corps (partie hachurée sur la figure II-2 b. C'est le phénomène de biréfringence naturelle. [19]

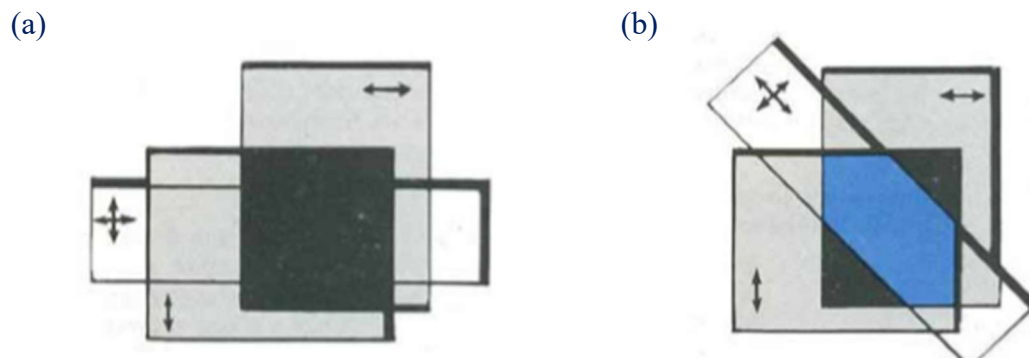


Figure II - 2 : Phénomène de biréfringence naturelle. [20]

(a) Les axes optiques du corps sont parallèles à ceux des polaroïds

- (b) Les axes optiques du corps biréfringent non parallèles à ceux des polaroïds. La couleur indique la présence de phénomène d'interférence (retard)

II.4.2 La biréfringence accidentelle

Les milieux dans lesquels, il n'y a aucune direction privilégiée (matière à l'état gazeux, liquide et amorphe) ne sont pas biréfringents, mais peuvent le devenir sous l'action d'une cause extérieure qui crée une direction privilégiée. (Figure II-3) c'est la biréfringence provoquée.

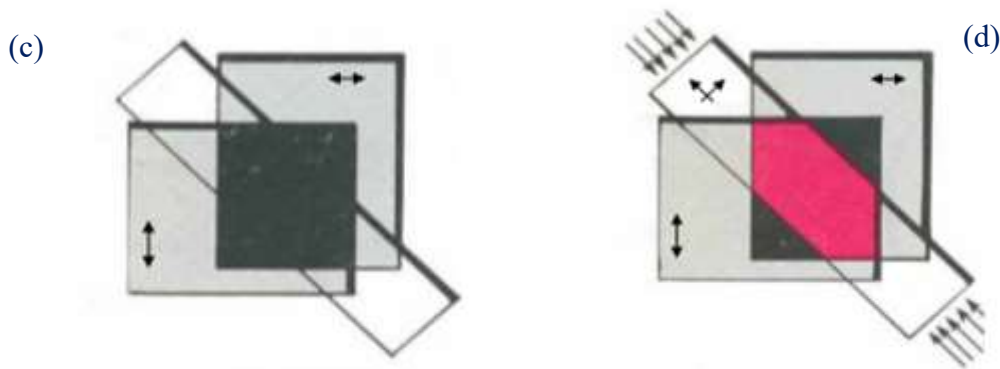


Figure II - 3 : Corps avec biréfringence accidentelle. [20]

- (c) Cas de contrainte nulle, pas de phénomène de biréfringence.
 (d) Apparition d'axes optiques principaux sous l'effet des contraintes.

Le milieu est caractérisé par un indice de réfraction n_0 valable dans toutes les directions au repos, et un ellipsoïde des indices lorsqu'il est soumis à des contraintes. Les lois liant les indices principaux aux contraintes principales ont été déterminées par Maxwell.

Les axes principaux de l'état de contrainte coïncident avec les axes optiques principaux, les indices de réfraction principaux, sont en relation linéaire avec les contraintes principales.

$$\begin{cases} n_1 = n_1(\sigma_1, \sigma_2) \\ n_2 = n_2(\sigma_1, \sigma_2) \end{cases} \Rightarrow n_1 - n_2 = c(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{II - 4})$$

Ces deux composantes vont vibrer selon des plans orthogonaux qui sont parallèles aux directions des contraintes principales (1 et 2). Elles ont la même fréquence mais sont déphasées l'une par rapport à l'autre (interférence possible), le retard optique δ entre ces deux composantes sera proportionnel à la différence des indices principaux donc à la différence entre les contraintes principales et à l'épaisseur "d" du matériau. [20]

$$\delta = c.d(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{II - 5})$$

II.5 Intérêts et applications

Pour comprendre l'utilité de cette méthode optique, citons certains domaines d'application :

II.5.1 Applications industrielles

La photoélasticimétrie permet d'Identifier instantanément les domaines critiques, en mettant en évidence les régions en situation de surtension et de sous-tension, d'optimiser la répartition des contraintes et de dimensionner en conséquence des composants qui seront sollicités mécaniquement dans les pièces et les structures. Elle permet également de détecter d'éventuelles contraintes résiduelles pouvant accidentellement se retrouver dans des pièces après usinage ou thermoformage. Ainsi, les industries automobile et aéronautique recourent à cette méthode, qui leur permet d'éprouver l'efficacité des protocoles de fabrication des pièces et de les contrôler.

II.5.2 Applications en architecture

La construction d'édifices architecturaux ou de génie civil nécessite la connaissance fine des contraintes au sein de la structure, afin d'en prévenir de possibles ruptures. Par exemple, en réalisant une maquette miniature de l'édifice en matériau photoélastique, il est possible d'accéder à des données pour étudier et comparer a posteriori les méthodes de construction des cathédrales de Chartres et Bourges. [24]

II.5.3 Applications en biomécanique

Face à des problèmes mettant en jeu la résistance d'un ensemble de pièces solides constituant une ossature, ou d'un ensemble de pièces telles que des dents destinées à effectuer des opérations de broyage, on a toutes les raisons de chercher à connaître le mieux possible les conditions dans lesquelles chacune des pièces en question résiste aux efforts extérieurs auxquelles elle est soumise et de quelle manière elle transmet des efforts aux éléments voisins. La photoélasticité apporte aussi des éléments pertinents, notamment pour améliorer les systèmes de consolidation par plaques et vis dans le traitement des fractures complexes.

II.6 Le polariscope

Un polariscope est une installation optique qui permet d'analyser la biréfringence qui se produisent lorsque la lumière polarisée passe à travers un modèle photoélastique sous contrainte.

II.6.1 Différents types de polariscopes:

Il existe plusieurs types de polariscopes

II.6.1.1 Polariscopes par réflexion :

Le procédé consiste à déposer à la surface des structures réelles, une mince couche de produit photoélastique. La surface de la structure est rendue réfléchissante à l'aide d'une peinture ou par collage d'une plaque à base de poudre d'aluminium, c'est la structure qui impose ses déformations au revêtement biréfringent, on mesure donc des déformations qui sont converties en contraintes.

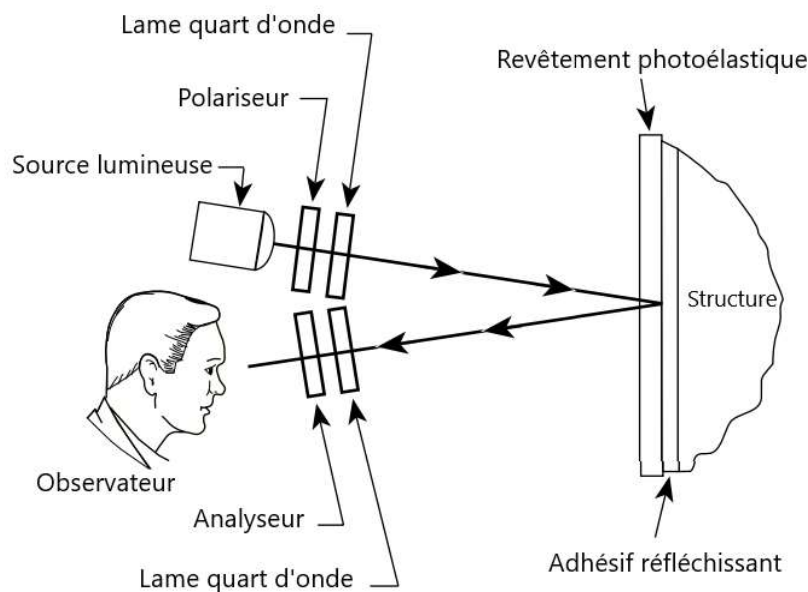


Figure II - 4 : Polariscopes à réflexion. [25]

Le polariscope comprend : une source lumineuse ; on peut utiliser la lumière monochromatique (une seule longueur d'onde) ou la lumière polychromatique. Un filtre polariseur, un filtre analyseur (polaroïds) et deux lames quart d'onde.

La lumière polarisée incidente est réfléchiée par le matériau, soit par la couche réfléchissante déposée sur la pièce et traverse deux fois le revêtement et génère des isoclines et des isochromes. Les filtres polarisants sont placés du même côté de la pièce. L'exploitation des

franges obtenues permet de retrouver les valeurs et les directions principales des contraintes agissant sur la structure étudiée. [25]

II.6.1.2 Polariscopes à transmission

II.6.1.2.1 Polariscopes rectilignes :

Dans un polariscopes plan (Figure II-5), le modèle est placé entre deux polarisateurs croisés. Ces polarisateurs sont appelés "polariseur" et "analyseur" respectivement. Avant d'insérer le modèle, ou lorsque celui-ci n'est pas chargé, aucune lumière ne traverse l'analyseur. Lorsque le modèle est chargé, l'onde lumineuse plane polarisée issue du polariseur se décompose suivant les directions principales, 1 et 2, en passant à travers le modèle. À la sortie du modèle, ces deux composantes sont déphasées. Lorsque ces deux ondes traversent l'analyseur, seules leurs composantes selon l'axe de l'analyseur sont transmises et elles sont toujours d'amplitudes égales. Elles vibrent maintenant dans un même plan et peuvent interférer entre-elles causant des phénomènes que peut voir l'observateur. [20]

Ainsi dans un tel polariscopes, l'intensité I est nulle (franges noires) si :

$$\sin 2\alpha = 0 ; \alpha = k \frac{\pi}{2}$$

Ce sont les lignes isoclines, ces lignes sont indépendantes de l'intensité de la charge appliquée et de la longueur d'onde utilisée. On peut les faire varier soit en tournant le modèle autour de l'axe z dans le polariscopes, soit, ce qui est plus simple, en tournant l'ensemble polariseur analyseur. Elles indiquent la position des points dont l'une des directions principales des contraintes est parallèle à la direction du polariseur.

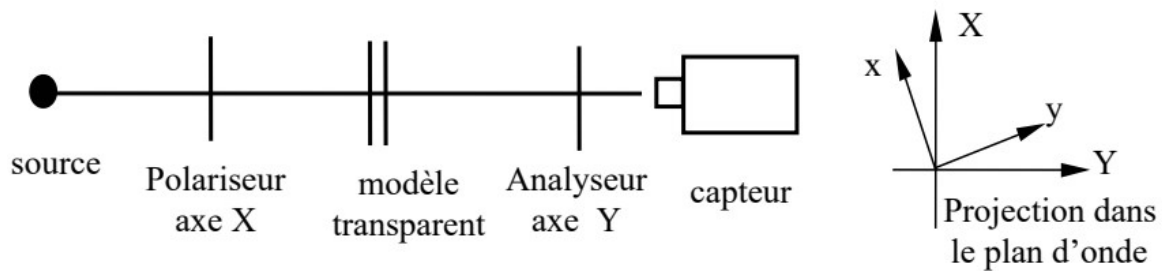


Figure II - 5 : Polariscopes plan à transmission..

II.6.1.2.2 Polariscopes circulaire à transmission

Le premier élément optique après la source lumineuse est le polariseur, suivi d'une plaque quart d'onde placée à 45° du plan de polarisation. La première plaque quart d'onde convertit la lumière polarisée dans le plan en lumière polarisée circulairement. On dit que la lumière est polarisée circulairement puisque la plaque quart d'onde est à 45° par rapport à la lumière polarisée, ce qui fait que les deux composantes ont la même amplitude mais sont déphasées de 90° . Ainsi, si les deux composantes sont additionnées de manière vectorielle, la pointe du vecteur lumière résultant trace un cercle lorsqu'elle tourne. La deuxième plaque quart d'onde convertit la lumière polarisée circulairement en lumière polarisée plane qui passe à travers l'analyseur. Dans le polariscopes circulaire, l'onde lumineuse pénétrant dans le modèle est polarisée circulairement et n'est donc plus influencée par l'orientation des contraintes principales du modèle. Il n'y aura plus d'isoclines et seules les isochromes apparaîtront. [21]

II.6.2 Les éléments du polariscopes circulaire

Le polariscopes est composé de plusieurs éléments et à chacun ces fonctions et son importance.

II.6.2.1 Les polaroids :

Le filtre polaroid est un matériau transparent formé de longues chaînes d'hydrocarbures d'iode qui crée des électrons libres pouvant se déplacer le long de ces chaînes. La composante de l'onde lumineuse parallèle aux chaînes est absorbée, seule la composante perpendiculaire passe avec une faible atténuation.

II.6.2.2 Polariseur

Un polariseur est un filtre polarisant qui recevant de la lumière naturelle non-polarisée, permet d'obtenir une lumière polarisée rectilignement dans une certaine direction. Dans ce cas,

cette direction est appelée l'axe du polariseur. Les polariseurs sont présents et utilisés dans de nombreux instruments d'optique.

II.6.2.3 Analyseur

L'analyseur est un filtre polarisant qui recevant de la lumière polarisée permet de déterminer le plan de polarisation d'une lumière incidente par extinction du faisceau sortant de l'analyseur. Tout polariseur peut servir d'analyseur et vice et versa. [19]

L'emplacement des différents polariseurs sont illustrés sur la figure (II- 6)

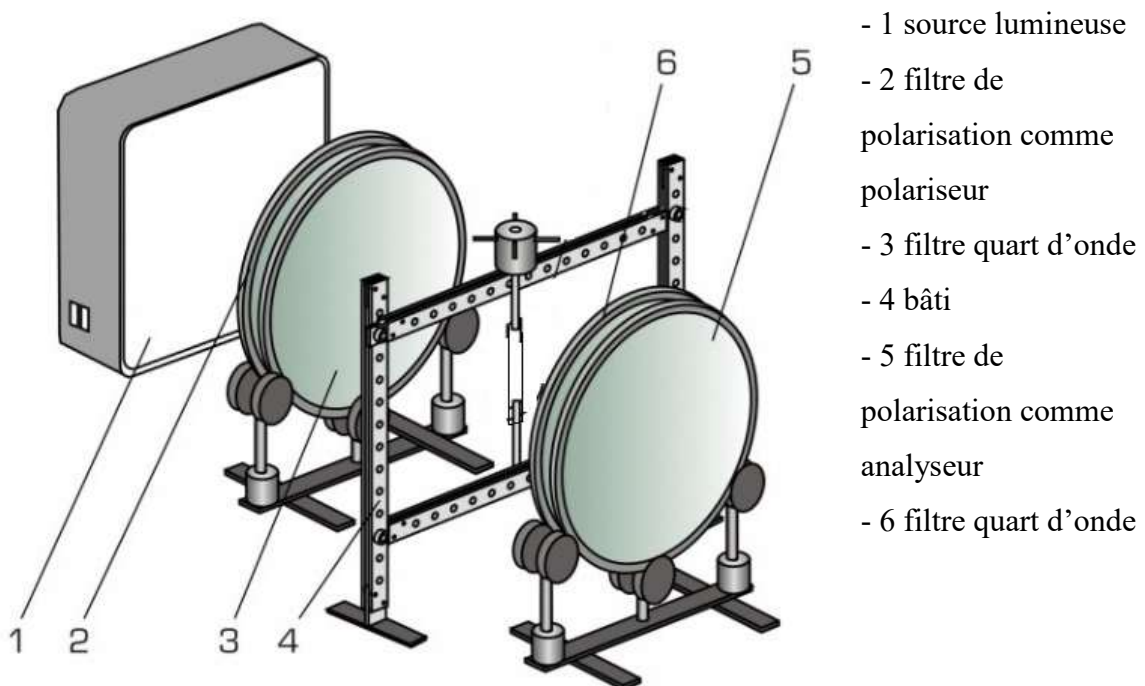


Figure II - 6: Essais photoélastique à l'aide d'un polariscope circulaire. [24]

II.6.1.2.3 lame quart d'onde

Les lames quart d'onde sont utilisé dans les polariscope circulaire pour polariser circulairement une onde lumineuse et éliminer les isoclines et ne laisse voir que les isochromes.

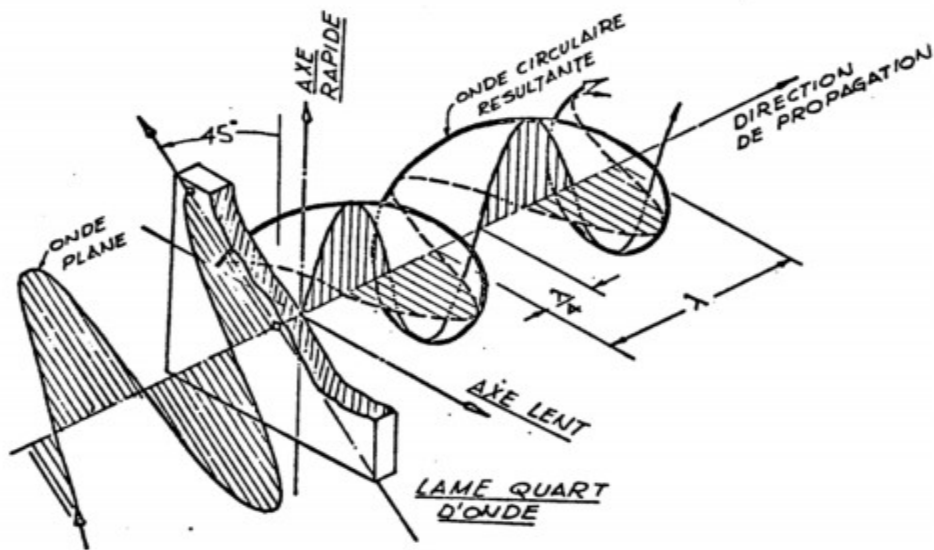


Figure II - 7 : Lame quart d'onde. [20]

Une lame quart d'onde est une lame de mica ou une mince feuille d'alcool polyvinylique orientée comprise entre deux feuilles d'acétate de cellulose. C'est une lame biréfringente pour laquelle le déphasage est $\varphi = \pi/2$.

$$\delta = \left(K + \frac{1}{4}\right)\lambda \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = 2K\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{II - 6})$$

On peut ajouter au polariscope deux lames quart d'onde intercalées entre les polaroïds qui ont pour fonction de transformer une vibration rectiligne en une vibration circulaire et l'inverse, ce changement dans le mode de vibration est assuré par une différence introduite égale au quart d'onde de la lumière polarisée. Les lames quart d'onde sont croisées entre elles et toujours intercalées avec leurs axes optiques à 45° de ceux du polariseur et de l'analyseur. L'effet de la seconde lame est de restituer une lumière polarisée plane. [27]

II.7 Sources lumineuses

D'après la théorie de Maxwell le comportement de la lumière permet de décrire les phénomènes photoélastiques. La lumière est la conséquence de mouvements vibratoires et se propage par ondes sinusoïdales. Une onde monochromatique comporte deux grandeurs vectorielles sinusoïdales en phase et perpendiculaires : le champ électrique et le champ magnétique. La lumière monochromatique est dite polarisée si chacun des vecteurs champs reste parallèle à une direction fixe.

Deux sortes de sources lumineuses sont utilisées pour ces études ; une source de lumière polychromatique (blanche) et une source de lumière monochromatique.

❖ **Source de lumière polychromatique**

Elle comprend toutes les longueurs d'onde visibles qui sont comprises entre 4000 Å et 7000 Å. C'est une lampe ordinaire dont la lumière permet de mieux distinguer les isochromes (en couleurs) des isoclines (noires), sauf pour la frange zéro qui est noire.

❖ **Source de lumière monochromatique** (une seule longueur d'onde λ)

Cette lumière est obtenue en filtrant la lumière blanche à l'aide de filtres monochromatiques. Cette lumière permet l'observation aisée des isochromes avec la lumière circulaire, les isoclines étant éliminées.

Pour la lampe à vapeur de mercure cette lumière permet une visualisation plus nette des franges. [26]

II.8 La polarisation de la lumière

C'est une propriété d'une onde lumineuse qui décrit le comportement des vecteurs électriques et magnétiques au cours de sa propagation. Plus précisément, la polarisation d'une onde lumineuse indique les directions que prend, au cours de l'évolution temporelle ou le long d'un rayon lumineux donné, le vecteur champ électrique (ou le vecteur champ magnétique) dans le plan orthogonal au vecteur d'onde.

Bien souvent, la lumière naturelle n'est pas polarisée, ce qui signifie que les "Déplacements" des vecteurs champs électrique et magnétique sont désordonnés. Une onde est dite non polarisée si E a une direction qui varie aléatoirement.

II.8.1 Lumière polarisée rectilignement

Le vecteur induction magnétique \vec{B} reste parallèle à une direction fixe x_1 . Si de plus cette lumière est monochromatique, et si elle se propage suivant x_3 , \vec{B} s'écrit :

$$\vec{B} = B_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x_3}{c} \right) + \varphi \right) \vec{x}_1 \quad (\text{II - 7})$$

Avec :

ω : pulsation

C : célérité du plan d'onde dans la direction n. [13]

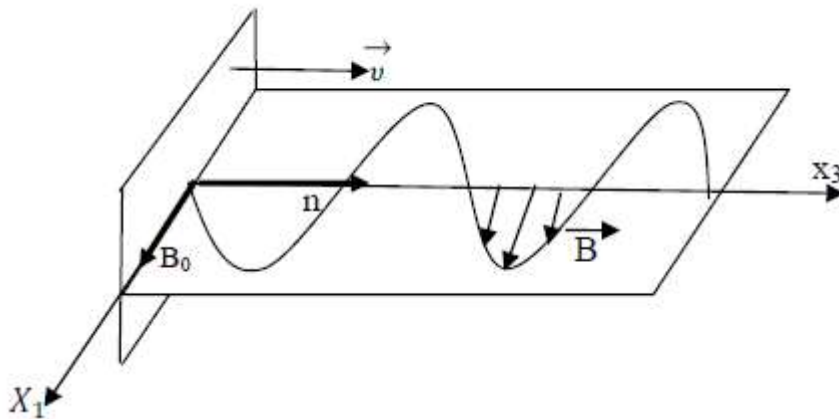


Figure II - 8 : Lumière polarisée rectilignement suivant x. [28]

On peut la voir comme une polarisation elliptique pour laquelle l'un des deux axes de l'ellipse de polarisation serait réduit à un point.

Le champ électrique s'écrit alors de même que pour une lumière polarisée elliptiquement avec :

$$\frac{E_{x0}}{E_{y0}} = \text{cste} \text{ et } \varphi = 0 \quad (\text{II - 8})$$

II.8.2 Lumière polarisée elliptiquement

Si le champ E dessine une ellipse dans le plan d'onde, on parle de polarisation elliptique.

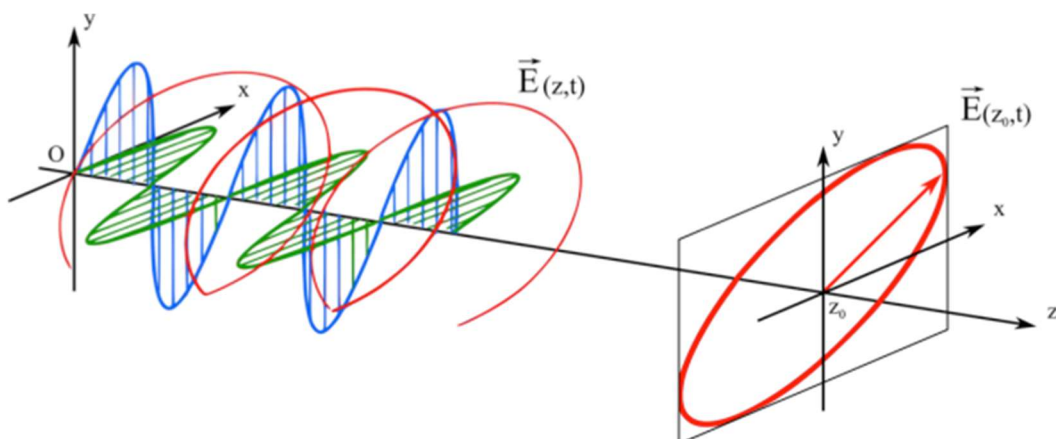


Figure II - 9 : Onde polarisée elliptiquement. [24]

C'est le cas le plus général. On peut alors décomposer le champ électrique selon deux composantes perpendiculaires :

$$E_x = E_{x0} \cos(kz - \omega t) \quad (\text{II - 9})$$

$$E_y = E_{y0} \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad (\text{II - 10})$$

Où $\omega = \frac{2\pi}{c}$ est la pulsation de l'onde électromagnétique, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ le nombre d'onde et φ le déphasage entre les deux composantes.

II.8.1 Lumière polarisée circulairement

Si le champ E dessine un cercle dans le plan d'onde, on parle de polarisation circulaire. Le sens de rotation de E définit une polarisation :

Droite, si l'onde tourne dans le sens trigonométrique et gauche, si l'onde tourne dans le sens horaire. Ceci est vrai si on se place du point de vue de l'observateur. Les directions doivent être interverties si on se place du point de vue de la source.

On peut alors écrire les composantes du champ électrique comme suit :

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (\text{II - 11})$$

$$E_y = E_0 \sin(kz - \omega t) \quad (\text{II - 12})$$

Où E_0 est l'amplitude commune des deux composantes du champ électrique. La phase vaut alors $\varphi = \frac{\pi}{2}$. [13]

II.9 Notion de champ claire et champ obscure

Suivant que l'on a un polariscope plan ou circulaire, le trajet de la lumière dans le polariscope ne sera pas le même. De plus, suivant la position des différents éléments, on peut obtenir en sortie un champ clair ou un champ obscur:



Polariscope rectiligne P //A Polariscope rectiligne P et A Polariscope circulaire P //A
sont croisés

Figure II - 10: Images d'un modèle relevées sur les différentes configurations du polariscope [27]

❖ **Polariscope plan :**

- polariseur et analyseur croisés = champ obscur
- polariseur et analyseur parallèles = champ clair

❖ **Polariscope circulaire :**

- polariseur et analyseur croisés et lames quart d'onde croisées champ obscur.
- Polariseur et analyseur parallèles et lames quart d'onde croisées champ clair. [29]

II.10 Description de la réfraction

En physique des ondes le phénomène de réfraction est la déviation d'une onde lorsque la vitesse de celle-ci change entre deux milieux (par exemple : de l'air à l'eau, ou le contraire...). La vitesse de propagation est en fonction du milieu dans lequel se répand l'onde. En changeant de milieu la vitesse change et la lumière se réfracte. C'est ce phénomène qu'on observe lorsque l'on regarde une paille dans un verre : celle-ci paraît brisée.

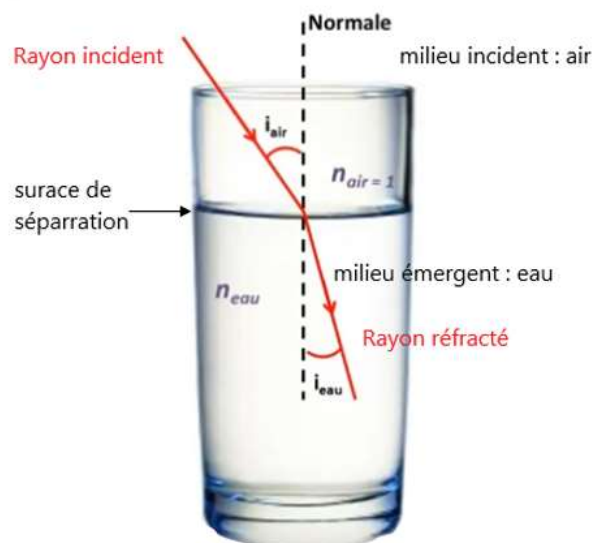


Figure II - 11 : schéma de réfraction de la lumière. [31]

La propriété qui caractérise les différents milieux transparents est la « réfringence », qui se traduit par une valeur numérique qui est : « l'indice de réfraction ».

II.10.1 Définition de l'indice de réfraction

C'est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide C_0 et la vitesse de la lumière V dans le milieu transparent.

$$n = \frac{C_0}{V} \quad (\text{II - 13})$$

C_0 : est la vitesse de la lumière dans le vide

V : vitesse de la lumière dans le milieu considéré

II.11 La constante de frange

D'après l'équation de MAXWELL la constante de frange " f " est le rapport entre la différence des contraintes principales sur l'unité d'ordre de frange en un point du modèle ayant comme épaisseur e .

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf}{e} \Rightarrow f = \frac{e}{N} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{II - 14})$$

Remarque : En champ obscur, les franges isochromes correspondent aux ordres de frange entiers. En champ clair, les bandes noires quant à elles correspondent à des demi-ordres c'est à dire (1/2, 3/2 ...). [27]

II.12 Les isoclines

Une ligne isocline est le lieu des points où la direction de l'une des contraintes principales est parallèle à la direction de polarisation. Elles apparaissent en noir et lorsqu'on tourne simultanément le polariseur et l'analyseur, les isoclines se déplacent alors vers les points du modèle où les contraintes principales sont parallèles aux nouveaux axes, ces lignes apparaissent toujours lorsque le polariseur et l'analyseur sont croisés (champ sombre).

L'apparition de ces franges noires signifie qu'en ce point l'intensité lumineuse est nulle.

Pour : $\sin^2(2\alpha) = 0$ d'ou $\alpha = N \pi/2$

$$I = a^2 \sin^2 2\alpha \sin \frac{\varphi}{2} = 0 \quad (\text{II - 15})$$

Après avoir analysé plusieurs directions, tous les 10 degrés par exemple, on obtient une cartographie de croix donnant les directions des contraintes principales en tous points. Cette carte des isoclines sert en réalité d'étape intermédiaire pour obtenir (par une construction graphique) les lignes isostatiques: lieux d'égale valeur de contrainte principale. La carte des isostatiques s'avère utile pour les problèmes d'optimisation de forme d'une pièce ou pour le placement de jauges de contrainte. [30]

II.12.1 Propriétés des isoclines

- Les isoclines ne se coupent jamais (sauf dans les points isotropes où les contraintes principales sont les même dans toutes les directions).
- Un contour libre d'une pièce est une isocline.
- Un axe qui est symétrique simultanément à l'application de la charge et à la géométrie de la pièce coïncide avec une isocline

II.12.2 Élimination des isoclines

En lumière plane, les deux types de franges (isoclines et isochromes) apparaissent de manière indissociable et ceci peut fausser l'étude, ce qui nous oblige à supprimer les franges isoclines par l'utilisation d'une onde circulaire qui procède à l'élimination des isoclines ainsi la répartition de contraintes dans le modèle est obtenue. Calcul numérique des franges isoclines

Dans le programme de simulation, les différentes valeurs du paramètre isocline α peuvent être calculées avec l'équation (II-16) qui peut être obtenue facilement à partir du cercle de contraintes de Mohr.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad (\text{II} - 16)$$

α : angle de rotation du polaroïd.

Le terme $\sin^2(2\alpha)$ peut donc être calculé et affiché. La comparaison est alors possible avec les franges isoclines qui sont les franges sombres.

L'avantage avec le modèle numérique est la précision des valeurs obtenu. Il convient de noter qu'il n'est pas possible d'observer expérimentalement uniquement les isoclines alors que pour la solution par éléments finis, cela est possible. De bons accords sont observés entre les franges sombres isoclines expérimentales et simulées pour des valeurs similaires de l'angle α . [22]

II.12.3 Analyse des isochromes

Une ligne isochrome apparaît comme le lieu des points d'égale valeur de la différence des contraintes principales, en effet :

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{N\lambda}{Ce} \quad (\text{II} - 17)$$

N : ordre de frange d'isochromes.

λ : longueur d'onde utilisée.

C : constante photoélastique.

e : épaisseur du modèle.

Le réseau d'isochromes s'analyse en comptant les franges, c'est-à-dire en repérant la valeur de N. Dans le cas d'un éclairage en champ obscur, l'ordre zéro est toujours noir.

Dans le cas d'un polariscope rectiligne, l'analyse des isochromes est difficile du fait de la présence des lignes isoclines noires lorsqu'on travaille avec polariscope rectiligne. [19]

On rappelle que l'intensité lumineuse est donnée par :

$$I = a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (\text{II} - 18)$$

Cette intensité est similaire à celle obtenue lors de l'analyse photoélasticité bidimensionnel sur un polariscope circulaire à champ obscur. L'image isochromes de la figure II-12 représente le terme $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

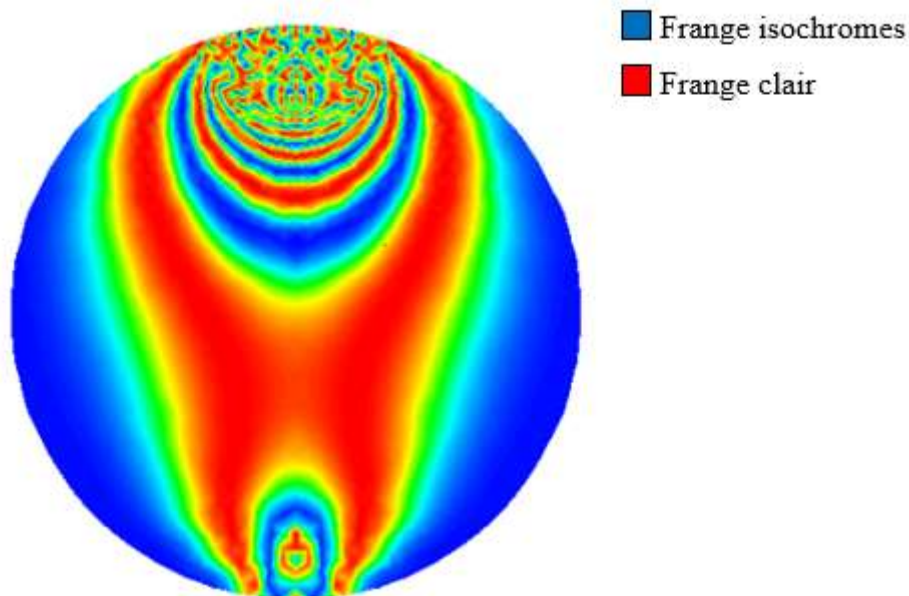


Figure II - 12: Représentation des Franges éléments finis pour une tranche [14]

II.12.4 Caractéristique d'un point isotrope

- On représente un point isotrope par une frange noire.

- Dans un point isotrope, la différence des contraintes $(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 0$.
- Toutes les lignes isoclines passent par le point isotrope. Ceci implique que toutes les directions sont principales dans ce point
- Il existe deux formes possibles des isostatiques autour des points isotropes : attractif et répulsif. [20]

Que ce soit dans le montage en lumière circulaire ou entre polariseur et analyseur croisés, un tel point restera noir en lumière blanche ou monochromatique quelle que soit l'orientation du couple polariseur analyseur. [22]

II.12.5 Les isostatiques

Les isoclines donnent l'ensemble des points où les directions principales des contraintes sont parallèles ou perpendiculaires à une direction repérée sur le polaroid. Ceci ne nous donne pas une bonne image de l'orientation des contraintes principales. Pour mieux voir les trajectoires des contraintes principales on trace les lignes isostatiques. [32]

Ce sont des lignes de forces tangentes aux directions principales composées de deux familles orthogonales : une tangente à σ_1 et l'autre à σ_2 . Elles sont tracées à partir des isoclines.

En un point B2 (figure II-13) de l'isocline θ_2 , les directions principales des contraintes sont données par le dièdre incliné de θ_2 . Les isostatiques sont donc tangentes à ce dièdre.

Pour tracer une isostatique passant par A1, on relie le point A1 au point A2 avec une droite inclinée de $(\theta_1 + \theta_2)/2$ et ainsi de suite. [19]

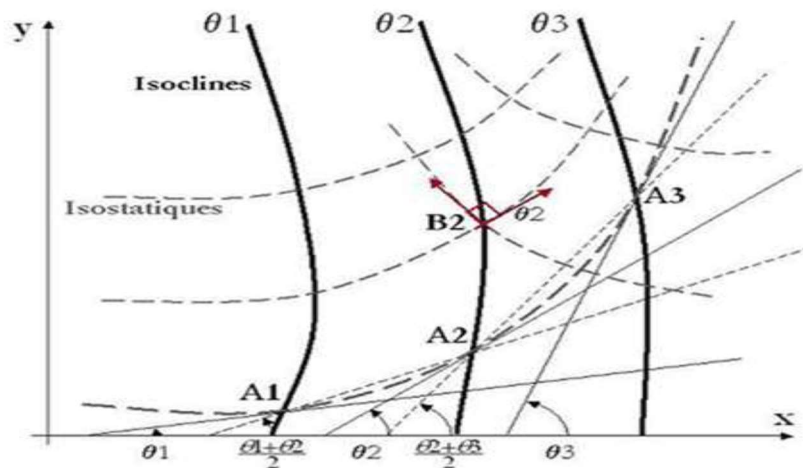


Figure II - 13: Tracé des isostatiques à partir des isoclines.[19]

II.12.5 Propriétés des isostatiques

- Lorsqu'une isostatique présente une forte courbure, la contrainte principale qui lui est perpendiculaire varie rapidement
- Lorsqu'une isostatique est rectiligne, la contrainte principale qui lui est perpendiculaire est stationnaire et est généralement soit maximale, soit minimale
- Une isostatique droite est aussi une isocline
- Les axes de symétrie sont des isostatiques
- La variation des contraintes dépend de la courbure des isostatiques

II.13 Conclusion

Ce chapitre a traité, en premier lieu, le phénomène de biréfringence utilisé en photoélasticité bidimensionnelle pour analyser les contraintes dans les modèles sollicités. On a défini aussi le principe du polariseur qui permet d'utiliser ce phénomène de biréfringence en lumière plane ou en lumière circulaire. Par la suite, il a traité les franges isoclines et les franges isochromes obtenues qui permettent de déterminer respectivement les directions des contraintes principales (isoclines) et les valeurs des contraintes de cisaillement maximales (isochromes) dans les modèles étudiés.

Chapitre III

La théorie de Hertz et la mécanique des contacts

III.1 Introduction

Dans des conditions normales de fonctionnement d'un contact, les avaries sont dues soit à de la fatigue de contact (dégradation dans le volume), soit à la détérioration des surfaces de contact par frottement (dégradation surfacique), ce qui entraîne l'usure des pièces en contact. Ces phénomènes sont principalement dus à la présence des contraintes tangentielles tant en surface qu'en sous surface. L'idée est d'agir sur le champ des contraintes afin de retarder la dégradation des composants en contact. Pour cela, nous mènerons une approche analytique du contact de Hertz.

Hertz a été l'un des premiers à étudier le cas du contact de deux surfaces l'une sur l'autre. Pour pouvoir traiter les efforts de contact séparément de la distribution générale de l'effort dans les corps, Hertz a formulé les hypothèses suivantes :

- les corps en contact doivent être des massifs, élastiques, semi-infinis, non-conformes et lisses à l'échelle micro et macro géométriques.
- les corps sont chargés sur une petite partie de leur surface, avec les dimensions de la zone de contact inférieures à celles des corps en contact.

Il est donc très important pour les concepteurs de machines de connaître les contraintes et les déformations au voisinage et dans les zones de contact pour un bon dimensionnement des différents éléments. Les contraintes sont généralement concentrées au voisinage des zones de contact et diminuent rapidement en s'éloignant de ces zones.

III.2 Historique

La mécanique de contact avant tout est liée à Heinrich hertz. En 1882 Hertz résout le problème impliquant un contact entre deux corps élastique avec des surfaces courbées (non conforme).

Il a posé comme hypothèse que chacun des deux corps peut être considéré comme un espace semi infini élastique chargé sur une surface elliptique relativement très faible devant les

Chapitre III : La théorie de Hertz et la mécanique des contacts

dimensions des solides en contact. Ce résultat constitue encore aujourd'hui une des bases de la mécanique de contact. [33]

III.3 Surface de contact

Dans le cas du contact de Hertz, $\pm (a)$ très petit devant les rayons des courbures des corps en contact.

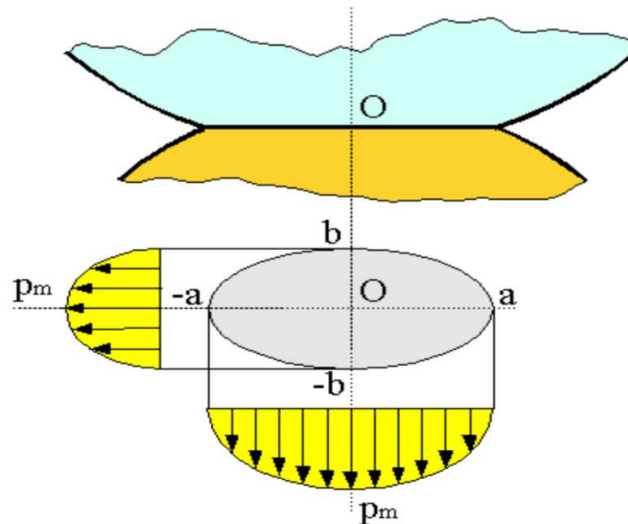


Figure III - 1: Surface de contact et contrainte au contact entre deux sphères.[33]

Pour caractériser le problème de contact mécanique, il importe dans un premier temps d'identifier les différents contacts qui sont mis en jeu et d'extraire les variables opérationnelles qui définissent la nature et le fonctionnement de chaque contact.

Par nature du contact, on entend la définition générale de ce qui constitue le contact : solide/solide, liquide/solide, liquide + particule/solide, liquide + vapeur/solide, etc. la géométrie du contact caractérise la forme générale des surfaces qui limitent les solides au voisinage de la zone de contact. On constate que l'ensemble des contacts que l'on rencontre en génie mécanique peuvent se regrouper en trois grandes familles :

- Les contacts de type ponctuel (typiquement sphère/plan).
- Les contacts linéiques (typiquement cylindre/plan).
- Les contacts surfaciques (typiquement parallélépipède/plan).

Ces familles sont représentées dans la figure III-2. [31]

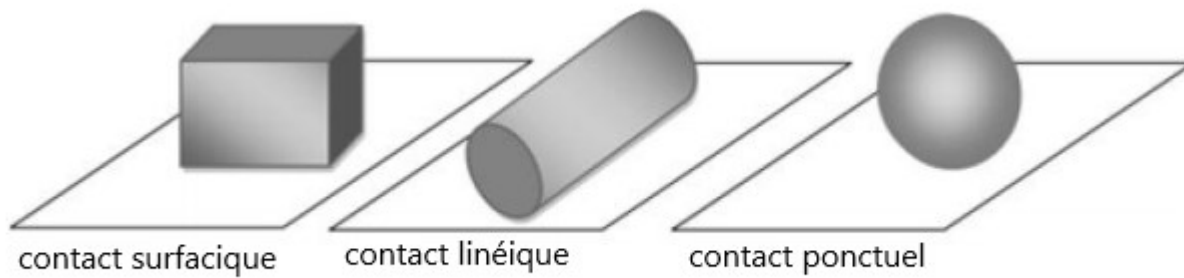


Figure III - 2: Trois familles de contacts. [31]

Les deux premières familles constituent le contact hertzien ou contacts concentrés. Le contact ponctuel est mis en œuvre dans des applications mécaniques telles que le contact roue/rail de chemin de fer, les contacts billes/bagues des roulements à billes, certains contacts came/poussoir ou came/linguet de moteurs thermiques, etc. le contact linéique est utilisé par exemple dans les roulements à rouleaux cylindriques ou coniques, ou dans les engrenages à denture droite à profil en développement de cercle. Ces deux premiers types de contacts sont virtuels car, dès que l'on applique un effort, une déformation élastique de la zone de contact se produit, induisant une aire de contact capable de supporter raisonnablement la charge appliquée. Les théories initiées par Hertz ont permis de modéliser ces contacts d'une manière très fidèle, en déterminant l'aire de contact et le champ de contraintes induit par les efforts appliqués.

On peut considérer comme contacts surfaciques le contact entre tourillon et coussinet de certains paliers (dans le cas où le jeu est faible), les emmanchements serrés, les joints d'étanchéité faciaux, les contacts curseurs/glissières, le contact garniture/disque de frein ou d'embrayage, etc.

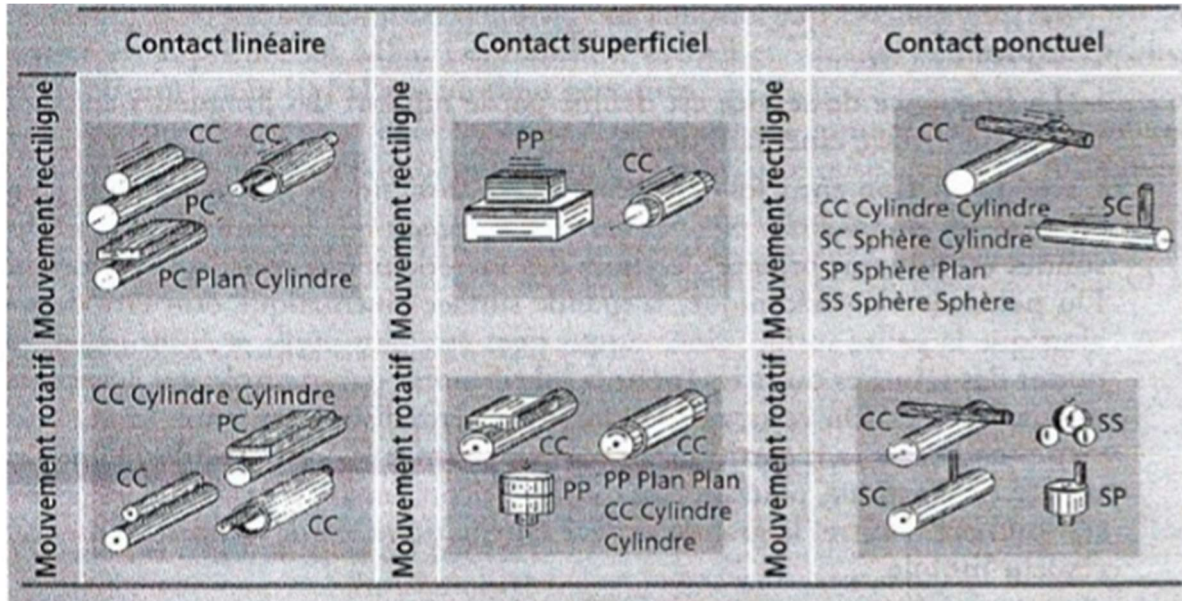


Figure III - 3: Représentation d'application technologique des différentes familles de contact. [35]

La géométrie du contact précise aussi les caractéristiques principales et les dimensions du contact : plans de courbure principaux et rayons de courbure principaux par exemple pour les contacts hertziens. Elle sera prise en compte dans la détermination du champ de contraintes généré par les efforts appliqués au contact. [34]

III.4 Contact de Hertz

Le contact de Hertz se réfère aux contraintes localisées qui se développent lorsque deux solides de révolution sphériques sont mis en contact sous l'effet d'un effort normal, l'aire de contact est un cercle de rayon (a). Et le degré de déformation dépend de l'élasticité du matériau en contact (module d'élasticité). La théorie de Hertz consiste à calculer la contrainte dans la zone de contact en fonction de la force normale appliquée, des propriétés élastiques et de la géométrie du contact.

Dans les engrenages et les roulements en mouvement ces forces de contact sont cycliques. Avec le temps elles entraînent une fatigue du matériau et l'apparition de fissures sous leurs surfaces.

Le contact de Hertz constitue le fondement des équations pour le calcul du chargement admissible pour les roulements, les engrenages et autres pièces dont deux surfaces sont en contact.

Chapitre III : La théorie de Hertz et la mécanique des contacts

L'hypothèse des relations de Hertz est la suivante: « Si deux corps à surfaces courbes sont pressés l'un contre l'autre, il y a contact sur une surface de pression elliptique ».

La solution proposée par Hertz n'est valable que si nous respectons certaines conditions sur la zone de contact. (Figure III-4).

- Les surfaces sont continue et non conformes : $a \ll R$
- Les déformations sont petites. $a \ll R$
- Chaque solide peut être considéré comme un milieu semi-infini, c'est -à-dire : $a \ll R_{1,2}$
- Pas de frottement. [27]

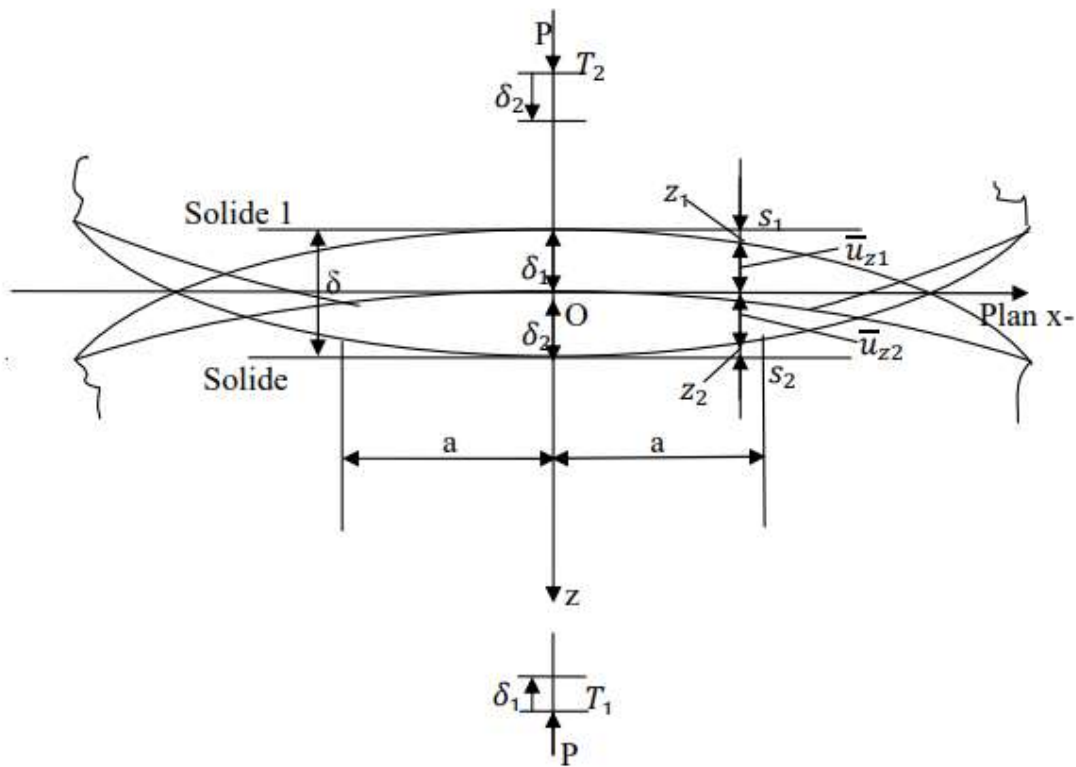


Figure III - 4: Zone de contact de Hertz. [35]

$$\overline{\mu_{z1}} + \overline{\mu_{z2}} = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (\text{III} - 1)$$

$$\overline{\mu_{z1}} + \overline{\mu_{z2}} < \delta - Ax^2 - By^2 \quad (\text{III} - 2)$$

Chapitre III : La théorie de Hertz et la mécanique des contacts

$\overline{\mu_{z1}}$ et $\overline{\mu_{z2}}$: déplacements

δ : l'enfoncement

Si la surface de contact est un cercle de rayon a alors :

$$A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{III - 3})$$

R : rayon du cylindre

III.5 Principe générale de résolution du problème de Hertz

La première résolution de ce problème est bien sûr due à Hertz. Hertz a formulé les conditions (III-1) et (III-2) que doivent satisfaire les points de la surface en contact. Ses hypothèses sont basées sur l'observation du contact entre lentilles convexes mises en compression.

L'hypothèse simplificatrice de choisir et de résoudre le problème d'élasticité sur un demi espace élastique permet de s'affranchir de la géométrie globale des corps en contact. Seule la géométrie locale (à travers les rayons de courbure) entre en jeu. Pour que cette hypothèse soit satisfaisante, deux conditions doivent être remplies: les dimensions de la surface de contact doivent être faibles devant :

- Les dimensions de chaque corps
- Les courbures relatives des surfaces en contact

La première condition est évidemment nécessaire pour que le champ de contrainte calculé pour un demi-espace infini ne soit pas perturbé par les conditions aux limites sur les frontières du solide. La seconde condition est nécessaire pour que les surfaces en contact soient approximativement des plans et que les déformations dans la zone de contact restent faibles. [19]

III.6 Contraintes développées dans un contact de Hertz

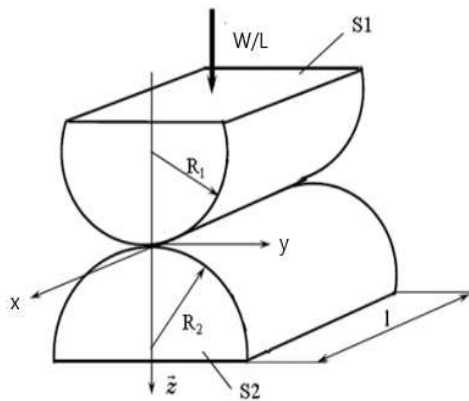
III.6.1 Distribution des contraintes du contact cylindre/cylindres

Bien que certaines des tendances générales du contact sphérique se rapportent à contact cylindrique, le comportement de ce dernier est plus complexe comme on le verra.

Chapitre III : La théorie de Hertz et la mécanique des contacts

Considérons deux cylindres élastiques, d'axes parallèles, de rayons R_1 et R_2 , de module d'élasticité E_1 et E_2 , de coefficient de Poisson ν_1 et ν_2 , de longueur infinie, chargé par une force (W/L) par unité de longueur perpendiculaire à leur plan tangent (figure III-5). [27]

Mise en situation



Surface de contact après chargement

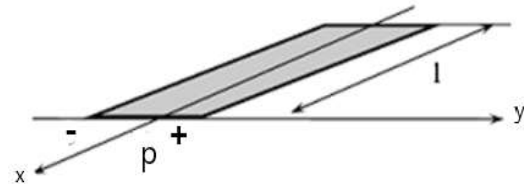


Figure III - 5 : Contact entre deux cylindres le long de leurs génératrices et distribution de la Pression dans la zone de contact. [36]

La théorie de Hertz pour les contacts élastiques avec les hypothèses ci-dessous énumérées donne les relations de calcul ci-après pour le calcul de la pression, de la demi-largeur de contact et des contraintes développées à l'intérieur des modèles en contact. Les hypothèses posées par Hertz :

La répartition de pression sur l'aire de contact est alors donnée par [3] :

$$P(y) = P_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad \text{(III - 4)}$$

Où P_0 désigne la pression au centre du contact et b la demi-largeur de contact. Les valeurs de P_0 et b sont données par les relations suivantes :

$$p_0 = \frac{2W}{\pi b L} \quad \text{(III - 5)}$$

$$b = 2 \sqrt{\frac{WR_{eq}}{\pi E_{eq} L}} \quad \text{(III - 6)}$$

W : effort appliqué.

L: épaisseur du modèle.

E_{eq} : est le module d'élasticité équivalent

R_{eq} : le rayon de courbure équivalent.

III.6.2 Cylindre sur plan

Hertz suppose que les contraintes en profondeur ne dépassent pas la limite élastique du matériau et qu'il n'y a pas de frottement. Cela permet de calculer analytiquement la distribution de pression qui satisfait les conditions limites sur la frontière des massifs, à l'intérieur et à l'extérieur de l'aire de contact. L'étude singulière des contacts bille/plan ou cylindre / plan s'effectue en considérant le plan comme une surface qui présente un rayon de courbure infini. Ces deux cas se ramènent à l'étude d'un contact bidimensionnel.

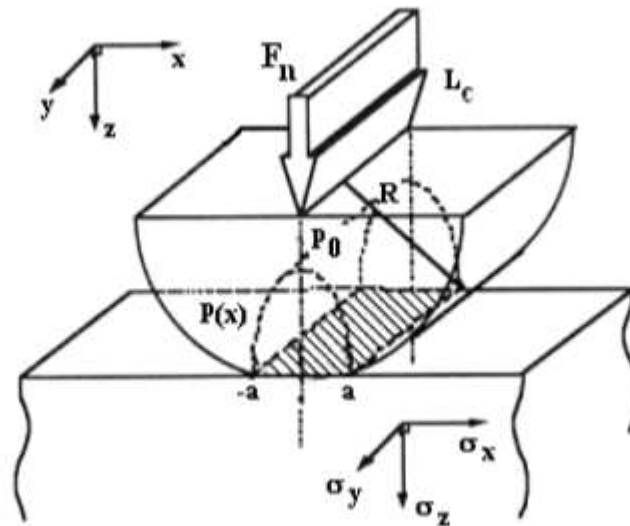


Figure III - 6: Contact hertzien particulier de type cylindre/plan. [37]

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y = -\frac{P_0}{\pi} z \left(\frac{b^2 + 2y^2 + 2z^2}{b} Q - \frac{2\pi}{b} - 3yR \right) \\ \sigma_z = -\frac{P_0}{\pi} z (bQ - yR) \\ \sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma_{yz} = -\frac{P_0}{\pi} z^2 R \\ \tau_{xy}=0 \\ \tau_{xz}=0 \end{array} \right. \quad (\text{III - 7})$$

Ou il est posé

$$\begin{cases} R = \frac{\pi}{\omega\varepsilon} (1 - \varepsilon) \left[\varepsilon^2 + 2\varepsilon \left(1 - \frac{4b^2}{\omega}\right)^{1/2} \right] \\ Q = \frac{\pi}{\omega\varepsilon} (1 + \varepsilon) \left[\varepsilon^2 + 2\varepsilon \left(1 - \frac{4b^2}{\omega}\right)^{1/2} \right] \end{cases} \quad (\text{III - 8})$$

Avec :

$$\begin{cases} \omega = (b + y)^2 + z^2 \\ \varepsilon^2 = \frac{(b - y)^2 + z^2}{(b + y)^2 + z^2} \end{cases} \quad (\text{III - 9})$$

Sur l'axe oz, le champ des contraintes s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_y = -\frac{P_0}{\pi} z \left(\frac{b^2 + 2y^2 + 2z^2}{b} Q - \frac{2\pi}{b} \right) \\ \sigma_z = -\frac{P_0}{\pi} zbQ \\ \sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ \tau_{yz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \end{cases} \quad (\text{III - 10})$$

Sur l'axe oz, les axes x, y et z sont des axes principaux.

La valeur de cisaillement maximale est obtenue pour $\tau_{max} = 0,3 P_0$, pour une profondeur z.

$z = 0,78b$ (point de hertz). [27]

III.6.3 Contact plan sur plan (poinçon / plan)

Dans le contact plan-plan sous pression normale ou plus exactement le contact poinçon-plan, différentes formulations peuvent être considérées. Dans le cas d'une distribution uniforme de pression correspondant au cas d'un poinçon souple, on détermine les composantes du tenseur en différents points du massif à l'aide des relations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^N = \frac{-P}{2\pi} [2(\theta_1 + \theta_2) - (\sin \theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{33}^N = \frac{-P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + \sin \theta_1 - \sin 2\theta_2] \\ \sigma_{13}^N = \frac{P}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \\ \theta_1 = \arctg\left(\frac{z}{x-a}\right) \\ \theta_2 = \arctg\left(\frac{z}{x+a}\right) \\ \theta_{1,2} = \arctg\left(\frac{z}{x \pm a}\right) \end{array} \right. \quad (\text{III - 11})$$

On calcule respectivement les valeurs principales :

$$\sigma_{12}^N = \frac{-P}{\pi} (\alpha_{\pm} \sin \alpha) \quad (\text{III - 12})$$

Et le cisaillement maximal $\tau_{\max} = \frac{P}{\pi} \sin \alpha$

Les isovaleurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{\max} sont décrites par la famille de cercles passant par les deux points du contact O_1 et O_2 (figure III-7)

La valeur maximale est obtenue pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ avec $\tau_{\max} = \frac{P}{2}$.[27]

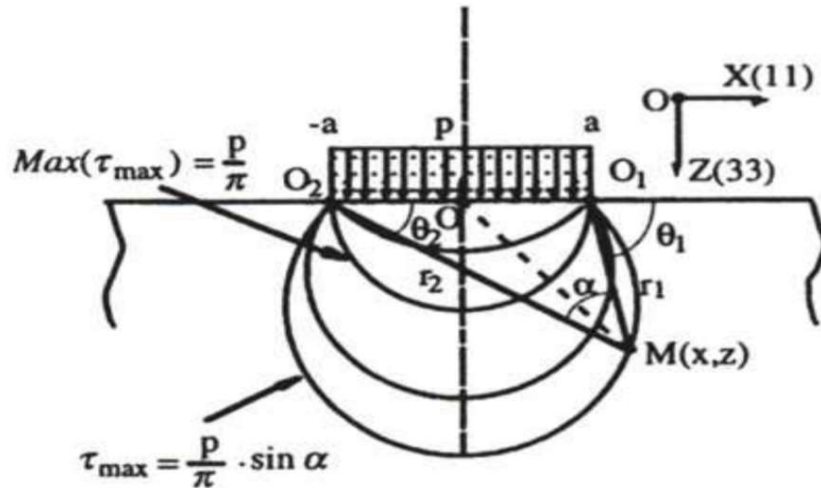


Figure III -7: Isovaleurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{\max} . [38]

III.6.4 Contact sphère - plan

La théorie de Hertz montre que lorsque deux solides de révolution sphérique sont mis en contact sous l'effet normal, l'aire de contact est un cercle de rayon a . Les relations de Hertz permettent d'établir différentes relations en fonction de l'effort, de la propriété élastique et de la géométrie de contact. Considérons le contact sphère-plan à pression normale (figure III-8) L'indice 1 et les valeurs sans indice (lorsque ceci n'est pas précisé), sont associées au plan, alors que l'indice 2 correspond au matériau de la sphère. Les symboles E_1 , E_2 correspondent respectivement aux modules élastique (d'Young) du plan et de la sphère. Le coefficient du poisson du plan et de la sphère sont désigné par ν_1 , ν_2 .

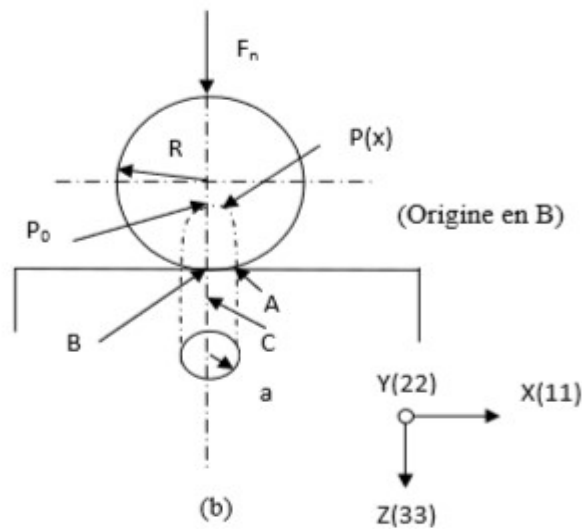


Figure III - 8: Condition du contact sphère – plan. [31]

On détermine le rayon équivalent R par $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ pour le contact sphère-plan on a :

$R_1 = \infty$ et donc $R = R_2$.

Le module d'élasticité effectif E^* est donné par la relation :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad \text{(III - 13)}$$

Et finalement le rayon de contact a,

$$a = \left[\frac{3F_N R}{4E^*} \right]^{1/3} \quad \text{(III - 14)}$$

L'enfoncement δ_0 des surfaces est égale à

$$\delta_0 = \frac{a^2}{R} = \left[\frac{9F_N^2}{16E^{*2}} \right]^{1/3} \quad \text{(III - 15)}$$

Le maximum de la pression appliquée au centre de la surface P_0 est égale à

$$P_0 = \frac{3F_N}{2\pi a^2} = \left[\frac{9F_N^2}{16E^{*2}} \right]^{1/3} = \frac{3}{2} P_m \text{ et } F_N = \frac{\pi^3 R^2}{6E^{*2}} P_0^3 \quad \text{(III - 16)}$$

Où P_m et la pression moyenne.

Compte tenu de la symétrie d'axe, il est commode d'utiliser une représentation polaire.

On évalue la distribution radiale de la pression.

Chapitre III : La théorie de Hertz et la mécanique des contacts

$$P_r = P_0 \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ Avec } r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{III - 17})$$

Suivant l'axe des X nous aurons la relation :

$$P_x = P_0 \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III - 18})$$

Les expressions des contraintes à l'intérieur du plan, dans l'espace 3D, peuvent être exprimées sous une forme analytiquement simple. Dans le plan médian X, Z, nous avons les relations simplifiées des composantes du tenseur associé à l'effort normal FN ($y = 0$) :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^N = \frac{P_0}{a} \left[(1 + \nu)z\Phi + \frac{1}{x^2} \left\{ Mzav + \frac{1-2\nu}{3} (NS + 2NA + a^3) - (1-\nu)Nz^2 \right\} - N \frac{Mza}{S} \right] \\ \sigma_{22}^N = \frac{P_0}{a} \left[(1 + \nu)z\Phi + \frac{1}{x^2} \left\{ Mzav + \frac{1-2\nu}{3} (NS + 2NA + a^3) - (1-\nu)Nz^2 \right\} - 2N\nu \right] \\ \sigma_{33}^N = \frac{P_0}{a} \left[\frac{Mxa}{S} - N \right] \end{cases} \quad (\text{III - 19})$$

$$\sigma_{13}^N = \frac{P_0}{a} \left[-x \left\{ \frac{xN}{S} - \frac{xzH}{G^2 + H^2} \right\} \right] \quad (\text{III - 20})$$

Et $\sigma_{12}^N = \sigma_{23}^N = 0 \quad (\text{III - 21})$

Avec

$$\begin{cases} A = x^2 + z^2 - a^2 \\ S = (A^2 + 4a^2z^2) \end{cases} \quad (\text{III - 22})$$

$$\begin{cases} M = \left(\frac{S + A}{2} \right)^{1/2} \\ N = \left(\frac{S - A}{2} \right)^{1/2} \end{cases} \quad (\text{III - 23})$$

$$\begin{cases} \phi = \text{tang}^{-1} \left(\frac{a}{M} \right) \\ G = M^2 - N^2 + zM - aN \\ H = 2MN + aM + Nz \end{cases} \quad (\text{III - 24})$$

Chapitre III : La théorie de Hertz et la mécanique des contacts

Pour le cas particulier où $x=0$, le long de l'axe Z, les expressions ne sont plus valables et devront être remplacées par :

$$\sigma_{11}^N = \sigma_{22}^N = \frac{P_0}{a} \left[(1 + \nu) \left(z \tan^{-1} \left(\frac{a}{z} \right) - a \right) + \frac{a^3}{a^2 + z^2} \right] \quad (\text{III - 25})$$

$$\sigma_{33}^N = -\frac{P_0}{a} \left[\frac{a^3}{a^2 + z^2} \right] \quad (\text{III - 26})$$

Les autres composantes étant nulles.

Toutes les contraintes de surface sont en compression sauf en bordure de contact où elles sont tension :

$$\sigma_{11}^a = -\sigma_{22}^a = -\frac{(1 - 2\nu)}{3} P_0 = 0.13 P_0 \quad (\text{III - 27})$$

Au centre du contact, en surface (point B)

$$\begin{cases} \sigma_{33}^{(0)} = -\sigma_{22}^{(0)} = -\frac{(1 - 2\nu)}{3} P_0 \text{ et} \\ \sigma_{33}^{(0)} = -P_0 \end{cases} \quad (\text{III - 28})$$

C'est sur l'axe des Z ($r = 0$), en sous-couche et à la profondeur $z = 0,48$ (point c), que la contrainte de cisaillement et la contrainte équivalente de Von Mises sont maximales. Ainsi pour $\nu=0,3$ la valeur de cisaillement maximal $\tau_{\max}(c)$ en ce point est égale à $0,31 P_0$.

En comparaison ces grandeurs sont respectivement (pour les point A et B) :

$$\begin{cases} \tau_{\max(A)} \frac{|1 - 2\nu|}{3} P_0 \\ \tau_{\max(B)} \frac{|1 - 2\nu|}{3} P_0 = 0.10 P_0 \end{cases} \quad (\text{III - 29})$$

La pression de première plastification, identique pour les deux critères de plasticité (Tresca, Von Mises) est :

$$P_{0y(c)} = \frac{k}{0.13} = 0.16 \sigma_y \quad (\text{III - 30})$$

Chapitre III : La théorie de Hertz et la mécanique des contacts

De la même façon on déduit la force normale limite de première plastification en sous couche ;
[35]

$$\begin{cases} F_{Nr(c)} = \frac{\pi^3 R^2}{6R^{*2}} \\ P^3_{or(c)} = 21 \frac{\sigma_y^3 R^2}{R^{*2}} \end{cases} \quad (\text{III - 31})$$

III.7 Conclusion

Dans ce chapitre on parle de la théorie de Hertz et quelques problèmes de contact. A savoir le contact normal et le contact en présence d'effort tangentiel.

Les calculs montrent que, pour un contact normal d'un cylindre sur plan, la différence des contraintes principales est maximale pour $z=h_c=0,78b$ (point de hertz) et la valeur de la contrainte tangentielle est égale à $0,3P_0$. Pour le cas du contact normal d'un poinçon sur plan, les calculs montrent que le cisaillement maximal, se trouve sur une isocontraintes repérée par un angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Aujourd'hui la plupart des études sur la mécanique des contacts s'effectuent avec des programmes de simulation qui sont bases sur la méthode des éléments finis.

Chapitre IV

Partie Expérimentale

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier le champ des contraintes dans un disque déformable qui se met en contact entre deux point (**A** et **B**). Au point **A**, le disque sera en contact avec une plaque en acier au premier temps puis on rajoute des revêtements à cette plaque avec différents matériaux et épaisseurs. Au point **B**, ce sera un contact contre une plaque en qui ne change pas le long des essais.

Après validation des programmes éléments finis écrit sous Castem et à l'aide de la méthode expérimentale (la photoélasticité), et ce pour les différents cas cités ci-dessous, les tests par éléments finis seront effectués sur plusieurs modèles à différents matériaux et différentes épaisseurs de revêtement afin de voir la variation de l'évolution de la contrainte tangentielle au voisinage du point de contact.

La comparaison des résultats se fera par comparaison des courbes de variation de la différence des contraintes principales obtenue par les deux méthodes expérimentale et numérique suivant le segment reliant les deux points de contact (A et B). Une autre comparaison sera faite entre les franges isochromes relevées sur le polariscope et les franges calculées numériquement avec le logiciel CASTEM.

Cette comparaison a pour but la validation des résultats obtenus par la méthode des éléments finis.

IV.2 Identification des modèles

Dans notre étude, nous avons utilisé quatre pièces à différentes caractéristiques mécaniques et différentes épaisseurs, où deux d'entre elles sont en époxy qui possède des propriétés de biréfringence nécessaires pour mener l'étude sur un polariscope. La figure IV.1 représente le schéma global des différents modèles.

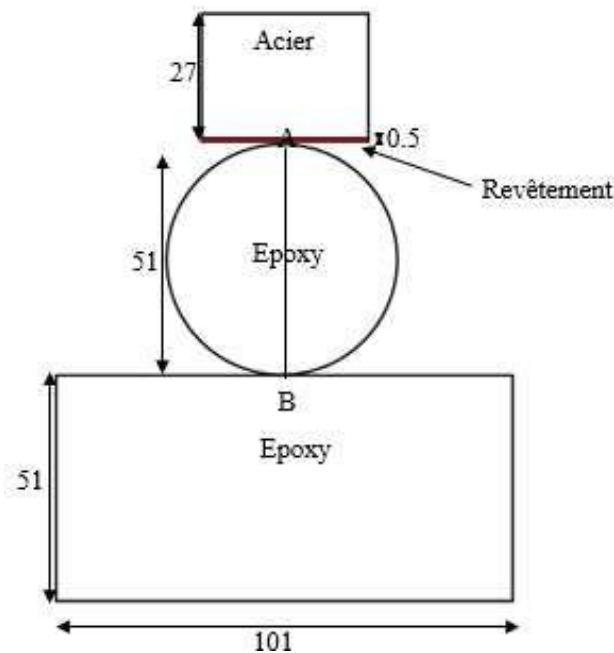


Figure IV - 1 : Les dimensions du modèle utilisé pour les trois méthodes.

Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des caractéristiques mécaniques ainsi que les dimensions de toutes les pièces utilisées lors des essais de notre étude. La première est une plaque en époxy déformable de 101 mm de longueur de 51mm de hauteur et 6mm d'épaisseur, la deuxième un disque en époxy déformable de diamètre de 51 mm et 6 mm d'épaisseur. La troisième pièce est en acier de 30mm de longueur et 27mm de hauteur. La quatrième pièce est un revêtement en époxy ou aluminium avec différentes épaisseurs que nous allons coller sur la pièce en acier.

Les caractéristiques	la plaque rectangulaire en époxy (solide déformable)	cylindre (solide déformable) en époxy	de la plaque en Acier (solide indéformable)	revêtements en époxy (solide déformable)	revêtements en aluminium (solide déformable)
Épaisseur « e » en mm	6	6	16	0.5 à 3	0.5 /1.2 /2.8
Module de Young « E » en Mpa	3273	3273	210000	3273	69000
Coefficient de poisson « ν »	0.3	0.3	0.37	0.3	0.33

Tableau IV- 1: Caractéristiques mécaniques et dimensions des pièces utilisées.

Le modèle utilisé est chargé par une force $F= 500 \text{ N}$

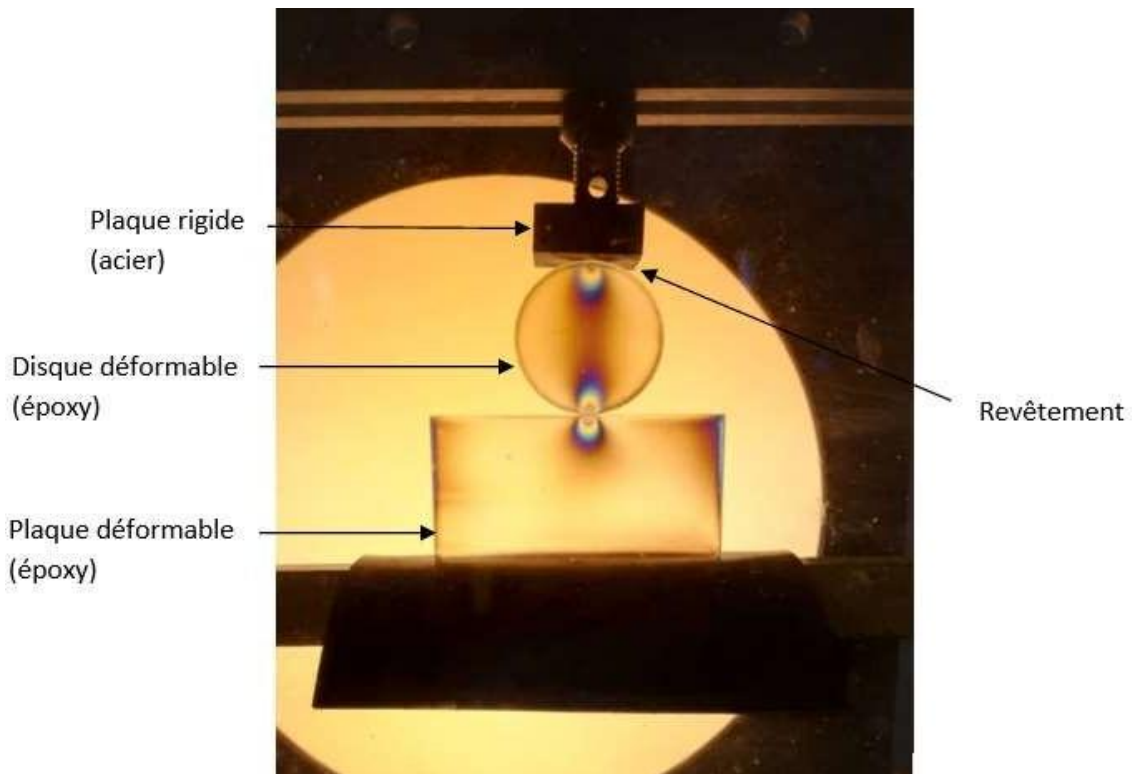


Figure IV - 2 : Forme du modèle utilisé.

IV.3 Vérification du modèle

Avant de procéder à l'observation et l'analyse du modèle sur le polariscope, nous devons vérifier qu'il n'y a pas de contraintes résiduelles qui peuvent exister déjà dans le modèle.

IV.3.1 Définition des contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles sont des contraintes multiaxiales statiques auto équilibrées existant dans un système isolé de température uniforme et en l'absence de tout chargement extérieur. Dans une section, la répartition des contraintes résiduelles résulte de l'équilibre mécanique entre la zone occupée par la source des contraintes résiduelles caractérisée par une fonction de distribution bien définie et le reste de la section déformée élastiquement. Elles sont également appelées contraintes internes ou contraintes initiales car elles s'équilibrent entre elles. [39]

Ces contraintes seront éliminées par un cycle thermique de relaxation.



Figure IV - 3 : Observation des contraintes résiduelles sur la plaque et le cylindre déformables.

Après observation, nous avons constaté qu'il y a une très faible présence de contraintes résiduelles.

IV.4 Analyse expérimentale du contact dans le modèle

IV.4.1 Dispositif expérimental

L'analyse des contraintes dans le modèle se fera à l'aide d'un polariscope à transmission. Afin de réaliser deux contacts mécaniques d'une part entre un solide indéformable (Acier) sans ou avec un revêtement en époxy ou aluminium et un disque déformable en époxy. D'autre part, un contact entre deux solides déformables disque-plan (figure IV-4).

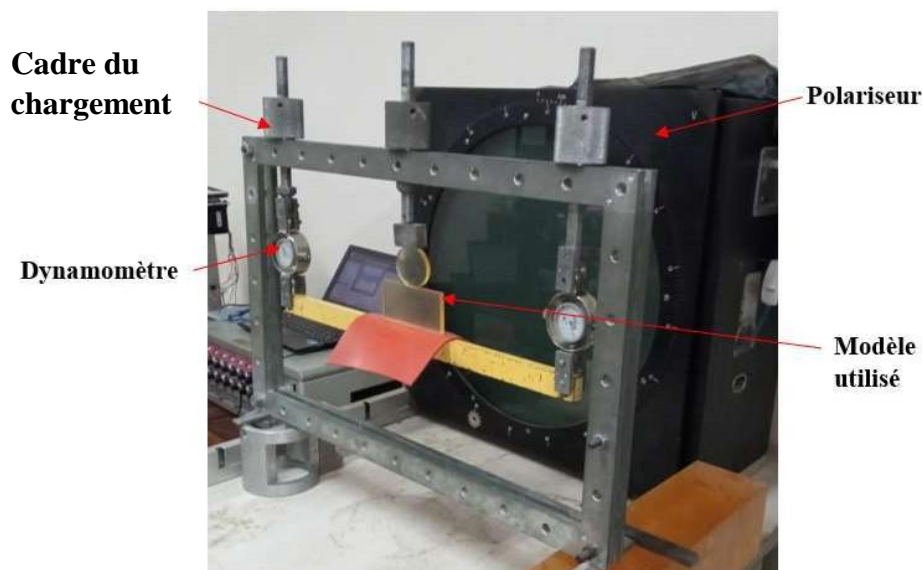


Figure IV - 4 : Observation du modèle utilisé placé sur le polariscope plan.

Nous observons observe les isochromes et les isoclines directement au niveau de l'analyseur du polariscope. L'exploitation de ces franges permet d'analyser le champ des contraintes développées dans le modèle.

IV.4.2 Étalonnage du dynamomètre

Charge (N)	Dynamomètre (mm)
0	0
10	6
20	11.5
30	17
40	23
50	29
60	35
70	41

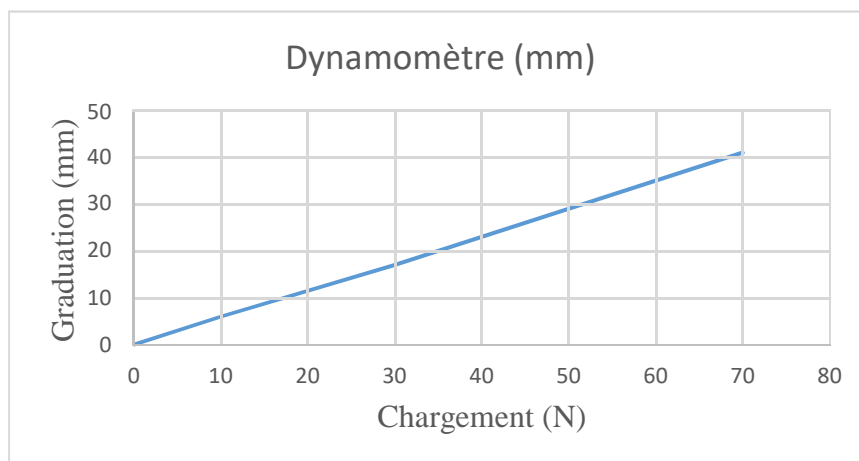


Figure IV - 5 : Courbe d'étalonnage du dynamomètre.

Le facteur d'étalonnage est :

$$\tan \alpha = \frac{70 - 50}{41 - 29.5} = 1.739$$

Nous avons procédé de la même façon pour l'étalonnage du 2ème dynamomètre

Charge (N)	Dynamomètre (mm)
10	2.5
20	5.5
30	8.5
40	11
50	14.1
60	17
70	20

Le facteur d'étalonnage $tg\alpha = 3.389$

IV.5 Détermination de la constante de frange

Avant d'effectuer les essais nous devons d'abord retrouver la valeur exacte de la constante de frange « f ». Cela à l'aide d'un essai de flexion 4 points, la valeur obtenue par l'essais sera utilisée pour l'analyse des contraintes dans le modèle.

IV.5.1 Essai flexion quatre point

L'essai de flexion 4 points (Figure IV - 6), permet de créer un moment fléchissant constant sur une éprouvette en matériau biréfringent.



Figure IV - 6 : Observation du modèle utilisé placé sur le polariscope plan.

Modèle utilisé

L'éprouvette ci-dessous sera soumise à un moment fléchissant en utilisant le banc d'essai sur (la figure IV - 7).

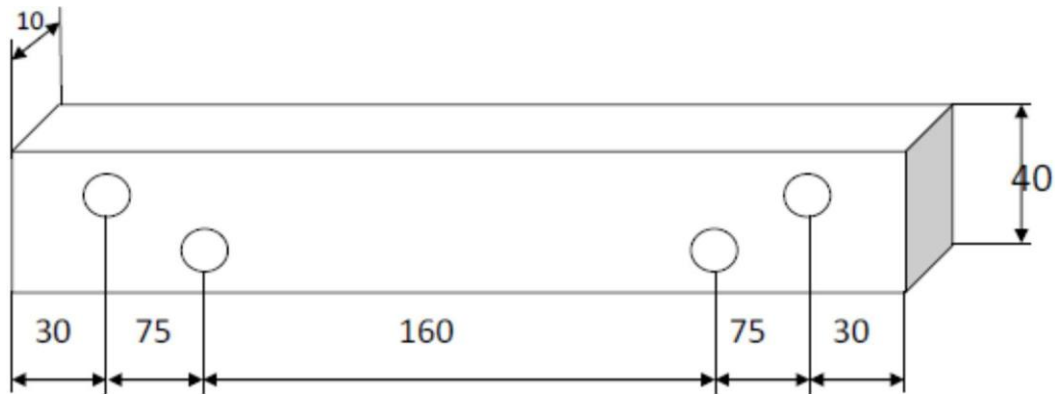


Figure IV - 7 : Epreuve de l'essai de flexion.

IV.5.2 Principe de détermination de la constante de frange

Avant de commencer l'expérience, il est nécessaire de régler la disposition des polaroids qui donne la lumière circulaire avec élimination des isoclines.

En créant un moment fléchissant constant sur une certaine partie de l'éprouvette, une fois les franges isochromes visualisées (la figure IV-8). Nous relevons leurs nombres et nous retrouverons la valeur de l'ordre de frange au niveau du bord libre. Le calcul de Mf permet de retrouver la valeur de la constante de frange.



Figure IV - 8 : Les franges isochromes obtenues en flexion 4 points.

IV.5.3 Calcul de la constante de frange

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf}{e} \quad (\text{IV.1})$$

Sur les bords de l'éprouvette nous avons $\sigma_2 = 0$

Ce qui donne :

$$f = \frac{e \sigma_1}{N} \quad (\text{IV.2})$$

La contrainte σ nous est donnée par la formule suivante

$$\sigma_1 = \frac{Mf}{W_{xx}} = \frac{Mf}{I_{xx} \times \vartheta} \quad (IV.3)$$

Nous avons

$$W_{xx} = \frac{I_{xx}}{e}$$

Où : I_{xx} est le moment d'inertie de la plaque qu'est donné par la relation

$$I_{xx} = \frac{e \cdot h^3}{12} \quad (IV.4)$$

P Est la distance qui sépare la ligne neutre du bord de la distance qu'est donnée par la relation:

$$e = \frac{h}{2} \quad (IV.5)$$

En remplace (IV.3) dans (IV.2) :

$$f = 6 \frac{Mf}{Nh^2} \quad (IV.6)$$

Calcul du moment fléchissant Mf :

Nous appliquons aux points A et B, un effort $F = 160 \text{ N}$.

A l'équilibre, nous avons :

$$\sum F_{\text{ext}} = 0 \quad (IV.7)$$

$$F_A + R_B + R_C + F_D = 0$$

Projection suivant (x) :

$$F_A - R_B - R_C + F_D = 0$$

$$F_A + F_D = R_B + R_C$$

Le moment au point B :

$$\sum M_{\frac{F}{B}} = F_A(AB) + R_B(BB) + R_C(CB) + F_D(DB) = 0$$

$$F_A(75) - R_B(0) - R_C(160) + F_D(235) = 0$$

Nous aurons donc:

$$R_B = R_C = F = 160 \text{ N} \quad (IV.8)$$

Calcul des moments fléchissant :

$$Mf = F \cdot x \quad (IV.9)$$

Entre A et B est : $0 < x < 75$:

$$Mf = R_B \cdot x$$

$$\text{à } \begin{cases} x = 0 & Mf = 0 \\ x = 75 & Mf = 12000 \end{cases}$$

Entre B et C est : $0 < x < 160$

$$Mf = F_{AE} \cdot (75 + x) - R_B(x)$$

D'après l'équation (IV.8) Nous avons :

$$Mf = F(75 + x - x) \quad (IV.10)$$

$$Mf = 75F = 12000 \text{ N.m}$$

Entre D et C'est : $0 < x < 75$

$$Mf = F_{AE}(235 + x) - R_B(160 + x) - R_C x$$

De (IV.9) et (IV.10), on déduit le moment maximum :

$$Mf = F(+235 - 160 + x - x)$$

$$Mf = F(75 + x)$$

$$Mf = 12000 \text{ N.mm}$$

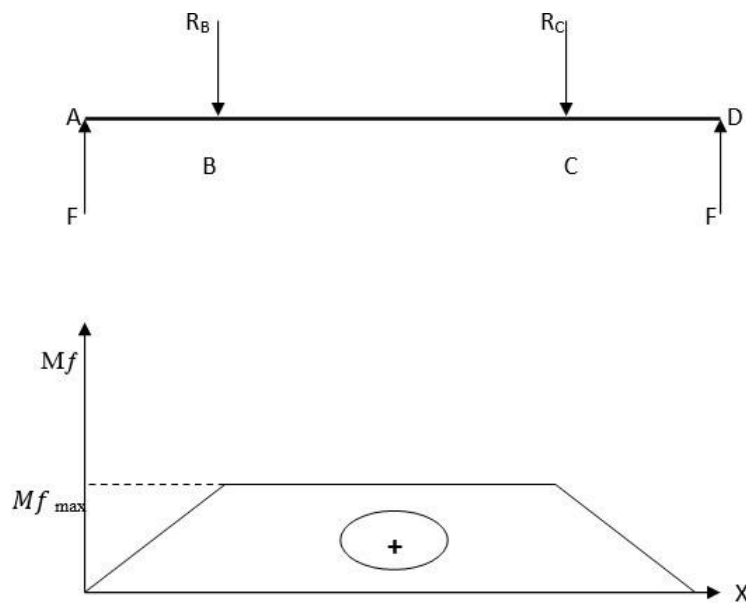


Figure 0–1: Diagramme des moments fléchissant.

Après application des efforts, Nous relevons sur la largeur de la poutre l’ordre de frange \$N^*\$ correspondant au moment fléchissant appliqué sur le modèle.

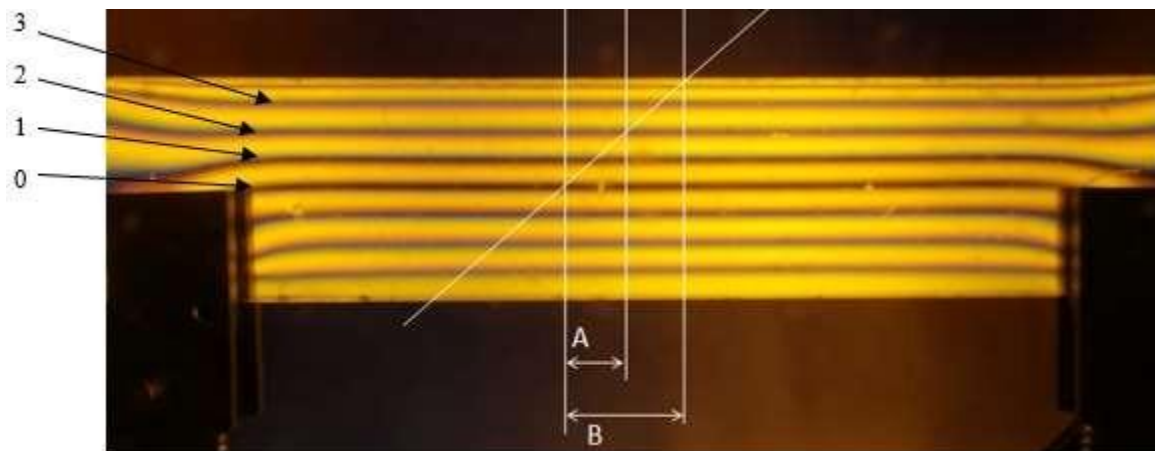


Figure IV - 9 : Relevé de l’ordre de frange au bord de l’éprouvette.

Sachant que l’ordre de frange au niveau de la ligne neutre est égale à zéro, à une distance \$A\$, nous avons l’ordre de frange est égale à 2, l’ordre de frange \$N\$ au bord de l’éprouvette, à une distance \$B\$ sera donné avec : $N=2 (B/A)$

En mesurant les distances \$A\$ et \$B\$ à partir de la figure IV-9 nous aurons le rapport \$(B/A)\$ égale à 2, ce qui donne \$N=4\$.

\$N^*\$: Nombre de frange

$$N=N^*/2 \quad (IV.11)$$

En substituant (IV.11) dans (IV.9) nous aurons :

$$f = \frac{12 Mf}{N^* h^2} \quad (IV.12)$$

Nous avons :

$$h = 40\text{mm}$$

$$Mf = 12000\text{N.mm}$$

$$N^*=8$$

On remplace :

$$f = \frac{12 * 12000}{8 * 40^2}$$

$$f = 11.25 \text{ N/mm. Ordre}$$

IV.6 Analyse expérimentale des contraintes

Pour analyser expérimentalement les contraintes agissant sur le modèle, nous optons pour la méthode photoélasticimétrique.

IV.6.1 La variation de la contrainte de cisaillement maximale suivant l'axe [AB]

Pour la détermination de la variation de la contrainte de cisaillement maximale, nous devons d'abord visualiser le réseau d'isochromes sur le polariscope, ici en lumière monochromatique et en champs clair. Après détermination des ordres de franges, la loi de Maxwell peut être alors utilisée pour déterminer l'intensité des contraintes. Nous définissons un segment [AB] à partir du point de contact du modèle, où A et B désigne les points du contact.

Rappelons qu'en photoélasticimétrie :

La différence des contraintes principales est donnée par la relation de MAXWELL

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e} \quad (IV.13)$$

La contrainte de cisaillement maximale est donnée par la relation suivante :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (IV.14)$$

Nous aurons donc à partir des relations ci-dessous :

$$\tau_{\max} = \frac{N \cdot f}{2 \cdot e} \quad (\text{IV.15})$$

L'épaisseur du modèle: $e=6\text{mm}$

Pour les différents modèles, nous avons calculé à l'aide des relations données, les valeurs de τ_{\max} en un nombre déterminé de points pris sur le segment [AB]. En effet ces points sont repérés au niveau des intersections du segment [AB] avec les franges isochromes.

L'abscisse X et l'ordre de frange N sont relevés en chacun de ces points. Ces valeurs sont portées sur des tableaux à partir desquels seront tracés les graphes de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximale le long du segment [AB].

IV.6.2 Contact époxy-acier/ époxy-époxy

IV.6.2.1 Visualisation des franges isochromes

Nous avons compté les franges par demi-ordre croissant, jusqu'à 17.5 au voisinage du contact au point A, et jusqu'à 13.5 au voisinage du contact au point B.

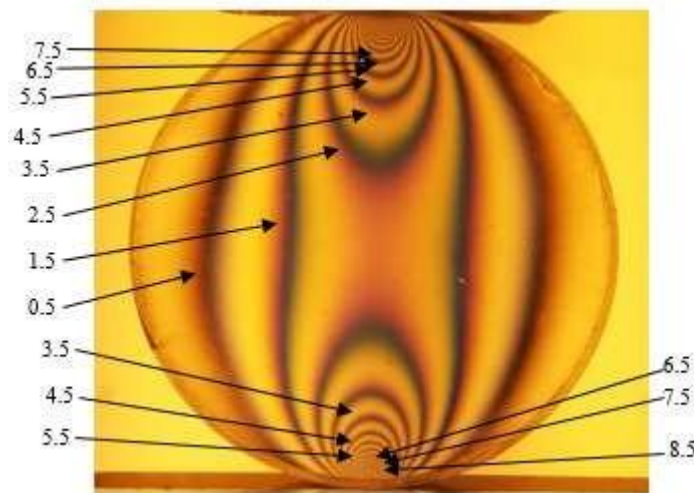


Figure IV - 10 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope (modèle 1).

Les franges au voisinage du contact sont difficiles à distinguer, ce qui nous amène à agrandir cette zone pour pouvoir repérer ces franges (Figure IV- 11 et IV-12).



Figure IV - 11 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie supérieure (modèle 1).

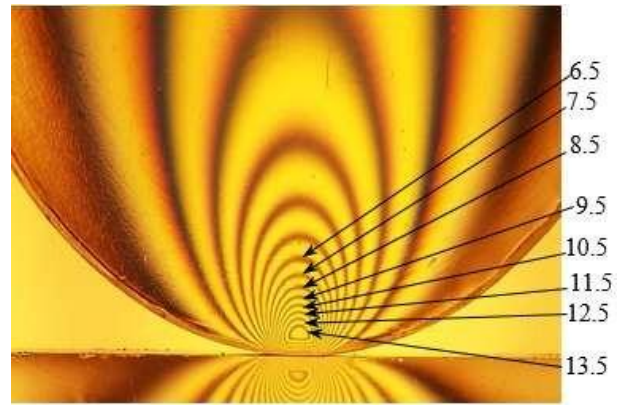


Figure IV - 12 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie inférieure (modèle 1).

IV.6.2.2 Calcul de la valeur τ_{max} suivant le segment [AB] du modèle 1.

A l'intersection du segment [AB] avec les franges isochromes, nous relevons les distances correspondantes par rapport aux points de contact.

Ordre de frange N	Distance sur image [mm]	Distance réel en [mm]	$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e}$ [mm]	$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ [MPa]
17.5	3	1	32.8	16.4
16.5	4	1.3	30.93	15.46
15.5	4.5	1.5	29.06	14.53
14.5	5	1.6	27.18	13.59
13.5	5.5	1.8	25.31	12.65
12.5	6.5	2.1	23.43	11.78
11.5	7	2.3	21.56	10.78
10.5	8	2.6	19.68	9.84
9.5	9	3	17.81	8.9
8.5	10.5	3.5	15.93	7.9
7.5	12	4	14.06	7.03
6.5	14.5	4.8	12.18	6.09
5.5	17.5	5.8	10.31	5.15
4.5	22	7.3	8.43	4.21
3.5	32	10.6	6.56	3.28
2.5	54	18	4.68	2.34
2.5	102	34	4.68	2.34
3.5	121	40.3	6.56	3.28
4.5	129	43	8.43	4.21

5.5	134	44.6	10.31	5.15
6.5	136	45.3	12.18	6.09
7.5	138	46	14.06	7.03
8.5	140	46.6	15.93	7.9
9.5	141	47	17.81	8.9
10.5	142.5	47.5	19.68	9.84
11.5	143.5	47.8	21.56	10.78
12.5	145	48.3	23.43	11.78
13.5	147	49	25.31	12.65

Tableau IV- 2 : Valeur de τ_{max} relevée le long [AB] (modèle 1).

A chaque ordre de frange, l'ordre N correspond à une valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

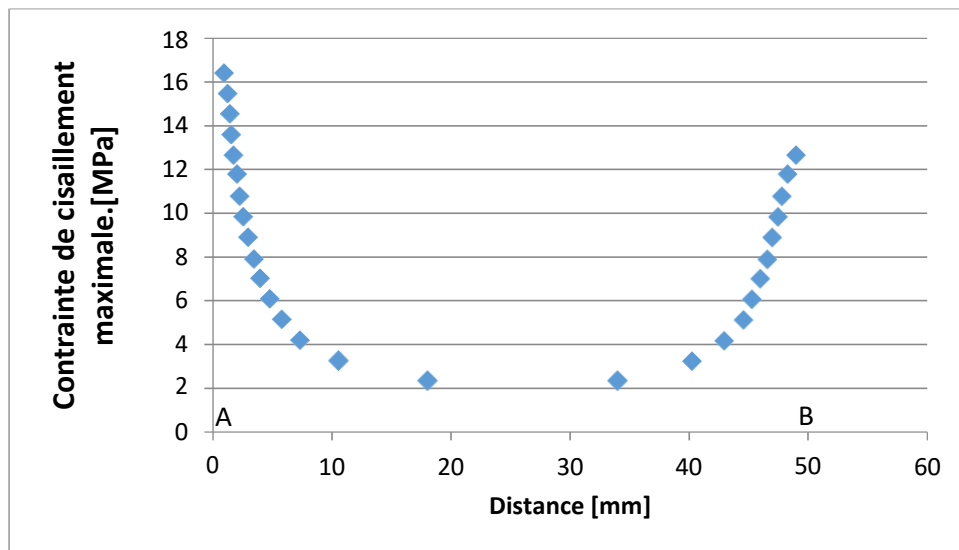


Figure IV - 13 : Evolution de τ_{max} relevée expérimentalement le long de la droite AB (modèle 1).

IV.6.3 Revêtement époxy 0.5 mm (Modèle 2)

A l'aide d'une colle en époxy, nous avons collé une plaque d'époxy d'une épaisseur de 0.5mm sur l'une des surface d'une plaque en acier.

IV.6.3.1 Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair.

Après chargement du modèle en lumière monochromatique polarisée circulairement, les franges isochromes en champ clair peuvent être distinguées et repérées par leur ordre d'apparition (figure IV-14).

Nous pouvons compter les franges par demi-ordre croissant, jusqu'à 16.5 au voisinage du contact au point A, et jusqu'à 13.5 au voisinage du contact au point B.

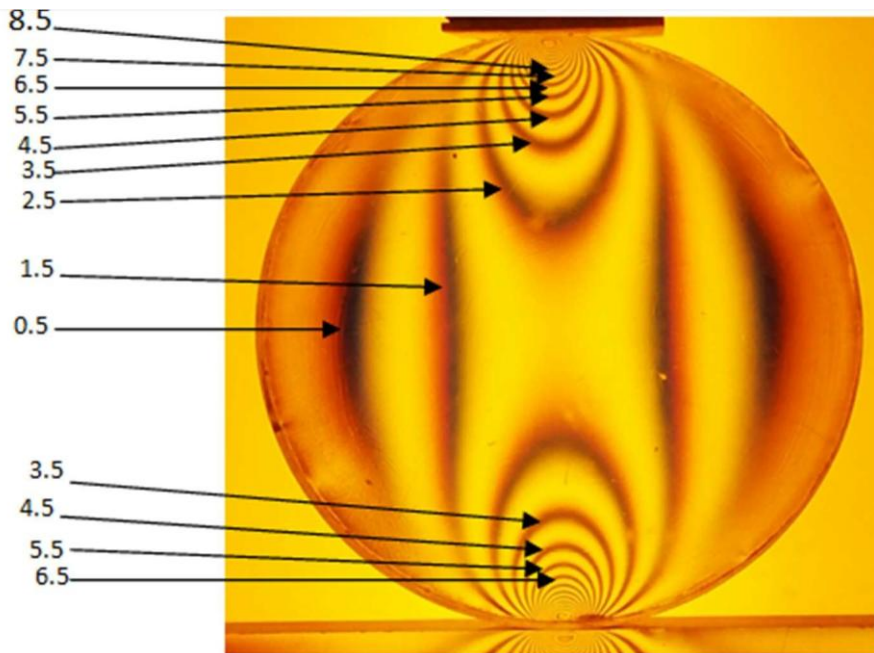


Figure IV - 14 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope (modèle 2).

Les franges au voisinage du contact sont difficiles à distinguer, ce qui nous amène à agrandir cette zone pour pouvoir repérer ces franges (figure IV-14 et IV-15).



Figure IV - 15 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie supérieure (modèle 2).

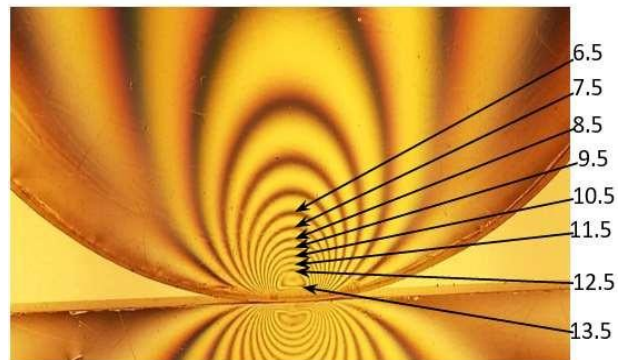


Figure IV - 16 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie supérieure (modèle 2).

IV.6.3.2 Calcul de la valeur τ_{max} suivant le segment [AB] modèle 2.

A l'intersection du segment [AB] avec les franges isochromes, nous relevons les distances correspondantes par rapport aux points de contact.

Ordre de frange N	Distance sur l'image [mm]	Distance réel [mm]	$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e}$ [MPa]	$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ [MPa]
16.5	01	0.67	30.93	15.46
15.5	3	1	29.06	14.53
14.5	3.5	1.16	27.18	13.59
13.5	4.5	1.5	25.31	12.65
12.5	5.5	1.8	23.43	11.78
11.5	6	2	21.56	10.78
10.5	7	2.3	19.68	9.84
9.5	8	2.6	17.81	8.9
8.5	9.5	3.1	15.93	7.9
7.5	11.5	3.8	14.06	7.03
6.5	13.5	4.5	12.18	6.09
5.5	17.5	5.8	10.31	5.15
4.5	22.5	7.5	8.43	4.21
3.5	34	11.3	6.56	3.28
2.5	52	17.3	4.68	2.34
2.5	102	34	4.68	2.34
3.5	119	39.6	6.56	3.28
4.5	128	42.6	8.43	4.21
5.5	133	44.3	10.31	5.15
6.5	136	45.3	12.18	6.09
7.5	137.5	45.8	14.06	7.03
8.5	139	46.3	15.93	7.9
9.5	140.5	46.8	17.81	8.9
10.5	141.5	47.1	19.68	9.84
11.5	142	47.3	21.56	10.78
12.5	143	48	23.43	11.78
13.5	145	48.3	25.31	12.65

Tableau 0-1 : Relevé d'ordre de frange le long [AB]. (Modèle2)

A chaque ordre de frange, l'ordre N correspond à une valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

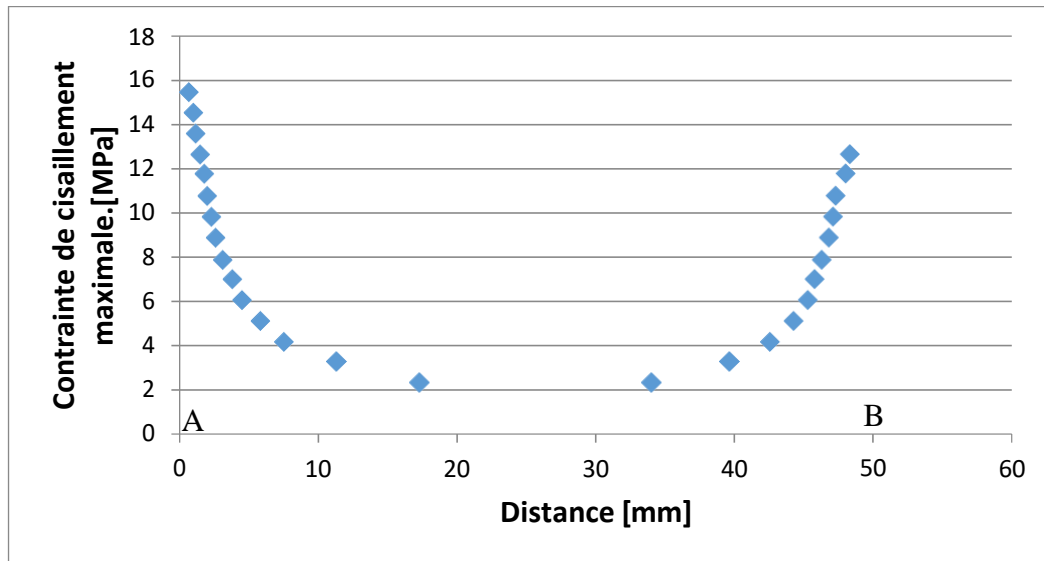


Figure IV - 17 : Evolution de τ_{\max} relevée expérimentalement le long de la droite AB(modèle 2).

IV.6.4 Revêtement aluminium 0.5 mm (modèle 3)

A l'aide d'une colle en époxy, nous avons collé une plaque d'aluminium d'une épaisseur de 0.5mm sur l'une des surfaces d'une plaque en acier.

IV.6.4.1 Visualisation des franges isochromes en champs claire.

Nous pouvons compter les franges par demi-ordre croissant, jusqu'à 16.5 au voisinage du contact au point A, et jusqu'à 13.5 au voisinage du contact au point B.

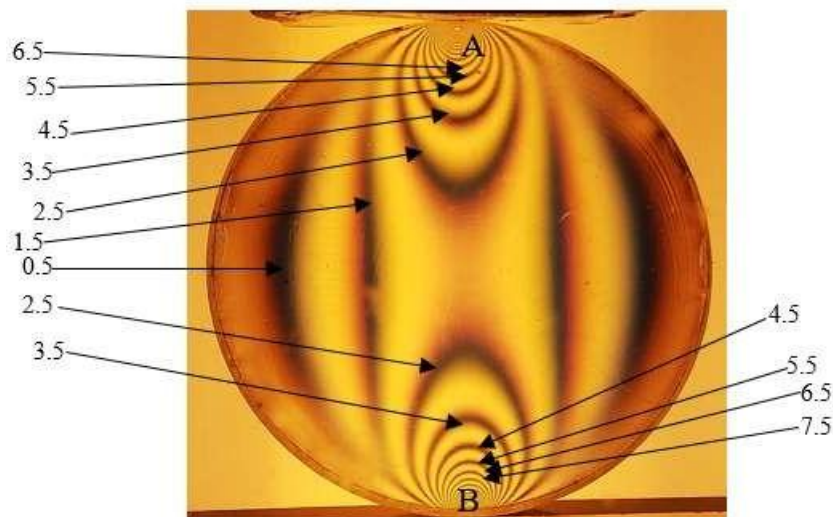


Figure IV - 18 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscopes (modèle 3).

Les franges au voisinage du contact sont difficiles à distinguer, ce qui nous amène à agrandir cette zone pour pouvoir repérer ces franges (figure IV-19 et IV-20).



Figure IV - 19 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie supérieure (modèle 3).

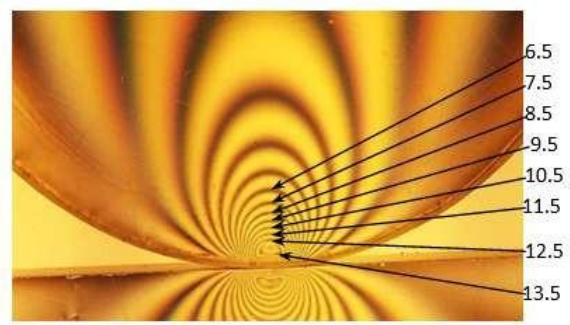


Figure IV - 20 : Réseau d'isochromes observé sur le polariscope pour la partie inférieure (modèle 3).

IV.6.4.2 Calcul de la valeur τ_{max} suivant le segment [AB] modèle 3

A l'intersection du segment [AB] avec les franges isochromes, nous relevons les distances correspondantes par rapport aux points de contact.

Ordre de frange N	Distance sur image [mm]	Distance réel en [mm]	$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e}$ [MPa]	$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ [MPa]
16.5	01	0.67	30.93	15.46
15.5	3	1	29.06	14.53
14.5	3.5	1.16	27.18	13.59
13.5	4.5	1.5	25.31	12.65
12.5	5.5	1.8	23.43	11.78
11.5	6	2	21.56	10.78
10.5	7	2.3	19.68	9.84
9.5	8	2.6	17.81	8.9
8.5	9.5	3.1	15.93	7.9
7.5	11.5	3.8	14.06	7.03
6.5	13.5	4.5	12.18	6.09
5.5	17.5	5.8	10.31	5.15
4.5	22.5	7.5	8.43	4.21
3.5	34	11.3	6.56	3.28
2.5	52	17.3	4.68	2.34
2.5	102	34	4.68	2.34
3.5	119	39.6	6.56	3.28
4.5	128	42.6	8.43	4.21
5.5	133	44.3	10.31	5.15
6.5	136	45.3	12.18	6.09
7.5	137.5	45.8	14.06	7.03

8.5	139	46.3	15.93	7.9
9.5	140.5	46.8	17.81	8.9
10.5	141.5	47.1	19.68	9.84
11.5	142	47.3	21.56	10.78
12.5	143	48	23.43	11.78
13.5	145	48.3	25.31	12.65

Tableau 0-2: Relevé d'ordre de frange le long [AB]. (Modèle 3).

A chaque ordre de frange, l'ordre N correspond à une valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

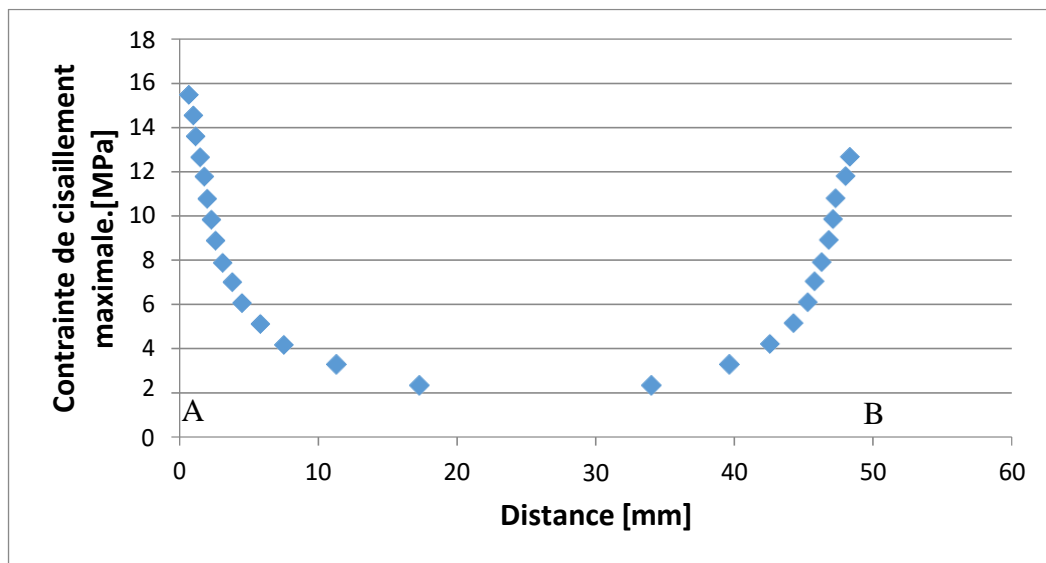


Figure IV - 21 : Evolution de τ_{max} relevée expérimentalement le long de la droite AB (modèle 3).

IV.6.5 Les franges isoclines (modèle 2)

En faisant tourner les deux polaroids simultanément nous visualisons les différentes franges isoclines (figure IV-22) qui apparaissent pour chaque valeur d'angle de rotation qui est de 10°, les franges isoclines qui sont les directions principales des contraintes apparaissent sous forme de franges obscures sur les images en fonction de la position des polaroids.

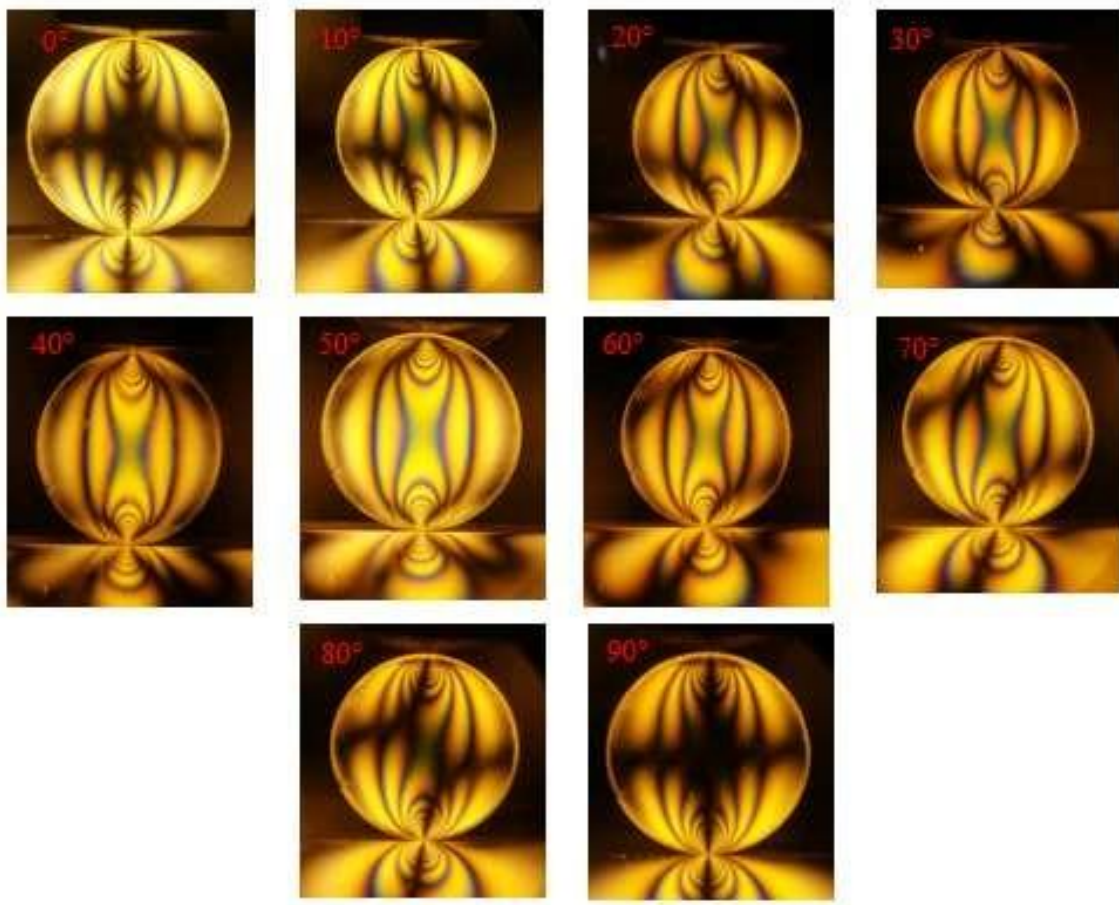


Figure IV - 22 : Relevée des isoclines par rotation par pas de 10°.

IV.7 Analyse numérique des contraintes

Pour la méthode numérique, nous calculons les champs de contraintes dans les modèles à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis CASTEM.

IV.7.1 Calcul des champs de contraintes à l'aide du logiciel CASTEM.

Une étude par éléments finis conduite à l'aide du logiciel CASTEM a été utilisée pour obtenir le champ des contraintes développé dans le contact mécanique. La simulation du contact a été réalisée à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM, elle est basée sur la configuration du montage expérimentale.

Pour le calcul numérique, nous avons raffiné le maillage au voisinage des zones de contact pour avoir une meilleure visualisation des franges. Le module de Young et le coefficient de poisson des pièces sont introduits dans le programme.

Dans le contact entre les pièces mécaniques il est plus facile d'imposer un déplacement pour réaliser un contact qu'un effort imposé.

IV.7.2 Les différentes étapes de l'étude modèle avec revêtement 0.5mm en époxy.

Les différentes étapes utilisées et permettant l'analyse par élément finis des champs de contrainte de nos différents modèles ont été décrites étape par étape. Pour le modèle ci-après à 0.5mm de revêtement.

1er étape : Maillage

L'objet du maillage est de discrétiser géométriquement le domaine d'analyse de manière à pouvoir ultérieurement associer une formulation éléments finis au support géométrique (Figure IV-23 et Figure IV-24).

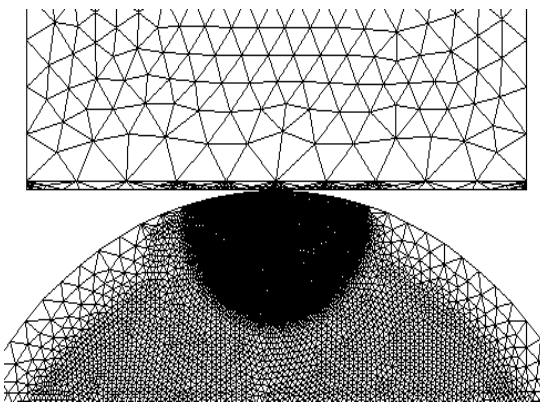


Figure IV - 23 : Représentation de la surface maillée pour la partie supérieure.

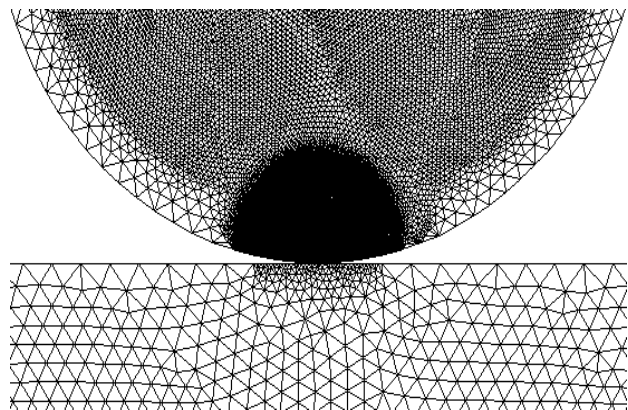


Figure IV - 24 : Représentation de la surface maillée pour la partie inférieure.

2ème étape : Les déplacements imposés.

Dans le programme, nous avons choisi l'opérateur (DEPI); qui permet de déplacer la droite L11 suivant y. (figure IV-25)

L'opérateur (IMPO) permet de créer un contact entre les pièces.

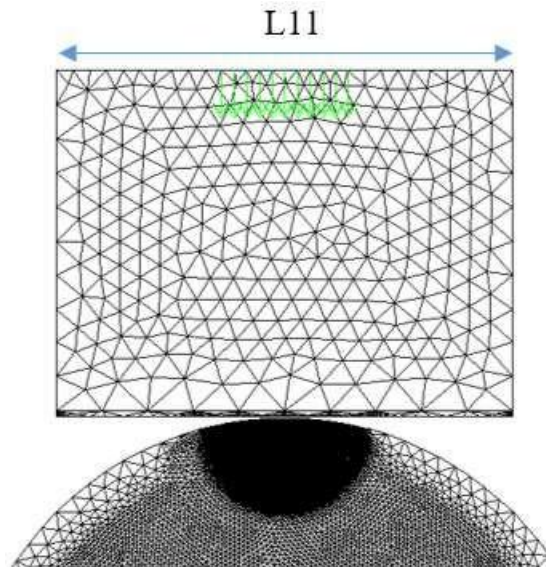


Figure IV - 25 : Représentation des déplacements imposés.

3^{ème} étape : Assurer le contact entre les pièces.

Le contact mécanique a été assurée en utilisant l'opérateur Impo(ser) pour les deux types de contact mécanique. La figure suivante représente les deux zones de contact en couleur rouge.

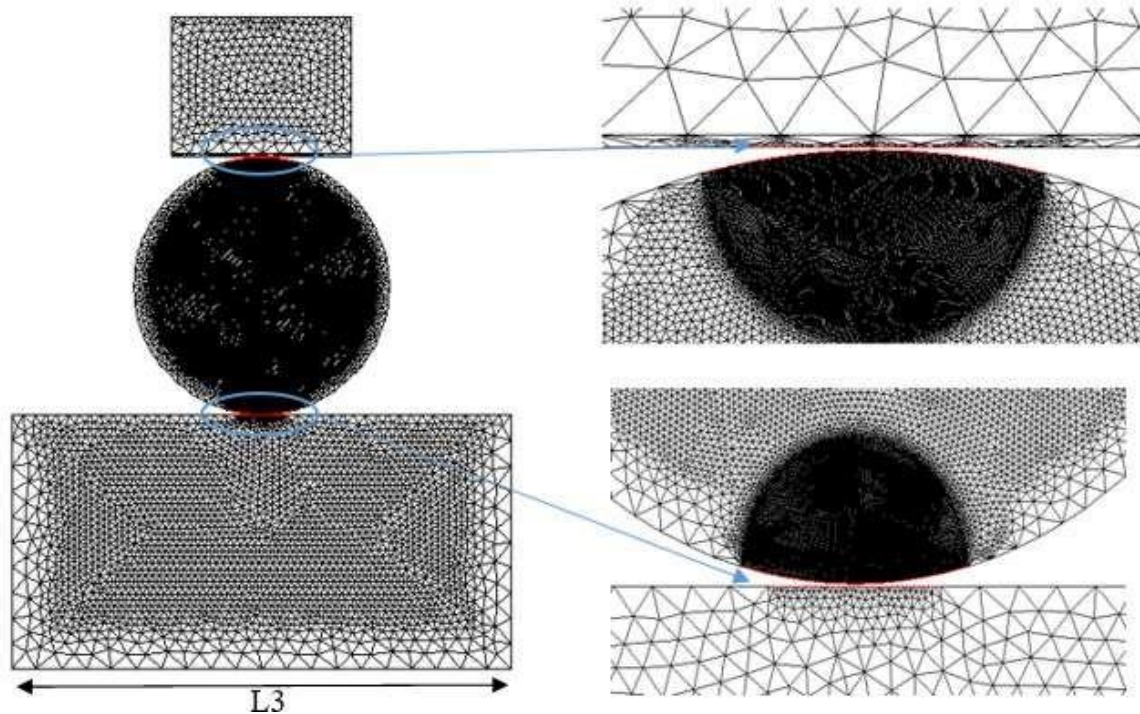


Figure IV - 26 : Représentation des zones de contact.

4ème étape : Déformation de la structure

Le logiciel CASTEM permet de construire la déformée de la structure à partir de la géométrie initiale et du champ de déplacement, le maillage initial en couleur verte et la déformée en couleur rouge. La figure IV-27 représente la déformation dans les deux zones de contact.

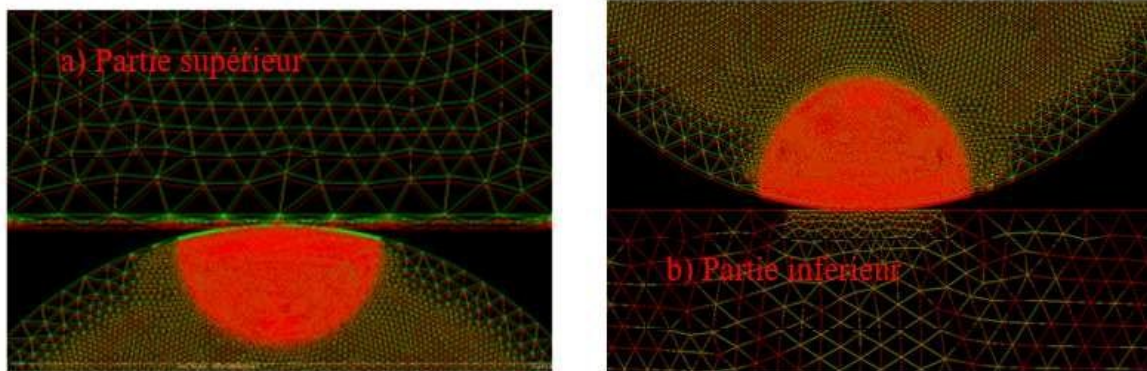


Figure IV - 27 : Représentation de la déformation.

5ème étape : Déterminer les réactions.

La figure IV- 28 représente l'ensemble des réactions dues aux sollicitations imposées dans le contact.

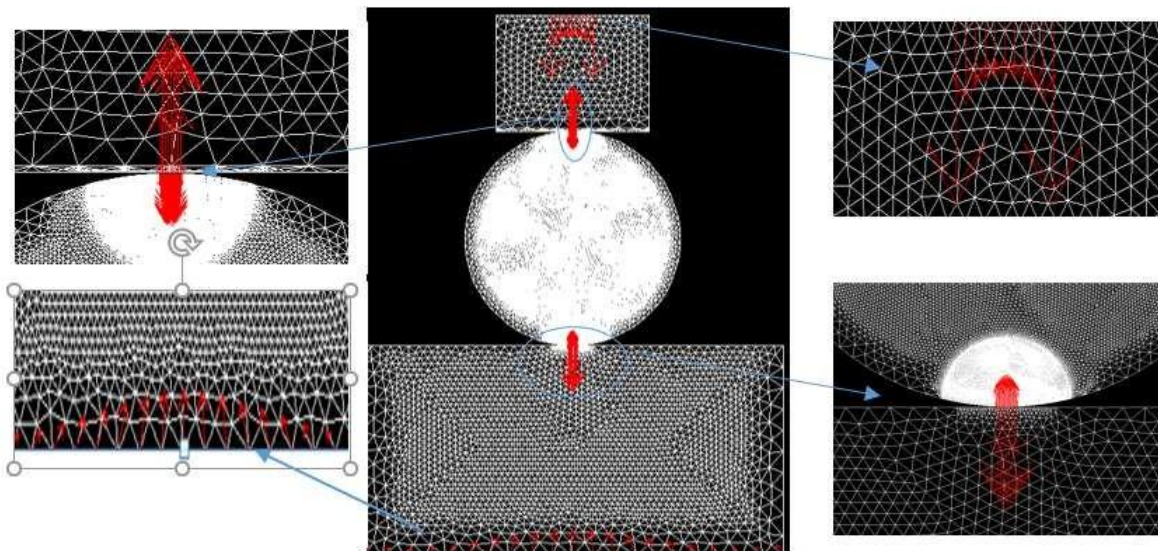
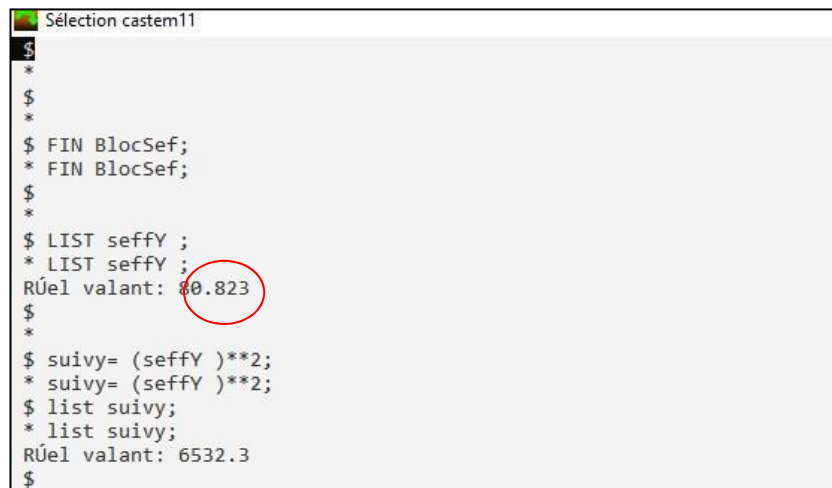


Figure IV - 28 : Représentation des réactions sur le modèle.

6ème étape: Extraire les efforts.

Le logiciel permet de récupérer les nœuds sur le segment [L3] pour extraire les efforts et leurs sommations: L'effort du premier nœud ($i=1$) est récupéré, puis l'effort du second nœud ($i=2$) qui sera additionné à celui du nœud précédent. Cette opération est répétée jusqu'au dernier nœud où il affiche la valeur de l'effort total appliqué, qui est de 80.823N (figure IV-26).



```
Sélection castem11
*
*$
*
*$
$ FIN BlocSef;
* FIN BlocSef;
$
*
*$
$ LIST seffy ;
* LIST seffy ;
RÚel valant: 80.823
$
*
*$
$ suivy= (seffy)**2;
* suivy= (seffy)**2;
$ list suivy;
* list suivy;
RÚel valant: 6532.3
$
```

Figure IV - 29 : Extraction des efforts correspondants au déplacement imposé.

Cette valeur correspond approximativement à la charge imposée par unité d'épaisseur à la valeur expérimentale qui est de $500/6=80.823\text{N}$. Sachant que 6 mm est l'épaisseur du modèle.

7ème étape : Visualisation des franges isochromes

La figure (IV-30) représente les franges isochromes en champ clair obtenues à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM. Elles sont tracées avec une échelle de couleur. Les franges isochromes en champ clair représentent une intensité $I = 1 - \sin^2 \varphi/2$.

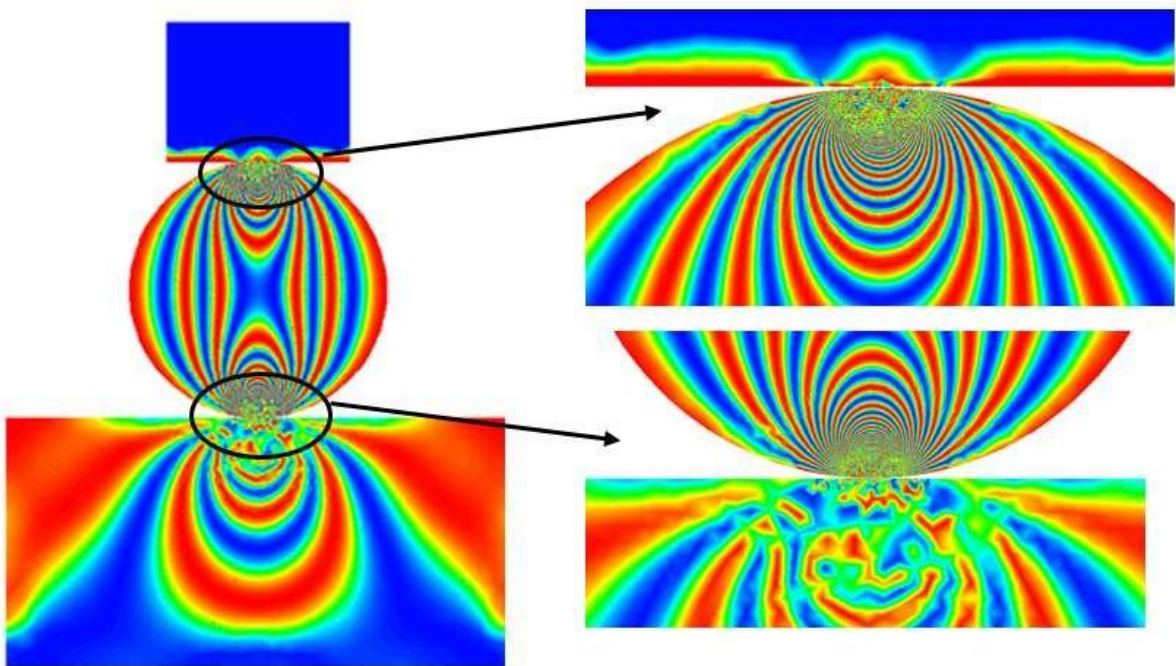


Figure IV - 30 : Les franges isochromes simulées en champ clair.

En pratique, en champs clair la couleur noire qui représente les franges isochromes correspond au bleu sur les figures données par CASTEM et les franges claires sont en rouge.

8ème étape : Visualisation des isoclines

Le programme donne la valeur de $(\sin^2 2\alpha)$ en chaque point du modèle; ce qui permet de tracer les isoclines correspondant à $\sin^2 2\alpha = 0$. Nous simulons la rotation des polaroids en augmentant successivement l'angle isocline α de 0° à 90° avec un pas de 10 degrés et nous avons aussi visualisé les isoclines à l'angle $\alpha = 45^\circ$. (Figure IV-31).

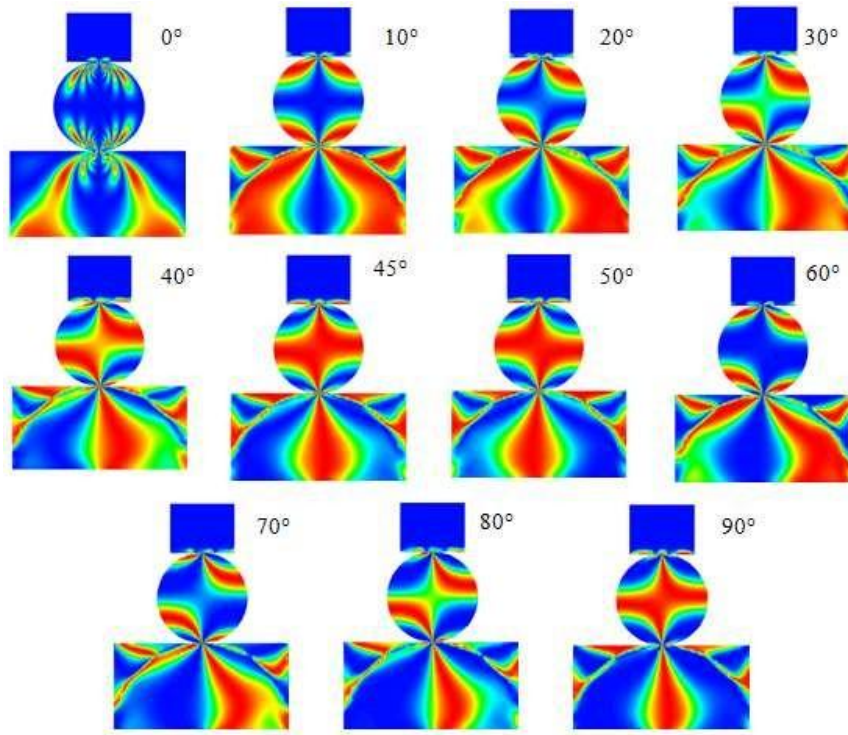


Figure IV - 31 : Les différentes franges isoclines obtenues pour les différentes valeurs de l'angle isocline α .

9^{ème} étape : Le relevé de la variation de la contrainte de cisaillement maximale le long de la droite [AB].

Les graphes de la variation de la contrainte de cisaillement maximale le long de la droite [AB] pour les trois modèles étudiés sont représentés sur les figures suivantes.

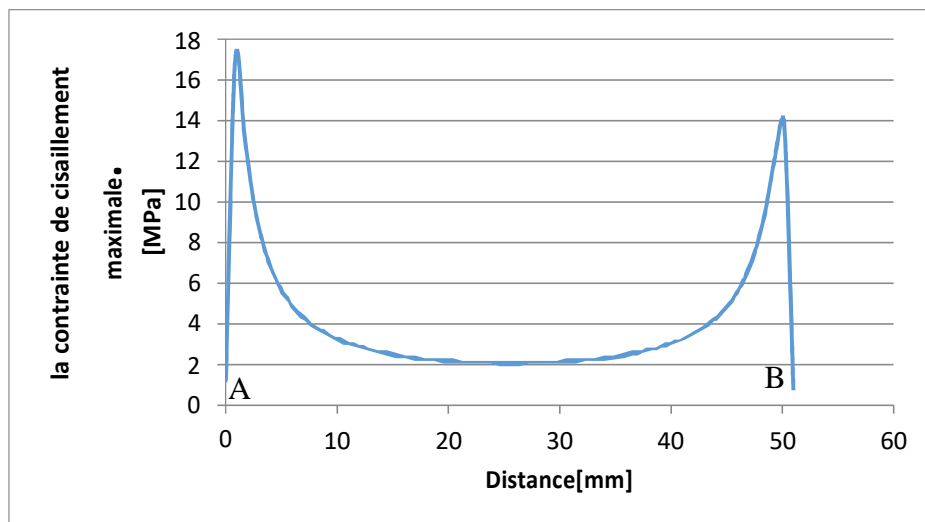


Figure IV - 32 : Evolution de τ_{\max} relevée numériquement pour le modèle avec revêtement 0.5mm d'époxy.

D'après la figure (IV-32), nous constatons que la contrainte dans la zone de contact n'est pas nulle à l'origine, mais elle prend une valeur de 1.22MPa puis augmente progressivement jusqu'à une valeur de 16.96 MPa (point de Hertz) à une distance de 0.85cm puis diminue progressivement et une autre fois augmente jusqu'à la valeur 13.87MPa à une distance de 0.70cm.

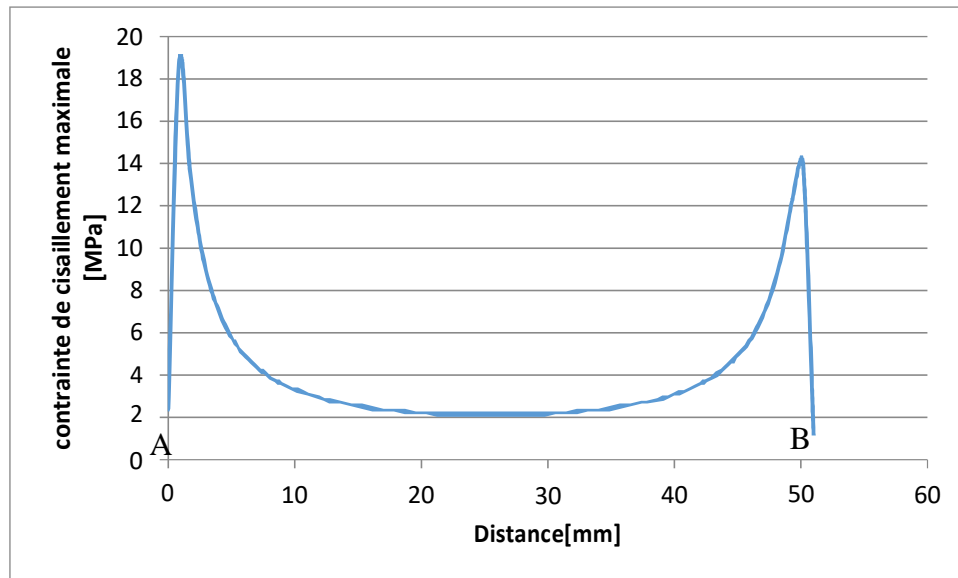


Figure IV - 33 : Evolution de τ_{\max} relevée numériquement pour le modèle avec revêtement 0.5mm d'aluminium.

D'après la figure (IV-33) nous constatons que la contrainte dans la zone de contact n'est pas nulle à l'origine, mais elle prend une valeur de 2.39MPa puis augmente progressivement jusqu'à une valeur de 18.68 MPa à une distance de 0.85cm puis diminue progressivement et une autre fois augmente jusqu'à la valeur 13.98MPa à une distance de 0.70cm.

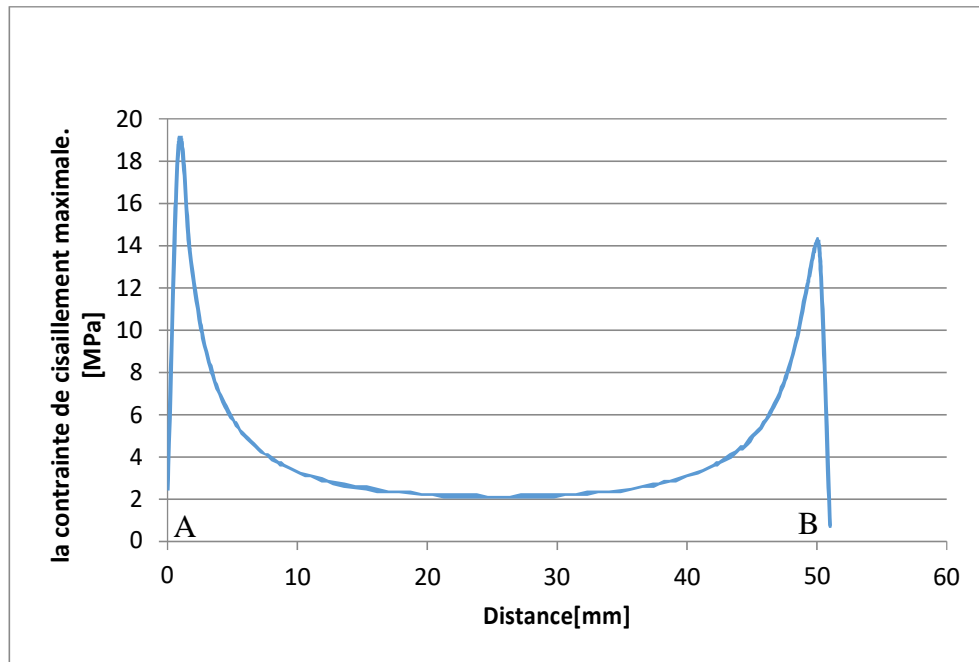


Figure IV - 34 : Evolution de τ_{\max} relevée numériquement pour le modèle en acier.

D'après la figure (0-34) nous constatons que la contrainte au milieu de la zone de contact n'est pas nulle à l'origine, mais elle prend une valeur de 2.34MPa puis augmente progressivement jusqu'à une valeur de 18.71 MPa à une distance de 0.85cm puis diminue progressivement et une autre fois augmente jusqu'à la valeur 13.98MPa à une distance de 0.70cm.

IV.8 Comparaison des résultats expérimentaux a ceux numériques.

IV.8.1 Comparaison des réseaux d'isochromes.

Les images relevées numériquement avec CASTEM sont comparées avec celles relevées expérimentalement pour le modèle avec un revêtement de 0.5mm en époxy.

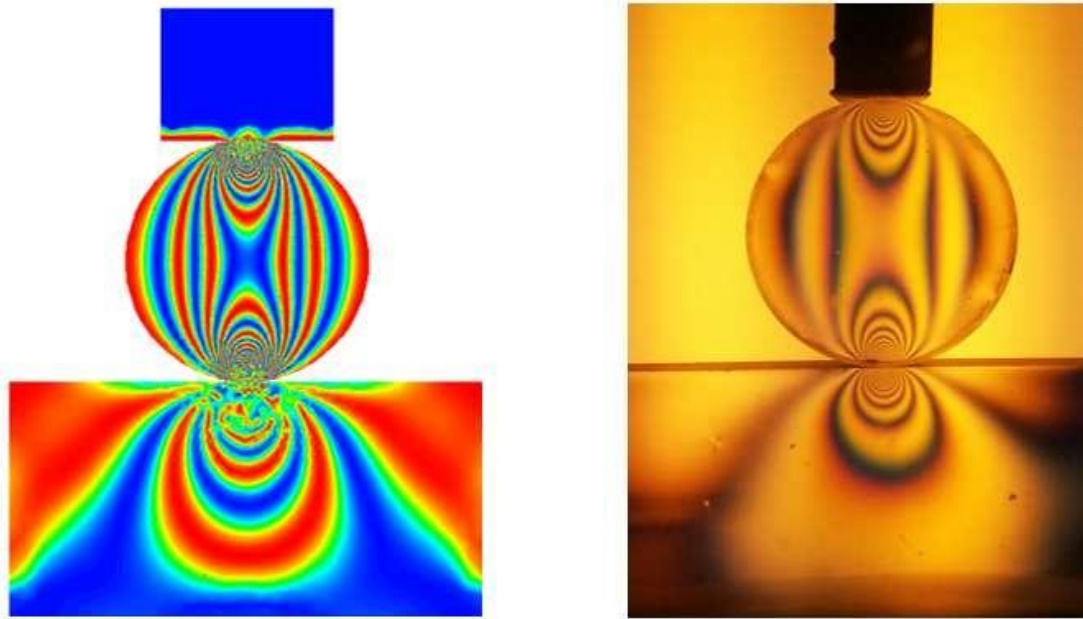


Figure IV - 35 : Isochromes simulées à l'aide du logiciel CASTEM et isochromes expérimentales.

Nous voyons que ces images obtenues expérimentalement sont comparables avec les images obtenues sous CASTEM. (Figure IV-35)

IV.8.2 Comparaison des isoclines

Les franges isoclines obtenues numériquement peuvent être comparés aux franges isoclines obtenues par la photoélasticimétrie pour les différentes rotations de l'angle α , la partie sombre de chaque image correspond à l'isocline, zone où l'une des directions principales est parallèle ou perpendiculaire à l'un des axes des polaroids.

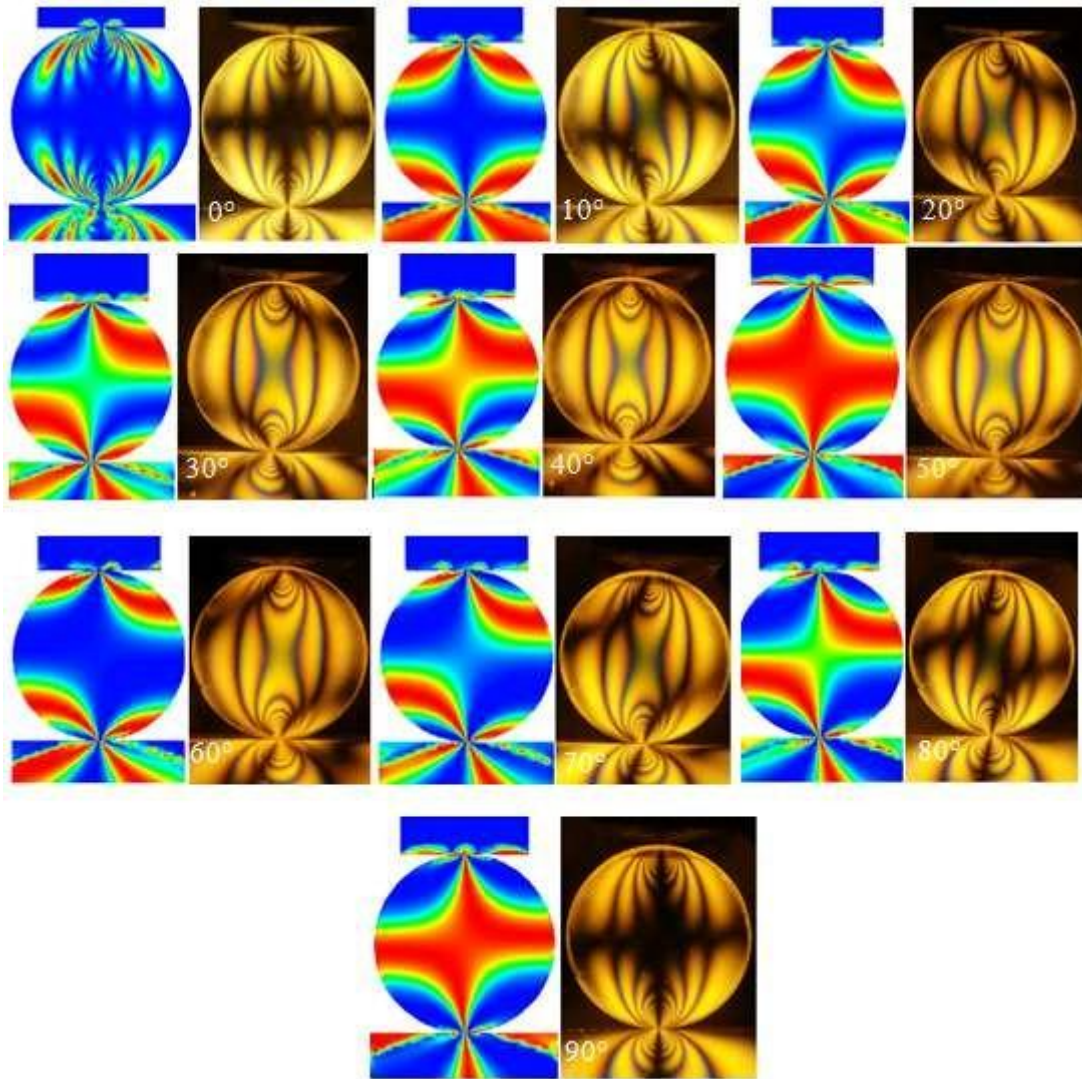


Figure IV - 36 : Comparaison des isoclines obtenues numériquement avec leurs correspondantes obtenues expérimentalement.

La figure (IV-36), représente la comparaison des isoclines obtenues numériquement (images à gauche) avec les isoclines correspondantes obtenues expérimentalement (images à droite). Nous remarquons qu'il est impossible de séparer le réseau isochrome du réseau isocline dans les images obtenues expérimentalement. Nous remarquons une bonne concordance entre les images isoclines relevées expérimentalement et celle relevées numériquement.

IV.8.3 Comparaison de l'évolution de la différence des contraintes principales suivant le segment [AB] pour les trois modèles.

Les figures (IV-37-38-39) représentent la superposition des courbes d'évolution de la différence des contraintes principales suivant le segment [AB] obtenu numériquement et expérimentalement pour nos trois modèles.

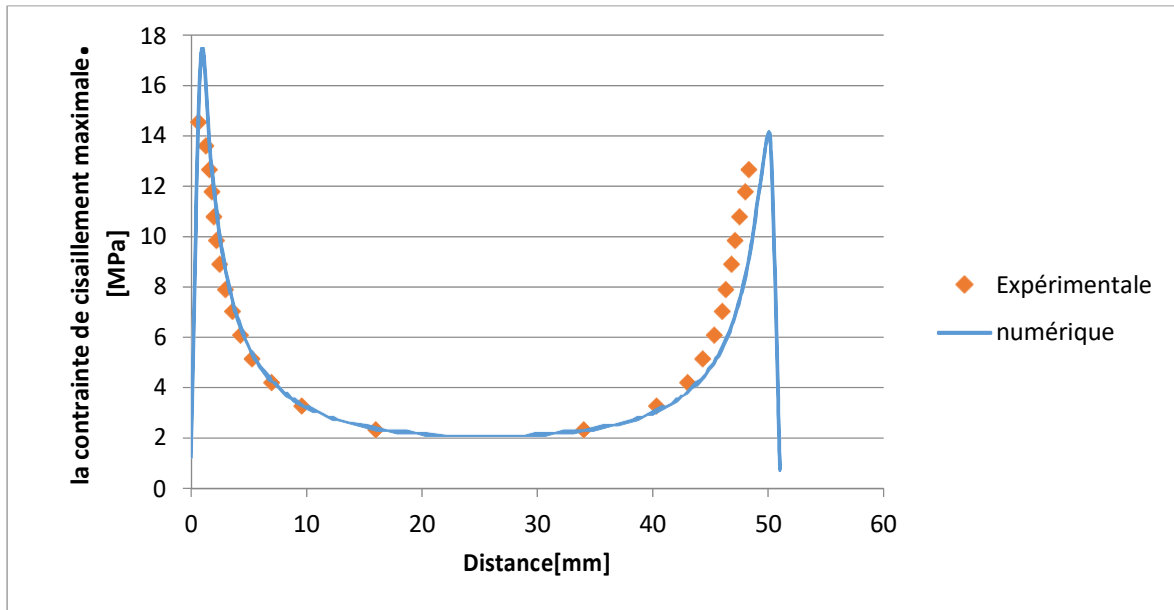


Figure IV - 37 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux avec revêtement en époxy.

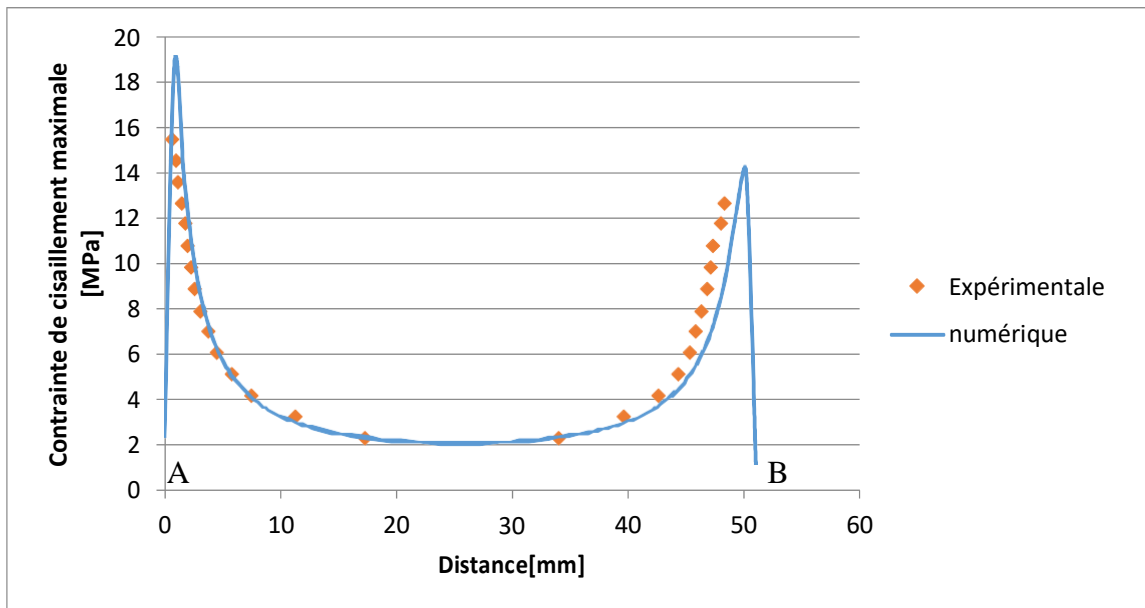


Figure IV - 38 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour le revêtement en aluminium.

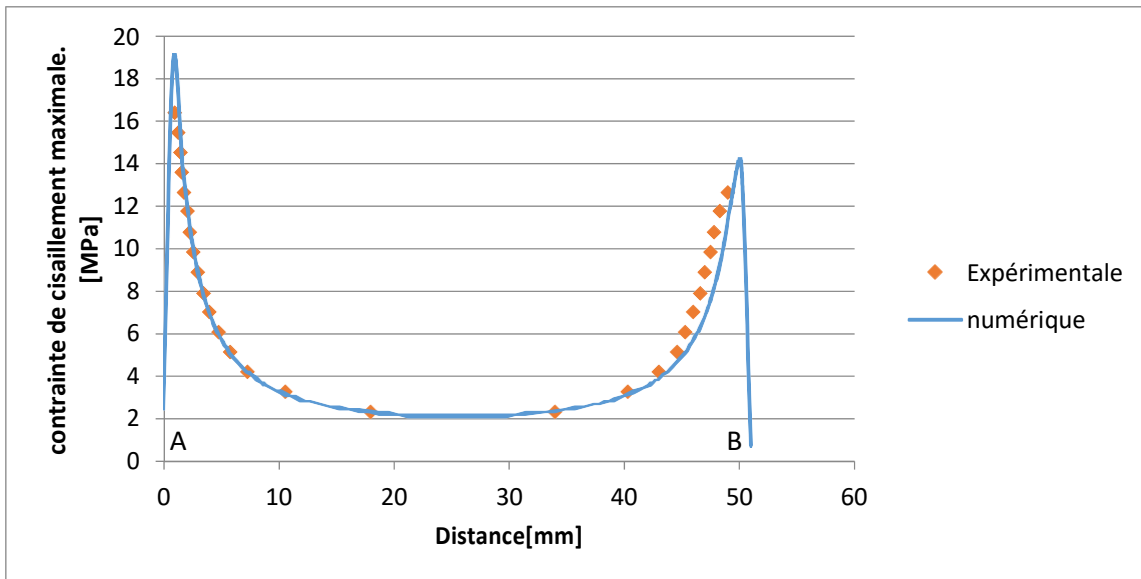


Figure IV - 39 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour le modèle en acier.

Nous constatons une bonne concordance des résultats obtenus pour les trois modèles. L'écart constaté entre les valeurs expérimentales et numériques, est probablement dû à plusieurs sources d'erreurs à savoir:

- L'erreur de mesure et d'analyse expérimentale
- Les manipulations expérimentales dans un environnement qui ne peut pas être reproduit de manière parfaite par la modélisation telles que les conditions aux limites, les dimensions des modèles ...etc.
- Les matériaux utilisés pour les essais expérimentaux ont probablement subi un vieillissement, ce qui signifie que les caractéristiques mécaniques de ces derniers présentent une certaine différence par rapport aux caractéristiques données et appliquées dans le numérique.

IV.8.4 Comparaison des courbes numériques pour les trois modèles.

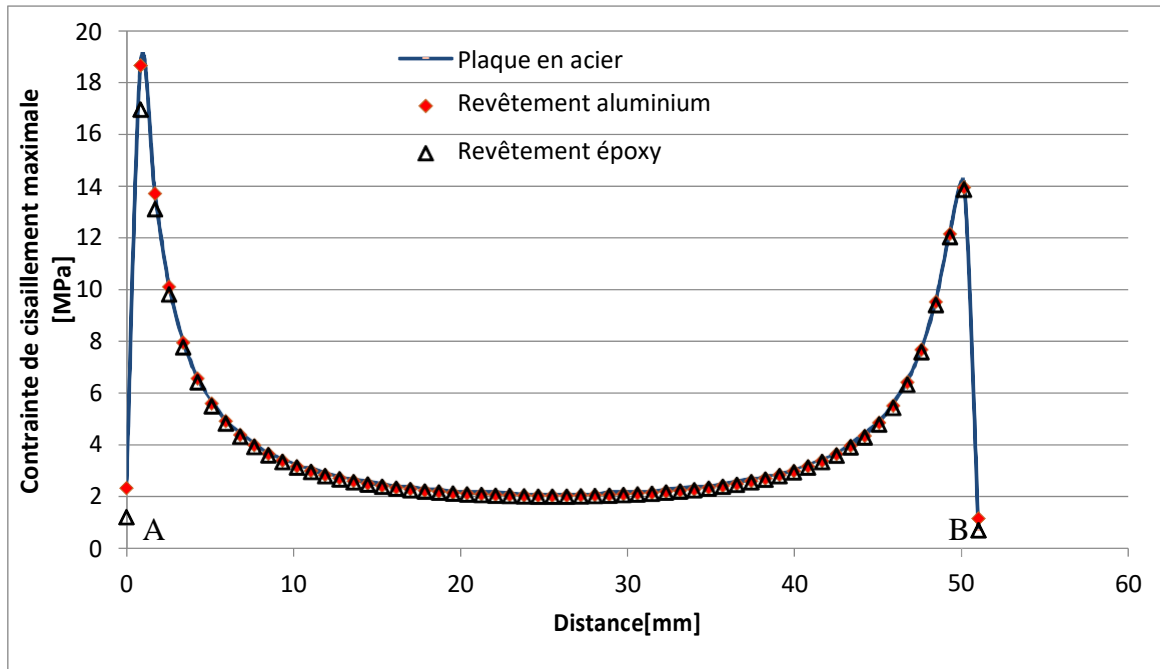


Figure IV - 40 : Superposition des résultats numériques pour les trois modèles.

Nous remarquons que les résultats obtenus pour les trois modèles nous donnent des valeurs différentes au point [A] ou le contact diffère selon le type de matériau.

Selon les caractéristiques du matériau, plus précisément sa rigidité, la valeur de la contrainte de cisaillement maximale varie. Plus le matériau est rigide, plus la zone de contact est petite ce qui nous donne une valeur de τ_{max} plus élevée.

IV.8.5 Comparaison de la contrainte de cisaillement maximale pour les différentes épaisseurs en époxy.

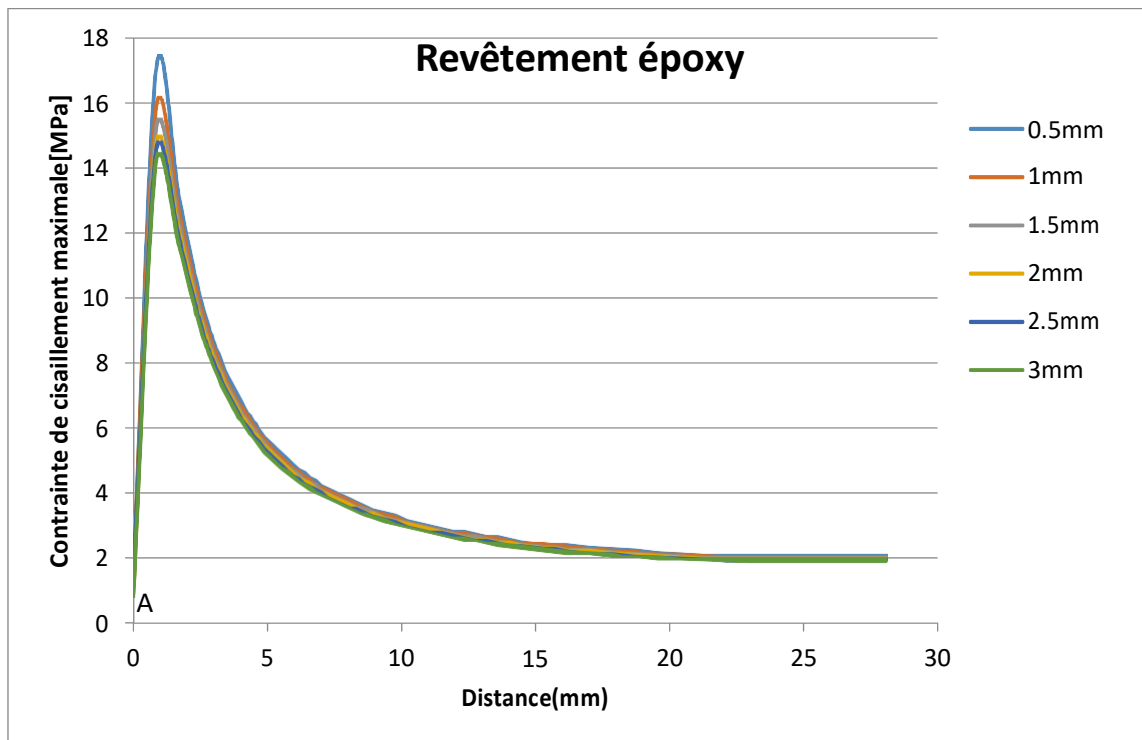


Figure IV - 41 : Contraite de cisaillement maximale pour les différentes épaisseurs de revêtement en époxy.

Nous remarquons une diminution de la valeur de la contrainte de cisaillement au point [A] en fonction de l'épaisseur du revêtement. Plus le revêtement est épais, plus la contrainte de cisaillement diminue. Nous expliquons cela par le fait que la zone de contact augmente avec l'augmentation de l'épaisseur du revêtement.

IV.8.6 Comparaison de la contrainte cisaillement maximale pour les différentes épaisseurs en aluminium.

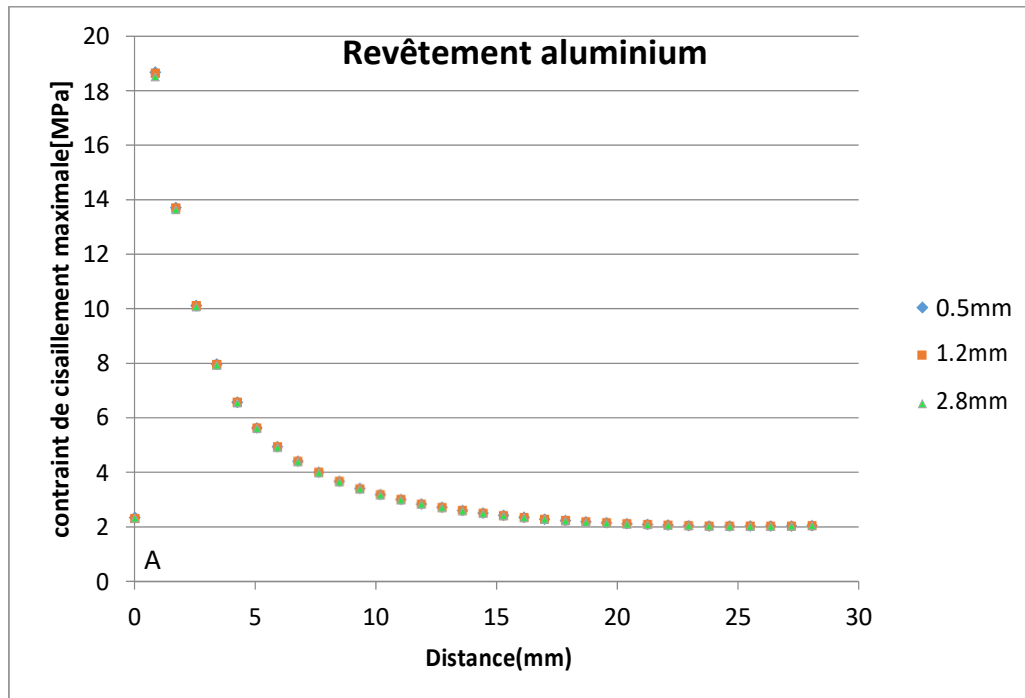


Figure IV - 42 : Contrainte de cisaillement maximal pour les différentes épaisseurs de revêtement en aluminium.

Dans le cas du revêtement en aluminium, la variation de l'épaisseur du revêtement a une influence légère sur la contrainte de cisaillement maximale. Nous expliquons cela par le fait que l'alliage d'aluminium est un matériau rigide donc il n'y a pas de variation dans la zone de contact.

IV.9 Discussion des résultats

Après analyse expérimentale et numérique des champs de contraintes dans les différents modèles, les différents réseaux d'isochromes et isoclines relevés expérimentalement sont comparés directement aux réseaux de franges obtenues numériquement ce qui a montré une similitude des résultats du modèle en acier-époxy (Figure IV-35 et Figure IV-36).

Une bonne concordance des résultats a été observée pour les trois modèles obtenus par la méthode des éléments finis avec ceux obtenus expérimentalement (Figure IV- 37-38-39). Cette concordance a permis la validation de l'ensemble des modèles numériques.

Concernant les résultats obtenus pour les contacts avec revêtements à différentes rigidités. La superposition des courbes de τ_{max} (Figure VI-40) numérique des trois modèles montre une différence au voisinage du contact au point [A]. La contrainte diminue au fur et à mesure que l'on ajoute des revêtements moins rigides à savoir l'aluminium puis l'époxy. Ceci

a été déjà expliqué par la théorie de Hertz [27], où la contrainte est directement lié à la rigidité et à la bande du contact.

Pour l'utilisation de revêtements à différentes épaisseurs. Les courbes numériques des contraintes de cisaillement τ_{max} suivant le segment [AB] pour chacun des modèles de revêtement montre que la valeur de τ_{max} au voisinage du contact est fonction de l'épaisseur du revêtement pour l'époxy (figure IV-41). Quant au modèle avec revêtement en aluminium, l'épaisseur du revêtement n'influence pas la valeur de τ_{max} , ceci peut probablement s'expliquer par la rigidité de l'alliage d'aluminium (figure IV-42).

Pour l'époxy, cette différence dans la valeur de τ_{max} qui apparait au point [A] est due à l'élargissement de la zone de contact dans ce point, quand l'épaisseur du revêtement est plus grande la bande du contact augmente aussi.

IV.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait une analyse des champs de contraintes dans un contact mécanique de plusieurs modèles à différentes épaisseurs et rigidités du revêtement.

Une analyse expérimentale à l'aide de la photoélasticimétrie du champ de contraintes a été menée afin de valider le programme écrit sous Castem. Nous avons montré que les franges isochromes et isoclines obtenues expérimentalement sont similaires aux réseaux des franges obtenues numériquement. Une autre comparaison a été faite entre la contrainte de cisaillement principale le long d'une droite [AB] pour tous les modèles étudiés. Les résultats obtenus ont révélé une bonne concordance entre les valeurs numériques et expérimentales.

Après validation des trois modèles numériques par la photoélasticité. D'autres programmes de calcul écrits sous Castem pour différentes épaisseurs et différentes rigidités de revêtements montrent que la rigidité du revêtement et son épaisseur ont une influence directe sur les champs de contraintes ce qui s'explique probablement par la relation qui peut exister entre la valeur de l'épaisseur et la bande du contact. Lorsque le revêtement est d'un matériau déformable (époxy), la bande du contact augmente avec l'augmentation de l'épaisseur et la contrainte diminue. Ceci a été déjà expliqué par la théorie de Hertz, où la contrainte est directement liée à la rigidité et à la dimension de la bande du contact.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire est une recherche dans le domaine de l'analyse des contraintes dans les pièces mécaniques en contact. Le but principal est de montrer que nous pouvons traiter des problèmes de contact complexes à l'aide d'un code de calculs par éléments finis sans avoir recours à l'expérience qui peut être couteuse et peut prendre beaucoup de temps. Nous avons traité un problème mécanique de contact en 2D à l'aide de la photoélasticimétrie et la méthode des éléments finis sur des modèles en contact; un disque déformable en époxy comprimé entre deux plaques avec et sans revêtement.

Afin d'obtenir un modèle numérique prototype exploitable, une étude expérimentale est toujours nécessaire pour le valider et lui apporter des améliorations et des modifications, afin de s'approcher des conditions réelles. La photoélasticimétrie est une méthode expérimentale non destructive d'analyse des champs de contraintes sur un modèle biréfringent qui a permis, après chargement du modèle et relevé des isochromes, de calculer la variation de la contrainte de cisaillement maximale le long d'un segment choisi à partir des points de contact A et B.

La modélisation numérique a été effectuée à l'aide du code de calcul CASTEM. Il permet de simuler les franges isochromes et isoclines et de déterminer la contrainte de cisaillement maximale afin de la comparer à celle obtenue par la photoélasticité.

Au début nous avons comparé les isochromes et les isoclines expérimentales à celles simulées. Puis comparé les graphes des variations des contraintes de cisaillement maximales obtenues expérimentalement et numériquement pour chaque modèle (contact acier/époxy, revêtement 0.5 époxy et revêtement 0.5 aluminium) mesurées le long du segment [AB].

Une autre comparaison pour les graphes des valeurs numériques des contraintes de cisaillement a été réalisée entre les trois modèles. Vers la fin nous avons comparé les valeurs numériques des modèles pour chaque matériau avec variation de l'épaisseur du revêtement.

Conclusion générale

En exploitant les résultats obtenus et après comparaison des images d'isochromes et d'isoclines, nous avons constaté une bonne concordance des résultats expérimentaux et numériques.

La comparaison des valeurs numériques faite entre les trois modèles a montré que la contrainte de cisaillement au point [A] diminue et diffère selon la rigidité du modèle, mais reste constante au point [B].

La dernière comparaison a montré que l'épaisseur du modèle influe sur le champ de contraintes, notamment pour le modèle à revêtement époxy.

Bibliographie

- [1] JOHNSON, K. L., GREENWOOD, J. A., et HIGGINSON, J. G. The contact of elastic regular wavy surfaces. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1985, vol. 27, no 6, p. 383-396.
- [2] MRAD, Hatem. *Simulation probabiliste du problème de contact mécanique*. Thèse de doctorat Université du Québec à Chicoutimi, 2009.
- [3] MIJOVIC, Budimir et DZOCLO, Mustapha. Numerical contact of a Hertz contact between two elastic solids. *Engineering Modeling*, 2000, vol. 13, p. 3-4.
- [4] KOGUT, Lior et ETSION, Izhak. Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat. *J. Appl. Mech.*, 2002, vol. 69, no 5, p. 657-662.
- [5] L. Etsion et I. Kogut, «A Semi-Analytical Solution for The stitching Inceptions of spherical contact,» *Journal of Tribology vol 125*, pp. (499-506). 2003.
- [6] Robert L.Jackson et Izhak Green , «A Finite Element Study of Elasto-Plastic Hemispherical contact Against à Rigid Flat,» *Journal of Tribology*, vol. 127 [343354]., Avril 2005.
- [7] Gérald Zambelli, Léo Vincent, Matériaux et contacts Edition, Presse Polytechnique et universitaires Romandes., 1998.
- [8] M. Grédiac and F. Hild, Full-field measurements and Identification in Solids Mechanics., Wiley edition, 2012.
- [9] F. Brémand and J. C. Dupré., La photoélasticimétrie. Mesures de champs et identification en mécanique des solides page 55-83 , 2011.
- [10] BERDJANE, Mohand Ouali. *Etude du contact entre solides déformables: Expérimentation-modélisation*. 2011. Mémoire Master. Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou.
- [11] A. Ajovalasit, S Barone and G Petrucci, A review of Automated Methods for the Collection and Analysis Of Photoelastic Data, *Journal of stress analysis*, vol. 33 N°2 Mech. E., 1998.
- [12] A. BILEK, Méthode non destructive de découpage optique en photoélasticimétrie tridimensionnelle. Application au problème fondamental du contact Thèse de doctorat d'état, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou., 2007.
- [13] Djani Yasmine, Analyses des contraintes dans une sphere a l'aide de la photoélasticité. Mémoire de master, Université Mouloud Mammeri 2016.
- [14] T. Tarik, *Analyse des contraintes dans les pièces mécaniques à l'aide de la photoélasticimétrie et de la méthode des élément finis*. Mémoire de magister, Université Mouloud Mammeri. 2012.

- [15] Mustapha, Beldi. *Analyse numérique et analyse expérimentale des champs de contraintes dans les engrenages*, . Mémoire de magister, Université Mouloud Mammeri., 2013.
- [16] R. DESAILLY, Méthode non-destructive de découpage optique en photoélasticimétrie tridimensionnelle — Application la mécanique de la rupture, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, juin 1981.
- [17] François PEYRUSEIGT, *Optimisation mécanique d'un contact conforme : Application aux rotules aéronautiques*. Doctorat de l'université de Toulouse., 2008.
- [18] A. bilek, M. BELDI, S. LARBI et S. DJEBALI, *PHOTOELASTIC AND NUMERICAL ANALYSIS OF STRESS FIELDS IN A PLATE LOADED ON ITS EDGE AND IN TWO ORTHOGONAL CYLINDERS IN CONTACT*, Communication Science & technology N° 14. janvier 2014.
- [19] Y. F. Cheng , A Dual-observation Method for Determining Photoelastic, Parameters in Scattered Light. *Experimental Mechanics*, (140-144). Mars 1967.
- [20] A. Germaneau, Développement de techniques de mesure dans le volume : photoélasticimétrie 3D par découpage optique et corrélation volumique par tomographie optique et rayons X. Application à l'étude des effets mécaniques 3D dans les structures et les biomatériaux., Poitiers: Ecole doctorale : science pour l'ingénieur & aéronautique. 2007.
- [21] M COTTRON, P, DOUMALIN, J DUPRÉ, A GERMANEAU, , V VALLE et F BRÉMAND, Mesures en mécanique par méthodes optiques . R1850, technique de l'ingénieur, 2011.
- [22] EICHENBERGER, Edward Peter. *A photoelastic investigation into the stress concentration factors around rectangular holes in composite plates*. Mémoire de master University of the Witwatersmnd, Johannesburge1993.
- [23] Cours Ecole polytechnique montréal, *Les techniques photoélastiques, Analyse expérimentale des contraintes.*, montreal, 2012.
- [24] R.HACIANE . Etude numérique et expérimentale du champ de contraintes développé dans un contact cylindre sur plan en présence d'un effort tangentiel, Mémoire de master, Université Mouloud Mammeri ,2011.
- [25] LUC CHEVALIER, BUMEDIJEN RAKA. , Confrontation RdM-MMC : une démarche expérimentale de validation . TECHNOLOGIE 129 . techno meca, 2004.
- [26] HACIANE, Rabah, BILEK, Ali, LARBI, Said, *et al.* Photoelastic and numerical analysis of a sphere/plan contact problem. *Procedia Engineering*, vol. 114, p. 277-283. 2015.
- [27] Manseur Tania, Bouksil Hadjira., Analyse numérique, expérimentale et analytique des champs de contraintes dans le contact mécanique entre solides (rigide-déformable et déformable-déformable)., Mémoire de master, Université Mouloud Mammeri 2019.
- [28] «G.U.N.T. Hamburg,» [En ligne]. Available: <https://www.gunt.de/fr/produits/mecanique-appliquee-et-conception-mecanique/resistance->

des-materiaux/analyse-de-contraintes-experimentelle/essais-photoelastiques-a-l-aide-d-un-polariscope-par-transmission/021.20000/fl200/glct-1:pa-149:ca-13:pr-343.

[29] D.dartus. , élasticité linéaire, Cépaduès édition, 1995.

[30] D.BELLET-J.J.BARREAU , Cours d'élasticité, Éditions cepadues..

[31] cours jean-Paul Castro, la refraction de la lumière, toulouse.

[32] C. Lardeux, «numerisud,» [En ligne]. Available: <https://numerisud.ird.fr/dossiers-thematiques/collecter-et-organiser-des-donnees/observer-la-terre/teledetection-radar/cours/generalites/autour-de-l-acronyme-radar>.

[33] A. Bilek, cours Principe de la photoélasticité.

[34] Marie-Anne Le Dain cours de Photoélasticimétrie ENSGI 1999/2000

[35] BELKACEMI Mohammed Hicham, Approche hybride pour la résolution des équations de BELTRAMI-MICHELLE dans des milieux multiconvexes, mémoire de master Université Des Sciences Et De La Technologie Mohamed Boudiaf, d'Oran 2014.

[36] «wikipedia,» [En ligne]. Available: https://fr.wikipedia.org/wiki/Contact_de_Hertz.

[37] Redha Aboud, Modélisation Numérique du Contact et du Champ des Contraintes du Couple Tribologique Cuivre-Acier, Université Mentouri de Constantine, 2010.

[38] Kechiche Fateh Bachiri Yahia, Etude et élaboration d'un dispositif de mesure d'usure, Thèse de doctorat Université Mohamed Boudiaf de M'SILA, 2017.

[39] Dominique François, André Pineau et André Zaoui, Comportement mécanique des matériaux, *Hermès*1993.

[40] PALADE, Adrian-Ciprian. *Caractérisation du comportement mécanique de la sous surface d'un polymère percé, sous une sollicitation de type hertzienne*. 2013. Thèse de doctorat. Université de Bourgogne.

[41] Z.Xiaolai, Etude paramétrique pour la détermination des contrainte résiduelles par la méthode ultrasonore. Thèse du doctorat Université de technologie de Troyes(UTT), 2006.

Annexe

Programme CASTEM pour le contact mécanique

Programme et analyse de la solution proposée

a) début du programme

*=====

*OPTION

*=====

TITR 'solides déformables';

OPTI DIME 2 ELEM SEG2;

La directive **opti(on)** permet de déclarer les principaux paramètres du programme (Ex : dimension du problème ,type d'éléments géométriques utilisés.....).

b) géométrie du modèle

*=====

* LES POINTS

*=====

P1=-50. -25.6;

P2=50. -25.6;

PC1=-5. -25.6;

PC2=5. -25.6;

P3=50. -75.6;

P4=-50. -75.6;

Pf=0. 52.6;

R=25.5;

alpha=15;

p6=(R * (sin alpha)) ((-1*R) * (cos alpha));

p5=(R * (sin alpha)) (R * (cos alpha));

P11=0. (R * ((cos alpha) - (sin alpha)));

P10=0. (-1*R);

P9= 0. R;

C1= 0. (R * (cos alpha));

C2= 0. ((-1*R) * (cos alpha));

P12= 0. ((-1*R) * ((cos alpha) - (sin alpha)));

P8= ((-1*R) * (sin alpha)) ((-1*R) * (cos alpha));

P7= ((-1*R) * (sin alpha)) (R * (cos alpha));

*carre sup

P13=-18. 25.6;

PC13=-5. 25.6;

PC14=5. 25.6;

P14=18. 25.6;

P15=18. 26.1;

PC15=5. 26.1;

PC16=-5. 26.1;

P16=-18. 26.1;

P17=-18. 26.1;

PC17=-5. 26.1;

PC18=5. 26.1;

P18=18. 26.1;

P19=18. 53.1;

PC19=5. 53.1;

PC20=-5. 53.1;

P20=-18. 53.1;

*=====

*** Lignes**

*=====

L1 = P1 DROI 80 P2;

LI21=P1 DROI 20 PC1;

LI11=PC1 DROI 40 PC2;

LI12=PC2 DROI 20 P2;

L2 = P2 DROI 10 P3 ;

L3 = P3 DROI 20 P4 ;

L4 = P4 DROI 10 P1 ;

Dr1= DROI 40 P9 P11;

Dr2= DROI 30 P11 P12;

Dr3= DROI 30 P12 P10;

DRT=Dr1 et Dr2 ET DR3;

*trac (Dr1 et Dr2 ET DR3);

C0= 0. 0.;

*ll=50;

HH=90;

arc1=CERC HH P7 C1 P11;

ARCC1=CERC HH P11 C1 P5;

arc2=CERC HH p7 C0 P9;

ARCC2=CERC HH P9 C0 P5;

arc3=CERC 45 P6 C0 P5;

ARCC4=CERC HH P8 C0 P10;

ARC4=CERC HH P10 C0 P6;

ARC5=CERC HH P6 C2 P12;

ARCC5=CERC HH P12 C2 P8;

ARC6=CERC 40 P8 C0 P7;

*ligne carre haut

L5 = P13 DROI 10 PC13;

LL5= PC13 DROI 50 PC14;

LL6=PC14 DROI 10 P14;

L6 = P14 DROI 10 P15 ;

*LL7=P15 DROI 10 PC15;

L7= P15 DROI 10 P16;

*LL8=PC16 DROI 10 P16;

L8 = P16 DROI 10 P13 ;

*carre sup sup

L9 = P17 DROI 10 P18;

*LL9= PC17 DROI 10 PC18;

*LL10=PC18 DROI 10 P18;

L10 = P18 DROI 10 P19 ;

LL11=P19 DROI 10 PC19;

L11= PC19 DROI 10 PC20;

LL12=PC20 DROI 10 P20;

L12 = P20 DROI 10 P17 ;

*=====

***Maillage des surfaces;**

*=====

CONT1= LI21 et LI11 et LI12 et L2 et L3 et L4;

TRAC CONT1;

SURF1= SURF PLAN CONT1;

*trac CONT1;

TRAC SURF1;

Cont2 = ELIM 0.001 (arc2 ET ARCC2 ET ARCC1 et arc1);

*trac cont2;

Cont3 = ELIM 0.001 (arc1 ET ARCC1 et arc3 ET ARC5 ET ARCC5 ET ARC6);

*trac CONT3;

CONT4=ELIM 0.001 (ARCC4 ET arc4 et arc5 ET ARCC5);

*trac CONT4;

CONTT=cont2 et cont3 ET CONT4;

TRAC CONTT;

SURF2 = SURF cont2 'PLANE';

SURF3 = SURF cont3 'PLANE';

SURF4 = SURF cont4 'PLANE';

SECTT=SURF2 ET SURF3 ET SURF4;

CONT5= L5 et LL5 et LL6 et L6 et L7 et L8;

TRAC CONT5;

SURF5=SURF PLAN CONT5;

TRAC SURF5

CONT6= L9 et L10 et LL11 et LL12 et L11 et L12;

TRAC CONT6;

SURF6=SURF PLAN CONT6;

TRAC SURF6;

SURF56 = SURF5 ET SURF6 ;

SURF = ELIM 0.001(SURF5 ET SURF6);

TRAC SURF;

CONTTOT=CONT5 ET CONTT ET CONT1 ET CONT6;

SURFT=SURF5 ET SECTT ET SURF1 ET SURF6 ;

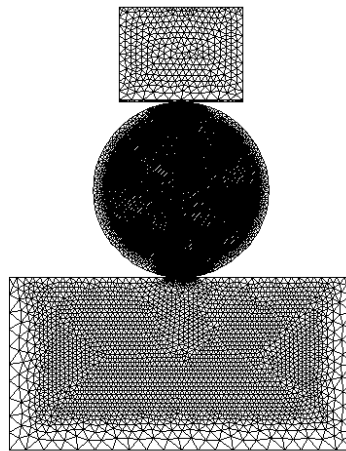
TRAC CONTTOT;

TRAC SURFT;

-l'opérateur **surf(ace)** nous permis de créer une surface à partir du contour fermé.

-l'opérateur **trac(er)** permet de tracer un objet de type maillage .on peut lui associer l'option **qual(ification)** qui permet d'afficher les noms des objets visualisés en post traitement.

Résultat après maillage du modèle



Tracé de la surface (SURFACE)

*=====

*CONDITION DU CONTACT

*=====

*Assuré le contact entre LI11 et arc1 et entre L9 et L7

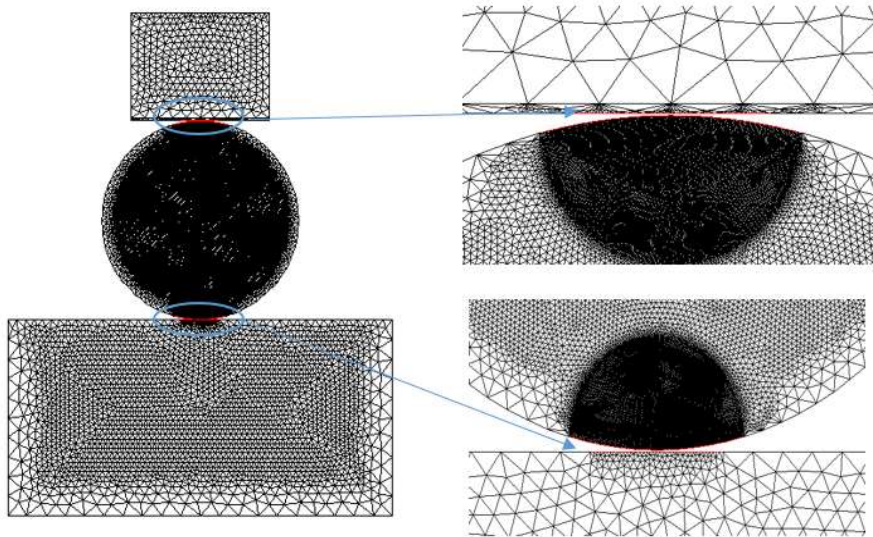
arcT1=arc2 et ARCC2;

arcT2=arc4 et arcc4;

MCONTH = (IMPO 'MAIL' ('INVE'LI11) arcT2) 'COUL' 'ROUG';

```
MCONTB = (IMPO 'MAIL' ('INVE'arcT1) LL5) 'COUL' 'ROUG';
```

```
TRAC (MCONTB et MCONTH ET SURFT);
```



Représentation des contacts assurés

*=====

*DEFINITION DU MODELE ET DU MATERIAU

*=====

```
MO1 = MODE SURF1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;
```

```
MA1 = MATE MO1 YOUN 3273 NU 0.37;
```

```
RI1 = RIGI MO1 MA1;
```

```
MO2 = MODE SECTT MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;
```

```
MA2 = MATE MO2 YOUN 3273 NU 0.37;
```

```
RI2 = RIGI MO2 MA2;
```

```
MO3 = MODE SURF5 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;
```

```
MA3 = MATE MO3 YOUN 3273 NU 0.37;
```

```
RI3 = RIGI MO3 MA3;
```

```
MO4 = MODE SURF6 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;
```

```
MA4 = MATE MO4 YOUN 210000 NU 0.3;
```

```
RI4 = RIGI MO4 MA4;
```

```
MOT = MO1 ET MO2 ET MO3 ET MO4 ;
```

```
MAT = MA1 ET MA2 ET MA3 ET MA4 ;
```

RIT = RI1 ET RI2 ET RI3 ET RI4 ;

MA(tériau) sert à définir les propriétés physique du matériau (module de Young ,coefficient de poisson ,...)pour un modèle donné.

L'opérateur **rigi(dité)** permet de construire la rigidité à partir du modèle et de ses caractéristiques.

*=====

*** blocages - conditions aux limites**

*=====

CL1=BLOQU L3 'UY';

CL2=BLOQU L3 'UX';

CL3= BLOQU DRT 'UX' ;

CL4= BLOQU L11 'UY

CLTOT= CL1 ET CL2 ET CL3 ET CL4 ;

RITOT=CLTOT ET RIT;

L'opérateur **bloq(uer)** construit la rigidité .qui sera ultérieurement à adjoindre à la rigidité de la structure

*=====

***(forces/déplacements)imposes**

*=====

*La valeur du déplacement impose est MM

MM= -0.375;

DEPL1='DEPL'CL4 MM;

'TITR' 'Déplacement imposer sur la droite L11;

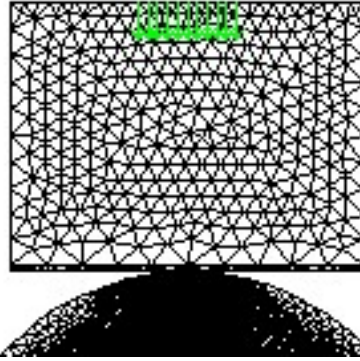
'TRAC' ('VECT'(DEPL1 'NOMC' 'UX') 10. 'UY' 'UX' 'VERT') (SURFT);

L'opérateur Vect(eur) nous permet de tracer le vecteur déplacement imposé

*=====

*Tracé du vecteur déplacement

*=====



Tracé du vecteur déplacement

*=====

***chargements**

*=====

LTPS1 ='PROG' 0. 1.;

LAMP =LTPS1;

EV1 = 'EVOL' 'MANU' 'TEMPS' LAMP ('PROG' 0. 1.);

CHARU1 = 'CHAR' 'DIMP' DEPL1 EV1;

CHAR0 = CHARU1;

*** Calculs et résolution**

*=====

***la force**

*=====

F1=FORC (0. 500.71) Pf;

F= F1;

*=====

*** Calcul des déformations**

*=====

***Construction de la table PASAPAS**

TAB1 = 'TABL';

TAB1. 'TEMPS_CALCULES'= LTPS1;

TAB1. 'MODELE'= MOT;

TAB1. 'CARACTERISTIQUES'= MAT;

TAB1. 'BLOCAGES_MECAIQUES' = CLTOT;

```
TAB1. 'CHARGEMENT'= CHAR0;  
TAB1. 'CONTACT'= MCONTH ET MCONTB;  
TAB1. 'GRANDS DEPLACEMENT'= FAUX;
```

```
*=====
```

*Résolution

```
*=====
```

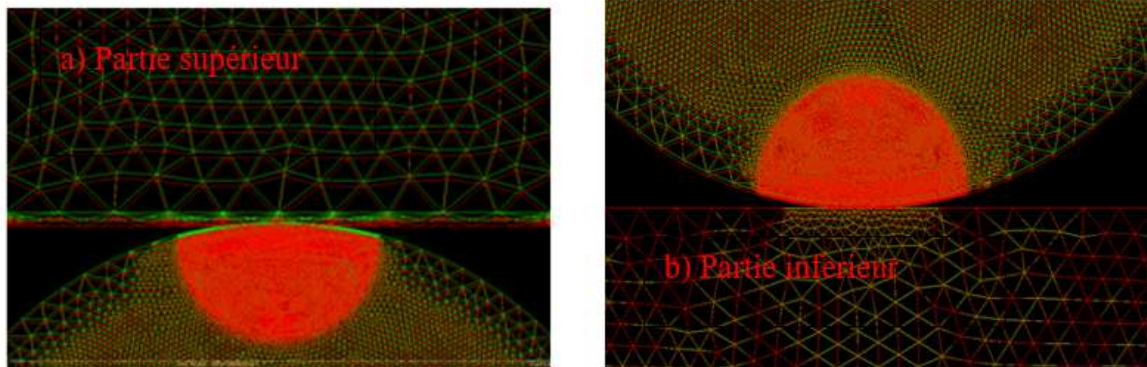
```
TAB2 = PASAPAS TAB1;  
DEPL1 = (TAB2. 'DEPLACEMENTS'. 1) 'ENLE' 'LX' ;  
DEFO0='DEFO'(SURF1 'ET' SECTT 'ET' SURF56)DEPL1 0. 'VERT';  
DEFO1='DEFO'(SURF1 'ET' SECTT 'ET' SURF56)DEPL1 1. 'ROUG';  
'TRAC'(DEFO0 'ET' DEFO1);
```

L'opérateur **defo(rme)** construit la déformée de la structure à partir de la géométrie initiale et du champ de déplacement. On peut préciser que certain nombre d'options comme la couleur (Ici rouge).

```
*=====
```

* Résultat après chargement du modèle

```
*=====
```



Tracé de la déformée (DEFO et DEF1)

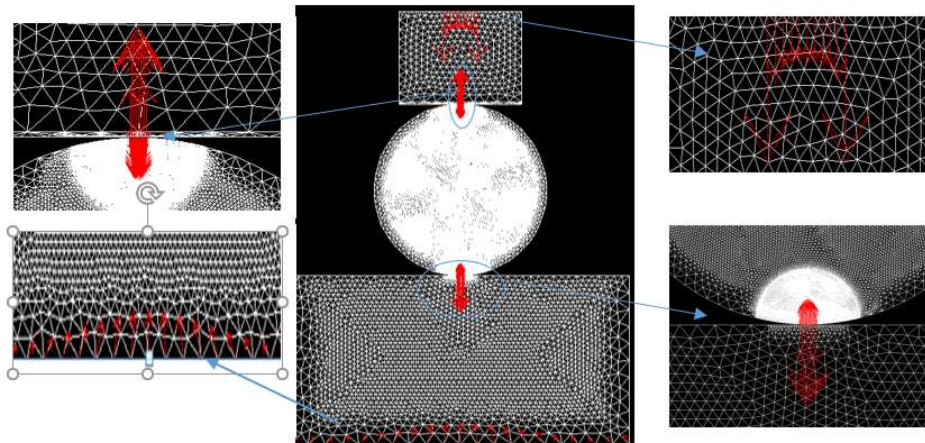
```
*=====
```

* visualisation des réactions

```
*=====
```

```
'SI' GRAPH ;  
REAC1 = TAB2 . 'REACTIONS'. 1;  
VR1 = 'VECT' REAC1 1. 'FX' 'FY' 'ROUG';
```

```
'TITR' Forces de réaction.!'
'TRAC' VR1(SURFT);
LFORCE = EXTR REAC1 'FX' Pf;
LIST LFORCE;
*LFORCE1 = EXTR REAC1 'FY' L11;
*LISTE LFORCE1;
*'FINS' ;
```



Visualisation des réactions au voisinage de contact

```
*           *Extraire des points pour determiner*
*           * l'effort correspondant au déplacement imposé*
```

```
base2=L3;
base2 = MANU CHPO base2 2 UX 0 UY 0 ;
base2 = EXTR base2 'MAIL';
trac base2;
n = nbno base2;
mess 'nbno base2=' n;
i = 0;
PeC = TAB2 ;
REPETER BlocVn (NBNO base2);
  i = i + 1;
  PeC.i = base2 POIN i;
```

```
Fin BlocVn;
*LIST PeC;
i = 0;
EffY = TAB2;
REPETER BlocFor n;
i = i + 1;
EffY.i= EXTR REAC1 'FX' PeC.i;
LISTE EffY.i;
FIN BlocFor;
Seff = TAB2;
Seff.1 = EffY.1;
PoilT = TAB2;
PoilT.1 = PeC.1;
i = 1;
REPETER BlocSef ( n - 1);
i = i + 1;
seffX = Seff.1 + EffY.i;
Seff.1 = seffX ;
FIN BlocSef;
LIST seffX ;
suivx=(seffX)**2;
list suivx;
base2=L3;
base2 = MANU CHPO base2 2 UX 0 UY 0 ;
base2 = EXTR base2 'MAIL';
*trac base2;
n = nbno base2;
mess 'nbno base2=' n;
i = 0;
PeC = TAB2 ;
REPETER BlocVn (NBNO base2);
```

```
i = i + 1;
PeC.i = base2 POIN i;
Fin BlocVn;
*LIST PeC;
i = 0;
EffY = TAB2;
REPETER BlocFor n;
i = i + 1;
EffY.i= EXTR REAC1 FY PeC.i;
LISTE EffY.i;
FIN BlocFor;
Seff = TAB2;
Seff.1 = EffY.1;
PoilT = TAB2;
PoilT.1 = PeC.1;
i = 1;
REPETER BlocSef ( n - 1);
i = i + 1;
seffY = Seff.1 + EffY.i;
Seff.1 = seffY ;
FIN BlocSef;
LIST seffY ;
suivy= (seffY )**2;
list suivy;
RESUL=(suivx+suivy)**0.5;
list RESUL;
```

```

Sélection castem11
*
$
*
$ FIN BlocSef;
* FIN BlocSef;
$
*
$ LIST seffy ;
* LIST seffy ;
RÚel valant: 80.823
$
*
$ suivy= (seffy)**2;
* suivy= (seffy)**2;
$ list suivy:
    
```

Extraction des efforts correspondant au déplacement imposé

*=====

*** calcul des contraintes**

*=====

MOT = MO1 ET MO2 ET MO3;

MAT = MA1 ET MA2 ET MA3;

CHACONTR=SIGM MOT MAT DEPL1;

CHANOEUD=CHAN NOEUD MOT CHACONTR;

CHANPOIN=CHAN CHPO MOT CHANOEUD;

L'opérateur **sigm(a)** calcule le champ des contraintes à partir d'un champ de déplacements.

*=====

*** extraction des contraintes (SX, SY, SXY)**

*=====

SY=EXCO CHANPOIN SMYY;

SX=EXCO CHANPOIN SMXX;

SXY= EXCO CHANPOIN SMXY;

L'opérateur **exco** crée à partir d'un champ, un champ de même type en extrayant une ou plusieurs composantes données.

DIFCONTR = (((SX-SY)**2)+(4*(SXY**2)))**0.5;

Sur le cercle de **Mohr** cette relation donne la différence des contraintes principales ($\sigma_1 - \sigma_2$) en fonction des contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} .

*=====

*** calcul du rapport I/I0 et traçage des isochromes**

*=====

f=10.87;

e= 6.;

```
phi=360*(1./10.87)*6.*DIFCONTR;
```

```
ISOC=(sin((phi)/2.))**2;
```

```
ISOCH =1-ISOC;
```

```
*=====
```

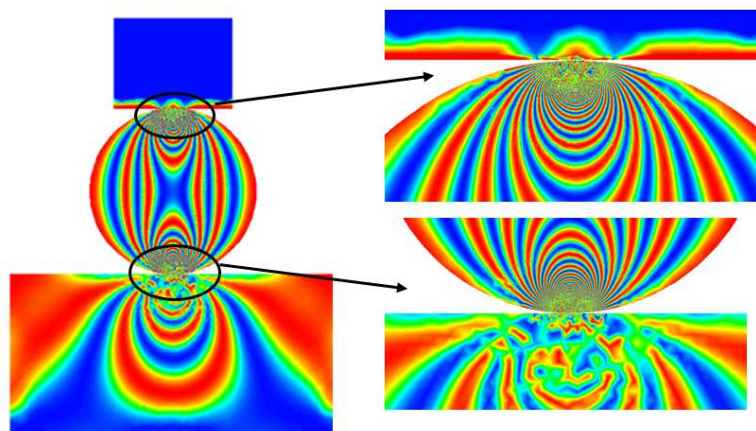
```
*TRACER LES ISOCLINES
```

```
*=====
```

```
*SURFT =SURF56 ET SECTT ET SURF1;
```

```
*trac ECLA 0.0001 ISOCH SURFT ;
```

```
*trac ECLA 0.0001 ISOCL SURFT;
```



Les franges isochromes simulées en champ clair.

L'ordinateur trace les isochromes avec une échelle de couleur par défaut. En pratique, en champ sombre, le noir qui représente les isochromes correspond ici au bleu. De même, les franges blanches correspondent au rouge.

```
*****
```

```
*TRACER LES ISOCLINES
```

```
*****
```

```
SECTT=SECTT ET SURF1 ET SURF56;
```

```
term1= (2. * SXY);
```

```
term2= (SX- SY);
```

```
term3= (term1/term2);
```

```
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
```

```
ISOCL= sin(2. * ALPHA);
```

```
ISOCL= ISOC*(ISOCL ** 2);
```

```
*trac ECLA 0.0001 ISOCL SECTT ;
```

Le programme nous donne la valeur de $(\sin^2(2\alpha) * (\sin((\phi)/2))^2)$ en chaque point

de modèle. Ceci permet de tracer l'allure des franges isoclines et isochromes superposées sur toute la surface de ce dernier.

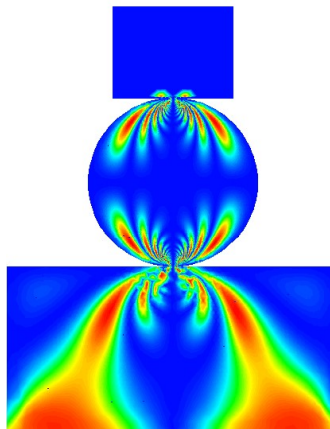
Les franges isoclines concrétisées dans ce tracé sont celles correspondant à un $\sin^2(2\alpha)=0$, représentées par la couleur bleue (extinction en pratique). Ceci est dû au fait que les directions principales dans ces zones coïncident avec les axes (fixes) considérés par le programme.

```
.....  
ALPHA0 = (ALPHA+0.);
```

```
ISOCL0= sin(2. * ALPHA0);
```

```
ISOCL0= (ISOCL0 ** 2);
```

```
*trac ECLA 0.0001 isocl0 SECTT cont;
```



```
**=====
```

```
* Evolutions des contraintes SxSy suivant LIG20
```

```
*=====
```

```
TOM=DIFCONTR/2;
```

```
LIG20=P9 droi 60 P10;
```

```
COMPTOM=INT_COMP SECTT TOM LIG20;
```

```
EVOL1= EVOL rouge'CHPO'LIG20 COMPTOM;
```

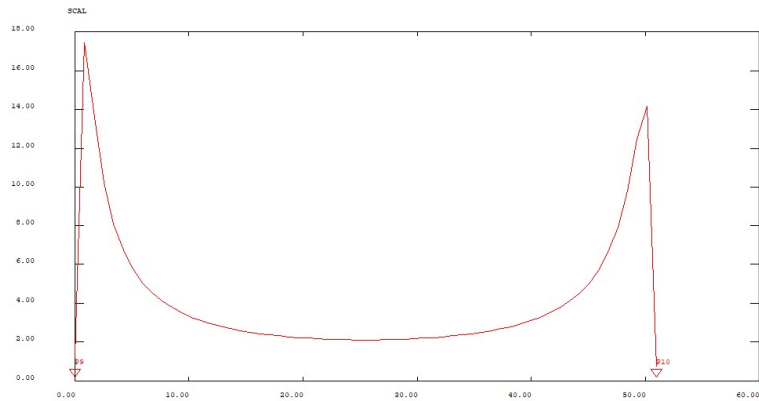
```
dess EVOL1;
```

L'opérateur **inter(polation) _ comp(osante)** nous a permis l'interpolation de la contrainte de cisaillement maximale (**TOM** ou τ_{\max}) du champ de contraintes sur le maillage.

L'opérateur **évol(ution)** nous a permis de définir l'évolution de la contrainte tangentielle

maximale (TOM ou τ_{\max}) le long du segment (LIG20)

dess EVOL1;



Tracé de l'évolution de τ_{\max}

*=====

* fin du fichier

*=====

Fin ;