

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

## Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie Electrique

**Spécialité : MACHINES ELECTRIQUES**

*Présenté par*  
**Smail AZZI**  
**Belkacem AZZI**

Thème

# Etude et Modélisation de la Machine Asynchrone Double Etoile : Application à la Traction Electrique

*Mémoire soutenu publiquement le 18 septembre 2014 devant le jury composé de :*

**M Slimane REZGUI**

Maitre Assistant A, UMMTO, Président

**M Arezki DICHE**

Maitre Assistant A, UMMTO, Rapporteur

**M Kaci GHEDAMSI**

Maitre de Conférence A, Université de Bejaia, Rapporteur

**M Farid NAMANI**

Maitre Assistant A, UMMTO, Examineur

**M Ferroudja BOUALI**

Maitre Assistant A, UMMTO, Examinatrice

# REMERCIEMENTS

*Nous remercions Dieu pour le courage, la patience et la santé qui nous ont été utiles tout au long de notre parcours.*

*Nous tenons à adresser nos vifs remerciements à Mr A. DICHÉ et Mr K. GHEDAMSI qui ont proposé et dirigé ce projet et pour leurs entière disponibilité, leurs aides et leurs précieux conseils.*

*Notre sincère gratitude va aussi aux membres du jury qui ont bien accepté de juger ce présent travail.*

*Nous tenons à remercier aussi tous les enseignants qui ont contribué à notre formation*

*Enfin, que toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, trouve ici l'expression de nos sincères remerciements.*

# Dédicaces

*C'est avec un grand honneur que je dédie ce mémoire :*

*À mes chers parents, à qui je doit tout.*

*À mon frère et sa femme ainsi que leurs enfants (rayanne et ania).*

*À mes beaux frères, belles soeurs ainsi que leurs enfants (moukrane, ilyane).*

*À mes cousins.*

*À tous mes amis.*

*À tous les étudiants de l'électrotechnique.*

*À toute la famille universitaire.*

*SMAIL*

# Dédicaces

*C'est avec un grand honneur que je dédie ce mémoire :*

*À mes chers parents, à qui je doit tout.*

*À mes frères et soeurs.*

*À mes beaux frères, belles soeurs ainsi que leurs enfants.*

*À mes cousins.*

*À tous mes amis.*

*À tous les étudiants de l'électrotechnique.*

*À toute la famille universitaire.*

*BELKACEM*

FOC : Field Oriented Contrôle (Command à flux orienté)

MASDE : Machine Asynchrone Double Etoile

MCC : Machine à Courant Continu

M.L.I : Modulation par Largeur d'Impulsion

PI : Proportionnel- Intégrale

$C_{em}$  : Couple électromagnétique (N.m)

$C_{emmax}$  : Couple électromagnétique maximal (N.m)

$C_r$  : Couple résistant (N.m)

$E$  : Tension continue (V)

$f_{ref}$  : Fréquence de la tension de référence (Hz)

$f_p$  : Fréquence de la porteuse (Hz)

$f$  : Fréquence du réseau (Hz)

$I_a$  : Courant d'induit de la MCC (A)

$I_f$  : Courant d'excitation de la MCC(A)

$i_{a,b,cr}$  : Courants triphasées rotorique (A)

$i_{a,b,cs1,2}$  : Courants triphasées statoriques (étoiles 1 et 2) (A)

$i_{ds1}, i_{qs1}$  : Courant de l'étoile 1 dans le référentiel de Park (d, q) (A)

$i_{ds2}, i_{qs2}$  : Courant de l'étoile 2 dans le référentiel de Park (d, q) (A)

$i_{dr}, i_{qr}$  : Courant rotorique dans le référentiel de Park (d, q) (A)

$[i_{s1}], [i_{s2}], [i_r]$  : Vecteurs des courants statoriques et rotorique (A)

$J$  : Moment d'inertie (kg.m<sup>2</sup>)

$k_f$  : Coefficient de frottement (Nms/rd)

$K_i$  : Gain intégral

$k_p$  : Gain proportionnel

$k_{ps1,2}, k_{is1,2}$  : Gains proportionnels et intégraux des régulateurs PI des courants statoriques (étoiles 1 et 2)

$k_{pv}, k_{iv}$  : Gain proportionnel et intégral du régulateur de vitesse

$L_{s1}$  : Inductance propre d'une phase de l'étoile 1 (H)

$L_{s2}$  : Inductance propre d'une phase de l'étoile 2 (H)

$L_{sr}$  : Inductance mutuelle cyclique stators-rotor (H)

$L_m$  : Inductance mutuelle cyclique étoile1-étoile2 et le rotor (H)

$L_{ms}$  : Inductance mutuelle cyclique statorique (H)

$L_{mr}$  : Inductance mutuelle cyclique rotorique (H)

$L_r$  : Inductance propre d'une phase du rotor (H)

$m$  : Indice de modulation

$m_p$  Nombre de phases statorique

- $N$  : vitesse de rotation de la machine (tr/mn)
- $N_s$  : Vitesse de synchronisme (tr/mn)
- $p$  : nombre de paires de pôles
- $p$  : Opérateur de Laplace
- $q$  : Nombre d'encoche par pôle et par phase
- $R_s$  : Résistance électrique ( $\Omega$ )
- $R_{s1}$  : Résistance d'une phase (statorique) de l'étoile 1 ( $\Omega$ )
- $R_{s2}$  : Résistance d'une phase (statorique) de l'étoile 2 ( $\Omega$ )
- $R_r$  : Résistance d'une phase rotorique ramené ( $\Omega$ )
- $r$  : Coefficient de réglage en tension
- $t$  : temps (s)
- $T_p$  : Période du signal de la porteuse (s)
- $T$  : Constante de temps d'un système du premier ordre (s)
- $t$  : (exposant) transpose d'une matrice
- $[U]$  : Vecteur de commande
- $[I]$  : Vecteur d'état
- $v_{a,b,cs1,2}$  : Tension triphase statorique (étoile 1 et 2) (V)
- $v_{ds1}, v_{qs1}$  : tension de l'étoile 1 dans le référentielle de Park (d,q) (V)
- $v_{ds2}, v_{qs2}$  : tension de l'étoile 2 dans le référentielle de Park (d,q) (V)
- $v_{dr}, v_{qr}$  : tension rotorique dans le référentielle de Park (d,q) (V)
- $[v_{s1}], [v_{s2}], [v_r]$  : Vecteur des tensions statoriques et rotorique (V)
- $W_{mag}$  : Energie magnétique
- $\alpha$  : Angle électrique de décalage entre les deux étoiles (rd)
- $\alpha_m$  : Angle mécanique de décalage entre les deux étoiles
- $\phi_{a,b,cr}$  : Flux triphases rotorique (Wb)
- $\phi_{a,b,cs1,2}$  : Flux triphases statorique (étoiles 1 et 2)
- $\phi_{s1d}, \phi_{s1q}$  : flux de l'étoile 1 dans le référentiel de Park (d,q) (Wb)
- $\phi_{s2d}, \phi_{s2q}$  : flux de l'étoile 2 dans le référentiel de Park (d,q) (Wb)
- $\phi_{rd}, \phi_{rq}$  : Flux rotorique dans le référentiel de Park (d, q) (Wb)
- $\phi_s$  : Flux statorique selon (d, q) (Wb)
- $[\phi_s], [\phi_r]$  : Vecteurs des flux statorique et rotorique (Wb)

$\Omega$ : vitesse mécanique de rotation du rotor (rd/s)

$\omega_{coord}$ : vitesse angulaire de rotation du système d'axe biphasé par rapport au système d'axes triphase (rd/s)

$\omega_{gl}$ : Pulsation électrique du glissement (rd/s)

$\Omega_n$ : vitesse mécanique de rotation du rotor nominal (rd/s)

$\omega_r$ : Pulsation électrique des grandeurs rotorique (rd/s)

$\omega_s$  : Pulsation électrique des grandeurs statorique (rd/s)

$\tau$ : Constante de temps d'un système de premier ordre (s)

$\tau_r$  : Constante de temps rotorique (s)

$\theta$  : Position de l'axe d par rapport à l'étoile 1(rd)

$\theta_{gl}$  : Position de l'axe d par rapport un rotor (rd)

$\theta_r$  : Position du rotor par rapport à l'étoile 1(rd)

$\theta_{r-\alpha}$  : Position du rotor par rapport à l'étoile 2(rd)

<b>Introduction générale</b> .....	1
------------------------------------	---

## **Chapitre I : Généralités**

I.1 Introduction.....	3
I.2 La machine asynchrone.....	3
I.2.1 Définition.....	3
I.2.2 Constitution de la machine asynchrone.....	3
I.3 Les machines multiphasées.....	4
I.3.1 Machines multiphasées de «type 1 ».....	4
I.3.2 Machines multiphasées de «type2».....	5
I.4 Applications des machines multiphasées.....	7
I.5 Les avantages et les inconvénients de la machine.....	7
I.5.1 Avantages des Machines Multiphasées .....	7
I.5.2 Inconvénients des machines multiphasées.....	8
I.6 Présentation de la machine asynchrone à double étoile.....	8
I.7 Description du moteur asynchrone à double étoile (MASDE) .....	9
I.7.1 Partie fixe (stator ou inducteur) .....	9
I.7.2 Partie mobile (rotor ou induit) .....	9
I.8 Principe de fonctionnement de la machine asynchrone à double étoile.....	10
I.9 Conclusion.....	11

## **Chapitre II : modélisation et simulation de la MASDE**

II.1 Introduction.....	12
II.2 Hypothèses simplificatrices.....	12
II.3 Modèle de la machine asynchrone triphasée à double étoile.....	13
II.3.1 Représentation de la machine.....	13
II.3.2 Equations électriques.....	13
II.3.3 Equations magnétiques.....	15
II.3.4 Energie magnétique.....	17
II.3.5 Couple électromagnétique.....	17
II.3.6 Equation mécanique.....	18
II.4 Modèle biphasé de Park.....	18
II.4.1 Transformation de base de Park.....	18

II.4.2 Modèle de Park de la machine.....	20
II.4.3 Choix du référentiel.....	20
II.4.3.1 Référentiel lié au stator.....	20
II.4.3.2 Référentiel lié au rotor.....	21
II.4.3.3 Référentiel lié au champ tournant.....	21
II.4.4 Equations matricielles de la machine avec transformation de Park.....	21
II.4.4.1 Equations des tensions.....	22
II.4.4.2 Equations magnétiques.....	24
II.4.4.3 Equation mécanique.....	25
II.4.4.3.1 Puissance instantanée.....	25
II.4.4.3.2 Couple électromagnétique.....	26
II.4.5 Mise sous forme d'équation d'état.....	27
II.5 Simulation et Interprétation des résultats.....	29
II.5.1 Les résultats de simulation.....	30
II.5.2 Interprétation des résultats.....	31
II.6 Alimentation de la MASDE par onduleurs de tension à commande MLI.....	32
II.6.1 Introduction.....	32
II.6.2 Modélisation de l'onduleur de tension à MLI.....	32
II.6.3 Stratégie de commande sinus-triangle.....	34
II.6.4 Association de la MASDE par deux onduleurs de tension à commande MLI.....	36
II.6.5 Résultats de simulation.....	36
II.6.6 Interprétation des résultats.....	38
II.7 Conclusion.....	38

### **Chapitre III : Commande vectorielle de la MASDE**

III.1 Introduction.....	39
III.2 Principe de la commande vectorielle.....	39
III.3 Procède d'orientation de flux.....	41

III.4 différentes méthodes de la commande vectorielle.....	41
III.4.1 méthode de commande indirecte.....	41
III.5 Commande vectorielle indirecte avec régulation de vitesse.....	41
III.5.1 Identification des paramètres du régulateurs PI.....	43
III.5.2 Identification des paramètres du régulateurs de vitesse.....	45
III.5.2 Simulation et interprétation des résultats.....	46
III.5.2. Résultats de simulation.....	46
III.5.2.1 Interprétation des résultats.....	47
III.6 Conclusion.....	48
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>49</b>

## **Résumé**

Ce mémoire, présente une étude de la modélisation, de la commande en vitesse de la machine asynchrone double étoile alimentée par deux onduleurs de tension et l'introduction en fonctionnement moteur.

La transformation de Park permet d'obtenir un modèle de la machine. Deux commandes sont appliquées pour régler la vitesse de la machine ; l'une vectorielle et l'autre scalaire.

Des résultats de simulation sont présentés pour montrer la robustesse de ces techniques de commande.

La régulation de la vitesse par la commande vectorielle indirecte présente de meilleures performances par rapport à l'alimentation directe du réseau et par les onduleurs de tension, et cela en termes de précision et de stabilité.

## **Mots clés**

Machine asynchrone double étoile(MASDE) ; Modulation par Largeur d'Impulsion(M.L.I) ; Commande vectorielle ; Proportionnel-Intégrale(PI) ; Commande à flux orienté (FOC : Field Oriented Contrôle).

# **Introduction générale**

## Introduction générale

En 1888 NIKOLA TESLA a inventé le premier moteur à courant alternatif, ce dernier a remplacé les moteurs à courant continu dans nombreuses applications en raison de l'handicap du collecteur mécanique. Parmi les moteurs asynchrones on trouve le moteur à cage qui est le plus utilisé et qui a un rôle majeur dans le développement de l'industrie électrique [4].

La première machine asynchrone triphasée fut réalisée par l'allemand MICHAEL DOLIVO-DOBROWLSKI en 1889. Cette dernière domine assez largement le domaine des machines électriques, grâce à plusieurs avantages qu'elle présente par rapport aux autres types. Elle est la plus simple à fabriquer, la moins coûteuse, la moins exigeante en termes d'entretien [10].

Dés la fin des années 1920, les machines à deux enroulements triphasés au stator avaient été introduites pour accroître la puissance des alternateurs synchrones de très forte puissance. Les machines multiphasées ont par la suite connu un intérêt grandissant, et en particulier la machine asynchrone double étoile (MASDE), qui présente en plus des avantages des machines asynchrones à cage, ceux des machines multiphasées. L'un des exemples les plus courants de la machine asynchrone double étoile, dans la configuration classique deux enroulements triphasés identiques, les deux étoiles se partagent le même stator et sont décalés d'un angle électrique de  $30^\circ$ . Ces enroulements ont le même nombre de pôles et sont alimentés à la même fréquence [4].

En effet, les variateurs multiphasés présentent plusieurs avantages par rapport aux machines conventionnelles triphasées, tels que, La segmentation de puissance, La minimisation des ondulations de couple et des pertes rotoriques, réduction des courants harmoniques, grande fiabilité et forte puissance etc...

Dans le domaine de la commande des machines électriques, les travaux de recherche s'orientent de plus en plus vers l'application des techniques de commande modernes. Ces techniques évoluent d'une façon très rapide avec l'évolution des calculateurs numériques et de l'électronique de puissance. Ceci permet d'aboutir à des processus industriels de hautes performances. On cite à titre d'exemple la commande par mode de glissement etc.....

L'objet de présent travail est l'étude et la modélisation de la machine asynchrone à double étoile.

Pour ce faire, le manuscrit est présenté comme suit :

Le premier chapitre présentera quelques généralités sur les machines multiphasées. La machine asynchrone double étoile étant un exemple de la machine multiphasées.

Le deuxième chapitre sera consacré à la modélisation et l'identification de la machine asynchrone double étoile et son alimentation. On développe en premier lieu un modèle triphasé de la machine asynchrone double étoile, deuxièmement le modèle triphasé basé sur la transformation de Park. Ensuite, on présente l'alimentation de la machine par onduleur de tension à commande M.L.I. enfin, on visualise les résultats de simulation.

Le troisième chapitre récapitulera la commande vectorielle par orientation de flux rotorique de la machine asynchrone double étoile. Aussi, on passe à l'application de la méthode indirecte sur la machine.

On terminera par une conclusion générale.

# Chapitre I

**Généralités sur la Machine  
asynchrone double étoile  
(MASDE)**

## I.1 Introduction

Le moteur asynchrone est de beaucoup le moteur le plus utilisé dans l'ensemble des applications industrielles, du fait de sa facilité de mise en œuvre, de son faible encombrement de son bon rendement et de son excellente fiabilité. Son seul point noir est le circuit magnétique (l'énergie réactive toujours consommée pour magnétiser l'entrefer).

On n'estime généralement que les moteurs asynchrones triphasés représentent 70% de la puissance installée, et qu'ils absorbent 40 à 50% de l'énergie totale consommée. Même ces chiffres sont imprécis, ils montrent l'importance de ce type d'équipement [1].

Dans ce chapitre, on va étudier les machines asynchrones à plusieurs phases décalées l'une par rapport à l'autre d'un angle  $(\frac{2\pi}{n})$ , tel que n représente le nombre de phases.

## I.2 La machine asynchrone

### I.2.1 Définition

La machine asynchrone est une machine électrique tournante, fonctionnant sur le réseau alternatif de fréquence f ayant 2p pôles, a une vitesse différente de celle du synchronisme  $N_s$  définie par :

$$N_s = \frac{60f}{p} \quad (I.1)$$

### I.2.2 Constitution de la machine asynchrone

La machine asynchrone est constituée des principaux éléments suivants :

- le stator (partie fixe) constitué de disques en tôle magnétique portant les enroulements chargés de magnétiser l'entrefer.
- le rotor (partie tournante) constitué de disques en tôle magnétique empilés sur l'arbre de la machine portant un enroulement bobiné ou injecté.
- les organes mécaniques permettant la rotation du rotor et le maintien des différents sous-ensembles

### I.3 Les machines multiphasées

On distingue habituellement deux types de machines multiphasées, suivant que le nombre de phases statoriques est ou non un multiple de trois. On peut ainsi les classer en deux groupes, qu'on nommera "machines multiphasées de type " 1 " " et machines multiphasées de type " 2 ". De plus, on considère rarement les cas où le nombre de phases est un nombre pairs, sauf si celui-ci est un multiple de trois.

#### I.3.1 Machines multiphasées de «type 1 »

Les machines multiphasées de "type 1" sont des machines dont le nombre de phases statoriques  $q$  est un multiple de trois, de sorte que l'on puisse les grouper en  $(3A)$  étoiles triphasées :

$$q = 3A \quad \text{avec: } (A = 1,2,3,4 \dots)$$

Ces machines sont aussi appelées "machines multi étoile".

On remarque qu'il est préférable, en fonctionnement normal, d'avoir autant de neutres que d'étoiles, c'est-à-dire  $A$  neutres isolés. Or pour un nombre donné de phases, il peut y avoir plusieurs configurations possibles suivant le décalage angulaire  $\alpha$  entre deux bobines adjacentes (qui correspond d'ailleurs au décalage entre étoiles). En effet, une machine à double étoile ( $q=6$ ) dont les étoiles sont décalées de  $\alpha = \pi/6$  à des caractéristiques différentes de celles d'une machine dont les étoiles sont décalées de  $\alpha = \pi/3$ .

Le tableau I.1 donne le détail de quelques exemples des machines multi étoiles [2] :

Nombres de phases (q)	Nombre équivalent de phases ( $q_\alpha$ )	Décalages angulaire ( $\alpha$ )	Représentation schématique, position des bobines
3	3	$\pi/3$	
6	3	$\pi/3$	
6	6	$\pi/6$	
9	9	$\pi/9$	
12	6	$\pi/6$	
12	12	$\pi/12$	

Tableau I.1: machines multiphasées dont le nombre de phases statorique est un multiple de trois (machines multiphasées de type 1).

I.3.2 Machines multiphasées de «type2»

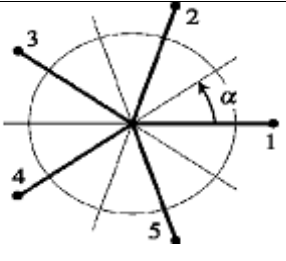
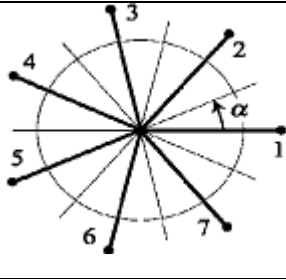
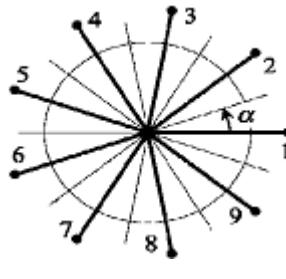
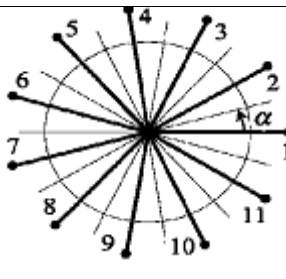
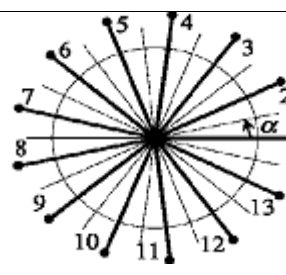
Nombres de phases (q)	Nombre équivalent de phases ( $q_\alpha$ )	Décalages angulaire ( $\alpha$ )	Représentation schématique , position des bobines
5	5	$\pi/5$	
7	7	$\pi/7$	
9	9	$\pi/9$	
11	11	$\pi/11$	
13	13	$\pi/13$	

Tableau I.2 Machines multiphasées dont le nombre de phases statoriques est un nombre impair (machine multiphasées de Type2).

### I.4 Applications des machines multiphasées

Les machines multiphasées sont utilisées beaucoup plus dans les applications de puissances élevées, par exemple les alternateurs synchrones pour générer une puissance élevée par rapport aux alternateurs conventionnels. Parmi ces applications on cite les pompes, les ventilateurs, les compresseurs, les moulins des compresseurs, les moulins du ciment, etc.

Les éoliennes à vitesse fixe sont couplées au réseau via les génératrices asynchrones (GAS). Certains constructeurs utilisent un autre système de conversion d'énergie éolienne basé sur la génératrice asynchrone à double étoile (GASDE) afin d'améliorer le rendement. Ainsi, le bruit engendré par l'éolienne est alors plus faible pour les petites vitesses, la présence d'une deuxième étoile rend la conception de la machine particulière et augmente le coût et le diamètre de façon non négligeable, ce qui représente une augmentation du poids et de l'encombrement de l'ensemble [3].

- Une étoile de forte puissance à un grand nombre de paires de pôles pour les petites vitesses de vent [4].
- Une étoile de faible puissance à un faible nombre de paires de pôles permettant de fonctionner aux vitesses de vent élevées.

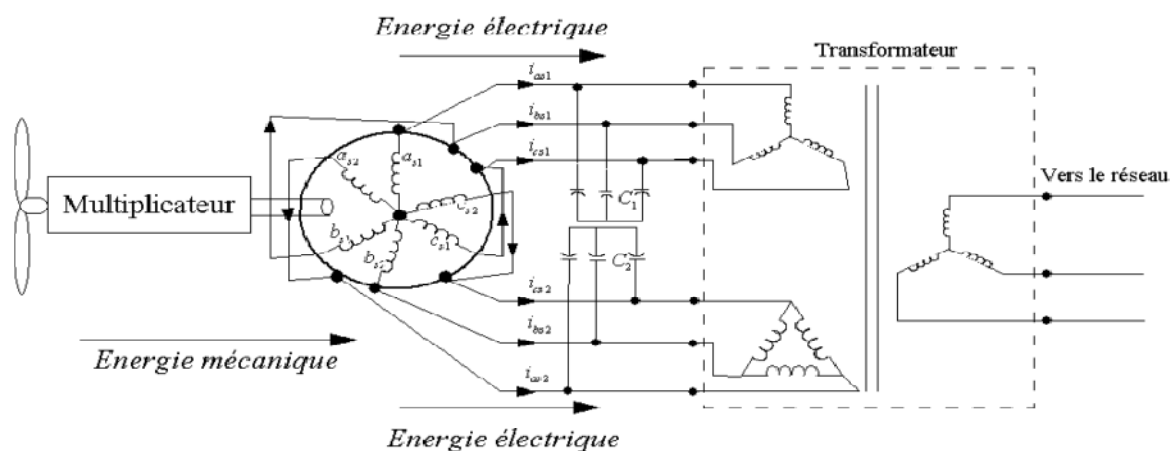


Figure I.1 : Exemple d'application d'une machine asynchrone de 6 phases.

### I.5 Les avantages et les inconvénients de la machine

#### I.5.1 Avantages des Machines Multiphasées

Les machines multiphasées ont en un intérêt grandissant, et en particulier la machine asynchrone double étoile (MASDE), qui présente en plus des avantages des machines asynchrones à cage, ceux des machines multiphasées. En effet, les variateurs multiphasés présentent plusieurs avantages par rapport aux machines conventionnelles triphasées [9].

- Segmentation de puissance.

- Amélioration de la fiabilité.
- Amélioration du facteur de puissance.
- Minimisation des ondulations du couple et des pertes rotoriques.

### I.5.2 Inconvénients des machines multiphasées

Cependant, la machine asynchrone présente des inconvénients tels que [2] :

- Le nombre de semi-conducteurs augmente avec le nombre de phases, ce qui peut éventuellement augmenter le coût de l'ensemble convertisseur- machine.
- La multiplication du nombre des semi-conducteurs avec la structure dynamique est fortement non linéaire et l'existence d'un fort couplage entre le couple et le flux, ce qui complique évidemment sa commande.
- L'inconvénient majeur des machines double étoile est l'apparition de courants harmoniques de circulation lors d'une alimentation par onduleur de tension.

### I.6 Présentation de la machine asynchrone à double étoile

La MASDE se compose d'un stator portant deux enroulements triphasés identiques et décalées d'un angle électrique  $\alpha = 30^\circ$  et d'un rotor à cage d'écureuil.

La figure (1) représente schématiquement les enroulements de la MASDE. Les angles  $\theta_r$  et  $(\theta_r - \alpha)$  représentent respectivement la position du rotor (phase  $a_r$ ) par rapport à l'étoile 1 (phase  $a_{s1}$ ) et à l'étoile 2 (phase  $a_{s2}$ ). Les grandeurs relatives aux deux étoiles (1 et 2) seront notées respectivement par l'indice 1 et 2.

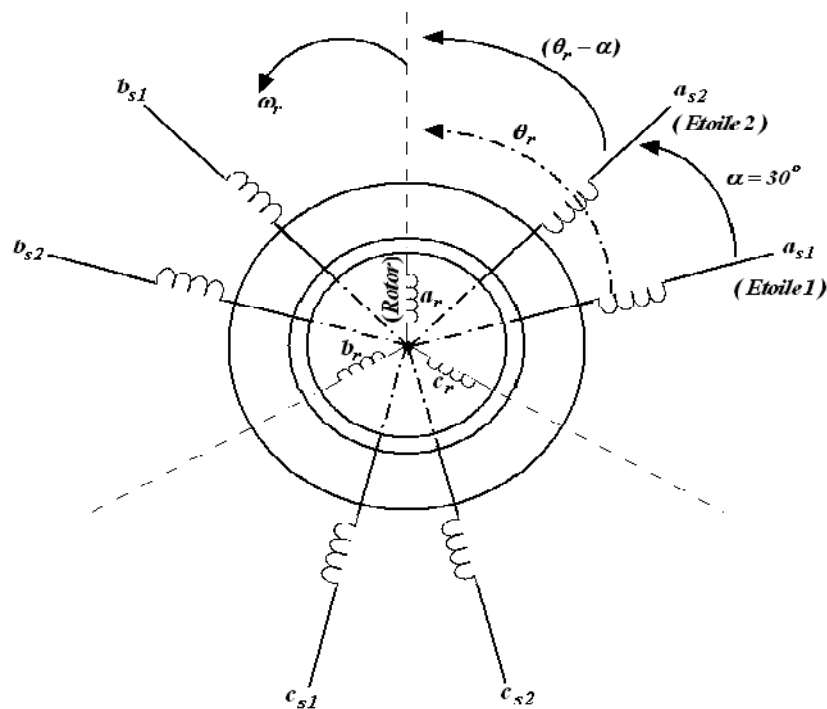


Figure 2 : représentation schématique des enroulements de la MASDE [4].

### I.7 Description du moteur asynchrone à double étoile (MASDE)

Le moteur asynchrone triphasés à double stator est une machine électrique qui est composée de deux parties : une partie fixe qui est le stator (inducteur), et l'autre la partie mobile est le rotor (induit).

#### I.7.1 Partie fixe (stator ou inducteur)

Il comporte deux stators décalés entre eux d'un angle  $\alpha = 30^\circ$ , chacun est composé de trois enroulements identiques. Leurs axes sont décalés entre eux d'un angle électrique égal  $2\pi/3$  dans l'espace. Ils sont logés dans des encoches du circuit magnétique.

Les deux enroulements statoriques sont alimentés chacun par un système triphasé de courant équilibré, d'où la création d'un champ tournant glissant dans l'entrefer.

La vitesse de rotation du champ tournant est inversement proportionnelle au nombre de paires de pôles de la machine et à la pulsation des courants statoriques tel que :

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{p} \quad (I.2)$$

#### I.7.2 Partie mobile (rotor ou induit)

Le rotor est constitué de manière à obtenir trois enroulements ayant un nombre de paires de pôles identique à celui du stator.

La structure électrique du rotor est supposée être un rotor à cage d'écureuil constitué de barres conductrices court circuitées par un anneau conducteur à chaque extrémité (barre conductrice en aluminium aux tôles ferromagnétiques).

Ce choix permet d'obtenir des machines peu onéreuses, robustes, faciles d'emploi et nécessitent un entretien limité.

Le rotor tourne à une vitesse  $\omega_r$  différente de  $\omega_s$ , pour cette raison, la cage rotorique devient le siège d'un système des forces électromotrices triphasées engendrant elles-mêmes trois courants rotoriques. Ainsi les effets de l'induction statorique sur les courants induits rotoriques se manifestent par l'élaboration d'un couple de forces électromagnétiques sur le rotor tel que l'écart des vitesses soit réduit.

Le rapport  $g = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s}$  : est appelé glissement du rotor par rapport aux champs tournants du stator.

### I.8 Principe de fonctionnement de la machine asynchrone à double étoile

Les courants statoriques créent un champ magnétique tournant dans les deux stators (l'étoile 1 alimente par des courants triphasés et l'étoile 2 alimente par les mêmes courants triphasés mais décalés d'un angle ( $\alpha$ )). La fréquence de rotation de ce champ est imposée par la fréquence des courants statoriques  $\ll f_s \gg$ , c'est-à-dire que sa vitesse de rotation est proportionnelle à la fréquence de l'alimentation électrique, la vitesse de ce champ tournant est appelée vitesse de synchronisme  $\ll \omega_s \gg$ . Elle est définie comme suit :

$$\omega_s = \frac{f_s}{p} \text{ [rad/s]} \quad (\text{I.3})$$

Ces deux Champs tournants produites par les deux enroulements statoriques vont induire des courants dans les conducteurs du rotor. Générant ainsi des forces électromotrices qui feront tourner le rotor à une vitesse  $\ll \omega_r \gg$  inférieure à celle du synchronisme ( $\omega_r < \omega_s$ ), ainsi les effets de l'induction statoriques sur les courants induits rotoriques se manifestent par l'élaboration d'un couple de force électromagnétique sur le rotor tel que l'écart des vitesses soit réduit. La différence de vitesse entre le rotor et le champ statorique est dite vitesse relative :

$$\omega = \omega_s - \omega_r \quad (\text{I.4})$$

On dira alors que ces deux champs glissent par rapport au rotor et on définit ce glissement par le rapport :

$$g = \frac{\omega}{\omega_s} = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} \quad (\text{I.5})$$

Les différents modes de fonctionnement dépendent de la valeur du glissement :

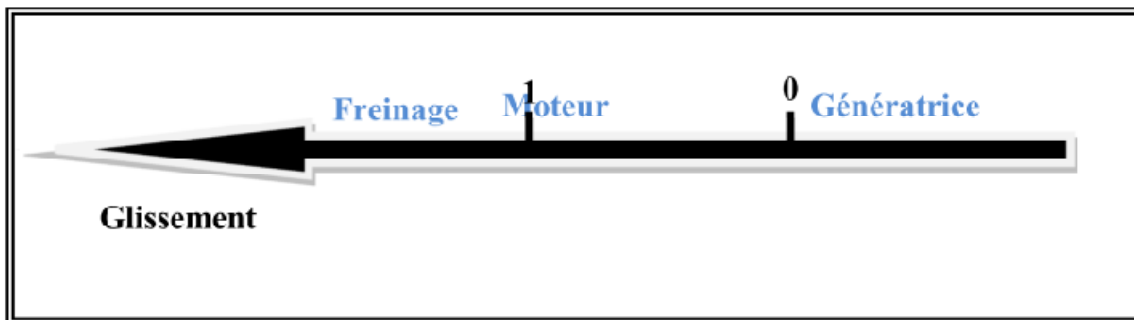


Figure 3 : Modes de fonctionnement suivant le glissement.

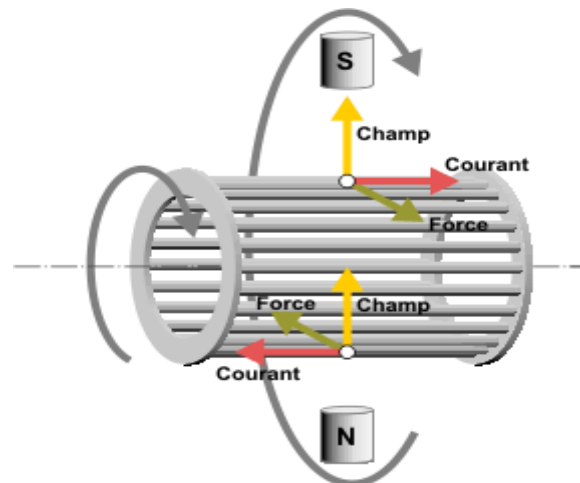


Figure 4 : Les forces de Laplace sur la cage d'écureuil.

### I.9 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné quelques généralités sur les machines multiphasées, on s'intéresse aux machines les plus courantes, les machines double étoile (**MASDE**), Il est très intéressant de pouvoir étudier cette dernière en ses deux modes de fonctionnement (moteur et génératrice) par la suite nous passons à la modélisation de la machine asynchrone double étoile (**MASDE**) en fonctionnement moteur.

# Chapitre II

**Etude et Modélisation de la  
Machine asynchrone double  
étoile (MASDE)**

### II.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéressera à la modélisation de la MASDE basée sur la résolution des équations régissant son fonctionnement en régime linéaire.

L'étude sera menée avec un décalage  $\alpha = 30^\circ$ , enfin des résultats de simulations avec des commentaires seront présentés.

### II.2 Hypothèses simplificatrices

Pour notre étude, nous considérons les hypothèses simplificatrices suivantes [2] :

- Le circuit magnétique est non saturé ;
- Les pertes (par hystérésis et courant de Foucault) sont négligées ;
- Les forces magnétomotrices créées par chacune des phases des deux armatures sont à répartition sinusoïdale d'où résulte que l'entrefer est constant, que les inductances propres sont des constantes et que les inductances mutuelles entre deux enroulements sont des fonctions sinusoïdales de l'angle entre leurs axes magnétiques ;
- Les résistances ne varient pas avec la température et on néglige l'effet de peau ;
- La machine est de constitution symétrique.

### II.3 Modèle de la machine asynchrone triphasée à double étoile

#### II.3.1 Représentation de la machine

La représentation schématique de la machine asynchrone à double étoile est donnée par la figure II.1.[4]

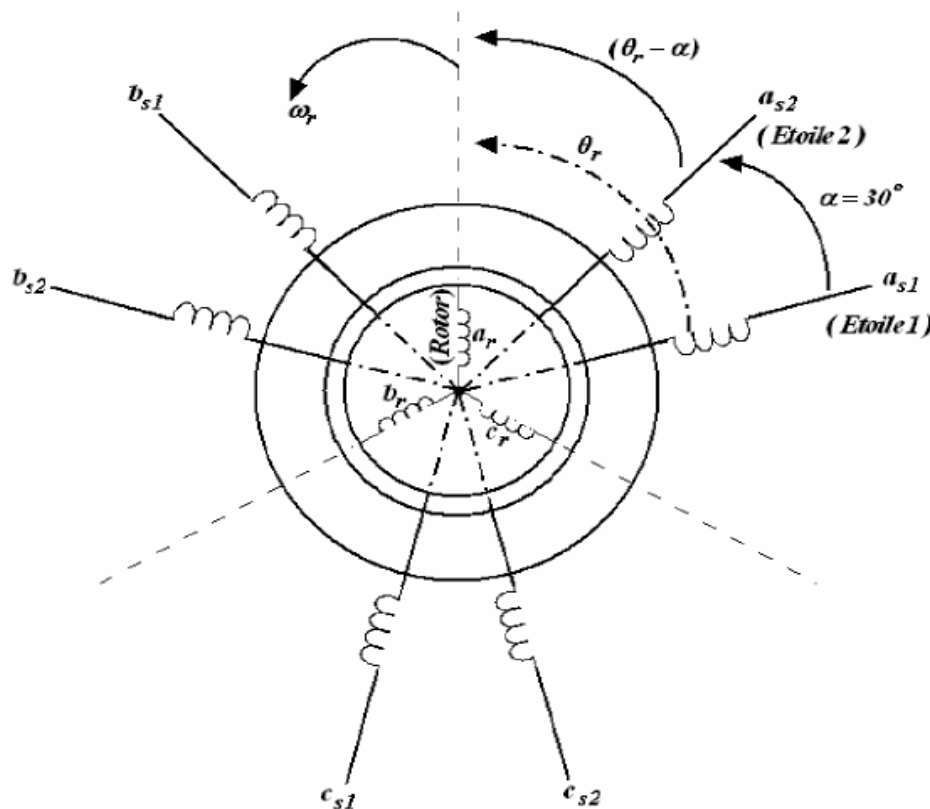


Fig. II.1 Représentation des enroulements de la machine asynchrone double étoile

#### II.3.2 Equations électriques

Les équations des tensions de la machine asynchrone à double étoile représentent pour chaque enroulement la somme de la chute ohmique et la chute inductive due au flux.

Pour l'étoile 1 :

$$\begin{cases} v_{sa1} = R_{sa1} i_{sa1} + \frac{d\phi_{sa1}}{dt} \\ v_{sb1} = R_{sb1} i_{sb1} + \frac{d\phi_{sb1}}{dt} \\ v_{sc1} = R_{sc1} i_{sc1} + \frac{d\phi_{sc1}}{dt} \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Pour l'étoile 2 :

$$\begin{cases} v_{sa2} = R_{sa2}i_{sa2} + \frac{d\phi_{sa2}}{dt} \\ v_{sb2} = R_{sb2}i_{sb2} + \frac{d\phi_{sb2}}{dt} \\ v_{sc2} = R_{sc3}i_{sc2} + \frac{d\phi_{sc2}}{dt} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Pour le rotor :

$$\begin{cases} 0 = R_{ra}i_{ra} + \frac{d\phi_{ra}}{dt} \\ 0 = R_{rb}i_{rb} + \frac{d\phi_{rb}}{dt} \\ 0 = R_{rc}i_{rc} + \frac{d\phi_{rc}}{dt} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

La forme matricielle est la suivante :

Pour l'étoile 1 :

$$[v_{s1}] = [R_{s1}][i_{s1}] + \frac{d}{dt}[\phi_{s1}] \quad (\text{II.4})$$

Pour l'étoile 2 :

$$[v_{s2}] = [R_{s2}][i_{s2}] + \frac{d}{dt}[\phi_{s2}] \quad (\text{II.5})$$

Pour le rotor :

$$[0] = [R_r][i_r] + \frac{d}{dt}[\phi_r] \quad (\text{II.6})$$

On pose :

$$R_{sa1} = R_{sb1} = R_{sc1} = R_{s1}$$

$$R_{sa2} = R_{sb2} = R_{sc2} = R_{s2}$$

$$[R_{s1}] = \begin{bmatrix} R_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{s1} & 0 \\ 0 & 0 & R_{s1} \end{bmatrix}; [R_{s2}] = \begin{bmatrix} R_{s2} & 0 & 0 \\ 0 & R_{s2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{s2} \end{bmatrix}; [R_r] = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}$$

Avec :

$R_{s1}$  : Résistance d'une phase de l'étoile 1.

$R_{s2}$  : Résistance d'une phase de l'étoile 2.

$R_r$  : Résistance d'une phase du rotor.

$$[v_{s1}] = \begin{bmatrix} v_{sa1} \\ v_{sb1} \\ v_{sc1} \end{bmatrix}; [v_{s2}] = \begin{bmatrix} v_{sa2} \\ v_{sb2} \\ v_{sc2} \end{bmatrix}$$

$[v_{s1}]$  : Matrice de tension de l'étoile1.

$[v_{s2}]$  : Matrice de tension de l'étoile2.

$$[i_{s1}] = \begin{bmatrix} i_{sa1} \\ i_{sb1} \\ i_{sc1} \end{bmatrix}; [i_{s2}] = \begin{bmatrix} i_{sa2} \\ i_{sb2} \\ i_{sc2} \end{bmatrix}; [i_r] = \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix}$$

$[i_{s1}]$  : Matrice de courant de l'étoile1.

$[i_{s2}]$  : Matrice de courant de l'étoile2.

$[i_r]$  : Matrice de courant de rotor.

$$[\phi_{s1}] = \begin{bmatrix} \phi_{sa1} \\ \phi_{sb1} \\ \phi_{sc1} \end{bmatrix}; [\phi_{s2}] = \begin{bmatrix} \phi_{sa2} \\ \phi_{sb2} \\ \phi_{sc2} \end{bmatrix}; [\phi_r] = \begin{bmatrix} \phi_{ra} \\ \phi_{rb} \\ \phi_{rc} \end{bmatrix}$$

$[\phi_{s1}]$ : Matrice de flux de l'étoile1.

$[\phi_{s2}]$ : Matrice de flux de l'étoile2.

$[\phi_r]$ : Matrice de flux de rotor.

### II.3.3 Equations magnétiques

C'est à partir de la matrice  $[L(q)]$  qu'on obtient les équations du flux en fonction des courants.

$$[L(\theta)] = \begin{bmatrix} L_{s1s1} & L_{s1s2} & L_{s1r} \\ L_{s2s1} & L_{s2s2} & L_{s2r} \\ L_{rs1} & L_{rs2} & L_{rr} \end{bmatrix}$$

L'écriture matricielle qui résume les équations des flux statoriques et rotoriques est :

$$\begin{bmatrix} \phi_{s1} \\ \phi_{s2} \\ \phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{s1s1} & L_{s1s2} & L_{s1r} \\ L_{s2s1} & L_{s2s2} & L_{s2r} \\ L_{rs1} & L_{rs2} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_r \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

Avec :

$[L_{s1s1}]$  : Matrice inductance de l'étoile 1.

$[L_{s2s2}]$  : Matrice inductance de l'étoile 2.

$[L_{rr}]$  : Matrice inductance du rotor.

$[L_{s1s2}]$  : Matrice inductance mutuelle entre l'étoile 1 et l'étoile 2.

$[L_{s1r}]$  : Matrice inductance mutuelle entre l'étoile 1 et le rotor.

$[L_{s2s1}]$  : Matrice inductance mutuelle entre l'étoile 2 et l'étoile 1.

$[L_{s2r}]$  : Matrice inductance mutuelle entre l'étoile 2 et le rotor.

$[L_{rs1}]$  : Matrice inductance mutuelle entre le rotor et l'étoile 1.

$[L_{rs2}]$  : Matrice inductance mutuelle entre le rotor et l'étoile 2.

Equation magnétique de la machine :

$$\begin{bmatrix} \phi_{a1} \\ \phi_{b1} \\ \phi_{c1} \\ \phi_{a2} \\ \phi_{b2} \\ \phi_{c2} \\ \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{a1a1} & M_{a1b1} & M_{a1c1} & M_{a1a2} & M_{a1b2} & M_{a1c2} & M_{a1a} & M_{a1b} & M_{a1c} \\ M_{b1a1} & L_{b1b1} & M_{b1c1} & M_{b1a2} & M_{b1b2} & M_{b1c2} & M_{b1a} & M_{b1b} & M_{b1c} \\ M_{c1a1} & M_{c1b1} & L_{c1c1} & M_{c1a2} & M_{c1b2} & M_{c1c2} & M_{c1a} & M_{c1b} & M_{c1c} \\ M_{a2a1} & M_{a2b1} & M_{a2c1} & L_{a2a2} & M_{a2b2} & M_{a2c2} & M_{a2a} & M_{a2b} & M_{a2c} \\ M_{b2a1} & M_{b2b1} & M_{b2c1} & M_{b2a2} & L_{b2b2} & M_{b2c2} & M_{b2a} & M_{b2b} & M_{b2c} \\ M_{c2a1} & M_{c2b1} & M_{c2c1} & M_{c2a2} & M_{c2b2} & L_{c2c2} & M_{c2a} & M_{c2b} & M_{c2c} \\ M_{aa1} & M_{ab1} & M_{ac1} & M_{aa2} & M_{ab2} & M_{ac2} & L_{aa} & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ba1} & M_{bb1} & M_{bc1} & M_{ba2} & M_{bb2} & M_{bc2} & M_{ba} & L_{bb} & M_{bc} \\ M_{ca1} & M_{cb1} & M_{cc1} & M_{ca2} & M_{cb2} & M_{cc2} & M_{ca} & M_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{b1} \\ i_{c1} \\ i_{a2} \\ i_{b2} \\ i_{c2} \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

$M_{ij}$  : Inductance mutuelle relative aux deux étoiles ou l'étoile et le rotor ( $i \neq j$ );

$L_{ij}$  : Inductance propre relative à une étoile ou au rotor.

$$[L_{s1s1}] = \begin{bmatrix} (L_{s1} + L_{ms}) & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & (L_{s1} + L_{ms}) & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & (L_{s1} + L_{ms}) \end{bmatrix}$$

$$[L_{s2s2}] = \begin{bmatrix} (L_{s2} + L_{ms}) & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & (L_{s2} + L_{ms}) & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & (L_{s2} + L_{ms}) \end{bmatrix}$$

$$[L_{rr}] = \begin{bmatrix} (L_r + L_{mr}) & -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & (L_r + L_{mr}) & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & (L_r + L_{mr}) \end{bmatrix}$$

$$[L_{s1s2}] = \begin{bmatrix} L_{ms} \cos(\alpha) & L_{ms} \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \\ L_{ms} \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos(\alpha) & L_{ms} \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{ms} \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$[L_{s1r}] = \begin{bmatrix} L_{ms} \cos(\theta_r) & L_{sr} \cos\left(\theta_r + \frac{4\pi}{3}\right) & L_{sr} \cos\left(\theta_r + \frac{4\pi}{3}\right) \\ L_{sr} \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sr} \cos(\theta_r) & L_{sr} \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{sr} \cos\left(\theta_r + \frac{4\pi}{3}\right) & L_{sr} \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sr} \cos(\theta_r) \end{bmatrix}$$

$$[L_{s1r}] = \begin{bmatrix} L_{ms} \cos(\theta_r) & L_{sr} \cos\left(\theta_r - \alpha + \frac{4\pi}{3}\right) & L_{sr} \cos\left(\theta_r - \alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \\ L_{sr} \cos\left(\theta_r - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sr} \cos(\theta_r - \alpha) & L_{sr} \cos\left(\theta_r - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{sr} \cos\left(\theta_r - \alpha + \frac{4\pi}{3}\right) & L_{sr} \cos\left(\theta_r - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sr} \cos(\theta_r - \alpha) \end{bmatrix}$$

$$[L_{s1s2}] = [L_{s2s1}]^t$$

$$[L_{s1r}] = [L_{rs1}]^t$$

$$[L_{s2r}] = [L_{rs2}]^t$$

Avec :

$L_{s1}$ ;  $L_{s2}$ ;  $L_r$ : représentent les valeurs maximales des coefficients d'inductances de l'étoile 1, l'étoile 2 et le rotor.

$L_{ms}$  : représente la valeur maximale des coefficients d'inductances mutuelles statoriques.

$L_{mr}$  : représente la valeur maximale des coefficients d'inductances mutuelles rotoriques.

$L_{sr}$  : représente la valeur maximale des coefficients d'inductances mutuelles entre une étoile et le rotor.

### II.3.4 Energie magnétique

Elle peut être calculée à partir de l'expression :

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \{ [i_{s1}]^t [\phi_{s1}] + [i_{s2}]^t [\phi_{s2}] + [i_r]^t [\phi_r] \} \quad (\text{II.8})$$

### II.3.5 Couple électromagnétique

Il est donné par la dérivée partielle de l'énergie par rapport à l'angle mécanique.

$$C_{\text{em}} = \frac{\partial W_{\text{mag}}}{\partial \theta_m} = p \frac{\partial W_{\text{mag}}}{\partial \theta_e} \quad (\text{II.9})$$

Avec :

$p$ : Nombre de paire de pole.

$\partial\theta_m$  : Angle mécanique.

$\partial\theta_e$  : Angle électrique.

Le couple électromagnétique est donné par l'expression suivante :

$$C_{em} = p \left\{ [i_{s,abc1}] \frac{d}{d\theta_r} [L_{s1,r}] [i_{r,abc}]^t + [i_{s,abc2}] \frac{d}{d\theta_r} [L_{s2,r}] [i_{r,abc}]^t \right\} \quad (II.10)$$

### II.3.6 Equation mécanique

L'équation mécanique est la solution de l'équation fondamentale de la dynamique :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r - k_f \Omega \quad (II.11)$$

$$\Omega = \frac{\omega_r}{p} \quad (II.12)$$

$$\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt} \quad (II.13)$$

Avec :

$\Omega$  : Vitesse de rotation de la machine.

$C_{em}$  : Couple électromagnétique.

$C_r$  : Couple résistant (couple de charge).

$k_f$  : Coefficient de frottement.

$J$  : Moment d'inertie.

## II.4 Modèle biphasé de Park

### II.4.1 Transformation de base de Park

La transformation de Park consiste à transformer le système d'enroulements triphasés statoriques d'axes (a, d et c) en un système équivalent à deux enroulements biphasés d'axes (d, q) et inversement, avec la création d'un champ électromagnétique tournant avec des forces magnétomotrices.

La matrice de Park en générale :

$$[P(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La matrice inverse de Park :

$$[G_{abc}] = [P(\theta)]^{-1} [G_{dqo}]$$

Sachant que :

$$[P(\theta)]^{-1} =: [P(\theta)]^t$$

$$[P(\theta)]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

On transforme le système triphasé en un système biphasé tournant.

La matrice du Park pour l'étoile 1 :

$$[P(\theta_{s1})] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(II.14)

La matrice du Park pour l'étoile 2 :

$$[P(\theta_{s2})] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta - \alpha) & \cos(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta - \alpha) & -\sin(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(II.15)

La matrice du Park pour le rotor :

$$[P(\theta_r)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta - \theta_r) & \cos(\theta - \theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta - \theta_r) & -\sin(\theta - \theta_r - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(II.16)

Avec :

$[P(\theta_{s1})]$ : Matrice de transformation de premier enroulement statorique (étoile1).

$[P(\theta_{s2})]$ : Matrice de transformation de deuxième enroulement statorique (étoile2).

$[P(\theta_r)]$  : Matrice de transformation d'enroulement rotorique.

### II.4.2 Modèle de Park de la machine

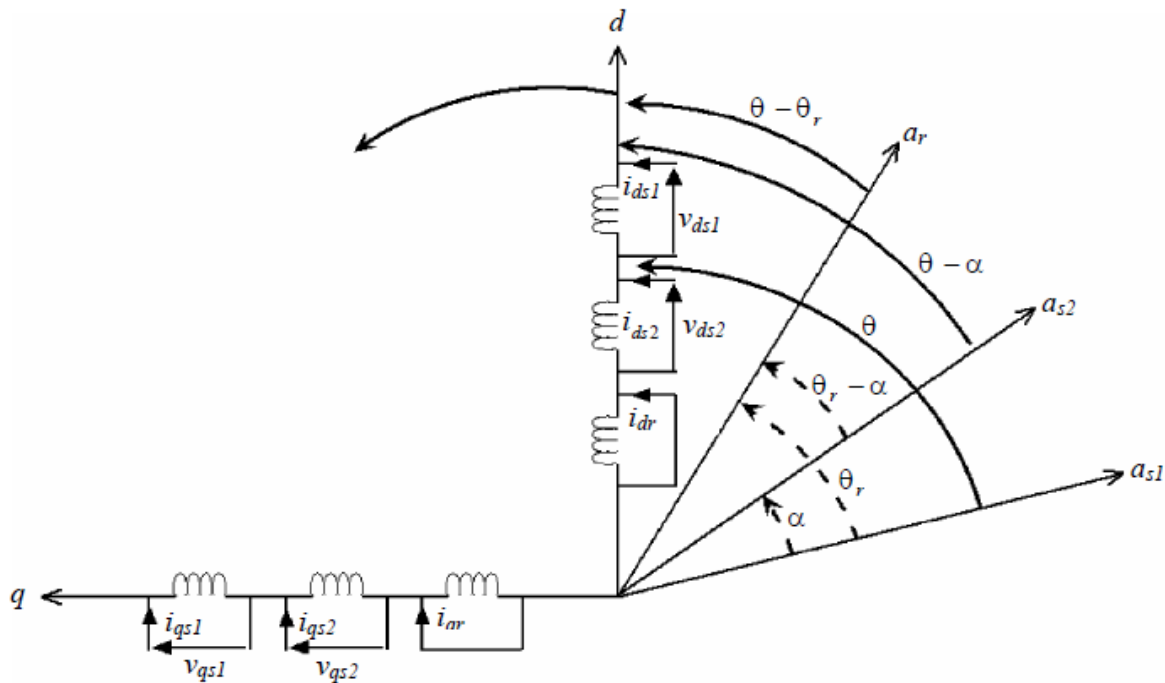


Fig. II.2 Représentation schématique du model de Park de la MASDE

### II.4.3 Choix du référentiel

Trois types de référentiels existent dans la pratique, le choix se fait selon le problème à étudier.

#### II.4.3.1 Référentiel lié au stator

Dans ce référentiel on a :

$$\frac{d\theta_s}{dt} = 0$$

Or

$$\theta_s = \theta_r + \theta$$

$$\frac{d\theta_s}{dt} = 0 = \frac{d\theta_r}{dt} + \frac{d\theta}{dt}$$

D'où :

$$\frac{d\theta_r}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} = -p\Omega$$

Ce référentiel est utilisé dans le régime transitoire avec une variation importante de la vitesse de rotation.

#### II.4.3.2 Référentiel lié au rotor

Dans ce référentiel on a :

$$\frac{d\theta_r}{dt} = 0$$

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = p\Omega$$

Ce référentiel est utilisé dans le régime transitoire où la vitesse de rotation est considérée constante.

#### II.4.3.3 Référentiel lié au champ tournant

Dans ce référentiel on a :

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega_s$$

$$\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_s - p\Omega$$

Ce référentiel n'introduit pas des simplifications dans la transformation des équations électriques.

Dans notre étude le modèle a été exprimé dans le repère (d,q) lié au champ tournant.

#### II.4.4 Equations matricielles de la machine avec transformation de Park

Les courants, les tensions et les flux se transforment de la manière suivante :

Transformation des tensions :

$$[v_{s1P}] = [P(\theta_{s1})][v_{s1}]$$

$$[v_{s2P}] = [P(\theta_{s2})][v_{s2}]$$

$$[0] = [P(\theta_r)][v_r]$$

Transformation des courants

$$[i_{s1P}] = [P(\theta_{s1})][i_{s1}]$$

$$[i_{s2P}] = [P(\theta_{s2})][i_{s2}]$$

$$[i_r] = [P(\theta_r)][i_r]$$

Transformation des flux

$$[\phi_{s1P}] = [P(\theta_{s1})][\phi_{s1}]$$

$$[\phi_{s2P}] = [P(\theta_{s2})][\phi_{s2}]$$

$$[\phi_r] = [P(\theta_r)][\phi_r]$$

Avec :

$$[v_{s1P}] = \begin{bmatrix} v_{s1d} \\ v_{s1q} \\ v_{s10} \end{bmatrix} \quad [v_{s2P}] = \begin{bmatrix} v_{s2d} \\ v_{s2q} \\ v_{s20} \end{bmatrix}$$

$$[i_{s1P}] = \begin{bmatrix} i_{s1d} \\ i_{s1q} \\ i_{s10} \end{bmatrix} \quad [i_{s2P}] = \begin{bmatrix} i_{s2d} \\ i_{s2q} \\ i_{s20} \end{bmatrix} \quad [i_{rP}] = \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \\ i_{r0} \end{bmatrix}$$

$$[\phi_{s1P}] = \begin{bmatrix} \phi_{s1d} \\ \phi_{s1q} \\ \phi_{s10} \end{bmatrix} \quad [\phi_{s2P}] = \begin{bmatrix} \phi_{s2d} \\ \phi_{s2q} \\ \phi_{s20} \end{bmatrix} \quad [\phi_{rP}] = \begin{bmatrix} \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \\ \phi_{r0} \end{bmatrix}$$

#### II.4.4.1 Equations des tensions

En appliquant la transformation de Park.

$$[P(\theta_{s1})][v_{s1P}] = [R_s][P(\theta_{s1})][i_{s1P}] + \frac{d}{dt}([P(\theta_{s1})][\phi_{s1P}])$$

$$[P(\theta_{s2})][v_{s2P}] = [R_s][P(\theta_{s2})][i_{s2P}] + \frac{d}{dt}([P(\theta_{s2})][\phi_{s2P}]) \quad (\text{II.17})$$

$$0 = [R_r][P(\theta_r)][i_r] + \frac{d}{dt}([P(\theta_r)][\phi_r])$$

En multipliant à gauche par  $[P(\theta_{s1})]^t$  :

$$[v_{s1P}] = [R_s][i_{s1P}] + [P(\theta_{s1})]^{-1} \left( \frac{d}{dt} ([P(\theta_{s1})][\phi_{s1P}]) \right)$$

$$[v_{s2P}] = [R_s][i_{s2P}] + [P(\theta_{s1})]^{-1} \left( \frac{d}{dt} ([P(\theta_{s2})][\phi_{s2P}]) \right) \quad (\text{II.18})$$

$$0 = [R_r][i_r] + [P(\theta_{s1})]^{-1} \left( \frac{d}{dt} ([P(\theta_r)][\phi_r]) \right)$$

On pose :

$$\frac{d\theta_{s1}}{dt} = \frac{d\theta_{s2}}{dt} = \omega_s$$

D'où le résultat final :

$$\begin{bmatrix} v_{s10} \\ v_{s1d} \\ v_{s1q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{s1} & 0 \\ 0 & 0 & R_{s1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s10} \\ i_{s1d} \\ i_{s1q} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s10} \\ \phi_{s1d} \\ \phi_{s1q} \end{bmatrix} + \omega_s \begin{bmatrix} 0 \\ -\phi_{s1d} \\ \phi_{s1q} \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Ou encore en développant la matrice :

Avec la composante homolaire nulle, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} v_{s1d} = R_{s1d} i_{s1d} + \frac{d}{dt} \phi_{s1d} - \omega_s \phi_{s1q} \\ v_{s1q} = R_{s1q} i_{s1q} + \frac{d}{dt} \phi_{s1q} + \omega_s \phi_{s1d} \end{cases}$$

En adoptant le même raisonnement pour l'étoile 2 on aura les équations suivantes :

$$\begin{cases} v_{s2d} = R_{s2d} i_{s2d} + \frac{d}{dt} \phi_{s2d} - \omega_s \phi_{s2q} \\ v_{s2q} = R_{s2q} i_{s2q} + \frac{d}{dt} \phi_{s2q} + \omega_s \phi_{s2d} \end{cases}$$

En suivant la même démarche que pour les deux étoiles on aura les équations du rotor suivantes :

$$\begin{cases} 0 = R_{rd} i_{rd} + \frac{d}{dt} \phi_{rd} - (\omega_s - \omega) \phi_{rq} \\ 0 = R_{rq} i_{rq} + \frac{d}{dt} \phi_{rq} + (\omega_s - \omega) \phi_{rd} \end{cases}$$

Les équations des tensions définitives de la MASDE :

$$\begin{cases} v_{s1d} = R_{s1d}i_{s1d} + \frac{d}{dt}\phi_{s1d} - \omega_s\phi_{s1q} \\ v_{s1q} = R_{s1q}i_{s1q} + \frac{d}{dt}\phi_{s1q} + \omega_s\phi_{s1d} \\ v_{s2d} = R_{s2d}i_{s2d} + \frac{d}{dt}\phi_{s2d} - \omega_s\phi_{s2q} \\ v_{s2q} = R_{s2q}i_{s2q} + \frac{d}{dt}\phi_{s2q} + \omega_s\phi_{s2d} \\ 0 = R_{rd}i_{rd} + \frac{d}{dt}\phi_{rd} - (\omega_s - \omega)\phi_{rq} \\ 0 = R_{rq}i_{rq} + \frac{d}{dt}\phi_{rq} + (\omega_s - \omega)\phi_{rd} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

#### II.4.4.2 Equations magnétiques

$$\begin{bmatrix} [\phi_{s1}] \\ [\phi_{s2}] \\ [\phi_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{s1s1}] & [L_{s1s2}] & [L_{s1r}] \\ [L_{s2s1}] & [L_{s2s2}] & [L_{s2r}] \\ [L_{rs1}] & [L_{rs2}] & [L_{rr}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{s1}] \\ [i_{s2}] \\ [i_r] \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

$$[\phi_{s1}] = [L_{s1s1}][i_{s1}] + [L_{s1s2}][i_{s2}] + [L_{s1r}][i_r]$$

$$[\phi_{s2}] = [L_{s2s1}][i_{s1}] + [L_{s2s2}][i_{s2}] + [L_{s2r}][i_r]$$

$$[\phi_{s1}] = [L_{rs1}][i_{s1}] + [L_{rs2}][i_{s2}] + [L_{rr}][i_r]$$

Après la transformation des flux et des courants on aura :

$$[P(\theta_{s1})][\phi_{s1p}] = [L_{s1s1}][P(\theta_{s1})][i_{s1p}] + [L_{s1s2}][P(\theta_{s2})][i_{s2p}] + [L_{s1r}][P(\theta_r)][i_{rp}]$$

$$[P(\theta_{s2})][\phi_{s2p}] = [L_{s2s1}][P(\theta_{s1})][i_{s1p}] + [L_{s1s2}][P(\theta_{s2})][i_{s2p}] + [L_{s1r}][P(\theta_r)][i_{rp}]$$

$$[P(\theta_r)][\phi_{rp}] = [L_{rs1}][P(\theta_{s1})][i_{s1p}] + [L_{rs2}][P(\theta_{s2})][i_{s2p}] + [L_{s1r}][P(\theta_r)][i_{rp}]$$

En multipliant à gauche par :  $[P(\theta_{s1})]^{-1}$ ,  $[P(\theta_{s2})]^{-1}$ ,  $[P(\theta_r)]^{-1}$  on trouve :

$$\phi_{s1d} = L_{s1}i_{s1d} + L_m(i_{s1d} + i_{s2d} + i_{rd})$$

$$\phi_{s1q} = L_{s1}i_{s1q} + L_m(i_{s1d} + i_{s2d} + i_{rd})$$

$$\phi_{s2d} = L_{s2}i_{s2d} + L_m(i_{s1d} + i_{s2d} + i_{rd}) \quad (\text{II.22})$$

$$\phi_{s2q} = L_{s1}i_{s2q} + L_m(i_{s1d} + i_{s2d} + i_{rd})$$

$$\phi_{rd} = L_r i_{rd} + L_m(i_{s1d} + i_{s2d} + i_{rd})$$

$$\phi_{rq} = L_r i_{rq} + L_m (i_{s1d} + i_{s2d} + i_{rd})$$

La forme matricielle est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \phi_{s1d} \\ \phi_{s2d} \\ \phi_{rd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{s1} + L_m & L_m & L_m \\ L_m & L_{s2} + L_m & L_m \\ L_m & L_m & L_r + L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s1d} \\ i_{s2d} \\ i_{rd} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{s1q} \\ \phi_{s2q} \\ \phi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{s1} + L_m & L_m & L_m \\ L_m & L_{s2} + L_m & L_m \\ L_m & L_m & L_r + L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s1q} \\ i_{s2q} \\ i_{rq} \end{bmatrix}$$

Avec :

$(L_{s1} + L_m), (L_{s2} + L_m)$  : Inductance propre cyclique de l'étoile 1 et 2.

$(L_r + L_m)$  : Inductance propre cyclique du rotor.

$L_m = \frac{3}{2} L_{mr} = \frac{3}{2} L_{sr} = \frac{3}{2} L_{ms}$  : Inductance mutuelle cyclique entre l'étoile 1 et 2 et le rotor.

### II.4.4.3 Equation mécanique

#### II.4.4.3.1 Puissance instantanée

La transformation de Park repose sur l'invariance de la puissance instantanée  $\mathbf{P}$  dans les deux systèmes de transformation. Ce qui conduit à leur équivalence physique.

$$P = [v_s]^t [i_s] = v_{sa1} i_{sa1} + v_{sb1} i_{sb1} + v_{sc1} i_{sc1} + v_{sa2} i_{sa2} + v_{sb2} i_{sb2} + v_{sc2} i_{sc2} \quad (\text{II.23})$$

Et comme la transformation de Park utilisée conserve la puissance instantanée, on peut écrire :

$$P = v_{s1d} i_{s1d} + v_{s2d} i_{s2d} + v_{s1q} i_{s1q} + v_{s2q} i_{s2q} \quad (\text{II.24})$$

En remplaçant les tensions  $(v_{s1d}, v_{s2d}, v_{s1q}, v_{s2q})$  par leurs expressions dans (II.24), on trouve :

$$P = [R_{s1} (i_{s1d})^2 + R_{s2} (i_{s2d})^2 + R_{s1} (i_{s1q})^2 + R_{s2} (i_{s2q})^2] +$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \phi_{s1d} i_{s1d} + \frac{d}{dt} \phi_{s2d} i_{s2d} + \frac{d}{dt} \phi_{s1q} i_{s1q} + \frac{d}{dt} \phi_{s2q} i_{s2q} \right] + \quad (\text{II.25})$$

$$[\omega_s(\phi_{s1d}i_{s1q} + \phi_{s2d}i_{s2q} - \phi_{s1q}i_{s1d} - \phi_{s2q}i_{s2d})]$$

L'expression (II.25) se compose de trois termes :

- Le premier terme entre crochets est identifiable aux pertes Joule.
- Le second terme correspond à la puissance électromagnétique stockée dans le champ.
- Le troisième terme représente la puissance électrique transformée en puissance mécanique.

#### II.4.4.3.2 Couple électromagnétique

$$P_{em} = C_{em} \cdot \Omega \quad (II.26)$$

$$P=[\omega_s(\phi_{s1d}i_{s1q} + \phi_{s2d}i_{s2q} - \phi_{s1q}i_{s1d} - \phi_{s2q}i_{s2d})]$$

D'où :

$$C_{em} = \frac{\omega_s}{\Omega} [\phi_{s1d}i_{s1q} + \phi_{s2d}i_{s2q} - \phi_{s1q}i_{s1d} - \phi_{s2q}i_{s2d}] \quad (II.27)$$

$$C_{em} = P[\phi_{s1d}i_{s1q} + \phi_{s2d}i_{s2q} - \phi_{s1q}i_{s1d} - \phi_{s2q}i_{s2d}]$$

En remplaçant les équations des flux dans l'équation du couple on aura :

$$C_{em} = PL_m [i_{rd}(i_{s1q} + i_{s2q}) - i_{rq}(i_{s1d} + i_{s2d})] \quad (II.28)$$

Ou bien en faisant appel aux flux rotoriques :

$$\phi_{rd} = L_r i_{rd} + L_m (i_{s1d} + i_{s2d})$$

$$\phi_{rq} = L_r i_{rq} + L_m (i_{s1q} + i_{s2q})$$

On obtient :

$$i_{rd} = \frac{\phi_{rd}}{L_r + L_m} - \frac{L_m}{L_r + L_m} (i_{s1d} + i_{s2d}) \quad (II.29)$$

$$i_{rq} = \frac{\phi_{rq}}{L_r + L_m} - \frac{L_m}{L_r + L_m} (i_{s1q} + i_{s2q}) \quad (II.30)$$

En remplaçant ( $i_{rd}$ ) et ( $i_{rq}$ ) dans l'équation du couple, on aura :

$$C_{em} = P \frac{L_m}{L_r + L_m} [\phi_{rd}(i_{s1q} + i_{s2q}) - \phi_{rq}(i_{s1d} + i_{s2d})] \quad (\text{II.31})$$

#### II.4.5 Mise sous forme d'équation d'état

En remplaçant le système d'équation (II.22) dans le système d'équation (II .20) on aura :

$$[B][U] = [L][\dot{I}] + \omega_{gl}[C][I] + [D][I] \quad (\text{II.32})$$

Où :

$[U] = [v_{ds1} \ v_{qs1} \ v_{ds2} \ v_{qs2} \ v_{dr} \ v_{qr}]^t$  : Vecteur de commande ;

$[I] = [i_{ds1} \ i_{qs1} \ i_{ds2} \ i_{qs2} \ i_{dr} \ i_{qr}]^t$  : Vecteur d'état ;

$$[\dot{I}] = \frac{d}{dt} [I] ;$$

$[B] = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$  : représente la diagonale d'une matrice

$$\begin{cases} v_{s1d} = (L_{s1} + L_m) \frac{d}{dt} i_{s1d} + L_m \frac{d}{dt} i_{s2d} + L_m \frac{d}{dt} i_{rd} + R_{s1} i_{s1d} - \omega_s ((L_{s1} + L_m) i_{s1q} + L_m (i_{s2q} + i_{rq})) \\ v_{s1q} = (L_{s1} + L_m) \frac{d}{dt} i_{s1q} + L_m \frac{d}{dt} i_{s2q} + L_m \frac{d}{dt} i_{rq} + R_{s1} i_{s1q} - \omega_s ((L_{s1} + L_m) i_{s1d} + L_m (i_{s2d} + i_{rd})) \\ v_{s2d} = (L_{s2} + L_m) \frac{d}{dt} i_{s2d} + L_m \frac{d}{dt} i_{s1d} + L_m \frac{d}{dt} i_{rd} + R_{s2} i_{s2d} - \omega_s ((L_{s2} + L_m) i_{s2q} + L_m (i_{s2q} + i_{rq})) \\ v_{s2q} = (L_{s2} + L_m) \frac{d}{dt} i_{s2q} + L_m \frac{d}{dt} i_{s1q} + L_m \frac{d}{dt} i_{rq} + R_{s2} i_{s2q} - \omega_s ((L_{s2} + L_m) i_{s2d} + L_m (i_{s2d} + i_{rd})) \\ 0 = (L_r + L_m) \frac{d}{dt} i_{rd} + L_m \left( \frac{d}{dt} i_{s1d} + \frac{d}{dt} i_{s2d} \right) + R_r i_{rd} - (\omega_s - \omega) ((L_r + L_m) i_{rq} + L_m (i_{s1q} + i_{s2q})) \\ 0 = (L_r + L_m) \frac{d}{dt} i_{rq} + L_m \left( \frac{d}{dt} i_{s1q} + \frac{d}{dt} i_{s2q} \right) + R_r i_{rq} - (\omega_s - \omega) ((L_r + L_m) i_{rd} + L_m (i_{s1d} + i_{s2d})) \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

$$\begin{bmatrix} v_{ds1} \\ v_{qs1} \\ v_{ds2} \\ v_{qs2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{s1} + L_m & 0 & L_m & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_{s1} + L_m & 0 & L_m & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_{s2} + L_m & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_{s2} + L_m & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_m & 0 & L_r + L_m & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_m & 0 & L_r + L_m \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{ds1} \\ i_{qs1} \\ i_{ds2} \\ i_{qs2} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{s1} & -\omega_s(L_{s1} + L_m) & 0 & \omega_s L_m & 0 & \omega_s L_m \\ \omega_s(L_{s1} + L_m) & R_{s1} & \omega_s L_m & 0 & \omega_s L_m & 0 \\ 0 & -\omega_s L_m & R_{s2} & (\omega_s - \omega)L_m & 0 & -\omega_s L_m \\ \omega_s L_m & 0 & (\omega_s - \omega)L_m & R_{s2} & \omega_s L_m & 0 \\ 0 & -(\omega_s - \omega)L_m & 0 & (\omega_s - \omega)L_m & R_r & (\omega_s - \omega)(L_{s1} + L_m) \\ (\omega_s - \omega)L_m & (\omega_s - \omega)L_m & (\omega_s - \omega)L_m & 0 & (\omega_s - \omega)(L_{s1} + L_m) & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds1} \\ i_{qs1} \\ i_{ds2} \\ i_{qs2} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{s1} + L_m & 0 & L_m & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_{s1} + L_m & 0 & L_m & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_{s2} + L_m & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_{s2} + L_m & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_m & 0 & L_r + L_m & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_m & 0 & L_r + L_m \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L_m & 0 & -L_m & 0 & -(L_r + L_m) \\ L_m & 0 & L_m & 0 & (L_r + L_m) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} R_1 & -\omega_s(L_1 + L_m) & 0 & -\omega_s L_m & 0 & -\omega_s L_m \\ \omega_s(L_1 + L_m) & R_1 & \omega_s L_m & 0 & \omega_s L_m & 0 \\ 0 & -\omega_s L_m & r_2 & -\omega_s(L_2 + L_m) & 0 & -\omega_s L_m \\ \omega_s L_m & 0 & \omega_s(L_2 + L_m) & r_2 & \omega_s L_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_r \end{bmatrix}$$

### II.5 Simulation et Interprétation des résultats

Pour la simulation il suffit d'implanter le modèle électrique de la machine asynchrone double étoiles sous l'environnement MATLAB/SIMULINK.

La MASDE est alimentée par des sources purement sinusoïdales, équilibrées et exprimées comme suit :

Pour l'étoile 1 :

$$\begin{aligned}v_{sa1} &= \sqrt{2}V_s \sin(\omega_s t) \\v_{sb1} &= \sqrt{2}V_s \sin(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}) \\v_{sc1} &= \sqrt{2}V_s \sin(\omega_s t + \frac{2\pi}{3})\end{aligned}\tag{II.34}$$

Pour l'étoile 2 :

$$\begin{aligned}v_{sa2} &= \sqrt{2}V_s \sin(\omega_s t - \alpha) \\v_{sb2} &= \sqrt{2}V_s \sin(\omega_s t - \alpha - \frac{2\pi}{3}) \\v_{sc2} &= \sqrt{2}V_s \sin(\omega_s t - \alpha + \frac{2\pi}{3})\end{aligned}\tag{II.35}$$

Avec :

$V_s$  : La valeur efficace de tension

$\omega_s$  : Pulsation d'alimentation

II.5.1 Les résultats de simulation

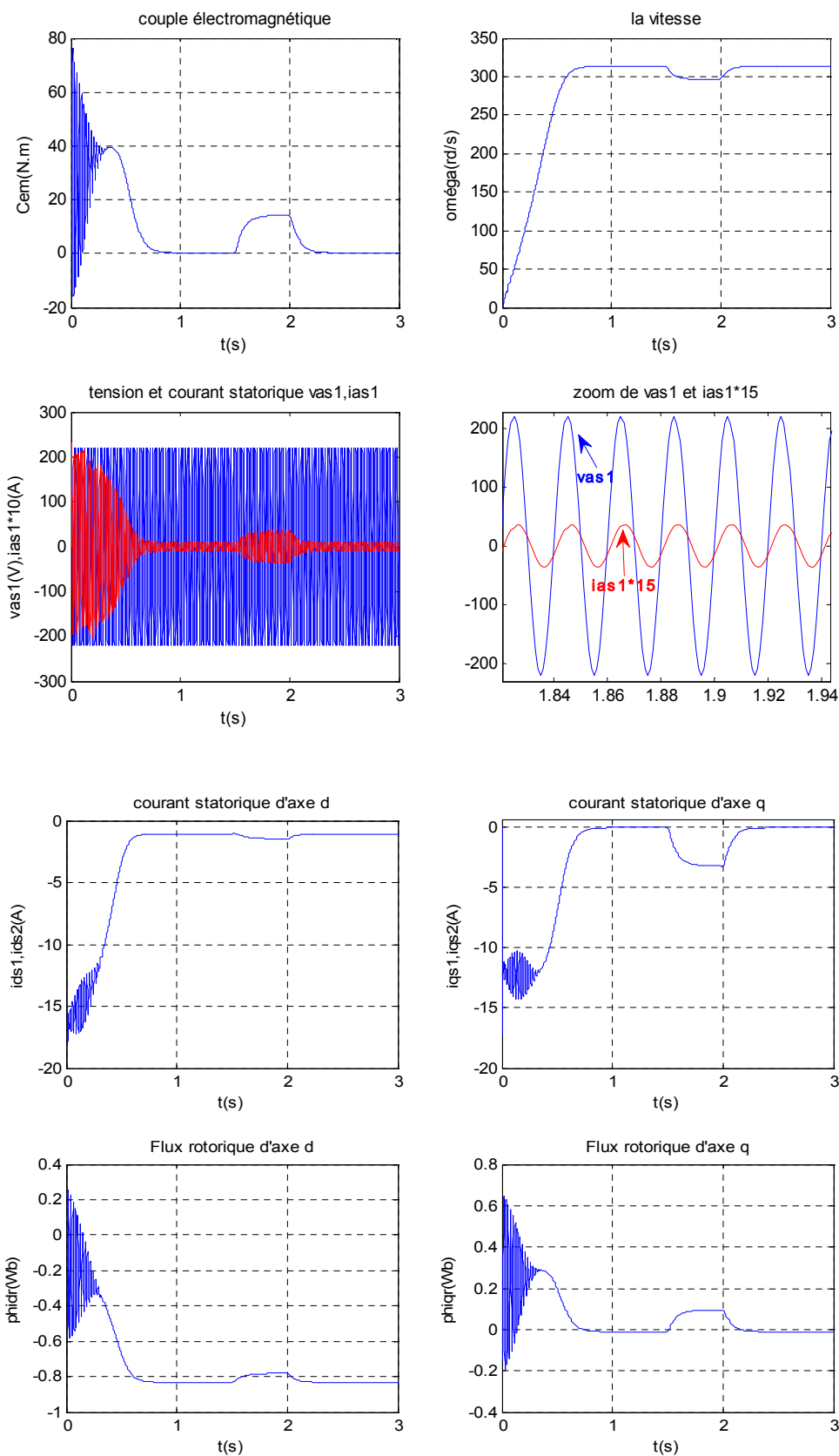


Figure II.3 : Performances de la MASDE avec la charge dans l'intervalle] 1.5 ; 2[s.

### II.5.2 Interprétation des résultats de la figure II.3

Les performances de la conduite de la machine asynchrone double étoile en fonctionnement en charge montrent que :

En appliquant une charge  $14\text{N.m}$  t] 1.5 ; 2[s

-La vitesse de rotation : on voit que la vitesse passe par un régime transitoire, puis se stabilise presque à la valeur de la vitesse de synchronisme  $3000\text{tr/mn}$ . Mais dans l'intervalle de temps

] 1.5 ; 2[ s en appliquons un couple résistant (charge)  $14\text{ N.m}$ , la vitesse de rotation chute jusqu'à atteindre la valeur  $N=2733\text{tr/mn}$ .

-Le couple électromagnétique : au démarrage, et pendant le régime transitoire, on constate un pic de  $57\text{ N.m}$  et des oscillations au niveau du couple électromagnétique qui disparaissent. Après ce régime le couple diminue d'une façon presque linéaire et se stabilise à sa valeur minimale de  $0.31\text{ N.m}$  qui correspond à la compensation des frottements. Mais dans l'intervalle de temps où on applique la charge de  $14\text{ N.m}$ , le couple électromagnétique compense le couple de charge et bien sûr les pertes par frottement. Il atteint une valeur constante de  $14.29\text{ N.m}$ , après cet intervalle il revient à sa valeur minimale.

-La tension  $V_{as1}(\text{V})$  et le courant statorique  $i_{as1}(\text{A})$  : d'après ce fonctionnement, cette machine (fonctionnement moteur), la tension d'alimentation  $V_{as1}$  et le courant statorique  $i_{as1}$  sont de même signe, ce qui veut dire que le sens de transition de la puissance est positif, c'est-à-dire la machine absorbe de l'énergie active et réactive (nécessaire pour l'alimentation de la charge et pour sa magnétisation) de la source (réseau électrique). Toutefois, le déphasage en arrière du courant par rapport à la tension est dû à l'effet inductif de la machine.

-Les courants d'axe d ont la même forme (les deux étoiles sont identiques). Ces courants sont de signe négatif et se stabilisent à la valeur  $-1.3\text{A}$ , mais à l'instant où on applique le couple résistant les deux courants diminuent à la valeur de  $-1.5\text{A}$ .

-Même chose pour les courants d'axe q, sauf que la valeur de courant en régime établi est presque nulle. Avec la présence de la charge on remarque une diminution au niveau de ces deux courants pour atteindre  $-3.3\text{A}$ .

-Le flux  $\phi_{hidr}$  a des oscillations dans la zone négative et se stabilise à la valeur de  $-0.85\text{Wb}$ , mais avec l'application de la charge le flux diminue de  $0.84\text{Wb}$  à  $0.78\text{Wb}$  en valeur absolue.

- Le flux  $\phi_{iq}$  a des oscillations presque dans la zone positive et tend vers une valeur nulle dans le régime établi, mais avec la présence de la charge on observe une augmentation de  $-0.1\text{Wb}$  à  $0.95\text{Wb}$ .

## II.6 Alimentation de la MASDE par onduleurs de tension à commande MLI

### II.6.1 Introduction

Les développements dans le domaine de l'électronique de puissance, soit au niveau des éléments semi-conducteurs, soit au niveau des convertisseurs statiques, permettent la réalisation d'organes de commande avec des puissances de sortie élevées et facilement commandables [8].

Le contrôle de vitesse le plus simple, dit en "V/f = constante", permet de varier la vitesse de la machine sur une large plage, c'est un contrôle scalaire [6].

L'onduleur de tension à MLI triphasée permet l'échange d'énergie entre une source de tension continue et une charge inductive triphasée (MASDE dans notre cas) et d'imposer à la machine des ondes de tension à amplitude et fréquence variables [6].

### II.6.2 Modélisation de l'onduleur de tension à MLI

L'onduleur à MLI est constitué de trois segments, bidirectionnels en courant et commandés à l'amorçage et au blocage. Les interrupteurs peuvent être réalisés, suivant la puissance à contrôler, avec des transistors MOS, ou bipolaire, des GTO, ou des IGBT associés à une diode en antiparallèle pour obtenir la réversibilité et la continuité du courant dans la machine à courant alternatif, une fois que les interrupteurs sont ouverts.

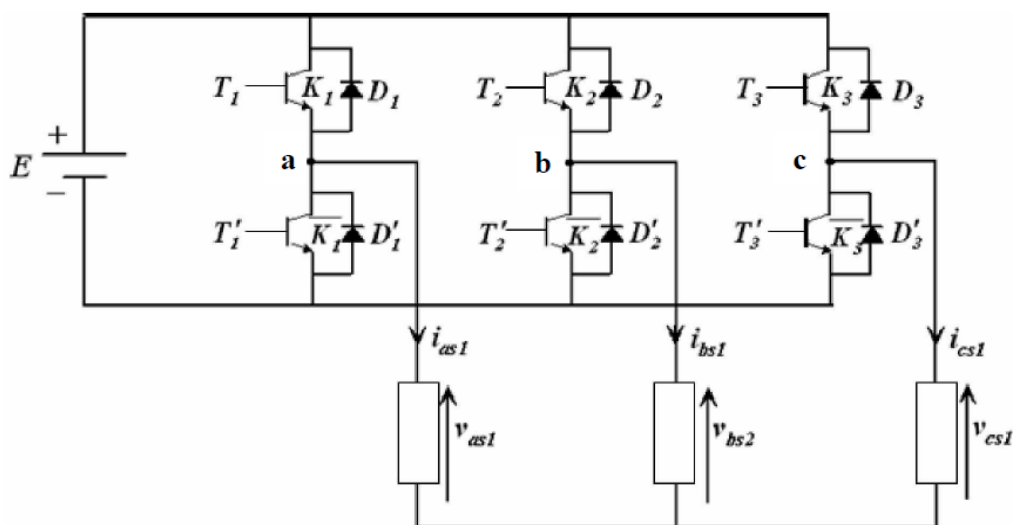


Figure. II.4 : schéma de l'onduleur triphasé

En mode commandable, le bras est un commutateur à deux positions qui permet d'obtenir à la sortie deux niveaux de tension.

Un bras de l'onduleur est représenté par la figure II.5.

L'onduleur est modélisé en associant à chaque bras deux états définis par la fonction de connexion logique suivante :

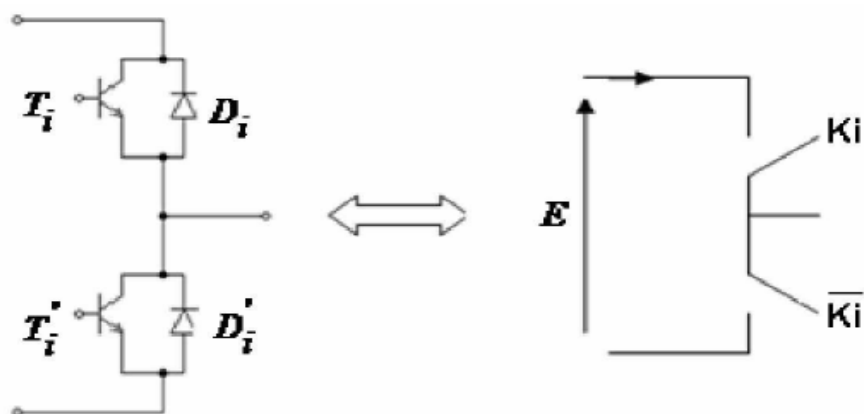


Figure. II.5 : schéma d'un bras de l'onduleur

$$F_i = \begin{cases} +1 & \text{l'interrupteur } K_i \text{ est fermé (} K_i \text{ conduit, } \bar{K}_i \text{ bloqué)} \\ 0 & \text{l'interrupteur } \bar{K}_i \text{ est fermé (} K_i \text{ bloqué, } \bar{K}_i \text{ conduit)} \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Donc les tensions de ligne sont données :

$$U_{abs1} = v_{as1} - v_{bs1} = E(F_1 - F_2)$$

$$U_{bcs1} = v_{bs1} - v_{cs1} = E(F_2 - F_3)$$

$$U_{cas1} = v_{cs1} - v_{as1} = E(F_3 - F_1) \quad (\text{II.37})$$

$$U_{abs2} = v_{as2} - v_{bs2} = E(F_4 - F_5)$$

$$U_{bcs2} = v_{bs2} - v_{cs2} = E(F_5 - F_6)$$

$$U_{cas2} = v_{cs2} - v_{as2} = E(F_6 - F_4)$$

On a le système de tension triphasés équilibrées alors :

D'après (II .35) on trouve :

$$v_{as1} = \frac{3}{2}(2F_1 - F_2 - F_3)$$

$$v_{bs1} = \frac{3}{2}(2F_2 - F_1 - F_3) \quad (\text{II.38})$$

$$v_{cs1} = \frac{3}{2}(2F_3 - F_1 - F_2)$$

De la même manière on trouve :

$$v_{as2} = \frac{3}{2}(2F_4 - F_5 - F_6)$$

$$v_{bs2} = \frac{3}{2}(2F_5 - F_4 - F_6) \quad (\text{II.39})$$

$$v_{cs2} = \frac{3}{2}(2F_6 - F_4 - F_5)$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} v_{as1} \\ v_{bs1} \\ v_{cs1} \end{bmatrix} = \frac{E}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{as2} \\ v_{bs2} \\ v_{cs2} \end{bmatrix} = \frac{E}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

### II.6.3 Stratégie de commande sinus-triangle

La M.L.I sinus-triangle est réalisée par comparaison d'une onde modulante basse fréquence (tension de référence) à une onde porteuse haute fréquence de forme triangulaire. Les instants de commutation sont déterminés par les points d'intersection entre la porteuse et la modulante. La fréquence de commutation des interrupteurs est fixée par la porteuse [4].

La technique MLI de type triangulo-sinusoïdale consiste à générer les six tensions de sortie de fréquence  $f_r$  à un signal triangulaire appelé porteuse de fréquence  $f_p$  élevée par rapport à la fréquence  $f_r$ . Cette stratégie est caractérisée par deux paramètres à savoir l'indice de modulation  $m$  et le taux de réglage  $r$ .

On définit l'indice de modulation  $m$  comme étant le rapport de fréquence  $f_p$  à la fréquence  $f_r$  de la tension de la référence, et le coefficient de réglage en tension  $r$  égal au rapport de l'amplitude de la tension de référence à l'amplitude  $U_{pm}$  de la porteuse définis par[8] :

$$U_p(t) = \begin{cases} \frac{4t}{T_p}(4n+1)si & t \in [nT_p, \frac{n+1}{2}T_p] \\ \frac{-4t}{T_p}(4n+1)si & t \in [\frac{n+1}{2}T_p, (n+1)T_p] \end{cases}$$

Où  $T_p$  représente la période du signal de la porteuse  $U_p(t)$ .

La figure II.6 représente le principe de la commande par MLI sinus triangle dont  $r=0.8$  et  $m=21$ .

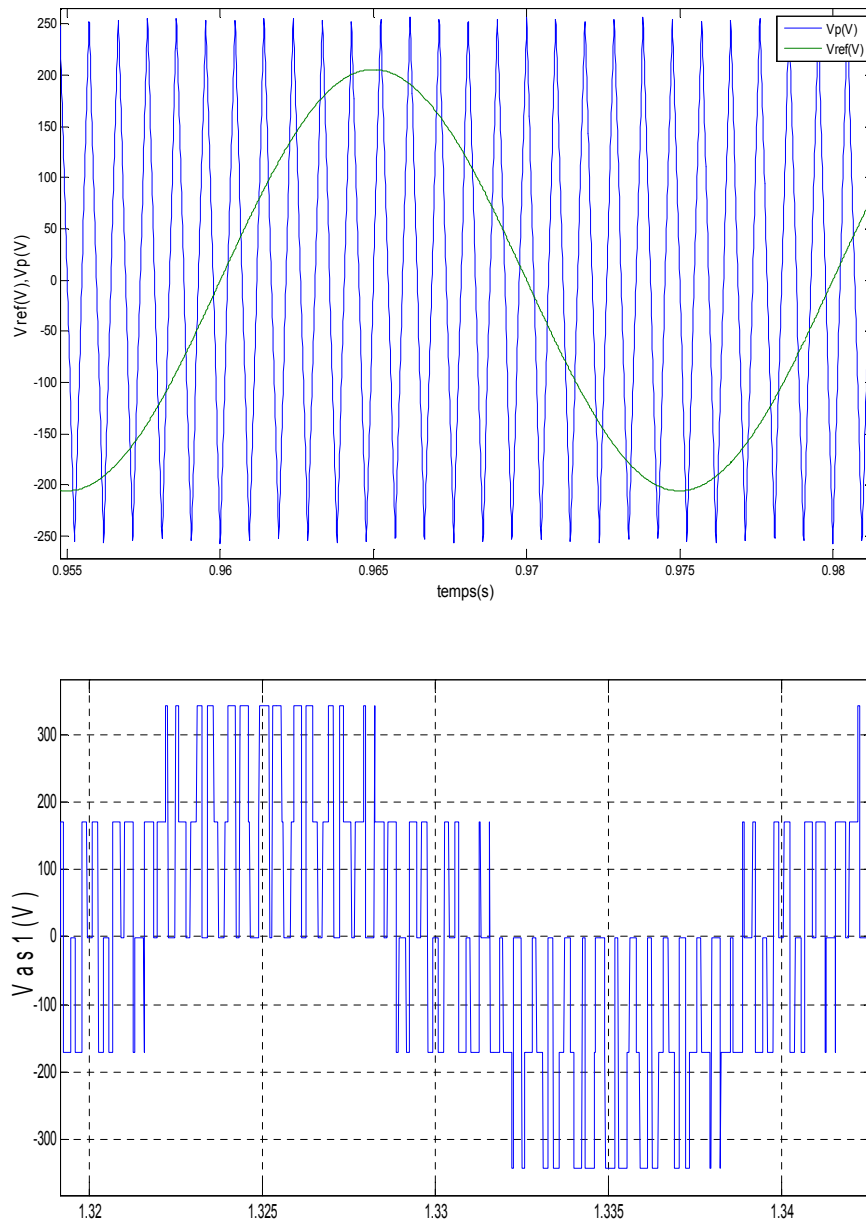


Figure II.6 : Principe de la M.L.I sinus-triangle

### II.6.4 Association de la MASDE par deux onduleurs de tension à commande MLI

La (Figure II.7) représente l'association de la MASDE avec deux onduleurs de tension triphasés à commande MLI, les tensions de référence sont purement sinusoïdales.

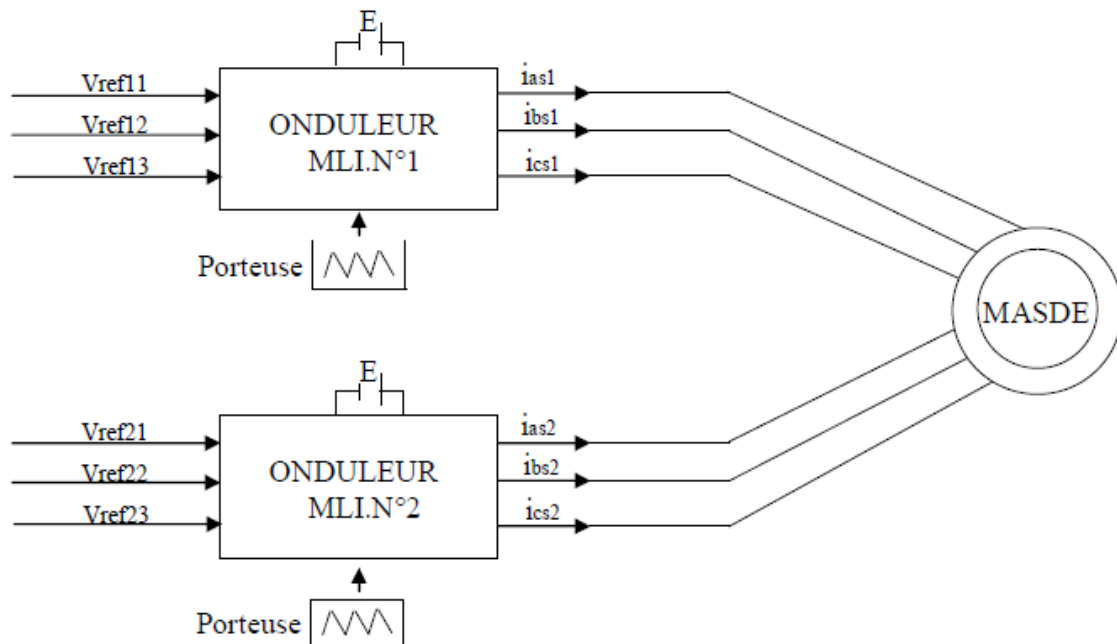


Figure II.7 : Association MASDE-onduleurs de tension à commande M.L.I

### II.6.5 Résultats de simulation

Les résultats de simulation représentée dans la figure (II.8) montrent l'évolution des caractéristiques de la MASDE alimentée par deux onduleurs de tension à commande MLI sinus triangle déphase de  $30^\circ$ , dans cette technique, il faut définir deux paramètres qui sont :

- L'indice de modulation « m » qui représente le rapport entre la fréquence de la porteuse «  $f_p$  » à la fréquence de référence «  $f_r$  » désirée.
- Le coefficient de réglage en tension « r » qui représente le rapport entre l'amplitude de l'onde de référence à la valeur crête de l'onde de la porteuse [7].

Dans notre cas la simulation numérique est effectuée pour l'indice de modulation  $m = 21$  et le coefficient de réglage en tension  $r = 0,8$ . Le fonctionnement est en charge avec  $C_r = 14 \text{ N.m}$  et  $-14 \text{ N.m}$  respectivement entre les intervalles de temps  $t = [2,3,5]$  et  $[4,5,6]$ .

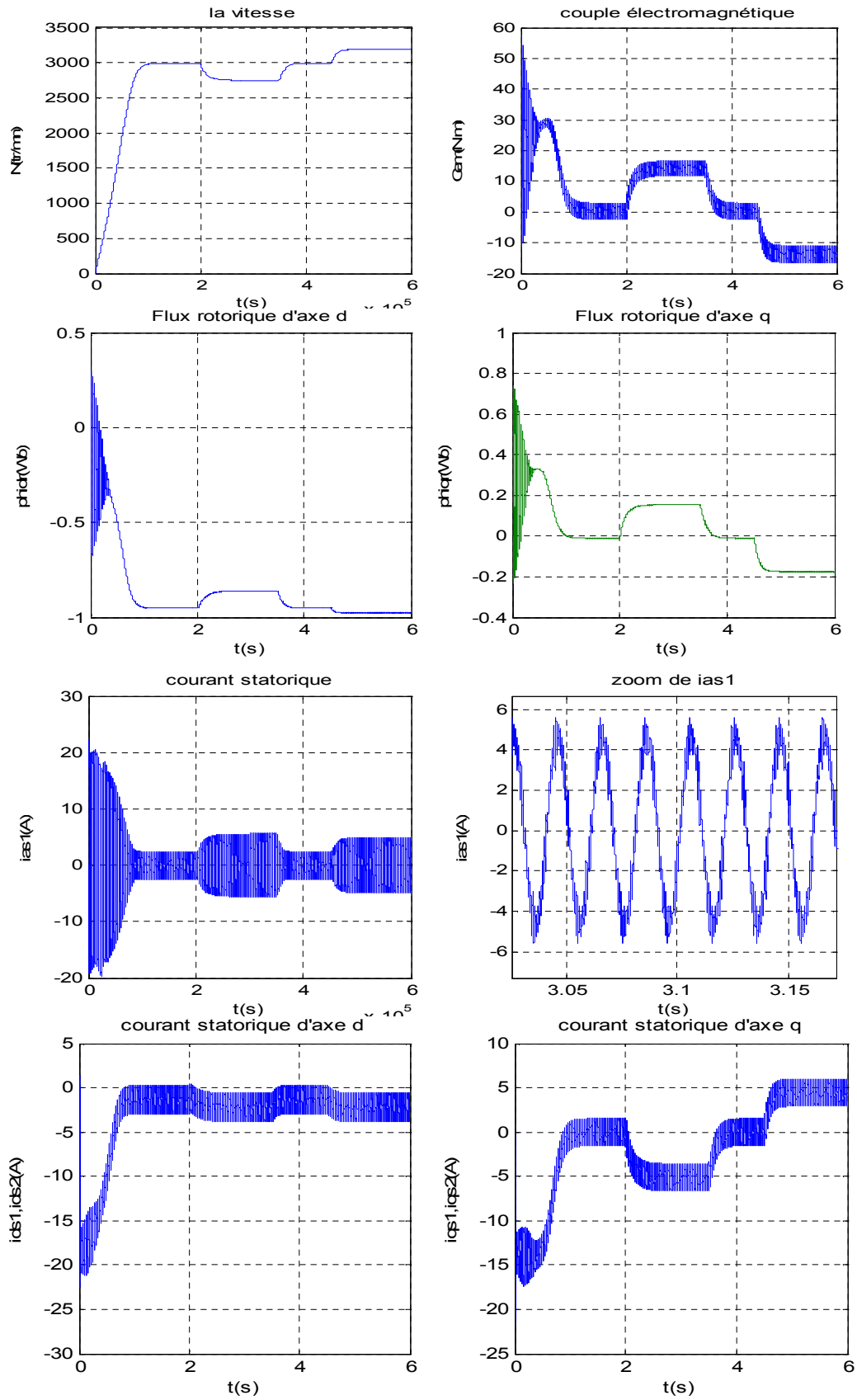


Figure II.8 : Performances de la MASDE alimentée par deux onduleurs de tension en charge.

### II.6.6 Interprétation des résultats

Les résultats de simulation obtenus sont similaires aux résultats obtenus par la simulation de la machine avec l'alimentation directe au réseau, en termes de valeurs des grandeurs (courant en charge, couple et vitesse en régime établi ...etc.), mais avec la présence d'harmoniques au niveau du courant  $i_{as1}$ , du couple électromagnétique, des courants d'axes d et q et au niveau des flux rotorique d'axe d et q. Ces harmoniques sont dus à la présence des onduleurs de tension.

### II.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'établissement d'un modèle mathématique de la MASDE basé sur la théorie unifiée des machines électriques tout en adoptant certaines hypothèses simplificatrices.

L'étude des caractéristiques de la MASDE directement alimentée par des sources sinusoïdales, puis par des onduleurs de tensions à commande MLI à vide et en charge a été accomplie.

Le processus de démarrage du moteur, suivi de l'application d'une charge a été simulé par le logiciel MATLAB/SIMULINK.

L'insertion de la charge dans les deux cas d'alimentations engendre une variation de la vitesse, ce qui nécessite une régulation.

Dans le chapitre suivant on s'intéressera à la régulation de la vitesse de la machine par la commande vectorielle.

# Chapitre III

**Commande vectorielle de la  
Machine asynchrone double  
étoile (MASDE)**

### III.1 introduction

Dans ces vingt dernières années, le domaine de la conversion de l'énergie électrique a été marqué, comme de nombreux autres domaines, par la révolution de l'électronique [9].

Les méthodes classiques de variation de vitesse (mécanique et électromécanique) ont été peu à peu dépassées par des ensembles associant des convertisseurs statiques à des moteurs électriques.

De nos jours, de nombreux actionneurs associant des machines à courant alternatif et des convertisseurs statiques manifestent de nouvelles perspectives dans le domaine de l'entraînement à vitesse variable.

Il existe plusieurs techniques pour commander les machines à courant alternatif. Parmi celles-ci, la commande scalaire, la commande par retour d'état et la commande par le mode glissant etc.

L'objectif de ce chapitre s'inscrit dans le fait de pouvoir appliquer ces techniques de commande à la machine asynchrone double étoile, en particulier la commande vectorielle pour régler la vitesse de la machine asynchrone double étoile.

### III.2 Principe de la commande vectorielle

Le but de cette commande est d'assimiler le comportement de la machine asynchrone à double étoile à celui d'une machine à courant continu à excitation séparée en deux aspects (figure III.1).

- Le couple et le flux de la machine sont contrôlés indépendamment l'un de l'autre.
- Les conditions optimales de production du couple sont assurées en régime permanent et en régime transitoire.

En effet, dans une machine à courant continu le courant d'induit ( $I_a$ ) contrôle le couple et le courant inducteur ( $I_f$ ) contrôle le flux.

La relation du couple électromagnétique est donnée par :

$$C_{em} = k\Phi_f \cdot I_a = k' I_f I_a \quad (III.1)$$

Avec :

$\Phi$  : Flux imposé par le courant d'excitation  $I_f$  ;

$I_a$  : Courant d'induit ;

$k, k'$  : constantes.

Pour la machine asynchrone à double étoile, la commande vectorielle consiste à réaliser un découplage des grandeurs génératrices du couple électromagnétique et du flux rotorique. Pour cela, il faut choisir une loi de commande et un système d'axes assurant le découplage du flux et du couple.

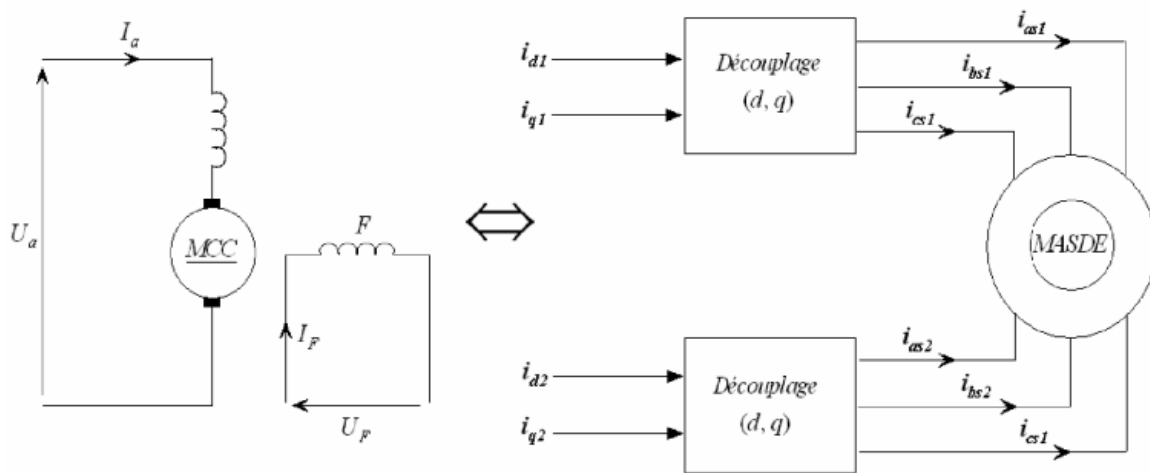


Figure III.1 : principe de pilotage vectoriel de la MCC et de la MASDE

Sachant que l'expression du couple électromagnétique (II. 31) est en fonction des courants statoriques et de flux rotorique, si on coïncide le flux rotorique avec l'axe (d) du référentiel lié au champ tournant :

$$\Phi_{dr} = \Phi_r ;$$

$$\Phi_{qr} = 0$$

D'où la relation finale du couple devient :

$$C_{em} = P \frac{L_m}{L_m + L_r} \Phi_{dr} (i_{qs1} + i_{qs2}) = k \Phi_{dr} (i_{qs1} + i_{qs2}) \tag{III.2}$$

Avec :

$$K = P \frac{L_m}{L_m + L_r}$$

D'après l'équation (III.2) nous constatons que le couple électromagnétique résulte de l'interaction d'un terme de flux et d'un terme courant. Cette expression rappelle le couple de la machine à courant à excitation séparée.

On déduit que le fonctionnement de la machine asynchrone à double étoile, avec sa commande vectorielle est similaire à celui de la machine à courant continu à excitation séparée.

### III.3 Procédé d'orientation de flux

Orientation de flux rotorique avec les conditions  $\phi_{dr} = \phi_r$        $\phi_{qr} = 0$ .      (III.3)

Orientation de flux statorique avec les conditions  $\phi_{ds} = \phi_s$        $\phi_{qs} = 0$ .      (III.4)

Orientation de flux d'entrefer avec les conditions  $\phi_{dm} = \phi_m$        $\phi_{qm} = 0$ .      (III.5)

Pour la MASDE, nous optons pour le choix d'orientation du flux rotorique (III.3), car cela permet d'obtenir un variateur de vitesse où le flux et le couple électromagnétique sont indépendamment commandés à travers les courants statoriques.

### III.4 Différentes méthodes de la commande vectorielle

Il existe de types de la commande vectorielle sont [2] :

- Méthode de la commande directe.
- Méthode de la commande indirecte.

On intéresse à la commande vectorielle indirecte.

#### III.4.1 méthode de commande indirecte

La méthode indirecte consiste à ne pas utiliser l'amplitude de flux, mais seulement sa position, dans ce cas le flux est contrôlé en boucle ouverte.

### III.5 Commande vectorielle indirecte avec régulation de vitesse

Le principe de cette méthode, consiste à déterminer directement la composante du flux rotorique à partir de la vitesse mécanique de rotation du rotor en utilisant un capteur de vitesse, cela est réalisable pour un bloc de défluxage défini par la fonction non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \phi_{rref} = \phi_n \text{ si } |\Omega| \leq \Omega_n \\ \phi_{rref} = \phi_n = \frac{\Omega_n}{|\Omega|} \text{ si } |\Omega| > \Omega_n \end{cases} \quad (III.6)$$

Il est schématisé par la figure suivante :

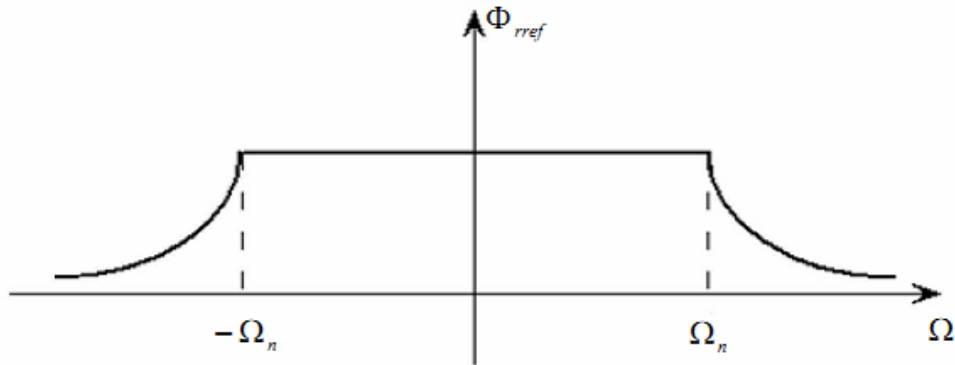


Figure III.2 schéma de défluxage

Le flux est généralement maintenu constant à sa valeur nominale, pour des vitesses rotoriques inférieures ou égales à la vitesse nominale de la machine  $\omega_n$ , pour des vitesses supérieures le flux décroît lorsque la vitesse augmente afin de limiter la tension aux bornes de la machine.

Le schéma de réglage de la vitesse de la MASDE est donné par la figure suivante :

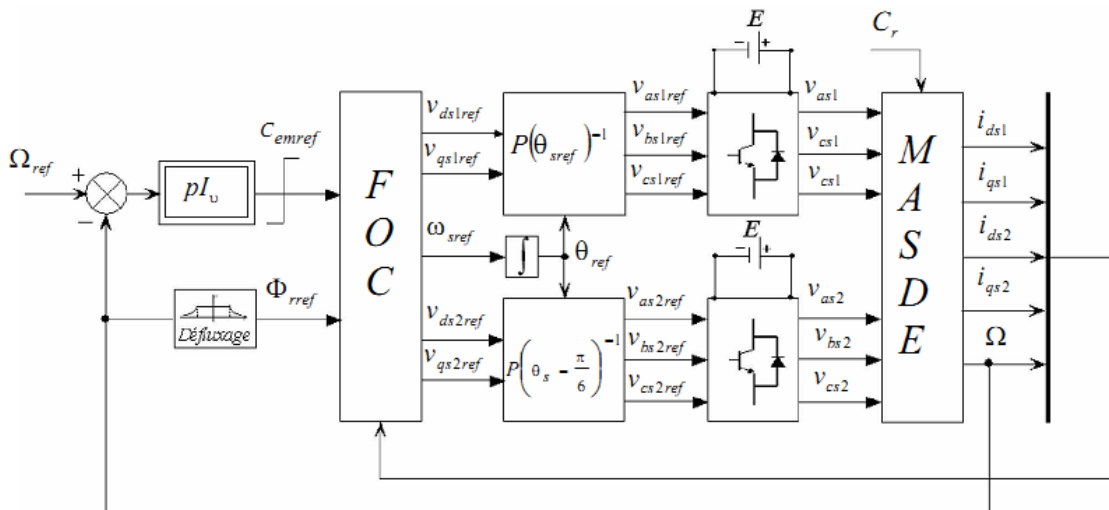


Figure III.3 schéma de la commande FOC avec régulation de vitesse

Pour un découplage parfait, on ajoute les boucles de régulation des courants statoriques ( $i_{ds1}, i_{qs1}, i_{ds2}, i_{qs2}$ ) et on obtient à leurs sorties les tensions ( $V_{ds1}, V_{qs1}, V_{ds2}$  et  $V_{qs2}$ ).

### III.5.1 Identification des paramètres du régulateur PI

L'identification des paramètres des régulateurs PI des systèmes dont la fonction de transfert est du premier ordre, telle que :

$$H(P) = \frac{1}{ap+b} \quad (\text{III.7})$$

Se fait de manière générale comme suit :

La fonction de transfert du régulateur PI est :

$$C(P) = K_p + \frac{K_i}{P} \quad (\text{III.8})$$

Le schéma représentatif de la boucle de régulation d'un système asservi du premier ordre à retour unitaire régulé par un PI est donné par la figure (III.4)

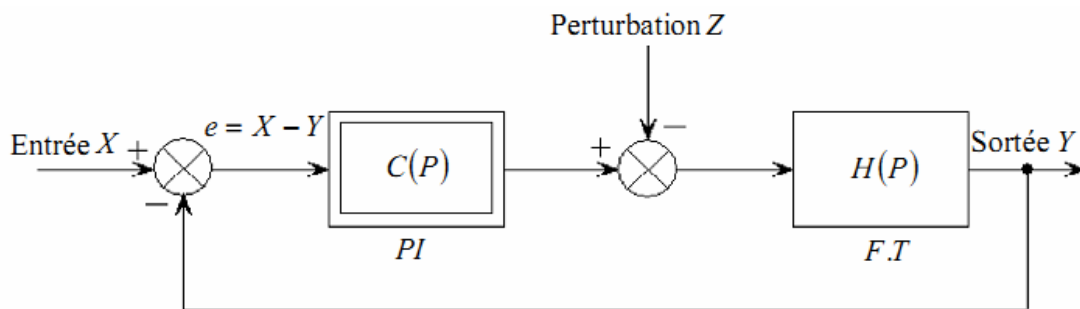


Figure III.4 schéma d'un système asservi du premier ordre régulé par un PI

La perturbation est négligée dans les étapes d'identification des paramètres des régulateurs.

La fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi est :

$$T(P) = C(P)H(P) = \frac{K_p p + K_i}{ap^2 + bp} \quad (\text{III.9})$$

En boucle fermée, on obtient :

$$F(P) = \frac{T(P)}{1+T(P)} = \frac{K_p p + K_i}{ap^2 + (b+K_p)p + K_i} \quad (\text{III.10})$$

Afin d'avoir un comportement d'un système du premier ordre dont la fonction de transfert est de la forme suivante :

$$G(P) = \frac{1}{T(P)+1} \tag{III.11}$$

Il suffit d'identifier (III.10) à (III.11) comme suit

$$\frac{K_p p + K_i}{ap^2 + (b + K_p)p + K_i} = \frac{1}{T(P)+1} \tag{III.12}$$

Ce qui donne :

$$K_p T p^2 + (k_i T + K_p)p + k_i = ap^2 + (b + K_p)p + K_i \tag{III.13}$$

D'où :

$$\begin{cases} k_p = \frac{a}{T} \\ K_i = \frac{b}{T} \end{cases} \tag{III.14}$$

La figure (III.5) représente le schéma de la boucle de régulation des courants statoriques.

Avec :

$$\begin{cases} k_{ps1} = \frac{L_{s1}}{T} \\ k_{is1} = \frac{R_{s1}}{T} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} K_{ps2} = \frac{L_{s2}}{T} \\ k_{is2} = \frac{R_{s2}}{T} \end{cases} \tag{III.15}$$

On prend pour  $T = \frac{\tau_r}{6}$  pour avoir une dynamique du processus rapide, avec  $\tau_r = \frac{L_r}{R_r}$  est la constante de temps électrique (rotorique) du système.

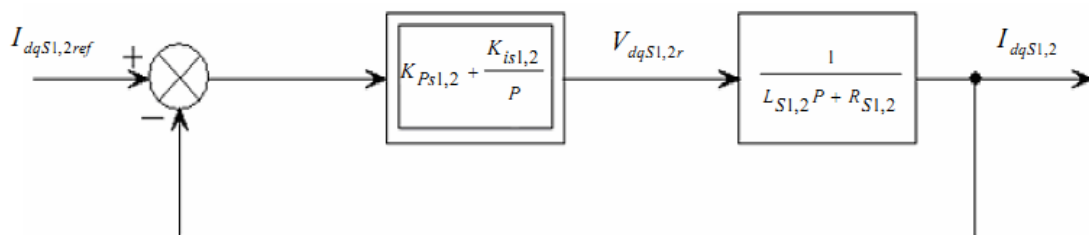


Figure III.5 schéma de la boucle de régulation des courants statoriques

## III.5.2 identification des paramètres du régulateur de vitesse

Le schéma de la boucle de régulation de vitesse est donné par la figure (III.6) :

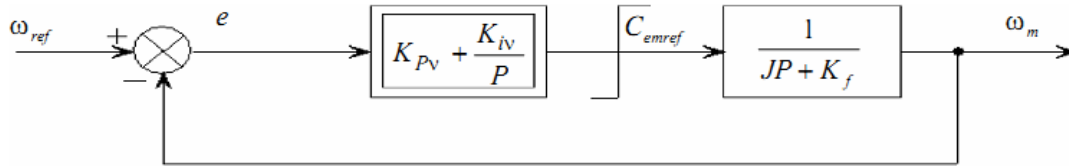


Figure III.6: boucle de régulation de vitesse

L'identification nous donne :

$$\begin{cases} K_{pv} = \frac{1}{\tau} \\ K_{iv} = \frac{K_f}{\tau} \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

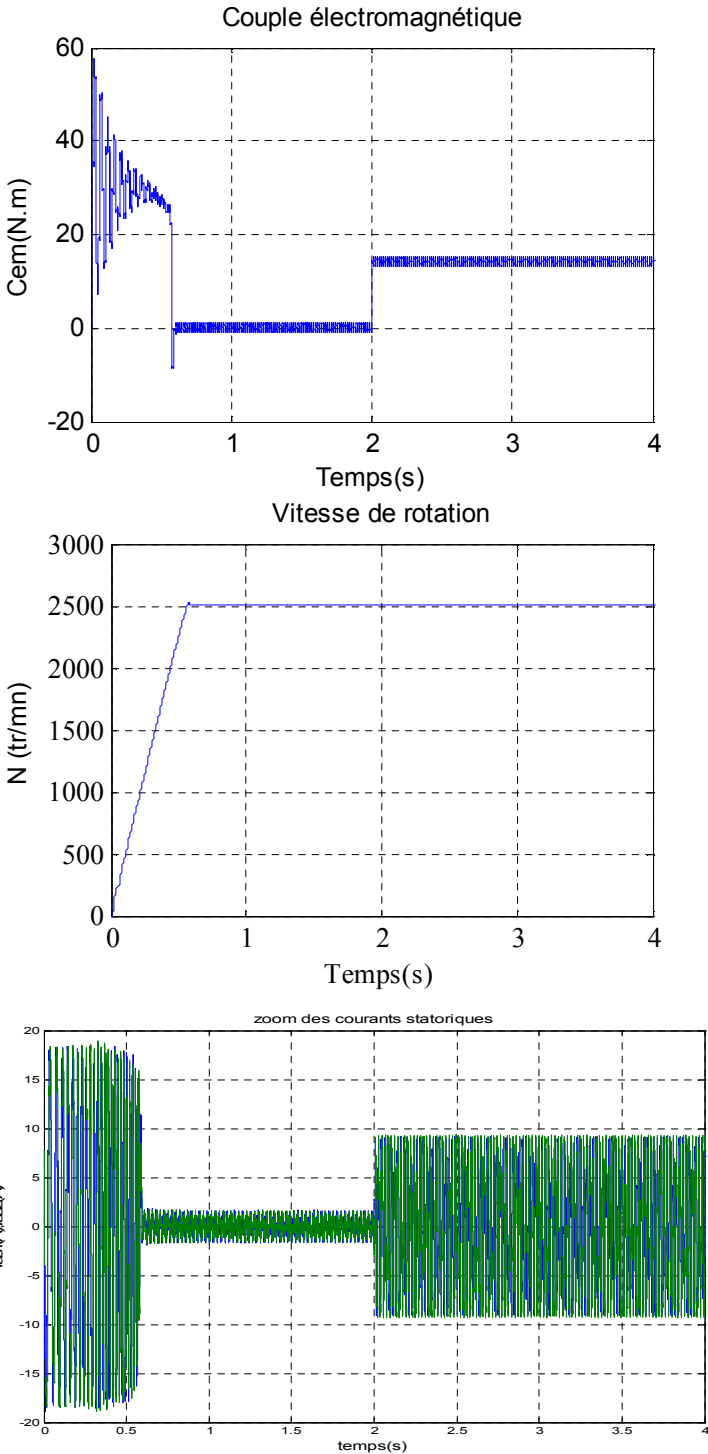
On prend :  $\tau = \tau_r$

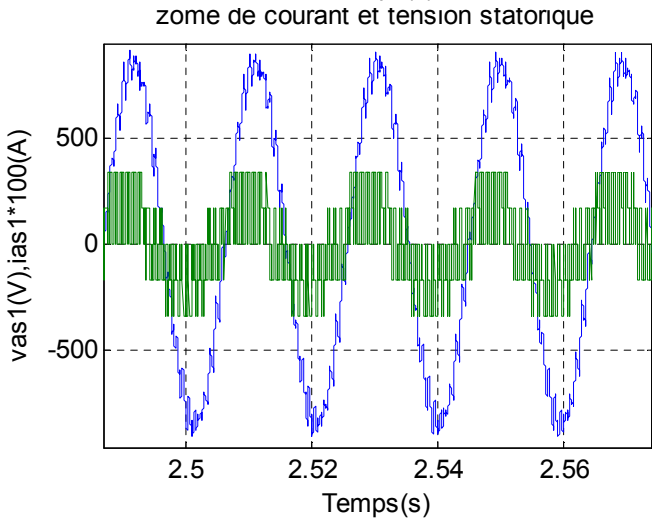
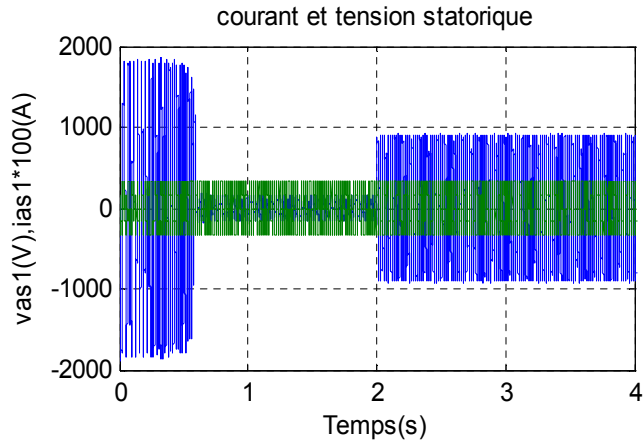
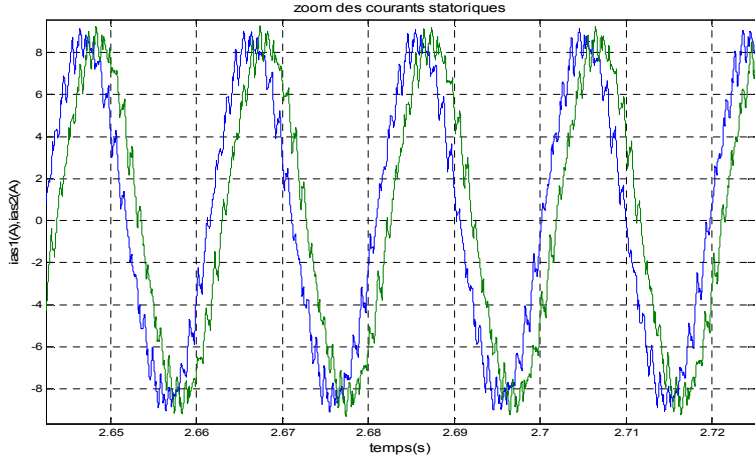
La commande doit être limitée par un dispositif de saturation défini par :

$$C_{emref}(\text{lim}) = \begin{cases} c_{em} & \text{si } |C_{em}| \leq C_{emmax} \\ C_{emmax} \text{sign}(C_{emref}) & \text{si } |C_{emref}| \geq C_{emmax} \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

III.5.2 Simulation et interprétation des résultats

III.5.2.1 Résultats de simulation





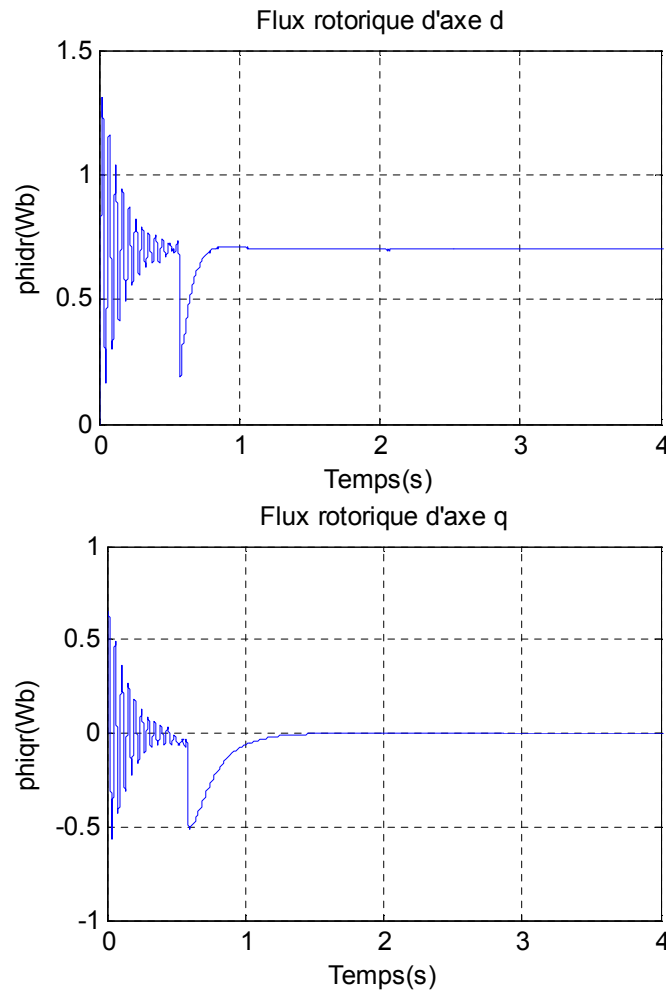


Figure III.7 : Régulation de la vitesse par la méthode indirecte

### III.5.2.2 Interprétation des résultats

Les différentes figures représentent la réponse de la MASDE avec la régulation de vitesse par la méthode indirecte avec un couple résistant égal à  $14\text{Nm}$  ( $C_r=14\text{Nm}$ ) appliqué à l'instant  $t=2\text{s}$ .

En imposant la vitesse de référence  $N_{\text{ref}} = 2500\text{tr}/\text{min}$ .

Le couple électromagnétique présente une allure sinusoïdale amortie dans le régime transitoire. Lorsque la vitesse atteint la valeur de consigne le couple oscille autour de zéro.

A l'instant  $t=2\text{s}$  on applique une charge, le couple électromagnétique compense le couple de charge et le frottement.

Les deux flux rotoriques  $\phi_{idr}$  et  $\phi_{iqr}$  respectivement dans les deux axes d et q sont totalement indépendants de la charge appliquée. On dit que le découplage est parfait.

L'allure de deux courants statorique  $i_{as1}$ ,  $i_{as2}$  (étoile1 et étoile2) est de forme sinusoïdale et présente des harmoniques dus aux deux onduleurs de tension.

Néanmoins, en fonctionnement moteur les deux allures tension  $V_{as1}$  (V) et le courant  $i_{as1}$  (A) sont en phase et de même signe ce qui signifie que la puissance est de signe positif. Donc la machine absorbe l'énergie active et réactive de la source pour l'alimentation de la charge et pour sa magnétisation.

### III.6 Conclusion

Dans ce chapitre la commande vectorielle a été appliquée sur la MASDE est la méthode indirecte par orientation du flux rotorique a été adoptée, l'objectif étant la régulation de la vitesse.

L'étude de cette commande a mené au mieux à mettre en évidence les caractéristiques de la commande vectorielle sur la MASDE.

# **Conclusion générale**

### Conclusion

Dans le présent travail, nous avons mis en évidence les principes fondamentaux des machines multiphasées. L'exemple type de ces machines est la machine asynchrone à double étoile qui présente un bon compromis technico-économique. Nous avons appliqué la transformation de Park, pour obtenir un modèle simple qui traduit fidèlement le fonctionnement de la MASDE.

Cette machine a été alimentée par deux onduleurs de tension à deux niveaux commandés par MLI, qui produisent des harmoniques de couple, mais restent faibles par rapport aux machines conventionnelles triphasées.

Les résultats de simulation obtenus dans le deuxième chapitre en alimentation directe ou par deux onduleurs de la MASDE montrent bien le fort couplage entre le flux et le couple. Ceci nous a conduits à introduire une commande découplée. Dans ce cadre, nous avons dédié le troisième chapitre à la commande vectorielle par orientation du flux rotorique qui contient deux méthodes (directe et indirecte). Nous avons opté pour la méthode de commande indirecte.

On constate que la régulation de vitesse par la commande vectorielle indirecte présente de meilleures performances par rapport à l'alimentation directe du réseau et par les onduleurs de tension définis précédemment, et cela en termes de précision et de stabilité. Ainsi, Les algorithmes de réglages classiques tels que les régulateurs PI peuvent s'avérer suffisants si les exigences sur la précision et les performances du système ne sont pas trop exigeantes.

## Bibliographie

---

- [1] HADIOUCHE, "Contribution à l'étude de la machine asynchrone double étoile : modélisation, alimentation et structures", thèse de doctorat de l'université Henri Poincaré, Nancy I, France, Décembre 2001.
- [2] CHEKKAL. et HAMITOUCHE. « Etude, Identification, Modélisation et commande de la Machine Asynchrone Double Etoile », mémoire d'ingénieur université de Bejaia, 2007.
- [3] KERCHA., « Etude et modélisation des machines électriques double étoile » Mémoire Master académique UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA.2013
- [4] AMIMEUR, « Contribution à la Commande d'une Machine Asynchrone » Double Etoile par Mode de Glissement'', mémoire d'ingénieur, Université de BATNA 2008.
- [5] BENRABIA et BENDIB, "Simulation numérique d'un moteur asynchrone à double étoile commande par onduleur multi niveaux", mémoire d'ingénieur université de M'sila, 2005.
- [6] HAMADACHE, OUARET, "Commande d'un système de pompage photovoltaïque", mémoire d'ingénieur, université de Bejaia, 2007.
- [7] HAMMACHE, "Etude et réalisation d'une machine asynchrone double étoile : conception, alimentation et commande", mémoire de magistère de l'école militaire polytechnique, Alger, Janvier 2007.
- [8] LAMACHE, "Développement et implémentation par logique floue d'une commande DTC d'un moteur à induction alimenté par un onduleur de tension PWM", thèse de magistère, université de Sétif, 2003.
- [9] MERABET « Commande Floue Adaptative d'une Machine Asynchrone Double Etoile », Mémoire de Magister en Electrotechnique, Université de Batna, 2008.
- [10] MULTON, "Histoire des machines électromagnétiques et plus particulièrement des machines à réluctance variable", revue 3 E.I, no.3, pp.3-8, Juin 1995.

## Paramètre de la machine asynchrone à double étoile

Puissance nominale	$P_n = 4.5 \text{ Kw}$
Tension nominale	$V_n = 220 \text{ V}$
Courant nominale	$I_n = 5.6 \text{ A}$
Nombre paire de pole	$p = 1$
Résistance de premier enroulement statorique	$R_{s1} = 3.72 \text{ } \Omega$
Résistance de deuxième enroulement statorique	$R_{s2} = 3.72 \text{ } \Omega$
Résistance rotorique	$R_r = 2.12 \text{ } \Omega$
Inductance de premier enroulement statorique	$L_{s1} = 0.022 \text{ } \Omega$
Inductance de deuxième enroulement statorique	$L_{s2} = 0.022 \text{ } \Omega$
Inductance rotorique	$L_{mr} = 0.006 \text{ H}$
Inductance mutuelle	$L_{ms} = 0.3672 \text{ H}$
Moment d'inertie	$J = 0.0625 \text{ Kg.m}^2$
Coefficient de frottement	$k_f = 0.001 \text{ N.m.s/rad}$
Fréquence nominale	$f_n = 50 \text{ Hz}$