

- 1 page de garde.pdf
- 2 Remerciements.pdf
- 3 Sommaire1.pdf
- 4 Liste des figures.pdf
- 5 Liste des tableaux.pdf
- 6 Nomenclature.pdf
- 7 Introduction générale.pdf
- 8 CHAPITRE I fini.pdf
- 9 chapitre II.pdf
- 10 la suite du chapitre II c.pdf
- 11 chapitre III\_New1.pdf
- 12 conclusion generale1.pdf
- 13 Références Bibliographies.pdf
- 14 annexe.pdf
- 15 annexe b.pdf



République Algérienne Démocratique et populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche  
scientifique



UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU

Faculté du Génie de la Construction  
Département de Génie Mécanique

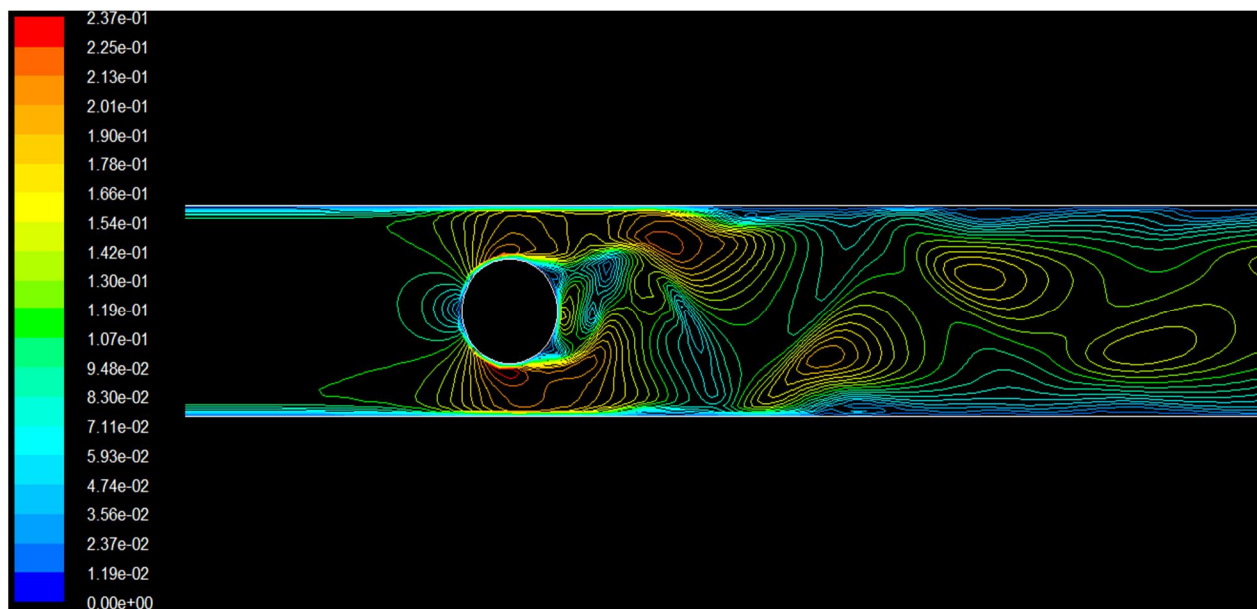
Mémoire de fin d'études

En Vue de l'obtention du diplôme de Master Académique en Génie Mécanique

Option : Énergétique

**Intitulé du sujet :**

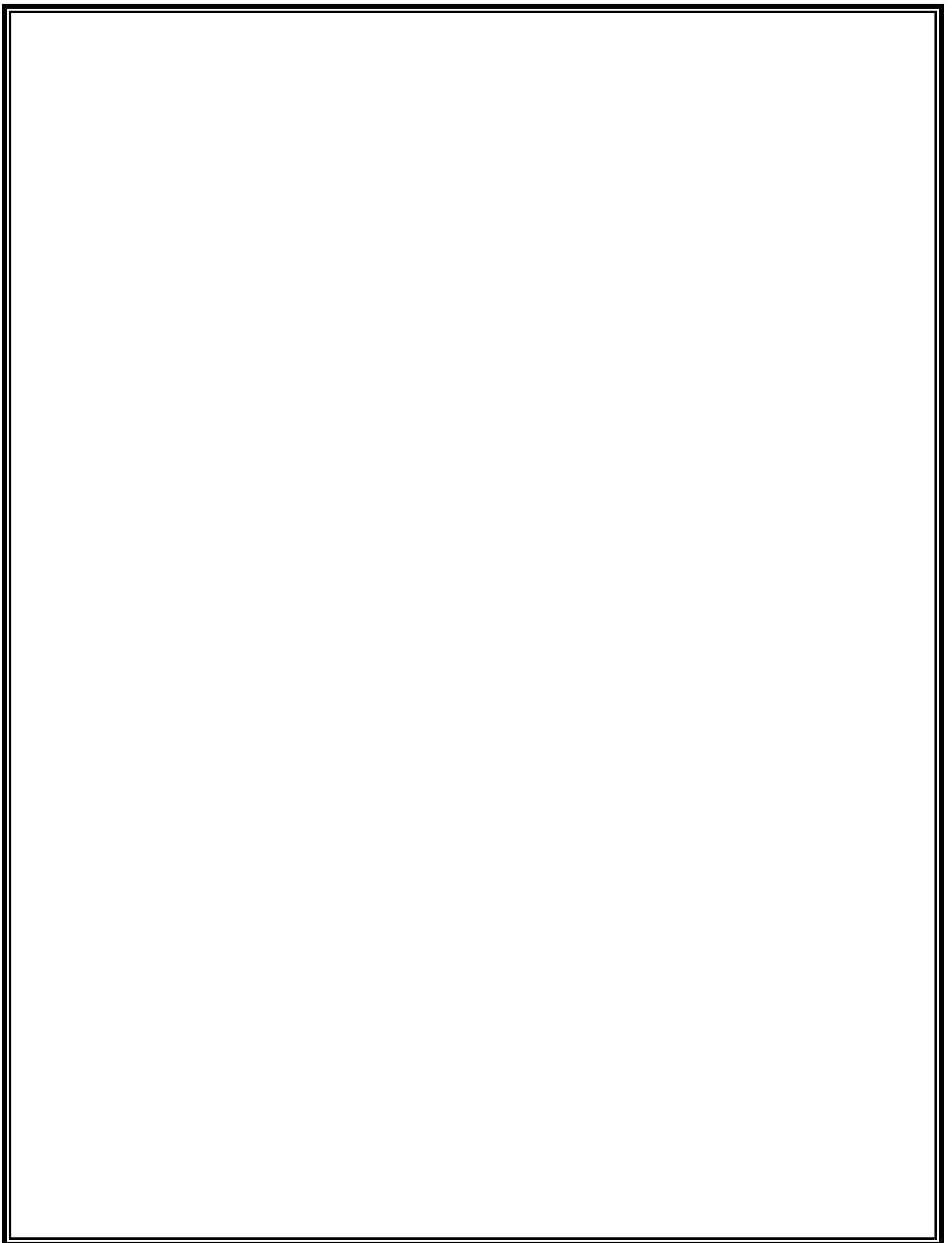
***‘Etude des échanges convectifs autour d’un cylindre  
horizontal’***



Proposé et dirigé par :  
Mr R. NEBBALI

Etude menée par :  
M<sup>lle</sup>: Mahdjouba AKERMA

Promotion 2013



# Remerciements

*Tout d'abord, nous tenons à remercier le bon Dieu Tout Puissant de nous avoir donné le courage, la patience et le pouvoir d'achever ce travail.*

*Je souhaite remercier mon promoteur Mr Rezki Nebbali pour m'avoir accueilli au sein de son équipe. Je lui suis également reconnaissante pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa sympathie. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse l'expression de ma profonde gratitude pour tout cela.*

*J'adresse de chaleureux remerciements à mes enseignants, Mr S.Tiachacht, Mr A.Ameziani, Mr A.Abdedou, Mr Hemzaoui, Mr H.Mohelbi, Mr Zouaoui et Mr Slimani pour leur attention de tout instant sur mes travaux, pour leurs conseils avisés, leur bonne humeur motivante et leur écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. Leur énergie et confiance ont été des éléments moteurs pour moi. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec eux.*

*Un grand merci à Monsieur Hamdad pour l'aide qui m'a apporté et qui a été un de mes meilleurs enseignants.*

*Je remercie le président ainsi les membres de jury qui ont accepté d'évaluer mon travail.*

*Je remercie toutes les personnes qui ont rendu ce travail possible.*

# *Dédicaces*

*Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...*

*Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude,*

*L'amour, le respect, la reconnaissance...*

*Aussi, c'est tout simplement que*



*Je dédie cette*

*thèse à ...*

*Bien sûr, atteindre ces objectifs n'aurait pas été possible sans l'aide de ma précieuse grand-mère Messaouda pour son soutien et sa patience. Je la remercie pour tous le soutien et l'amour qu'elle me porte depuis mon enfance et j'espère que sa bénédiction m'accompagne toujours.*

*Que ce modeste travail soit l'exaucement de ses vœux tant formulés, le fruit de ses innombrables sacrifices, bien que je ne lui en acquitterai jamais assez.*

*Chaleureuses dédicaces à mes parents aussi. Puisse Dieu, le Très Haut, leur accorde santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne les déçoive.*

*Je ne sais ce que serait ma vie sans eux, les avoir à mes côtés vaut pour moi tous l'or du monde, et toutes les joies de cette vie.*

*A mes chers frères,*

*Qui m'ont assisté dans les moments difficiles et m'ont pris doucement par la main pour traverser ensemble des épreuves pénibles....*

*Spécialement à mon frère Arezki et sa femme Djamila. Je leur suis très reconnaissante, et je ne les remercierai jamais assez pour leur amabilité, leur générosité, leur aide précieuse*

*A khali Youcef et khalti Hadjila, mon affection pour vous est sans limite. C'est d'une part grâce à votre sollicitude et gentillesse que je suis arrivée là où j'en suis. A toute la famille BOUKANTAR qui m'ont toujours souris, ouvert grands leurs bras.*

*A mes amis de toujours: Lolati azizen, Rabiha, Boualem, Lyes, Aziz, Hakima nkhalti, Hanane, Aksel, Mehdi, Kahina, Ali ...*

*A toute la clique des ZEU et toute la promotion Master2 2013 à qui je souhaite bon courage pour la suite.*

*En souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble.*

*Pour mon Yacine, spécialement, qui sans lui ce travail ne serait pas finit dans les délais, sans lui je n'aurais pas tenu bon jusqu'au bout. Sa patience, sa largeur d'esprit quand j'avais des nerfs à vif et son affection tout au long de ces dernières années. A sa famille, à qui j'adresse mes remerciements les plus distingués.*

*Veillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.*

# Sommaire

Remerciement	i.
Dédicaces	ii.
Sommaire	v.
Liste des figures	x.
Liste des tableaux	xii.
Nomenclature	xiii.

## Introduction Générale

### Chapitre I

### Définitions et étude bibliographique

1. Introduction	1
2. La conduction	1
3. Le rayonnement	1
4. La convection	2
4.1. La convection forcée	3
4.2. La convection naturelle	3
4.3. La convection mixte	3
5. Coefficient d'échange convectif	4
6. Fluide incompressible	4
7. Fluide newtonien	4
8. Définition des couches limites	5
9. signification des nombres adimensionnels	6
9.1 Nombre de Prandtl	6
9.2 Nombre de Grashof	6
9.3 Nombre de Rayleigh	7
9.4 Nombre de Reynolds	7
9.5 Nombre de Peclet	8
9.6 Nombre de Richardson	8
9.7 Nombre de Nusselt	8
10. Etude bibliographique	10
10.1 Convection naturelle	10
10.2 Convection forcée	14
10.3 Convection mixte	23
11. Conclusion	28

## Chapitre II

## Modélisation numérique

1. Introduction	29
2. Convection naturelle	30
2.1. Adaptation des équations de bilan aux conditions de la convection gravitaire	31
2.2. Equation de la couche limite laminaire	33
2.2.1. Les équations dimensionnelles	33
3. Modélisation numérique	35
4. Présentation des logiciels GAMBIT et Fluent	35
4.1. Présentation de Gambit	36
4.1.1. Interface GAMBIT	36
4.1.2. La notion et le choix du maillage	37
4.2. Présentation du code FLUENT	37
4.2.1. Interface de FLUENT	38
5. Les différentes étapes de l'approche numérique	39
6. Convection naturelle	40
6.1. Problématique	40
6.2. Création de la géométrie en 2D et de son maillage sous GAMBIT	41
6.3. Les conditions aux limites	43
6.4. Résolution sous FLUENT	44
7. Convection forcée	46
7.1. Problématique	46
7.2. Création de la structure sous Gambit	46
7.3. Résolution sous FLUENT	46
8. Convection mixte	46
9. Conclusion	49

## Chapitre III

## Résultats et interprétations

1. Introduction	50
2. Convection naturelle	50
2.1. Nombre de Nusselt moyen	50
2.2. Coefficient d'échange convectif moyen	51
2.3. Profil de vitesse	52
2.4. Distribution de température	54
3. Convection forcée	55
3.1. Nombre de Nusselt moyen	55
3.2. Profil de vitesse	57
3.3. distribution de la température	59

## Conclusion générale

Références bibliographique

## Annexe

Annexe A	Modélisation mathématique	
Annexe A		60
Annexe B	Les résidus sous Fluent	
Annexe B		89

# *Liste des figures*

Figure I.1 : Graphe représentant le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh	12
Figure I.2 : Graphe représentant le nombre de Nusselt en fonction de l'angle $\theta^\circ$	14
Figure I.3 : Graphe représentant le nombre de Nusselt pour l'air en fonction du nombre de Reynolds	16
Figure I.4 : Graphe représentant le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds	18
Figure I.5 : Graphe représentant le rapport du nombre Nusselt au nombre de Grashof en fonction du rapport du nombre de Grashof au nombre de Reynolds	24
Figure I.6 : Graphe représentant le rapport du nombre de Nusselt en convection mixte au nombre de Nusselt en convection forcée en fonction du nombre de Richardson	26
Figure I.7 : Graphe représentant le rapport du nombre de Nusselt en convection mixte au nombre de Nusselt en convection forcée en fonction du nombre de Richardson	27
Figure II.1 : Vue globale de GAMBIT	36
Figure II.2 : Le type de résolution	38
Figure II.3 : Interface FLUENT	38
Figure II.4 : Cylindre horizontal	40
Figure II.5 : Le domaine de contrôle	41
Figure II.6 : Le maillage de la couche limite	42
Figure II.7 : Maillage et les conditions aux limites	43
Figure II.8 : Cylindre horizontal	46
Figure II.9 : Raffinage du domaine	47
Figure II.10 : Raffinage du domaine	48
Figure III.1 : Variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de	51

Rayleigh obtenue par les approches CFD et analytique (corrélation 1, 2 et 3)	
Figure III.2 : Variations du coefficient d'échange convectif moyen en fonction du nombre de Rayleigh	51
Figure III.3 : Création d'une ligne dans la direction OX en fixant l'ordonnée à une valeur de $y=0$	52
Figure III.4 : Profil de vitesse pour des différentes valeurs du nombre de Grashof suivant l'axe OX pour $x$ variant de 0 à 0.025	53
Figure III.5 : Distribution de la température pour $Ra=1.1.10^5$	54
Figure III.6 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds	55
Figure III.7 : Evolution du nombre Nusselt moyen en fonction de faibles nombre de Reynolds	56
Figure III.8 : Création d'une ligne dans la direction OY en fixant l'abscisse à une valeur de $x=0$	57
Figure III.9 : Profil de vitesse pour des différentes valeurs du nombre de Reynolds et $Ra=1.1.10^6$	58
Figure III.10 : Distribution de la température pour $Ra=1.1.10^6$ et $Ri=0.25 < 0.33$	59
Figure A.1 : Plaque verticale chauffée à une température $T_p$	1
Figure A.2 : Profils des vitesses et des températures adimensionnées obtenues sous Matlab	12
Figure A.3 : Plaque plane placée dans un écoulement uniforme	13
Figure A.4 : schéma descriptif des couches limites thermique et dynamique	14
Figure A.5 : Profil de vitesse adimensionnées sous Matlab	25
Figure B.1 : Choix et affinage pendant les calculs des critères de convergence	89
Figure. B.2 : l'évolution des résidus des équations de continuité, énergie et de quantité de mouvement pour la convection naturelle pour un nombre de $Ra=1.1*10^6$	90
Figure B.3: l'évolution des résidus des équations de continuité, énergie et de quantité de mouvement pour la convection mixte $Ra=1.1*10^6$ $Re=2.4*10^3$ et $Ri=0.25$	90



## *Liste des tableaux*

Tableau I.1 : constantes C et m en fonction de $(Gr_f Pr_f)$	11
Tableau I.2 : constantes C et n en fonction de $Re_{df}$	17
Tableau I. 3 : Valeurs de C, m et de $Re_D$ pour différentes géométries selon HILPERT R	19
Tableau I.4 : Valeurs de C, m et de $Re_D$ pour différentes géométries selon REIHER H	20
Tableau I.5 : les coefficients de la loi de Collis and Williams	23
Tableau II.1 : Nombre de mailles	48
Tableau II.2 : Propriétés de fluide (l'air) à $T=T_f$	49
Tableau A.1 : Les valeurs numériques des fonctions F et $\theta$ ainsi que leurs dérivées	10-11
Tableau A .2 : Les valeurs numériques de la fonction F et ces dérivées	24

# *Nomenclature*

## **Lettres latines**

a	Diffusivité thermique ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
$\varphi$	Densité de flux de chaleur ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ )
T	Température du fluide en un point donnée (K)
M	Puissance surfacique ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ )
$\varepsilon$	Emissivité
$\sigma$	Constante de Stephan Boltzmann ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-4}$ )
$\phi$	Flux de chaleur (W)
T	La température (K)
h	Coefficient d'échange convectif ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ )
S	Surface d'échange ( $\text{m}^2$ )
$T_p$	Température de la paroi (K)
$T_\infty$	Température au loin (K)
$C_p$	Capacité calorifique à pression constante ( $\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )
g	Accélération de la pesanteur ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )
$\Delta T$	Ecart de température entre le fluide et la paroi (K)
$U_\infty$	La vitesse au loin ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )
d	Le diamètre du cylindre
L	La longueur de la plaque (m)
U	Composante de la vitesse dans la direction x ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )
$\bar{h}$	Coefficient d'échange moyen ( $\text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^{-1}$ )
$\vec{V}$	Vecteur vitesse
$V^0$	Vitesse de référence
x,y	Coordonnées cartésiennes
u, v	Composantes de la vitesse suivant x et y ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )

C, m, n	Constantes
$P^*$	La Pression motrice (Pa)
P	Pression statique
$Bo_L$	Nombre de Boussinesq local
$\alpha$	Longueur caractéristique de la couche limite dynamique (m)
$\Phi$	Dissipation visqueuse (J)
$\psi$	Fonction de courant
$\eta$	Variable adimensionnelle
$\lambda$	La conductivité thermique du matériau ( $W\ m^{-2}K^{-1}$ )

## Lettres grecques

$\beta$	Coefficient d'expansion volumique thermique du fluide ( $K^{-1}$ )
$\nu$	Viscosité cinématique $m^2.s^{-1}$
$\mu$	La viscosité dynamique du fluide ( $Kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$\rho$	Masse volumique ( $Kg.m^{-3}$ )
$\rho_0$	Masse volumique au loin ( $Kg.m^{-3}$ )
$\delta$	Couche limite dynamique

## Indices

$f$	Film
-----	------

## Nombre adimensionnels

Nu	Nombre de Nusselt moyen
$\overline{Nu}$	Nombre de Nusselt moyen
Ri	Nombre de Richardson
Pe	Nombre de Peclet
Ra	Nombre de Rayleigh

Gr                    Nombre de Grashof  
Pr                    Nombre de Prandtl

# Introduction générale

---

## Introduction générale

De nos jours, plusieurs processus scientifiques et industriels impliquent les phénomènes de transfert de chaleur et écoulement des fluides, l'étude de ces deux phénomènes autour d'obstacles tel que des cylindres, fait l'objet d'intenses recherches depuis plusieurs décennies. Les phénomènes qui se produisent autour de ces corps ont une importance considérable dans de nombreuses applications technologiques tels que les échangeurs de chaleurs, les systèmes solaire, les réactions nucléaire, les tours de refroidissement à l'air sec. Les écoulements autour des objets sont indispensables dans la conception mécanique et l'étude thermique de nombreux systèmes en engineering comme : avion, automobiles et les composants électroniques.

La structure de l'écoulement dépend énormément de la forme et la taille du corps, des conditions d'entrées et d'écoulement du fluide ainsi que de la géométrie de l'obstacle. Le choix de l'étude des obstacles cylindriques résultent de leurs simplicités géométriques permettant d'avoir des facilités expérimentales et numériques.

Beaucoup de travaux de recherche ont été réalisés pour modéliser l'écoulement autour des obstacles. Pour cela, plusieurs expériences ont été réalisées et comparées aux méthodes numériques par l'utilisation d'outils de simulation des fluides en écoulement et des phénomènes associés.

La simulation numérique tend à prendre de plus en plus d'importance dans le développement des projets scientifiques actuels, elle est moins coûteuse et plus flexible que les expérimentations. En effet, les expériences nécessitent la mise en œuvre de moyens humains et financiers importants, alors que les simulations numériques mettent en œuvre des modèles souvent complexes de phénomènes réels.

Pour notre étude des échanges convectifs autour d'un cylindre horizontal, nous avons opté pour le code FLUENT afin de réaliser les essais de simulation numérique. Pour cela, et dans un souci de justesse, nous avons débuté par une étude théorique, laquelle nous permet d'avoir une bonne approche du comportement du fluide autour de l'obstacle et pouvoir ainsi apposer les conditions adéquates pour une bonne compilation. Pour finir, nous avons comparé les résultats obtenus numériquement à différents résultats empiriques tirés de corrélations établies par d'éminents chercheurs.

## 1. Introduction

Le transfert thermique est un processus complexe par lequel l'énergie est échangée sous forme de chaleur entre des corps ou des milieux à des températures différentes.

Il existe généralement trois modes de transfert de chaleur qui sont la convection, la conduction et le rayonnement.

## 2. La conduction

C'est un phénomène thermique dans lequel l'énergie se transmet par contact direct des molécules, sans déplacement appréciable des atomes ou molécules. Il est généré sous l'influence d'une différence de température où la chaleur s'écoule au sein d'un corps, d'une région à température élevée vers une région à basse température.

La loi fondamentale correspondant à ce processus particulier de diffusion de la chaleur est telle que la densité du flux de chaleur est une fonction linéaire du gradient de température en un point donné:

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (\text{I.1})$$

## 3. Le rayonnement

Le rayonnement thermique est un processus qui ne nécessite pas la présence d'un support matériel, la transmission de chaleur est provoquée par la différence de température entre deux corps séparés dans l'espace par un milieu transparent tel que l'air ou le vide. Ce transfert fait intervenir également un mécanisme physique qui est le rayonnement électromagnétique dont la propagation est quasi-instantanée à l'échelle des distances terrestres. Ce mode de transfert de chaleur est évalué par la loi de Stephan Boltzmann, elle donne la puissance par unité de surface par l'expression suivante :

$$M = \sigma \cdot \varepsilon \cdot T^4 \quad (\text{I.2})$$

où :

$\sigma$  : La constante de Stephan Boltzmann vaut (dans le système international)

#### 4. La convection

La convection est un processus physique de transmission de la chaleur qui s'appuie sur un milieu matériel avec mouvement de matière, c'est donc un phénomène qui n'a lieu que dans les fluides. La convection thermique est donc la conjugaison de deux mécanismes physiques : la diffusion moléculaire (conduction thermique) et l'advection (entraînement par le mouvement du fluide).

La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz, la chaleur se propage, dans ce cas, d'un corps solide chaud vers un fluide froid ou inversement.

Le transfert de chaleur par convection est étroitement lié aux types d'écoulements. L'écoulement est dit turbulent, lorsque le mouvement est désordonné. Il est caractérisé par des fluctuations de vitesses, de pressions et de viscosités.

La turbulence augmente la capacité de transport à l'intérieur du fluide par augmentation des termes de diffusion (diffusion de quantité de mouvement, diffusion de chaleur, etc.) et augmente également la dissipation d'énergie mécanique en énergie thermique.

Le régime est dit laminaire, lorsque l'écoulement est caractérisé par sa grande stabilité ou lorsque le champ de vitesse évolue de façon continue et ordonné.

Dans notre thème, on ne tiendra compte que de ce régime d'écoulement pour toutes nos études.

On distingue selon l'origine de l'écoulement trois types de convection:

#### 4.1. Convection forcée

C'est un phénomène pour lequel le mouvement est dû à l'action des forces extérieures telle une pompe ou un ventilateur. L'écoulement est alors laminaire ou turbulent suivant la valeur du nombre de Reynolds.

#### 4.2. Convection naturelle

Ce mode peut se développer naturellement, le mouvement du fluide est créé par des différences de densité (masse volumique) dues aux différences de température. Il en résulte une convection laminaire ou turbulente, suivant la valeur du nombre de Grashof ou de Rayleigh.

#### 4.3. Convection mixte

C'est la coexistence des deux phénomènes définie précédemment, le mouvement du fluide résulte par des forces internes et par des forces externes.

Quel que soit le type de convection (libre ou forcé) et quel que soit le régime de l'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent), le flux de chaleur transmis est donné par la loi de Newton :

$$\phi = h S (T_p - T_\infty) \quad (I.3)$$

où :

S : Surface d'échange

$(T_p - T_\infty)$  : La différence de température entre le corps et le fluide

(h) : le coefficient d'échange convectif

### 5. Coefficient d'échange convectif

Le coefficient d'échange convectif est un paramètre pertinent lorsqu'il s'agit de modéliser le comportement thermique d'un système physique. Ce coefficient est en réalité une fonction dépendante de manière complexe d'une multitude de variables, comme par exemple :

La nature de l'écoulement, la vitesse du fluide, les températures du fluide et du solide au contact, les paramètres physiques du fluide, la géométrie de l'espace occupé par le fluide ; son calcul peut être effectué en recourant à différentes méthodes :

- Détermination d'une solution analytique ou numérique des équations de conservation (méthode recommandée pour le régime laminaire) ;
- Similitude ou l'analyse dimensionnelle combinée avec des résultats expérimentaux ;
- Formulation d'analogies entre le transfert de quantité de chaleur et le transfert de quantité de mouvement (essentiellement dans le cas du régime turbulent).

## 6. Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible quand son volume reste constant ou inchangé sous l'effet d'une pression externe, l'incompressibilité se traduit alors par une masse volumique constante :  $\rho = \rho_0 = cst$

Dans certain cas, l'écoulement d'un gaz peut s'étudier comme celui d'un fluide incompressible à condition que le nombre de Mach soit faible c'est à dire la vitesse du fluide est faible devant la célérité du son. Pour l'air sec, la vitesse du son vaut 340m/s à T=288K.

## 7. Fluide newtonien

Le fluide newtonien est un fluide dont la viscosité est constante quelle que soit l'intensité du cisaillement qui lui est appliqué

Un fluide est dit newtonien si il obéi a loi de newton, sa relation s'écrit sous la forme:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$\tau$ : est la contrainte de cisaillement exercée par le fluide

$\mu$ : est la viscosité du fluide.

$\frac{\partial u}{\partial y}$  : est le gradient de vitesse perpendiculaire à la direction du cisaillement.

## 8. Définition des couches limites dynamique et thermique

Lorsqu'un fluide se déplace autour d'un obstacle, les champs de vitesse et de pression sont perturbés par ce dernier. La couche limite est la zone de fluide avoisinante à la paroi, dans laquelle se produit l'accommodation entre la vitesse nulle en paroi et la pleine vitesse locale du fluide libre. De nombreuses propriétés (frottement, transferts thermiques et présence éventuelle de décollements) dépendent de cette couche limite.

La couche limite dynamique est due au phénomène de diffusion de quantité de mouvement par frottement visqueux : les champs de vitesse du fluide est perturbé par la proximité de la paroi, au voisinage immédiat dans laquelle la vitesse s'annulent tandis qu'au loin l'écoulement n'est pas perturbé.

La couche limite thermique est due au phénomène de diffusion de l'enthalpie. Le champ de température du fluide est perturbé par la présence de la paroi, qui impose des conditions thermique extrêmes diverses à l'interface paroi-fluide (flux ou température constante, etc.).

On a la couche limite thermique, qui est la zone de fluide, comprise entre la paroi et le lieu des points dont l'écart de température avec la paroi  $T - T_p$ , compté sur la normal à la paroi, est 0.99 fois l'écart de température  $T_\infty - T_p$ , entre la partie du fluide non perturbée et la paroi.

On a  $\delta$ , l'épaisseur de la couche limite mécanique et  $\delta_T$  l'épaisseur de la couche limite thermique.

## 9. Signification des nombres adimensionnels

### 9.1. Nombre de Prandtl

Le nombre de Prandtl est le nombre adimensionnel qui caractérise l'importance relative de deux mécanismes qui pilotent la convection du fluide qui sont : la diffusion de quantité de mouvement (viscosité cinématique  $\nu$ ) et la diffusion de chaleur (thermique)

$$Pr = \frac{\text{la diffusivité de la matière}}{\text{la diffusivité thermique}} = \frac{\mu/\rho}{\lambda/\rho c_p} = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (1.4)$$

Le nombre de Prandtl ne dépend donc que des propriétés physique du fluide, plus ce nombre est grand plus le mouvement du fluide est piloté par le processus thermique.

Les gaz et les liquides usuels (l'eau, huiles légères.....) pour lesquels l'ordre de grandeur du nombre de Prandtl est proche de l'unité.

### 9.2. Nombre de Grashof

Le nombre de Grashof est un nombre sans dimension qui caractérise le rapport des forces de flottabilité de convection naturelle aux forces visqueuses.

$$Gr = \frac{\text{forces de flottabilité}}{\text{forces visqueuses}} = \frac{g \beta \Delta T \rho^2 d^3}{\mu^2} \quad (1.5)$$

Ce nombre indique le régime d'écoulement laminaire ou turbulent en convection naturelle, Il a un rôle similaire en nombre de Reynolds en convection forcée.

La valeur critique de nombre de Grashof est de  $10^8$

Si  $Gr < Gr_c$  le régime est dit laminaire;

$Gr > Gr_c$  Le régime est dit turbulent

### 9.3. Nombre de Rayleigh

Le nombre de Rayleigh est obtenu en combinant les deux nombres adimensionnel précédents Gr et Pr et est souvent plus pertinent que le nombre de Grashof pour caractériser la convection naturelle

Ce nombre caractérise l'importance de la convection naturelle.

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g \beta \Delta T d^3}{\nu \alpha} \quad (1.6)$$

Le nombre de Rayleigh détermine le passage de la convection naturelle laminaire à la convection naturelle turbulente

En fonction de la valeur du nombre de Rayleigh, le transfert de chaleur a les caractéristiques suivantes :

$Ra < 10^3$  : Convection négligeable ; le transfert a lieu essentiellement par conduction.

$10^3 < Ra < 10^9$  : Le transfert a lieu en régime de convection libre laminaire.

$Ra > 10^9$  : Le transfert a lieu en régime de convection libre turbulente.

Cette caractérisation s'est avérée insuffisante et de récents travaux ont montré que ce nombre de Rayleigh ne suffisait plus à lui seul pour caractériser le type d'écoulement.

### 9.4. Nombre de Reynolds

C'est le rapport entre les forces d'inerties et les forces visqueuses.

$$Re = \frac{\text{forces d'inerties}}{\text{forces de viscosités}} = \frac{U_{\infty} d}{\nu} \quad (1.7)$$

Ce nombre est basé dans notre cas sur le diamètre extérieur du cylindre

Reynolds permet de déterminer le régime d'écoulement, laminaire, transitoire ou turbulent.

Pour des valeurs de  $Re$  inférieures à une valeur critique, l'écoulement est toujours laminaire.

Dans notre cas la valeur critique de Reynolds est de  $10^5$ .

### 9.5. Nombre de Peclet

Groupement sans dimension, c'est le rapport du transfert par convection sur le transfert par conduction. Il est particulier, pour les transferts convectifs en milieu fluide, il joue le même rôle de paramètre dans l'équation d'énergie que le nombre de Reynolds dans l'équation de Navier-Stokes.

$$Pe = Re Pr = \frac{\rho U d}{\mu} \cdot \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad (1.8)$$

### 9.6. Nombre de Richardson

C'est un nombre adimensionnel qui détermine la prédominance d'un des modes convectifs vis à vis de l'autre. Le nombre de Richardson mesure l'importance relative des forces de poussée d'Archimède ( $g \beta \Delta T$ ) aux forces d'inertie relatives à la convection forcée.

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad (1.9)$$

Si  $Ri \gg 1$  : La convection naturelle domine, l'écart entre la température de l'élément chauffant et le milieu ambiant détermine l'écoulement.

Si  $Ri \ll 1$  : La convection forcée domine, les écoulements extérieurs fixent la dynamique et donc l'échange de chaleur entre le fluide et la paroi.

Si  $Ri \approx 1$  : La convection est dite mixte, les deux modes de convection coexistent et influent sur l'écoulement.

### 9.7. Nombre de Nusselt

Est un nombre sans dimension qui intervient dans la caractérisation énergétique des transferts entre une surface solide et un fluide monophasique ou polyphasique en mouvement.

Nu est caractérisé par le rapport de la quantité de chaleur échangée par convection à une quantité de chaleur échangée par conduction

$$\text{Nu} = \frac{\text{flux spécifique effectif échangé}}{\text{flux surfacique conductif pur}}$$

$$\text{Nu}_D = \frac{-\lambda \left( \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right)_{x=0}}{\lambda \frac{(T_p - T_\infty)}{D}} = \frac{-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} d}{\lambda (T_p - T_\infty)} = \frac{h d}{\lambda} \quad (\text{I.10})$$

$$\text{Avec : } h = \frac{-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}}{(T_p - T_\infty)}$$

Pour obtenir le coefficient moyen d'échange  $\bar{h}$ , il suffit d'intégrer le coefficient local ( $h$ ), comme le montre l'intégrale ci-après :

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int h \, ds \quad (\text{I.11})$$

Le nombre de Nusselt moyen sera donc égale à:

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{\bar{h} d}{\lambda}$$

## 10. Etude bibliographique

Quel que soit le régime d'écoulement, laminaire ou turbulent, il existe au voisinage de la paroi une zone d'écoulement laminaire appelée sous couche limite. Ce film se crée du fait que les particules en contact avec la paroi s'y accrochent du fait de la rugosité et ont donc une vitesse nulle.

Ce film constitue la principale résistance thermique au transfert de chaleur entre la paroi et le fluide en mouvement. C'est pourquoi on parle souvent de coefficient de film pour désigner le coefficient de transfert convectif à la paroi. Lorsque la turbulence de l'écoulement augmente, l'épaisseur du film laminaire diminue, sa résistance thermique baisse alors. Le flux de chaleur, pour un écart de température donné, est donc plus important quand le régime d'écoulement est turbulent. Dans la pratique, on détermine la valeur de  $h$  à partir d'expériences. Les résultats de ces expériences sont traduits en termes de lois de corrélations faisant intervenir des grandeurs adimensionnelles.

### 10.1. Convection naturelle

**Morgan V.T [1]** a représenté sous la forme fonctionnelle suivante les coefficients moyens de transfert de chaleur par convection naturelle autour de cylindres horizontaux. Les propriétés des groupements adimensionnelles sont évaluées à la température du film comme indiqué par l'indice « $f$ » et pour des températures  $T_p - T_\infty$  variant de quelques degrés à  $1500^\circ\text{C}$ . L'étude a été menée sur des cylindres dont le diamètre varie entre  $30\mu\text{m} \leq d \leq 10\text{cm}$ . Le nombre de Prandtl est compris entre  $0.5 \leq Pr \leq 10^3$ .

$$\overline{Nu}_f = C (Gr_f Pr_f)^m \quad (\text{I.12})$$

**Mc Adams [2]** et **Morgan V.T [1]** ont présenté une table reliant  $(Gr_f Pr_f)$  en fonction des constantes  $C$  et  $m$  à utiliser dans l'équation (I.12) pour la convection naturelle autour d'un cylindre horizontal isotherme. A noter que les prévisions de Morgan [1] sont les plus fiables pour  $Gr_f Pr_f$  avoisinant  $10^{-5}$

$Gr_f Pr_f$	C	m	Références
$0 - 10^{-5}$	0.4	0	[2]
$10^{-5} - 10^4$	Utiliser Figure I.1	Utiliser Figure I.1	[2]
$10^4 - 10^9$	0.53	1/4	[2]
$10^9 - 10^{12}$	0.13	1/3	[2]
$10^{-10} - 10^{-2}$	0.675	0.058	[1]
$10^{-2} - 10^2$	1.02	0.148	[1]
$10^2 - 10^4$	0.850	0.188	[1]
$10^4 - 10^7$	0.480	1/4	[1]
$10^7 - 10^{12}$	0.125	1/3	[1]

**Tableau (I.1) : Constantes C et m en fonction de  $(Gr_f Pr_f)$**

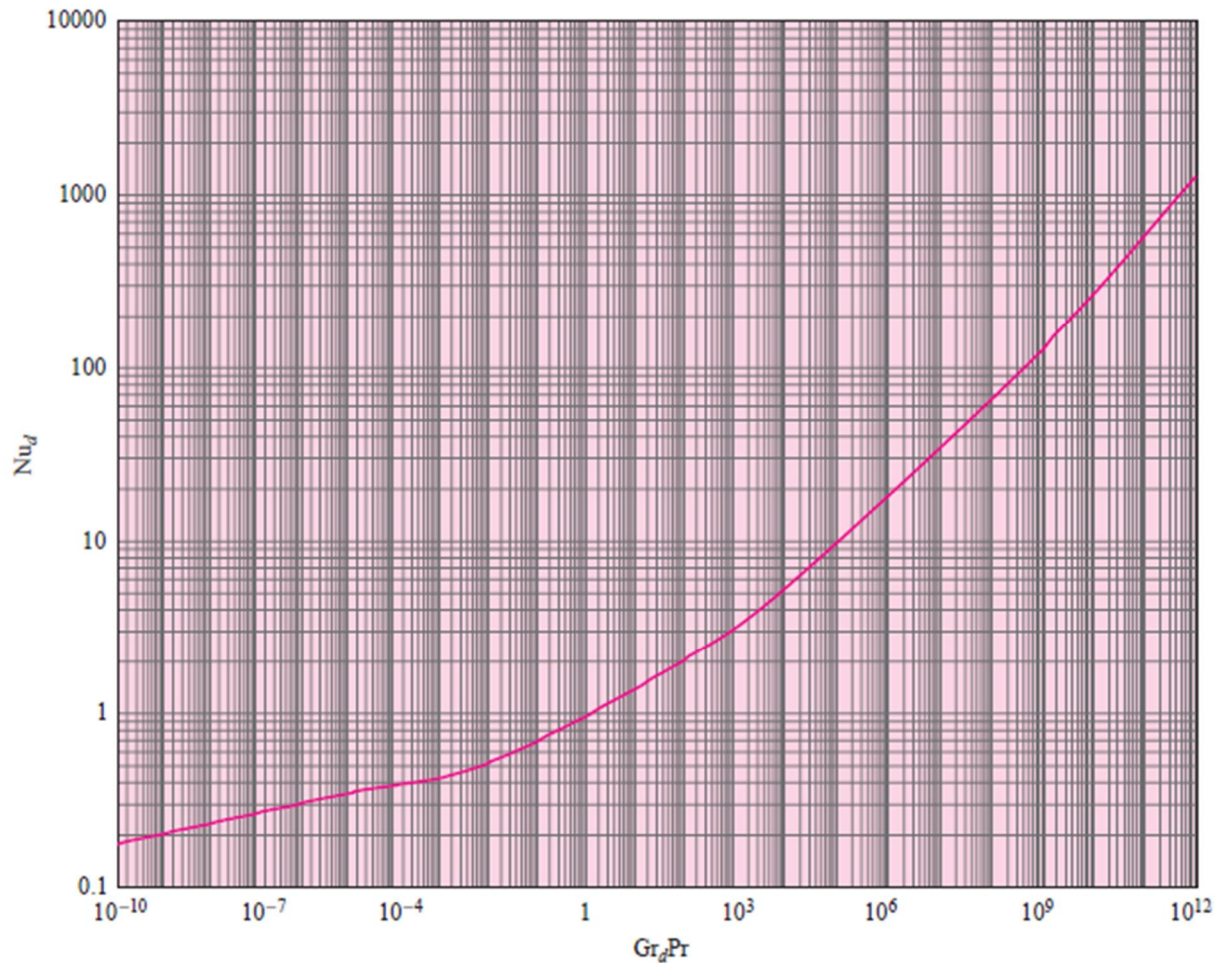
**Morgan V.T [1]** a dans le cas d'un flux surfacique constant  $\varphi_p = \text{cte}$ , remplacé  $(Gr_f Pr_f) = Ra_f$  par :

$$Ra_D^* = \frac{g \beta \varphi_p d^4}{\lambda a v} \quad (\text{I.13})$$

$$\overline{Nu}_D = C \left( \frac{g \beta \varphi_p d^4}{\lambda a v} \right)^m \quad (\text{I.14})$$

Avec : a : Diffusivité thermique

**Morgan V.T [1]** a présenté un graphique fusionné des corrélations pour le transfert de chaleur en convection naturelle autour d'un cylindre horizontal isotherme sous la forme de figures I-1. Ces chiffres peuvent être utilisés en lieu et place des formules lorsqu'une estimation rapide de la performance est désirée.



**Figure I.1 : Graphe représentant le nombre de Nusselt en fonction du nombre du nombre de Rayleigh**

**Churchill and Chu [3]** présentent des corrélations plus compliquées pour les cas du transfert de chaleur par convection naturelle autour d'un cylindre horizontal isotherme. Ces dernières peuvent être utilisées sur une gamme plus large de  $Gr Pr$  évaluées à la température du film :

Pour  $Gr Pr$  compris entre:  $10^{-5} < Gr_f Pr_f < 10^{12}$ , on a :

$$\overline{Nu}^{1/2} = 0.60 + 0.387 \left[ \frac{Gr_f Pr_f}{[1 + (0.559/Pr_f)^{9/16}]^{16/9}} \right]^{1/6} \quad (I.15)$$

Ils ont aussi formulé une équation plus simple mais restreinte à une plage d'écoulements laminaire de l'ordre de  $10^{-6} < Gr_f Pr_f < 10^9$  :

$$Nu_d = 0.36 + \frac{0.518(Gr_f Pr)^{1/4}}{[1+(0.559/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \quad (\text{I.16})$$

**Hyman, S. C [6]** a proposé une corrélation pour le transfert de chaleur lors d'écoulements de métaux liquides autour d'un cylindre horizontal

$$Nu_d = 0.53(Gr_d Pr^2)^{1/4} \quad (\text{I.17})$$

**Clemes et al. [7]** s'est basé pour l'étude du transfert de chaleur par convection naturelle autour d'un long cylindre circulaire horizontal, basé sur des données et équations réalisées par **Churchill and Usagi, 1972 [4]**, et dont les propriétés du fluide sont généralement évaluées à la température du film  $T_f$  à l'exception de  $\beta$ , coefficient de température de l'expansion du volume, laquelle est évaluée à  $T_\infty$  pour les milieux gazeux.

$$Nu = \frac{\bar{h}_c d}{\lambda} = \frac{qd}{A_s \Delta T \lambda} \quad (\text{I.18})$$

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T d^3}{\nu \alpha} \quad (\text{I.19})$$

$$\bar{C}_l = \frac{0.671}{[1+(0.492/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \quad (\text{I.20})$$

**Clemes et al [7]** a pu développer grâce aux équations précédente deux expressions  $Nu_l$  et  $Nu^T$  pour le cas de la convection naturelle, où :  $Nu_l$  est donné en fonction de  $Nu^T$  le nombre de Nusselt qui serait valable si la couche limite thermique étaient minces. La différence entre  $Nu_l$  et  $Nu^T$  représente l'effet de la grande épaisseur de couche limite rencontrée en convection naturelle. Pour  $Ra > 10^{-2}$  on a  $f=0.8$ . Pour  $10^{-10} < Ra < 10^{-2}$

on utilise :

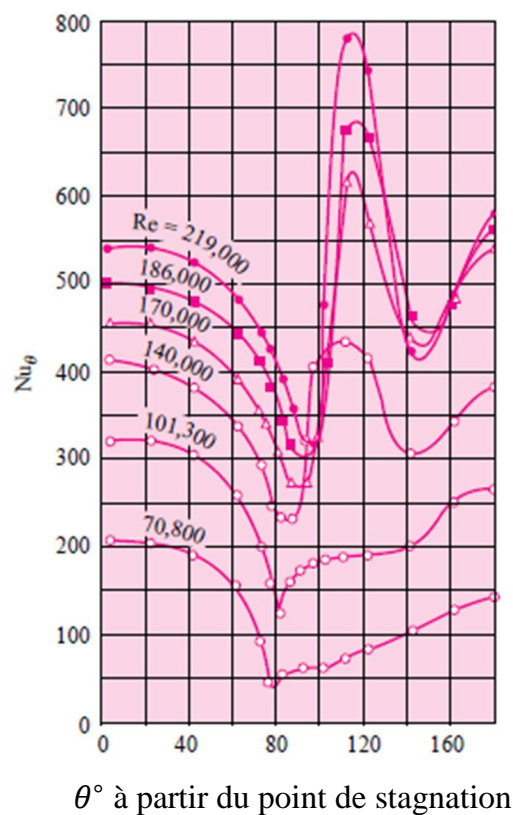
$$f = 1 - \frac{0.13}{(Nu^T)^{0.16}}$$

$$Nu^T = 0.772 \bar{C}_l Ra^{1/4} \quad (I.21)$$

$$Nu_l = \frac{2f}{\left(1 + \frac{2f}{Nu^T}\right)} \quad (I.22)$$

## 10.2. Convection forcée

**Giedt, W. H. [8]** a dans son livre étudié le comportement détaillé du transfert de chaleur entre un cylindre chauffé d'axe perpendiculaire à l'écoulement et de l'air, en étudiant les variations du nombre de Nusselt en fonction de l'angle de décollement de la couche limite par rapport au bord d'attaque (premier point d'impact du fluide avec le cylindre). Pour cela, il a fait plusieurs essais en variant à chaque fois le nombre de Reynolds. Il a aussi pris en considération le comportement du fluide en contact du cylindre, et a ainsi concentré son étude sur la couche limite qui se forme autour du cylindre. Cette dernière a plusieurs caractéristiques, comme l'angle de décollement, le point de transition entre le régime laminaire et le régime turbulent dans cette même couche, suivant lesquels il a pu tracer le graphe ci-après.



**Figure I.2 :** Graphe représentant le nombre de Nusselt en fonction de l'angle  $\theta$

Les conclusions tirées du graphe sont les suivantes :

Pour les nombres de Reynolds assez petits (70.800 et 101.300) on remarque des valeurs minimums du nombre de Nusselt et donc du coefficient de transfert de chaleur au niveau du point de décollement de la couche limite qui se situe à peu près à  $80^\circ$  du bord de fuite.

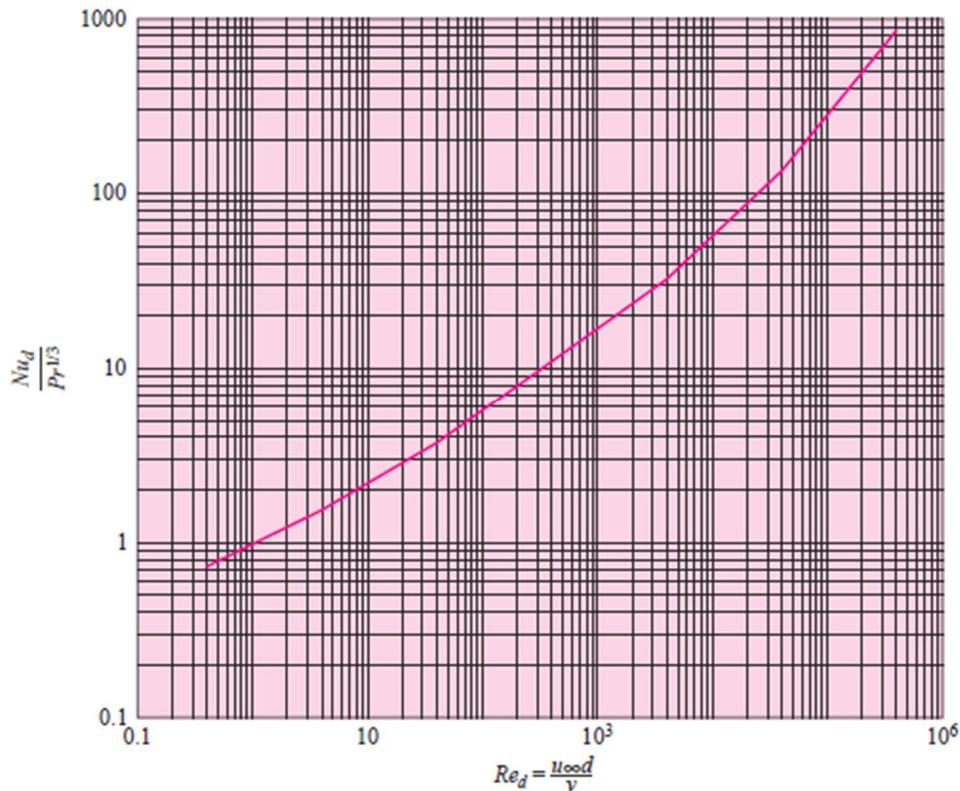
Pour les grands nombres de Reynolds, on remarque aussi deux points minimums du coefficient d'échange convectif. Le premier a lieu au niveau du point de transition du régime laminaire au régime turbulent à l'intérieur de la couche limite. Le second a lieu au niveau du point de décollement de la couche limite qui pour des nombre de Reynolds assez élevés se situe à environ  $130^\circ$  ;  $140^\circ$ .

Il existe une augmentation subséquente du coefficient de transfert de chaleur sur le côté arrière du cylindre, résultant du mouvement tourbillonnaire turbulent dans le flux séparé (après le décollement de la couche limite).

Enfin, on remarque qu'il y a augmentation rapide du transfert de chaleur lorsque la couche limite devient turbulente ainsi que lors de l'augmentation du mouvement tourbillonnaire après le décollement de la couche limite.

A cause de la nature compliquée du processus de décollement de l'écoulement, il est impossible de trouver une solution analytique au coefficient de transfert de chaleur moyen pour les écoulements autour d'obstacles.

Cependant, **McAdams [2]** a été en mesure de rassembler les données d'un certain nombre de chercheurs, concernant le chauffage et le refroidissement de l'air autour d'un cylindre, dans des corrélations qu'il a représenté dans la Figure I-3 suivante :



**Figure I.3 : Graphe représentant le nombre de Nusselt pour l'air en fonction du nombre de Reynolds**

La corrélation qui résulte de l'étude du graphe pour la définition du coefficient de transfert de chaleur moyen, pour un écoulement transversal autour d'un cylindre circulaire et dont la température prise en compte est celle du film, comme indiqué par le facteur f, est:

$$Nu_{df} = \frac{h d}{k_f} = C \left( \frac{u_{\infty} d}{\nu_f} \right)^m Pr_f^{1/3} \quad (\text{I.23})$$

Des facteurs d'erreurs de l'ordre de  $\pm 20\%$  peuvent être observés pour ce graphe. L'auteur n'a pas inclus le nombre de Prandlt dans la courbe de corrélation originale, car il est essentiellement constant à environ 0.72 pour toutes les données.

Sauf que ce terme ne peut être omis pour les liquides, c'est pourquoi, **Knudsen et Katz [9]** ont suggéré que la corrélation soit étendue aux liquides par l'inclusion de  $Pr^{1/3}$  et en divisant par  $(0.72)^{1/3}$  ou en multipliant par 1.11.

S'appuyant sur les données de la *Figure I.3* et les remarques prises concernant le nombre de Prandlt, **Hilpert, R. [10]** et **Knudsen et Katz [9]** ont procédé à l'élaboration

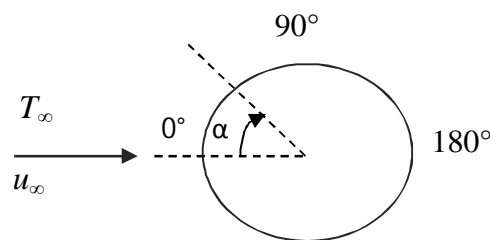
d'un tableau dont les calculs originaux sont uniquement basés sur les données de l'air, afin d'être utilisés dans la corrélation (I.23).

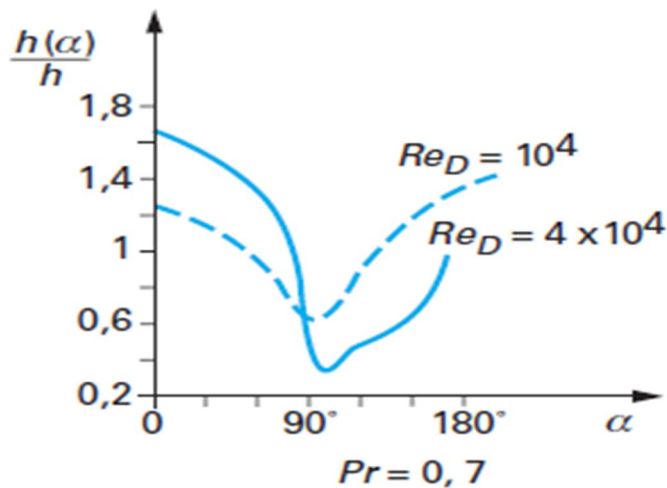
$Re_{df}$	m	C
0.4 à 4	0.330	0.989
4 à 40	0.385	0.911
40 à 4000	0.466	0.683
4000-40000	0.618	0.193

**Tableau (I.2) : Constantes m et C en fonction de ( $Re_{df}$ )**

**Martinelli R.C et al. [11]** ont étudié le cas d'un écoulement perpendiculaire à l'axe d'un cylindre horizontal. Il a pour un degré de turbulence  $< 1\%$ , pris les propriétés physiques du fluide à la température du film  $T_f = (T_p + T_\infty)/2$ .

La corrélation qui résulte de cette étude est suivant l'angle  $\alpha$ , qui est l'angle de décollement de la couche limite par rapport au point de stagnation (bord d'attaque du fluide).





**Figure I.4 :** *Graph representing the ratio of the local convective coefficient (according to the angle  $\alpha$ ) on average convective coefficient as a function of the angle  $\alpha$*

On a les résultats suivant  $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 80^\circ$ ,

$$Nu_d = \frac{\bar{h} \cdot d}{\lambda} = 1.05 \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{90} \right)^3 \right] Re_d^{1/2} Pr^{1/3} \quad (I.24)$$

**VILEMPOC V., POLE R., SUKANEK P.C. [12]** Ont étudié le cas de l'écoulement d'un liquide newtonien autour d'un cylindre circulaire isotherme où l'axe du cylindre est perpendiculaire à l'écoulement.

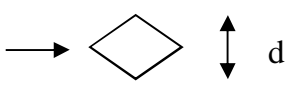
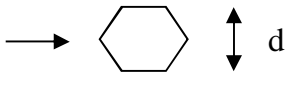
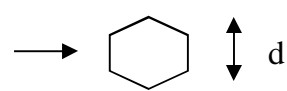
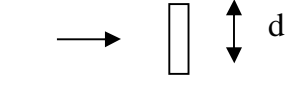
Pour cela, ils ont pris une température de la paroi constante  $T_p = \text{cte}$ , et  $T_p - T_\infty \approx 0.1^\circ\text{C}$ . Le nombre de Reynolds est compris entre  $0.002 \leq Re_d \leq 64$ , et le rapport du nombre de Grashof sur le nombre de Reynolds est  $\frac{Gr}{Re^2} \leq 0.5$ . Pour ce qui est du nombre de Prandtl il est compris entre  $5.5 \leq Pr \leq 27000$ .

$$Nu_d = 1.34 Pr^{0.31} Re_d^{0.32} \quad (I.25)$$

**Obstacle de section diverse :** Pour le cas de cylindres avec différentes sections, deux chercheurs, en l'occurrence **HILPERT R. [13]** et **REIHER H. [14]** ont mené des expériences sur différentes formes de cylindre isotherme  $T_p = \text{cte}$  dans le but de déterminer le nombre de Nusselt suivant la relation suivante :

$$Nu_d = \frac{\bar{h}d}{\lambda} = C Re_d^m Pr^{0.35} \quad (I.26)$$

a) Résultats de HILPERT R. tirés de -VDI- Forschungsheft N° 355 (1932) :

Géométrie	$Re_d$	C	M
	$5 \cdot 10^3$ à $10^5$	0.25	0.588
	$5 \cdot 10^3$ à $10^5$	0.156	0.638
	$5 \cdot 10^3$ à $1.95 \cdot 10^4$	0.162	0.638
	$195 \cdot 10^4$ à $10^5$	0.0395	0.782
	$3 \cdot 10^3$ à $2 \cdot 10^4$	0.264	0.66

**Tableau I.3 :** Constantes C et m en fonction de la géométrie du cylindre et de  $Re_d$

b) Résultats de REIHER H. tirés de – Forschungsarb. a.d. Geb. d. Ingenieurives N°269 (1925) :

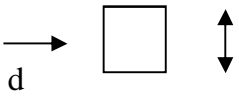

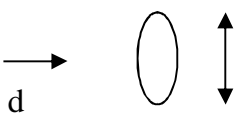
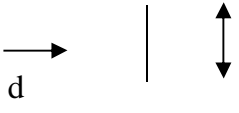

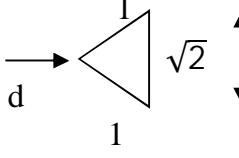
Géométrie	$Re_d$	C	M
	$2.5 \cdot 10^3$ à $8 \cdot 10^3$	0.180	0.699
	$5 \cdot 10^3$ à $10^5$	0.104	0.675
	$2.5 \cdot 10^3$ à $1.5 \cdot 10^4$	0.25	0.612
	$3 \cdot 10^3$ à $1.5 \cdot 10^4$	0.096	0.804
	$4 \cdot 10^3$ à $1.5 \cdot 10^4$	0.232	0.731
	$3 \cdot 10^3$ à $2 \cdot 10^4$	0.246	0.61

Tableau I.4 : Constantes C et m en fonction de la géométrie du cylindre et de  $Re_d$

**FAND [15]** a quant à lui démontré que pour un écoulement de liquides autour d'un cylindre dont le nombre de Reynolds varierait entre  $10^{-1} < Re_f < 10^5$ , les propriétés du fluide sont prises à la température du film. Le coefficient de transfert de chaleur serait mieux représenté par la corrélation suivante:

$$Nu_f = (0.35 + 0.56Re_f^{0.52})Pr_f^{0.3} \quad (I.27)$$

**Eckert et Drake [16]** recommandent d'utiliser les corrélations présentées ci-après, se basant sur l'étude étendue faite par **Zukauskas [17]**. Ils ont pour cela étudié le transfert de chaleur autour de tubes. Les propriétés du fluide sont prises comme suit : Pour les gaz, le rapport du nombre de Prandtl peut être négligé (supprimé), et les propriétés du fluide sont prises à la température du film. Pour les liquides, le rapport est retenu et les propriétés du fluide sont prises à la température au loin  $T_\infty$ .

$$Nu = (0.43 + 0.50Re^{0.5})Pr^{0.38} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0.25} \quad 1 < Re < 10^3 \quad (I.28)$$

$$Nu = 0.25Re^{0.6}Pr^{0.38} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0.25} \quad 10^3 < Re < 2 \times 10^5 \quad (I.29)$$

**J.P.Holman[24]** a dans son livre Heat Transfer, précisé que les résultats des équations (I.28) et (I.29) sont en accord avec ceux trouvés dans l'équation (I.23) pour une erreur d'ordre de 5 à 10% près.

**Churchill and Bernstein (1977) [5]** dans leur livre ont procédé à l'élaboration d'équations pour la convection forcée autour de cylindres circulaires. Dans notre cas, la convection forcée se fait autour d'un cylindre circulaire horizontal. Pour réaliser ces équations, ils ont utilisé plusieurs fluides en écoulement et les données de transfert de chaleur utilisées sont celles de l'eau, air et du sodium liquide. Ainsi, pour les propriétés suivantes :  $Re Pr > 0.2$  et des propriétés évaluées à  $T_f = (T_p + T_\infty)/2$ , on a :

$$Nu_d = 0.3 + \frac{0.62Re_d^{1/2}Pr^{1/3}}{[1+(0.4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \left[ 1 + \left( \frac{Re_d}{282000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} \quad Re_d > 400000 \quad (I.30)$$

$$Nu_d = 0.3 + \frac{0.62Re_d^{1/2}Pr^{1/3}}{[1+(0.4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \left[ 1 + \left( \frac{Re_d}{282000} \right)^{1/2} \right] \quad 10000 < Re_d < 400000 \quad (I.31)$$

$$Nu_d = 0.3 + \frac{0.62Re_d^{1/2}Pr^{1/3}}{[1+(0.4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \quad Re_d < 10000 \quad (I.32)$$

**Whitaker [18]** a étudié le transfert de chaleur en convection forcée autour d'un cylindre. Pour cela, il a pris toutes les propriétés du fluide à la température au loin  $T_\infty$ , sauf  $\mu_p$  qui est à la température de la paroi du cylindre. Son étude s'est basée sur un écoulement dont le nombre de Reynolds est compris entre  $40 < Re < 10^5$ , et un nombre de Prandtl  $0.65 < Pr < 300$ , le rapport de la viscosité dynamique du fluide au loin sur la viscosité dynamique du fluide à la paroi est compris entre  $0.25 < \mu_\infty/\mu_p < 5,2$

$$Nu = \frac{\bar{h}.d}{k} = (0.4Re^{0.5} + 0.06Re^{2/3})Pr^{0.4} \left( \frac{\mu_\infty}{\mu_p} \right)^{0.25} \quad (I.33)$$

**Nakai and Okazaki [19]** a pour la même étude utilisé les propriétés du fluide à la température du film et pour un nombre de Peclet  $Pe_d = 0.2$ , a pu formuler la corrélation suivante :

$$Nu_d = [0.8237 - \ln(Pe_d^{1/2})]^{-1} \quad (I.34)$$

**Collis and Williams [20]** quant à eux, ont étudié le transfert de chaleur par convection forcée, cas d'un écoulement d'air à de faibles nombre de Reynolds autour d'un cylindre circulaire. Les propriétés physiques du fluide sont évaluées à la température du film. Il en résulte la corrélation suivante :

$$\overline{Nu} = (A + BRe^n)(T_\infty/T_f)^a \quad (I.35)$$

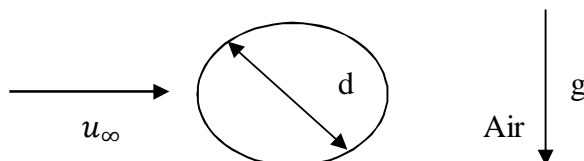
Les coefficients de la loi de Collis and Williams sont regroupés dans le tableau suivant :

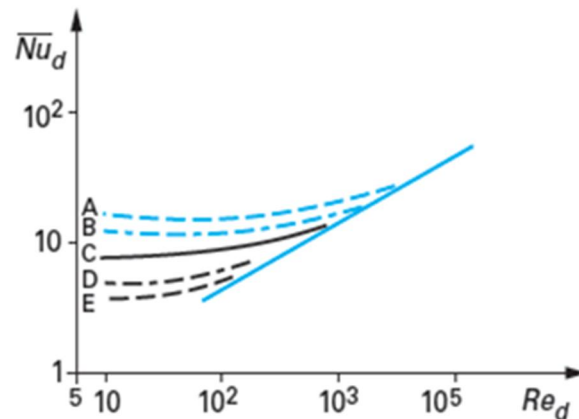
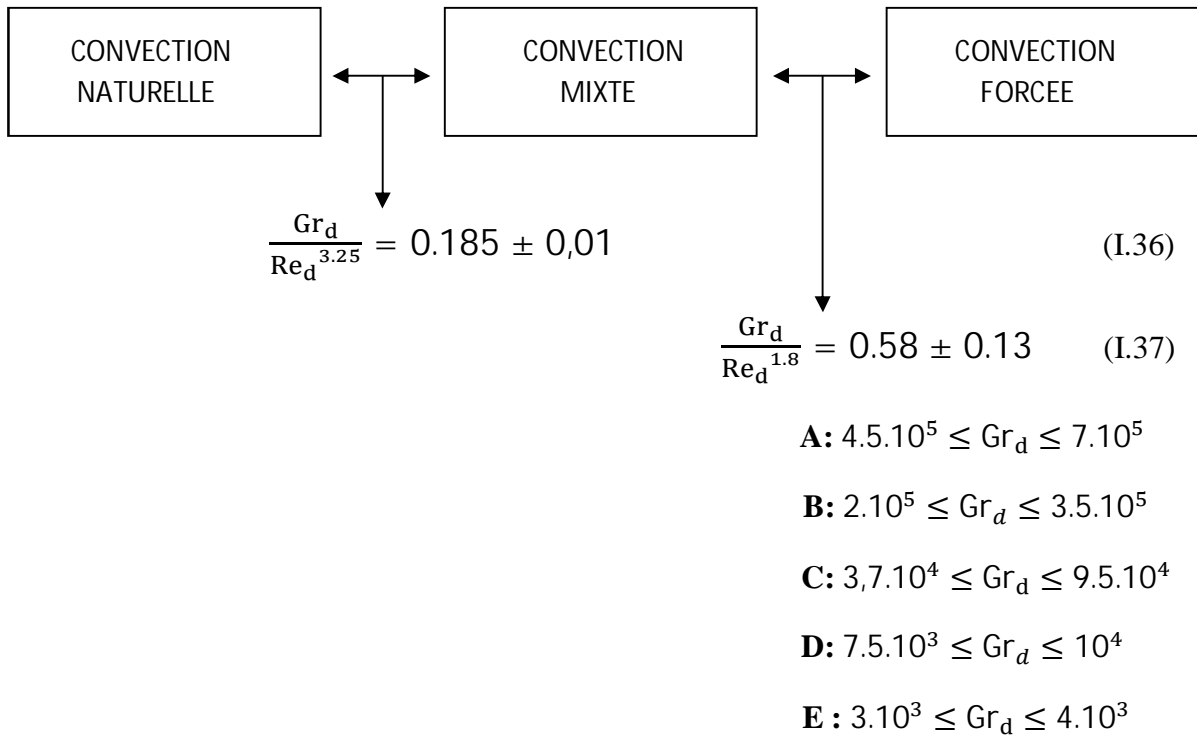
Constante	$0.02 < Re < 44$	$44 < Re < 140$
n	0.45	0.51
A	0.24	0
B	0.56	0.48
a	-0.17	-0.17

*Tableau I.5 : Coefficients de la loi de Collis and Williams en fonction de (Re)*

### 10.3. Convection Mixte

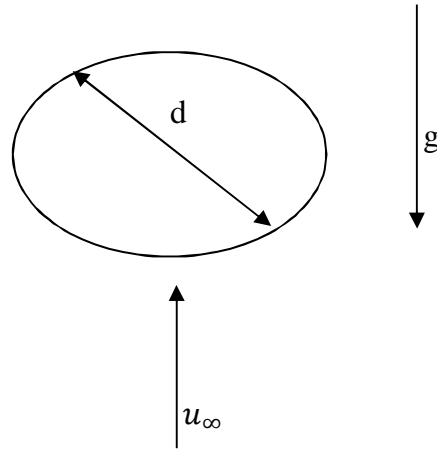
**SHARMA G.K. et SUKHATME S.P [21]** ont, pour l'étude de la convection mixte autour d'un cylindre horizontal, étudié le cas d'un écoulement perpendiculaire à l'axe de ce cylindre et dont l'angle d'incidence serait nul. Les résultats sont représentés sur la Figure I.4 :





*Figure I.5 : Graphe représentant le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds*

**OOTHUISEN P.H. et MADAN S. [22]** ont, quant à eux, étudié un écoulement d’air vertical pour le cas du transfert de chaleur en convection mixte autour de cylindres horizontaux dont le diamètre serait compris entre  $19mm \leq d \leq 38mm$ . Ils ont pu représenter les résultats de leurs expériences sur la Figure I-5.

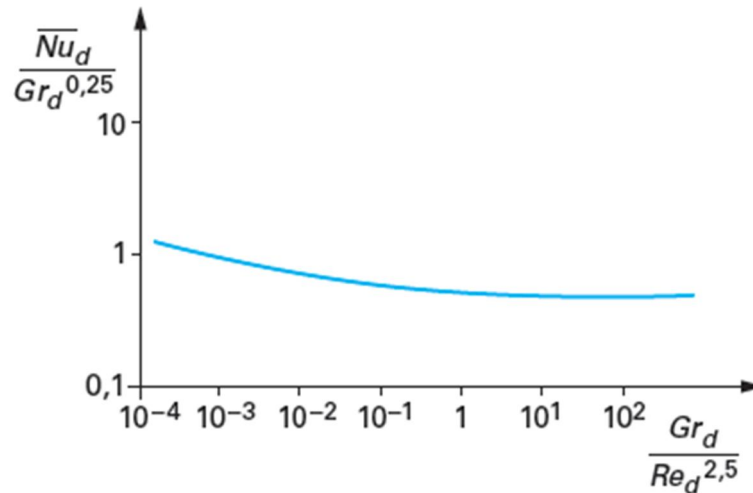


Pour les propriétés suivantes : Nombre de Reynolds compris entre  $10^2 \leq Re_d \leq 3.10^3$  et un nombre de Grashof compris entre  $2.5.10^4 \leq Gr_d \leq 3.10^5$ . Ils ont supposé que pour  $Ri_d < 28$  on aura le nombre de Nusselt en convection mixte est presque égale au nombre de Nusselt en convection forcée  $Nu_d \approx Nu_{d.CF}$ .

$$Ri_d = \frac{Gr_d}{Re_d^2} \quad (I.38)$$

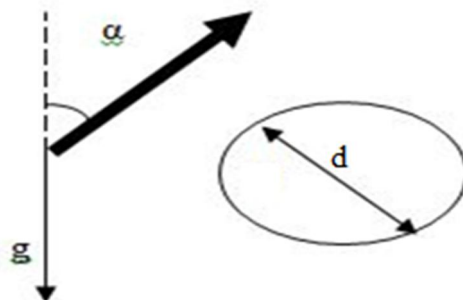
$$\frac{Nu_d}{Nu_{d.CF}} = 1 + 0.18Ri_d - 0.011Ri_d^2 \quad (I.39)$$

$$Nu_{d.CF} = 0.464Re_d^{1/2} + 4.10^{-4}Re_d \quad (I.40)$$



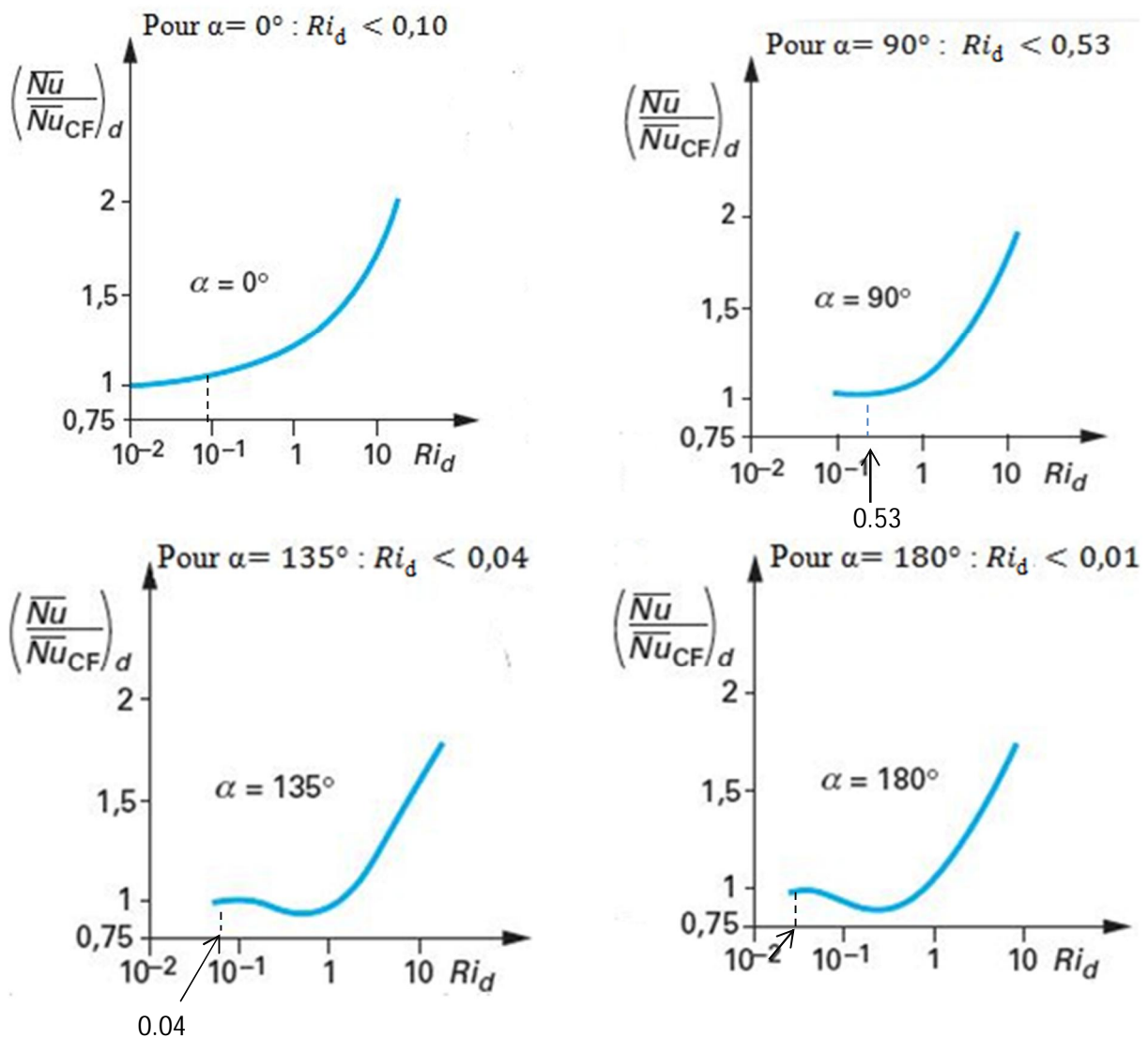
**Figure I.6 :** *Graphique représentant le rapport du nombre de Nusselt au nombre de Grashof en fonction du rapport du nombre de Grashof au nombre de Reynolds.*

**OOTHUISEN P.H. ET MADAN S. [23]** ont, quant à eux, pris pour l'étude du transfert de chaleur par convection un écoulement d'air faisant un angle  $\alpha$  avec la verticale dans leur publication pour l'étude du transfert de chaleur en convection mixte. Pour cela, ils ont pris des cylindres de diamètres  $19\text{mm} \leq d \leq 38\text{mm}$  et supposé que  $Nu_d \approx Nu_{d,CF}$  à 5% près.



Ils ont donc pu réaliser plusieurs graphes pour des valeurs du nombre de Richardson qui sont en fonction de l'angle de l'écoulement.

Pour des différentes valeurs de  $\alpha$  on remarque que la valeur limite de  $Ri_d$  qui définit la transition entre les deux modes d'échange de chaleur par convection forcée et mixte évolue comme suit :



**Figure I.7 :** Graphe représentant le rapport du nombre de Nusselt en convection mixte au nombre de Nusselt en convection forcée en fonction du nombre de Richardson.

## 11. Conclusion

L'étude du coefficient de transfert convectif autour d'obstacles est très difficile. De nombreux chercheurs s'y sont penchés pour établir différentes corrélations où, dans les cas les plus complexes, des graphes, cas de la convection mixte. Pour aboutir à ces résultats, il aura fallu tenir compte de plusieurs paramètres, tel que : la nature et la direction de l'écoulement, la forme de l'obstacle, l'étude de la couche limite et les propriétés thermo-physique du fluide.

## 1. Introduction

Rappelons donc que la résolution d'un problème de convection consiste à déterminer en tous points et à tout instant les grandeurs physiques suivantes :

- La vitesse  $\vec{V}$  définie par ses trois composantes  $\vec{V} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_3$
- La masse volumique  $\rho$ ,
- La pression  $p$ ,
- La température  $T$ ,

Ce qui donne ensuite la possibilité d'apprécier le flux thermique transféré qui nécessite la connaissance des conditions aux limites.

Le calcul des six grandeurs indiquées doit être classé dans six équations qui peuvent être obtenues à partir des relations exprimant les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

### a. Equation de conservation de masse

Elle est souvent appelée équation de continuité, s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II. 1})$$

### b. Equation de quantité de mouvement

Le théorème fondamental de la mécanique énonce que le bilan de quantité de mouvement dans le domaine (D) est égal à la somme des forces extérieures appliquées à D

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu (\Delta \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{V}) \quad (\text{II. 2})$$

### c. Equation d'énergie

Elle est obtenue par le premier et le deuxième principe de la thermodynamique pour des fluides newtonien en mouvement

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \right) = -\beta T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p \right) + \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) + \mu \cdot \phi \quad (\text{II. 3})$$

Avec  $\phi = 2\hat{\epsilon}_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2$  : La dissipation visqueuse

Et  $\hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  : le tenseur des taux de déformation

## 2. Convection naturelle

La convection est dite naturelle ou libre si le mouvement du fluide n'est pas dû à un apport externe d'énergie mécanique, il n'est alors dû qu'à des variations de masse volumique qui sont en générale causées par une distribution non uniforme de la température. Donc, il y a là un couplage structurel entre bilan de quantités de mouvements et bilan d'énergie, c'est-à-dire entre champ des vitesses et champ de températures.

L'aspect le plus important des transferts en convection libre est (comme en convection forcée) ce qui se passe au voisinage des parois. On y retrouve en particulier une structure de couche limite que nous allons étudier.

La notion d'épaisseur de la couche limite dynamique  $\delta$  est difficile à définir par rapport à l'absence de vitesse de référence mesurée dans le fluide, on est amené à définir  $\delta$  par rapport au maximum  $U_m$  en posant  $u(\delta) = 0.01u_m$ . Pour une épaisseur de la couche limite thermique qui est la même que celle définie dans le paragraphe (I.8).

Pour déterminer le profil des températures et des vitesses dans la couche limite, on admet les hypothèses suivantes :

- Régime permanent et laminaire
- Le fluide newtonien et incompressible
- Les propriétés thermo physique du fluide ( $\mu, c_p$  et  $\lambda$ ) sont constantes
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- Ecoulement bidimensionnel
- Approximation de Boussinesq :

L'approximation de Boussinesq consiste à introduire l'hypothèse d'incompressibilité pour l'écoulement à faible variation de masse volumique. Le postulat fondamental que les variations de masse volumique par rapport à une masse volumique de référence ne sont

importantes que dans le terme d'Archimède dans l'équation du mouvement (c'est à dire dans le terme  $\rho \vec{g}$ ).

L'approximation prend ainsi comme hypothèse que le fluide a une masse volumique constante et les gradients de cette dernière sont dus beaucoup plus aux écarts de températures qu'aux écarts de pressions liés à l'écoulement si l'on considère que la dimension horizontale est beaucoup plus grande que celle verticale.

On admet donc :

$$\rho = \text{cte} \quad (II.4)$$

$\rho = \rho(T)$  indépendante de P

Donc l'expression de la masse volumique s'exprimera par la relation :

$$\rho = \rho_{\infty} \{1 - \beta(T - T_{\infty})\} \quad (II.5)$$

Où  $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$  est le coefficient de dilatation volumique à pression constante lequel vaut  $\frac{1}{T}$  pour le cas d'un gaz parfait.

Compte tenu des écarts modestes de température, on basera les calculs sur l'hypothèse que  $\beta$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont indépendant de T :

$$\beta = \text{cte} ; \lambda = \text{cte} ; \mu = \text{cte}$$

Cependant, elles seront évaluées à la température du film définie par :

$$T_f = \frac{T_p + T_{\infty}}{2} \quad (II.6)$$

## 2.1. Adaptation des équations de bilans aux conditions de la convection gravitaire

D'après les hypothèses retenues, les équations de continuité, d'énergie et de quantité de mouvement seront écrites de la manière suivante :

1) Dans l'équation de continuité, on prend en considération que  $\rho = \text{cte}$  (fluide incompressible) d'où :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (II.7)$$

2) Pour l'équation d'énergie :

On a l'écoulement d'un gaz parfait, d'où  $\beta = \frac{1}{T}$

Les termes:  $\frac{\partial P}{\partial t}$ ,  $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} P$ ,  $\phi$  sont pratiquement toujours négligeable

D'où l'équation d'énergie devient :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \right) = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) \quad (\text{II. 8})$$

On divise par  $\rho c_p$  :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = a \Delta T \quad (\text{II. 9})$$

3) L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II. 10})$$

Le fluide est isochore et où  $f$  représente le champ de pesanteur  $\rho \vec{f} = \rho \vec{g}$ , donc :

$$\rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II. 11})$$

Compte tenu de la dilatation du fluide, on décompose  $\rho$  dans  $\rho \vec{g}$

$$\rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = (\rho - \rho_\infty) \vec{g} + \rho_\infty \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II. 12})$$

Il est habile de grouper les termes de pression et de pesanteur en posant :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p^* = \overrightarrow{\text{grad}} p - \rho_\infty \vec{g} \quad (\text{II. 13})$$

La grandeur  $p^*$  ainsi définie est la « *pression motrice* ». Le bilan devient :

$$\rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = (\rho - \rho_\infty) \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p^* + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II. 14})$$

Si l'on divise par  $\rho_\infty$ , en observant que dans le premier membre  $\rho/\rho_\infty \approx 1$ , on obtient l'équation :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = \frac{(\rho - \rho_\infty)}{\rho_\infty} \vec{g} - \frac{1}{\rho_\infty} \overrightarrow{\text{grad}} p^* + \nu \Delta \vec{V} \quad (\text{II. 15})$$

Ou encore, en faisant intervenir (II.5)

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = \beta(T - T_\infty) \vec{g} - \frac{1}{\rho_\infty} \overrightarrow{\text{grad}} p^* + \nu \Delta \vec{V} \quad (\text{II. 16})$$

Les variations de  $\rho$  dans le champ de pesanteur se traduisent donc par l'apparition d'une force verticale appelée "*poussée thermique*", qui est la résultante du poids et de la poussée d'Archimède, et dont la valeur (rapportée à l'unité de volume du fluide) est  $(\rho - \rho_\infty) \vec{g}$ .

Cette force qui est à l'origine d'un mouvement de *convection gravitaire* est ascendante si le fluide est localement plus léger que le fluide ambiant ( $\rho < \rho_\infty$ ), ( $\vec{g}$  étant dirigé vers le bas), ou descendante dans le cas contraire.

## 2.2. Equations de la couche limite laminaire

### 2.2.1. Les équations dimensionnelles

Les caractéristiques observées de l'écoulement à proximité de la paroi autorisent à conserver les approximations de la couche limite dynamique, à savoir :

$$V \ll U \text{ et } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{II. 17})$$

Par contre, on prendra garde au fait qu'elles ne soient pas toujours négligeables  $\partial U / \partial x$  devant  $\partial U / \partial y$  : au voisinage du maximum  $U_m$  on a en effet  $\partial U / \partial y = 0$  et  $\partial U / \partial x \neq 0$ .

Dans la couche limite thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{II. 18})$$

Ce qui se traduit simplement par la disparition du terme  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  dans l'équation d'énergie.

Dans notre cas  $T_p > T_\infty$  donc, l'écoulement se fait vers le haut,  $x$  est dirigé vers le haut ce qui fait que la pesanteur est dirigée vers le bas,

$$\vec{g} = -g\vec{x} \quad (II.19)$$

Et le terme en  $\vec{g}$  devient :  $+\beta(T - T_\infty)$ ,

Les gradients de pression conclus par le champ des vitesses sont faibles ce qui signifie que :

$$\overline{gradp} = \rho\vec{g} \text{ et } \overline{gradp^*} = \rho\vec{g} - \rho_\infty\vec{g} \quad (II.20)$$

Donc :

$$\overline{gradp^*} \approx 0 \quad (II.21)$$

Donc l'équation (II.16) s'écrit de la manière suivante:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \beta(T - T_\infty) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (II.22)$$

Finalement l'ensemble des équations aux dérivées partielles s'écrivent sous la forme dimensionnelle comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (II.23)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \beta g(T - T_\infty) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (II.24)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (II.25)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\text{Pour } y=0 \quad u=v=0 \quad T=T_p$$

$$\text{Pour } y \rightarrow \infty \quad u \rightarrow \infty \quad T \rightarrow T_\infty$$

Ces équations sont résolues analytiquement pour le cas d'une plaque plane verticale (annexe A)

Le cas d'un cylindre horizontal rend cette résolution davantage complexe, c'est pourquoi l'approche numérique s'est imposée comme une alternative incontournable pour le calcul du nombre de Nusselt et d'autres paramètres relatifs aux couches limites thermiques et dynamique.

### 3. Modalisation numérique

Les écoulements de fluides, que ce soit en régime laminaire ou turbulent, sont décrits par le système d'équations aux dérivées partielles (E.D.P). Ainsi, tous les phénomènes (écoulement de fluide, transfert de chaleur, rayonnement, changement de phase...) sont régis par ce système formé par les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie qu'il convient de résoudre pour connaître les caractéristiques du champ thermique et du champ d'écoulement.

Malheureusement, il est pratiquement impossible de trouver une solution analytique et exacte à de tels systèmes du fait que les équations citées précédemment soient très complexes, c'est-à-dire non linéaires d'une part et couplées d'autre part. Dans ce cas, le recours à la résolution numérique s'impose et nous incite à choisir la méthode numérique adéquate pour obtenir les meilleurs résultats. L'utilisation des logiciels pour la résolution de ces phénomènes est alors indispensable. Pour réaliser nos simulations, le choix s'est porté sur le code de calcul commercial FLUENT que nous présenterons dans ce chapitre.

### 4. Présentation des logiciels GAMBIT et FLUENT

La résolution par le logiciel de simulation numérique des écoulements FLUENT nécessite la présentation du préprocesseur GAMBIT.

## 4.1. Présentation de GAMBIT

C'est un logiciel industriel, de Dessin Assisté par Ordinateur (DAO) et de génération de maillage structuré ou non. Il permet la réalisation des géométries en 2D ou 3D, largement répandues dans l'industrie (automobiles, aéronautique, spatiale, etc.), en raison de son interface graphique puissante qui comporte plusieurs fenêtres d'outils de création, génération, vérification du maillage du modèle étudié et l'incorporation des conditions aux limites. Il permet aussi de réaliser tout type de géométries complexes (fixes ou mobiles). Il possède en outre de nombreuses possibilités d'extraction qui permettent l'utilisation de ses maillages par des logiciels industriels comme par exemple FLUENT. Il peut aussi discrétiser le domaine, en offrant différents types de maillages selon la forme géométrique.

### 4.1.1. Interface GAMBIT

Après avoir lancé le logiciel, l'interface d'utilisation apparaît

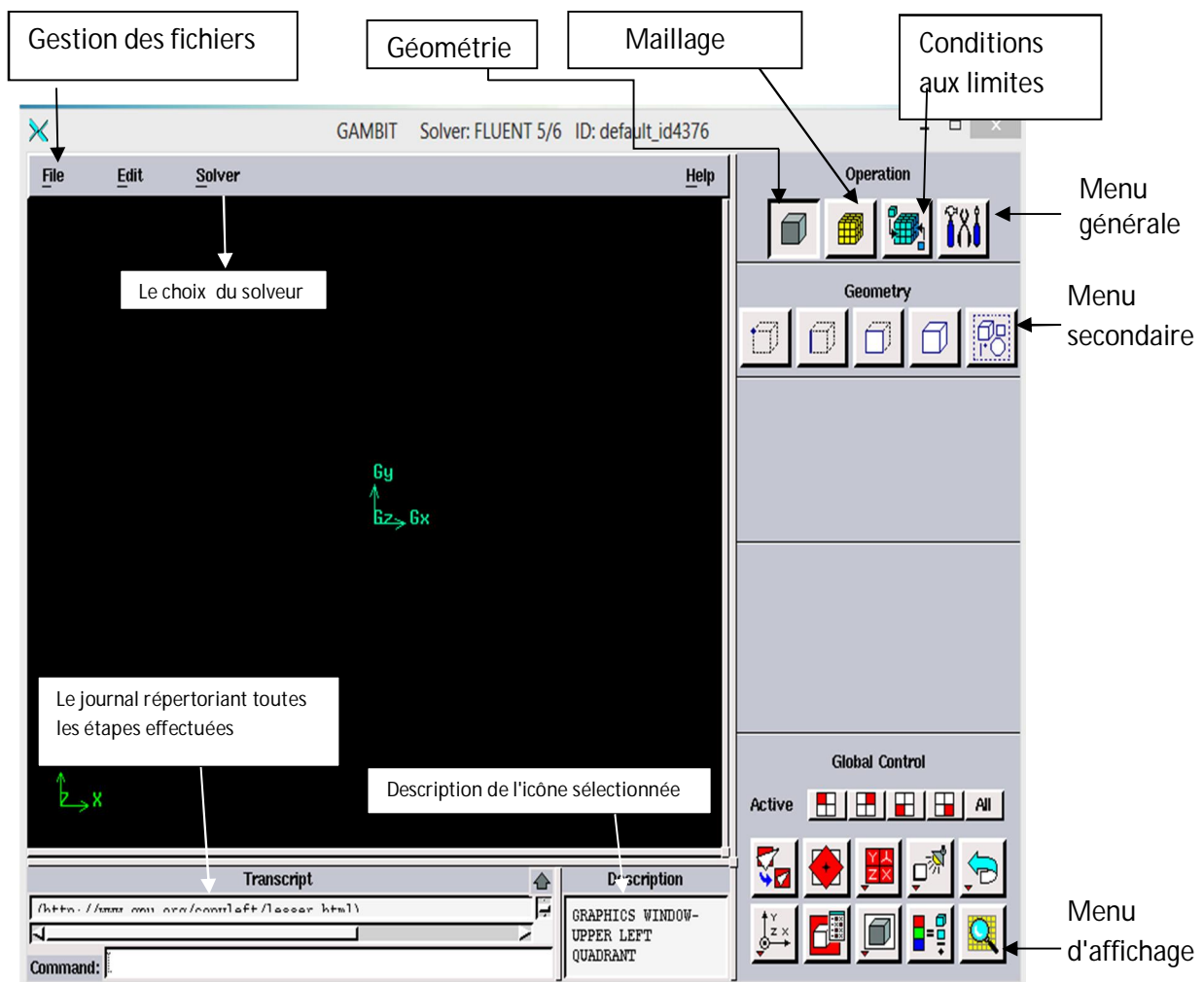


Figure II.1: Vue globale de GAMBIT

### 4.1.2. La notion et le choix du maillage

Le maillage est l'une des étapes importantes de la modélisation numérique, il caractérise, pour une simulation de CFD, les points où les équations de l'écoulement seront résolues. Le choix du maillage est une étape primordiale, La stabilité du calcul et la qualité des résultats dépendent fortement du type et de la qualité du maillage.

Sous GAMBIT on peut utiliser plusieurs types de maillage: maillage structuré, maillage non structuré et maillage hybride.

Un maillage structuré est généralement composé de mailles quadrilatérales en 2D et hexaédriques en 3D, tandis qu'un maillage non structuré va être composé de mailles quadrilatérales ou triangulaires en 2D et hexaédriques ou tétraédriques en 3D.

Dans un maillage hybride, les mailles proches des parois sont des quadrilatérales en 2D et des hexaèdres en 3D et les mailles du reste du domaine sont triangulaires en 2D et tétraédriques en 3D

## 4.2. Présentation du code FLUENT

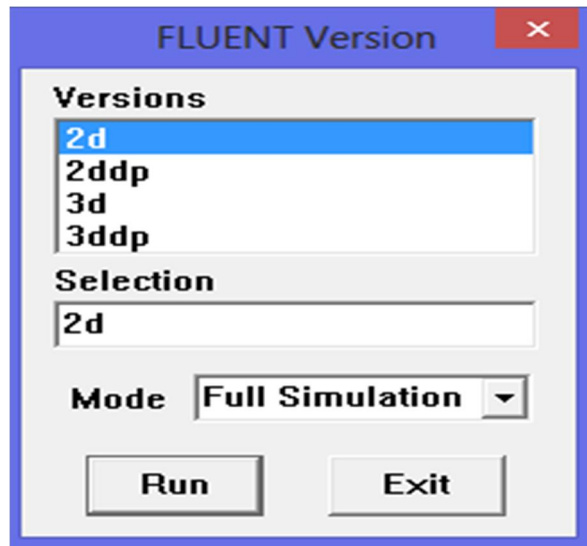
FLUENT est un code de calcul, un logiciel de CFD(Computational Fluid Dynamics) qui permet de simuler les écoulements des fluides compressibles ou incompressibles, stationnaires ou non stationnaires, Newtonien ou non Newtonien, laminaires ou turbulents, écoulements à surfaces libres ou surfaces complexes, avec et sans transfert thermique...et plusieurs autres phénomènes.

Le logiciel « FLUENT » utilise la méthode des volumes finis. Il est écrit en langage C et utilise pleinement la flexibilité et la puissance offertes par ce langage (allocation de l'espace mémoire dynamique). En outre, il utilise une architecture qui lui permet de s'exécuter en tant que plusieurs processus simultanés sur un seul PC de travail ou sur des machines en parallèles, pour une exécution plus efficace.

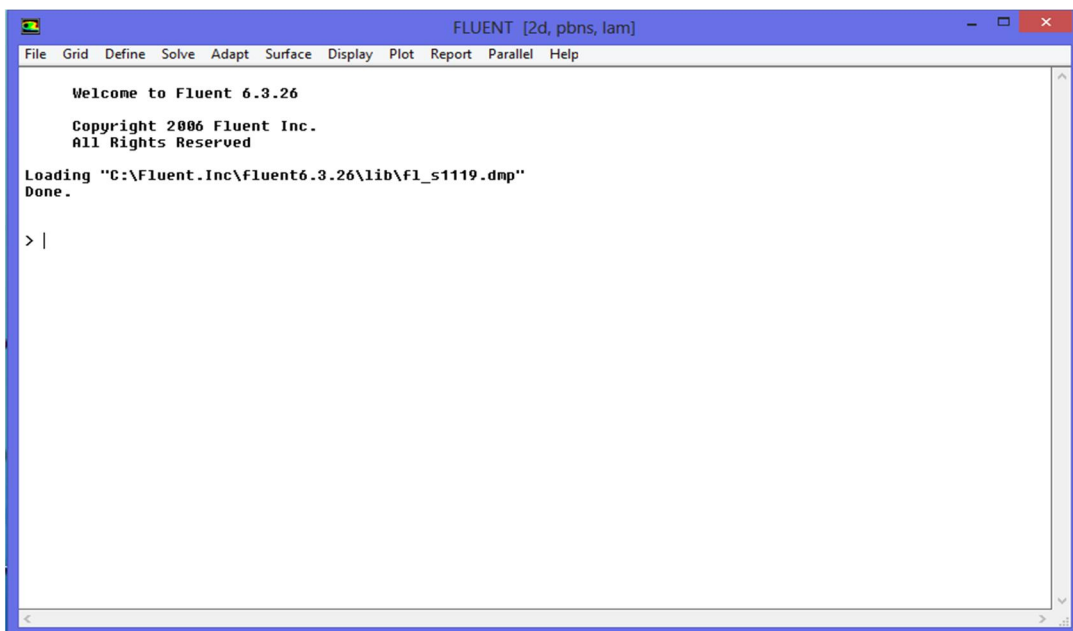
FLUENT facilite à l'utilisateur sa manipulation à travers la simplicité de son interface graphique. Le code n'est pas limité uniquement par ces propres fonctions, mais il permet à son utilisateur d'injecter sa propre fonction, définir toutes les particularités de son problème et introduire les caractéristiques des matériaux selon le problème traité.

### 4.2.1. Interface de FLUENT

La première chose à faire quand vous entrez sous FLUENT est de choisir le type de résolution que FLUENT va avoir à faire : résolution 2D ou 3D puis d'ouvrir ou d'importer un maillage (fichier .msh)



*Figure II.2: Le type de résolution*



*Figure II.3: Interface FLUENT*

Ensuite l'utilisation de FLUENT est simple, il suffit de suivre l'ordre des menus en partant de la gauche pour aller vers la droite :

- File : pour les opérations concernant les fichiers : lecture, sauvegarde, importation...etc.
- Grid : pour la vérification et la manipulation du maillage et de la géométrie.
- Define : pour définir les phénomènes physiques, les matériaux et les conditions aux limites.
- Solve : pour choisir les équations à résoudre, les schémas de discrétisations, les facteurs de sous relaxation, les critères de convergence et pour initialiser et procéder aux calculs.
- Adapt : pour l'adaptation du maillage selon plusieurs paramètres.
- Surface : pour créer des points, des lignes et des plans nécessaires à l'affichage des résultats.
- Display et plot : pour l'exploitation des résultats.
- Report : pour afficher des rapports contenant les détails du problème traité.
- Parallel : pour le calcul parallèle.
- Help : pour l'exploitation de l'aide du contenu du code.

## 5. Les différentes étapes de l'approche numérique

On peut résumer les différentes étapes de cette approche numérique dans ce qui suit.

- **Création de la géométrie et son maillage:** Ces deux étapes sont réalisées au niveau du processeur GAMBIT; un maillage fin (serré, proche des parois) doit être choisi à cause des gradients de vitesses et de pressions élevées proche des parois.

- **Définition des conditions aux limites:** De même, cette étape est aussi réalisée en utilisant le processeur GAMBIT.

- **Résolution du problème avec le code FLUENT:** Pour effectuer la simulation par ce logiciel, il faut décrire les paramètres de solution comme suit :

**1<sup>ère</sup> étape :** choix du type de solveur : résolution 2d ou 3d. Puis, ouvrir ou importer un maillage en suivant la procédure suivante: *File*→*read*→*case*.

On vérifie le maillage et la dimension dans laquelle a été créé le modèle : *Grid*→*Check*.

**2<sup>ème</sup> étape :** choix des matériaux

**3<sup>ème</sup> étape :** introduction des conditions de fonctionnement (la pression, la température, la gravité)

**4<sup>ème</sup> étape :** imposer les conditions aux limites

Pour cette étape, FLUENT nous offre une option qui permet à l'utilisateur d'imposer ses conditions aux limites et de définir les matériaux de chaque partie du domaine.

**5<sup>ème</sup> étape :** choix du schéma de discrétisation.

**6<sup>ème</sup> étape :** choix des facteurs de sous relaxation. Les facteurs de sous relaxation sont très importants pour la stabilisation du processus itératif, ils varient dans l'intervalle [0, 1].

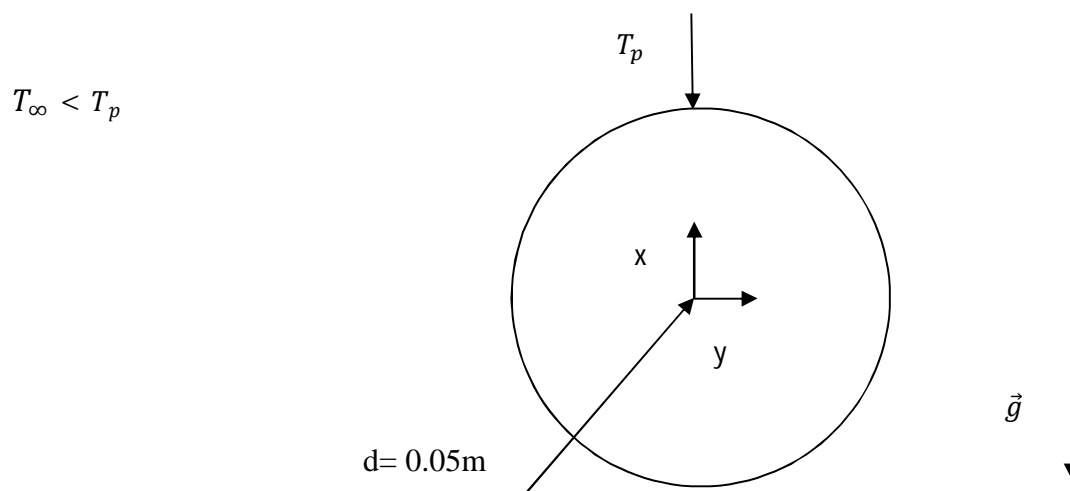
**7<sup>ème</sup> étape :** initialisation et itération.

Il est nécessaire d'initialiser toutes les variables et itérer avant de commencer les calculs.

## 6. Convection naturelle

### 6.1. Problématique

Dans notre cas, on considère un cylindre de diamètre  $d=0.05\text{m}$  porté à une température  $T_p=310\text{K}$ , immergé dans un fluide au repos de température  $T_\infty=300\text{K}$ .

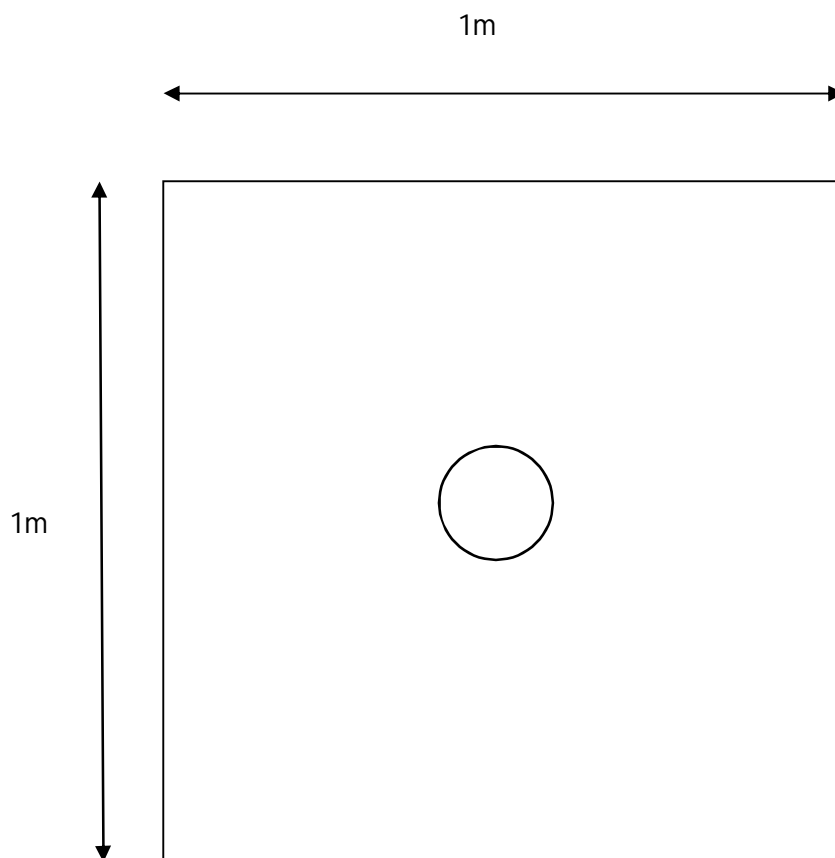


*Figure II.4: Cylindre horizontal*

## 6.2. Création de la géométrie en 2D et de son maillage sous GAMBIT

Pour commencer, on crée d'abord un carré par le biais de la commande Geometry comme suit : (*Geometry/Face/Create Face/Rectangle*) ; Après, on nous demande d'entrer la hauteur et la largeur du rectangle et de saisir le nom de la face. Ensuite, on crée un cercle au milieu du carré. Pour cela, on utilise la même commande Geometry, on suit après ces étapes : (*Geometry/Face/Create Face/Circle*). On nous demande d'entrer le rayon et le nom de la face. Pour lier les deux faces créées en un périmètre commun, on utilise la commande Split Face, ensuite, on sélectionne les deux faces à lier. Pour finir, et comme les échanges ne se font qu'à l'extérieur du cylindre, on supprime la partie interne du cercle avec la commande

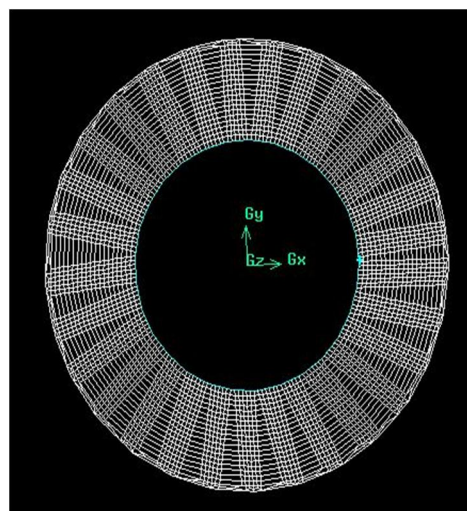
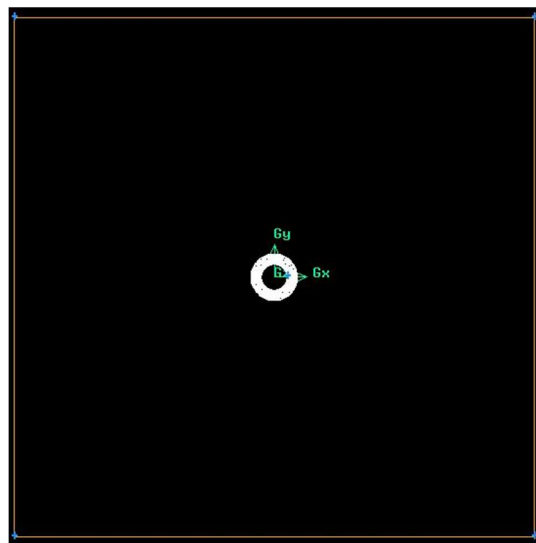
Delete Faces, on sélectionne le cylindre et on clique sur Apply. Ainsi, on aura une géométrie constituée d'une seule face, comme représentée ci-dessous.



*Figure II.5 : Le domaine de calcul*

Au voisinage immédiat de la paroi du cercle, où on enregistre des gradients importants (vitesse, température, pression etc.), on affine le maillage, pour bien cerner les phénomènes qui y ont lieu. Pour ce faire, on suit les étapes suivantes : (*Operation/Mesh/Boundary Layer/Creat Bouadary Layer*). Le maillage commence par un pas de 1mm qu'on saisit dans (First row a), puis augmente par un facteur de 1 sur les premières rangées lequel sera saisit dans (Growth factor b/a) avec un motif de transition de 4:2 qu'on choisira dans (Transition pattern).

Le maillage 2D de la couche limite est illustré dans ces deux figures, vue générale et vue rapprochée :



*Figure II.6 : Le maillage de la couche limite*

Le maillage est formé d'éléments quadrangles, donc on a utilisé un maillage structuré, le nombre de mailles total à l'interface du maillage est égale à 998036.

### 6.3. Les conditions aux limites

Dans cette étape, il faut définir les entités qui seront les murs, les entrées ou les sorties, les faces solides ou fluides. Pour cela, on va dans (*Operation/Zones/Specify Boundary Types*) où on nomme et spécifions le type des frontières, exemple : Wall, velocity-inlet. Dans (*Operation/Zones/Specify Continuum Types*), on nomme la face et on en définit le type.

Les conditions que nous avons choisies dans ce cas de figure:

**Wall:** elle matérialise une paroi pour laquelle on introduit une condition de température  $T_p$  et une condition d'adhérence.

**Pressure outlet :** elle traduit un gradient de pression nul

Dans le premier terme et le deuxième, Pressure outlet est traduit par :  $\frac{\partial p}{\partial y}=0$  ; par contre dans le troisième on a :  $\frac{\partial p}{\partial x}=0$

**velocity inlet:** elle réalise une entrée de fluide dans le volume de contrôle à une vitesse donnée.

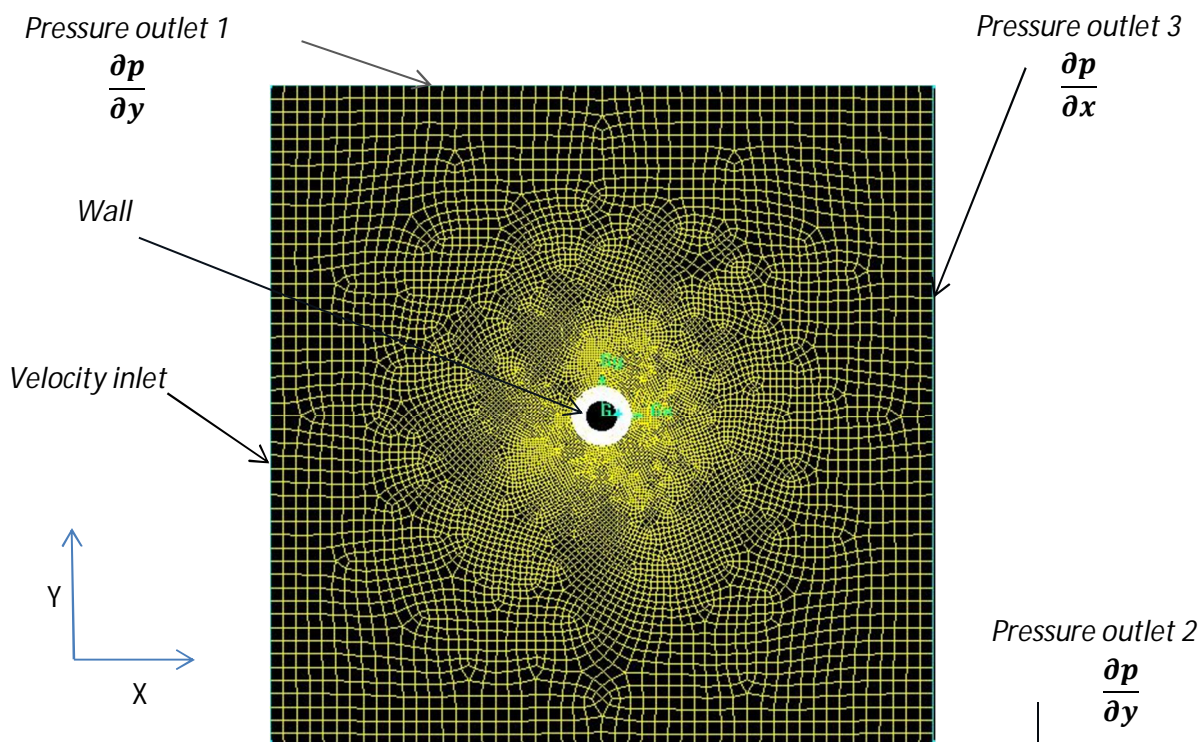


Figure II.7 : maillage et les conditions aux limites

Après la création de la géométrie, le choix du maillage et la définition des conditions aux limites dans GAMBIT, il ne reste plus qu'à enregistrer le travail, pour cela, on choisit la commande: File/Save as. Pour que le maillage puisse être lu par FLUENT, il faut l'exporter sous format \*.msh en suivant ces étapes (*File/Export/Mesh*), en prenant le soin de cocher la case (*Export 2-D (X-Y) Mesh*).

Sous GAMBIT on peut spécifier seulement le type de conditions aux limites. Aucune valeur numérique n'est introduite, seul FLUENT permet d'introduire ces valeurs, et même de changer le type de conditions limites.

Il ne reste qu'à lancer FLUENT pour la simulation

#### 6.4. Résolution sous FLUENT

On lance FLUENT et on choisit la version 2D.

La fenêtre de FLUENT s'ouvre.

La première chose à faire c'est la Lecture du fichier : *File* → *Read* → *Case* puis sélectionner le fichier du maillage (**.msh**) généré précédemment. Ensuite, Il faut définir l'unité de longueur qui est dans notre cas le mètre: *Grid* → *Scale*.

- ✓ On spécifie le mode d'écoulement qui se fera en deux dimensions et en régime permanent.
- ✓ Définition du régime de l'écoulement: Par défaut, FLUENT va s'attacher à résoudre les équations de conservations de quantité de mouvement et l'équation de continuité en considérant le fluide visqueux et l'écoulement laminaire. *Define* → *Models* → *viscous*, le régime considéré dans notre étude est laminaire.
- ✓ On sélectionne l'équation de l'énergie *Define* → *Models* → *Energy*, Ceci active la résolution de l'équation de conservation de l'énergie couplée aux équations de la mécanique.
- ✓ On définit le matériau: *Define* → *Materials* le fluide à l'entrée est de l'air.

-On choisit le modèle de boussinesq pour la densité et on introduit la valeur du coefficient de l'expansion thermique  $\beta = 1/T_f$ .

-On introduit la valeur de la conductivité thermique, la viscosité et la chaleur spécifique, ces propriétés sont prises à la température du film  $T_p + T_\infty/2$

On définit l'état de fonctionnement *Define* → *Operating conditions*, ceci active la gravité et on introduit les valeurs de  $g$ , dans le but de faire varier le nombre de Grashof de  $Gr=31136.50$  jusqu'à  $1556825.27$ .

✓ On choisit un schéma d'interpolation *Solver* → *Controls* → *solution*: pour l'énergie et la vitesse, on choisit *First-Order Upwind Scheme* (facile à converger mais seulement au première ordre). Pour la pression on choisit *Body forced Weighted* et pour le couplage pression-vitesse on introduit la méthode SIMPLE (robuste).

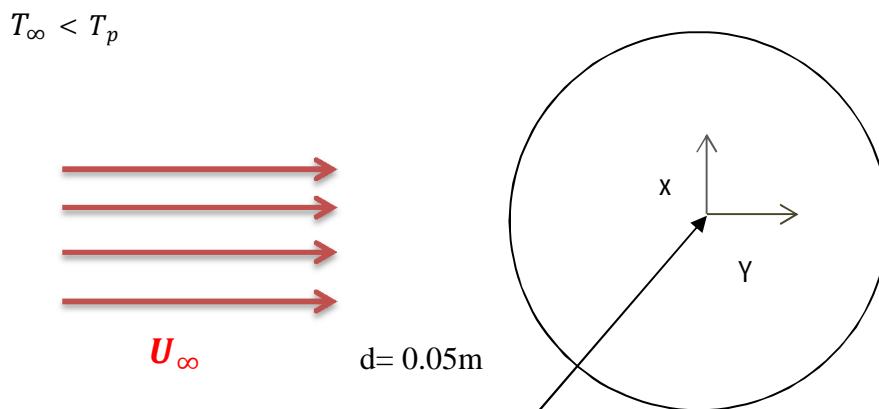
Pour commencer les calculs on procède par une initialisation des différentes variables *Solver* → *Initilize* → *Initialize*: Elles doivent être bien choisies de sorte à éviter que le calcul diverge. Dans ce cas, la valeur retenue correspond à la température du film  $T_f = 305K$ .

Au début des calculs, on spécifie le nombre d'itérations: *Solver* → *Iteration* et on suit l'évolution des paramètres (dont on définit les résidus au préalable) que l'on juge essentiels pour s'assurer de la convergence du processus de calcul.

## 7. convection forcée

### 7.1. Problématique

Dans ce problème on considère un cylindre à la température  $T_p = 310K$ , de diamètre  $d=0.05m$  plongé dans un fluide porté à la température  $T_\infty = 300$ , qui est inférieure à celle de la paroi  $T_p$ . Le fluide considéré est de l'air. L'étude se fait en variant le nombre de Reynolds et ce en variant la vitesse de l'écoulement  $U_\infty$ .



*Figure II.8: cylindre horizontal*

### 7.2. Création de la structure sous GAMBIT

Pour la création de la structure, la définition du maillage et des conditions aux limites, on suit les mêmes étapes que celles suivies pour la convection naturelle (Figure II.5), (Figure II.6) et (Figure II.7)

### 7.3. Résolution sous FLUENT

On lance FLUENT et on choisit la version 2D.

La fenêtre de FLUENT s'ouvre.

La première chose à faire, c'est la Lecture du fichier : *File* → *Read* → *Case* puis sélectionner le fichier du maillage (.msh) généré précédemment. Ensuite, Il faut définir l'unité de longueur qui est dans notre cas le mètre: *Grid* → *Scale*.

- ✓ On spécifie le mode d'écoulement qui se fera en deux dimensions et en régime permanent.

- ✓ Définition du régime d'écoulement: Par défaut, FLUENT va s'attacher à résoudre les équations de conservations de quantité de mouvement et l'équation de continuité en considérant le fluide visqueux et l'écoulement laminaire. *Define* → *Models* → *viscous*, le régime considéré dans notre étude est laminaire.
- ✓ On sélectionne l'équation de l'énergie *Define* → *Models* → *Energy*, Ceci active la résolution de l'équation de conservation de l'énergie couplée aux équations de la mécanique.
- ✓ On définit le matériau: *Define* → *Materials* le fluide à l'entrée est de l'air.
  - On prend la masse volumique constante  $\rho$
  - On introduit la valeur de la conductivité thermique, la viscosité et la chaleur spécifique, ces propriétés sont prises à la température au film  $T_f = T_p + T_\infty/2$
  - Les effets de la gravité son négligeable

Pour Velocity inlet on introduit les valeurs de la vitesse considérée dans le but de faire varier le nombre de Reynolds de 153.58 jusqu'à 3071.69.

✓ On choisit un schéma d'interpolation *Solver* → *Controls* → *solution*: pour l'énergie et la vitesse, on choisit *First-Order Upwind Scheme* (facile à converger mais seulement au première ordre). Pour la pression on choisit *Standard* et pour le couplage pression-vitesse on introduit la méthode SIMPLE (robuste).

✓ On raffine le maillage pour avoir des résultats meilleurs *Adapt* → *Boundary*, puis on introduit le nombre de cellule puis en clique sur adapt

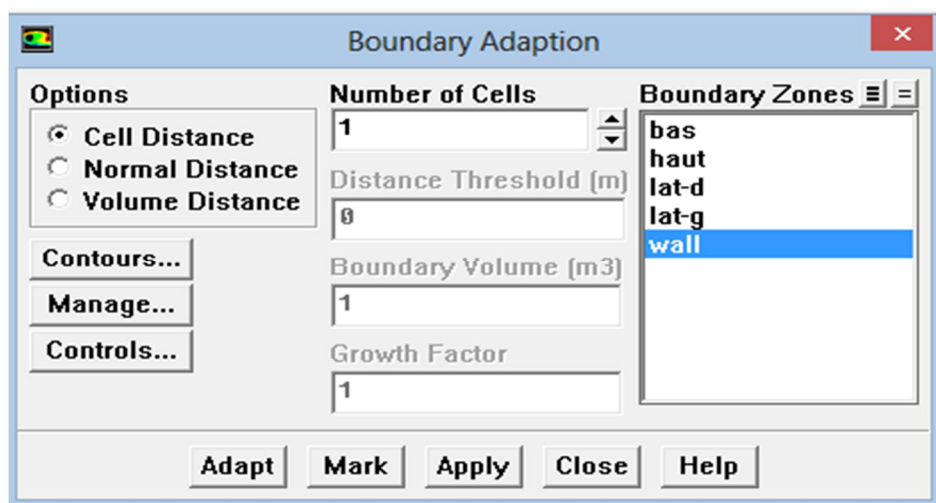
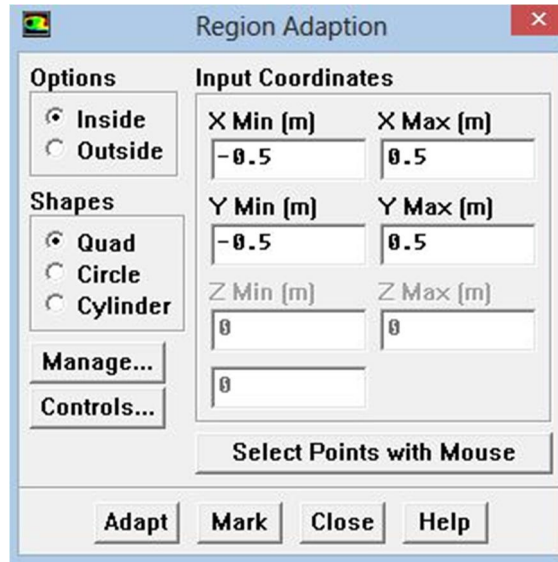


Figure II.9 : Raffinage du domaine

✓ On raffine le maillage, une seconde fois, pour améliorer les résultats. *Adapt*→*region*, puis on introduit les valeurs des abscisses du domaine où on veut exactement raffiner le plus



*Figure II.10 : Raffinage du domaine*

Pour avoir des résultats plus précis, nous avons effectué trois essais

Désignation de la géométrie	CFD 1	CFD 2	CFD 3
Nombre de mailles	12759	2261787	2449776

**Tableau (II.1) : Nombre de mailles**

Pour commencer les calculs, on procède à une initialisation des différentes variables *Solver*→*Initilize*→*Initialize*: Elles doivent être bien choisies de sorte à éviter que les calculs divergent. Dans ce cas, la valeur retenue correspond à la température du film  $T_f = 305K$

Au début des calculs, on spécifie le nombre d'itérations: *Solver*→*Iteration* et on suit l'évolution des paramètres (dont on définit les résidus au préalable) que l'on juge essentiels pour s'assurer de la convergence du processus de calcul.

## 8. La convection mixte

Ce phénomène qui est la combinaison des deux modes précédent (convection naturelle et la convection forcée) sa résolution sous GAMBIT est la même que celle de la convection naturelle et pour la résolution sous Fluent on suit les même étapes qu'auparavant (II.5.3). La différence ici, c'est qu'on introduit la valeur de  $g=98.1 \text{ m/s}^2$  et on fait varier la valeur de la vitesse.

Les propriétés de l'air sont récapitulées dans le tableau (II.2)

Propriétés	Unités	Méthode	Valeur
<b>Coefficient d'expansion thermique (<math>\beta</math>)</b>	$K^{-1}$	constante	<b>0.0033</b>
<b>Conduction thermique</b>	W/m k	constante	<b>0.02629</b>
<b>Chaleur spécifique (<math>c_p</math>)</b>	J/Kg k	constante	<b>1006.8</b>
<b>Masse volumique (<math>\rho</math>)</b>	$Kg/m^3$	Boussinesq pour naturelle et constante pour forcée	<b>1.1568</b>
<b>Diffusivité thermique (<math>\alpha</math>)</b>	$m^2/s$	Constant	<b><math>2.2552 \cdot 10^{-5}</math></b>
<b>Viscosité cinématique (<math>\nu</math>)</b>	$m^2/s$	Constant	<b><math>1.6293 \cdot 10^{-5}</math></b>
<b>Viscosité dynamique (<math>\mu</math>)</b>	$Kg/m^1 s^{-1}$	constant	<b><math>1.883 \cdot 10^{-5}</math></b>

**Tableau (II.2) : Propriétés de fluide (l'air) à  $T = T_f$**

## 9. Conclusion

Après avoir procédé à la simulation numérique des échanges convectifs avec écoulement d'air autour d'un cylindre horizontal et ce en utilisant le processeur GAMBIT pour la création de la géométrie et du maillage, ainsi que pour la spécification des conditions aux limites. On a compilé le tout et exporter vers le code FLUENT pour faire la résolution numérique.

Les résultats obtenus sont regroupés sous forme de graphes qui seront débattus et comparés aux résultats théoriques dans le chapitre suivant.



## 1. Introduction

Nous présentons, dans ce chapitre, les résultats de la simulation numérique des échanges convectifs autour d'un obstacle cylindrique horizontal obtenus par le code de calcul FLUENT

## 2. convection naturelle

### 2.1. Nombre de Nusselt moyen

Nous avons collecté une série de données permettant de déterminer l'évolution numérique du nombre de Nusselt moyen autour d'un cylindre (Figure III.1). Les calculs ont été menés en variant la gravité, ce qui permet d'ajuster le nombre de Rayleigh.

Les résultats sont comparés aux lois de référence valables en régime laminaire ( $Grashof < 10^8$ ,  $Pr=0.72$ ), tracés à partir de trois corrélations choisies.

**Corrélation 1** de Morgan V.T[1]:

$$\overline{Nu}_f = 0.48(Gr_f Pr_f)^{1/4} \quad 10^4 < Gr_f Pr_f < 10^7 \quad (III.1)$$

**Correlation 2** de Churchill and Chu[3]:

$$Nu_d = 0.36 + \frac{0.518(Gr_d Pr)^{1/4}}{[1 + (0.559/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \quad 10^{-6} < Gr_f Pr_f < 10^9 \quad (III.2)$$

**Corrélation 3** de McAdams[2] :

$$\overline{Nu}_f = 0.53(Gr_f Pr_f)^{1/4} \quad 10^4 < Gr_f Pr_f < 10^9 \quad (IV.3)$$

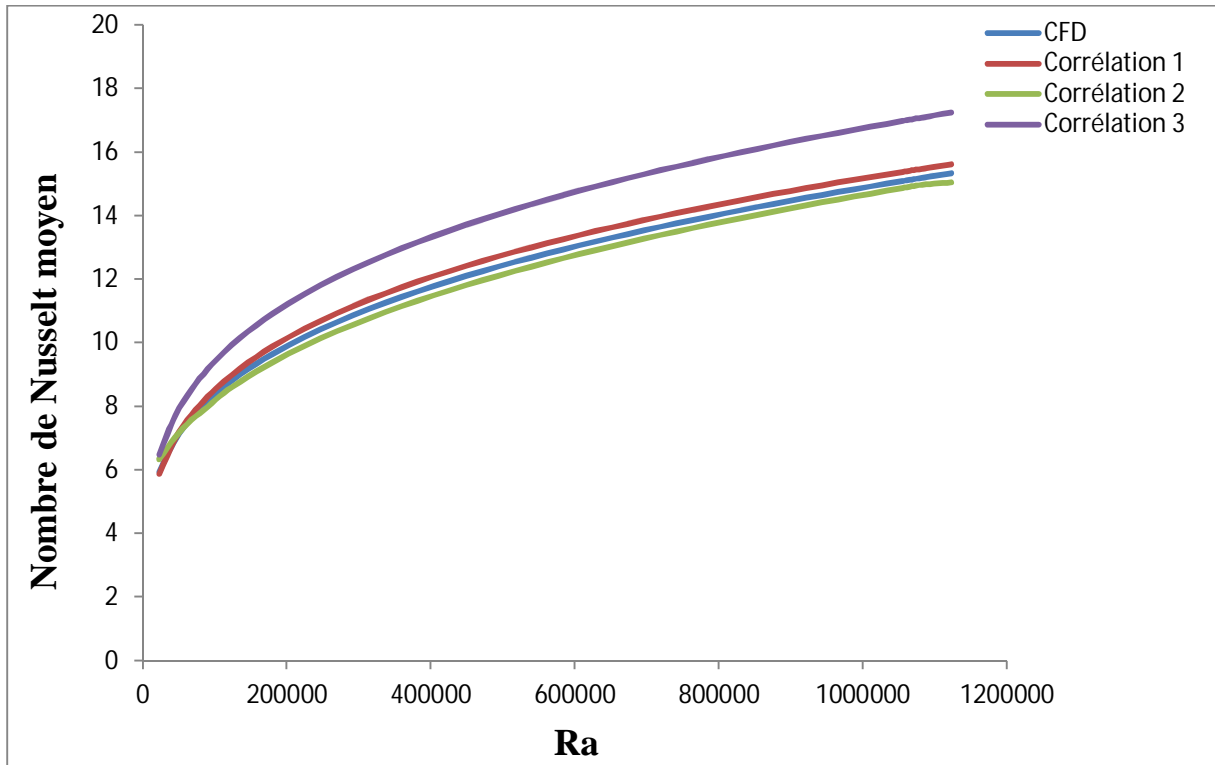


Figure III.1 : Variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh obtenues par les approches CFD et analytique (corrélation 1, 2 et 3)

### 2.2. Coefficient d'échange convectif moyen $\bar{h}$

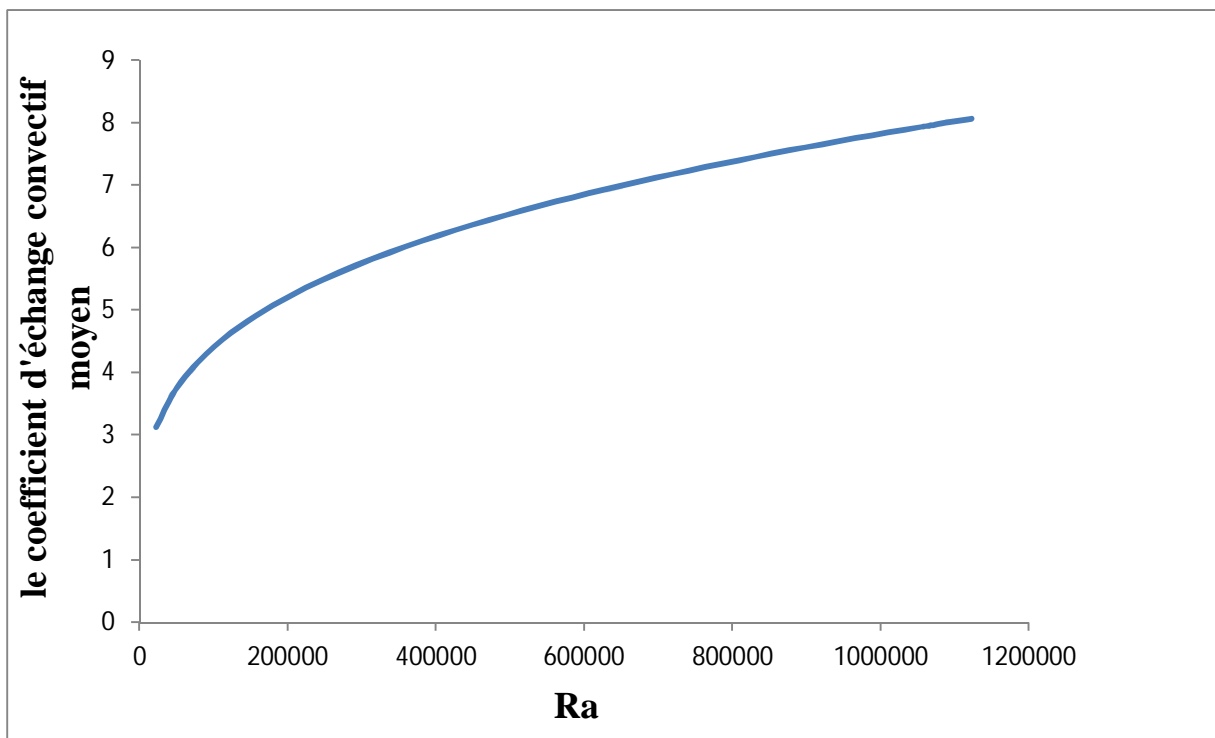
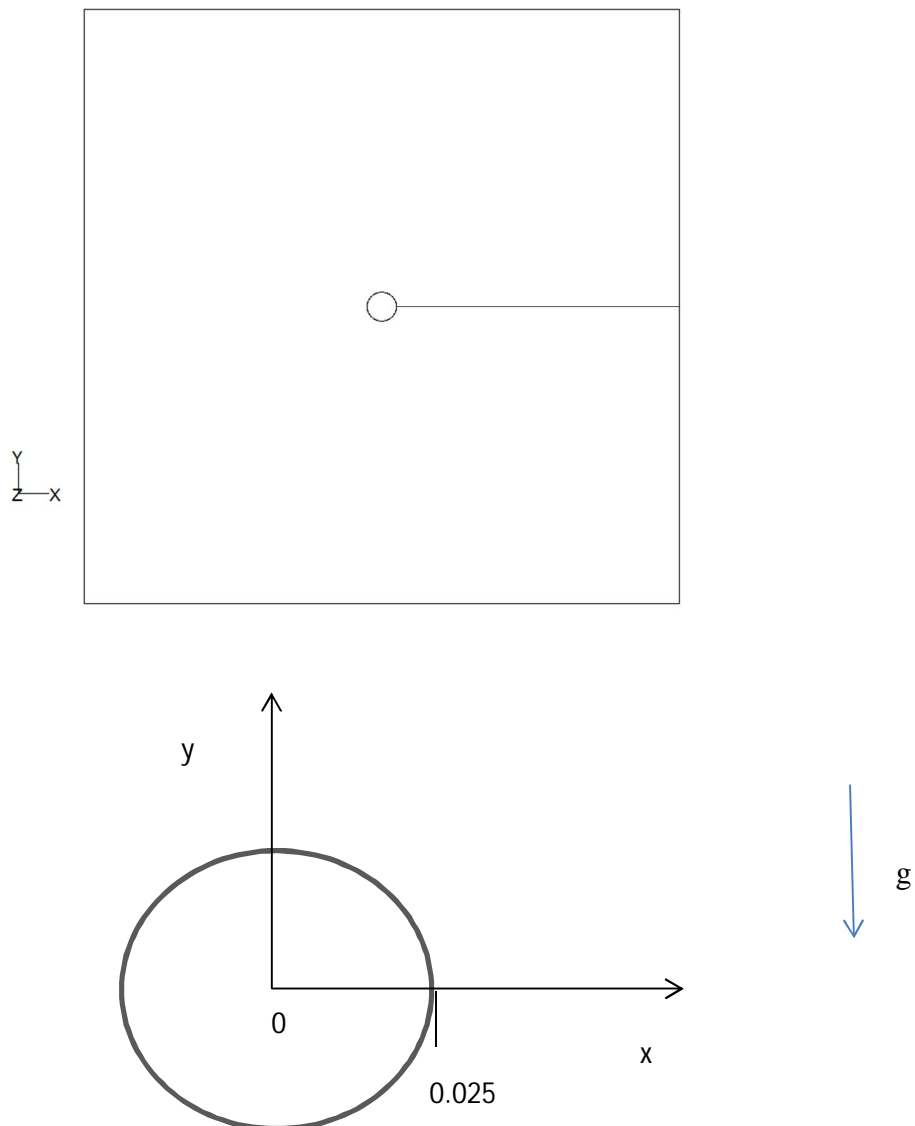


Figure III.2 : Variations du coefficient d'échange convectif moyen en fonction du nombre de Rayleigh

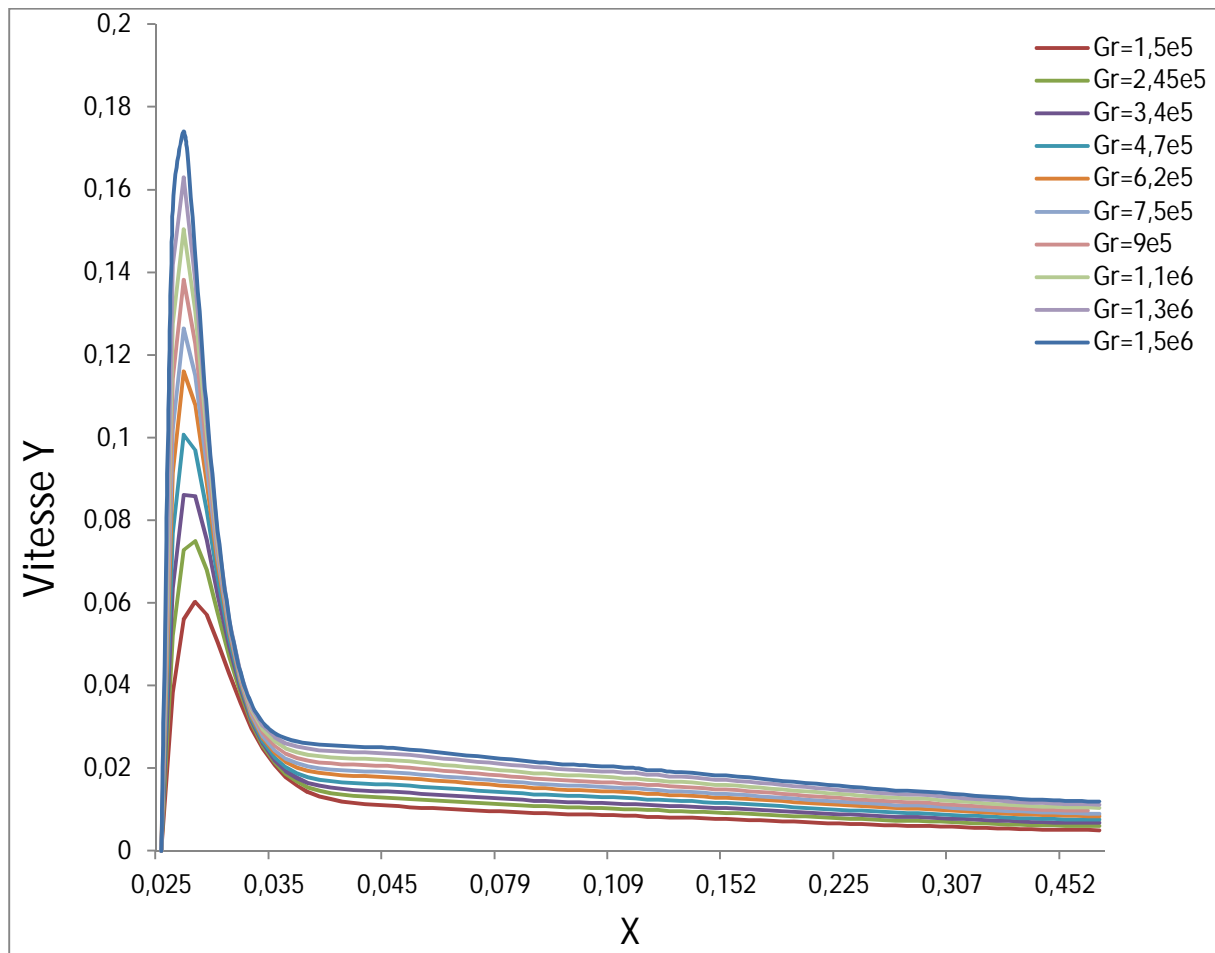
On remarque une similitude entre les résultats obtenus par l'approche CFD et les corrélations. Les courbes CFD et corrélations (1, 2) se confondraient presque, ce qui atteste de la justesse des résultats et d'une marge d'erreur très petite. Pour la corrélation 3 on a un pourcentage d'erreur de 13% (Figure III.1).

On constate aussi que l'augmentation du nombre de Rayleigh conduit à une augmentation du nombre de Nusselt moyen (Figure III.1) d'où une augmentation du transfert convectif et par conséquent, une élévation du coefficient d'échange moyen (Figure III.2).

### 2.3. Profil de vitesse



**Figure III.3:** Création d'une ligne dans la direction OX en fixant l'ordonnée à une valeur de  $y=0$

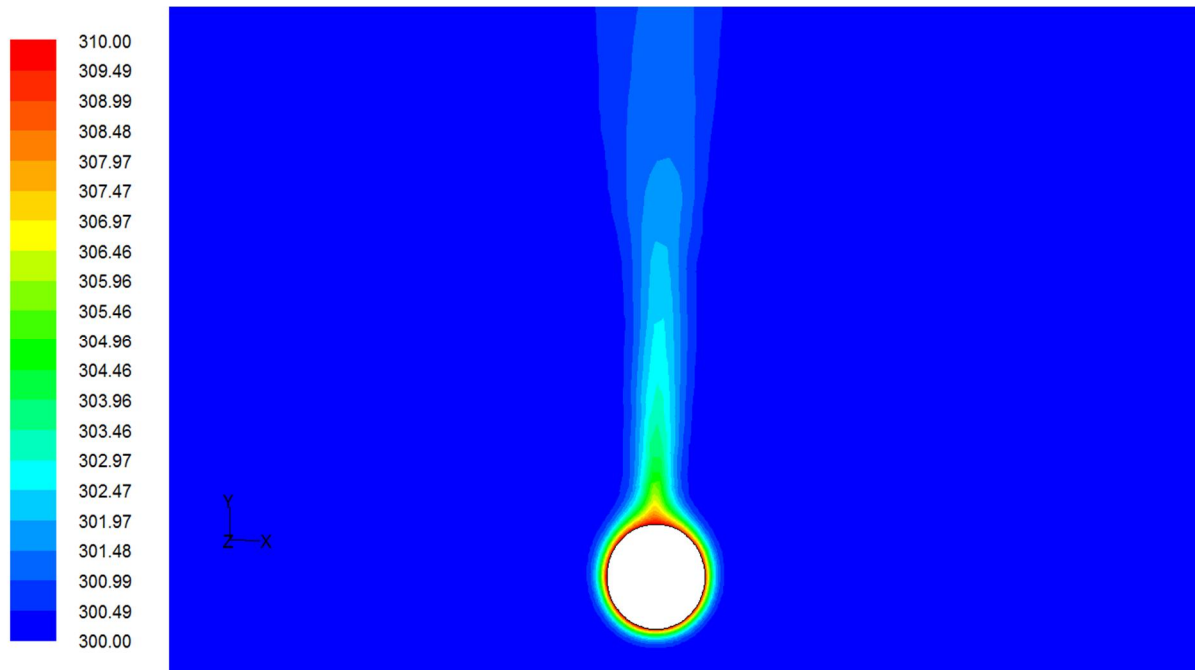


**Figure III.4 : Profil de vitesse pour des différentes valeurs du nombre de Grashof suivant l'axe OX pour  $x$  variant de 0.025 à 0.5**

La figure III.4 illustre l'évolution du profil de la vitesse suivant la direction OX (Figure III.3), pour différentes valeurs du nombre de Grashof, en fonction de la longueur de la conduite.

On remarque que les vitesses, aux alentours de l'obstacle, deviennent importantes quand le nombre de Grashof augmente. En effet, on note un pique de vitesse au voisinage de l'abscisse  $x=0.028$  (Figure III.4), laquelle diminue en s'éloignant du corps chaud. Cela s'explique par le réchauffement du fluide au voisinage de la paroi du cylindre et son refroidissement au loin.

## 2.4. Distribution de la température



*Figure III.5 : Distribution de la température pour  $Ra=1.1.10^5$*

La Figure III.5 illustre la distribution de température pour un nombre de  $Ra= 1.1 \cdot 10^5$ . On constate, à partir de cette figure, que les molécules du fluide en contact avec la paroi se réchauffent, il y a donc une dilatation locale du fluide et ainsi, sa densité locale diminue, les molécules s'élèvent, ce qui crée un écoulement ascendant pour les particules les plus légères.

3. Convection forcée

3.1. Nombre de Nusselt moyen

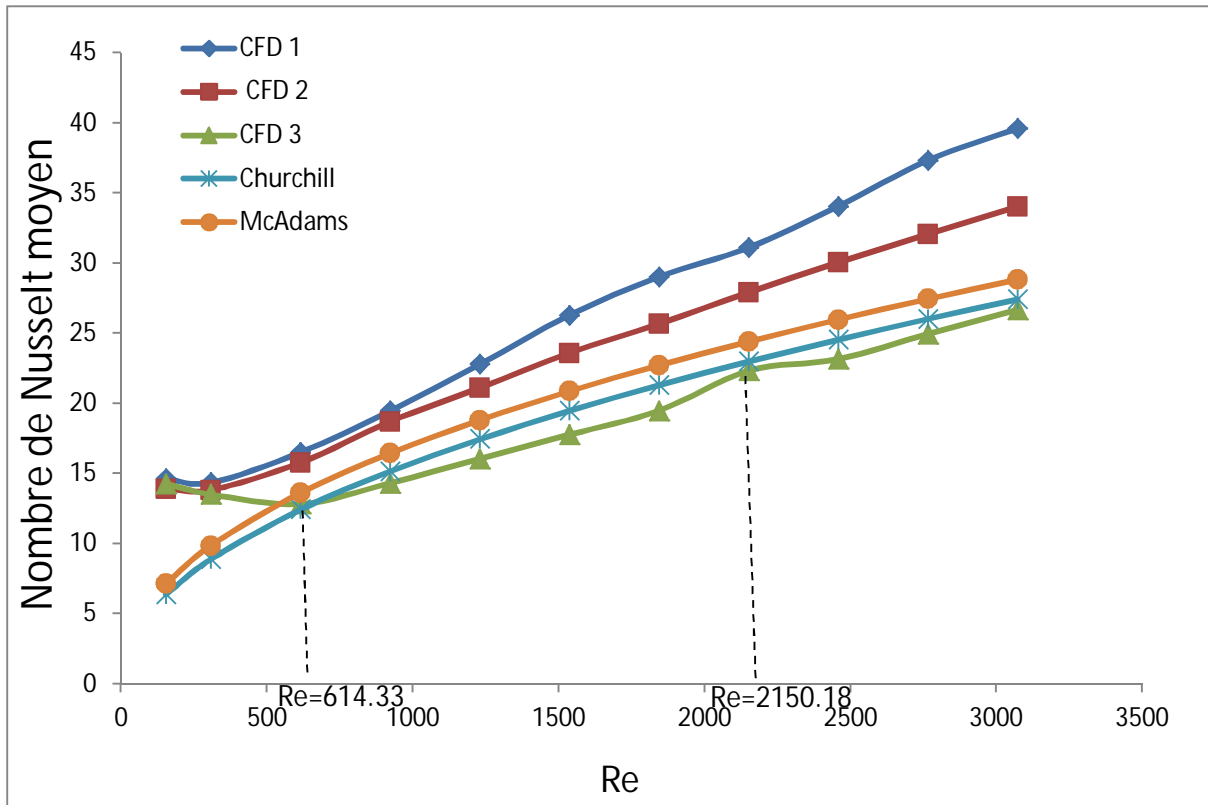


Figure III.6 : Variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds

La Figure III.6, montre que l’affinage du maillage permet de réduire l’écart entre les résultats obtenus par l’approche CFD et les corrélations de Mc Adams [2] et Churchill & Bernstein [5].

Corrélation de Churchill & Bernstein :

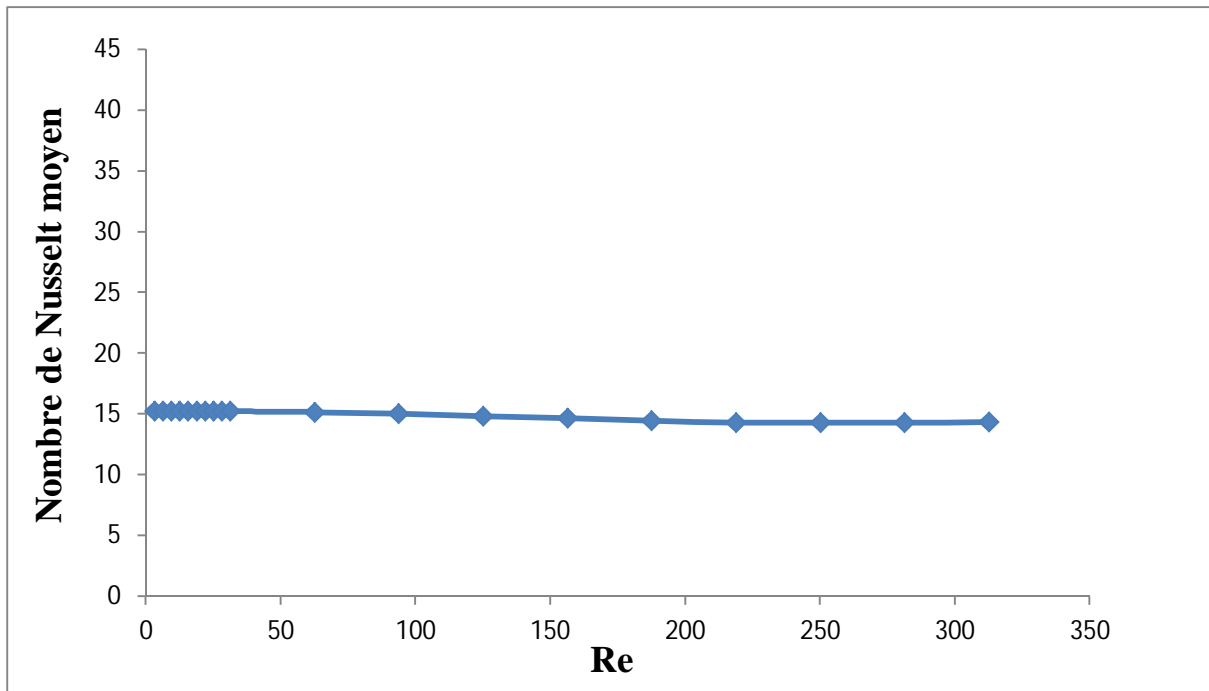
$$Nu_d = 0.3 + \frac{0.62Re_d^{1/2}Pr^{1/3}}{[1+(0.4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \quad Re_d < 10000 \quad (IV.4)$$

Corrélation de McAdams :

$$Nu_{df} = \frac{hd}{k_f} = 0.683 \left( \frac{u_\infty d}{\nu_f} \right)^{0.466} Pr_f^{1/3} \quad 40 < Re_d < 4000 \quad (IV.5)$$

En effet, la courbe nommée CFD3 (Figure II.6) approche de façon satisfaisante les résultats expérimentaux fournis par les corrélations 1 et 2.

Par ailleurs, on distingue deux zones : La première qui correspond à un nombre de Reynolds  $Re= 614.33$  et  $Gr=1527245.59$ , soit un nombre de Richardson  $Ri=4.04$ , définie la transition de la convection naturelle vers la convection mixte. La seconde qui correspond à un nombre de Reynolds  $Re= 2150.18$  et  $Gr=1527245.59$ , soit un nombre de Richardson  $Ri=0.33$ , définie la transition de la convection mixte vers la convection forcée.



*Figure III.7 : Evolution du nombre de Nusselt moyen en fonction de faibles nombres de Reynolds*

La Figure (III.7) représente la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de faible nombre de Reynolds, on constate que la variation du nombre de Nusselt moyen est très faible, ce qui nous conduit à déduire que la convection naturelle est dominante dans cette zone.

3.2. Profil de vitesse

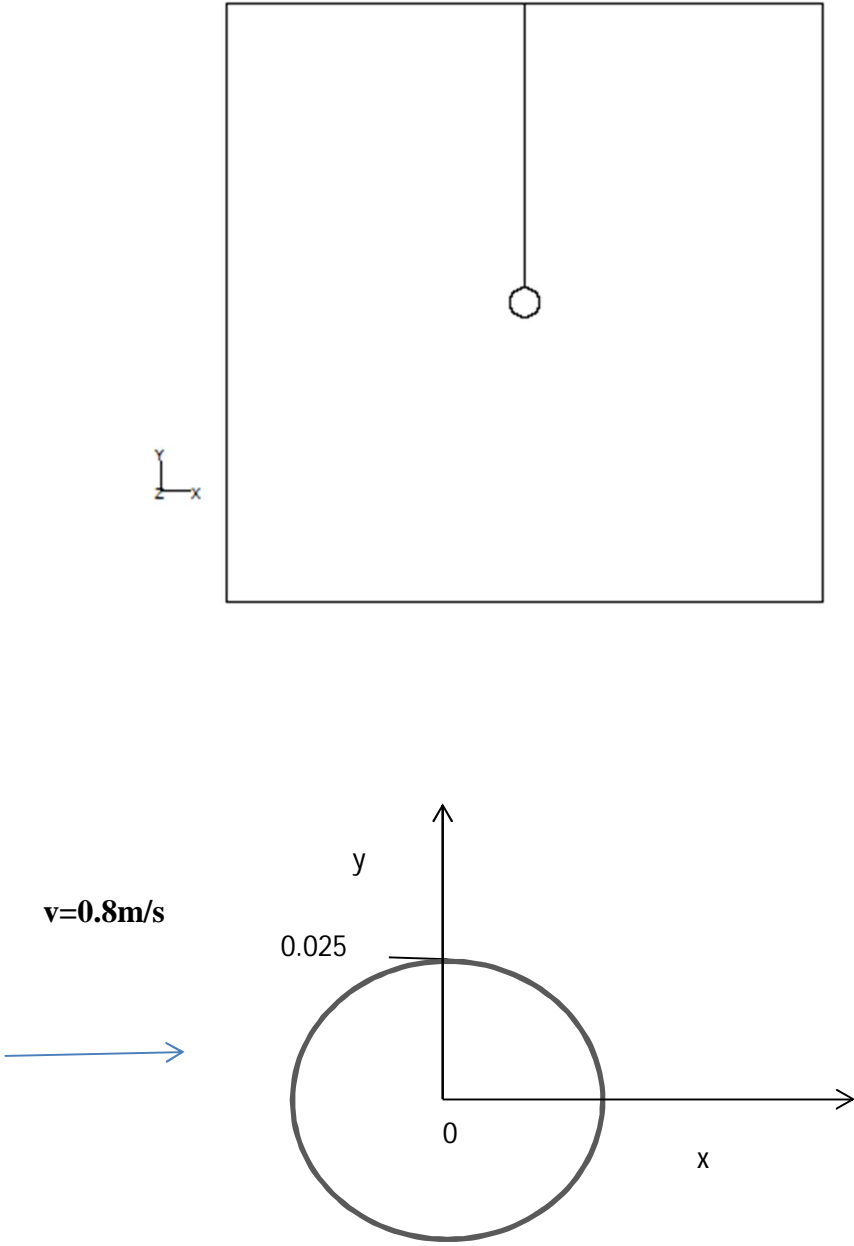
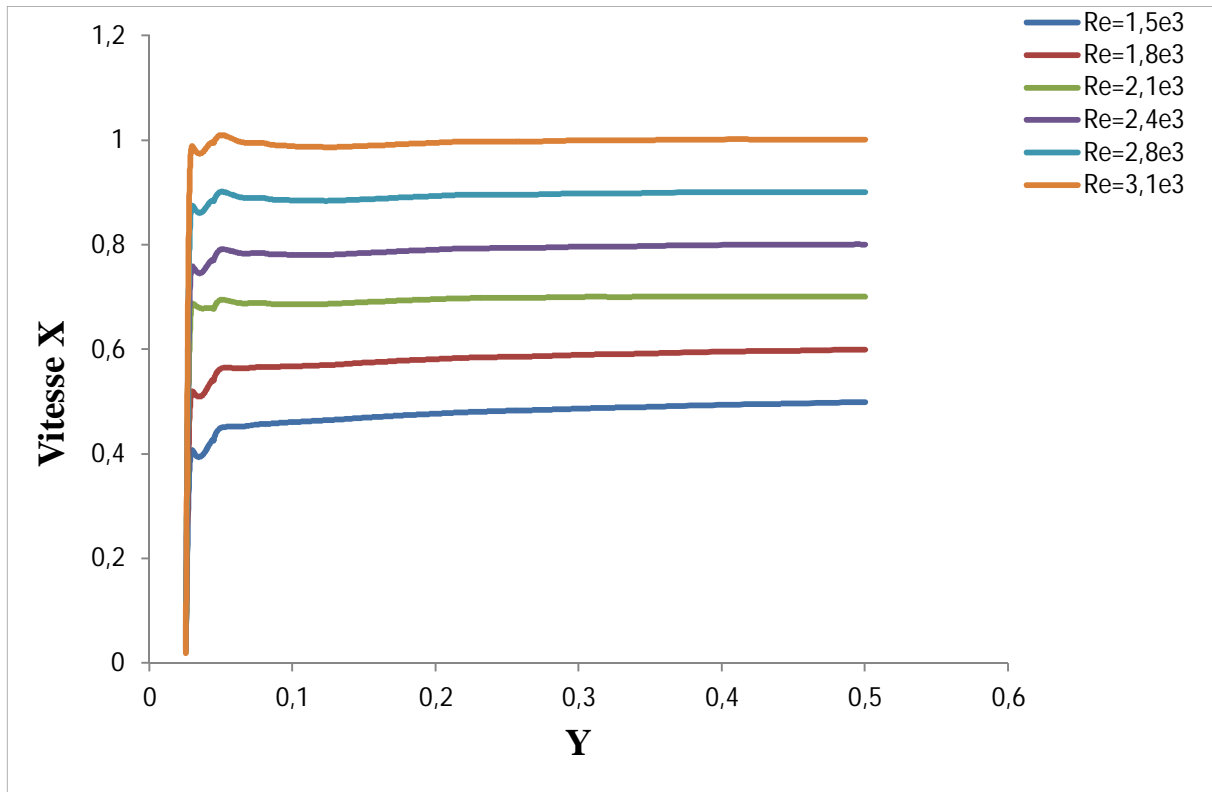


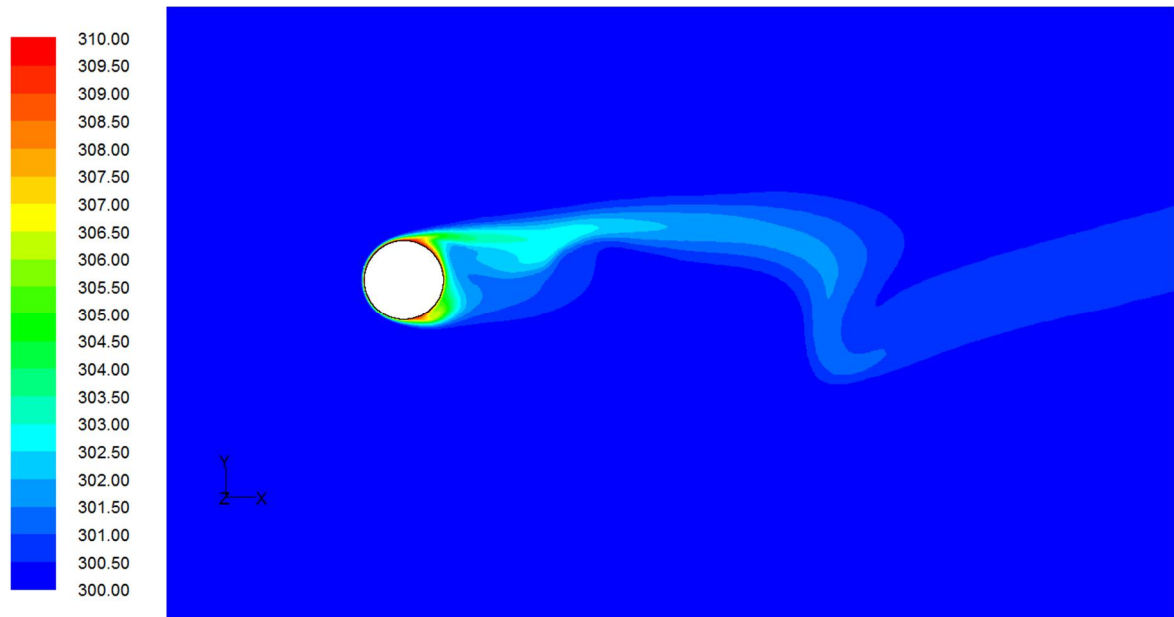
Figure III.8 : création d'une ligne dans la direction OY en fixant l'abscisse à une valeur de  $x=0$



*Figure III.9 : Profil de vitesse pour des différentes valeurs du nombre de Reynolds et  $Ra=1.1*10^6$*

On remarque que pour un nombre de Reynolds donné, le profil de la vitesse reste à peu près le même en fonction de l'ordonnée. Cependant, on remarque qu'au voisinage de l'ordonnée  $y=0.025$ , que la condition d'adhérence est vérifiée avec des vitesses nulles. Par ailleurs, la couche limite dynamique est mise en évidence par le fait qu'en s'éloignant de la paroi, la vitesse augmente pour se stabiliser à une valeur dictée par l'intensité de la vitesse imposée au loin.

### 3.3. Distribution de la température



*Figure III.10 : Distribution de la température pour  $Ra=1.1.10^6$  et  $Ri=0.25 < 0.33$*

La figure III.10 représente la distribution de température pour  $Ra=1.1*10^6$  et  $Ri=0.25 < 0.33$

On remarque que la distribution des températures en convection forcée, se fait suivant la direction de l'écoulement. On constate que le gradient de température est moins important sur le côté faisant face à l'écoulement puis, il augmente progressivement jusqu'à atteindre un maximum sur le côté arrière du cylindre. L'atténuation du gradient de température est observée au fur et à mesure qu'on s'éloigne du bord de fuite de l'obstacle.

## Conclusion générale

---

L'une des principales motivations de ce travail a été la contribution à la compréhension du phénomène de la convection autour d'un cylindre horizontal isotherme, dont le but est l'étude du coefficient de transfert de chaleur par convection et la localisation des zones de transitions par le nombre de Richardson.

Pour cela, nous nous sommes intéressés à l'évaluation numérique du nombre de Nusselt par le code Fluent et ce, pour les trois modes de transfert convectifs (naturelle, mixte, forcée).

Pour pouvoir vérifier la fiabilité des résultats obtenus, nous avons procédé à une étude comparative avec des corrélations empiriques qui régissent les lois du transfert de chaleur pour notre cas de figure.

Concernant la convection naturelle, l'étude comparative du nombre de Nusselt moyen montre une bonne concordance entre les valeurs obtenues par les deux approches CFD et celles obtenues par les corrélations.

Pour le cas de la convection forcée, on a montré que les résultats obtenus par l'approche CFD, et après raffinage du maillage, se rapprochaient des résultats obtenus par les corrélations de McAdams et Churchill.

D'autre part, on circonscrit deux zones : La première qui correspond à un nombre de Richardson égal à  $Ri=4.04$ , définit la transition de la convection naturelle vers la convection mixte. La seconde qui correspond à un nombre de Richardson  $Ri=0.33$ , définit la transition de la convection mixte vers la convection forcée. On note toutefois, que pour des valeurs de  $Ri > 4.04$  la convection naturelle est dominante. Pour  $Ri < 0.33$ , c'est la convection forcée qui est dominante.

S'agissant du profil des vitesses et de la distribution de la température, nous avons obtenus des résultats qui respectent la logique de l'écoulement et le comportement des couche limites aussi bien dynamique que thermique.

## Références Bibliographiques

[1] : Morgan, V. T. *The Overall Convective Heat Transfer from Smooth Circular Cylinders, Advances in Heat Transfer* (T. F. Irvine and J. P. Hartnett, eds.), vol.11, New York: Academic Press, 1975. Reporté par J.P.Holman.

[2] : McAdams, W. H. *Heat Transmission*, 3d ed. New York: McGraw-Hill, 1954. Reporté par J.P.Holman.

[3] : Churchill, S. W., and H. H. S. Chu. "Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Horizontal Cylinder," *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 18, 1975. Reporté par J.P.Holman.

[4] : Churchill, S. W., and Usagi, R. 1972. "A general expression for the correlation of rates of transfer and other phenomena, *AIChE J.*, 18, 1121-1128. Reporté par Kreit, F and Bhon, M.S 1993.

[5] : Churchill, S. W., and M. Bernstein. "A Correlating Equation for Forced Convection from Gases and Liquids to a Circular Cylinder in Crossflow," *J. Heat Transfer*, vol. 99, pp. 300–306, 1977. Reporté par Kreit, F and Bhon, M.S 1993.

[6] : Hyman, S. C., C. F. Bonilla, and S.W. Ehrlich. "Heat Transfer to Liquid Metals from Horizontal Cylinders," *AiChE Symp. Heat Transfer, Atlantic City*, 1953, p. 21. Reporté par J.P.Holman.

[7] : Clemes, S.B., Hollands, K.G.T., and Brunger, A.P. 1994. Natural convection heat transfer from horizontal isothermal cylinders, *J. Heat Transfer*, 116, 96–104. Reporté par Kreit, F and Bhon, M.S 1993.

[8] : Giedt, W. H. "Investigation of Variation of Point Unit-Heat-Transfer Coefficient around a Cylinder Normal to an Air Stream," *Trans. ASME*, vol. 71, pp. 375–81, 1949. Reporté par J.P.Holman.

[9] : Knudsen, J. D., and D. L. Katz. *Fluid Dynamics and Heat Transfer*. New York: McGraw-Hill, 1958. Reporté par J.P.Holman.

[10] : Hilpert, R. "Wärmeabgabe von geheizten Drahten und Röhren," *Forsch. Geb. Ingenieurwes.*, vol. 4, p. 220, 1933. Reporté par J.P.Holman.

[11] : Martinelli R.C. et al. (1943) – *Trans. Am. Inst. Chem. Engrs.*, 38, 943. Reporté par Jacques PADET.

[12] : VILEMPOC V., POLE R., SUKANEK P.C.. (1990) – Heat transfer in newtonian liquids around a circular cylinder, *Int. J.H.M.T.* 33, n°3, p. 447-456. . Reporté par Jacques PADET.

[13] : Hilpert, R. (1932) – VDI – Forshungsheft N° 355. . Reporté par Jacques PADET.

[14] : Reiher H. (1925) – Forshungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurives N° 269. . Reporté par Jacques PADET.

[15]: Fand, R. M. “Heat Transfer by Forced Convection from a Cylinder to Water in Crossflow,” *Int J. Heat Mass Transfer*, vol. 8, p. 995, 1965. Reporté par J.P.Holman.

[16] : Eckert, E. R. G., and R. M. Drake. *Analysis of Heat and Mass Transfer*. New York: McGraw-Hill, 1972. Reporté par J.P.Holman.

[17] : Zukauskas, A. A., V. Makarevicius, and A. Schlanciauskas: *Heat Transfer in Banks of Tubes in Crossflow of Fluid*. Vilnius, Lithuania: Mintis, 1968. Et Zukauskas, A. “Heat Transfer from Tubes in Cross Flow,” *Adv. Heat Transfer*, vol. 8, pp. 93–160, 1972. Reporté par J.P.Holman.

[18] : Whitaker, S. “Forced Convection Heat-Transfer Correlations for Flow in Pipes, Past Flat Plates, Single Cylinders, Single Spheres, and Flow in Packed Beds and Tube Bundles,” *AIChE J.*, vol. 18, p. 361, 1972. Reporté par J.P.Holman.

[19] : Nakai, S., and T. Okazaki. “Heat Transfer from a Horizontal Circular Wire at Small Reynolds and Grashof Numbers—1 Pure Convection,” *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 18, p. 387, 1975. Reporté par J.P.Holman.

[20] : D.C. COLLIS and M.J. WILLIAMS, “Two-dimensional convection from heated wires at low Reynolds numbers”, *J. Fluid Mech.*, vol. 6, 357-384, 1959. Michel Favre-Marinet sedat Tardu.

[21] : SHARMA (G.K.) et SUKHATME (S.P.). – *Combined free and forced convection heat transfer from heated tube to a transverse air stream*. Journal of Heat Transfer, p. 457-59, august 1969. Jacques PADET.

[22] : OOSTHUIZEN (P.H.) et MADAN (S.). – *Combined convective heat transfer from horizontal cylinders in air*. Journal of Heat Transfer, p. 194-6, february 1970. Jacques PADET.

[23] : OOSTHUIZEN (P.H.) et MADAN (S.). – *The effect of flow direction on combined convective heat transfer from cylinders to air*. Journal of Heat Transfer, p. 240-2, may 1971. Jacques PADET.

[24] : J.P.Holman Heat transfer / Jack P. Holman.—10th ed. p. cm.—(Mcgraw-Hill series in mechanical engineering).

[25]: Jaques Padet ; Fluides en écoulement méthodes et modèles

[26] : Simon Ostrach An analysis of laminar free-convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force.Naca TN 2635.

### **Mémoire**

[27]: S.Adli, S Belladiod ; Etude comparative des profils de couche limite dynamique et thermique et numerique(FLUENT).mémoire d'ingénieur UMMTO 2010.

[28] :K.Ouadouri, K.Mezair ; Simulation numérique de la convection naturelle, mixte et forcée sur une plaque plane vertical .mémoire d'ingénieur UMMTO 2010.

## 1. Introduction

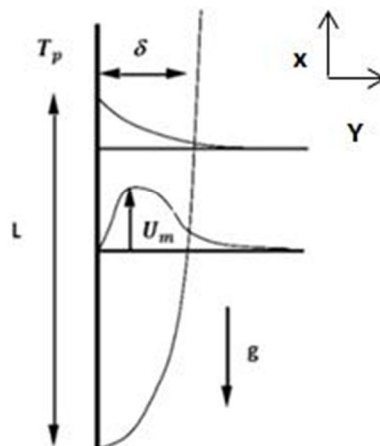
Dans cette partie nous nous intéressons à l'étude des quantités de mouvement et d'énergie pour un phénomène de convection thermique au sein d'un milieu fluide

## 2. Convection naturelle

La convection libre est un mode de transfert de chaleur obtenu lorsqu'on chauffe un fluide sans qu'il n'y ait une force extérieure, l'écoulement créé est dû aux différences de températures.

Dans notre cas, on considère une plaque plane verticale dont la température  $T_p$  est supérieure à celle du fluide environnant (l'air),  $T_\infty$  les particules fluides au voisinage de la plaque, portées à une température plus élevée que celle du fluide au loin, sont plus légères et ont tendance à monter le long de la plaque. Il se crée alors, un écoulement ascendant le long de cette plaque

La notion d'épaisseur de la couche limite dynamique  $\delta$  et la couche limite thermique est la même que celle définit dans les paragraphes (II.2) et(I.8).



*Figure A.1: Plaque verticale chauffée à une température  $T_p$*

On tenant compte des mêmes hypothèses simplificatrices retenues dans le chapitre II, les équations de continuité, d'énergie et de quantité de mouvement seront écrites de la manière suivante :

1) L'équation de continuité :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (\text{A. 1})$$

2) L'équation d'énergie :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} T} \right) = \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) \quad (\text{A. 2})$$

3) L'équation de quantité de mouvement :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} V} = \beta(T - T_\infty) \vec{g} - \frac{1}{\rho_\infty} \overrightarrow{\operatorname{grad} p^*} + \nu \Delta \vec{V} \quad (\text{A. 3})$$

## 2.1. Equations de la couche limite laminaire

### 2.1.1. Les équations dimensionnelles

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{A. 4})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \beta g(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A. 5})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{A. 6})$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\text{Pour } y=0 \quad u=v=0 \quad T = T_p$$

$$\text{Pour } y \rightarrow \infty \quad u \rightarrow \infty \quad T \rightarrow T_\infty$$

### 2.1.2 Les équations adimensionnées

Pour écrire ces équations, on doit définir les variables adimensionnelles suivantes :

$$x^+ = \frac{x}{L}; \quad y^+ = \frac{y}{L}; \quad u^+ = \frac{u}{V^0}; \quad v^+ = \frac{v}{V^0}; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

En convection naturelle, les données des problèmes ne comportent jamais de valeurs pour une vitesse quelconque qui pourrait servir de référence. L'expression de  $V^0$  est dictée par les choix multiples dans la littérature. On retient

$$V^0 = 2\sqrt{g\beta\Delta T^0 L} \quad (\text{A.7})$$

avec  $L$  : la longueur de la plaque et  $T - T_\infty \geq 0 \rightarrow 0 \leq \theta \leq 1$

D'où les équations adimensionnelles s'écrivent :

$$\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{2} \frac{1}{(Gr_L)^{1/2}} \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}} \quad (\text{A.9})$$

$$u^+ \frac{\partial \theta}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial \theta}{\partial y^+} = \frac{1}{2} \frac{1}{(Bo_L)^{1/2}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{+2}} \quad (\text{A.10})$$

où :

$$Gr_L = \frac{g\beta|T_p - T_\infty|L^3}{\nu^2} \quad (\text{Nombre de Grashof}) \quad (\text{A.11})$$

$$Bo_L = \frac{g\beta|T_p - T_\infty|L^3}{\alpha^2} \quad (\text{Nombre de Boussineq}) \quad (\text{A.12})$$

### 2.1.3. Solution des équations

Le système d'équations (A.4) (A.5) (A.6) admet une solution similaire, identique à la solution de Blasius pour la couche limite laminaire que nous allons détailler.

Pour résoudre ces équations, on admet le changement de variables suivant :

$$\frac{u}{V^0} = f(\eta) \quad (A.13)$$

$$\theta = \frac{|T - T_\infty|}{\Delta T^0} \quad (A.14)$$

avec :

$$\eta = \frac{y}{X(x)} \quad (A.15)$$

$$\Delta T^0 = |T_p - T_\infty| \quad (A.16)$$

où  $X(x)$  est une longueur caractéristique de la couche limite.

On cherche à obtenir des solutions de la forme suivante :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (A.17)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (A.18)$$

$$\theta = \frac{|T - T_\infty|}{\Delta T^0} = \theta(\eta) \quad (A.19)$$

On remplace (A.17) et (A.18) dans l'équation de continuité (A.4), on voit qu'elle est vérifiée

#### a. Equation de mouvement

On exprime  $u$ ,  $v$ ,  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$ ,  $\partial^2 u/\partial y^2$  en fonction de  $\eta$ :

Pour  $u$  on a d'après (A.13) :

$$u = V^0 f(\eta) \quad (A.20)$$

En ce qui concerne  $v$ , on exprime d'abord la fonction de courant  $\psi$  :

On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = u \cdot X = V^0 X \cdot f(\eta) \quad (\text{A. 21})$$

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\eta = \int V^0 X \cdot f(\eta) d\eta \quad (\text{A. 22})$$

$$= V^0 X(x) \int f(\eta) d\eta = V^0 X(x) F(\eta)$$

où  $F(\eta) = \int f(\eta) d\eta$

En posant

$$f(\eta) = \frac{dF}{d\eta} = F'(\eta) \quad (\text{A. 23})$$

La fonction de courant  $\psi$  devient alors :

$$\psi = V^0 X(x) \cdot F(\eta) \quad (\text{A. 24})$$

On remplace (A.23) dans l'expression de  $u$  on aura donc

$$u = V^0 F'(\eta) \quad (\text{A. 25})$$

De là, on tire les différents termes qui interviennent dans les équations (A.4), (A.5), (A.6), en premier lieu, la composante  $V$  de la vitesse :

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -F(\eta) \frac{d(V^0 X)}{dx} - V^0 X \frac{dF}{d\eta} \\ &= -FX \frac{dV^0}{dx} - FV^0 \frac{dX}{dx} - V^0 X F' \left( -\frac{y}{X^2} \right) \frac{dX}{dx} \end{aligned} \quad (\text{A. 26})$$

$$v = -FX \frac{dV^0}{dx} + V^0 \frac{dX}{dx} (\eta F' - F) \quad (\text{A. 27})$$

Puis la suite des dérivées :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dV^0}{dx} F' - V^0 F'' \frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} \quad (\text{A. 28})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = V^0 \frac{F''}{X} \quad (\text{A. 29})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = V^0 \frac{F'''}{X^2} \quad (\text{A. 30})$$

On remplace ces équations dans l'équation de quantité de mouvement (A.5) on prend en considération l'expression (A.13) d'où

$$\begin{aligned} V^0 F' \left( \frac{dV^0}{dx} F' - V^0 F'' \frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} \right) + \left\{ -FX \frac{dV^0}{dx} + V^0 \frac{dX}{dx} (\eta F' - F) \right\} \frac{V^0 F'''}{X} \\ = g\beta \Delta T^0 \theta + v \frac{V^0 F'''}{X^2} \end{aligned} \quad (\text{A. 31})$$

Ceci donne après regroupement des termes et simplification :

$$V^0 \frac{dV^0}{dx} (F'^2 - FF') - V^0 \frac{1}{X} \frac{dX}{dx} FF'' = g\beta \Delta T^0 \theta + v \frac{V^0}{X^2} F''' \quad (\text{A. 32})$$

Une condition nécessaire pour que la similitude soit réalisée est que les coefficients soient indépendants de  $x$  ; alors (A.32) se présentera comme une équation différentielle à coefficients constants, la solution  $F$  ne dépendant que de la variable  $\eta$  . On doit donc avoir en particulier, pour le premier terme :

$$V^0 \frac{dV^0}{dx} = cte \quad (\text{A. 33})$$

Soit  $V^0$  proportionnel à  $\sqrt{x}$

$$V^0 \approx \sqrt{x} \quad (\text{A. 34})$$

Ceci conforte le choix déjà établi de la vitesse de référence  $V^0$  à savoir :

$$V^0 = 2\sqrt{g\beta\Delta T^0 x} \quad (\text{A. 35})$$

d'où :

$$\frac{dV^0}{dx} = \sqrt{\frac{g\beta\Delta T^0}{x}} \quad \text{et} \quad V^0 \frac{dV^0}{dx} = 2g\beta\Delta T^0 \quad (\text{A. 36})$$

L'équation (A.32) devienne alors :

$$2(F'^2 - FF') - 4\frac{x}{X}\frac{dX}{dx}FF'' = \theta + \frac{2v}{\sqrt{g\beta\Delta T^0}}\frac{\sqrt{x}}{X^2}F''' \quad (\text{A. 37})$$

Pour les deux autres coefficients de l'équation (A.32) on pose :

$$\frac{\sqrt{x}}{X^2} = C_1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{X}\frac{dX}{dx} = C_2 \quad (\text{A. 38})$$

De la première condition, on tire :

$$X^2 = C_1\sqrt{x} \quad \text{soit} \quad X = \sqrt{C_1}x^{1/4} \quad (\text{A. 39})$$

Et alors la seconde condition se trouve vérifiée puisque :

$$\frac{x}{X}\frac{dX}{dx} = \frac{x}{x^{1/4}}\frac{1}{x^{3/4}} = 1 \quad (\text{A. 40})$$

Dans la littérature des choix multiples des constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont proposés

Nous prendrons ici, pour avoir le coefficient 1 devant le terme  $F'''$  :

$$\frac{2v}{\sqrt{g\beta\Delta T^0}}\frac{\sqrt{x}}{X^2} = 1 \quad (\text{A. 41})$$

d'où l'expression de X :

$$X = \left(\frac{4v^2 x}{g\beta\Delta T^0}\right)^{1/4} \quad (\text{A. 42})$$

En déduit à partir de la relation (A.38) que :

$$C_2 = \frac{x}{X}\frac{dX}{dx} = \frac{1}{4} \quad (\text{A. 43})$$

La forme finale de l'équation de quantité de mouvement (A.37) se réduit à :

$$2(F'^2 - FF'') - FF'' = \theta + F''' \quad (A.44)$$

ou encore

$$F''' - 2F'^2 + 3FF'' + \theta = 0 \quad (A.45)$$

L'expression de  $\eta$  devient :

$$\eta = \frac{y}{x} \left( \frac{g\beta\Delta T^0 x^3}{4\nu^2} \right)^{1/4} \quad (A.46)$$

Soit

$$\eta = \frac{y}{x} \left( \frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \quad (A.47)$$

### b. Equation d'énergie

En tenant compte de l'équation(A.19) on exprime :

$\partial\theta/\partial x$ ,  $\partial\theta/\partial y$ ,  $\partial^2\theta/\partial^2\theta$  en fonction de  $\eta$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\theta'}{X} \quad (A.48)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{\theta''}{X^2} \quad (A.49)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} = \theta' \frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} \quad (A.50)$$

On remplace ces équations dans l'équation d'énergie, prenant en considération l'équation (A.14) :

$$V^0 F' \left( -\theta' \frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} \right) \Delta T^0 + \left\{ -FX \frac{dV^0}{dx} + V^0 \frac{dX}{dx} (\eta F' - F) \right\} \frac{\theta'}{X} \Delta T^0 = a \frac{\theta''}{X^2} \Delta T^0 \quad (A.51)$$

Après développement et simplification on aura :

$$F \frac{dV^0}{dx} \theta' + V^0 \frac{1}{X} \frac{dX}{dx} F \theta' + a \frac{\theta''}{X^2} = 0 \quad (\text{A.52})$$

Puis en remplaçant par les valeurs de  $V^0$  par (A.35) et  $X$  par (A.42), on constate que la variable  $x$  disparaît par simplification et il reste une équation à coefficients constants

$$3F\theta' + \frac{a}{\nu} F'' = 0 \quad (\text{A.53})$$

On a  $\frac{a}{\nu} = Pr$  remplaçant dans (A.53) :

$$\theta'' + 3PrF\theta' = 0 \quad (\text{A.54})$$

En résumé, nous avons obtenu un système couplé de deux équations différentielles à coefficients constants, dont les solutions  $F(\eta)$  et  $\theta(\eta)$  ne dépendent que de  $\eta$  et présentent donc les qualités de similitude requises au départ. Ces deux équations (II.63) et (II.72) sont réécrites ci-dessous :

$$F''' - 2F'^2 + 3FF'' + \theta = 0 \quad (\text{A.55.a})$$

$$\theta'' + 3PrF\theta' = 0 \quad (\text{A.55.b})$$

Les conditions aux limites associées à ces équations sont :

- A la paroi :  $\eta=0$

$$u = 0 \Rightarrow F'(0) = 0$$

$$v = 0 \Rightarrow F(0) = 0$$

$$T = T_p \Rightarrow \theta(0) = 1$$

- Au loin :  $\eta \rightarrow \infty$

$$u = 0 \Rightarrow F'(\infty) = 0$$

$$v = 0 \Rightarrow F(\infty) = 0$$

$$T = T_\infty \Rightarrow \theta(\infty) = 0$$

#### 2.1.4. Les résultats

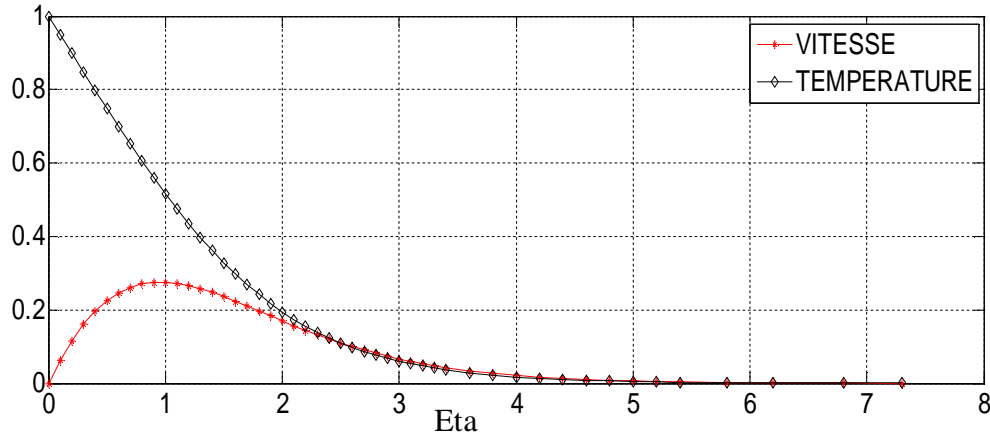
Les résultats obtenus pour un nombre de Prandtl égal à 0,72 sont illustrés dans le tableau (A.1), et elles sont identiques à ceux obtenus par Simon Ostrach [26]

H	F	$F'$	$F''$	$\Theta$	$\theta'$
0	0.0000	0.0000	0.6760	1.0000	-0.5046
0.1	0.0032	0.0627	0.5785	0.9495	-0.5045
0.2	0.0122	0.1159	0.4866	0.8991	-0.5037
0.3	0.0216	0.1602	0.4007	0.8488	-0.5016
0.4	0.0440	0.1962	0.3210	0.7989	-0.4979
0.5	0.0651	0.2246	0.2479	0.7493	-0.4921
0.6	0.0887	0.2460	0.1817	0.7005	-0.4840
0.7	0.1141	0.2612	0.1224	0.6526	-0.4735
0.8	0.1407	0.2708	0.0711	0.6059	-0.4607
0.9	0.1681	0.2754	0.0246	0.5606	-0.4456
1.0	0.1957	0.2759	-0.0143	0.5168	-0.4284
1.1	0.2231	0.2728	-0.0468	0.4749	-0.4095
1.2	0.2501	0.2667	-0.0734	0.4350	-0.3891
1.3	0.2764	0.2583	-0.0845	0.3972	-0.3676
1.4	0.3017	0.2480	-0.1106	0.3615	-0.3453
1.5	0.3260	0.2363	-0.1224	0.3281	-0.3227
1.6	0.3490	0.2236	-0.1302	0.2970	-0.3000
1.7	0.3707	0.2104	-0.1347	0.2681	-0.2775
1.8	0.3910	0.1968	-0.1363	0.2415	-0.2556
1.9	0.4100	0.1832	-0.1356	0.2170	-0.2344
2.0	0.4277	0.1687	-0.1331	0.1945	-0.2141

2.1	0.440	0.1566	-0.1290	0.1741	-0.1949
2.2	0.4590	0.1440	-0.1238	0.1555	-0.1768
2.3	0.4728	0.1319	-0.1178	0.1387	-0.1598
2.4	0.4854	0.1204	-0.1113	0.1235	-0.1441
2.5	0.4969	0.1097	-0.1044	0.1098	-0.1296
2.6	0.5074	0.0996	-0.0973	0.0976	-0.1163
2.7	0.5168	0.0902	-0.0903	0.0865	-0.1041
2.8	0.5254	0.0815	-0.0834	0.0767	-0.0930
2.9	0.5332	0.0735	-0.0767	0.0679	-0.0830
3.0	0.5401	0.0661	-0.0703	0.0601	-0.0739
3.1	0.5464	0.0594	-0.0642	0.0531	-0.0657
3.2	0.5520	0.533	-0.0585	0.0469	-0.0584
3.3	0.5571	0.0477	-0.0531	0.0414	-0.0518
3.4	0.5616	0.0427	-0.0481	0.0365	-0.0459
3.6	0.5692	0.0339	-0.0392	0.0284	-0.0359
3.8	0.5735	0.0269	-0.0317	0.0220	-0.0281
4.0	0.5801	0.0212	-0.0255	0.0170	-0.0219
4.2	0.5838	0.0166	-0.0204	0.0132	-0.0170
4.4	0.5868	0.0130	-0.0162	0.0102	-0.0132
4.6	0.5891	0.0101	-0.0128	0.0078	-0.0102
4.8	0.5908	0.0078	-0.0102	0.0060	-0.0080
5.0	0.5922	0.0060	-0.0079	0.0046	-0.0061
5.2	0.5933	0.0046	-0.0063	0.0035	-0.0048
5.4	0.5941	0.0034	-0.0048	0.0027	-0.0037
5.8	0.5951	0.0019	-0.0029	0.0015	-0.0022
6.2	0.5957	0.0010	-0.0018	0.0009	-0.0013
6.8	0.5960	0.0003	-0.0008	0.0003	-0.0006
7.3	0.5961	0.0000	-0.0004	0.0001	-0.0003

*Tableau(A1): Les valeurs numériques des fonctions  $F$  et  $\theta$  ainsi que leurs dérivée*

La figure suivante illustre les profils de vitesses et de températures adimensionnés



**Figure A.2 : Profils des vitesses et de températures adimensionnés obtenus sous Matlab**

### 2.1.5. Le coefficient d'échange convectif et le nombre de Nusselt

La densité de flux de chaleur à la paroi  $\varphi_p$  est obtenue à partir de la loi de Fourier, soit :

$$\varphi_p = h_x(T_p - T_\infty) = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\lambda(T_p - T_\infty) \left( \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{\eta=0} \quad (\text{A.56})$$

Par identification nous pouvons déduire l'expression du coefficient de transfert local  $h_x$  ainsi que le nombre de Nusselt local  $Nu_x$  :

$$h_x = -\frac{\lambda}{x} \left( \frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \theta'(0) \quad \text{et} \quad Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda} = -\left( \frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \theta'(0) \quad (\text{A.57})$$

Le nombre de Nusselt global à l'abscisse L noté  $\overline{Nu}_L$ , est obtenu par intégration du nombre de Nusselt local entre 0 et L

$$\overline{Nu}_L = \frac{\overline{h}_L L}{\lambda} \quad (\text{A.58})$$

On a:  $\overline{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx$

$$\overline{h}_L = \frac{3}{4} h_L \quad (\text{A. 59})$$

Donc

$$\overline{Nu}_L = \frac{4}{3} Nu_L \quad (\text{A. 60})$$

L'analyse théorique ci-dessus montre que le nombre de Nusselt  $Nu_L$  dépend du nombre de Rayleigh  $Ra_L$  comme suit :

$$\overline{Nu}_L = A Ra_L^{1/4} \quad (\text{A. 61})$$

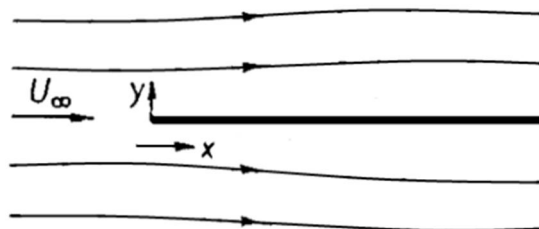
### 3. Convection forcée

La convection forcée se manifeste quand le mouvement du fluide est provoqué par une action externe telle une pompe, ventilateur ou vent, le transfert est plus rapide que dans le cas de la convection naturelle.

Un problème de convection forcée peut être abordé de façon globale qui consiste à étudier des bilans de masse, de quantité de mouvement et de chaleur dans un volume macroscopique dit volume de contrôle.

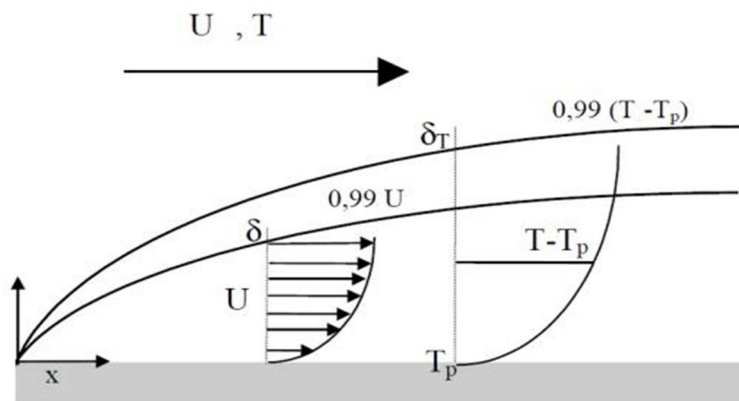
On considère une plaque plane portée à une température  $T_p$ , placée dans un milieu fluide à température uniforme à l'infini  $T_\infty$  et de vitesse constante  $U_\infty$

On désigne par "x" la distance dans le sens de l'écoulement depuis le bord d'attaque, et par "y" la distance suivant la normale à la plaque



*Figure A.3 : Plaque plane placée dans un écoulement uniforme*

Dans ce cas de convection forcée l'épaisseur de la couche limite mécanique (dynamique) est la zone de fluide comprise entre la paroi et le lieu des points où la vitesse est de 0.99 fois la vitesse de l'écoulement non perturbé  $\frac{u(\delta)}{u_\infty} = 0.99$ , cependant l'épaisseur de la couche limite thermique reste inchangée par rapport à la convection naturelle



*Figure A.4 : Schéma descriptif des couches limites thermique et dynamique*

### 3.1. Les hypothèses simplificatrices

Pour ce cas de convection on admet :

- L'écoulement permanent est laminaire ;
- Unidirectionnel (vitesse  $U_\infty$  au loin) et isotherme ;
- Le fluide est isochore ( $\beta=0$ ) et les propriétés thermo physique du fluide sont ;  
indépendantes de la température  $\rho = \text{cte}$  ,  $\mu = \text{cte}$  ,  $\lambda = \text{cte}$   $C_p = \text{cte}$  ;
- La dissipation visqueuse est négligée ;
- les effets de la gravité sont négligeables.

### 3.2. Les équations dimensionnelles

Les équations de continuité (A.1), de quantité de mouvement (A.2) et d'énergie(A.3) se réduisent alors en 2D à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A. 62})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A. 63})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A. 64})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A. 65})$$

La dernière équation (65) peut être simplifiée car on observe que le gradient thermique reste étroitement localisé à proximité de la surface : si l'abscisse  $x$  est mesurée depuis le point de départ du phénomène thermique, on a toujours  $\delta_T \ll x$ . Quantitativement, cela se traduit par l'existence de gradients de température beaucoup plus importants dans la direction  $y$  que dans la direction  $x$ .

De cette analyse nous tireront un principe général en formulant les "*hypothèses de la couche limite thermique*" :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{A. 66})$$

Donc l'équation d'énergie devient :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{A. 67})$$

avec :

$$p^* = p + \rho g y : \text{Pression motrice}$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} : \text{Diffusivité thermique}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} : \text{viscosité cinématique}$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

Pour	$y = 0$	$u = v = 0$
	$y \rightarrow \infty$	$u = U_\infty$

### 3.3. Equations de la couche limite dynamique

#### 3.3.1. Les équations adimensionnées

En conséquence, on obtient, compte tenu de cette analyse d'ordre de grandeurs, un système d'équations simplifiées adimensionnées, en posant :

$$x^+ = \frac{x}{L}; \quad y^+ = \frac{y}{L}; \quad u^+ = \frac{u}{U_\infty}; \quad v^+ = \frac{v}{U_\infty}; \quad p^{*+} = \frac{p^*}{\rho U_\infty^2}; \quad \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = T^+$$

avec  $L$  : longueur de la plaque et  $U_\infty$  : la vitesse maximum

Les équations adimensionnées de quantité de mouvement, d'énergie et de continuité s'écrivent par :

$$u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = -\frac{\partial p^{*+}}{\partial x^+} + \frac{1}{Re_L} \left( \frac{\partial^2 u^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}} \right) \quad (A. 68)$$

$$u^+ \frac{\partial v^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = -\frac{\partial p^{*+}}{\partial y^+} + \frac{1}{Re_L} \left( \frac{\partial^2 v^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 v^+}{\partial y^{+2}} \right) \quad (A. 69)$$

$$u^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{1}{Pe_L} \left( \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{+2}} \right) \quad (A.70)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = 0 \quad (A.71)$$

avec  $Re_L$  est le nombre de Reynolds  $Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu}$

et  $Pe_L = \frac{U_\infty L}{a}$  : nombre de Peclet

Les conditions aux limites deviennent

$$\begin{array}{ll} \text{Pour} & y^+ = 0 & u^+ = v^+ = 0 \\ & y^+ \rightarrow \infty & u^+ = 1 \end{array}$$

On va évaluer les ordres de grandeurs des différents termes dans les équations adimensionnelles :

$$\delta \ll L \Rightarrow \delta^+ = \frac{\delta}{L} \quad (A.72)$$

$x^+ = \frac{x}{L} \in [0,1] \Rightarrow x^+$  et  $\partial x^+$  sont de l'ordre 1 qu'on notera:

$$\begin{cases} x^+ \approx 1 \\ \partial x^+ \approx 1 \end{cases} \quad (A.73)$$

$$u^+ = \frac{u}{u_\infty} \in [0,1] \text{ donc } u^+ \approx 1 \text{ et } \partial u^+ \approx 1 \quad (A.74)$$

$$y^+ = \frac{y}{L} \in [0, \delta^+] \text{ donc } \partial y^+ \approx \delta^+ \text{ et } y^+ \approx \delta^+ \quad (A.75)$$

Pour que l'équation (A.71) soit satisfaite quand on remplace (A.73), (A.74) et (A.75) il faut que les deux termes soit de même ordre donc  $\partial v^+ \approx \delta^+$  ce qui donne  $v^+ \approx \delta^+$

On voit maintenant qu'il est possible d'évaluer les ordres de grandeurs des tous les termes

$$\frac{\partial v^+}{\partial x^+} \approx \delta^+ \quad (\text{A. 76})$$

$$\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^{+2}} = \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right) \approx 1 \quad (\text{A. 77})$$

$$\frac{\partial^2 v^+}{\partial x^{+2}} = \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \frac{\partial v^+}{\partial x^+} \right) \approx \delta^+ \quad (\text{A. 78})$$

$$\frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}} = \frac{\partial}{\partial y^+} \left( \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right) \approx \frac{1}{\delta^{+2}} \quad (\text{A. 79})$$

$$\frac{\partial^2 v^+}{\partial y^{+2}} = \frac{\partial}{\partial y^+} \left( \frac{\partial v^+}{\partial y^+} \right) \approx \frac{1}{\delta^+} \quad (\text{A. 80})$$

Pour que les termes d'inertie et de viscosité soient de même ordre, il faut que  $Re_e \approx \frac{1}{\delta^{+2}}$

On réécrit les équations adimensionnelles en indiquant les ordres de grandeurs des différents termes :

$$\underbrace{u^+}_{1} \underbrace{\frac{\partial u^+}{\partial x^+}}_1 + \underbrace{v^+}_{\delta^+} \underbrace{\frac{\partial u^+}{\partial y^+}}_{\frac{1}{\delta^+}} = -\frac{\partial p^{*+}}{\partial x^+} + \frac{1}{\delta^{+2}} \left( \underbrace{\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^{+2}}}_1 + \underbrace{\frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}}}_{\frac{1}{\delta^{+2}}} \right) \quad (\text{A. 81})$$

$$\underbrace{u^+}_{1} \underbrace{\frac{\partial v^+}{\partial x^+}}_{\delta^+} + \underbrace{v^+}_{\delta^+} \underbrace{\frac{\partial v^+}{\partial y^+}}_1 = -\frac{\partial p^{*+}}{\partial y^+} + \frac{1}{\delta^{+2}} \left( \underbrace{\frac{\partial^2 v^+}{\partial x^{+2}}}_{\delta^+} + \underbrace{\frac{\partial^2 v^+}{\partial y^{+2}}}_{\frac{1}{\delta^+}} \right) \quad (\text{A. 82})$$

$$\underbrace{\frac{\partial u^+}{\partial x^+}}_1 + \underbrace{\frac{\partial v^+}{\partial y^+}}_1 = 0 \quad (\text{A. 83})$$

D'après (A.81) on voit que

$$\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^{+2}} \ll \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}} \quad (\text{A.84})$$

Pour qu'il y ait homogénéité, le terme  $\frac{\partial p^{*+}}{\partial y^+}$  doit être de l'ordre de  $\delta^+$  soit :

$$\Delta P^{*+} = \int_0^{\delta^+} \frac{\partial p^{*+}}{\partial y^+} \partial y^+ \approx \delta^{+2} \ll 1 \quad (\text{A.85})$$

La variation de la pression motrice  $p^{*+}$  est faible suivant l'épaisseur de la couche limite donc la pression est constante dans la direction perpendiculaire à la plaque.

Tenant compte de l'équation (A.84) dans (A.68) :

$$u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = -\frac{\partial p^{*+}}{\partial x^+} + \frac{1}{Re_L} \left( \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}} \right) \quad (\text{A.86})$$

Ainsi que la condition à la limite  $y^+ \rightarrow \infty$   $u^+ = 1$

On aura :

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \rightarrow 0 \text{ ainsi que } \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}} = 0 \quad (\text{A.87})$$

L'équation (A.86) devient alors:

$$u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} = -\frac{\partial p^{*+}}{\partial x^+} \quad (\text{A.88})$$

### 3.3.2. Les équations dimensionnelles

L'équation dimensionnelle (A.63) devient :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A. 89})$$

D'après la condition aux limites  $y \rightarrow \infty$

$$u = U_\infty$$

En dehors de la couche limite, l'écoulement est unidimensionnel sans gradient de vitesse, il résulte de l'équation (A.63)

:

$$\frac{\partial p_\infty^*}{\partial x} = 0 \quad (\text{A. 90})$$

A la frontière de la couche limite on a aussi

$$\left. \frac{\partial p^*}{\partial x} \right|_{y=\delta} = 0 \quad (\text{A. 91})$$

Ce qui résulte que  $\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0$  dans la couche limite

Les équations se résument par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A. 92})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A. 93})$$

### 3.3.3. Résolution par la méthode de Blasius

Les profils de vitesse dans la couche limite laminaire sont exprimés par la relation :

$$\frac{u}{U_{\infty}} = f(\eta) \quad (\text{A. 94})$$

avec

$$\eta = \frac{y}{\alpha(x)} \quad (\text{A. 95})$$

On introduit la fonction de courant  $\psi$  tel que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{A. 96})$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{A. 97})$$

En remplaçant (A.96) et (A.97) dans l'équation de continuité, on voit que l'équation est vérifiée

Mais pour l'équation de (A.93) on doit d'abord exprimer  $u$ ,  $v$

$\partial u / \partial x$ ,  $\partial v / \partial y$ ,  $\partial^2 u / \partial y^2$  en fonction de  $\eta$

Pour  $u$

$$u = U_{\infty} f(\eta) \quad (\text{A. 98})$$

Pour l'expression de  $v$  on va définir la fonction de courant  $\psi$  :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = u \alpha = U_{\infty} \alpha f(\eta) \quad (\text{A. 99})$$

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\eta = \int U_{\infty} \alpha(x) f(\eta) d\eta \quad (\text{A. 100})$$

$$= U_{\infty} \alpha \int f(\eta) d\eta = U_{\infty} \alpha(x) F(\eta)$$

où

$$F(\eta) = \int f(\eta) d\eta \quad (A.101)$$

donc

$$\psi = U_{\infty} \alpha(x) F(\eta) \quad (A.102)$$

alors

$$f(\eta) = F'(\eta) \quad (A.103)$$

ainsi

$$u = U_{\infty} F'(\eta) \quad (A.104)$$

at

$$v = -U_{\infty} \left\{ F \frac{d(\alpha(x))}{dx} + \alpha(x) \frac{dF}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \right\} \quad (A.105)$$

on a

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{\alpha^2(x)} \frac{d(\alpha(x))}{dx} = -\frac{\eta}{\alpha(x)} \frac{d(\alpha(x))}{dx} \quad (A.106)$$

On déduit l'expression finale de v

$$v = U_{\infty} \frac{d(\alpha(x))}{dx} (\eta F' - F) \quad (A.107)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -U_{\infty} F'' \frac{\eta}{\alpha(x)} \frac{d(\alpha(x))}{dx} \quad (A.108)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_{\infty} F'' \frac{1}{\alpha(x)} \quad (A.109)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{\infty}}{\alpha(x)} F''' \frac{1}{\alpha(x)} \quad (A.110)$$

On remplace les équations (A.104), (A.107), (A.108), (A.109) et (A.110) dans (A.93)

$$F''' + \frac{U_\infty \alpha(x)}{\nu} \frac{d(\alpha(x))}{dx} FF'' = 0 \quad (A.111)$$

Pour que l'équation de Blasius soit satisfaite, il faut que :

$$\frac{U_\infty \alpha(x)}{\nu} \frac{d(\alpha(x))}{dx} = \frac{1}{2} \quad (A.112)$$

Ce qui donne après intégration

$$\alpha^2(x) = \frac{\nu}{U_\infty} x + cte \quad (A.113)$$

Au bord d'attaque de la plaque ( $x=0$ ) il n'y pas encore de couche limite donc  $\alpha(0)=0$

Ce qui déduit que

$$\alpha(x) = \left( \frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (A.114)$$

Ce qui donne que

$$\eta = \left( \frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} y \quad (A.115)$$

Donc l'équation de Blasius devient :

$$F''' + \frac{1}{2} FF'' = 0 \quad (A.116)$$

avec les conditions aux limites on a :

$$\eta=0 : u=0 \text{ et } v=0 \rightarrow F'(\eta)=0 \text{ et } F(\eta)$$

$$\eta \rightarrow \infty : u \rightarrow U_\infty \rightarrow F'(\eta) \rightarrow 1$$

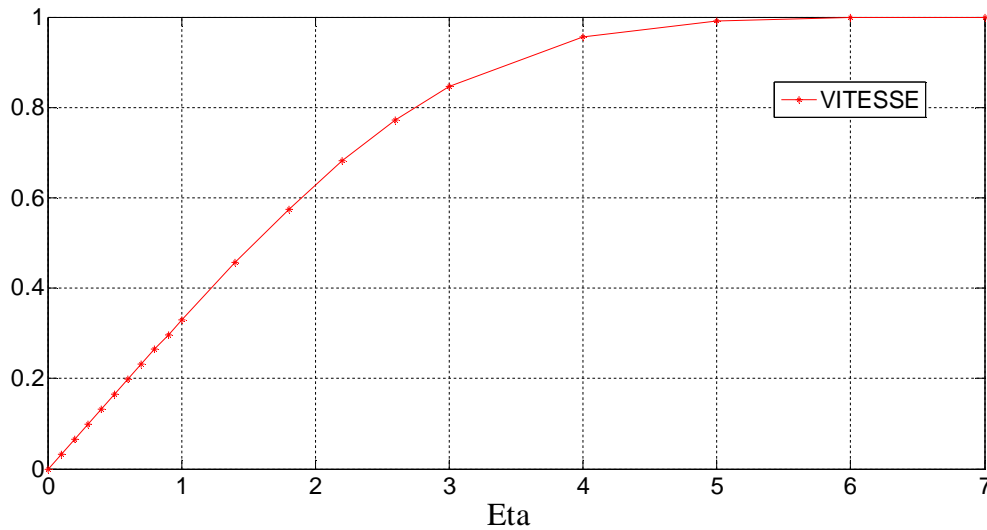
L'équation (A.116) est une équation différentielle ordinaire du troisième ordre, sa résolution numérique se fait par la méthode de Range Kutta d'ordre 4.

Les résultats des calculs [27] sont donnés dans le tableau suivant :

H	F	F'	F''
0.0	0.00000	0.00000	0.33205
0.1	0.00166	0.03317	0.33205
0.2	0.00663	0.06637	0.33198
0.3	0.01493	0.09957	0.33181
0.4	0.02655	0.13273	0.33147
0.5	0.04148	0.16585	0.33091
0.6	0.05971	0.19890	0.33008
0.7	0.08125	0.23186	0.32892
0.8	0.10608	0.26467	0.32739
0.9	0.13418	0.29732	0.32543
1.0	0.16553	0.32975	0.32301
1.4	0.32293	0.45623	0.30787
1.8	0.52945	0.57473	0.28294
2.2	0.78111	0.68128	0.24836
2.6	1.07240	0.77243	0.20647
3.0	1.39670	0.84603	0.16137
4.0	2.30560	0.95551	0.06424
5.0	3.28320	0.99154	0.01591
6.0	4.27950	0.99897	0.00240
7.0	5.27910	0.99992	0.00022

*Tableau A.2: les valeurs numériques de la fonction F et ses dérivées*

La figure suivante illustre les profils de vitesses adimensionnés



*Figure A.5: Profil de vitesse adimensionné obtenu sous Matlab*

### 3.3.4. La solution pour une couche limite thermique

On remplaçant  $u$  et  $v$  calculés précédemment dans l'équation d'énergie

$$U_{\infty} F' \frac{\partial T}{\partial x} + U_{\infty} \frac{d\alpha(x)}{dx} (\eta F' - F) \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (A.117)$$

Ajoutons ici une hypothèse de similitude sur les profils de température, de même nature que celle qui a été introduite pour la vitesse, en admettant que  $T - T_p / T_{\infty} - T_p$  dépend seulement de  $\eta$

Exprimant les termes de l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left( \frac{U_{\infty}}{vx} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (A.118)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \left( \frac{U_{\infty}}{vx} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \quad (A.119)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{y}{x^{3/2}} \left( \frac{U_{\infty}}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (A.120)$$

$$\frac{d\alpha(x)}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.121})$$

On porte ces termes dans l'équation précédente (II.135)

$$\frac{1}{2} \eta F' \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{1}{2} (\eta F' - F) \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\alpha}{\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \quad (\text{A.122})$$

Avec  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$

Après simplification on trouve :

$$2T'' + PrFT' = 0 \quad (\text{A.123})$$

où : F est une solution de l'équation de Blasius (A.116) et  $T' = \frac{\partial T}{\partial \eta}$

#### 4. La convection mixte

Le phénomène de la convection mixte résulte par définition de la compétition entre un écoulement de convection naturelle et un écoulement de convection forcée. La mixité vient alors du fait que le mouvement du fluide est occasionné par les forces internes, qui sont le plus souvent des forces de gravité, et par la source externe qui est par exemple une pompe.

On considère une plaque plane verticale isotherme immergée dans un fluide (l'air) à la température  $T_\infty$  et vitesse au loin  $U_\infty$

On admet les mêmes hypothèses de la convection naturelle ajoutant que l'écoulement est unidirectionnel

Il s'agit à présent d'écrire les équations régissant le phénomène de la convection mixte en tenant compte de ces hypothèses.

### 4.1. Expression des bilans en convection mixte

Les équations générales qui agissent sur le champ des vitesses et des températures expriment respectivement le bilan de masse, le bilan de quantité de mouvement, et le bilan d'énergie.

$$\text{div } \rho \vec{v} = 0 \quad (\text{A.124})$$

$$\overline{\text{grad}} \vec{V} \cdot \rho \vec{V} = \rho \vec{g} - \overline{\text{grad}} p + \mu (\Delta \vec{V} + \overline{\text{grad}} \text{div } \vec{V}) \quad (\text{A.125})$$

$$\rho C_p (\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} T) = \phi + \text{div}(\lambda \overline{\text{grad}} T) \quad (\text{A.126})$$

En tenant compte des hypothèses on voit que les équations ne sont pas tout à fait différentes de celles qui ont été notées en convection naturelle.

Les équations se présentent ainsi

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (\text{A.127})$$

$$\vec{V} \overline{\text{grad}} \vec{V} = -\beta(T - T_\infty) \vec{g} - \frac{1}{\rho_\infty} \overline{\text{grad}} p^* + \nu \Delta \vec{V} \quad (\text{A.128})$$

$$\vec{V} \overline{\text{grad}} T = a \Delta T \quad (\text{A.129})$$

Le gradient de pression est n

### 4.2. Les équations dimensionnées

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.130})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \beta g (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A.131})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{A.132})$$

Les conditions aux limites

A  $y=0$  on a  $u=v=0$  et  $T=T_p$

Et a  $y \rightarrow \infty$  on aura  $u=U_\infty$  avec  $T=T_p$

### 4.3. Les équations adimensionnées

Considérant les variables adimensionnelles suivantes:

$$x^+ = \frac{x}{L}; \quad y^+ = \frac{y}{L}; \quad u^+ = \frac{u}{U_\infty}; \quad v^+ = \frac{v}{U_\infty}; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

Où  $U_\infty$  est la vitesse du fluide au loin

Les équations de la couche limite qui régissent l'écoulement s'écrivent alors:

$$\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = 0 \quad (A.133)$$

$$u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}} + \frac{Gr_L}{Re_L^2} \theta \quad (A.134)$$

$$u^+ \frac{\partial \theta}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial \theta}{\partial y^+} = \frac{1}{Pe_L} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{+2}} \quad (A.135)$$

Avec  $\frac{Gr_L}{Re_L^2}$  est le nombre de Richardson

Ri est d'ailleurs le seul paramètre adimensionnel supplémentaire qui caractérise la convection mixte par rapport à la convection forcée.

Ce nombre caractérise l'importance d'un mode par rapport à un autre, autrement dit l'un des modes est prédominant alors que l'autre agit comme un perturbateur.

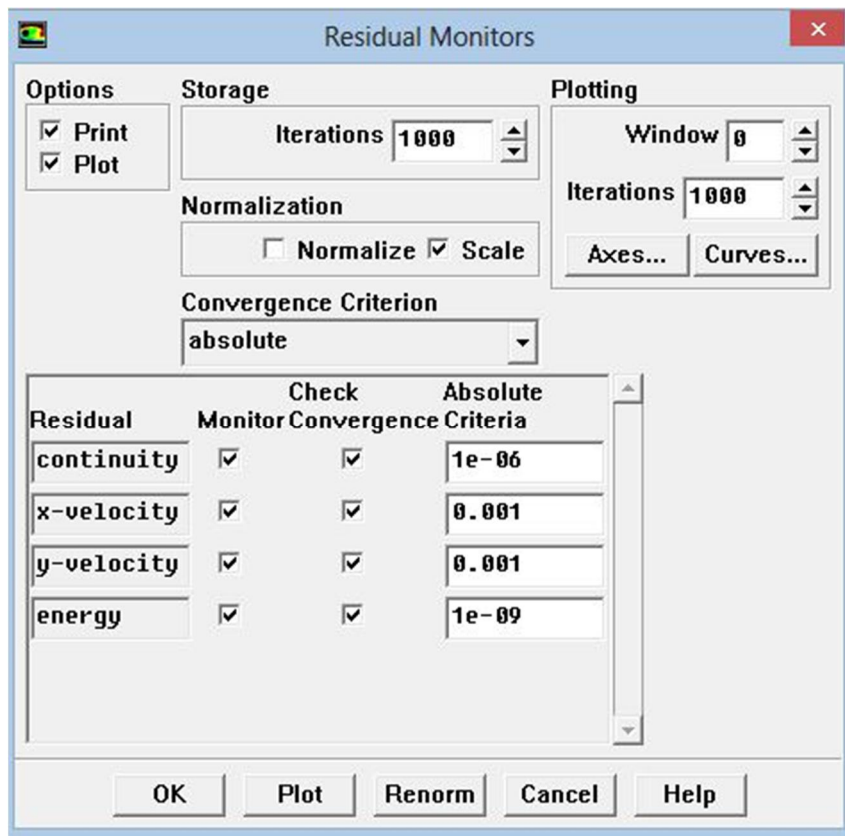
Si  $R_i \gg 1$  : La convection naturelle domine,

Si  $R_i \ll 1$  : La convection forcée domine

Si  $R_i \approx 1$ : La convection est dite mixte,

**Conclusion**

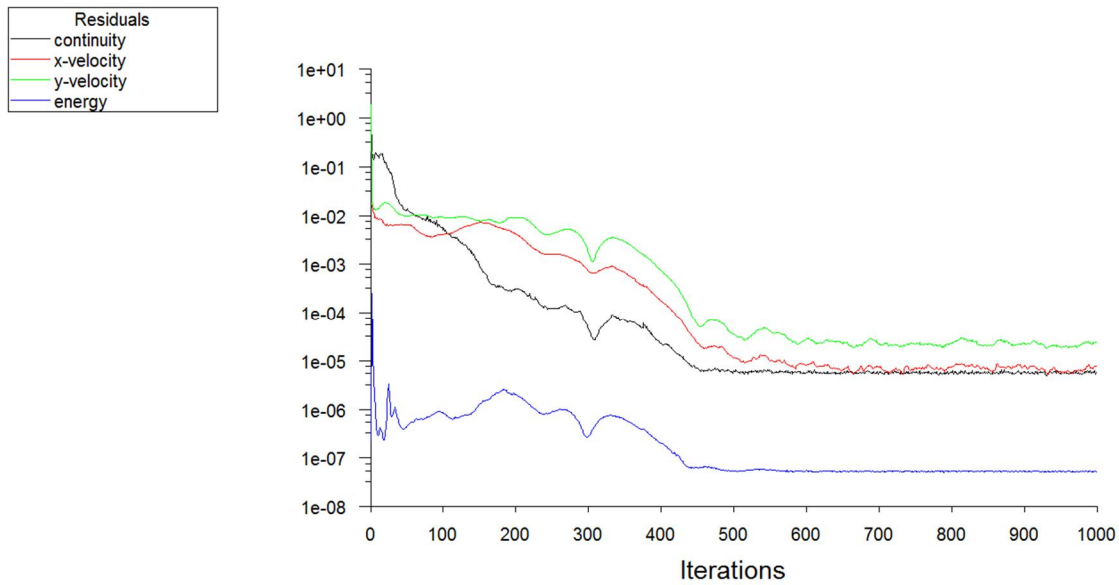
L'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle fait partie des problèmes les plus étudiés en mécanique des fluides. C'est pour cette raison qu'on a déterminé dans ce chapitre les équations dimensionnelles et adimensionnelles et les conditions aux limites qui caractérisent les trois modes de transfert de chaleur par convection (naturelle, forcée et mixte) en tenant compte des hypothèses simplificatrices de chaque type de convection.



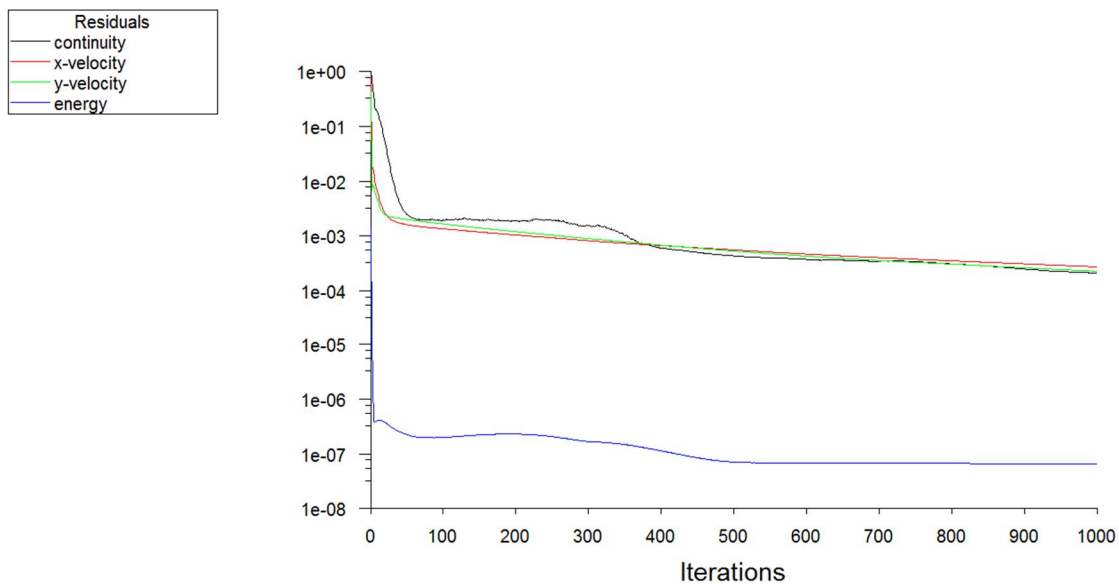
*Figure B.1 : Choix et affinage pendant les calculs des critères de convergence*

Pour afficher la convergence à l'écran pendant les calculs sous forme d'un graphe, il faut activer l'option Plot.

Dans la plupart des cas, le critère de convergence par défaut dans FLUENT(residual) est suffisant. la solution converge quand les résidus atteignent  $10^{-3}$ . toutes fois, dans certains cas il faut pousser les calculs à  $10^{-4}$  voire  $10^{-6}$ . il n'y a pas de règle universel.



**Figure B2 :** l'évolution des résidus des équations de continuité, énergie et quantité de mouvement pour la convection naturelle pour un nombre de  $Ra=1.1*10^6$



**Figure B.3 :** l'évaluation des résidus des équations de continuité, énergie et quantité de mouvement pour la convection mixte  $Ra=1.1*10^6$ ,  $Re=2.4*10^3$  et  $Ri=0.25$