


N° d'ordre:

RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
 UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI DE TIZI OUZOU
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE LAROMAD

MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Mathématiques
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par

SADOUN SOUAD

OUALI LIZA

LA MÉTHODE ADAPTÉE PRIMALE , DUALE ET APPLICATIONS : SYSTÈMES DYNAMIQUES ET CONTRÔLE OPTIMAL

Soutenu le 14 Juillet 2022 devant le jury :

Pr.	OUANES MOHAND	UMMTO	Président du jury
Dr.	OUKACHA BRAHIM	UMMTO	Examineur
Dr.	CHEBBAH MOHAMMED	UMMTO	Encadreur

Année Universitaire : 2021/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma très chère maman en signe d'amour, de reconnaissance et de gratitude pour tout le soutien et les sacrifices dont elle m'a fait preuve à mon égard qu'Allah la protège.

À mon père vous êtes pour moi une source de vie car sans vos sacrifices, votre tendresse et votre affection je ne pourrais arriver jusqu'au bout.

À mon frère RACHID et mes sœurs FARIZA et ANISSA pour leur assistance, leur encouragement et leur soutien. Je vous aime beaucoup.

À celle avec qui j'ai partagée ce travail ma chère binôme et ma meilleure amie SOUAD et tout sa famille.

À toutes les familles : OUALI, BRAHIMI.

À mes amis avec qui j'ai partagé des moments les plus agréables et tous ceux qui sont chers et proches à mon cœur et à tous ceux qui m'aiment et qui auraient voulu partager ma joie.

LIZA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma très chère maman en signe d'amour, de reconnaissance et de gratitude pour tout le soutien et les sacrifices dont elle m'a fait preuve à mon égard qu'Allah la protège.

À mon cher père vous êtes pour moi une source de vie car sans vos sacrifices, votre tendresse et votre affection je ne pourrais arriver jusqu'au bout.

À mes frères SOFIANE et MOURAD et ma sœur DIHIA pour leur assistance, leur encouragement et leur soutien. Je vous aime beaucoup.

À celle avec qui j'ai partagée ce travail ma chère binôme et ma meilleure amie LIZA et tout sa famille .

À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, celui qui s'est sacrifié pour me voir réussir, qui n'a pas hésité à m'aider mon cher mari SOFIANE.

À toutes les familles : SADOUN ,TAFNI et TAMENE.

À mes amis avec qui j'ai partagé des moments les plus agréables et tous ceux qui sont chers et proches à mon cœur et à tous ceux qui m'aiment et qui auraient voulu partager ma joie.

SOUAD

REMERCIEMENTS

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Nous remercions dieu tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir tout en illuminant notre chemin, et nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener notre travail à terme.

Nous tenons à adresser nos plus vifs remerciements à notre promoteur Monsieur M.CHEBBAH qui a su nous guider et nous orienter. Nous lui exprimons notre plus grande gratitude pour l'attention et le temps qu'il nous a consacré ainsi que les précieux conseils qu'il nous a prodigués. Sans oublier l'aide de Mr.HAMIDI MAHDI vice doyen de la faculté des sciences UMMTO .

Nous remercions aussi les membres du jury qui nous ont fait l'honneur d'en faire partie et qui ont eu la patience de nous écouter.

Nous témoignons une reconnaissance particulière à l'ensemble des enseignants qui nous ont suivis pendant notre cursus, Enfin, nous remercions tous ceux qui nous ont

encouragé tout au long de notre parcours universitaire et ceux qui ont contribué de près ou de loin à notre formation.

Tizi-Ouzou, le 13 juillet 2022.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	viii
LISTE DES TABLEAUX	ix
INTRODUCTION	1
1 RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE	2
1.1 POSITION DU PROBLÈME	3
1.2 ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE	5
1.3 DÉROULEMENT DE LA MÉTHODE	9
1.3.1 ETAPE 1 : CHANGEMENT DE PLAN	10
1.3.2 ETAPE 2 : CHANGEMENT DU SUPPORT	11
1.4 ALGORITHME DE RÉOLUTION	14
1.5 EXEMPLE D'APPLICATION	14
1.5.1 RÉOLUTION DE L'EXEMPLE AVEC LA MÉTHODE DU SIMPLEXE	24
1.6 COMPARAISON ENTRE LA MÉTHODE ADAPTÉE ET LA MÉTHODE DU SIMPLEXE	27
1.7 CONCLUSION	27
2 RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX AVEC CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE	28
INTRODUCTION	29
2.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME	29
2.2 SUPPORT DES CONTRAINTES	30
2.3 SUPPORT DE LA FONCTIONNELLE	30
2.4 SUPPORT PLAN	31
2.5 ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE	32
2.6 ITERATION DE L'ALGORITHME	38
2.6.1 LE CHANGEMENT DE PLAN	39
2.6.2 LE CHANGEMENT DU SUPPORT	40

2.7	ALGORITHME DE RESOLUTION	43
	RÉSOLUTION PRATIQUE	45
2.7.1	EXEMPLE D'APPLICATION	45
2.8	CONCLUSION	50
3	LA RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX EN PROGRAMMA- TION LINÉAIRE AVEC LA MÉTHODE DUALE ADAPTÉE	51
	INTRODUCTION	52
3.1	PRÉSENTATION DU PROBLÈME DUAL	52
3.2	DÉFINITIONS ESSENTIELLES	52
3.3	PROPRIÉTÉS	53
3.4	CRITÈRES D'OPTIMALITÉ	56
3.5	CONDITIONS SUFFISANTES D'INEXISTENCE DE PLAN ADMIS- SIBLE POUR LE PROBLÈME P(2)	57
3.6	ITÉRATION DE LA MÉTHODE	58
3.6.1	CALCUL DE L'INDICE DE NON OPTIMALITE	58
3.6.2	CALCUL DE L'ACCROISSEMENT DUAL	60
3.7	ALGORITHME DE RÉOLUTION	62
4	LA RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX EN CONTRÔLE OPTIMAL	65
4.1	INTRODUCTION	66
	INTRODUCTION	66
4.2	LE CAS DISCRET	66
4.2.1	POSITION DU PROBLÈME	66
4.3	NOTION DE COMMANDABILITE	69
4.4	CALCUL DE L'ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE	71
4.5	MÉTHODE DE RÉOLUTION	73
4.6	ALGORITHME DE RÉOLUTION	73
4.7	EXEMPLE D'APPLICATION	74
5	LOGICIELS MATLAB , LINGO, VISUAL XPRESS ET APPLICATION INFORMATIQUE	78
I	LINGO	79
5.1	QU'EST-CE QUE LINGO?	81
5.2	LES ÉTAPES DU PROGRAMME	81
II	VISUAL XPRESS	83
5.3	QU'EST-CE QUE VISUAL XPRESS?	84
	PRÉSENTATION DU LOGICIEL	84

5.4	LES ÉTAPES DU PROGRAMME	86
III	MATLAB	88
5.5	DEFINITION DU LOGICIEL MATLAB	89
5.6	PRÉSENTATION DU LOGICIEL	89
5.7	DESCRIPTION DE LA FENÊTRE MATLAB	90
5.8	MÉTHODE DE TRAVAIL	92
5.9	RÉSOLUTION DES EXEMPLES ÉTUDIÉS SOUS MATLAB	94
5.9.1	RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE AVEC LA MÉTHODE ADAPTÉE	94
5.9.2	RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MIN-MAX AVEC LA MÉ- THODE ADAPTÉE	96
	CONCLUSION GÉNÉRALE	98
	BIBLIOGRAPHIE	99

LISTE DES FIGURES

5.1	V.1-LINGO	80
5.2	Visual Xpress	80
5.3	Page d'accueil du logiciel	81
5.4	Etape 1	82
5.5	Etape 2	82
5.6	Visual Xpress	84
5.7	Interface de Visual Xpress	84
5.8	Icône File	85
5.9	Page 3	85
5.10	Icône option /optimiser	86
5.11	Icône solv LP	86
5.12	Etape 3	87
5.13	page 1	90
5.14	La fenêtre d'édition de fichier.	93
5.15	La boite de dialogue d'ouverture de fichiers	93
5.16	Résolution du problème 1 sous MATLAB	94
5.17	Résolution du problème 1 sous MATLAB	95
5.18	Résolution du problème 1 sous MATLAB	95

5.19	Résolution du problème 2 sous MATLAB	96
5.20	Résolution du problème 2 sous MATLAB	96
5.21	Résolution du problème 2 sous MATLAB	97

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Itération 1 de la résolution de l'exercice en simplexe	25
1.2	Itération 2 de la résolution de l'exercice en simplexe	26
2.1	Itération 1 de la résolution de l'exercice	46
2.2	Itération 2 de la résolution de l'exercice	47
2.3	Itération 3 de la résolution de l'exercice	47
2.4	Itération 4 de la résolution de l'exercice	48
2.5	Itération 5 de la résolution de l'exercice	48
2.6	Itération 6 de la résolution de l'exercice	49
2.7	Itération 7 de la résolution de l'exercice	49
4.1	L'itération 1	77

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La prise de décisions dans une entreprise est parfois liée à plusieurs contraintes. Ces contraintes sont généralement liées aux ressources limitées de matières premières, en main d'œuvre, capacité de production des machines . . . etc. Alors que l'objectif soit maximiser les profits ou minimiser les coûts.

La programmation linéaire est un outil très puissant qui permet d'aborder un grand nombre de problèmes d'optimisation en apparence très différents, dans des contextes très divers relevant des mathématiques de la recherche opérationnelle [GABASOV.R \[1980.\]](#) et à des applications en gestion , en économie, en statistique, physique...etc.

La programmation linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées "contraintes" qui sont linéaires et à partir des quelles on doit optimiser une fonction également linéaire appelée « Fonction objectif ».

Dans le premier chapitre, nous proposons de résoudre un problème de programmation linéaire par la méthode adaptée.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la résolution de problèmes Min-Max en programmation linéaire avec des contraintes généralisées. Et ensuite par la méthode duale adaptée dans le troisième chapitre. [Melle HAMDOS \[2010.\]](#)

Dans le quatrième chapitre nous présentons la résolution du problème Min-Max en contrôle optimal cas discret . [M CHEBBAH \[2006.\]](#)

Et en fin, dans le dernier chapitre, on terminera par définir les logiciels de programmation LINGO , VISUAL XPRESS , MATLAB et l'application des exemples étudiés sous MATLAB. [POSTEL \[2004.\]](#)

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME
DE PROGRAMMATION LINÉAIRE
PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

1

INTRODUCTION :

En mathématiques, les problèmes de programmation linéaire sont des problèmes d'optimisation où la fonction objectif et les contraintes sont toutes linéaires. Dans les années 40, la méthode classique de résolution de ce problème était la méthode du simplexe mise au point par le mathématicien américain G. Danzting. [KIRILLOVA \[1980.\]](#)

Une généralisation de la méthode du simplexe a été faite par R. Gabasov et F.M. Kirillova de l'université de Minsk en Belgique dans les années 80, appelée méthode adaptée. C'est une méthode de point intérieur permettant une résolution particulièrement rapide des problèmes linéaires. Elle est dite adaptée car elle garde certaines structures de la méthode du simplexe comme elle permet d'avoir une solution approchée.

Dans ce chapitre, nous rappelons le principe de la méthode adaptée, en étudiant un problème classique de la programmation linéaire avec contraintes. L'avantage principal de cette méthode est le fait de définir un plan d'appui comme étant la paire constituée d'un plan admissible quelconque et un appui du problème [GABASOV.R \[1980.\]](#), ce qui permet de résoudre le problème en deux étapes : le changement du plan et le changement du support (d'appui). [GABASOV.R \[1980.\]](#)

1.1 POSITION DU PROBLÈME

Considérons le problème (P1) suivant : [GABASOV.R \[1980.\]](#) [M CHEBBAH \[2006.\]](#).

$$f(x) = c'x \rightarrow \max \quad (1.1)$$

$$Ax = b \quad (1.2)$$

$$d_1 \leq x \leq d_2 \quad (1.3)$$

Avec x, c', d_1, d_2 sont des n -vecteurs réels.

b est un m -vecteur réel ;

c' transposé de c .

$A = A[I, J]$: Une $m \times n$ matrice

$I = 1 \dots m$: L'ensemble des indices de lignes de A .

$J = 1 \dots n$: L'ensemble des indices de colonnes de A .

Tout vecteur $x = x(J)$ vérifiant les contraintes 1.2 et 1.3 est dit plan du problème (P1).

— Un plan x^0 est optimal si $c'x^0 = \max(c'x) / x$ plan de (P1)

— Un plan x^ε est ε -optimal "solution approchée à ε -près" si :
 $f(x^0) - f(x^\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$ réel donnée.

Définition 1.1 [GABASOV.R \[1980.\]](#). [M CHEBBAH \[2006.\]](#)

L'ensemble des indices $J_B \subset J, |J_B| = m$ est appelé support (appui) du problème (P1) si :

$\det A_B \neq 0$ (déterminant $A_B \neq 0$) tel que :

$A_B = A[I, J_B]$ est la matrice du support (matrice d'appui).

De là en choisissant un support J_B , tout vecteur $x(J)$ peut s'écrire sous la forme :

$$x(J) = (x(J_B), x(J_H)), J_H = J - J_B,$$

où

$x(J_B)$ est l'ensemble des composantes sur les indices du support,

$x(J_H)$ est l'ensemble des composantes sur les indices hors-support,

De la même manière la matrice A peut s'écrire de la façon suivante :

$$A(I, J) = (A(I, J_B), A(I, J_H)).$$

En utilisant cette dernière décomposition le système $Ax = b$ prend la forme suivante :

$$Ax = (A(I, J_B), A(I, J_H)) \cdot (x(J_B); x(J_H)) = b$$

$$Ax = A(I, J_B) \cdot x(J_B) + A(I, J_H) \cdot x(J_H) = b$$

Comme A_B est inversible ($\det A_B \neq 0$), on peut calculer les composantes x_B en fonction de x_H :

$$x_B = x(J_B) = A_B^{-1}(b - A_H \cdot x_H), \quad \text{où} \quad A_H = A(I, J_H).$$

Définition 1.2 [GABASOV.R \[1980.\]](#).

La paire $\{x, J_B\}$ formée du plan x et du support J_B , est appelé support-plan (plan d'appui) du problème (P1).

Définition 1.3

GABASOV.R [1980.].

Le support plan $\{x, J_B\}$ est dit non-dégénéré si :

$$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \quad j \in J_B$$

1.2 ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE

GABASOV.R [1980.]. M CHEBBAH [2006.]

Soit $\{x, J_B\}$ un support plan de départ non dégénéré . Construisons les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} y' &= y'(I) = c'_B A_B^{-1}, \\ \Delta_j &= y' A(I, j) - c', \quad j \in J, \quad \Delta' = y' A - c'. \end{aligned}$$

Où y' et Δ' sont appelés respectivement vecteurs des potentiels et des estimations .

Par construction, les composantes de support du vecteur Δ sont nulles :

$$\Delta_B = \Delta(J_B) = 0.$$

Considérons un autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$ et calculons la quantité définissant l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(\bar{x}) - f(x) = c' \bar{x} - c' x = c'(x + \Delta x) - c' x = c' \Delta x \\ &= c'(J_B) \cdot \Delta x(J_B) + c'(J_H) \Delta x_H = c'_B \Delta x_B + c'_H \Delta x_H \end{aligned}$$

Comme $Ax = b$ et $A \cdot \bar{x} = b$.

Alors :

$$\begin{aligned} A \cdot \Delta x &= 0 \Rightarrow A_B \cdot \Delta x_B + A_H \cdot \Delta x_H = 0 \\ &\Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1} A_H \cdot \Delta x_H \end{aligned}$$

En remplaçant Δx_B dans $\Delta f(x)$, on obtient :

$$\Delta f(x) = (-c'_B A_B^{-1} A_H + c'_H) \cdot \Delta x_H = -\Delta'_H \Delta x_H = -\sum_{j \in J_H} \Delta_j \cdot \Delta x_j \quad (1.4)$$

Comme \bar{x} est un plan admissible (réalisable) alors l'accroissement Δx vérifie :

$$d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, \quad j \in J \quad (1.5)$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle 1.4 sous les contraintes 1.5 est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{1j} - x_j & \text{Si } \Delta_j > 0 \\ \Delta x_j = d_{2j} - x_j & \text{Si } \Delta_j < 0 \\ d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j & \text{Si } \Delta_j = 0 \quad j \in J_H \end{cases}$$

Et est égal à :

$$\beta = \beta(x, J_B) = \sum_{\Delta_j \geq 0} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{\Delta_j \leq 0} \Delta_j (x_j - d_{2j}), j \in J_H$$

est appelé valeur de sub-optimalité .

De la il en résulte que :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, J_B)$$

Et pour $\bar{x} = x^0$, on aura $f(x^0) - f(x) \leq \beta(x, J_B)$.

De cette dernière inégalité, on déduit le critère d'optimalité suivant :

Théorème 1.1 (Critère d'optimalité)

Les relations :

$$\begin{cases} x_j = d_{1j} & \text{si } \Delta_j \geq 0 & \text{Si } \Delta_j > 0 \\ x_j = d_{2j} & \text{si } \Delta_j \leq 0 & \text{Si } \Delta_j < 0 \\ x_j \in [d_{1j}, d_{2j}] & & \text{Si } \Delta_j = 0 \quad \text{Si } j \in J_H \end{cases} \quad (1.6)$$

Sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, J_B\}$.

Démonstration. **Conditions suffisantes :**

Si les inégalités 1.6 sont vérifiées alors $\beta(x, J_B) = 0$ et comme
 $\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, J_B) = 0$, pour tout \bar{x} , donc
 $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall \bar{x} \Rightarrow x$ est optimal .

Conditions nécessaires

Soit $\{x, J_B\}$ un support plan optimal non dégénéré et supposons que les inégalités
 1.6 ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire, il existe un indice $j_0 \in J_H$ tel que :

$$\Delta_{j_0} > 0, x_{j_0} > d_{1j_0}$$

ou

$$\Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0}$$

Prenons par exemple le 2^{ème} cas :

$$\Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0}$$

Construisons un nouveau plan \bar{x} de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta \cdot \ell$$

θ est un réel positif non nul et ℓ un vecteur (direction) .

Il faut trouver θ, ℓ tel que :

$$A \cdot \bar{x} = b,$$

$$d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$$

Pour cela :

— Sur J_H , posons :

$$\Delta x = \begin{cases} 0 & j \in J_H - j_0 \\ \theta & j = j_0 \end{cases}$$

avec $\theta > 0$

$$\Delta x(J_B) = -A_B^{-1} A_H \Delta x(J_H) = -\theta A_B^{-1} a_{j_0},$$

\bar{x} vérifie $A\bar{x} = b$

et pour que \bar{x} vérifie :

$$d_1 \leq \bar{x} \leq d_2,$$

il faut prendre un θ suffisamment petit, d'autant plus que le support plan $\{x, J_B\}$ est non dégénéré .

En portant $\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta \cdot \ell$, dans la formule d'accroissement, on obtient :

$$\Delta f(x) = \Delta f(\bar{x}) - f(x) = -\theta \cdot \Delta_{j_0} \cdot \ell_{j_0} > 0.$$

□

Ce qui contredit l'optimalité de $\{x, J_B\}$.

Théorème 1.2 Soit $\varepsilon > 0$ donné, pour l' ε -optimalité du plan x , il est suffisant de trouver un tel support J_B , pour lequel la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivante :

$$\beta(x, J_B) \leq \varepsilon.$$

Démonstration. [GABASOV.R \[1980.\]](#).

Conditions suffisantes

Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon \Rightarrow \Delta f(x) \leq \varepsilon \Rightarrow x$ est ε -optimal, ce qui permet d'obtenir le résultat anticipé.

Faisons une décomposition de $\beta(x, J_B)$:

Pour cela construisons le problème dual de (P1) :

$$\begin{cases} \phi(\lambda) = b' \mu - v' d_1 + \omega' d_2 \rightarrow \min \\ A' \mu - v + \omega = C, \\ v' \geq 0, \quad \omega' \geq 0, \quad \mu \in \mathcal{R}^m \end{cases}$$

Le vecteur $\lambda = (\mu, v, \omega)$ construit de la manière suivante :

$$\mu' = y' = c'_B A_B^{-1};$$

$$\begin{cases} v_j = \Delta_j, & w_j = 0 & \text{Si } \Delta_j \geq 0 \\ v_j = 0, & w_j = -\Delta_j & \text{Si } \Delta_j \leq 0, j \in J \end{cases}$$

Est un plan dual (solution admissible du dual).

$$\begin{aligned} \beta(x, J_B) &= \sum_{\Delta_j > 0} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{\Delta_j < 0} \Delta_j (x_j - d_{2j}), j \in J_H \\ &= \sum_{j \in J} \Delta_j x_j - \sum_{\Delta_j > 0} \Delta_j d_{1j} - \sum_{\Delta_j < 0} \Delta_j d_{2j}, j \in J_H \\ &= \Delta' x - \Delta' d_1 - \Delta' d_2 \\ &= (y' A - C') x - v' d_1 + w' d_2 \\ &= -C' x + y' b - v' d_1 + w' d_2 \\ &= -C' x + \phi(\mu, \nu, w) \\ &= C' x^0 - C' x + \phi(\mu, \nu, w) - C' x^0; \\ \beta(x, J_B) &= (C' x^0 - C' x) + (\phi(\mu, \nu, w) - \phi(\mu^0, \nu^0, w^0)) \\ \beta(x, J_B) &= \beta_x + \beta(J_B); \end{aligned}$$

β_x : Mesure de la non optimalité de x ,

$\beta(J_B)$: Mesure du non optimalité de l'appui J_B . □

Remarque 1.1 Soit $\{x, J_B\}$ un plan d'appui non dégénéré de départ :

Si $\beta(x, J_B) = 0 \Rightarrow x$ est optimal.

Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon \Rightarrow x$ est ε -optimal.

Si $\beta(x, J_B) > \varepsilon \Rightarrow$ on passe à l'itération de l'algorithme .

1.3 DÉROULEMENT DE LA MÉTHODE

La méthode de résolution est constituée de 02 procédures :

- **Changement de plan** : consiste à augmenter $c' x$.
- **Changement de support (appui)** : consiste à diminuer $\phi(\lambda)$.

1.3.1 ETAPE 1 : CHANGEMENT DE PLAN

Soit \bar{x} un nouveau plan qui sera construit de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \theta.\ell$$

ℓ : Étant la direction du changement.

θ : (un réel positif) le pas maximale le long de la direction ℓ (tel que $f(\bar{x}) \geq f(x)$).

Le vecteur de direction $\ell = (\ell(J_B); \ell(J_H))$ est construit de la manière suivante :

Sur J_H , on pose $\theta = 1$ et

$$\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & \text{Si } \Delta_j > 0 \\ d_{2j} - x_j & \text{Si } \Delta_j < 0 \\ 0 & \text{Si } \Delta_j = 0, j \in J_H, \end{cases} \quad (1.7)$$

et

$$\ell(J_B) = -A_B^{-1}A_H\ell(J_H).$$

Pour avoir $A\bar{x} = b$.

Pour que \bar{x} vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$ il faut calculer

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{1j} - x_j}{\ell_j} & \text{Si } \ell_j < 0 \\ \frac{d_{2j} - x_j}{\ell_j} & \text{Si } \ell_j > 0 \\ \infty & \text{Si } \ell_j = 0, j \in J_B \end{cases}$$

$$\theta_{j_0} = \min(\theta_j) \quad \text{pour } j \in J_B$$

Et le pas maximal sera $\theta^0 = \min(1, \theta_{j_0})$.

De là, le nouveau plan sera : $\bar{x} = x + \theta^0\ell$ et la valeur de sub-optimalité pour le nouveau plan sera :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, J_B) &= \sum_{j \in J_{H^+}} \Delta_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H^-}} \Delta_j(\bar{x}_j - d_{2j}) \\ &= \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{j \in J_H} \Delta_j \ell_j \end{aligned}$$

(en remplaçant les ℓ_j données par 1.7)

$$= \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B) = (1 - \theta^0) \beta(x, J_B).$$

avec :

$$J_{H^+} = \{j \in J_H / \Delta_j \geq 0\}$$

$$J_{H^-} = \{j \in J_H / \Delta_j \leq 0\}$$

De cette dernière expression on conclut :

- Si $\theta^0 = 1 \Rightarrow \bar{x}$ est optimal
- Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon \Rightarrow \bar{x}$ est ε -optimal
- Si $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon \Rightarrow$ on passe au changement du support
 $J_B \rightarrow \bar{J}_B (A_B \rightarrow \bar{A}_B)$.

1.3.2 ETAPE 2 : CHANGEMENT DU SUPPORT

Le changement du support $A_B \rightarrow \bar{A}_B$ consiste à faire un changement du co-plan Δ vers $\bar{\Delta}$ et du vecteur des potentiels y vers \bar{y} de telle sorte que :
 $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \beta(\bar{x}, J_B)$, pour cela on pose :

$$\bar{\Delta}(J) = \Delta(J) + \sigma_0 t(J) \quad \epsilon \mathfrak{R}^n \quad (1.8)$$

$$\bar{y}(I) = y(I) + \sigma_0 t(I) \quad \epsilon \mathfrak{R}^n \quad (1.9)$$

Où

t : est la direction de diminution de la fonction duale,

σ_0 : est le pas maximal le long de cette direction.

Calcul de t et σ_0 :

En utilisant la définition de Δ et y on obtient :

$$\bar{\Delta} = \bar{y}' A - c' = (y' + \sigma_0 t'(I)) A - c' = \Delta' + \sigma_0 t'(I) A$$

De là :

$$t'(J) = t'(I) A(I, J) \Rightarrow t'(J_B) = t'(I) A(I, J_B) \Rightarrow t'(I) = t'(J_B) \cdot A_B^{-1}$$

Ce qui nous donne

$$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}.A(I, J_H).$$

Après calcul du plan $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$, le pas θ^0 est donné par

$$\theta^0 = \min(1, \theta_{j_0}) = \theta_{j_0}, j_0 \in J_B$$

On cherchera un indice $j_1 \in J_H$ qui entrera dans la base à la place de j_0 .

Pour cela posons :

$$t_j = \begin{cases} -\text{signe}(\ell_{j_0}) & \text{Si } j = j_0 \\ 0 & \text{Si } j \in J_B - j_0 \end{cases}$$

$$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}.A(I, J_H)$$

Et calculons :

$$\sigma_j = \begin{cases} -\frac{\Delta_j}{t_j} & \text{Si } \Delta_j t_j < 0 \\ 0 & \text{Si } \begin{cases} \Delta_j = 0, & x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ \Delta_j = 0, & x_j \neq d_{2j}, t_j < 0, j \in J_H \end{cases} \\ +\infty & \text{Dans dans les autres cas} \end{cases} \quad \text{Ou}$$

$$\text{avec } \sigma_0 = \sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H}(\sigma_j)$$

— Le calcul de σ_0 vérifie $\bar{\Delta}_j \Delta_j \geq 0, \forall j \in J$.

— $\bar{\Delta}(j_1) = 0$.

Le nouveau support sera $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1$, et on remarque que la quantité $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$ est égale à :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \sum_{j \in \bar{J}_{H^+}} \bar{\Delta}_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_{H^-}} \bar{\Delta}_j(\bar{x}_j - d_{2j})$$

Où :

$$J_{B^+} = \{j \in J_H / \bar{\Delta}_j \geq 0\},$$

$$J_{B^-} = \{j \in J_H / \bar{\Delta}_j \leq 0\}.$$

Selon la relation 1.8 et sur J_B : [M CHEBBAH \[2006.\]](#)

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, \bar{J}_B) &= \sum_{j \in J_{H^+}} \Delta_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H^-}} \Delta_j(\bar{x}_j - d_{2j}) \\ &+ \sigma_0 \left(\sum_{j \in J_{H^+}} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H^-}} t_j(\bar{x}_j - d_{2j}) \right) \end{aligned}$$

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = (1 - \theta^0) \cdot \beta(x, J_B) + \sigma^0 \left(\sum_{j \in J_{H^+}} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H^-}} t_j(\bar{x}_j - d_{2j}) \right)$$

$t \cdot \ell = 0$ car :

$$A \cdot \ell = 0 t'(J_B) = t'(I) A(I, J_B)$$

et :

$$t'(J_H) = t'(J_B) A_B^{-1} \cdot A(I, J_H).$$

Par construction toutes les composantes de $t'(J_B)$ sont nulles sauf à l'indice j_0 .

Posons

$$\alpha = \alpha_0 = \sum_{j \in J_{H^+}} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H^-}} t_j(\bar{x}_j - d_{2j}) = -(1 - \theta^0) \cdot \sum_{j \in J_{H^-}} t_j \ell_j = (1 - \theta^0) t_{j_0} \ell_{j_0}$$

$$\alpha = \alpha_0 = (1 - \theta) t_{j_0} \ell_{j_0} = \begin{cases} x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{1j_0} & \text{Si } t_{j_0} = 1 \\ -(x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{2j_0}) & \text{Si } t_{j_0} = -1 \end{cases}$$

Donc

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = (1 - \theta^0) \cdot \beta(x, J_B) - \sigma_0 |\alpha_0|. \quad \text{M CHEBBAH [2006.]}$$

1.4 ALGORITHME DE RÉSOLUTION

— Soit $\{x, J_B\}$ un support plan de départ

1. Calculer

— $y' = c'_B A_B^{-1}$

— $\Delta' = y' A - c'$

— $\beta(x, J_B) = 0 \Rightarrow \{x, J_B\}$ est optimal \Rightarrow arrêt du processus

Si $\beta(x, J_B) < \varepsilon \Rightarrow \{x, J_B\}$ est ε -optimal \Rightarrow arrêt du processus

Sinon aller à 2.

2.

— Déterminer le vecteur $\ell(J)$,

— Déterminer le vecteur $\bar{x}(J)$,

— Calculer $(1 - \theta^0) \cdot \beta$

Si $(1 - \theta^0) \cdot \beta < \varepsilon$ aller à 3.

3. Changement de support :

— Calculer le vecteur t

— Calculer $\sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H}(\sigma_j)$

— le nouvel support est $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1$

— Aller à 1 (on passe à une nouvelle itération avec le nouveau support plan $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$).

1.5 EXEMPLE D'APPLICATION

Nous allons résoudre le problème suivant par la méthode adaptée :

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$-1 \leq x_1 \leq 2$$

$$-1 \leq x_2 \leq 1.5$$

On ajoute les variables d'ecarts :

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad (1.10)$$

$$-2x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \quad (1.11)$$

$$X^1 = (1, 1, 1, 3) \quad J_B^1 = \{1, 2\} \quad J_H^1 = \{3, 4\}$$

$$(1) \implies x_3 \leq 3 - x_1 - x_2$$

$$x_3 \leq 3 + 1 + 1$$

$$0 \leq x_3 \leq 5$$

$$(2) \implies x_4 \leq 3 + 2x_1 - 2x_2$$

$$x_4 \leq 3 + 2(2) + 2$$

$$0 \leq x_4 \leq 9$$

La premier itération :

Calcul du vecteur potentiels

$$y' = C'_B A_B^{-1} \quad C'_B = (3, 2)$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad |A_B| = 4 \neq 0$$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad y' = (3, 2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{2} \right); \left(-\frac{3}{4} + \frac{2}{4} \right) \right]$$

$$y' = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4} \right)$$

On calcule le vecteur estimation :

$$\Delta' = y' A - C'$$

$$\Delta_1 = y' A_1 - C_1$$

$$= \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3$$

$$\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_2 = y' A_2 - C_2$$

$$= \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2$$

$$\Delta_2 = 0$$

$$\Delta_3 = y' A_3 - C_3$$

$$= \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0$$

$$\Delta_3 = \frac{5}{2}$$

$$\Delta_4 = y' A_4 - C_4$$

$$= \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0$$

$$\Delta_4 = -\frac{1}{4}$$

On calcule, la valeur de suboptimalité :

$$B(x, J_B) = \sum_{\Delta_j > 0} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{\Delta_j < 0} \Delta_j (x_j - d_{2j})$$

$$B(x, J_B) = \Delta_3 (x_3 - d_{13}) + \Delta_4 (x_4 - d_{24})$$

$$= \frac{5}{2} (1 - 0) - \frac{1}{4} (3 - 9)$$

$$B(x, J_B) = 4 > \varepsilon \implies \text{donc } \{X^1, J_B^1\} \text{ est non } \varepsilon\text{-optimal}$$

On passe au changement du plan :

$$X^1 \longrightarrow X^2 = X^1 + \theta^0 \ell$$

Calcule ℓ :

Sur J_H :

$$\begin{cases} \ell_j = d_{1j} - x_j & \text{si } \Delta_j > 0 \\ \ell_j = d_{2j} - x_j & \text{si } \Delta_j < 0 \end{cases}$$

$$\ell_3 = d_{13} - x_3 \quad \text{car } \Delta_3 = \frac{5}{2} > 0$$

$$= 0 - 1$$

$$\ell_3 = -1$$

$$\ell_4 = d_{24} - x_4 \quad \text{car} \quad \Delta_4 = -\frac{1}{4} < 0$$

$$= 9 - 3$$

$$\ell_4 = 6$$

Sur J_B :

$$\ell(J_B) = \ell(B) = -A_B^{-1} A_H \ell_H$$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{6}{4} \\ -\frac{1}{2} + \frac{6}{4} \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{-1-3}{2} \\ \frac{-1+3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} -\frac{4}{2} \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\ell(J_B) = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\ell = (2 \quad -1 \quad -1 \quad 6)'$$

Calcule θ^0 :

Sur J_H :

$$\theta = 1$$

Sur J_B :

$$\theta_j = \begin{cases} (d_{1j} - x_j) / \ell_j & \text{Si } \ell_j < 0 \\ (d_{2j} - x_j) / \ell_j & \text{Si } \ell_j > 0 \\ \infty & \text{Si } \ell_j = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= (d_{21} - x_1) / \ell_1 \quad \text{car} \quad \ell_1 > 0 \\ &= (2 - 1) / 2\end{aligned}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\theta_2 &= (d_{12} - x_2) / \ell_2 \quad \text{car} \quad \ell_2 < 0 \quad = (-1 - 1) / -1 \\ \theta_2 &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta^0 &= \min \{ 1 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \} \\ &= \min \{ 1 \quad \frac{1}{2} \quad 2 \}\end{aligned}$$

$$\theta^0 = \frac{1}{2} = \theta_1$$

Calcule X^2 :

$$\begin{aligned}X^2 &= X^1 + \theta^0 \ell \\ &= (1 \quad 1 \quad 1 \quad 3)' + \frac{1}{2} (2 \quad -1 \quad -1 \quad 6)' \\ &= (1 \quad 1 \quad 1 \quad 3)' + (1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 3)'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X^2 &= (2 \quad 1 - \frac{1}{2} \quad 1 - \frac{1}{2} \quad 3 + 3)' \\ &= (2 \quad \frac{2-1}{2} \quad \frac{2-1}{2} \quad 6)'\end{aligned}$$

$$X^2 = (2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 6)'$$

Calcule $B(\bar{x}, J_B)$:

$$B(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0) \times B(x, J_B)$$

$$\begin{aligned}B(X^2, J_B^1) &= (1 - \frac{1}{2}) \times B(X^1, J_B^1) \\ &= (\frac{2-1}{2}) \times 4 \\ &= \frac{1}{2} \times 4\end{aligned}$$

$$B(X^2, J_B^1) = 2 > \varepsilon$$

On passe au changement du support

$$J_B^1 \longrightarrow J_B^2 \quad J_B^1 = \{1, 2\}$$

$$J_B^2 = \{2, J^*\}$$

Calculer t et δ :

$$\Delta \longrightarrow \bar{\Delta} = \Delta + \delta t (J)$$

Calcule t_j :

Sur J_B :

$$t_{j_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x}_{j_0} = d_{1j_0} \\ -1 & \text{si } \bar{x}_{j_0} = d_{2j_0} \\ t(J_B/J_0) = 0 \end{cases}$$

$$t_1 = -1 \quad t_2 = 0$$

Sur J_H :

$$t'(J_H) = t'_B A_B^{-1} A_H$$

$$\begin{aligned} t'(J_H) &= (-1, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$t'(J_H) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$t_3 = -\frac{1}{2} \quad t_4 = \frac{1}{4}$$

$$t' = \left(-1 \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \right)$$

Calcule δ :

$$\bar{\Delta}_j = \Delta_j + \delta t_j$$

$$\bar{\Delta}_1 = \Delta_1 - \delta_1$$

$$0 = 0 - \delta_1$$

$$\delta_1 = 0$$

$$\bar{\Delta}_3 = \Delta_3 + t_3 \delta_4$$

$$0 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \delta_3$$

$$-\frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \delta_3$$

$$\delta_3 = -\frac{5}{2} \times -\frac{2}{1}$$

$$\delta_3 = 5$$

$$\bar{E}_4 = E_4 + t_4 \delta_4$$

$$0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \delta_4$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \delta_4$$

$$\delta_4 = 1$$

$$\delta_3 = 5 \quad \text{et} \quad \delta_4 = 1$$

$$\min \delta = \min \{5; 1\} = 1$$

$$j^* = 4$$

$$J_B^2 = \{2, 4\}$$

Alors

$$X^2 = \left(2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 6 \right)'$$

La deuxième itération

$$y' = c'_B A_B^{-1}$$

$$c'_B = (2, 0)$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A_B| = 1 \neq 0$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y' = (2, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y' = (2, 0)$$

Calcule vecteur estimation :

$$\Delta' = y' A - c'$$

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 &= y' A_1 - c'_1 \\ &= (2, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \\ &= 2 - 3 \\ \Delta_1^2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2^2 &= y' A_2 - c'_2 \\ &= (2, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \\ &= 2 - 2 \\ \Delta_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3^2 &= y' A_3 - c'_3 = (2, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \\ \Delta_3^2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4^2 &= y' A_4 - c'_4 \\ &= (2, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \\ \Delta_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

Calculer la valeur de Suboptimilité :

$$B(X^2, J_B^2) = \sum_{\Delta_j > 0} \Delta_j (x_j^2 - d_{1j}) + \sum_{\Delta_j < 0} \Delta_j (x_j^2 - d_{2j})$$

$$\begin{aligned} B(X^2, J_B^2) &= \Delta_1 (x_1^2 - d_{21}) + \Delta_3 (x_3^2 - d_{13}) \\ &= -1(2 - 2) + 2\left(\frac{1}{2} - 0\right) \end{aligned}$$

$$B(X^2, J_B^2) = 1 > \varepsilon$$

Donc $\{X^2, J_B^2\}$ est non ε -optimale

On passe au changement du plan :

$$X^2 \longrightarrow X^3 = X^2 + \theta^0 \ell$$

Calcule ℓ :

Sur J_H :

$$\begin{cases} \ell_j = d_{1j} - x_j & \text{si } \Delta_j > 0 \\ \ell_j = d_{2j} - x_j & \text{si } \Delta_j < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ell_1 &= d_{21} - x_1^2 & \text{car } \Delta_1^2 &= -1 < 0 \\ &= 2 - 2 \end{aligned}$$

$$\ell_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \ell_3 &= d_{13} - x_3^2 & \text{car } \Delta_3^2 &= 2 > 0 \\ &= 0 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\ell_3 = -\frac{1}{2}$$

Sur J_B :

$$\ell(J_B^2) = \ell(B) = -A_B^{-1} A_H \ell_H$$

$$\begin{aligned} &= - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\ell(J_B^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\ell = \left(0 \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \right)'$$

Calcule θ^0 :

Sur J_H :

$$\theta = 1$$

Sur J_B :

$$\theta_j = \begin{cases} (d_{1j} - x_j) / \ell_j & \text{Si } \ell_j < 0 \\ (d_{2j} - x_j) / \ell_j & \text{Si } \ell_j > 0 \\ \infty & \text{Si } \ell_j = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= (d_{22} - x_2^2) / \ell_2 && \text{car } \ell_2 > 0 \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) / \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\theta_2 = 2$$

$$\begin{aligned} \theta_4 &= (d_{14} - x_4^2) / \ell_4 && \text{car } \ell_4 < 0 \\ &= (0 - 6) / -1 \end{aligned}$$

$$\theta_4 = 6$$

$$\begin{aligned} \theta^0 &= \min \{ 1 \quad \theta_2 \quad \theta_4 \} \\ &= \min \{ 1 \quad 2 \quad 6 \} \end{aligned}$$

$$\theta^0 = 1 \implies \text{optimal}$$

Calcule X^3 :

$$\begin{aligned} X^3 &= X^2 + \theta^0 \ell \\ &= \left(2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 6 \right)' + \left(0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -1 \right)' \\ X^3 &= \left(2 \quad 1 \quad 0 \quad 5 \right)' \end{aligned}$$

Calcule la valeur de suboptimale :

$$B(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0) \times B(x, J_B)$$

$$B(X^3, J_B^2) = 0$$

Donc $\{X^3, J_B^2\}$ est optimal .

la valeur optimale est : $Z = 8$

1.5.1 RÉSOLUTION DE L'EXEMPLE AVEC LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$-2x_1 + 2x_2 = 3$$

$$-1 \leq x_1 \leq 2$$

$$-1 \leq x_2 \leq 1.5$$

$$0 \leq x_3 \leq 5$$

$$-1 \leq x_4 \leq 9$$

$$0 \leq x_1 + 1 \leq 3$$

$$0 \leq x_2 + 1 \leq 2.5$$

$$0 \leq x_3 \leq 5$$

$$-1 \leq x_4 \leq 9$$

on pose :

$$y_1 = x_1 + 1 \text{ donc } x_1 = y_1 - 1$$

$$y_2 = x_2 + 1 \text{ donc } x_2 = y_2 - 1$$

$$y_3 = x_3$$

$$y_4 = x_4$$

on remplace dans le problème de départ :

$$z = 3(y_1 - 1) + 2(y_2 - 1) + 0(y_3) + 0(y_4) \rightarrow \max$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 5$$

$$-2y_1 + 2y_2 + y_4 = 3$$

$$y_3 = x_3$$

$$y_4 = x_4$$

la solution de départ est :

$$x = (3 \ 0 \ 2 \ 9 \ 0 \ 2.5 \ 3 \ 0)'$$

On applique la méthode du simplexe comme suit :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	-0.5
0	0	1	0	-2	0	0	0.5
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	-1	1	0	0.5
0	0	0	0	2	0	1	-0.5

TABLE 1.1 – *Itération 1 de la résolution de l'exercice en simplexe*

la vecteur b de la première itération est :

$$(3 \ 0 \ 2 \ 9 \ 2.5 \ 3)'$$

le vecteur des estimation de la première itération : $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ -1)'$

la deuxième itération :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	-1	0	0	0
0	0	2	0	-4	0	0	1
0	0	-2	1	4	0	0	0
0	0	-1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0

TABLE 1.2 – Itération 2 de la résolution de l'exercice en simplexe

la vecteur b de la deuxième itération est :

$$(3 \ 2 \ 4 \ 5 \ 0.5 \ 5)'$$

le vecteur des estimation de la deuxième itération : $(0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)'$

la solution optimale est : $(2 \ 1 \ 0 \ 5)'$

la valeur optimale est : $Z = 8$

1.6 COMPARAISON ENTRE LA MÉTHODE ADAPTÉE ET LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

- Les deux méthodes ont des algorithmes de résolution finis
- On a remarqué d'après l'exemple que la résolution du problème $P(1)$ par la méthode du simplexe nécessite l'ajout de variables supplémentaires et d'équations ce qui entraîne plus de calculs en comparant avec la méthode adaptée .
- La solution converge plus rapidement vers la solution optimale dans la méthode adaptée que dans la méthode du simplexe et cela en fait que la recherche de la solution optimale dans la méthode de simplexe se réalise par le saut sur les sommets décrits par le polyèdre des contraintes alors que la méthode adaptée prend les points à l'intérieur du polyèdre .
- La méthode adaptée nous permet de trouver une solution ε -optimal.

1.7 CONCLUSION

- Nous avons vu dans ce chapitre les avantages de la méthode adaptée en la comparant à celle du simplexe. La méthode adaptée est plus avantageuse que la méthode du simplexe dans le cadre de la complexité et cela du fait qu'elle converge rapidement vers l'optimal et l'ajout de variables supplémentaires et d'équations dans le simplexe entraîne plus de calculs.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME
MIN-MAX AVEC CONTRAINTES
GÉNÉRALISÉES EN
PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR
LA MÉTHODE ADAPTÉE

2

INTRODUCTION

Un programme linéaire est un modèle d'optimisation mathématique qui a pour objectif de trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines égalités et/ ou inégalités dites contraintes. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution d'un problème Min-Max avec des contraintes généralisées dans la programmation linéaire par la méthode adaptée mise en avant par R. Gabasove et F.M Kirillova.

2.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

KIRILLOVA [1980.] M CHEBBAH [2006.]

Dans la programmation linéaire, le problème MIN-MAX consiste à maximiser une fonctionnelle f définie par :

$$f(x) = \min_{k \in K} (c'_k x + \alpha_k)$$

Sur un sous-ensemble de \mathfrak{R}^n défini par des contraintes linéaires.

En langage mathématique, on décrira le modèle de la manière suivante :

$$(P2) \quad \begin{cases} f(x) = \min_{k \in K} (c'_k x + \alpha_k) \rightarrow \max_x \\ Ax = b \\ d_1 \leq x \leq d_2 \end{cases}$$

Où x, d_1, d_2 sont des n - vecteurs réels, $c_k, k \in K$ des n - vecteurs, b un m - vecteur, $\alpha_k, k \in K$ des scalaires, c'_k le transposé du vecteur $c_k, k \in K$.

$A = A[I; J] : (m \times n)$ matrice, $\text{rang } A = m \leq n$,

$K = \{1 \dots p\} : L'$ ensemble des indices des composantes de la fonctionnelle f .

$I = \{1 \dots m\} : L'$ ensemble des indices des lignes de A .

$J = \{1 \dots n\} : L'$ ensemble des indices des colonnes de A .

$c[K, J] : (p \times n)$ matrice formée par les vecteurs lignes $c'_k, k \in K$.

Définition 2.1 GABASOV.R [1980.]

- Tout vecteur x vérifiant $d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j} \quad , j \in J$ et $Ax = b$, est dit plan du problème (P2).
- Un plan x^0 est optimal si x^0 réalise le maximum de la fonctionnelle du problème (P2).
- Un plan x^ε est dit ε -optimal si $f(x^0) - f(x^\varepsilon) \leq \varepsilon, (\varepsilon > 0 \text{ réel, donné})$.

Définition 2.2 Soit x un plan du problème (P2) et $K(x)$ l'ensemble défini comme suit :

$$K(x) = \{k \in K : f(x) = c'_k x + a_k\}.$$

$K(x)$ est appelé ensemble des indices des composantes actives de la fonctionnelle f , $K(x) \neq \emptyset$, pour tout plan x du problème (P2).

On définit le vecteur des écarts des composantes de la fonctionnelle f :

$$w(k) = \{w_k, k \in K\}$$

$$w_k = w_k(x) = c'_k x + a_k - f(x), \forall k \in K \quad (2.1)$$

Conséquences

- $w_k(x) \geq 0, k \in K.$
- $\min_{k \in K} w_k(x) = 0.$
- $\Delta w_k(x) \geq -w_k, k \in K,$

2.2 SUPPORT DES CONTRAINTES

[KIRILLOVA \[1980.\]](#)

L'ensemble des m indices $J_B \subset J, |J_B| = m$ est dit support (appui) des contraintes du problème (P2) et la matrice $A_B = A(I, J_B)$ matrice du support (matrice d'appui) des contraintes si $\det A_B \neq 0$.

2.3 SUPPORT DE LA FONCTIONNELLE

[KIRILLOVA \[1980.\]](#) [M CHEBBAH \[2006.\]](#)

En utilisant le support J_B , on construit la matrice suivante :

$$\Delta(K, J) = C [K, J_B] \cdot A_B^{-1} \cdot A(I, J) - C(K, J) \quad (2.2)$$

et soient deux sous ensembles d'indice J_f et K_f avec $K_f \subset K$ et $J_f \subset J$ vérifiant :

$$|K_f| = |J_f| + 1 \quad (|\cdot| \text{ désigne le cardinal}),$$

Par suite construisons la matrice :

$$\Delta_f = \Delta(K_f, J_f, e(K_f)), \quad (2.3)$$

où

$$e(K) = (e_k = 1), \quad k \in K$$

L'ensemble $Q_f = \{K_f, J_f\}$ est appelé support de la fonctionnelle si la matrice Δ_f est inversible .

SUPPORT DU PROBLÈME

L'ensemble $Q_p = \{J_B, Q_f\}$ formé du support des contraintes et du support de la fonctionnelle est appelé support du problème $P(2)$.

2.4 SUPPORT PLAN

La paire $\{x, Q_p\}$ formée du plan x et du support Q_p est appelée support-plan (plan d'appui) du problème $P(2)$.

Le support plan $\{x, Q_p\}$ est dit non dégénéré si :

- $d_{1j} < x_j < d_{2j}, \quad j \in J_f \cup J_B,$
- $c'_k x + a_k > f(x). \quad k \in K_H = K - K_f.$

2.5 ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE

GABASOV.R

En utilisant le support du problème Q_p , on construit les vecteurs des estimations $\Delta(J)$ et le vecteur des potentiels $\mu(I)$.

$$\Delta'(J) = \gamma'(K_f) \cdot \Delta(K_f, J) \quad (2.4)$$

$$\mu'(I) = \gamma'(K_f) \cdot C(K_f, J_B) \cdot A_B^{-1}, \quad (2.5)$$

où $\gamma'(K_f)$ est la dernière ligne de la matrice Δ_f^{-1} .

De là, on retire les relations suivantes :

$$\gamma'(K_f) = (0'(J_f), 1) \Delta_f^{-1} \quad (2.6)$$

$$\gamma'(K_f) \cdot e(K_f) = 1. \quad (2.7)$$

$$\Delta(J_f) = 0(J_f). \quad (2.8)$$

$$\Delta(J_B) = 0(J_B).$$

Définition 2.3 KIRILLOVA [1980.] Melle HAMDOUS [2010.]

- Le support Q_f , de la fonctionnelle est dit régulier si $\gamma_k \geq 0, k \in K_f$.
- Le support Q_p , du problème est dit régulier si Q_f est régulier.
- Le support Q_p avec $J_f = \emptyset$ est régulier, par définition.
- Par la suite, on ne considère que des supports réguliers.

Considérons un support plan $\{x, Q_p\}$ du problème (P2) et soit $\bar{x} = x + \Delta x$ un autre plan et calculons la quantité représentant l'accroissement de la fonctionnelle f :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \quad (2.9)$$

Désignons par Δw , le vecteur des accroissements des écarts de la fonctionnelle :

$$\Delta w(K) = c(K, J) \cdot \Delta x - e(K) \cdot \Delta f(x) \quad (2.10)$$

et en vertu de 2.2 on obtient

$$\Delta w(K) = -\Delta(K, J) \cdot \Delta x - e(K) \cdot \Delta f(x) \quad (2.11)$$

et par suite on trouve :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_f \\ \Delta f(x) \end{pmatrix} = -\Delta_f^{-1} \Delta w(K_f) - \Delta_f^{-1} (\Delta(K_f, J_H)) \cdot \Delta x_H, \quad J_H = J - (J_f \cup J_B)$$

En utilisant la décomposition de la matrice Δ_f^{-1} comme ci-dessus, la dernière solution prend alors la forme suivante :

$$\Delta x(J_f) = -D(J_f, K_f) \cdot \Delta(K_f, J_H) \cdot \Delta x(J_H) - D(J_f, K_f) \cdot \Delta w(K_f) \quad (2.12)$$

$$\Delta f(x) = -\Delta'(J_H) \cdot \Delta x(J_H) - \gamma'(K_f) \cdot \Delta w(K_f) \quad (2.13)$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle 2.13 sous les contraintes suivantes :

- $d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, j \in J_H,$
- $\Delta w_k \geq -w_k, k \in K_f,$

Est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{2j} - x_j & \text{Si } \Delta_j < 0, \\ \Delta x_j = d_{1j} - x_j & \text{Si } \Delta_j > 0; \\ \Delta w_k = -w_k & ; k \in K_f \end{cases} \quad j \in J_H$$

Et est égal à :

$$\beta = \beta(x, Q_p) = \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j (x_j - d_{2j}) + \sum_{k \in K_f} \gamma_k \omega_k \quad (2.14)$$

Appelée la valeur de sub-optimalité du support plan $\{x, Q_p\},$

Où

$$J_H^+ = \{j \in J_H / \Delta_j \geq 0\},$$

$$J_H^- = \{j \in J_H / \Delta_j \leq 0\}$$

Il en résulte que :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, Q_p)$$

Et pour

$$\bar{x} = x^0$$

On obtient :

$$0 \leq f(x^0) - f(x) \leq \beta(x, Q_p) \quad (2.15)$$

De cette dernière inégalité, on déduit le critère suivant :

Théorème 2.1 (Critère d'optimalité) [KIRILLOVA \[1980.\]](#)

Les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_j = d_{1j} & \text{Si } \Delta_j \geq 0 \\ x_j = d_{2j} & \text{Si } \Delta_j \leq 0 \\ d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j} & \text{Si } \Delta_j = 0 \quad j \in J_H \\ w_k = 0 & \text{Si } \gamma_k \geq 0, \\ w_k \geq 0 & \text{Si } \gamma_k = 0, k \in K_f \end{cases} \quad (2.16)$$

Sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, Q_p\}$.

Condition suffisante

Soit $\{x, Q_p\}$ un support plan du problème $P(2)$, pour lequel les conditions 2.16 sont vérifiées, alors la relation 2.14 donne $\beta(x, Q_p) = 0$ de plus, \forall le plan \bar{x} , d'après la relation 2.15, $f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, Q_p) = 0$, on obtient l'optimalité du support plan $\{x, Q_p\}$.

Condition nécessaire

Soit $\{x, Q_p\}$ un support plan optimal non dégénéré et supposons que les conditions 2.16 ne sont pas vérifiées, c'est à dire on a deux cas possibles :

$$a) \quad \exists j_0 \in J_H / \Delta_{j_0} > 0, x_{j_0} > d_{1j_0} \quad \text{ou} \quad \Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0}$$

$$b) \quad \exists k_0 \in K_f / \gamma_{k_0} > 0, \quad \omega_{k_0} > 0$$

Construisons alors un nouveau plan $\bar{x} = x + \theta \ell$, $\theta > 0$ et traitons les points a) et b) séparément. a) Posons $\ell_{j_0} = \text{signe}(\alpha_0)$ où

$$\alpha_0 = \begin{cases} d_{1j_0} - x_{j_0} & \text{si } \Delta_{j_0} > 0 \quad \text{et} \quad x_{j_0} > d_{1j_0}, \\ d_{2j_0} - x_{j_0} & \text{si } \Delta_{j_0} < 0 \quad , \quad x_{j_0} < d_{2j_0}, \end{cases}$$

$$\ell_j = 0, \forall j \in J_H - j_0 \text{ et } \Delta w_k = 0, k \in K_f,$$

$$\ell(J_B) = -A_B^{-1} \cdot A(I, J_H \cup J_f) \ell(J_H \cup J_f)$$

et

$$\ell(J_f) = -D(J_f; K_f) \cdot \Delta(K_f; J_H) \cdot \ell(J_H)$$

$$\Delta_{j_0} > 0 \quad \text{et} \quad x_{j_0} > d_{1j_0}, \exists \theta_1 > 0 / \quad \bar{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 \geq d_{1j_0}.$$

$$\Delta_{j_0} < 0 \quad \text{et} \quad x_{j_0} < d_{2j_0}, \exists \theta_1 > 0 / \quad \bar{x}_{j_0} = x_{j_0} + \theta_1 \leq d_{2j_0}.$$

On obtient donc dans ce cas $\bar{x}_{j_0} = x_{j_0} + \theta_1 \text{signe}(\alpha_0)$, $\bar{x}_j = x_j, \forall j \in J_H - j_0$

$$\Rightarrow \forall j \in J_H, \quad \bar{x}_j = x_j + \theta_1 \ell_j, \quad \theta_1 > 0, d_{1j} \leq x_j + \theta_1 \ell_1 = \bar{x}_j \leq d_{2j}.$$

D'autre part, puisque $\{x, Q_p\}$ est un support plan non dégénéré, alors on a :

$$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \quad \forall j \in J_f \cup J_B,$$

Il existe $\theta_2 > 0$ tel que :

$$d_{1j} \leq \bar{x} = x + \theta_2 \ell \leq d_{2j}, \quad \forall j \in J_f \cup J_B.$$

Pour $\theta^0 = \min(\theta_1, \theta_2)$, $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$, et par construction de $\ell(J_B)$ et $\ell(J_f)$ est aussi un plan du problème (P2) et on obtient :

$$\Delta f(x) = -\theta^0 \Delta_{j_0} \text{ signe}(\alpha_0) > 0,$$

Ce qui contredit l'optimalité du support plan $\{x, Q_p\}$.

b) Dans ce cas on pose $\Delta \omega_{k_0} = -\theta w_{k_0}$, $\theta > 0$, $\Delta w_k = 0$, $k \in K_f - k_0$ et $\ell(J_H) = 0(J_H)$.

$$\ell(J_B) = -A_B^{-1} \cdot A(I, J_H \cup J_f) \ell(J_H \cup J_f); \ell(J_f) = D(J_f, K_f) \cdot w(K_f).$$

Puisque $\{x, Q_p\}$ est un support plan non dégénéré, alors on a :

$$d_{1j} < x_j < d_{2j} \quad \forall j \in J_f \cup J_B,$$

Donc il existe $\theta_2 > 0$ tel que

$$d_{1j} \leq x_j = x_j + \theta_2 \ell_j = \bar{x}_j \leq d_{2j}.$$

En prenant $\theta_1 = \min(\theta_2, \theta)$, $\bar{x} = x + \theta_1 \ell$ est un plan du problème (P2) et on obtient :

$$\Delta f(x) = \theta_1 \cdot \gamma_{k_0} w_{k_0} > 0,$$

Ce qui contredit l'optimalité du support plan $\{x, Q_p\}$.

Théorème 2.2 KIRILLOVA [1980.] ?

(Critère de sub-optimalité)

Pour $\varepsilon > 0$ un nombre réel donné. Pour l' ε -optimalité du plan x , il est suffisant de trouver un tel support Q_p pour lequel la valeur de sub-optimalité vérifie l'inégalité suivante :

$$\beta(x, Q_p) \leq \varepsilon \quad (2.17)$$

Démonstration. Condition suffisante Si $\beta(x, Q_p) \leq \varepsilon \Rightarrow \Delta f(x) \leq \varepsilon \Rightarrow x$ est ε -optimal.

Faisons une décomposition de $\beta(x, Q_p)$.

Pour cela construisons le problème dual de $P(2)$:

$$(D2) \begin{cases} \Theta(X) = \lambda' \alpha + y' b - v' d_1 + w' d_2 \rightarrow \min \\ -\lambda'(K).c(K, J) + y'(I).A(I, J) - v'(J) + w'(J) = 0'(J) \\ \lambda'(K).e(K) = 1 \\ \lambda \in \mathfrak{R}_+^p \\ v, w \in \mathfrak{R}_+^n, \quad y \in \mathfrak{R}^m, \end{cases}$$

Le vecteur dual $X = (\lambda, y, v, w)'$ construit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \lambda'(K_f) = (0'(J_f), 1)\Delta_f^{-1}; & \lambda'(K_H) = 0 \\ y'(I) = \lambda'(K_f).c(K_f, J_B)A_B^{-1} \\ v_j = \Delta_j \quad ; \quad w_j = 0 & \text{Si } \Delta_j \geq 0 \\ v_j = 0 \quad ; \quad w_j = -\Delta_j & \text{Si } \Delta_j < 0 \end{cases}$$

est un plan du problème dual (D2). En utilisant ce plan, faisons une décomposition de la valeur de sub-optimalité :

$$\begin{aligned} \beta(x, Q_p) &= \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j(x_j - d_{2j}) + \sum_{k \in K_f} \gamma_k \cdot w_k \\ &= -\sum_{j \in J_H^+} \Delta_j(d_{1j}) - \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j(d_{2j}) + \sum_{j \in J_H} \Delta_j(x_j) + \sum_{k \in K_f} \gamma_k \cdot w_k \\ \gamma'(K_f) w(K_f) &= \gamma'(K_f) (c(K_f, J) x(J) + \alpha(K_f) - e(K_f) f(x(J))) \end{aligned}$$

et d'après la construction de la matrice $\Delta(K, J)$, on aura

$$\gamma'(K_f) w(K_f) = -\Delta'(J_H) \cdot x(J_H) + \gamma'(K_f) \cdot c(K_f, J_B) A_B^{-1} \cdot b - f(x) + \lambda' \alpha$$

$$\begin{aligned} \beta(x, Q_p) &= \lambda' \alpha + y' \cdot b - v' d_1 + w' d_2 - f(x) = \\ &= \lambda' \alpha + y' \cdot b - v' d_1 + w' d_2 - f(x) + f(x^0) - \Theta(\lambda^0) \\ &= \left(\lambda' \alpha + y' \cdot b - v' d_1 + w' d_2 - \Theta(\lambda^0) \right) + (f(x^0) - f(x)) \end{aligned}$$

avec

$$\beta(x) = (f(x^0) - f(x)) \quad ,$$

$$\beta(Q_p) = (\Theta(X) - \Theta(X^0)) \quad ,$$

donc

$$\beta(x, Q_p) = \beta(x) + \beta(Q_p) \quad ,$$

où $\beta(x)$ est appelé la mesure de non optimalité du plan x , et $\beta(Q_p)$ est l'écart de la non optimalité du support Q_p .

□

2.6 ITERATION DE L'ALGORITHME

[KIRILLOVA \[1980.\]](#)

La méthode de résolution s'appuie sur deux procédures

- Un changement de plan.
- Un changement du support.

2.6.1 LE CHANGEMENT DE PLAN

Le passage du plan x vers un plan \bar{x} , a pour effet d'augmenter la valeur de la fonctionnelle f , $f(\bar{x}) \geq f(x)$.

On construit alors un nouveau plan $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$, où le vecteur ℓ est la direction d'amélioration du point x et θ^0 ($\theta^0 \geq 0$) le pas maximal le long de cette direction.

Le vecteur direction ℓ est défini comme suit :

$$\ell_j = \begin{cases} d_{2j} - x_j & \text{Si } \Delta_j < 0 \\ d_{1j} - x_j & \text{Si } \Delta_j > 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} ; j \in J_H$$

Pour avoir $A\bar{x} = b$, on prend

$$\ell(J_B) = -A_B^{-1} A(I, J_H \cup J_f) \ell(J_H \cup J_f) \text{ et } \ell(J_f)$$

est calculé de la manière suivante :

Puisque on a que

$$\Delta w(K_f) \geq -w(K_f) \quad ,$$

On peut écrire

$$\Delta w(K_f) = -\theta \cdot w(K_f)$$

avec $\theta \leq 1$, ce qui donne à partir de 2.12 que :

$$\ell(J_f) = D(J_f; K_f) (-\Delta(K_f, J_H) \ell(J_H) + w(K_f))$$

Soit θ^0 la valeur maximale du pas pour lequel les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$a) \quad d_{1j} \leq x + \theta^0 \ell \leq d_{2j}, \quad \forall j \in J$$

$$b) \quad \Delta w_k \geq -w_k, \quad \forall k \in K.$$

Quant à la première condition a), elle est vérifiée sur J_H pour $\theta \in [0, 1]$, et sur $J_f \cup J_B$, pour $\theta = \theta_{j_0}$

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{1j} - x_j}{\ell_j} & \text{Si } \ell_j < 0 \\ \frac{d_{2j} - x_j}{\ell_j} & \text{Si } \ell_j > 0 \\ \infty & \text{Si } \ell_j = 0, \end{cases} \quad j \in J_f \cup J_B$$

$$\theta_{j_0} = \min(\theta_j) \text{ pour } j \in J_f \cup J_B$$

Quant à la deuxième condition b), elle est vérifiée pour $\theta \leq 1$ sur K_f , et sur K_H

$$\text{pour } \theta = \theta_{k_0}, \quad \theta_{k_0} = \min(\theta_k),$$

$$\theta_k = \begin{cases} \frac{c'_k x + \alpha_k - f(x)}{\beta(x, Q_p) - c'_k \ell} & \text{Si } c'_k \ell < \beta(x, Q_p) \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le pas maximal θ^0 est donc

$$\theta^0 = \min(1; \theta_{k_0}; \theta_{j_0}).$$

Donc

$$\beta(\bar{x}, Q_p) = (1 - \theta^0) \cdot \beta(x, Q_p). \quad (2.18)$$

Alors :

Si $\theta^0 = 1$ alors le support plan $\{\bar{x}, Q_p\}$ est optimal.

Si $\beta(\bar{x}, Q_p) \leq \varepsilon$ alors le support plan $\{\bar{x}, Q_p\}$ est ε -optimal.

Si $\beta(\bar{x}, Q_p) > \varepsilon$ alors on passe au changement du support.

2.6.2 LE CHANGEMENT DU SUPPORT

Le changement du support s'accompagne de la diminution de la fonctionnelle duale : c'est à dire que le changement de, Q_p vers \bar{Q}_p entraîne le changement du plan dual $(\lambda, y, v, w)'$ vers $(\bar{\lambda}, \bar{y}, \bar{v}, \bar{w})'$

De là posons :

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \lambda + \sigma \cdot \delta \lambda \\ \bar{v} = v + \delta v \\ \bar{w} = w + \delta w \\ \bar{y} = y + \sigma \cdot \delta y \end{cases}$$

Avec comme direction admissible le couple $(t'(J), \delta \lambda'(K))$ au point X .

σ^0 positif, le pas maximal le long de cette direction.

Le calcul de la direction admissible et du pas maximal se fait comme suit :

on a $\bar{\Delta} + \sigma t$; X et \bar{X} des plan duaux.

$$t'(J) = \delta y'(I)A(I, J) - \delta \lambda'(K)c(K, J) \quad (2.19)$$

Ce qui résulte que

$$t'(J_B) = \delta y'(I)A_B - \delta \lambda'(K)c(K, J_B),$$

Donc

$$\delta y'(I) = t'(J_B)A_B^{-1} + \delta \lambda'(K)c(K, J_B)A_B^{-1}$$

en substituant dans 2.19, on aura

$$t'(J) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J) + \delta \lambda'(K)\Delta(K, J) \quad (2.20)$$

$$(t'(J_f); 0) = (t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_f), 0) + \delta \lambda'(K_f)(\Delta(K_f, J_f); e(K_f)) + \delta \lambda'(K_H)(\Delta(K_H, J_f); e(K_H))$$

Alors :

$$\delta \lambda'(K_f) = ((t'(J_f); 0) - (t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_f), 0) - \delta \lambda'(K_H)(\Delta(K_H, J_f); e(K_H)))\Delta_f^{-1} \quad (2.21)$$

$$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_H) + \delta \lambda'(K_H)(\Delta(K_H, J_H) + \delta \lambda'(K_f)(\Delta(K_f, J_H))) \quad (2.22)$$

$t'(J_f)$, $t'(J_B)$ et $\delta \lambda'(K_H)$ sont construits de manière à assurer une diminution de la fonctionnelle du problème dual (D2).

- $\theta^0 = \theta_{j_0}$; on pose $t_{j_0} = -\text{signe}(\ell_{j_0})$, $t(J_f \cup J_B - j_0) = 0$, $\delta \lambda(K_H) = 0$
- $\theta^0 = \theta_{k_0}$; on pose $\delta \lambda_{k_0} = 1$, $\delta \lambda(K_H - k_0) = 0$; $t(J_f \cup J_B) = 0$

Calcul du pas maximal σ^0 : GABASOV.R

On démontre que :

$$\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}; \sigma_{k_1})$$

Où

$$\sigma_{j_1} = \min(\sigma_j) \text{ pour } j \in J_H$$

$$\sigma_j = \begin{cases} -\frac{\Delta_j}{t_j} & \text{Si } \Delta_j t_j < 0 \\ 0 & \text{Si } \Delta_j = 0, x_j \neq d_{1j}, 0 \\ & \text{ou} \\ & \Delta_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0, \quad j \in J_H \\ \infty & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

σ_{j_1} assure la diminution de la valeur de suboptimalité.

et d'autre part $\sigma_{k_1} = \min_{k \in K_f} (\sigma_k)$

$$\sigma_k = \begin{cases} -\frac{\lambda_k}{\delta\lambda_k} & \text{Si } \delta\lambda_k\lambda_k < 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

σ_{k_1} assure la régularité du support \bar{Q}_f .

On construit le nouveau support \bar{Q}_p comme suit :

— Si $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$

Alors

$$\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = (J_f - j_0), \bar{K}_f = K_f - k_1$$

— Si $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$

Alors

$$\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1, \bar{K}_f = K_f$$

Si $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_B$ alors :

Si $\exists j_2 \in J_f / t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) \neq 0$ alors $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_2, \bar{J}_f = (J_f - j_2) \cup j_0$

faire comme le cas $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$

Si $\sigma^0 = \sigma_j$

Alors

$$\bar{J}_B = \bar{J}_B, \bar{J}_f = (\bar{J}_f - j_0) \cup J, \bar{K}_f = K_f$$

Sinon si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$

Alors

$$\bar{J}_B = \bar{J}_B, \bar{J}_f = (\bar{J}_f - j_0) \cup J, \bar{K}_f = K_f - k_1$$

Sinon $\exists j_2 \in J_f / t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) = 0$

Alors

$$\sigma^0 = \sigma_{j_1}, \bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1, \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = K_f$$

— Si $\theta^0 = \theta_{k_0}$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$

Alors

$$\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f \cup j_1, \bar{K}_f = K_f \cup k_0$$

— Si $\theta^0 = \theta_{k_0}$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$

Alors

$$\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$$

La construction du nouveau support $\bar{Q}_p = \{\bar{Q}_f, \bar{J}_B\}$, détermine une itération de la méthode , si bien que tous les résultats sont résumés dans l'algorithme de résolution suivant :

2.7 ALGORITHME DE RESOLUTION

M CHEBBAH [2006.]

1. Considérer le support plan $\{x, Q_p\}$ du problème (P2) et $\varepsilon > 0$, un nombre réel donné,

2. Calculer $\beta(x, Q_p)$.

Si $\beta(x, Q_p) = 0$ alors $\{x, Q_p\}$ est **optimal**

Si $\beta(x, Q_p) < \varepsilon$ alors $\{x, Q_p\}$ est ε -**optimal**

Si $\beta(x, Q_p) > \varepsilon$ alors **continuer le processus**

3. Calculer

— $\ell(J_H); \ell(J_f), \ell(J_B)$

— $\theta^0 = \min(1; \theta_{k_0}; \theta_{j_0})$

— Calculer $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$

Si $\beta(\bar{x}, Q_p) = 0$ alors $\{\bar{x}, Q_p\}$ est **optimal**

Si $\beta(\bar{x}, Q_p) < \varepsilon$ alors $\{\bar{x}, Q_p\}$ est ε -**optimal**

Si $\beta(\bar{x}, Q_p) > \varepsilon$ alors **continuer le processus**

4. Si $\theta^0 = \theta_{k_0}$

$\delta\lambda_{k_0} = 1; \quad \delta\lambda(K_H - k_0) = 0; \quad t(J_f \cup J_B) = 0$

$\delta\lambda'(K_f) = -\delta\lambda'(K_H)(\Delta(K_H, J_f); e(K_H)).\Delta_f^{-1}$

$t'(J_H) = \delta\lambda'(K)(\Delta(K, J_H))$

Aller (6)

— Si $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_B$

$$\begin{aligned}
 t_{j_0} &= -\text{signe}(\ell_{j_0}); & t'(J_B - j_0) &= 0; & t'(J_f) &= 0 \\
 \delta\lambda'(K_H) &= 0 \\
 \delta\lambda'(K_f) &= - \left(t'(J_B)A_B^{-1}A((I, J_f), 0) \right) \Delta_f^{-1} \\
 t'(J_H) &= t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_H) + \delta\lambda'(K_f)(\Delta(k_f, J_H))
 \end{aligned}$$

Aller (4)

— SI $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$

$$\begin{aligned}
 t_{j_0} &= -\text{signe}(\ell_{j_0}); & t'(J_f - j_0) &= 0, & t'(J_B) &= 0 \\
 \delta\lambda(K_H) &= 0, \\
 \delta\lambda'(K_f) &= (t'(J_f), 0)\Delta_f^{-1} \\
 t'(J_H) &= \delta\lambda'(K_f)(\Delta(k_f, J_H))
 \end{aligned}$$

Faire (5)

4. Si $\exists j_2 \in J_f$ / $t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) \neq 0$
Alors

$$\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_2, \bar{J}_f = (J_f - j_2) \cup j_0$$

faire comme le cas $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$

Si $\sigma^0 = \sigma_j$

Alors

$$\bar{J}_B = \bar{J}_B, \bar{J}_f = (\bar{J}_f - j_0) \cup J, \bar{K}_f = K_f$$

sinon si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors

$$\bar{J}_B = \bar{J}_B, \bar{J}_f = (\bar{J}_f - j_0), \bar{K}_f = K_f - K_1$$

Aller à 2

Sinon $\exists j_2 \in J_f / t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) = 0$

Alors

$$\sigma^0 = \sigma_{j_1}, \bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1, \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = K_f$$

Aller à 2

5. calculer σ^0

$$\sigma^0 = \sigma_{j_1} : \bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1, \bar{K}_f = K_f$$

$$\sigma^0 = \sigma_{k_1} : \bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = (J_f - j_0), \bar{K}_f = K_f - K_1$$

Aller à (2)

6. calculer σ^0

$$\sigma^0 = \sigma_{j_1} : \bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f \cup j_1, \bar{K}_f = K_f \cup k_0$$

$$\sigma^0 = \sigma_{k_1} : \bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$$

Aller à (2)

RÉSOLUTION PRATIQUE

Melle HAMDOUS [2010.]

On choisit un plan de départ $\{x \mid J_f\} = \emptyset$ (pour assurer la régularité du support de la fonctionnelle) et $K_f = \{k_0\}$; avec $(c'_{k_0}x + \alpha_{k_0}) = \min_{k \in K} (c'_k x + \alpha_k)$.

Nous entamons l'algorithme avec le support de la fonctionnelle $Q_f = \{K_f, J_f\}$.

2.7.1 EXEMPLE D'APPLICATION

Soit le problème min-max suivant :

$$(P2) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \min_k \left(\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + 6x_6 - 2 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 - 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 2x_5 + x_6 - 3 \end{array} \right) \rightarrow \max_x \\ \frac{3}{2}x_1 + 3x_2 + \frac{7}{2}x_3 - \frac{37}{10}x_4 - \frac{21}{10}x_5 + \frac{43}{20}x_6 = 1 \\ \frac{9}{2}x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \frac{35}{4}x_3 + 5x_4 + \frac{79}{100}x_5 - \frac{7}{4}x_6 = 4 \\ 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 5 \\ -2 \leq x_1 \leq 2 \\ -2 \leq x_2 \leq 2 \\ -4 \leq x_3 \leq 4 \\ -4 \leq x_4 \leq 4 \\ -6 \leq x_5 \leq 6 \\ -7 \leq x_6 \leq 7 \end{array} \right.$$

Avec :

$$\begin{aligned} x' &= (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6), \\ d_1 &= (-2; -2; -4; -4; -6; -7), \\ d_2 &= (2; 2; 4; 4; 6; 7), \\ \alpha &= (-2; -2; -3), \\ b &= (1; 1; 4; 5), \end{aligned}$$

$$c_k = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ -6 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad k = 1, 3$$

Chapitre 2. RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX AVEC CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 & \frac{7}{2} & -\frac{37}{10} & -\frac{21}{10} & \frac{43}{20} \\ \frac{9}{4} & -1 & -3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & \frac{35}{4} & 5 & \frac{70}{100} & -\frac{7}{4} \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous prenons comme solution initiale le vecteur x défini comme suit (en prenant $x_5 = x_6 = 0$) :

$$x = \begin{pmatrix} \frac{2491}{2521} \\ -\frac{1243}{962} \\ \frac{911}{1171} \\ -\frac{459}{2530} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	$\frac{2491}{2521}$	0	$-\frac{324}{1469}$	$-\frac{17049}{1259}$	$\frac{1219}{3218}$	0
2	$-\frac{1243}{962}$	$\frac{583}{547}$	$-\frac{576}{4711}$	$\frac{16827}{625}$	$-\frac{556}{6313}$	0
3	$\frac{911}{1171}$	$\frac{556}{313}$	$-\frac{16903}{30184}$	$-\frac{7841}{919}$	$\frac{958}{2431}$	0
4	$-\frac{459}{2530}$	$-\frac{2305}{1622}$	$\frac{4702}{895}$	$\frac{1946}{2445}$	$-\frac{589}{4045}$	0
5	0			6	$\frac{71}{263}$	$\frac{7601}{296}$
6	0			7	$\frac{497}{1578}$	$\frac{7121}{904}$

TABLE 2.1 – *Itération 1 de la résolution de l'exercice*

$$\beta(x, Q_p) = \frac{10969}{47}$$

$$\beta(\bar{x}, Q_p) = \frac{3789}{17}$$

Chapitre 2. RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX AVEC CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	$\frac{461}{1217}$	0	$-\frac{299}{98}$	$-\frac{3985}{508}$	$\frac{519}{1492}$	0
2	$-\frac{2}{25}$	$\frac{3703}{376}$	$-\frac{384}{2563}$	$\frac{2597}{187}$	$-\frac{8903}{3434}$	0
3	$\frac{197}{500}$	$\frac{1031}{623}$	$-\frac{1105}{1422}$	$-\frac{3602}{637}$	$\frac{1451}{3903}$	0
4	$-\frac{29}{200}$	$-\frac{379}{311}$	$-\frac{471}{1174}$	$\frac{25833}{2500}$	$-\frac{470}{4483}$	0
5	$\frac{729}{2701}$			$\frac{2080}{363}$		
6	$-\frac{157}{500}$	0	$-\frac{737}{1882}$	$\frac{2447}{131}$	$-\frac{593}{2458}$	0

TABLE 2.2 – *Itération 2 de la résolution de l'exercice*

$$\beta(x, Q_p) = \frac{11882}{67}$$

$$\beta(\bar{x}, Q_p) = \frac{17841}{101}$$

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	$-\frac{108}{125}$	$-\frac{1548}{259}$	$-\frac{868}{2447}$	$-\frac{2032}{307}$	$-\frac{1633}{1888}$	0
2	2	0	$-\frac{330}{1801}$	$\frac{586}{53}$	2	0
3	$-\frac{69}{125}$	$-\frac{1467}{583}$	$-\frac{1483}{1712}$	$-\frac{1832}{363}$	$-\frac{381}{689}$	-1
4	$\frac{1853}{845}$	$-\frac{871}{457}$	$-\frac{326}{1007}$	$\frac{4991}{398}$	$\frac{682}{311}$	0
5						
6	$\frac{1989}{467}$	$-\frac{4323}{2036}$	$-\frac{293}{1333}$	$\frac{3807}{155}$	$\frac{1512}{355}$	0

TABLE 2.3 – *Itération 3 de la résolution de l'exercice*

$$\beta(x, Q_p) = \frac{23731}{143}$$

$$\beta(\bar{x}, Q_p) = \frac{6235}{46}$$

Chapitre 2. RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX AVEC CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	$-\frac{108}{125}$	$-\frac{2305}{1622}$	$\frac{3121}{219}$	$\frac{1132}{5631}$	$-\frac{1633}{1888}$	0
2	2	$\frac{1594}{479}$		-4	2	$\frac{9419}{1312}$
3	$-\frac{69}{125}$	$\frac{583}{547}$	$\frac{1894}{755}$	$-\frac{1293}{941}$	$-\frac{381}{689}$	0
4	$\frac{1853}{845}$	$-\frac{1112}{313}$	$\frac{1547}{178}$	$\frac{7111}{342}$	$\frac{682}{311}$	0
5	$\frac{898}{671}$	$-\frac{6181}{174}$		$\frac{2783}{597}$	$\frac{1511}{1129}$	$\frac{4367}{314}$
6	$\frac{1989}{467}$	$-\frac{2780}{313}$	$\frac{1684}{295}$	$\frac{3553}{74}$	$\frac{1512}{355}$	0

TABLE 2.4 – *Itération 4 de la résolution de l'exercice*

$$\beta(x, Q_p) = \frac{13418}{75}$$

$$\beta(\bar{x}, Q_p) = \frac{13418}{75}$$

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	$-\frac{108}{125}$	$-\frac{1548}{259}$	$-\frac{156}{743}$	$-\frac{3368}{623}$	$-\frac{1633}{1888}$	0
2	2	0	0	$\frac{1147}{228}$	2	-1
3	$-\frac{69}{125}$	$-\frac{1467}{583}$	$-\frac{914}{1093}$	$-\frac{709}{172}$	$-\frac{381}{689}$	0
4	$\frac{1853}{845}$	$-\frac{871}{457}$	$-\frac{253}{1434}$	$\frac{12803}{1250}$	$\frac{682}{311}$	0
5	$\frac{898}{671}$	$-\frac{3809}{131}$		$\frac{2783}{597}$	$\frac{1511}{1129}$	$\frac{2747}{1418}$
6	$\frac{1989}{467}$	$-\frac{4323}{2036}$	$-\frac{213}{1559}$	$\frac{2969}{148}$	$\frac{1512}{355}$	0

TABLE 2.5 – *Itération 5 de la résolution de l'exercice*

$$\beta(x, Q_p) = \frac{6235}{46}$$

$$\beta(\bar{x}, Q_p) = \frac{6235}{46}$$

Chapitre 2. RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX AVEC CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	$-\frac{108}{125}$	$\frac{1112}{313}$	$-\frac{56}{75}$	$-\frac{716}{471}$	$\frac{2905}{2993}$	0
2	2	$-\frac{285}{74}$		0	2	$-\frac{1611}{751}$
3	$-\frac{69}{125}$	$-\frac{2915}{1641}$	$\frac{1315}{846}$	$-\frac{3373}{1521}$	$-\frac{1789}{2530}$	0
4	$\frac{1853}{845}$	0		$\frac{4722}{269}$	$\frac{9635}{2823}$	0
5	$\frac{898}{671}$	$-\frac{37200}{1721}$		$\frac{2783}{597}$	$\frac{773}{465}$	$\frac{8569}{1013}$
6	$\frac{1989}{467}$	$-\frac{1112}{313}$	$\frac{359}{5165}$	$\frac{3825}{97}$	7	-1

TABLE 2.6 – *Itération 6 de la résolution de l'exercice*

$$\beta(x, Q_p) = \frac{3829}{38}$$

$$\beta(\bar{x}, Q_p) = \frac{7407}{79}$$

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	$-\frac{97}{100}$	$-\frac{834}{313}$	/	/	/	/
2	2	$\frac{6057}{649}$	/	/	/	/
3	$-\frac{707}{1000}$	$-\frac{2915}{1641}$	/	/	/	/
4	$\frac{1628}{477}$	$\frac{2780}{313}$	/	/	/	/
5	$\frac{1142}{687}$	$\frac{556}{313}$	/	/	/	/
6	7	$-\frac{1109}{434}$	/	/	/	/

TABLE 2.7 – *Itération 7 de la résolution de l'exercice*

$$\beta(x, Q_p) = 0$$

La solution optimal du problème est :

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{97}{100} \\ 2 \\ -\frac{707}{1000} \\ \frac{1628}{477} \\ \frac{1142}{687} \\ 7 \end{pmatrix}$$

Donc $\{\bar{x}, Q_f\}$ est optimal.

2.8 CONCLUSION

Nous nous sommes intéressé dans ce chapitre à la résolution du problème Min-Max avec des contraintes généralisé en programmation linéaire avec la méthode adaptée ainsi qu'un exemple d'application.

LA RÉOLUTION D'UN
PROBLÈME MIN-MAX EN
PROGRAMMATION LINÉAIRE
AVEC LA MÉTHODE DUALE
ADAPTÉE

3

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous proposons de résoudre un problème Min-Max en programmation linéaire par la méthode duale adaptée .

3.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME DUAL

[KIRILLOVA \[1980.\]](#)

Considérons le problème suivant :

$$P(2) \begin{cases} (0'(J), 1)\gamma \rightarrow \max \\ (-c(K, J), e(K))\gamma \leq \alpha(K) \\ (A(I, J), 0(I))\gamma = b(I) \\ d_1(J) \leq (I_n, 0(J))\gamma \leq d_2(J) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \gamma = \begin{pmatrix} X(J) \\ \xi \end{pmatrix}$$

est équivalent au problème $P(2)$.

On obtient le problème dual suivant :

$$D(2) \begin{cases} \Phi(X) = \lambda' \alpha + y' b - \mu' d_1 + v' d_2 \rightarrow \min \\ -\lambda'(K)c(K, J) + y'(I)A(I, J) - \mu'(J) + v'(J) = 0'(J) \\ \lambda'(K)e(K) = 1 \\ X = (\lambda, y, \mu, v)' \text{ et } \lambda \in \mathcal{R}_+^p, y \in \mathcal{R}^m, \mu \in \mathcal{R}_+^n, v \in \mathcal{R}_+^n \end{cases}$$

3.2 DÉFINITIONS ESSENTIELLES

[GABASOV.R](#)

1. Plan dual

Tout vecteur $X = (\lambda, y, \mu, v)'$ vérifiant les contraintes du problème $D(2)$ est dit « **plan dual** ».

2. Plan dual basique

- Tout plan dual X tel que $y'(I) = \lambda'(K)c(K, J_B)A_B^{-1}$ avec $\lambda(K_f) = \gamma(K_f), \lambda(K_H) = 0$, est dit « **plan dual basique** ».
- Les plans duaux basiques sont associés à des appuis réguliers, ce qui justifie le choix fait au chapitre 2, et qui consiste à considérer uniquement les appuis réguliers.

3. Plan dual accordé

Tout plan dual basique vérifiant :

$$\begin{cases} \mu_j = \Delta_j, & v_j = 0 & \text{Si } \Delta_j \geq 0 \\ \mu_j = 0, & v_j = -\Delta_j & \Delta_j < 0 \end{cases} \text{ est dit « plan dual accordé ».}$$

4. Pseudo plan

Au plan dual accordé X , on associe le pseudo-plan $\chi = \chi(J)$ tel que :

$$\chi_j = \begin{cases} d_{1j} & \text{Si } j \in J_H^+, J_H^+ = \{j \in J_H / \Delta_j \geq 0\} \\ d_{2j} & \text{Si } j \in J_H^-, J_H^- = \{j \in J_H / \Delta_j < 0\} \end{cases}$$

$$\chi(J_B) = A_B^{-1} (b - A(I, J_H)\chi(J_H) - A(I, J_f)X(J_f)), \text{ où } \chi(J_f) \text{ est donné par :}$$

$$\chi(J_f) = D(J_f, K_f) (\alpha(K_f) + C(K_f, J_B)A_B^{-1}b - \Delta(K_f, J_H)\chi(J_H)).$$

Remarque 3.1 Pour le pseudo-plan ainsi défini on pose $f(\chi) = \Phi(X)$.

3.3 PROPRIÉTÉS

Lemme 3.1 Pour tout plan dual X et tout plan admissible primal x , on a $f(x) \leq \Phi(X)$.

Démonstration. On a :

$$\Phi(X) = \lambda' \alpha + y' b - \mu' d_1 + v' d_2,$$

étant donné que tout plan admissible primal x vérifie :

$$d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j}, \forall j \in J \text{ on a } -\mu' d_1 \geq -\mu' x, v' d_2 \geq v' x \text{ et } Ax = b, \text{ de là on obtient :}$$

$$\Phi(X) \geq \lambda' \alpha + (y' A - \mu' + v') x$$

D'autre part, pour tout plan dual, les contraintes du problème $D(2)$ nous donne :

$$y' A - \mu' + v' = \lambda' (K) c(K, J) \quad \text{et} \quad \lambda' (K) e(K) = 1.$$

D'où le résultat suivant :

$$\Phi(X) \geq \lambda' (K) (\alpha(K) + c(K, J) x(J)) \geq \lambda' (K) e(K) f(x) = f(x)$$

□

Lemme 3.2 Pour tout appui Q_p du problème $P(2)$ on a :

$$\Phi(\bar{X}) \leq \Phi(X)$$

Où : \bar{X} est le plan dual accordé et X est un plan dual basique quelconque associés à l'appui Q_p du problème $P(2)$.

Démonstration. Soit Q_p un appui du problème $P(2)$, \bar{X} le plan dual accordé et X un plan dual basique quelconque associés à l'appui Q_p .

On a alors :

$$\Phi(\bar{X}) - \Phi(X) = -\delta \mu' d_1 + \delta v' d_2$$

et par définition du plan dual accordé on obtient :

$$\Phi(\bar{X}) - \Phi(X) = \sum_{\Delta_j < 0} \mu_j d_{1j} + \sum_{\Delta_j \geq 0} (-\Delta_j + \mu_j) d_{1j} + \sum_{\Delta_j < 0} (-\Delta_j - v_j) d_{2j} + \sum_{\Delta_j \geq 0} -v_j d_{2j}$$

Les contraintes du problème $D(2)$ donne $\mu_j - v_j = \Delta_j, \forall j \in J$

D'où :

$$\Phi(\bar{X}) - \Phi(X) = \sum_{\Delta_j < 0} \mu_j d_{1j} + \sum_{\Delta_j \geq 0} (-\mu_j + v_j + \mu_j) d_{1j} + \sum_{\Delta_j < 0} (-\mu_j + v_j - v_j) d_{2j} + \sum_{\Delta_j \geq 0} -v_j d_{2j}$$

$$\Phi(\bar{X}) - \Phi(X) = \sum_{\Delta_j \geq 0} (d_{1j} - d_{2j})\mu_j + \sum_{\Delta_j < 0} (d_{1j} - d_{2j})v_j$$

D'où :

$$\Phi(\bar{X}) - \Phi(X) \leq 0$$

□

Conséquence

Le lemme 3.2 , montre l'intérêt de ne considérer par la suite, que des plans duaux accordés.

Lemme 3.3 *Pour le plan dual accordé et le pseudo-plan associés à tout appui Q_p du problème $P(2)$, on a $f(\chi) = \Phi(X)$ si et seulement si $\chi(J)$ vérifie le système d'équations linéaires suivant :*

$$c(K_f, J)\chi(J) + \alpha(K_f) = e(K_f)f(\chi) \quad (3.1)$$

Démonstration. On suppose que $\chi(J)$ vérifie le système (3.1) , par définition de $\chi(J_H)$ et du plan dual accordé X on a :

$$\Phi(X) = \gamma'(K_f)(c(K_f, J)X(J)) + \alpha(K_f) \quad (3.2)$$

D'où : comme

$$\gamma'(K_f)e(K_f) = 1,$$

on aura

$$f(\chi) = \Phi(X),$$

et comme par définition du plan dual accordé et du pseudo-plan χ , on a :

$$\Delta_f \begin{pmatrix} \chi(J_f) \\ f(\chi) \end{pmatrix} = c(K_f, J_B)A_B^{-1}b - \Delta(K_f, J_H)\chi(J_H) + \alpha(K_f) \Rightarrow c(K_f, J)\chi(J) + \alpha(K_f) = e(K_f)f(\chi)$$

□

3.4 CRITÈRES D'OPTIMALITÉ

GABASOV.R

Théorème 3.1 *Les conditions :*

$$\begin{cases} d_{1j} \leq \chi_j \leq d_{2j} & \forall j \in J_B \cup J_f \\ c'_k \chi + \alpha_k \geq f(\chi), & \forall k \in K_H \end{cases} \quad (3.3)$$

Sont suffisantes pour l'optimalité du plan dual accordé associé à l'appui Q_p du problème $P(2)$.

Démonstration. Supposons que pour le pseudo-plan $\chi(J)$ associé à l'appui Q_p du problème $P(2)$, les relations (3.3) sont vérifiées, alors $\chi(J)$ est un plan admissible du problème $P(2)$, et en vertu du lemme (1) on a $f(\chi) \leq \Phi(\bar{X})$ quelque soit le plan dual \bar{X} , et par construction on a :

$$f(\chi) = \Phi(X) \text{ où } X \text{ est le plan dual accordé associé à } Q_p.$$

Par conséquent, le plan dual accordé X est un plan optimal pour le problème $D(2)$.

□

Théorème 3.2 $\{\chi, Q_p\}$ est un plan d'appui optimal du problème $P(2)$ si et seulement si les relations (3.3) sont vérifiées.

Démonstration. Condition suffisante

Soit χ le pseudo-plan associé à l'appui Q_p du problème $P(2)$, il est clair que si les relations (3.3) sont vérifiées, $\{\chi, Q_p\}$ devient plan d'appui, et par le lemme 1 on a

$f(x) \leq \Phi(\bar{X})$ pour tout plan admissible x et tout plan dual \bar{X} , et en particulier pour le plan dual accordé X associé à Q_p .

D'autre part :

Par construction de χ , on a $f(\chi) = \Phi(X)$, d'où on obtient : $f(x) \leq f(\chi)$ pour tout plan admissible x .

Condition nécessaire

Il est clair que si les relations (3.3) ne sont pas vérifiées pour le pseudo-plan $\chi(J)$ associé à l'appui Q_p du problème $\{\chi, Q_p\}$ ne constitue pas un plan d'appui. Et par conséquent, n'est pas un plan d'appui optimal. □

3.5 CONDITIONS SUFFISANTES D'INEXISTENCE DE PLAN ADMISSIBLE POUR LE PROBLÈME P(2)

Théorème 3.3 *Si pour le pseudo-plan et le plan dual accordé associé à un appui Q_p du problème P(2), le critère d'optimalité (3.3) n'est pas vérifié, et si on a de plus les relations suivantes :*

$$\begin{cases} \forall k \in K_f, \delta \lambda_k \geq 0 \\ \forall j \in J_H, \quad \text{Si } \Delta_j \neq 0 \text{ alors } \Delta_j t_j \geq 0 \\ \quad \text{Si } \Delta_j = 0 \text{ alors } t_j \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Alors le problème P(2) n'admet pas de plan admissible.

Démonstration. Soit Q_p un appui du problème P(2), $\chi(J)$ le pseudo-plan et $X = (\lambda, y, \mu, v)'$ le plan dual accordé associés.

En admettant que le critère d'optimalité (3.3) n'est pas vérifié pour $\chi(J)$ et X , si de plus les relations (3.4) sont vérifiées alors pour tout $\sigma \geq 0$, on construit un plan dual :

$$\bar{X} = (\bar{\lambda}, \bar{y}, \bar{\mu}, \bar{v})'$$

tel que

$$\bar{\lambda} = \lambda + \sigma \delta \lambda, \text{ et } \bar{\mu} - \bar{v} = \Delta + \sigma t(J).$$

Par définition de la direction $(t'(J), \delta\lambda'(K))$ on a les deux cas suivants :

Cas a

$$\theta^0 = \theta_{k_0}$$

alors :

$$\Delta\Phi(X) = \sigma(c'_{k_0}\chi + \alpha_{k_0} - f(\chi))$$

Cas b

$$\theta^0 = \theta_{j_0}$$

alors :

$$\Delta\Phi(X) = \begin{cases} \sigma(\chi_{j_0} - d_{1j_0}) & \text{Si } \chi_{j_0} < d_{1j_0} \\ \sigma(d_{2j_0} - \chi_{j_0}) & \text{Si } d_{2j_0} < \chi_{j_0} \end{cases}$$

On remarque que dans chacun des deux cas *a* et *b*, l'accroissement dual $\Delta\Phi(X)$ décroît indéfiniment lorsque σ tend vers $+\infty$.

Par conséquent, le problème dual $D(2)$ n'admet pas d'optimum fini, et en vertu du théorème fondamental de la dualité (voir annexe 2), le problème $P(2)$ n'admet pas de plan admissible. □

3.6 ITÉRATION DE LA MÉTHODE

M CHEBBAH [2006.]

3.6.1 CALCUL DE L'INDICE DE NON OPTIMALITE

Pour le pseudo plan $\chi(J)$, on définit l'indice de non optimalité $\theta^0 = \max(\theta_{j_0}, \theta_{k_0})$ par :

$$\theta_{j_0} = \max_{j \in J_B \cup J_f} (\theta_j)$$

où

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{1j} - \chi_j}{\mu_j} & \text{Si } \mu_j = 1 \\ \frac{d_{2j} - \chi_j}{\mu_j} & \text{Si } \mu_j = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec

$$\mu_j = \begin{cases} \mu_j = 1 & \text{Si } d_{1j} > \chi_j \\ \mu_j = -1 & \text{Si } d_{2j} < \chi_j \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\theta_{k_0} = \max_{k \in K_H} (\theta_k)$$

où

$$\theta_k = \begin{cases} f(\chi) - (c'_k \chi(J) + a_k) & \text{Si } f(\chi) > c'_k \chi(J) + a_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 3.2 Si pour un pseudo-plan, l'indice de non optimalité est nul, alors il est optimal.

On suppose que pour le pseudo-plan $\chi(J)$ correspondant au plan dual accordé X et à l'appui Q_f du problème, le critère d'optimalité n'est pas vérifié. Construisons alors l'itération :

$$(\lambda, \Delta, Q_f) \rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{\Delta}, \bar{Q}_f)$$

ou

$$\bar{\lambda} = \lambda + \sigma^0 \delta \lambda,$$

$$\bar{\Delta} = \Delta + \sigma^0 t$$

et

$$\bar{y} = y + \sigma^0 \delta y \quad \text{avec } (t'(J), \delta \lambda'(K))$$

une direction admissible au point X et σ^0 le pas maximal le long de cette direction.

3.6.2 CALCUL DE L'ACCROISSEMENT DUAL

On a

$$\Phi(\bar{X}) + \Phi(X) = \sigma^0 \delta \lambda' a + \sigma^0 \delta y' b - \delta \mu' d_1 + \delta \mu' d_2, \quad \delta \Delta = \sigma^0 \delta y' A - \sigma^0 \delta \lambda' c$$

et comme

$$A\chi = b,$$

l'accroissement dual devient :

$$\Phi(\bar{X}) + \Phi(X) = \sigma^0 \delta \lambda' a + \delta \Delta' \chi + \sigma^0 \delta \lambda' c \chi - \delta \mu' d_1 + \delta v' d_2,$$

de plus on a

$$\delta \lambda'(K) e(K) = 0$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\Phi(\bar{X}) + \Phi(X) = \sigma \gamma + \beta$$

où :

$$\begin{cases} \beta = (\delta \Delta)' \chi \cdot (\delta \mu)' d_1 + (\delta v)' d_2 \\ \gamma = \delta \lambda'(K_H) \cdot [\alpha(K_H) + c(K_H, J) \chi - e(K_H) f(\chi)] \end{cases}$$

Notation

On pose

$$\beta_{J_H} = \sum_{j \in J_H} (\delta \Delta_j \chi_j - \delta \mu_j d_{1j} + \delta v_j d_{2j})$$

En tenant compte du signe de Δ_j et $\bar{\Delta}_j$.

On obtient :

$$\beta(J_H) = \beta(J_{H^{+-}}) + \beta(J_{H^{-+}}) + \beta(J_{H^{0-}})$$

où :

$$\beta(J_{H^{+-}}) = \sum_{j \in J_{H^{+-}}} \bar{\Delta}_j (d_{1j} - d_{2j}) > 0 \quad \text{avec} \quad J_{H^{+-}} = \{j \in J_H / \Delta_j > 0, \quad \bar{\Delta}_j < 0\},$$

$$\beta(J_{H^{-+}}) = \sum_{j \in J_{H^{-+}}} \bar{\Delta}_j (d_{2j} - d_{1j}) > 0 \quad \text{avec} \quad J_{H^{-+}} = \{j \in J_H / \Delta_j < 0, \quad \bar{\Delta}_j > 0\},$$

$$\beta(J_{H^{0-}}) = \sum_{j \in J_{H^{0-}}} \bar{\Delta}_j (d_{1j} - d_{2j}) > 0 \quad \text{avec} \quad J_{H^{0-}} = \{j \in J_H / \Delta_j = 0, \quad \bar{\Delta}_j = 0\}.$$

Donc, pour avoir $\beta(J_H) = 0$; on prend $\sigma_{j1} = \min_{j \in J_H} (\sigma_j)$

où :

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-\Delta_j}{t_j} & \text{Si } \Delta_j t_j < 0 \quad \text{ou } (\Delta_j = 0 \text{ et } t_j < 0) \\ +\infty & \text{Sinon} \end{cases}$$

D'autre part, pour avoir un nouvel appui régulier, on prend σ tel que $\bar{\lambda}_k \geq 0$,
 $\forall k \in K_f$;

c'est-à-dire $\sigma = \sigma_{k1}$ où $\sigma_{k1} = \min_{k \in K_f} (\sigma_k)$

avec :

$$\sigma_k = \begin{cases} \frac{-\lambda_k}{\delta \lambda_k} & \text{Si } \delta \lambda_k < 0 \\ +\infty & \text{Sinon} \end{cases}$$

D'où , le pas maximal est donné par $\sigma^0 = \min (\sigma_{j1}, \sigma_{k1})$.

3.7 ALGORITHME DE RÉOLUTION

Début

(0).

Soit Q_P un appui du problème $P(2)$, construisons le pseudo-plan $\chi(J)$ correspondant où :

$$\chi_j = \begin{cases} d_{1j} & \text{Si } j \in J_H^+, J_H^+ = \{j \in J_H / \Delta_j \geq 0\} \\ d_{2j} & \text{Si } j \in J_H^-, J_H^- = \{j \in J_H / \Delta_j < 0\} \end{cases}$$

$$\chi(J_f) = D(J_f, K_f)(\alpha(K_f) + c(K_f, J_B)A_B^-b - \Delta(K_f, J_H)\chi(J_H))$$

$$\chi(J_B) = A_B^{-1}(b - A(I, J_H)\chi(J_H) - A(I, J_f)\chi(J_f))$$

$$f(\chi) = c'_k X + \alpha_k, \quad \forall k \in K_f \quad \text{et aller en (1)}$$

(1).

Calculons $\theta^0 = \max(\theta_{j_0}, \theta_{k_0})$ où $\theta_{j_0} = \max_{j \in J_B \cup J_f}(\theta_j)$, $\theta_{k_0} = \max_{k \in K_H}(\theta_k)$

où

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{1j} - \chi_j}{\mu_j} & \mu_j = 1 \\ \frac{d_{2j} - \chi_j}{\mu_j} & \mu_j = -1 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

avec

$$\mu_j = \begin{cases} 1 & \text{Si } d_{1j} > \chi_j \\ -1 & \text{Si } d_{2j} < \chi_j \\ +\infty & \text{Sinon} \end{cases}$$

où

$$\theta_k = \begin{cases} f(\chi) - (c'_k \chi(J) + \alpha_k) & \text{Si } f(\chi) > c'_k \chi(J) + \alpha_k \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Alors Si $\theta = 0$ aller en (7)

Si non

Si $\theta^0 = \theta_{k_0}$ **alors faire**

$$\delta\lambda_{k_0} = 1, \delta\lambda(K_H/\{K_0\}) = 0$$

$$t(J_B) = 0, t(J_f) = 0$$

$$\delta\lambda'(K_f) = -\delta\lambda'(K_H)(\Delta(K_H, J_f), e(K_H))\Delta_f^{-1}$$

$$t'(J_H) = \delta\lambda'(K)\Delta(K, J_H) \text{ et aller en (3)}$$

Fin faire

Si non $\theta^0 = \theta_{j_0}$ et aller en (2)

Fin si

Fin si

(2).

Si $j_0 \in J_f$ **alors faire**

$$t_{j_0} = \mu_{j_0}, t(J_f/\{j_0\}) = 0, t(J_B) = 0, \delta\lambda'(K_H) = 0, \delta\lambda'(K_f) = (t'(J_f), 0)\Delta_f^{-1},$$

$$t'(J_H) = \delta\lambda'(K_f)\Delta(K_f, J_H) \text{ et aller en (4)}$$

Fin faire

Si non $j_0 \in J_B$ **alors faire**

$$t_{j_0} = \mu_{j_0}, t(J_B/\{j_0\}) = 0, t(J_f) = 0, \delta\lambda'(K_H) = 0, \delta\lambda'(K_H) = - (t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J), 0)\Delta_f^{-1},$$

$$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_H) + \delta\lambda'(K_f)\Delta(K_f, J_H) \text{ et aller en (5)}$$

Fin faire

Fin si

(3).

Calculer $\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}, \sigma_{k_1})$ où $\sigma_{k_1} = \min_{k \in K_f}(\sigma_k)$ et $\sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H}(\sigma_j)$ avec :

$$\sigma_k = \begin{cases} \frac{-\lambda_k}{\delta\lambda_k} & \text{Si } \delta\lambda_k < 0 \\ +\infty & \text{Sinon} \end{cases}$$

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-\Delta_j}{t_j} & \text{Si } (\Delta_j t_j < 0) \text{ ou } (\Delta_j = 0 \text{ et } t_j < 0) \\ +\infty & \text{Sinon} \end{cases}$$

Alors Si $\sigma^0 = +\infty$ aller en (6)

Si non

Si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors faire

$\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = (K_f / \{k_1\} \cup \{k_0\})$ et aller en (o)

Fin faire

Fin si

Fin si

(4).

Calculer $\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}, \sigma_{k_1})$

Alors si $\sigma^0 = +\infty$ aller en (6)

Si non

Si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$

alors faire

$\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_f = J_f / \{j_0\}, \bar{K}_f = (K_f / \{k_1\} \cup \{k_0\})$ et aller en (o)

Fin faire

Si non $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors faire

$\bar{J}_B = J_B, \bar{K}_f = K_f, \bar{J}_f = (J_f / \{j_0\}) \cup \{j_1\}$ et aller en (o)

Fin faire

Fin si

Fin si

(5).

Si $\exists j_2 \in J_f / t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) \neq 0$ alors faire

$J_B = (J_B / \{j_0\}) \cup \{j_2\}, J_f = (J_f / \{j_2\}) \cup \{j_0\}, K_f = K_f$ et aller en (4)

Fin faire

Si non calculer $\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}, \sigma_{k_1})$

Alors si $\sigma^0 = +\infty$ aller en (6)

Si non $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors faire

$\bar{J}_B = (J_B / \{j_0\}) \cup \{j_1\}, \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = K_f$ et aller en (o)

Fin faire

Fin si

Fin si

(6). Le problème $P(2)$ n'admet pas de plan admissible.

(7). $\{\chi(J), Q_p\}$ est un plan d'appui optimal du problème $P(2)$

Fin.

LA RÉOLUTION D'UN
PROBLÈME MIN-MAX EN
CONTRÔLE OPTIMAL

4

4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre on résout un problème Min-Max en contrôle optimal avec des commandes impulsives . (Cas discret)

4.2 LE CAS DISCRET

4.2.1 POSITION DU PROBLÈME

M CHEBBAH [2006.]

Considérons le système dynamique linéaire suivant :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + b\mu(t); \quad x(0) = x_0, \quad (4.1)$$

défini sur l'intervalle $T = [0; t_1]$, où

$x(t)$ est un n – vecteur décrivant la trajectoire du système à l'instant t ,

$\mu(t)$ la commande d'entrée à l'instant t du système ,

$$f_*(x) \leq \mu(t) \leq f^*(t), t \in [0; t_1]$$

$f_*(x)$ et $f^*(t)$ des fonctions définies sur $[0, t_1]$.

A une $n \times n$ matrice caractérisant l'état du système ,

b un n – vecteur ,

x_0 la position initiale du système à l'instant $t = 0$.

Le système est caractérisé par un signal de sortie pour $t = t_1$:

$$Hx(t_1) = g, \quad (4.2)$$

où H est une $m \times n$ matrice avec $\text{rang} H = m \leq n$, g un m - vecteur .

$$J(\mu) = \min_{k \in K} (c'_k x(t_1) + \alpha_k) \text{ est un critère de qualité .}$$

c_k , des n –vecteurs , α_k des scalaires, c'_k le transposé du vecteur c_k , $k \in K$.

$k = \{1 \dots \dots \dots p\}$:L'ensemble des indices des composants de la fonctionnelle J ,

$I = \{1 \dots \dots \dots m\}$: L'ensemble des indices des lignes ,

$J = \{1 \dots \dots \dots n\}$: L'ensemble des indices des colonnes ,

Définition 4.1 Une commande μ est dite impulsive sur l'intervalle $[0, t_1]$ si :

$$\mu(t) = \mu_i = \text{constante},$$

$$t \in [\tau_i; \tau_{i+1}] \quad i = 0 \dots N \quad \tau_0 = 0 \quad \tau_{N+1} = t_1, \quad \tau_{i+1} - \tau_i = h_i > 0.$$

h_i est le pas de quantification (dans notre cas $h_i = h$).

Dans la classe des commandes impulsive, considérons le problème de Commande optimal suivant :

$$(c1) \quad \begin{cases} J(\mu) = \min_{k \in K} (c'_k x(t_1) + \alpha_k) \rightarrow \max_{\mu} \\ \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + b\mu(t), & x(0) = x_0 \\ Hx(t_1) = g \\ f_*(t) \leq \mu(t) \leq f^*(t), & t \in [0, t_1] \end{cases}$$

Le système 4.1 sous l'effet d'une commande μ admet comme solution, l'expression donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t).F^{-1}(\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t F(t)F^{-1}(s)b\mu(s)ds, \quad t \geq \tau \text{ et } \tau \geq 0 \quad (4.3)$$

où

$F(t) = \exp (At)$, $F(0) = I_n$, $F(t)$ est la matrice carrée d'ordre n , solution de l'équation suivante :

$$F'(t) = AF(t), \quad F(0) = I_n,$$

Comme la commande μ est impulsive, l'expression 4.3 prend la forme suivante :

$$x(i+1) = x(\tau_{i+1}) = F(\tau_{i+1}).F^{-1}(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} F(\tau_{i+1})F^{-1}(s)b\mu(i)ds,$$

où

$$\mu(t) = \mu(\tau_i), \quad \tau_i \in T, \quad i = 0..N, \quad T = \bigcup_{i=0} [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad \tau_0 = 0, \tau_{N-1} = t_1, \\ \tau_{i+1} - \tau_i = h > 0.$$

$$x(i+1) = F(h) \cdot (x(i) + \int_0^h F^{-1}(s) b \mu(i) ds \text{ (en faisant une translation sur } \tau_i \text{ et } \tau_{i+1}) .$$

En posant

$$D = \exp(Ah) = \sum \frac{(Ah)^n}{n!} \text{ et } d = D \cdot \int_0^h F^{-1}(s) b ds,$$

on aboutit au système équivalent à (C1) suivant :

$$(C2) \begin{cases} J(\mu) = \min_{k \in K} (c'_k x(t_1) + \alpha_k) \rightarrow \max_{\mu}, \\ x(t+h) = Dx(t) + d\mu(t); & x(0) = x_0, \\ Hx(t_1) = g, \\ f_*(t) \leq \mu(t) \leq f^*(t); & t \in T. \end{cases}$$

avec $x(t_1)$ vérifiant la propriété suivante :

$$x(t_1) = D^{\frac{t_1}{h}} \cdot x_0 + \sum_{t \in T} D^{\frac{t_1-t}{h}-1} d\mu(t).$$

Démonstration.

Par récurrence sur la longueur de l'intervalle $T = \bigcup_{i=0} [\tau_i, \tau_{i+1}]$, supposons $x(t_1)$ vrai sur T et montrons qu'elle est vrai sur

$$T_{N+1} = \bigcup_{i=0} [\tau_i, \tau_{i+1}) \cup [t_1, t_1 + h].$$

D'après l'énoncé (C2),

$$x(t_1 + h) = Dx(t_1) + d\mu(t_1)$$

et par application de l'hypothèse de récurrence ,

$$x(t_1 + h) = D(D^{\frac{t_1}{h}}.x_0 + \sum_{t \in T} D^{\frac{t_1-t}{h}-1} d\mu(t)) + d\mu(t_1),$$

$$x(t_1 + h) = D^{\frac{t_1+h}{h}}.x_0 + \sum_{t \in T} D^{\frac{t_1+h-t}{h}-1} d\mu(t) + D^0 d\mu(t_1) = D^{\frac{t_1+h}{h}}.x_0 + \sum_{t \in T} D^{\frac{t_1+h-t}{h}-1} d\mu(t) + D^{\frac{t_1+h-t_1}{h}-1} d\mu(t) = D^{\frac{t_1+h}{h}}.x_0 + \sum_{t \in T_{N+1}} D^{\frac{t_1+h-t}{h}-1} d\mu(t).$$

Donc cela va nous permettre d'établir une autre formulation équivalente du problème (C2) comme suit :

$$(C3) \quad \begin{cases} J(\mu) = \min_{k \in K} (c'_k \sum_{t \in T} D^{\frac{t_1-t}{h}-1} d\mu(t) + c'_k D^{\frac{t_1}{h}}.x_0 + \alpha_k) \rightarrow \max_{\mu} \\ H \sum_{t \in T} D^{\frac{t_1-t}{h}-1} d\mu(t) = g - HD^{\frac{t_1}{h}}.x_0, \\ f_*(t) \leq \mu(t) \leq f^*(t); \end{cases} \quad t \in T,$$

où

$$x(t+h) = Dx(t) + d\mu(t); \quad x(0) = x_0$$

□

4.3 NOTION DE COMMANDABILITE

GABASOV.R

Un processus de contrôle décrit par l'équation 4.1 est dit commandable ,si pour toute paire $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande mesurable bornée $\mu(t)$ sur un intervalle fini $[0; t_1]$ qui ramène l'objet sur la trajectoire $x(t)$ du point $x(0) = x_0$ au point $x(t_1) = x_1$. (c'est à dire de la position initiale à la position finale .)

Théorème 4.1 *KIRILLOVA [1980.]*

Un système linéaire de \mathbb{R}^n décrit par l'équation 4.1 est commandable si et seulement si le rang de la matrice $[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b]$ est égal à n .

Remarque 4.1

On impose au système linéaire de \mathbb{R}^n décrit par l'équation 4.1 une stabilité ($\lim_{v \rightarrow \infty} A^v = 0$ quand $v \rightarrow \infty$).

Dans toute la suite , on fera hypothèse de la stabilité du système linéaire 4.1 pour $v = n$.

- Définition 4.2**
- La commande $\mu(t)$ et sa trajectoire $x(t)$ sont admissibles ,s'ils vérifient les contraintes du problème (C2).
 - La commande admissible μ^0 est optimale si $\max J(\mu) = J(\mu^0)$.
 - La commande admissible μ^ε est epsilon – optimal si $J(\mu^0) - J(\mu^\varepsilon) < \varepsilon$.

Définition 4.3 [KIRILLOVA \[1980.\]](#)

- L'ensemble $T_B \subset T / |T_B| = m$ est appelé support des contraintes et la matrice $D_B = (H.D^{\frac{t_1-t}{h}-1}.d, t \in T_B)$, matrice du support si D_B est inversible .

En utilisant le support T_B , on définit la matrice $\Delta(K, T)$:

$$\Delta(K, T) = \begin{pmatrix} c'_k \cdot D^{\frac{t_1-t}{h}-1} .d; & t \in T_B \\ c'_k \cdot D^{\frac{t_1-t}{h}-1} .d; & t \in T \end{pmatrix} \cdot D_B^{-1} \begin{pmatrix} H.D^{\frac{t_1-t}{h}-1} .d, & t \in T_B \\ H.D^{\frac{t_1-t}{h}-1} .d, & t \in T \end{pmatrix}$$

Construisons les sous ensembles d'indices $T_f \subset T - T_B$ et $K_f \subset K$ tel que

$$|K_f| = |T_f| + 1$$

et la matrice ,

$$\Delta_f = (\Delta(K_f, T_f); e(K_f))$$

$$(\Delta(K_f, T_f)) = (\Delta_k(t)) \quad , (t \in T_f) \quad , k \in K_f \quad , e(K_f) = (e_k = 1, (k \in K_f)) .$$

Définition 4.4 [KIRILLOVA \[1980.\]](#)

L'ensemble $Q_f = \{K_f, T_f\}$ est appelé support de la fonctionnelle J si

$\det \Delta_f \neq 0$.

En utilisant la dernière ligne $\gamma'(K_f)$ de la matrice inverse Δ_f^{-1} , on construit le vecteur

$$\begin{aligned}\gamma'(K) &= (\gamma'(K_f), \gamma'(K_H)), \\ \gamma'(K_f) &= (0'(T_f); 1) \cdot \Delta_f^{-1}, \\ \gamma'(K_H) &= (0'(K_H), K_H = K - K_f \\ \Delta(t) &= \sum_{k \in K} \gamma_k \Delta_k(t), \quad \Delta(K, T) = \Delta_k(t), \quad t \in T, \quad k \in K\end{aligned}$$

Définition 4.5 [KIRILLOVA \[1980.\]](#)

Le support de la fonctionnelle $Q_f = \{K_f, T_f\}$ est dit régulier si $\gamma_k \geq 0, k \in K_f$.

- L'ensemble $Q_p = \{T_B, Q_f\}$ formé du support des contraintes et du support de la fonctionnelle est appelé support du problème.
- La paire $\{\mu, Q_p\}$ formée d'une commande admissible μ et du support du problème est appelée support - contrôle.

Définition 4.6 [KIRILLOVA \[1980.\]](#)

- Le support - contrôle $\{\mu, Q_p\}$ est dit non dégénéré si

$$A / f_*(t) < \mu(t) < f^*(t); \quad t \in T_B \cup T_f$$

$$B / J(\mu) < c'_k x(t_1) + \alpha_k; \quad k \in K_H = K - K_f$$

Remarque 4.2

- Le support Q_f avec $T_f = \emptyset$ est régulier.
- $\Delta(t) = 0, t \in T_B \cup T_f. T = T_B \cup T_f \cup T_H$
- Q_p est régulier si Q_f est régulier.
- Dans tout ce qui suit, on ne considérera que des supports Q_f réguliers.

4.4 CALCUL DE L'ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE

[M CHEBBAH \[2006.\]](#)

Considérons un support contrôle non dégénéré $\{u, Q_p\}$ et une autre commande admissible $\bar{\mu} = \mu + \Delta\mu$ avec $\bar{x} = x + \Delta x$ sa trajectoire correspondante.

L'accroissement de la fonctionnelle $\Delta J = J(\bar{u}) - J(u)$ sera trouvée de la même manière qu'au chapitre 2,

$$\Delta J = - \sum_{t \in T} \Delta(t) \cdot \Delta u(t) - \sum_{k \in K} \gamma_k \Delta w_k$$

Le maximum de cet accroissement sous les contraintes :

$$\begin{aligned} - & f_*(t) - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^*(t) - u(t), \quad \forall t \in T, \\ - & \Delta w_k \geq -w_k; \quad k \in K_f \end{aligned}$$

est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta u(t) = f^*(t) - u(t) & \text{Si } \Delta(t) < 0 \\ \Delta u(t) = f_*(t) - u(t) & \text{Si } \Delta(t) > 0 \\ \Delta w_k = -w_k; & \text{Si } k \in K_f \end{cases}, t \in T$$

et égal à :

$$\beta = \beta(u, Q_p) = \sum_{t \in T_H^+} \Delta(t) (u(t) - f(t)) + \sum_{t \in T_H^-} \Delta(t) (u(t) - f^*(t)) + \sum_{k \in K_f} \gamma_k \cdot w_k,$$

appelée valeur de suboptimalité du support contrôle $\{u, Q_p\}$,

où

$$T_H^+ = \{t \in T_H / \Delta(t) \geq 0\};$$

$$T_H^- = \{t \in T_H / \Delta(t) \leq 0\};$$

Il en résulte que pour $\bar{u} = u^0$, on obtient

$$0 \leq J(u^0) - J(u) \leq \beta(u, Q_p),$$

Théorème 4.2 (Critère d'optimalité)

Les relations

$$\begin{cases} u(t) = f^*(t) & \text{Si } \Delta(t) \leq 0, \\ u(t) = f_*(t) & \text{Si } \Delta(t) \geq 0, \\ f_*(t) \leq u(t) \leq f^*(t) & \text{Si } \Delta(t) = 0, t \in T_H, \\ w_k = 0 & \text{Si } \gamma_k \geq 0; k \in K_f, \\ w_k \geq 0 & \text{Si } \gamma_k = 0; k \in K_f, \end{cases}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence elles sont nécessaires pour l'optimalité $\{u, Q_p\}$.

Démonstration. (On s'inspirera de la preuve faite au chapitre 2). □

Théorème 4.3 (Critère de suboptimalité) *M CHEBBAH [2006.]*

Pour $\varepsilon > 0$ donné . Pour l' ε – optimalité de la commande u , il est suffisant de trouver un tel support Q_p pour lequel la valeur de sub-optimalité vérifie l'inégalité suivante :

$$\beta(u, Q_p) \leq \varepsilon.$$

Démonstration. (voir aussi chapitre 2). □

4.5 MÉTHODE DE RÉOLUTION

KIRILLOVA [1980.]

Dans ce cas il suffit de résoudre le problème (C3) par la méthode adaptée exposée au chapitre 2 , une fois la commande optimale obtenue on cherchera trajectoire $x(t)$ correspondante à partir de l'expression suivante :

$$x(t+h) = Dx(t) + du(t); \quad x(0) = x_0,$$

Ce qui nous permet d'écrire l'algorithme suivant .

4.6 ALGORITHME DE RÉOLUTION

KIRILLOVA [1980.]

- Tester la commandabilité du système , dans le cas positif continuer
- Sinon arrêter le processus le système n'est pas commandable ,
- Tester la stabilité du système , dans le cas positif continuer

- Sinon arrêter le processus le système n'est pas stable.
- Poser le problème (C1) à résoudre
- Écrire (C1) sous forme (C3)
- Résoudre (C3) par la méthode adaptée
- Calcul de la trajectoire $x(t)$ grâce à la solution obtenue et de la formule

$$x(t+h) = Dx(t) + du(t); \quad x(0) = x_0$$

4.7 EXEMPLE D'APPLICATION

Soit à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \min_{k \in K} (c'_k x(t_1) + \alpha_k) \rightarrow \max_u \\ \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t); \quad x(0) = 0 \\ Hx(t_1) = g \\ |u(t)| \leq 1.2; \quad t \in [0; 6] \end{array} \right.$$

avec

$$c(K, J) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha'(K) = (0, 0),$$

$$g' = (0.16; 0.1; 0.2; 0.3; 0.6), \quad b' = (0; 0; 1; 1; 1; 1;)$$

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang $[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = 6$, donc on continue le processus
 De plus $A^n = [0]$
 Il en résulte que :

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 & \frac{1}{120}t^5 \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 & -\frac{1}{120}t^5 \\ 0 & 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 \\ 0 & 0 & 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{6}t^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec un pas de quantification $h = 1$, alors

$$D = \exp(Ah) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0.166 & 0.0416 & 0.01041 \\ 0 & 1 & 1 & 0.5 & 0.166 & 0.0416 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0.5 & 0.166 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$d = D \int_0^h F^{-1}(s) b ds = \begin{pmatrix} 0.2180 \\ -0.7166 \\ 1.7083 \\ 1.666 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas le problème devient compte tenu de (C3),

$$\min_k \begin{pmatrix} -137.07u(0) - 55.9u(1) - 15.48u(2) + 1.35u(3) + 6.27u(4) + 6.44u(5) \\ 44.17u(0) + 27.33u(1) + 18.001u(2) + 11.99u(3) + 7.66u(4) + 4.82u(5) \end{pmatrix} \rightarrow \max$$

Avec :

$$\begin{aligned} -1.2 &\leq u(0) \leq 1.2 \\ -1.2 &\leq u(1) \leq 1.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1.2 &\leq u(2) \leq 1.2 \\ -1.2 &\leq u(3) \leq 1.2 \\ -1.2 &\leq u(4) \leq 1.2 \\ -1.2 &\leq u(5) \leq 1.2 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} -240.16u(0) - 116.99u(1) - 51.06u(2) - 19.06u(3) - 5.64u(4) - 1.46u(5) &= 0.16 \\ -266.53u(0) - 115.77u(1) - 53.27u(2) - 20.86u(3) - 5.85u(4) - 0.10u(5) &= 0.1 \\ 119.78u(0) + 47.19u(1) + 11.85u(2) - 2.39u(3) - 6.22u(4) - 5.81u(5) &= 0.2 \\ 50.84u(0) + 56.26u(1) + 44.68u(2) + 29.44u(3) + 16.86u(4) + 8.28u(5) &= 0.3 \\ -584.001u(0) - 288.16u(1) - 128.32u(2) - 49.81u(3) - 15.96u(4) - 4.12u(5) &= 0.6 \end{aligned}$$

La solution de départ est :

$$u' = (-0.1771; 0.5921; -0.473 \quad -0.16 \quad 0 \quad 0.2234),$$

$$K_f = \{2\}; \quad J_f = \{\emptyset\}; \quad J_B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

La solution optimale est :

$$\bar{u} = (-0.1016; 0.1816; 0.4342; -1.2; 0.6449; 3.55 \exp^{-2})$$

$$\bar{K}_f = \{2\}; \quad \bar{J}_f = \{\emptyset\}; \quad \bar{J}_B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

La trajectoire $x(t)$ est donnée par :

$$x(t+h) = Dx(t) + du(t); \quad x(0) = 0,$$

qui donnera

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$
0	-0.02215	-0.17756	-0.386478	-0.28301	-0.23331
0	$-7.2814 \exp^{-2}$	-0.23052	$-7.35588 \exp^{-2}$	0.137909	$3.38725 \exp^{-2}$
0	-0.17357	-125759	0.568851	-0.308081	0.1309205
0	-0.169337	$-6.98262 \exp^{-2}$	0.7124124	-0.280564	$-8.4350 \exp^{-2}$
0	-0.1524	0.018438	0.7498736	-0.535827	-0.254125
0	-0.1016	$8.0027 \exp^{-2}$	0.51429925	-0.6857	$-4.076578 \exp^{-2}$

TABLE 4.1 – *L'itération 1*

LOGICIELS MATLAB , LINGO,
VISUAL XPRESS ET APPLICATION
INFORMATIQUE

5

Première partie

LINGO

INTRODUCTION

Lors de la réalisation de cette étude, nous avons été amenés à utiliser un logiciel dans le but d'appliquer les méthodes de résolution au problème posé. En effet, il serait déraisonnable d'essayer de trouver une solution au problème posé sans l'aide d'une machine, étant donné la complexité du problème et la méthode utilisée, pour cela on utilise le LINGO par exemple.



FIGURE 5.1 – *V.1-LINGO*

La programmation est un ensemble d'outils et de techniques permettant de résoudre des problèmes mathématiques par ordinateur, par exemple elle sert à trouver une solution optimale de n'importe quel type de problème. Le processus de résolution de problèmes mathématiques exige un grand nombre de calculs donc il est mieux de l'exécuter par machine. Pour cela nous allons citer dans les paragraphes qui suivent le logiciel Matlab qui est spécialisé pour résoudre des problèmes d'optimisation (linéaire, non linéaire, convexe, non convexe... etc.)

Dans le cas linéaire on peut avoir l'environnement de développement **Visual Xpress** version 3.



Visual Xpress.lnk

FIGURE 5.2 – *Visual Xpress*

5.1 QU'EST-CE QUE LINGO?

LINGO est un outil simple pour utiliser la puissance de l'optimisation linéaire et non linéaire formulés par de gros problèmes de manière concise, les résoudre et analyser la solution. L'optimisation nous aide à trouver la réponse qui donne le meilleur résultat ; atteint le plus grand profit, rendement ou bonheur ; ou celui qui réalise le coût, le gaspillage ou l'inconfort le plus bas.

Souvent, ces problèmes impliquent l'utilisation la plus efficace de nos ressources, y compris l'argent, le temps, les machines, le personnel, les stocks et plus encore. Les problèmes d'optimisation sont souvent classés comme linéaires ou non linéaires, selon que les relations dans le problème sont linéaires ou non linéaires par rapport aux variables.

5.2 LES ÉTAPES DU PROGRAMME

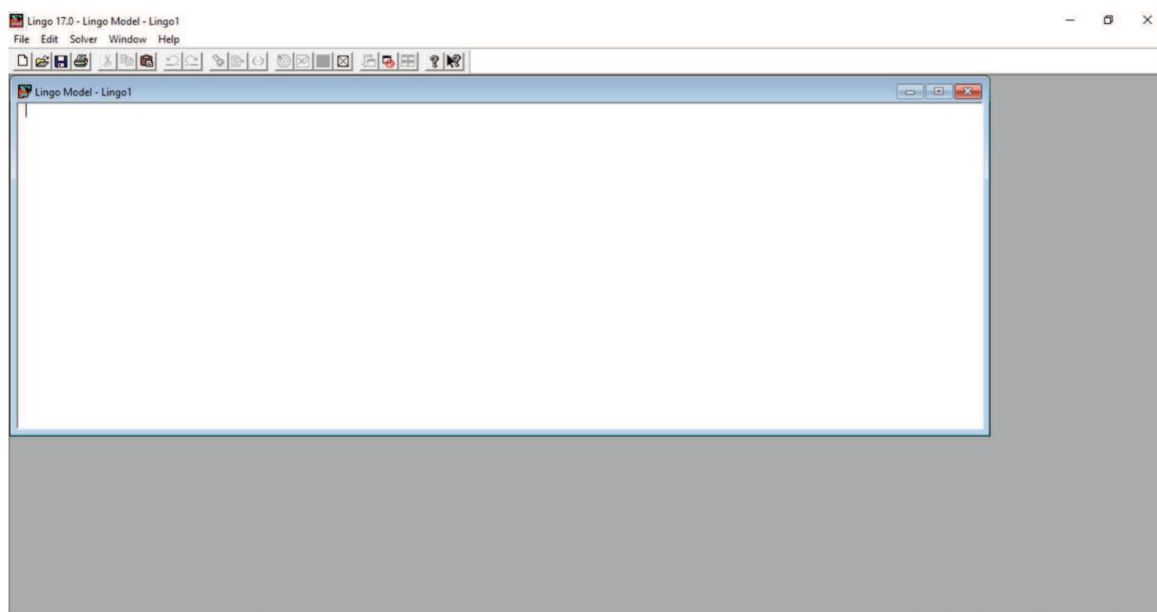


FIGURE 5.3 – Page d'accueil du logiciel

Nous cliquant sur l'icône FILE puis NEW et l'écran de l'espace de travail s'ouvre.

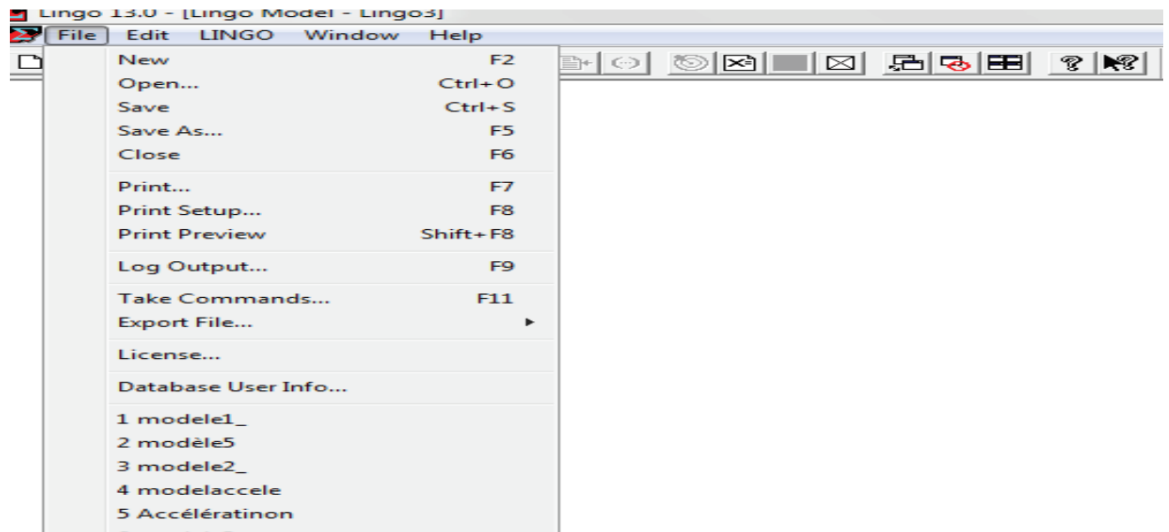


FIGURE 5.4 – Etape 1

Après avoir saisi notre modèle linéaire en cliquant sur Solve

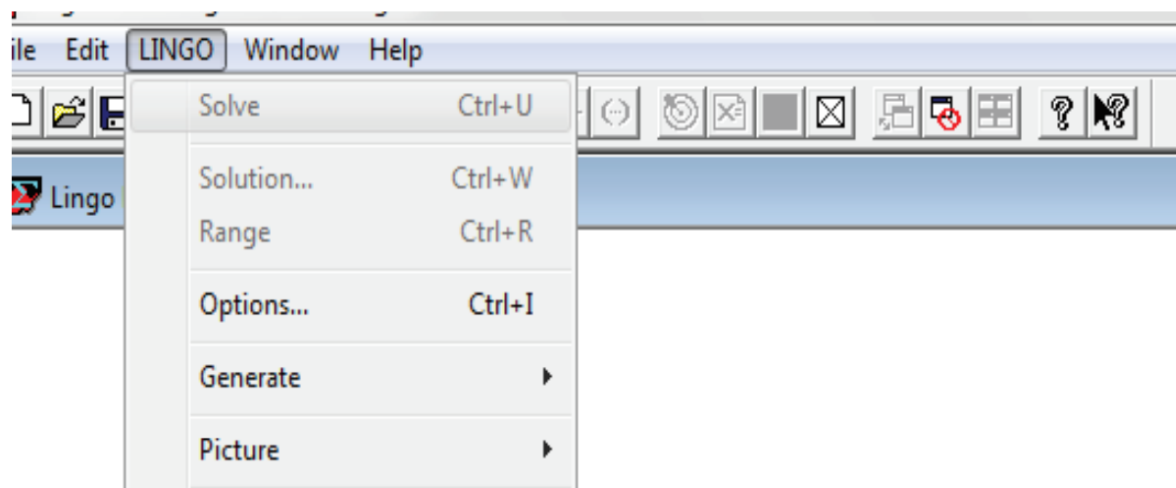


FIGURE 5.5 – Etape 2

Deuxième partie
VISUAL XPRESS

5.3 QU'EST-CE QUE VISUAL XPRESS ?

C'est un logiciel simple à utiliser qui comporte un langage de modélisation qui permet d'écrire les programmes linéaires sous une forme symbolique proche de l'écriture mathématique, permet ainsi de modifier les données, enlever ou rajouter des contraintes, comparer deux modèles similaires, analyser la sensibilité des solutions par rapport aux données.

PRÉSENTATION DU LOGICIEL

Pour commencer, il est conseillé d'installer le logiciel Visual Xpress. Pour démarrer il faut double cliquer sur l'icône (*figure5.6*), l'espace de travail Standard (*figure5.7*) apparaît



Visual Xpress.lnk

FIGURE 5.6 – *Visual Xpress*

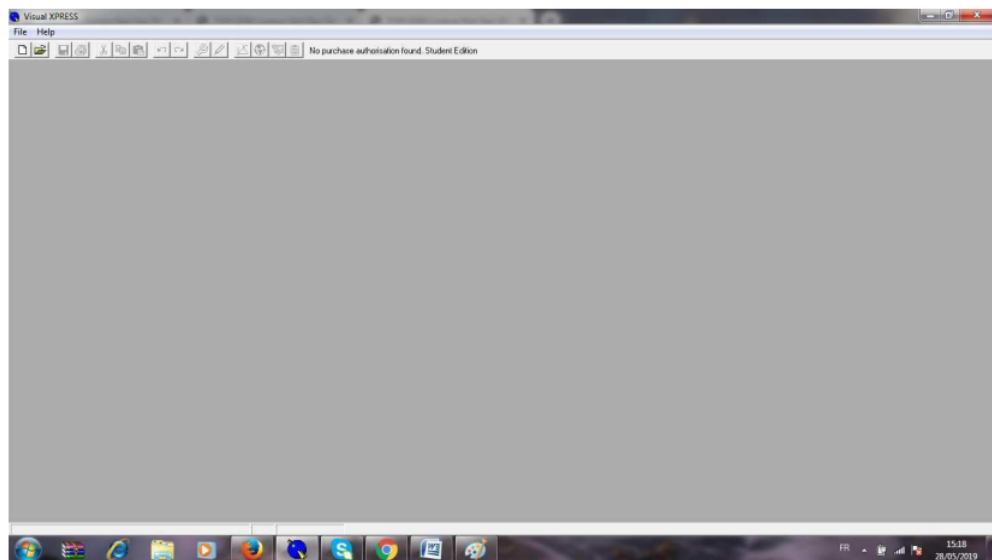


FIGURE 5.7 – *Interface de Visual Xpress*

Nous cliquons sur l'icône file et on aura l'interface suivante :

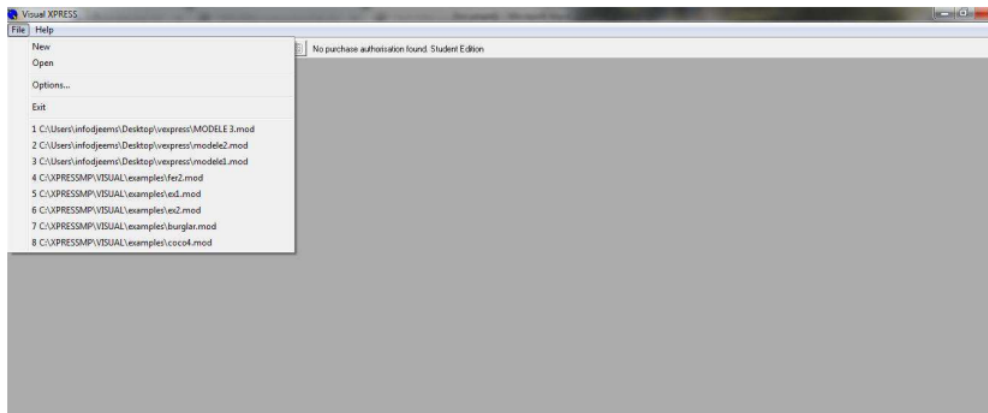


FIGURE 5.8 – *Icône File*

puis nous cliquons sur new et l'écran de l'espace de travail s'ouvre et on aura l'interface suivante :

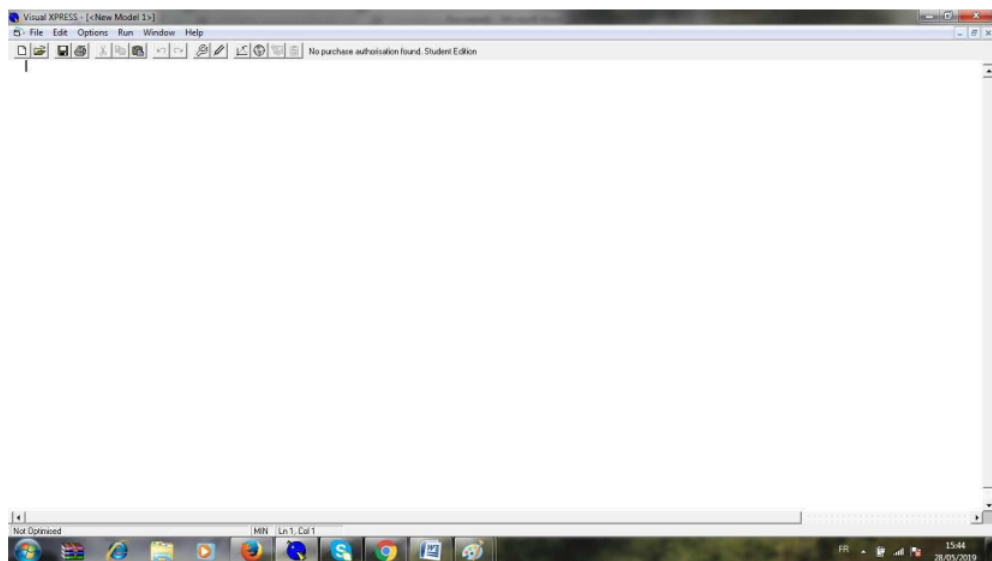


FIGURE 5.9 – *Page 3*

5.4 LES ÉTAPES DU PROGRAMME

On saisit notre programme dans l'espace de travail et l'exécution se fera comme suit :
avant d'exécuter un problème chargé dans l'éditeur, il faut désigner le sens de
l'optimisation (**MAX** ou **MIN**) dans **option /optimiser** .

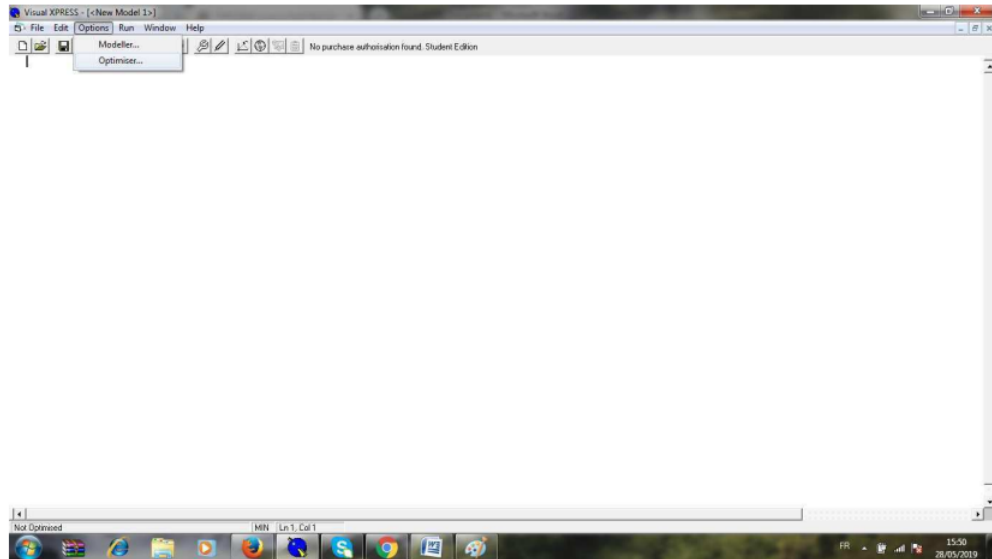


FIGURE 5.10 – *Icône option /optimiser*

On va résoudre le problème linéaire continu avec l'icône **Solv LP** dans le menu **Run/ Solv LP** .

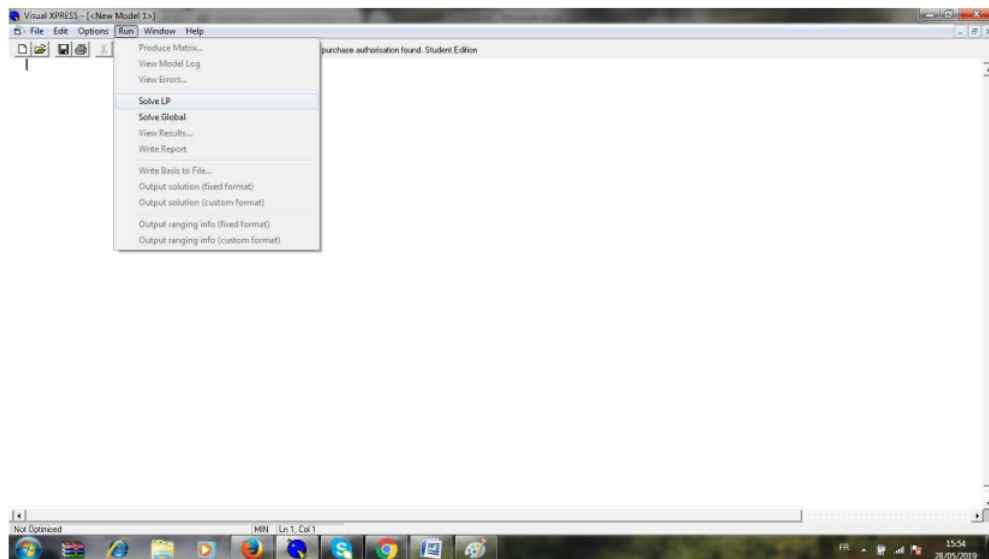


FIGURE 5.11 – *Icône solv LP*

Si le problème linéaire est en nombre entiers, il faut utiliser la commande **Run/ Solv Globale**.

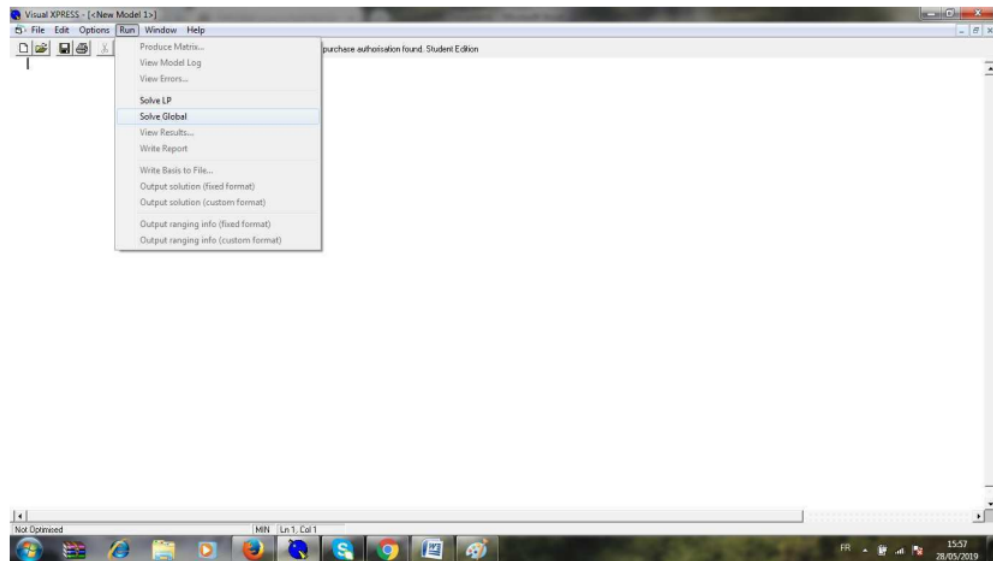


FIGURE 5.12 – Etape 3

Troisième partie

MATLAB .

5.5 DEFINITION DU LOGICIEL MATLAB

POSTEL [2004.]

Le logiciel MATLAB (MATrix LABoratory) est spécialisé dans le domaine du calcul matriciel numérique. Tous les objets définis dans le MATLAB sont donc au moyen des vecteurs et des matrices/tableaux de nombres. Un ensemble important d'opérateurs et de fonctions de MATLAB de base facilitent leur manipulation et des opérations comme par exemple le produit et l'inversion matricielles (*inv*), la transposition (*'*) ou encore le calcul des valeurs propres, font partie de la bibliothèque standard. D'autres fonctions servant à la création et à la manipulation de matrices et de tableaux (*diag*, *rand*, *ones*, *zeros*, *linspace*) sont également disponibles en nombre.

L'environnement MATLAB se présente sous la forme d'un espace de travail (Workspace), ou un interpréteur de commandes exécute des opérations et des fonctions de MATLAB. Les sources de celles-ci sont disponibles, écrites en " langage " MATLAB, voir en C ou en Fortran. L'utilisateur peut les modifier, mais en s'en inspirant, il peut surtout créer et rajouter ses propres fonctions.

Le "langage" MATLAB contient un minimum de structures de programmation (structure itérative, structure conditionnelle, sous-routine) mais reste très rudimentaire. L'avantage est qu'il est très simple et très rapide à programmer, offrant une grande tolérance (syntaxe simple, pas de définition des types, etc.), ce qui permet un gain appréciable en temps de mise au point. L'ingénieur peut par ce moyen être plus efficace dans l'analyse d'un problème, en concentrant ses efforts sur celui-ci et non pas sur l'outil servant à le résoudre.

5.6 PRÉSENTATION DU LOGICIEL

POSTEL [2004.]

MATLAB est un solveur de calcul scientifique basé sur le type de variable matricielle.

Il a été conçu pour fournir un environnement de calcul numérique de haut niveau grâce à sa structure de données interne et ses grandes capacités graphiques pour la visualisation d'objets mathématiques complexes.

Son fonctionnement repose sur un langage de programmation interprété qui permet un développement très rapide. Pour des applications nécessitant un temps de calcul plus élevé, un langage compilé comme le C++ ou le Fortran est mieux adapté.

5.7 DESCRIPTION DE LA FENÊTRE MATLAB

LAPRSTE

1. La barre de titre

La fenêtre MATLAB est surmontée par une barre de titre, contenant à sa gauche une icône et à sa droite les trois boutons :

- Mise en icône.
- minimisation /maximisation.
- fermeture.

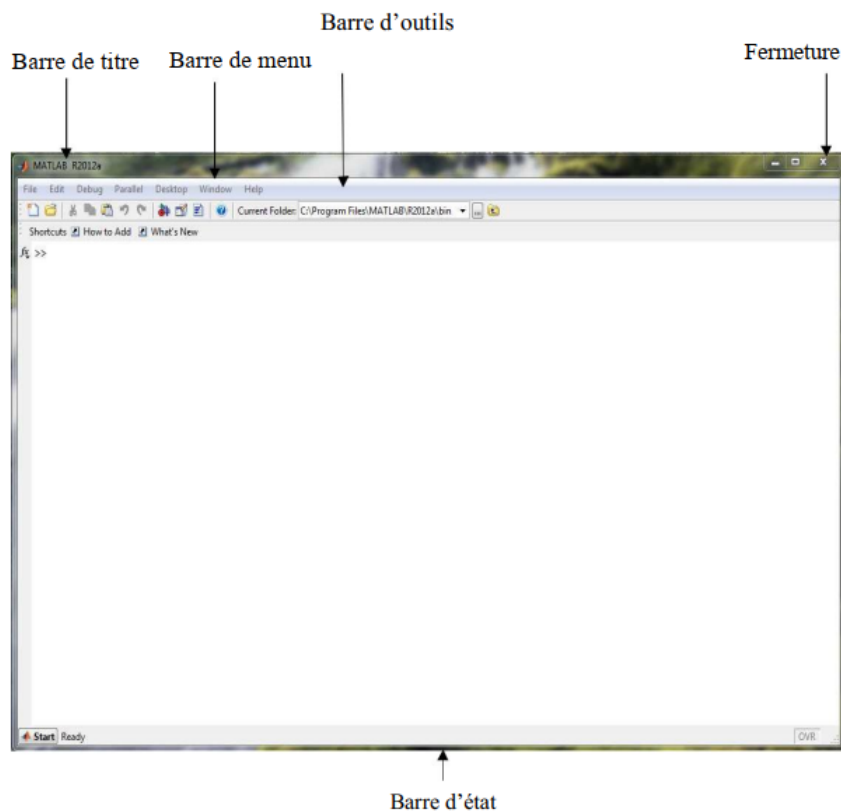


FIGURE 5.13 – page 1

2. La barre du menu

La barre du menu contient en général 5 fenêtres :

- File (Fichier) permet d'obtenir l'éditeur de programme ;
- Edit (Edition) permet de couper/coller dans la ligne de commande et autres ;
- Debug permet l'exécution d'un programme et autres ;
- Window (Fenêtre) permet le passage aux différentes fenêtres du logiciel ;
- Help (Aide) accède au menu d'aide.

3. La barre d'outils

La barre d'outils est souvent des raccourcis de fonctions contenue dans les menus :

- Ouvrir un nouveau fichier dans l'éditeur ;
- Rappeler un ancien fichier dans l'éditeur ;
- Couper ;
- Copier ;
- Coller ;
- Annuler ;
- Appeler l'aide.

4. LA FENÊTRE DE COMMANDE

Elle se divise en deux zones :

- La zone historique : dont on peut copier des parties ;
- La zone de commande éditable : permet de taper une commande qui sera validé à l'aide de touche

« **return** » ou « **entrée** ».

5.8 MÉTHODE DE TRAVAIL

LAPRSTE

1) Édition et sauvegarde des fichiers MATLAB

POSTEL [2004.]

Dans un premier temps, on peut se contenter d'introduire ces commandes une à une au niveau de l'espace de travail ou elles sont interprétées directement. Cependant, par la suite, il est beaucoup plus pratique d'écrire sa séquence de commandes complétée au moyen d'un éditeur, puis de sauvegarder le tout dans un fichier avec l'extension « **.m** ». Cette séquence pourra alors être exécutée dans MATLAB par simple introduction du nom de fichier.

2) Aide en ligne

En plus de l'aide Window une aide en ligne est disponible pour chaque commande de MATLAB. Il suffit d'introduire « **help nom de la commande** ».

3) Création de fichiers de commandes et de fonctions utilisateurs

— Fichier de commande « Script files » :

Un fichier de commande (script file) est un fichier ASCII d'extension « **.m** » contenant une suite de commandes MATLAB. Il peut être exécuté directement en tapant simplement son nom dans l'espace de travail MATLAB(*commande – window*).

— Fonctions :

De nouvelles fonctions peuvent être ajoutées à MATLAB par l'utilisateur. Il suffit de créer un fichier de nom « **nom_de_fonction.m** » contenant les commandes à exécuter et dont l'entête a le format :

function [liste des arguments de sortie]= nom de fonction (liste des arguments d'entrée).

Contrairement aux fichiers de commande, les variables intervenants dans les fonctions sont locales.

Les commentaires documentant les fonctions peuvent être insérés en les faisant précéder du symbole %.

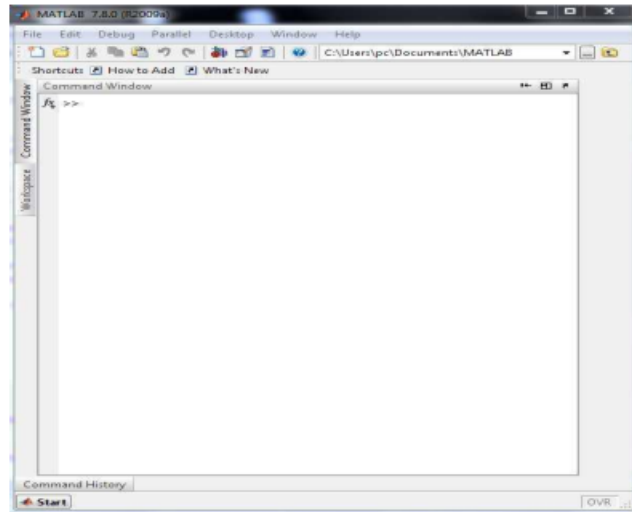


FIGURE 5.14 – La fenêtre d'édition de fichier.

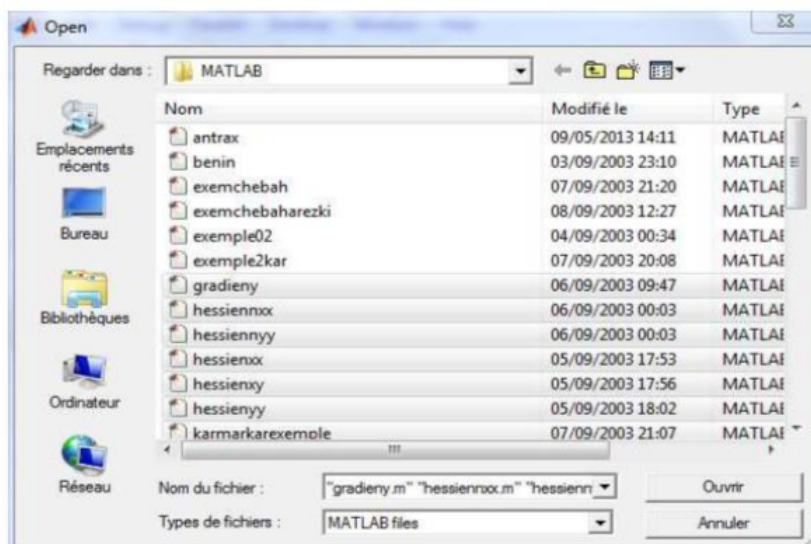
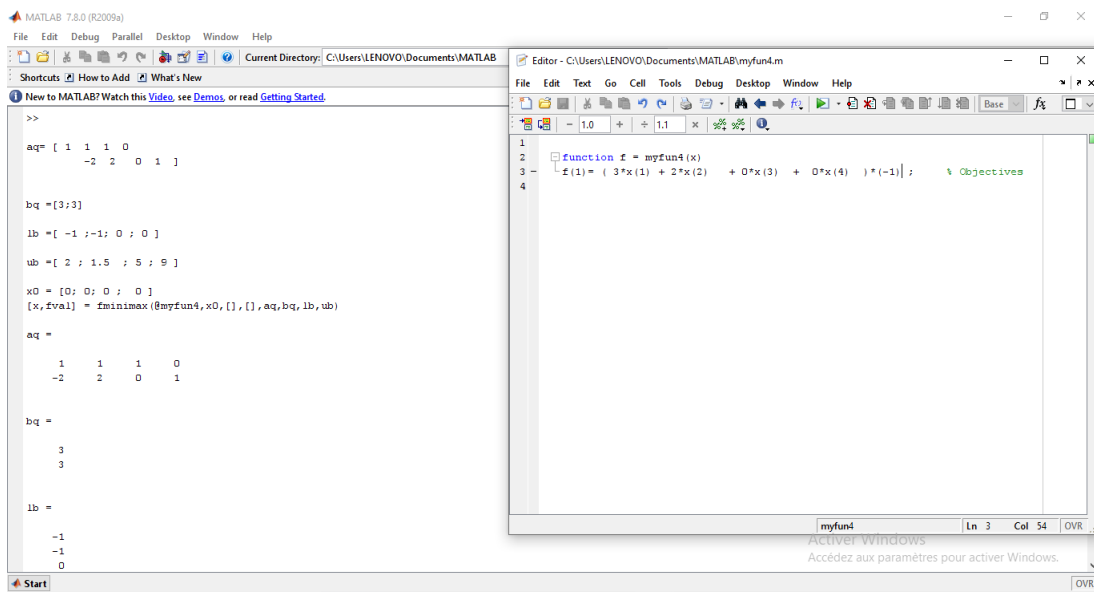


FIGURE 5.15 – La boîte de dialogue d'ouverture de fichiers

5.9 RÉSOLUTION DES EXEMPLES ÉTUDIÉS SOUS MATLAB

5.9.1 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE AVEC LA MÉTHODE ADAPTÉE

POSTEL [2004.] Pour l'exemple numérique précédent résolu dans le premier chapitre, en utilisant MATLAB nous avons trouvé la solution optimale de la manière suivante :



```
>>  
aq= [ 1 1 1 0  
      -2 2 0 1 ]  
  
bq =[3;3]  
  
lb =[-1;-1; 0 ; 0 ]  
  
ub =[ 2 ; 1.5 ; 5 ; 9 ]  
  
x0 = [0; 0; 0 ; 0 ]  
[x,fval] = fminimax(@myfun4,x0,[],[],aq,bq,lb,ub)  
  
aq =  
     1     1     1     0  
    -2     2     0     1  
  
bq =  
     3  
     3  
  
lb =  
    -1  
    -1  
     0
```

```
1  
2 function f = myfun4(x)  
3 f(1) = ( 3*x(1) + 2*x(2) + 0*x(3) + 0*x(4) )*(-1); % Objectives  
4
```

FIGURE 5.16 – Résolution du problème 1 sous MATLAB

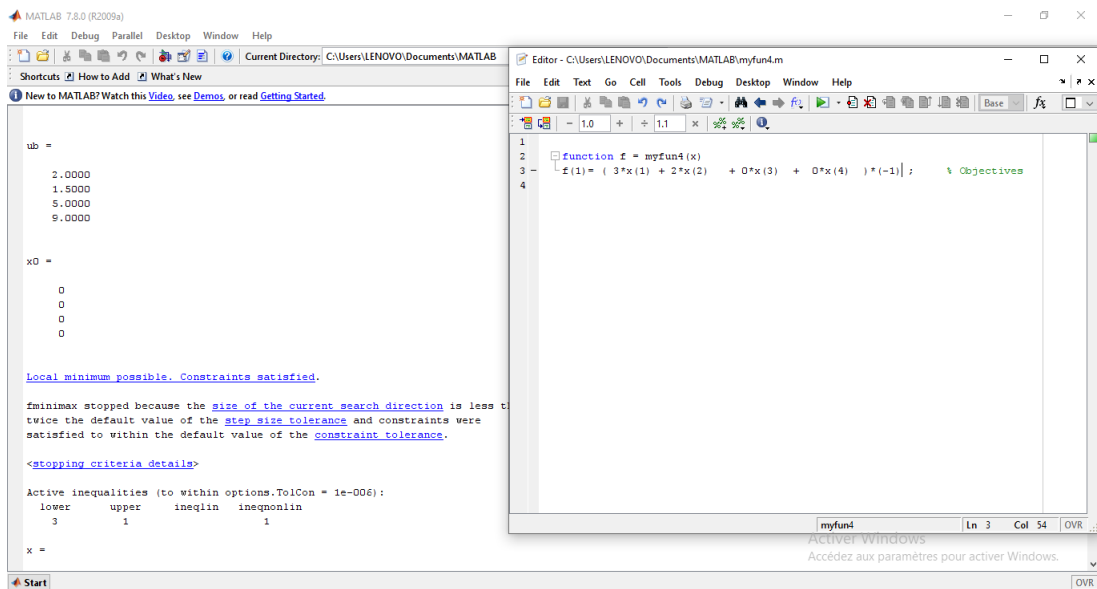


FIGURE 5.17 – Résolution du problème 1 sous MATLAB

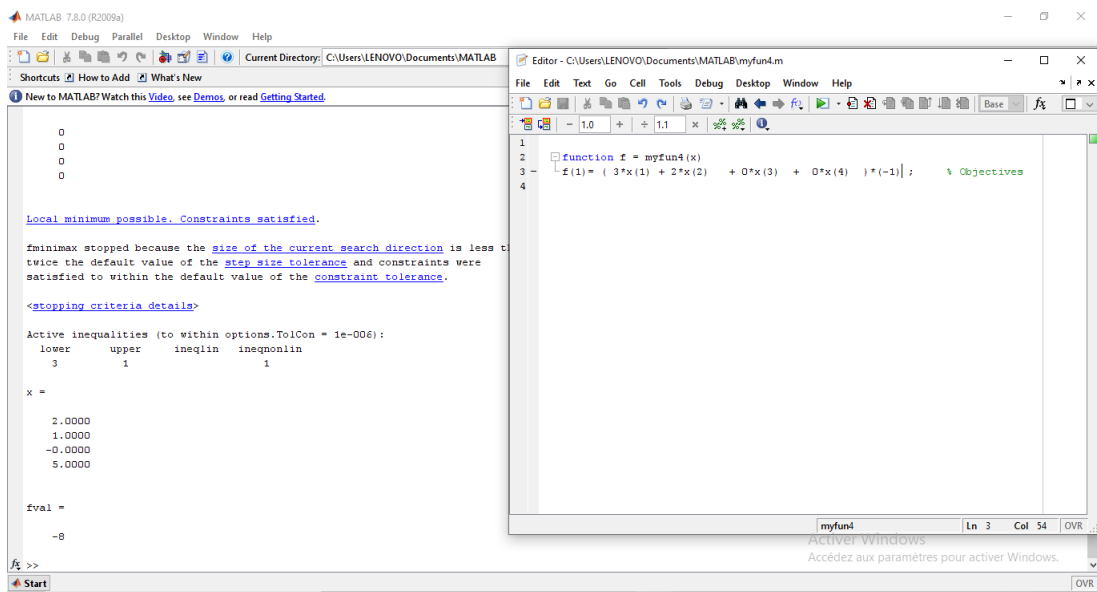


FIGURE 5.18 – Résolution du problème 1 sous MATLAB

5.9.2 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MIN-MAX AVEC LA MÉTHODE ADAPTÉE

POSTEL [2004.]

Pour l'exemple numérique précédent résolu dans le deuxième chapitre, en utilisant MATLAB nous avons trouvé la solution optimale de la manière suivante :

```

MATLAB 7.8.0 (R2009a)
File Edit Debug Parallel Desktop Window Help
Current Directory: C:\Users\LENOVO\Documents\MATLAB
Shortcuts: How to Add What's New
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
>> aq = [ 1.5 3 3.5 -3.7 -2.1 2.15
2.25 -1 -3 1 4 -1
2 3 8.75 5 .79 -1.75
9 5 4 3 2 -1 ]

bq = [1;4; 5]

lb = [ -2 ; -2 ; -4 ; -4 ; -6 ; -7 ]

ub = [ 2 ; 2 ; 4 ; 4 ; 6 ; 7 ]

x0 = [0; 0; 0 ; 0; 0; 0 ]
[x, fval] = fminimax(@myfun4,x0,[],[],aq,bq,lb,ub)

aq =
1.5000 3.0000 3.5000 -3.7000 -2.1000 2.1500
2.2500 -1.0000 -3.0000 1.0000 4.0000 -1.0000
2.0000 3.0000 8.7500 5.0000 0.7900 -1.7500
9.0000 5.0000 4.0000 3.0000 2.0000 -1.0000

bq =
1
4
5

lb =
-2
-2
-4
-4
-6
-7
  
```

```

function z = myfun4(x)
1 f(1) = (-1*x(1) + 2*x(2) - 3*x(3) + 4*x(4) - 5*x(5) + 6*x(6) - 2)*(-1) ;
2 f(2) = (-6*x(1) + 5*x(2) - 4*x(3) + 3*x(4) - 2*x(5) + x(6) - 2)*(-1) ;
3 f(3) = (-1*x(1) + 3*x(2) - 5*x(3) + 7*x(4) - 2*x(5) + x(6) - 3)*(-1) ;
4
  
```

FIGURE 5.19 – Résolution du problème 2 sous MATLAB

```

MATLAB 7.8.0 (R2009a)
File Edit Debug Parallel Desktop Window Help
Current Directory: C:\Users\LENOVO\Documents\MATLAB
Shortcuts: How to Add What's New
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.

lb =
-2
-2
-4
-4
-6
-7

ub =
2
2
4
4
6
7

x0 =
0
0
0
0
0
0

Local minimum possible. Constraints satisfied.
  
```

```

function z = myfun4(x)
1 f(1) = (-1*x(1) + 2*x(2) - 3*x(3) + 4*x(4) - 5*x(5) + 6*x(6) - 2)*(-1) ;
2 f(2) = (-6*x(1) + 5*x(2) - 4*x(3) + 3*x(4) - 2*x(5) + x(6) - 2)*(-1) ;
3 f(3) = (-1*x(1) + 3*x(2) - 5*x(3) + 7*x(4) - 2*x(5) + x(6) - 3)*(-1) ;
4
  
```

FIGURE 5.20 – Résolution du problème 2 sous MATLAB

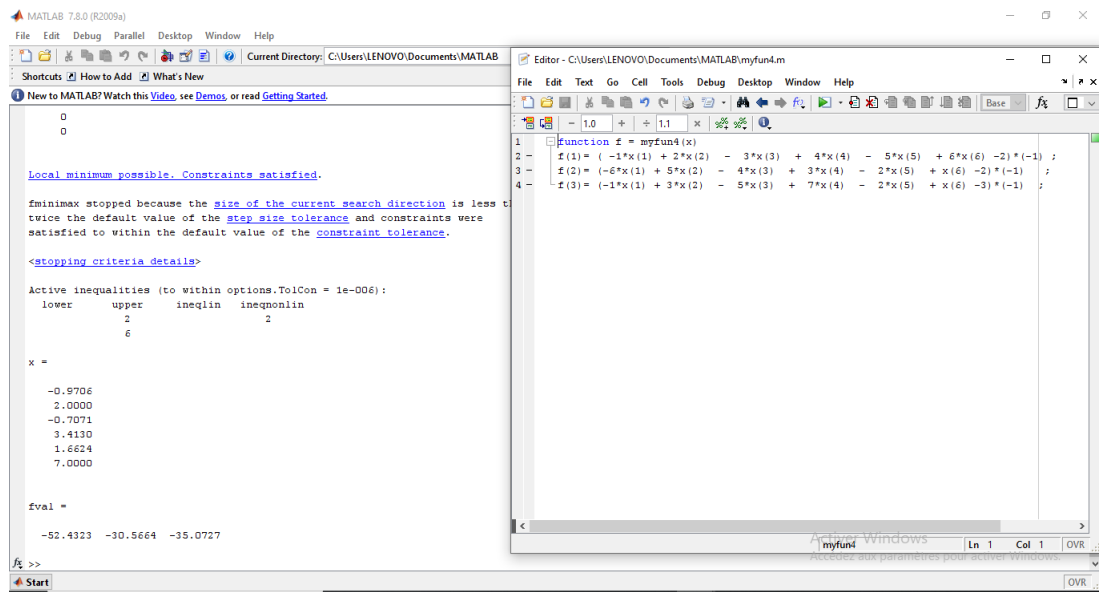


FIGURE 5.21 – Résolution du problème 2 sous MATLAB

CONCLUSION GÉNÉRALE

Notre but dans le cadre de ce mémoire était la résolution du problème Min-Max en programmation linéaire par les méthodes primale et duale adaptées et le contrôle optimal.

En premier lieu, nous avons introduit la méthode adaptée pour la résolution de problème en programmation linéaire ensuite nous avons résolu un exemple numérique et par suite nous avons procédé à une comparaison de résultats obtenus avec la méthode de simplexe.

Nous nous sommes intéressés ensuite à la résolution du problème min-max avec des contraintes généralisées en programmation linéaire par la méthode adaptée ainsi un exemple d'application est résolu par la méthode adaptée avec des contraintes généralisées puis par le logiciel Matlab, les résultats obtenus sont identiques.

Le troisième chapitre du travail a été consacré à la résolution du problème min-max en programmation linéaire par la méthode duale adaptée.

Le quatrième chapitre du travail a été consacré à la résolution du problème min-max en contrôle optimal ainsi qu'un exemple d'application.

La dernière partie a été axée sur la présentation des logiciels LINGO , VISUAL XPRESS , MATLAB et applications informatiques ainsi que la résolution des problèmes étudiés sous MATLAB. les résultats obtenus sont identiques avec la méthode adaptée.

Nous laisserons le soin de développer plus ce travail avec prochaines binômes.

BIBLIOGRAPHIE

GABASOV.R. PhD thesis.

GABASOV.R. *Adaptive méthode of solving linear programming problems*. PhD thesis, institut for Statistic and Mathematics., 1980.

& GABASOV R. KIRILLOVA, F.M. *Méthode de programmation linéaire*. PhD thesis, 1980.

J-T. LAPRSTE. *Introduction à Matlab Ellipses 2000*. PhD thesis.

MOHAMMED. M CHEBBAH. *Résolution et implémentation d'un problème min-max en contrôle optimal* . PhD thesis, UMMTO., 2006.

S. Melle HAMDOUS. *Méthode de résolution de problème min-max en programmation linéaire*. PhD thesis, UMMTO., 2010.

M. POSTEL. *Introduction au logiciel Matlab. Mémoire de DEA*. PhD thesis, université d'Angers., 2004.

على تقدير نماذج الانحدار الذاتي

نقترح حل مشكلة الحد الأدنى - الحد الأقصى في البرمجة الخطية عن طريق تكييف الطرق الأولية والثنائية والتحكم الأمثل.
 قدمنا الطريقة التي تم تكييفها لحل المشكلة في البرمجة الخطية. ثم مع حل المشكلة الحد الأدنى - الحد الأقصى مع القيود المعممة ، قدمنا طريقة مزدوجة تم تكييفها لحل المشكلة الحد الأدنى - الحد الأقصى.
 في النهاية قدمنا برامج لينغو وإكسبرس البصرية وماتلاب وتطبيقات الكمبيوتر.

Résumé

Nous avons proposé la résolution de problème Min-Max en programmation linéaire par les méthodes primale et duale adaptées et le contrôle optimal.
 nous avons introduit la méthode adaptée pour la résolution de problème en programmation linéaire .Ensuite à la résolution du problème min-max avec des contraintes généralisées ensuite, nous avons introduit la méthode duale adaptée pour la résolution du problème Min-Max .
 Au finale nous avons présentée les logiciels LINGO , VISUAL XPRESS , MATLAB et applications informatiques.

Abstract

We propose Min-Max problem solving in linear programming by adapted primal and dual methods and optimal control.
 we introduced the method adapted for the resolution of problem in linear programming. then with the resolution of the problem min-max with generalized constraints then we introduced dual method adapted for the resolution of the problem min-max.
 in the end we presented the LINGO, VISUAL XPRESS, MATLAB software and computer applications.