

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE.**

**Ministère De l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique**



**Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
Faculté de Génie de la Construction.
Département De Génie Civil.**



**Mémoire de fin d'étude
Option : Structure**

Thème

*Calcul non linéaire d'une
poutre a précontrainte
extérieure*

Réalisé par :

❖ AMAROUCHE Malha

Propos et dirigé par :

❖ Mr MERAKEB .S

Année : 2018/2019

Introduction Générale :

L'utilisation de la précontrainte extérieure pour la construction d'ouvrages d'arts connaît depuis quelques années un essor spectaculaire, en France et aux Etats-Unis par exemple. Un effort de recherche international a permis de développer des modèles de calculs fiables.

Les nouvelles conceptions d'ouvrages ainsi que les besoins nés de la nécessité d'entretenir ou de renforcer les ouvrages anciens, de plus en plus sollicités, ont amené à repenser les techniques de précontrainte par des câbles placés à l'extérieur du béton.

Cette technique connaît actuellement un développement important pour la construction d'ouvrage d'art. L'expérience acquise, les avantages et les inconvénients ainsi que les problèmes à résoudre ont été largement discutés par BOUAFIA [4] [13][14], KACHI[12] VIRLOGEUX [6] , FOURE [5] [21] ,.....etc.

La précontrainte extérieure présente des incertitudes sur certains aspects du comportement des structures. De ce fait une recherche tant théorique qu'expérimentale est nécessaire pour permettre de les comprendre et de les résoudre.

La présente étude a pour objet de construire un modèle de calcul capable de prédire le comportement des poutres à précontrainte extérieure en intégrant certains phénomènes liés à cette technique. En effet, le calcul proposé prend en compte d'un glissement parfait des câbles sur les déviateurs.

La présente étude est structurée comme suit :

- Le chapitre I: représente d'une part une revue bibliographique de l'état actuel des connaissances sur la précontrainte extérieure, et d'autre part l'analyse des essais portant sur des poutres isostatiques et hyperstatiques à précontrainte extérieure. Cette analyse porte principalement sur les essais au CEBTP (Poutres NM) et à l'Université du Texas à Austin (poutre hyperstatique).

- Le chapitre II: on s'intéresse à l'étude d'une section d'un élément de poutre en béton armé et / ou précontraint. En présentant la méthode de calcul concernant l'étude de l'équilibre d'une section sous forme d'un organigramme général de calcul. Ce programme permet la modélisation numérique du comportement non linéaire, jusqu'à rupture des sections de poutre en béton armé, soumises à la flexion composée et à l'effort tranchant.

- Le chapitre III : est consacré au calcul non linéaire d'une poutre isostatique hyperstatique à précontrainte extérieure par l'approche des éléments finis, dont nous présentons l'examen de la validation du modèle de calcul. Pour cela l'analyse est portée sur les poutres testées au CEBTP et à l'université de Texas à Austin.

- Enfin, une conclusion générale termine ce travail, où nous présentons quelques remarques et perspectives pour des travaux futures.

CHAPITRE I. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Introduction

La précontrainte extérieure est une technique de construction des ouvrages utilisée depuis quelques années et est en fait un cas particulier de la post tension. L'utilisation de la précontrainte extérieure dans la construction des ponts connaît un développement spectaculaire après avoir été utilisée pour renforcer des ouvrages anciens. Elle consiste à disposer les câbles de précontrainte dans des gaines qui ne sont plus noyées mais extérieures au béton en partie courante. Ces gaines ne sont placées dans le béton qu'aux extrémités de l'élément et mises en place dans des «bossages de déviation». Ce dispositif est généralisé en pratique sur les ouvrages d'art, cette précontrainte permet d'augmenter sensiblement la rigidité d'une structure en béton armé.

On se propose alors, dans ce chapitre d'exposer certains points de connaissance concernant cette technique.

I.1. Historique

La précontrainte est un concept inventé par Eugène Freyssinet ; ce terme-signifiant «contraint avant»-indique que le béton est soumis à un serrage préalable, a été imprimé la première fois en janvier 1933 dans un article de la revue Travaux (Sciences et Industrie) sous le titre : « Idées et voies nouvelles ». C'est en 1928 qu'Eugène dépose leur premier brevet concernant : «un Procédé de fabrication de pièces en béton armé ». En fait, les premières études sur la pré-compression du béton sont antérieures à celles de Freyssinet. Les premiers ponts en béton précontraint ont été réalisés par précontrainte extérieure au béton au moyen de câbles. Ce sont les ponts de la Saale à Alse en Allemagne (1928) de 68 m de portée, et de Aue en Allemagne également (1936) de 69 m de portée, également le pont de Villeneuve-Saint-Georges (1953).

Malheureusement, des cas de corrosion ont été constatés sur certains ouvrages, dus à des problèmes de conception, ce qui a valu une mauvaise réputation à la technique.

Malgré tout, des progrès en précontrainte extérieure ont été réalisés au niveau des réparations ce qui a relancé la construction avec des câbles externes, la technique fut massivement utilisée en France et aux Etats-Unis dans les années 80-90.

Aujourd'hui, les problèmes de corrosion sont dominés, et les producteurs de précontrainte proposent des solutions adaptés et agrémentés [1].

I.2. Etat de l'art

Cette recherche s'est concentrée sur les principales publications concernant le renforcement d'ouvrages d'art par la précontrainte extérieure.

a) Suivi à long terme des déformations de ponts renforcés par la précontrainte extérieure (Burdet, Badoux ; 1999)

Cette publication présente les résultats de suivi de trois ponts depuis leur renforcement par la précontrainte extérieure. La raison principale pour ces renforcements était le comportement à l'état de service. Ces ponts présentaient des flèches importantes qui n'étaient pas stabilisées lors de l'intervention. Il s'agit du pont de la Lutrive, du viaduc de la Fégire et du pont de Chillon. Ces trois ouvrages autoroutiers ont été construits par encorbellement successif, avec des portées variant de 80 à 140 m. La méthode de construction et le système statique sont cependant différents, puisque le pont de la Lutrive a été coulé en place, avec une articulation à la clé de chaque grande travée, alors que le pont de la Fégire, lui aussi coulé en place, n'a pas d'articulation. Le viaduc de Chillon, lui, a été réalisé par voussoirs préfabriqués. La plupart des travées sont continues, mais quatre articulations à mi-portée ont été nécessaires pour permettre les dilatations thermiques de ce viaduc très long. Des raisons d'encombrement et de simplicité d'installation plaident souvent en faveur d'une précontrainte additionnelle rectiligne en élévation, le pont de la Fégire faisant exception. Le suivi des déformations a démontré l'efficacité des renforcements mis en œuvre. Pour l'un des ponts du viaduc de la Lutrive il a mis en évidence le besoin d'une seconde intervention [2].

b) Renforcement par précontrainte extérieure à l'aide de câbles monotorons galvanisés au pont Champlain (Canada)

Le pont Champlain a été construit en 1962 et il est l'un des ponts les plus stratégiques de la région de Montréal. Environ 60 millions de véhicules le traversent chaque année. Un programme spécial d'investissement de 10 ans et 249M\$ pour le maintien et la réparation du pont est présentement en cours. Dans le cadre de ce programme spécial d'entretien, une technique innovatrice de réparation a été développée pour renforcer les poutres de rive du tablier, à l'endroit des travées qui ont un faible gabarit d'hauteur sous le tablier. Le choix de renforcement a été d'utiliser des câbles monotorons galvanisés pour la précontrainte extérieure, de façon à faciliter la remise en tension et le remplacement de la précontrainte ajoutée. Des ancrages de monotorons externes ont été utilisés afin de minimiser la démolition de béton et les dommages à la précontrainte interne des poutres existantes. Les ancrages ont été testés selon la norme CSA S6-06, Code Canadien sur le calcul des ponts routiers.

Des déviateurs en acier galvanisé ont été utilisés pour donner le profil requis aux câbles au droit des diaphragmes intermédiaires, lesquels ont été aussi renforcés pour éviter des charges débalancées faisant suite à la nouvelle précontrainte appliquée aux poutres.

Les dalles, qui montraient aussi des signes d'endommagement, ont été renforcées avec des monotorons gainés graissés qui supportent les dalles par des déviateurs en plus de la mettre en compression. Les opérations de mise en tension de la précontrainte seront suivies à l'aide de capteurs en fibre optique collés à la surface du béton et de capteurs élasto-magnétiques qui mesurent les forces réelles des câbles.

Étant donné l'environnement agressif auquel les structures sont soumises. Cependant, ce cas en particulier démontre que la solution avec des câbles monotorons est possible si certains aspects sont bien pris en compte [3].

La conception de ce système de renforcement est un bel exemple de collaboration entre les firmes d'ingénierie, les entrepreneurs et le Propriétaire de l'ouvrage. Pour développer des techniques innovatrices dans le domaine de la réfection des structures, il est essentiel que tous les intervenants soient impliqués dès l'étape de conception de façon à prendre en considération tous les aspects clés qui affectent l'efficacité de la solution, tels que la durabilité, la faisabilité, la fiabilité structurale, la capacité et le cycle de vie de l'ouvrage.

I.3. Principe de la précontrainte extérieure

La particularité de la précontrainte extérieure est la possibilité de remplacer les câbles, il est donc important de mettre en œuvre des unités qui se détendent et se démontent facilement sans endommager l'ouvrage. La précontrainte étant exposée aux agressions extérieures, il est primordial d'utiliser des câbles de bonne qualité. Les câbles les plus exploités sont injectés au coulis de ciment, plus économiques, ils sont aussi très efficaces pour la lutte contre la corrosion. De plus, leur remplacement est relativement aisé et se révèle plus propre que celui des câbles injectés de produits souples. A l'opposé de la précontrainte adhérente, la précontrainte extérieure n'adhère à la structure de béton qu'en certains de ses points. Des organes d'ancrage des câbles sont prévus à cet effet.

I.4. Méthode de remplacement d'un câble

Le remplacement d'un câble de précontrainte extérieure est un marché spécifique, qui doit être réalisé par des professionnels. Il est composé de trois étapes :

- La plus délicate, qui consiste en la détention et le démontage des câbles ;
- Le dégagement des parties remplaçables, et le réglage des nouvelles parties (au niveau des ancrages et déviateurs) ;
- La partie traditionnelle, qui consiste en la mise en place et la tension des nouveaux câbles.

I.5. Avantages et inconvénients

I.5.1. Avantages

La précontrainte extérieure, qu'elle soit totalement extérieure au béton ou mixte, présente de nombreux avantages.

Ces avantages ont été largement discutés par plusieurs auteurs dont on peut citer : Y.BOUAFIA [4], B.FOURE [5], M.VIRLOGEUX [6] ainsi que beaucoup d'autres.

Les principaux avantages sont énumérés dans les points suivants :

- Amélioration du bétonnage : Etant donné que les câbles intérieurs sont supprimés, la descente du béton est facilitée ;
- Simplification de la mise en œuvre des gaines : Les gaines ne passant pas dans le béton, leur mise en place est plus simple ;
- Simplification de l'injection : Etant donné que les câbles ont un tracé rectiligne, leur injection est facilitée ;
- Diminution des pertes par frottement, par la simplification du tracé ;
- Possibilité de remplacement des câbles en cas de vieillissement ;
- Amélioration des résistances : Les câbles n'étant plus présents dans la section de béton, on peut profiter pleinement de la résistance de celle-ci ;
- Allègement de la structure : Les conditions de recouvrement des câbles internes ne devant pas être respectées, les sections peuvent dans certains cas être diminuées.

I.5.2. Inconvénients

Il y a lieu également, de citer un certain nombre d'inconvénients auxquels est assujettie l'utilisation de la précontrainte extérieure.

Ces inconvénients ont été également discutés, notamment par VIRLOGEUUX [6], B.FOURE [5], le groupe de travail du SETRA [7], AFPC [8], ITBTP [9].

Et parmi ces inconvénients, nous pouvons citer :

- Difficultés de réglage aux déviations ;
- Diminution de l'efficacité du câble : Cette diminution est due au tracé rectiligne du câble, ainsi qu'à l'impossibilité de mettre en œuvre une grande excentricité ;
- Gain en poids dans la section, compensé par le poids des ancrages et déviateurs : Le gain en poids n'est pas évident.

I.6. Considérations économiques

Tout d'abord, le recours à une précontrainte extérieure permet généralement de réduire les sections de béton en partie courante, donc d'alléger la structure et par là-même de diminuer les sollicitations de poids propre.

En termes de coût initial, la précontrainte extérieure est intéressante lorsque l'allègement de la structure est important et si sa construction peut être industrialisée.

La précontrainte extérieure n'en conserve pas moins des atouts importants car elle permet :

- D'améliorer sensiblement la qualité, donc la durabilité des ouvrages.
- De faciliter la surveillance et par là même de réduire les coûts d'exploitation.

I.7. Aciers de précontrainte

Les aciers utilisés dans les ouvrages en béton précontrainte sont de deux natures différentes on distingue :

- Les aciers actifs qui créent et maintiennent la précontrainte sur le béton ;
- Les aciers passifs nécessaires pour reprendre les efforts tranchants, pour limiter la fissuration et pour servir d'aciers de montage afin de construire 'cage d'armatures' maintiennent les autres aciers.

I.7.1. Les aciers passifs

On distingue pour les armatures passives en béton précontraint les aciers passifs longitudinaux et les aciers passifs transversaux.

Ce sont des armatures identiques à celles utilisées en béton armé. Elles ne sont mises en tension que par la déformation de l'élément. Les aciers utilisés sont classés en plusieurs catégories :

- Barres rondes lisses
- Barres à haute adhérence

- Fils à haute adhérence et fils lisses

- Treillis soudés

Leurs caractéristiques à prendre en compte dans les calculs sont la section nominale de l'armature, le module de Young et la limite d'élasticité.

Le tableau (I.1) donne les désignations conventionnelles, les nuances et les limites d'élasticité sur le marché.

Type	Désignation	Limite d'élasticité (MPa)
Ronds	FeE215	215
Lisses	FeE235	235
Barres HA	FeE400	400
	FeE500	500
Fils tréfilés HA	FeTE500	500
et treillis HA	TSHA	
Treillis soudés lisses	TSL	500

Tableau I-1 : Désignations conventionnelles, nuances et limites d'élasticité

I.7.2. Les aciers actifs



Figure I-1 : Les fils

Les aciers actifs sont les aciers de la précontrainte, on distingue :

I.7.2.1. Les fils

On distingue les fils ronds et lisses et les fils non lisses. Leur diamètre maximal ne dépasse pas 12mm.

I.7.2.2. Les barres

Elles sont définies comme étant de section supérieure aux fils. Les barres les plus courantes ont un diamètre nominal de 26mm.

I.7.2.3. Les torons

Ils sont constitués d'un ensemble de 2, 3 ou 7 fils de diamètre 4,8 à 18 mm constitués de fils enroulés les uns autour des autres ou un fil central.

Les torons sont caractérisés par le nombre de fils et leur diamètre. Le tableau (I.2) donne la caractéristique des torons les plus courants :

Désignation	Diamètre (mm)	Section(mm^2)
T 13	12.5	93
T 13 S	12.9	100
T 15	15.2	139
T 15 S	15.0	150

Tableau I-2 :Caractéristique des torons de précontrainte



Figure I-2 : les torons à 7 fils

I.7.2.4. Les câbles

Les câbles sont constitués de plusieurs torons en acier à haute résistance pour béton précontraint. Un câble est défini par le type et le nombre de toron et la classe de résistance.

I.7.3. Protection contre la corrosion

Les tubes métalliques doivent être protégés extérieurement. On peut maintenir le principe d'une injection au coulis de ciment, à condition de prévoir une double enveloppe aux ancrages et dans les zones de déviation pour permettre un démontage aisé. On peut injecter aussi un produit souple, graisse ou cire pétrolière. Différents distributeurs de précontrainte ont développé des systèmes à base de monotorons gainés-protégés groupés en faisceaux.

En ce qui concerne le choix du type de conduit, la solution la plus courante consiste à utiliser des tubes en PEHD thermo-soudés au miroir, ou raccordés par manchons électro-soudables.

Facteurs	Causes	Conséquences et éventuel rôle dans la corrosion sous contrainte
Environnement	Présence ou absence de dioxygène	Formation d'hydrogène : favorise la corrosion par fragilisation par hydrogène
	Impuretés présentes lors de la phase de gâchage	Initiation de la corrosion (ions Cl ⁻ par exemple)
	Coulis ségrégré	Composition du milieu ségrégré
	Coulis absent localement	Contact direct atmosphère/acier
Autre facteur physique	Variation de la température	Peut accélérer le phénomène de corrosion par condensation d'eau sur l'acier

Tableau I-3 : Influence des différents paramètres sur la corrosion de l'acier

I.7.4. Conduits

Les conduits permettent la libre circulation du câble dans la structure, afin qu'il puisse s'allonger librement pendant la mise en tension.

Les conduits doivent être mécaniquement résistants, présenter une continuité de forme et assurer une continuité d'étanchéité sur toute leur longueur. Ils doivent convenir aux exigences d'adhérence du projet et ne causer aucune agression chimique [10].

La nature, l'épaisseur, le diamètre et les rayons de courbure sont choisis pour :

- éviter les risques d'ovalisation pendant le transport et la manutention ;
- permettre le respect des valeurs prises en compte au projet pour le frottement et la poussée au vide ;
- assurer un remplissage correct par le produit d'injection.

Les caractéristiques des conduits en cause doivent permettre de satisfaire aux exigences suivantes :

- mise en œuvre dans de bonnes conditions,
- propreté avant enfilage des câbles,
- absence d'agressivité des matériaux constitutifs vis-à-vis des produits d'injection et des câbles.
- résistance à la pression d'injection maximum proposée
- résistance à long terme à la pression de contact exercée par le câble dans les zones courbes, dans le cas d'une injection par produit souple.
- bonne tenue au vieillissement (notamment vis-à-vis des ultra-violets pour les conduits exposés à la lumière).

Il existe plusieurs types de conduits dans lesquels sont disposés les câbles :

- Gaine ronde nervurée en feuillard, gaine plate en feuillard : L'épaisseur varie de 0,4 à 0,6 mm.

- Tube rigide en aciers : épaisseur 1.5 à 2mm.

- Gaine nervurée en PEHD.

- Tube en PEHD.



Figure I-3:Conduits de précontrainte extérieure à l'intérieur d'un ouvrage



Figure I-4 : Gaines de précontrainte en PEHD au niveau d'un passage de déviateur

Sauf disposition contraire du marché, les tubes sont en polyéthylène à haute densité ou en acier. En pratique, pour les unités et les conduits les plus couramment employés, les diamètres extérieurs minimaux utilisables sont donnés dans le tableau ci-après :

Câble	Tubes en acier	Tubes en polyéthylène
7T15	76.1	75
12T15	80	90
19T15	101.6	110
27T15	114.3	125
37T15	139.7	140

Tableau I-4 : Diamètres extérieurs des conduits en mm

I.7.5. Les déviateurs

Pour que les câbles extérieures soient efficaces en flexion et à l'effort tranchant il faut qu'ils suivent un tracé bien défini (en fibre supérieure sur pile et en fibre inférieure dans la zone centrale des travées). Ce tracé est réalisé à l'aide des pièces de déviation qu'on appelle déviateurs qui donnent aux câbles un tracé en ligne brisée.

Un déviateur comprend :

- Un élément structural capable de reprendre l'effort exercé par le câble dans la zone de déviation.
- Un organe assurant la géométrie de la déviation.

Globalement, un déviateur doit satisfaire aux exigences suivantes [7] :

- Résister aux forces tant longitudinales que transversales que le câble lui applique et transmettre ces forces à l'ensemble de la structure.
- Sauf indication contraire du marché, permettre la démontrabilité du câble sans intervention traumatisante pour les éléments structuraux.

Dans la zone de déviation, le tracé théorique du câble, est un arc de cercle de rayon au moins égal à R_{\min} (rayon minimum).

R_{\min} est défini ci-après pour les câbles les plus courants (Tableau **I-5**).

Les câbles peuvent être déviés un à un ou peuvent avoir tous un même tracé proche du tracé théorique. Dans le premier cas la position des ancrages doit être choisie de façon à ce que les efforts de déviation se décomposent sans flexion secondaire sur l'âme et le hourdis inférieur.

Câble	$R_{min}(m)$
7T15	2,0
12T15	2,5
19T15	3,0
27T15	3,5
37T15	4,0

Tableau I-5 : Valeurs réglementaires de R_{min} pour câble

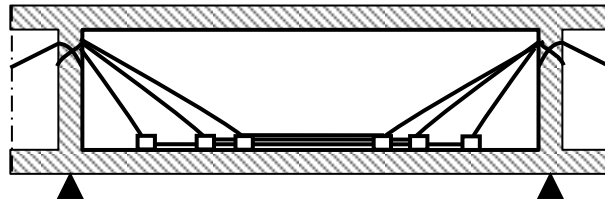


Figure I-5 : Déviation échelonnés (exemple de pont de Long Key)

Dans l'autre cas ce sont les entretoises qui permettent de dévier simultanément tous les câbles (figure I.6).

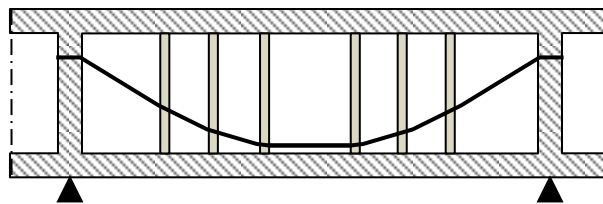


Figure I-6 : Multiple (tracé quasi-parabolique)

Cependant, multiplier ces entretoises présente des inconvénients. Ces entretoises par leur poids, elles génèrent des efforts additionnels dans la structure et compliquent la réalisation. C'est pourquoi SETRA (service d'étude des routes et autoroutes) propose une limite fixée à deux entretoises déviatrices ce qui réduit l'efficacité du câble notamment vis-à-vis de l'effort tranchant et impose d'augmenter un peu l'épaisseur des âmes (figure I.7) [11].

D'autre part, le problème majeur qu'on rencontre au niveau des zones de déviation est le comportement jusqu'à rupture de celle-ci ainsi que les cassures angulaires qui peuvent y apparaître.

Pour justement étudier le comportement d'un câble dans la zone de déviation, à la mise en tension et surtout à la rupture, des essais ont été effectués par B.FOURE [5] au C.E.B.T.P. à Saint Rémy – les Chevreuse. Les résultats de ces essais ont montré que les charges de rupture des câbles déviés ne sont pas significativement différentes de celles des câbles droits. La rupture ne se produit jamais dans la zone de déviation.

VIRLOGEUX [6] affirme aussi que si les rayons de courbure sont comparables à ceux mis en œuvre pour des câbles intérieurs au béton, il ne semble guère exister de raison de prendre des précautions particulières. Mais il faut tout de même tenir compte des points suivants [11] :

- En précontrainte extérieure on utilise des câbles de grande puissance et plus le nombre de torons est grand dans les zones de courbures, plus l'empellement est défavorable ;
- La tension réelle des câbles extérieurs est largement supérieure à celle des câbles intérieurs, du fait des faibles pertes de précontrainte par frottement.

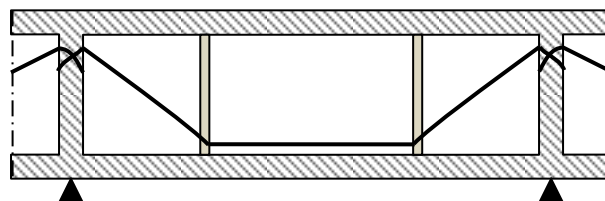


Figure I-7:Tracé polygonal simplifié

I.7.5.1. Système d'ancrage de précontrainte

Ils constituent un organe essentiel puisqu'ils permettent d'assurer le maintien de l'effort de précontrainte dans les armatures après la mise en tension (la tête d'ancrage assure cette fonction). Ces systèmes ont été développés par des sociétés détentrices de procédés de précontrainte dans le monde et l'on peut citer :

- Freyssinet international;
- VSL (Vorspan system Losinger);
- DSI (Dywidag system international).

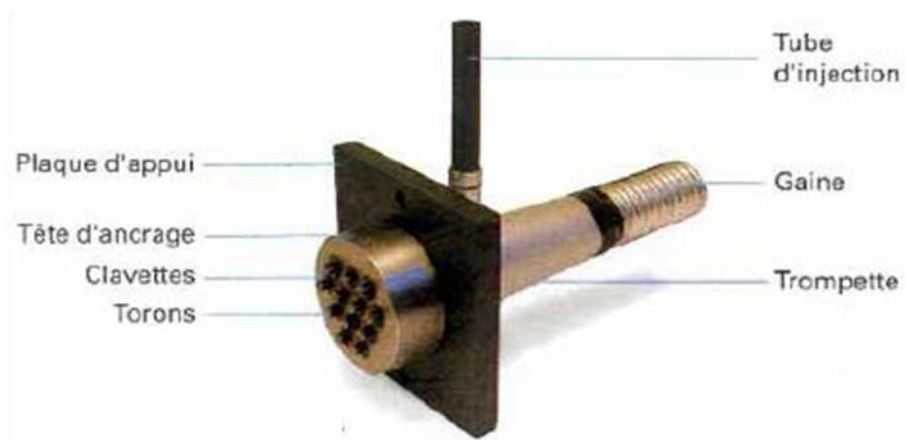


Figure I-8 : Exemple de système d'ancrage à plaque VSL

Sur la (figure **I-8**), on distingue la tête d'ancrage. Sa protection est assurée par un capot étanche définitif fixé mécaniquement. Ce capot reçoit lui-même une protection anticorrosion efficace [7], [11].

I.8. Comportement des poutres en précontrainte extérieure

Le comportement à la rupture des ponts, construits avec une précontrainte extérieure, n'était pas totalement prévisible. Des incertitudes spécifiques à cette technique existent, elles concernent certains problèmes structuraux tels que [12] :

- Le comportement de l'ensemble de la structure,

- La rupture des poutres en flexion, le comportement des câbles dans certaines zones sensibles (les déviateurs et les ancrages), ainsi que le glissement des câbles dans les zones de déviation ;

- Le comportement des câbles aux droits des déviateurs : surtension, concentrations locales des contraintes, perte de tension dans les déviateurs, effet du second ordre, ductilité, capacité résistante,... etc.) ;

- La rupture des éléments de déviation.

En effet, plusieurs centres de recherche ont entrepris des programmes de recherche expérimentale et théorique, pour trouver des réponses à ces incertitudes et d'observer l'ensemble des phénomènes liés au comportement des structures à précontrainte extérieure.

Cela permet d'une part, de préciser les hypothèses de comportement local et d'autre part, de faire des vérifications du comportement global des structures (glissement des câbles sur les déviateurs) On peut citer dans cette étude :

- Les études menées au CEBTP [4], [13], [14], [15], [16] qui consistent en des études expérimentales et théoriques pour lesquelles le programme d'essai a démarré en 1982.Elles ont porté essentiellement sur le comportement de poutres isostatiques ;

- Ainsi que les essais effectués à l'université de Texas à Austin [17], [18], [19],[20] sur une poutre hyperstatique à précontrainte extérieure.

I.8.1. Essai de CEBTP (comportement en flexion)

Un programme d'essais portant sur 11 poutres a été réalisé au CEBTP à partir de 1984.

- Le type de câblage, qui est soit totalement extérieur, soit mixte, soit totalement intérieur ; Il a pour but d'étudier le comportement global des poutres en béton précontraint en service et surtout à la rupture. Les poutres testées se différencient par [12] :

- Leurs types de construction (poutres monolithes et poutres à voussoirs préfabriqués) ;

- La quantité d'armatures passives correspondant à des armatures de peau imposées par les règles Françaises BPEL83 ;

- Type d'injection des câbles, au coulis de ciment ou à la cire pétrolière.

Les principales caractéristiques de ces poutres sont données au tableau suivant:

Type	Poutre	Câble	Armatures passives	Injection
Voussoirs	NM1	Extérieur	W=1,05%	Non
	NM2	Extérieur	W=1,05%	Ciment
	NM3	Extérieur	W=1,05%	Cire
	NM4	Mixte	W=1,05%	Ciment
	NM5	Intérieur	W=1,05%	Ciment
	NM6	Extérieur	W=0,02%	Ciment
Monolithes	NM7	Mixte	W=0,02%	Ciment
	NM8	Extérieur	W=0,5%	Ciment
	NM9	Extérieur	W=0,02%	Cire
	NM10	Extérieur	W=0,77%	Ciment
	NM11	Extérieur	W=0,5%	Cire

Tableau I-6 : Principales caractéristiques des poutres NM

I.8.2. Caractéristiques géométriques et physiques des poutres NM

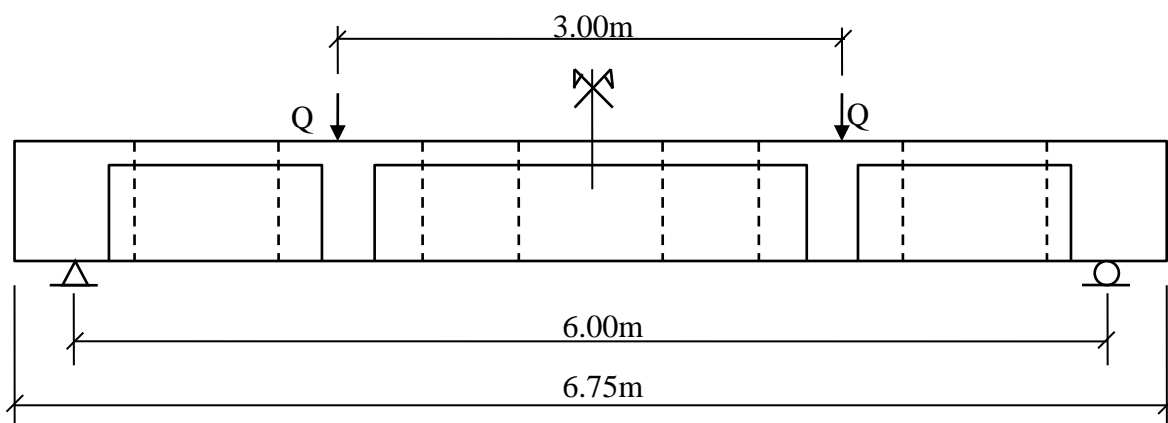


Figure I-9: Disposition du chargement pour les poutres NM.

Ce sont des poutres isostatiques de 6,75m de long avec une portée de 6m entre appuis. La figure (I-9) montre la disposition du chargement des poutres, la figure (I-10) montre les caractéristiques géométriques des poutres et la figure (I-11) montre la disposition des armatures passives.

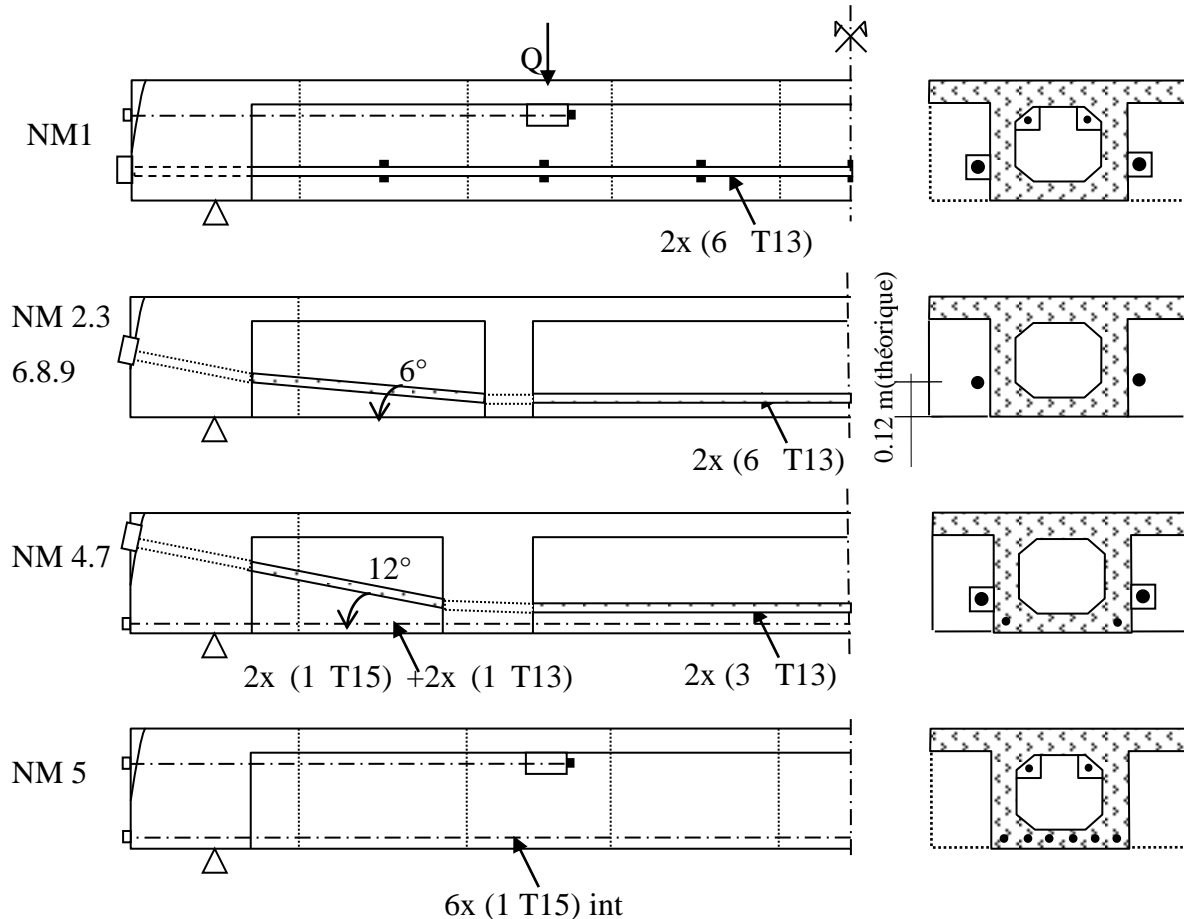


Figure I-10 : Caractéristiques géométriques et physiques des poutres NM

I.8.3. Câbles extérieurs

Ils sont placés sous gaines souples en feuillard métallique ondulé pour l'injection au coulis de ciment et sous tubes métalliques, pour l'injection à la cire pétrolière, les gaines sont contenues au passage des déviateurs dans des tubes de réservation en aciers qui sont cintrés avec un rayon de 2m. Les parties cintrées noyées dans le béton du déviateur sont prolongées à leurs extrémités par des longueurs droites de 30mm. Situées à l'extérieur du béton, leur déformabilité permet ainsi d'atténuer les cassures angulaires des câbles éventuels [21].

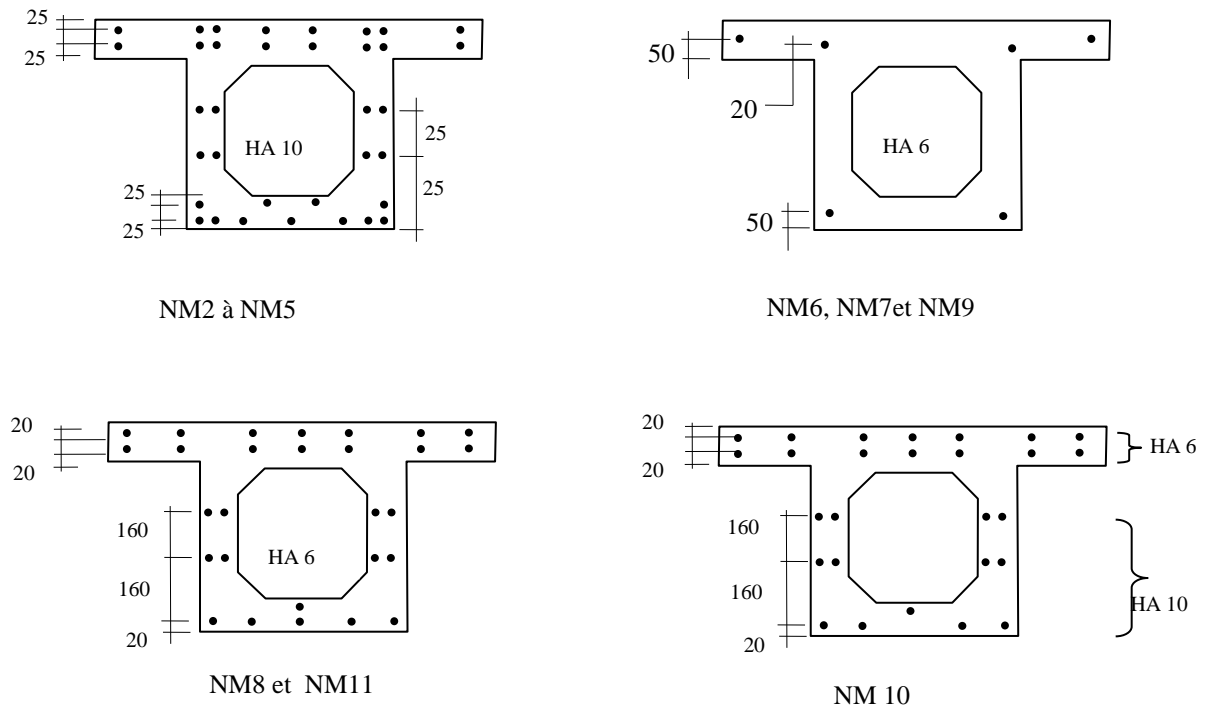


Figure I-11 : Disposition des armatures passives dans les poutres NM

I.8.4. Les mono torons intérieurs

Ils sont situés dans le feuillet moyen du hourdis inférieur, soit à 50 mm de la face inférieure de la poutre. Leurs gaines sont soit en tube d'acier pour les poutres à câblage mixte, soit en tube cranté en PVC pour la poutre NM5 à câblage entièrement intérieur.

I.8.5. Les essais américains (essai de l'université de Texas)

En raison du grand succès qu'a connu la précontrainte extérieure, le Texas State department of highways and publics transportation (TSDHPT) et la Federal Highway Administration (FHA) en commun accord avec l'université du Texas, a mené un programme de recherche sur le comportement des ponts à voussoirs, précontraints par des câbles extérieurs, aux états limites de service et ultime. Ce programme a porté sur une poutre continue à câblage extérieur [12].

Ce programme d'essai a porté sur une poutre continue géométriquement symétrique par rapport à son centre. La poutre est constituée de trois travées : travées nord, centrale

et sud. La travée Nord a des joints secs, tandis que les deux autres ont des joints collés avec la résine époxy. Chaque travée est constituée de dix voussoirs plus un voussoir sur pile à chaque appui.

L'ancrage de tous les câbles est effectué dans les voussoirs sur pile. Les caractéristiques géométriques de la section transversale des voussoirs ainsi que la disposition des armatures Passives sont montrées sur la figure (I-11).

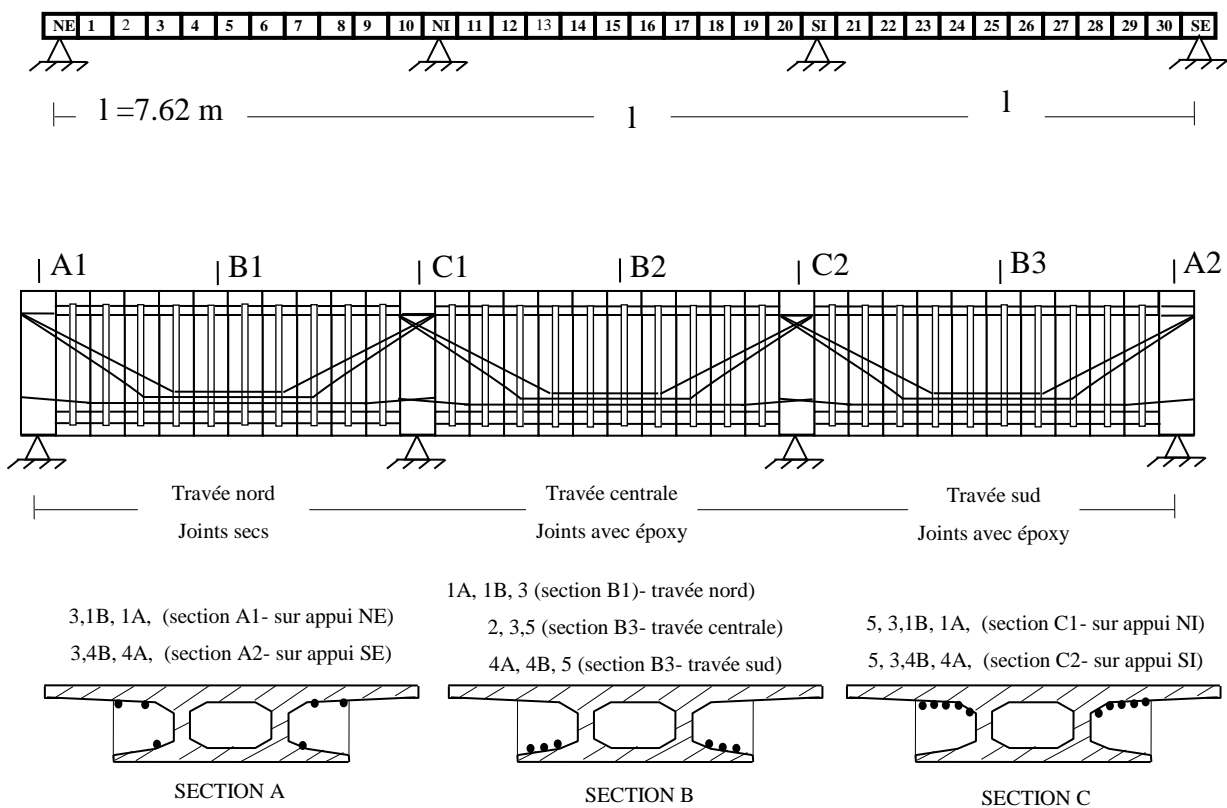
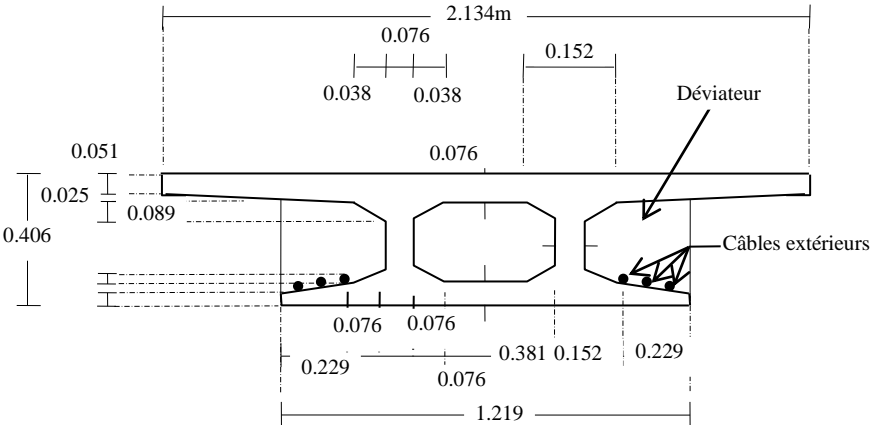
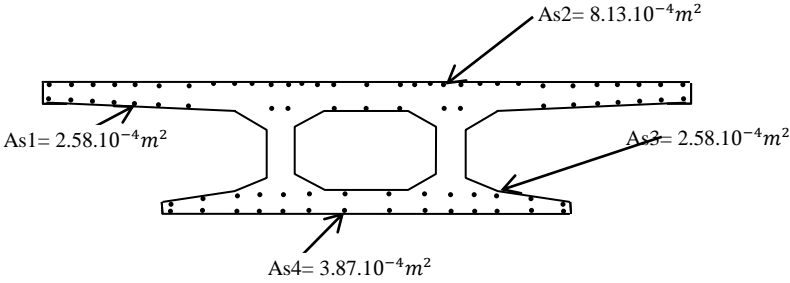
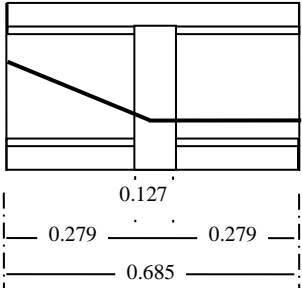


Figure I-12 : Description générale de la poutre hyperstatique



a) Description de la section



b) Disposition des armatures passives

Figure I-13: Disposition des armatures passives dans la section transversale

Les câbles extérieurs sont adhérents aux entretoises là où ils sont déviés et dans tous les voussoirs sur pile. Le tracé du câblage extérieur, sa localisation sur les appuis, ainsi que dans une section à mi-travée est montré sur la figure (I-12).

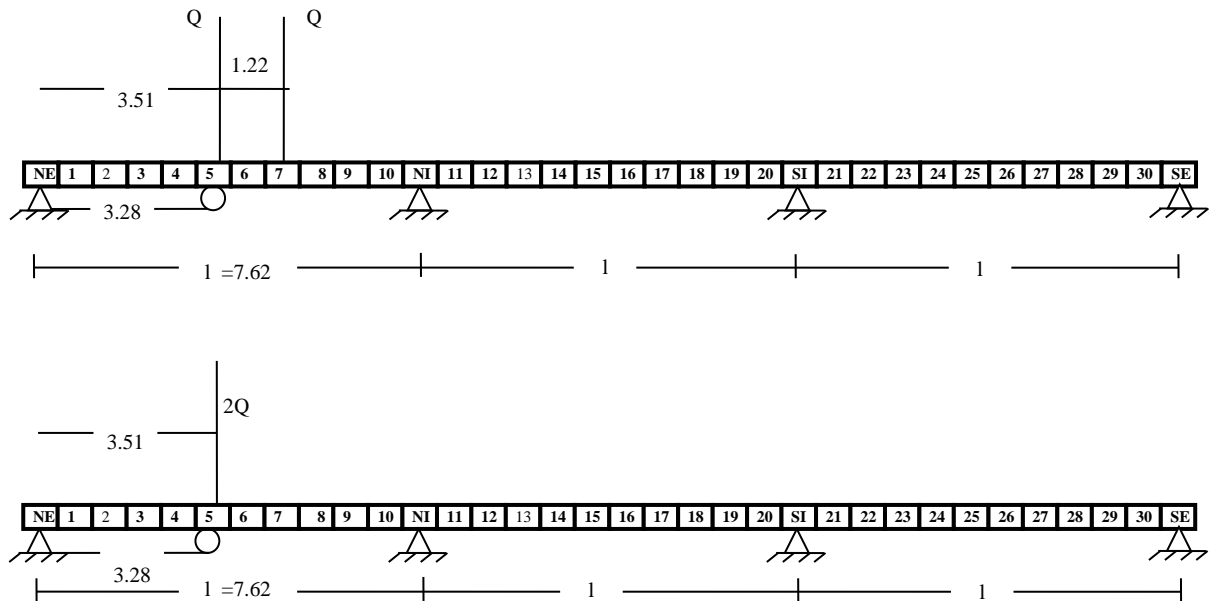


Figure I-14 : Configuration de chargement.

Conclusion

La technique de la précontrainte extérieure a fait l'objet de plusieurs études théoriques et expérimentales. Il en ressort que l'utilisation des câbles extérieurs au béton offre des avantages certains par rapport à précontraint intérieur classique quant à la facilité de mise en œuvre des éléments et surtout dans l'entretien et réparation des ouvrages : réduction de l'épaisseur des âmes et possibilité de remplacer les câbles défectueux.

Cette technique est en effet très souple d'emploi et peut s'adapter à tous les types de structures et toutes les conditions d'exécution.

CHAPITRE II. Etude d'une section droite

Introduction

Le calcul en élasticité linéaire ne permet plus d'évaluer les déformations réelles de la section au-delà d'un certain chargement. Ce chapitre est donc consacré à l'analyse non linéaire du comportement d'une section de poutre en béton armé. Nous allons présenter les premières notions sur les lois d'interaction régissant une section droite.

II.1. Flexion composée

Une section droite (S) d'une pièce est soumise à la flexion composée si les forces appliquées à la pièce, y compris les réactions d'appuis, situées à gauche de cette section peuvent être réduites, par rapport à un point O quelconque de la section, à un couple de moment M et à une force R passant par O mais non située dans le plan de la section. Par suite de la symétrie envisagée, le couple et la force R se trouveront dans le plan de symétrie de la section.

La force R peut être décomposée en :

Une force N, appelée l'effort normal, perpendiculaire au plan de la section ;

Une force T, appelée effort tranchant, située dans le plan de la section.

Une section (S) sera donc à calculer à la flexion composée dans les deux cas suivants :

- Si elle est soumise à un moment M et à un effort normal N, rapportées à un point O quelconque de la section, point qu'il y aura toujours lieu de préciser;
- Si elle est soumise à un effort normal N excentré, puisque le système constitué par M et N appliqués au point O est équivalent au système constitué par N agissant à une distance e de O, appelée excentricité, déterminée par : $e = \frac{M}{N}$.

On voit que la flexion simple n'est qu'un cas particuliers de la flexion composée pour laquelle $N=0$.

En flexion composée, suivant le sens de N (traction ou compression) et suivant les valeurs de M et de N , les contraintes extrêmes dans la section peuvent être de mêmes signes ou de signes opposés. Il faut donc envisager les cas suivants :

- La section est entièrement tendue;
- La section est entièrement comprimée;
- La section est partiellement comprimée(ou partiellement tendue, ce qui est équivalent).

Dans ce qui suit nous considérons que le moment M est positif, c'est-à-dire qu'il tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette hypothèse ne diminue en rien la généralité des résultats qui seront établis car le sens du moment n'intervient que pour fixer la position de la fibre la plus comprimée (ou la moins tendue), c'est-à-dire pour déterminer si elle se trouve à la partie inférieure ou à la partie supérieure de la section. La position de cette fibre pouvant être fixée immédiatement dans chaque cas particuliers, on peut toujours supposer, dans les calculs, qu'elle se trouve à la partie supérieure de la section.

II.2. Modélisation du comportement des matériaux

II.2.1. Béton

II.2.1.1. Comportement du béton en compression

Pour décrire le comportement réel du béton en compression, on admet un modèle élastique non linéaire qui est décrit par SARGIN[22].L'allure générale de la courbe contrainte – déformation est donnée par le diagramme représenté à la figure **II-1** suivante :

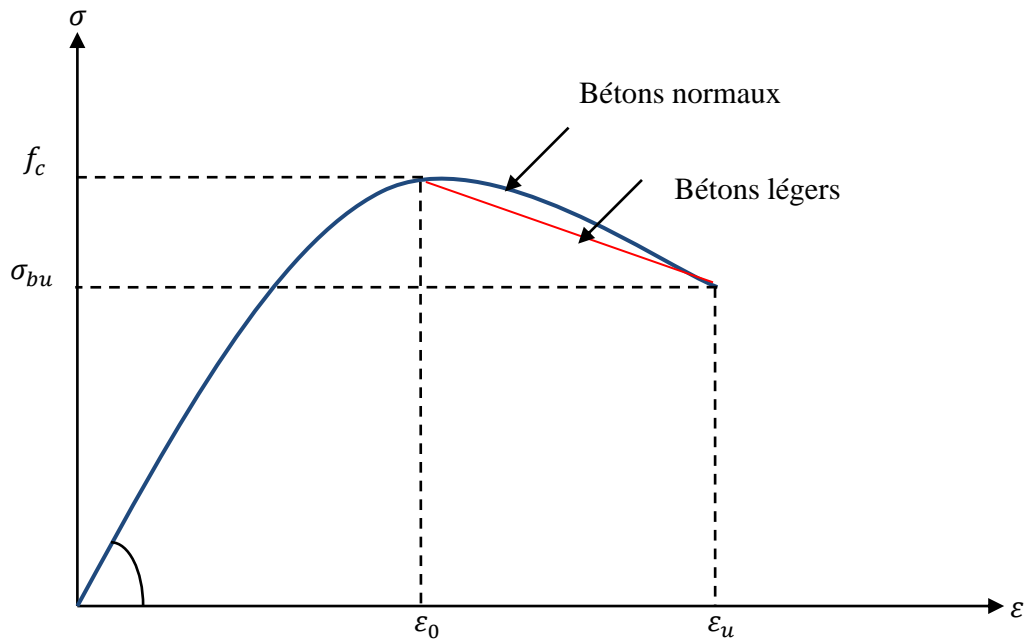


Figure II-1 : comportement du béton en compression selon la loi de SARGIN

La courbe est caractérisée par :

- Une branche ascendante, à concavité dirigée vers le bas admettant un module tangent initial E_{b0} et un maximum de contrainte qui correspond à la résistance à la compression f_c .
- Une branche descendante commençant par le maximum de la branche ascendante et qui se termine par le point (σ_u, ϵ_u) .

La contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_{bc} = f_c \frac{k_b \bar{\epsilon} + (k_b' - 1) \bar{\epsilon}^{-2}}{1 + (k_b - 2) \bar{\epsilon} + k_b' \bar{\epsilon}^{-2}} \quad \text{II-1}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad \text{II-2}$$

Le paramètre k_b ajuste la branche ascendante de la loi et est donné par:

$$k_b = \frac{E_{b0}\varepsilon_0}{f_{cj}} \quad \text{II-3}$$

f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l'âge j ;

ε_0 : Déformation de pic correspond à f_{cj}

E_{b0} : Module élastique du béton à l'origine ;

Le paramètre K'_b permet d'ajuster la forme de la branche décroissante de la courbe.

Avec $K'_b=0$, on obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, ce qui correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile.

Pour $K'_b=1$, on obtient au contraire des courbes assez plates qui correspondent à un béton ayant un comportement ductile. Pour un béton normal, on prend généralement $K'_b=K_b - 1$

II.2.1.2. Comportement du béton en traction

Généralement, dans la pratique (règlement), la résistance à la traction du béton ainsi que la contribution du béton tendu entre deux fissures sont négligées.

La prise en compte de la contribution du béton tendu entre les fissures, permet une représentation convenable de la déformabilité réelle d'un élément fissuré, ainsi qu'une estimation meilleure de la redistribution des efforts dans les structures hyperstatiques et dans les cas sensibles aux effets de second ordre. Elle permet ainsi de mieux estimer les déplacements.

Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature. Dans le cadre de la présente étude nous avons utilisé la loi de GRELAT[24] .Elle attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (figure. II-2)

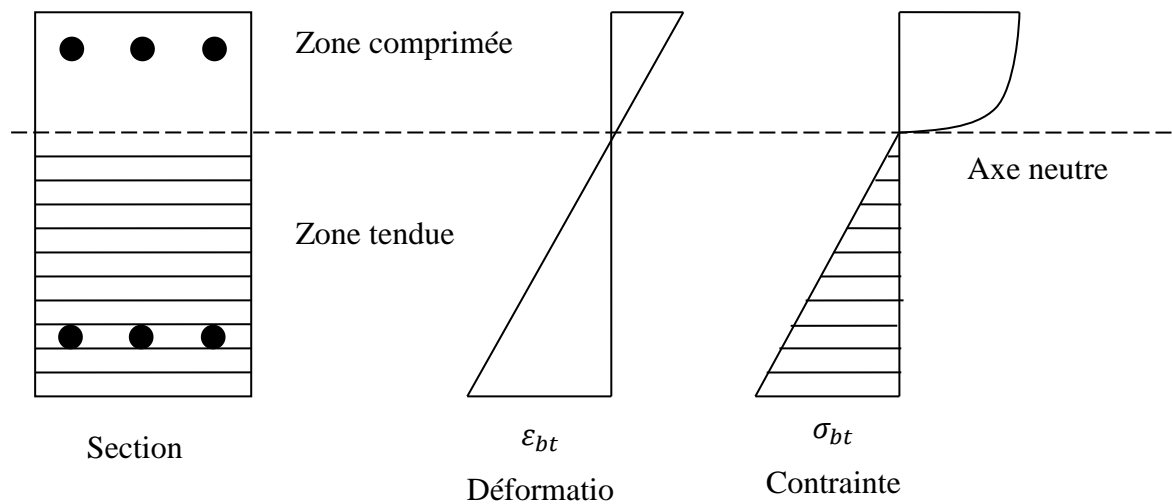


Figure II-2 : Comportement du béton avant fissuration.

2). Les fibres du béton tendu sont affectées d'un module de déformation E_{bt} qui est défini à partir de la contrainte et de la déformation instantanée du bord tendu

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}} \quad \text{II-4}$$

Au-delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives. La contrainte ne s'annule pas brusquement, mais, décroît

Selon une loi parabolique (figure II-3). On étudie ainsi le comportement moyen d'une zone poutre.

f_{tj} : Résistance du béton à la traction ;

ε_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{tj} ;

ε_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu ;

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton.

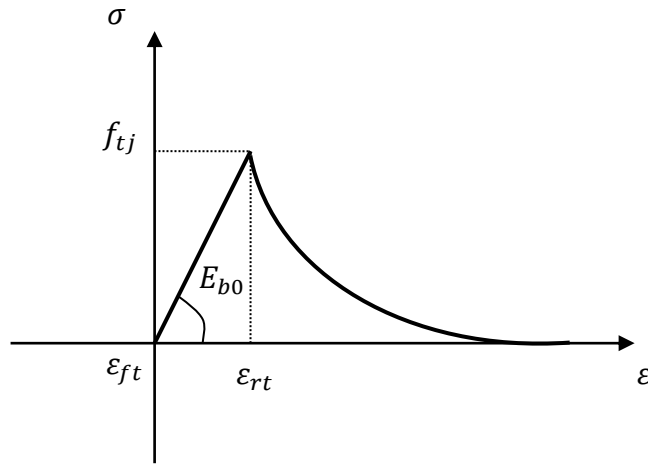


Figure II-3 :comportement du béton en traction

$$\sigma_{bt} = E_{b0} \cdot \epsilon_{bt} \text{ Si } |\epsilon_{bt}| \leq \epsilon_{ft} \quad \text{II-5}$$

$|\epsilon_{bt}| > \epsilon_{rt}$ et $|\epsilon_{bt}| > \epsilon_{ft}$ fissuration avec participation du béton tendu.

$$\sigma_{bt} = \frac{f_{tj}(\epsilon_{bt} - \epsilon_{rt})^2}{(\epsilon_{rt} - \epsilon_{ft})^2} \quad \text{II-6}$$

$\epsilon_{bt} \leq \epsilon_{rt}$ fissuration sans participation du béton tendu : $\sigma_{bt} = 0$

II.2.2. Acier

Les comportements des aciers passifs et de précontrainte sont caractérisés par les types de relations admises par les règles BPEL 1999 :

II.2.2.1. Comportement des aciers passifs

On distingue les aciers naturels et les aciers écrouis.

a. Aciers naturels: Ils sont caractérisés par une loi élastoplastique parfaite (Figure II-3.)

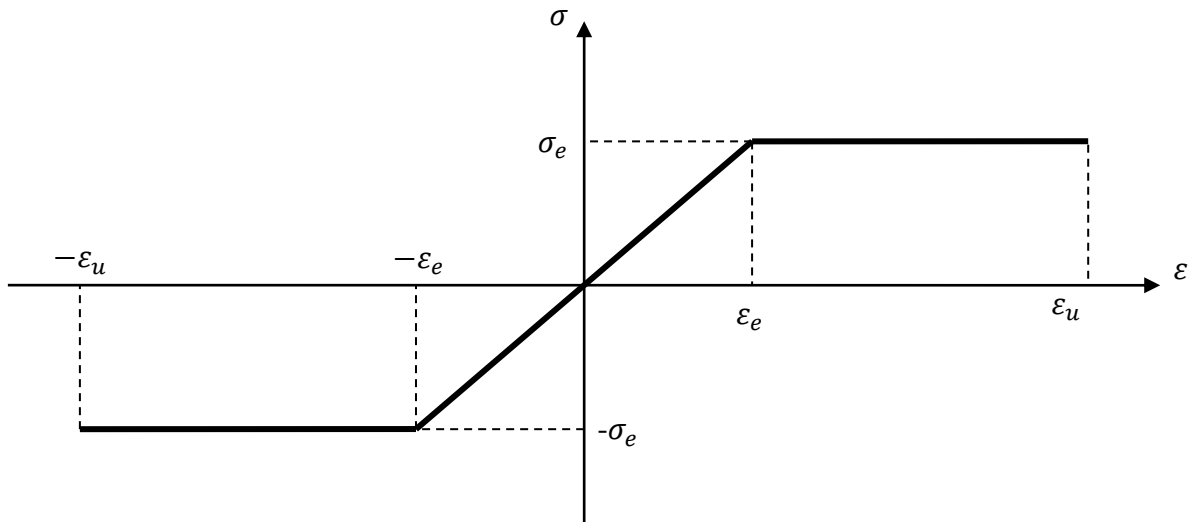


Figure II-4 : Comportement des aciers naturels

$$\begin{aligned} \sigma &= E_a \varepsilon \text{ pour } \varepsilon \leq \varepsilon_e \\ \sigma &= \sigma_e \text{ pour } \varepsilon_e < \varepsilon < \varepsilon_u \\ \sigma &= 0 \quad \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_u \end{aligned}$$

Du côté de la traction les relations se déduisent par symétrie.

Les déformations extrêmes sont fixées par le règlement BAEL à 10‰

E_a : Module longitudinal de l'acier.

ε_e : Déformation limite élastique de l'acier.

σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier.

ε_u : Déformation ultime de l'acier.

b. Aciers écrouis

On adopte la loi préconisée par les règles BAEL 83 qui supposent un comportement linéaire élastique jusqu'à 70 % de la limite élastique (σ_e). Au - delà, une courbe $\varepsilon = f(\sigma)$ du cinquième degré (Figure II-5).

Elle se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \sigma = E_s \cdot \varepsilon & \text{pour} & \sigma < 0.7\sigma_e \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E_a} + 0.823 \left(\frac{\sigma}{\sigma_l} - 0.7 \right)^5 & \text{pour} & 0.7\sigma_e < \sigma < 1.1\sigma_e \\ \sigma = 1.1\sigma_e & \text{pour} & 1\% < \varepsilon < \varepsilon_u \end{array}$$

Avec les relations qui se déduisent en traction par symétrie.

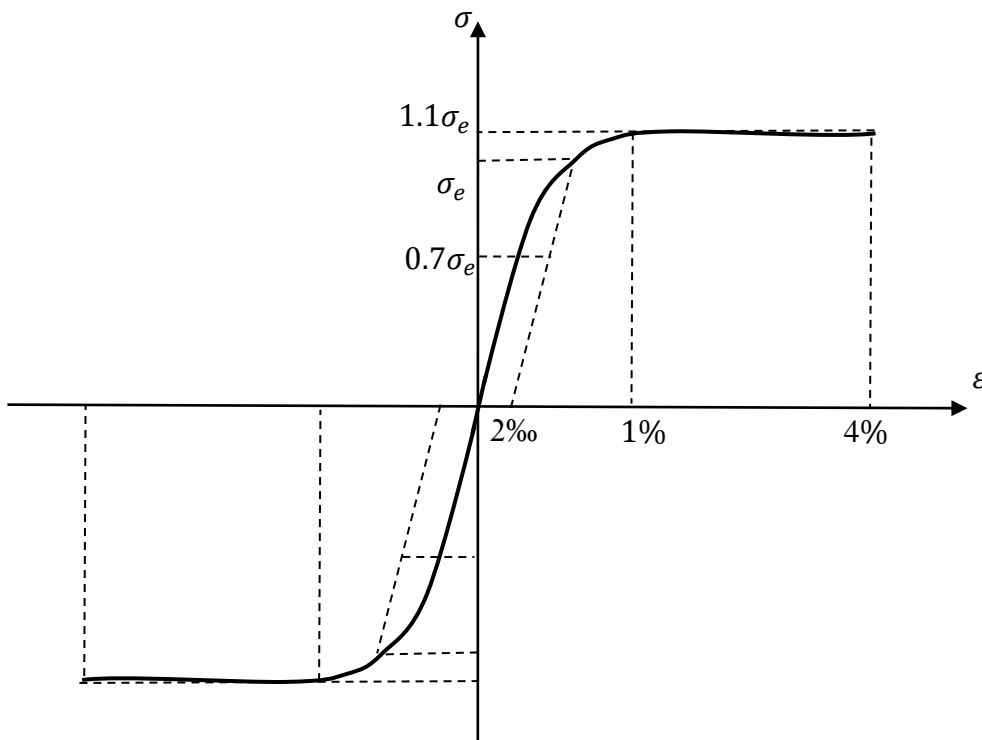


Figure II-5 : Comportement des aciers écrouis

II.2.2.2 Comportement des aciers actifs

Le comportement des aciers de précontrainte est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis du béton armé, recommandée par le règlement BPEL 83 (figure II.6).

$$\sigma = E_a \varepsilon_p \quad \text{pour} \quad 0 < \sigma < 0.9\sigma_e$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_a} + 100 \left(\frac{\sigma_p}{f_e} - 0.9 \right)^5 \quad \text{pour} \quad 0.9\sigma_e < \sigma_p < 1.06\sigma_e$$

$$\varepsilon_p = 1.06\sigma_e \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 2\%$$

Avec les relations qui se déduisent par symétrie du côté de la traction.

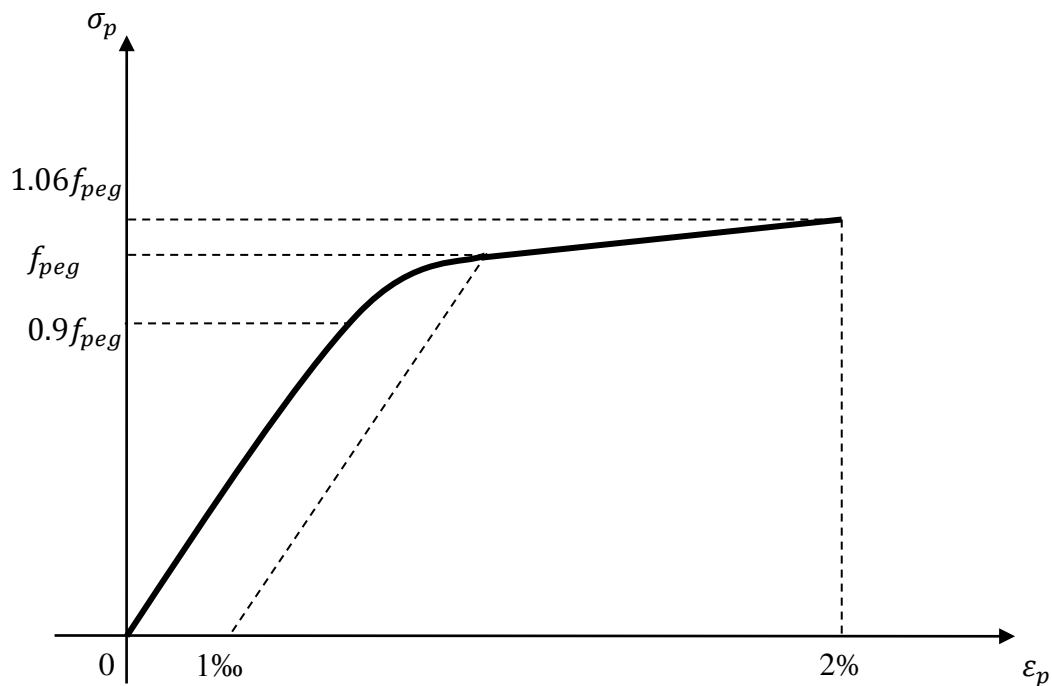


Figure II-6 : Comportement des aciers actifs

II.2.3. Section droite

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'étude d'une section droite d'un élément de poutre en béton armé et/ou précontraint. La section est étudiée dans l'hypothèse des petites

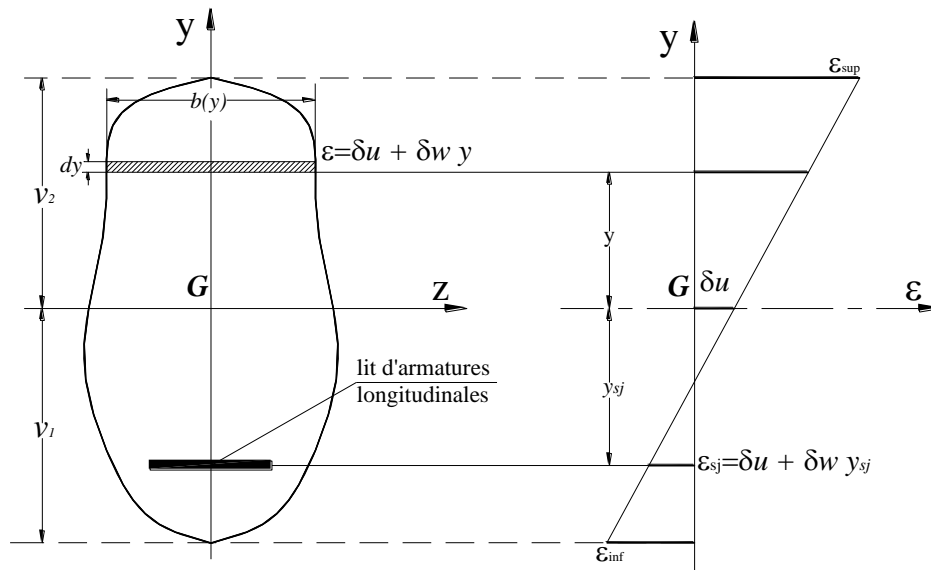


Figure II-7: Description d'une section typique en béton armé

déformations et du comportement élastique non linéaire.

En admettant que les sections restent planes après déformation, que les aciers passifs et les câbles de précontrainte intérieurs après mise en tension, sont parfaitement solidaire au béton que les aciers passifs et actifs ne reprennent que les efforts axiaux.

L'effet de la précontrainte est introduit en tenant compte du phasage éventuel sur la mise en tension des câbles. A la mise en tension, l'action de la précontrainte, sur la section, est un effort de compression, égale et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble, au point où il traverse la section.

Les câbles de précontrainte deviennent des éléments résistants, immédiatement après leur mise en tension, et possédant une pré-déformation par rapport à la section.

Dans le cadre de cette étude, l'analyse non-linéaire concerne aussi bien les sollicitations normales dues à un effort normal N et à un moment de flexion M , agissant dans le plan y - z . Que la sollicitation tangente, dans le béton, due à l'effet de T dans le plan y - z .

On admet que la distorsion due à l'effet de T influe peu sur les déformations normales de la section.

Compte tenu de l'hypothèse de section planes et de l'adhérence parfaite entre les matériaux constituant la section et en négligeant l'influence de la distorsion sur les déformations normales de la section, la déformation longitudinale ε comptée positivement dans les sens des raccourcissements en un point courant de la section est donnée par :

$$\varepsilon = \varepsilon_g + \Phi_z y \quad \text{II-7}$$

Où :

ε_g est l'allongement unitaire au centre de gravité de la section, on désigne par Φ_z la rotation unitaire de flexion autour de l'axe G_y et y est l'ordonnée d'une fibre quelconque de la section.

La déformation tangente notée, γ_y désigne la déformation de cisaillement de la section dans le plan x - y .

Les déformations normales (ε_g, Φ_z) peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur δ_n , défini par :

$$\delta_n = (\varepsilon_g, \Phi_z)^T \quad \text{II-8}$$

De plus la déformation tangente peut s'écrire sous forme :

$$\delta_t = \gamma_y \quad \text{II-9}$$

Nous notons $\Delta\delta_n$ le vecteur contenant l'accroissement de déformation de la section droite sous sollicitations normales et $\Delta\delta_t$ l'accroissement de la déformation sous sollicitation tangentes.

$$\Delta\delta_n = (\Delta\varepsilon_g, \Delta\phi_z)^T \quad \text{II-10}$$

$$\Delta\delta_t = \Delta\gamma \quad \text{II-11}$$

A une déformation δ_n et δ_t de la section droite correspond, dans une armature passive adhérente, une déformation ε_{si} donnée par la formule suivante :

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_g + \Phi_z \gamma_{si} \quad \text{II-12}$$

II.3. Déformation de la section à l'équilibre

La section droite est supposée soumise :

-d'une part aux accroissements d'efforts sollicitant dus aux forces extérieures.

$$\Delta F_s = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \\ \Delta T \end{Bmatrix} \quad \text{II-13}$$

L'équilibre de la section droite se traduit par l'égalité des accroissements d'efforts sollicitant et les accroissements d'efforts internes.

$$\Delta F_s = \Delta F_b + \Delta F_a \quad \text{II-14}$$

La condition d'équilibre de la section peut être exprimée par la relation :

$$\Delta F_s = [K_s] \cdot \Delta\delta \quad \text{II-15}$$

$[K_s]$ représente la matrice (3x3) de rigidité de la section donnée par :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K_b] + [K_a] & \{0\} \\ \langle 0 \rangle & K_{2b} \end{bmatrix} \quad \text{II-16}$$

$[K_b]$ est la rigidité de la section à l'effort normal et le moment dans son plan

$$K_b = \iint_A E \begin{bmatrix} 1 & y \\ y & y^2 \end{bmatrix} dy dz$$

$$\{0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \langle 0 \rangle = \langle 0 \quad 0 \rangle$$

$$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$$

$[K_a]$ est la matrice symétrique (2x2) définie par :

$$K_a = \sum_1^{ns} E_{si} A_{si} \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix}$$

$\Delta \delta = \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \delta_t \end{Bmatrix}$ est l'accroissement de déformation.

Pour un accroissement donné d'efforts sollicitant, la résolution en déformation d'équations est itérative. La solution peut s'exprimer par :

$$\{\Delta \delta\} = [K_s]^{-1} \cdot \{\Delta F_s\} \quad \text{II-17}$$

Où $[K_s]^{-1}$ représente la matrice de souplesse de la section.

II.4. Méthode itérative de résolution et critères de convergence

En élasticité non-linéaire, il est facile de calculer les efforts développés par une déformation donnée. Cependant il n'existe pas de méthode directe permettant de calculer la déformation produite par des efforts donnés. On est donc contraint à utiliser une méthode itérative pour la recherche de la solution en déformation.

Considérons un état d'équilibre de la section soumise à des sollicitations extérieurs, qui peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\{F_s\}$, défini par :

$$\{F_s\} = \langle N \quad M \quad T \rangle^T \quad \text{II-18}$$

On note par $\{\delta_s\}$ le vecteur de déformation de la section correspondant. Il est donnée par :

$$\{\delta_s\} = \langle \varepsilon_g \quad \phi \quad \gamma \rangle^T \quad \text{II-19}$$

Pour une variation des sollicitations extérieures $\{\Delta F_s\}$, l'accroissement de déformation $\{\Delta \delta_s\}$ de la section est recherché, en utilisant la méthode des substitutions successives utilisant les matrices cordes.

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions, $\{\Delta \delta_0\}$, $\{\Delta \delta_1\}$, ..., $\{\Delta \delta_i\}$, $\{\Delta \delta_i\}$ étant calculé à partir de $\{\Delta \delta_{i-1}\}$ en résolvant le système linéaire :

$$\{\Delta F_s\} = [K_s]_{i-1} \cdot \{\Delta \delta_i\} \quad \text{II-20}$$

où $[K_s]_{i-1}$ est la matrice de rigidité de la section, à l'itération (i-1). En partant de la solution initiale nulle, le schéma de résolution s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\Delta \delta_0\} &= \{0\} \\ \{\Delta \delta_1\} &= [K_s]_{i-1}^{-1} \cdot \{\Delta F_s\} \end{aligned} \quad \text{II-21}$$

Le critère d'arrêt des itérations est une tolérance fixée à priori à la variation des déformations entre deux itérations successives. Cette variation est déterminée avec la norme euclidienne des déformations :

$$\eta = \frac{|\{\Delta \delta_i\} - \{\Delta \delta_{i-1}\}|}{|\{\delta_i\}} \leq T_u$$

où $\{\delta_i\}$ est la déformation à l'étape équilibrée précédente. Généralement une dizaine d'itérations suffisent pour assurer la convergence.

On se propose de définir la suite $\{\delta\}_i$ engendrée par les itérations.

Les étapes suivies dans la résolution de l'équilibre, en supposant connue la déformation $\{\delta\}_i$ à la $i^{\text{ème}}$ itération, sont les suivantes :

1. Calcul des efforts internes (N_i, M_i, T_i) développés par la déformation $\{\delta\}_i$, ainsi que la matrice de rigidité K_s .
2. Evaluation de l'incrément de déformation $\{\Delta\delta\}$ en résolvant le système linéaire suivant :

$$[K_s] \cdot \{\Delta\delta\} = \{\Delta F_s\}$$

3. Calcul de la déformation à l'étape ($i+1$),

$$\{\delta\}_{i+1} = \{\delta\}_i + \{\Delta\delta\}$$

4. Vérification du critère de convergence en utilisant la norme des efforts ou celle des déformations.

On recommence le cycle à partir de l'étape (1) en posant comme nouvelle valeur de la déformation, la déformation calculée à l'étape (3) et ce jusqu'à ce que l'effort normal N_i et le moment fléchissant M_i soient les plus proches possible respectivement de l'effort normal N_{ext} et du moment fléchissant M_{ext} extérieurs avec une précision suffisante.

On peut résumer les itérations ci-dessus par l'équation suivante :

$$\{\delta\}_{i+1} = \{\delta\}_i + [K_s]^{-1} \cdot \{\Delta F_s\}$$

II.5. Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section

Nous définissons ici l'organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section transversale lors d'un accroissement de sollicitations extérieures $\{F_s\}$.

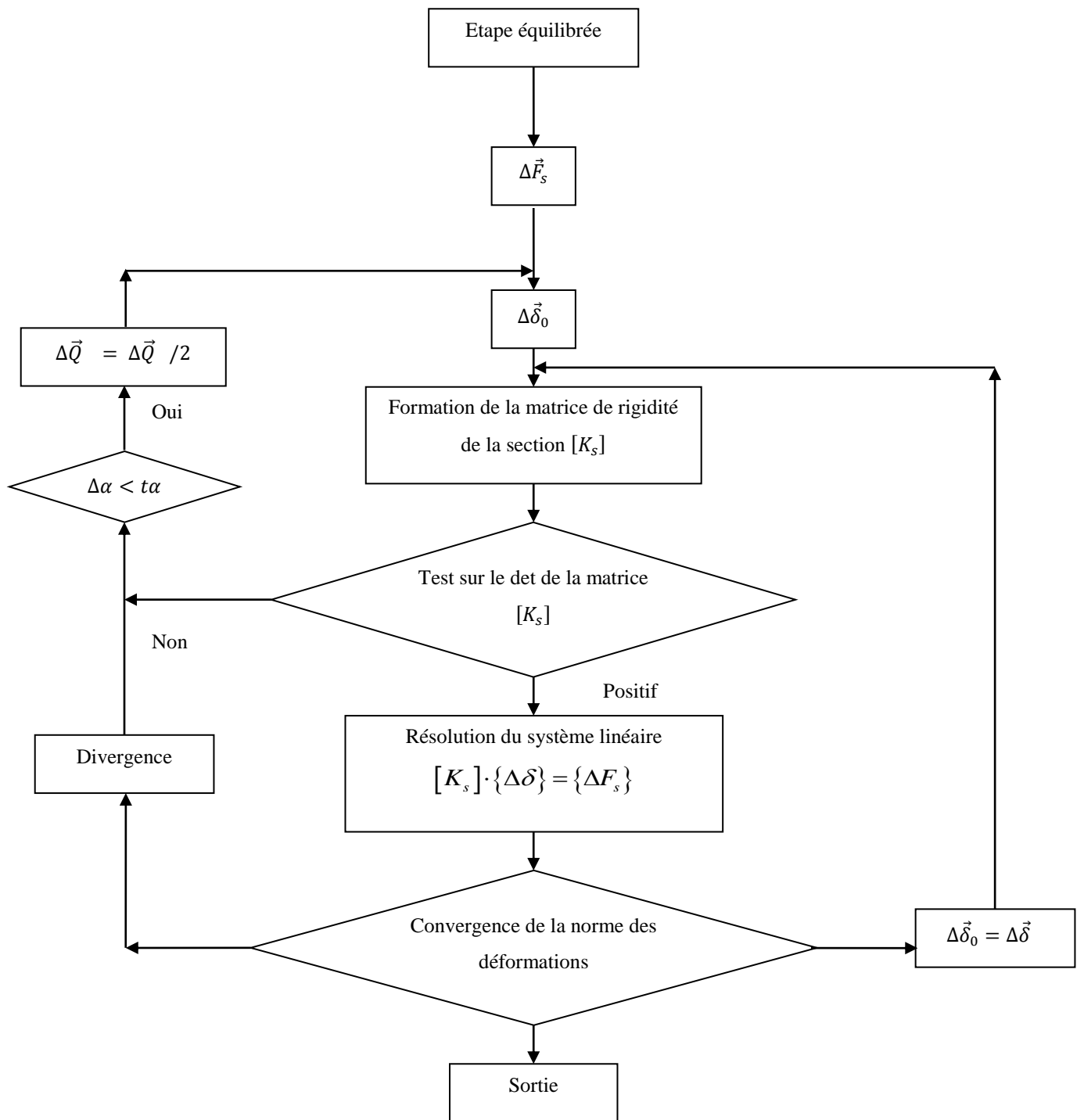


Figure II-8 : Organigramme simplifier de la recherche de l'état d'équilibre d'une section

II.6. Etablissement des courbes d'interaction

Module de Young à l'origine	$E_{b0}=3,56 \times 10^4$
Déformation correspondant au pic de contrainte de compression	$e=15\%$
Résistance à la traction	$f_c=3,5\text{MPa}$
Coefficient de poisson	$\nu=0.20$

Tableau II-1: caractéristiques du béton

Module de Young	$E_s=2.1 \times 10^5\text{MPa}$
Limite élastique	$S_e=500\text{MPa}$
Déformation de rupture	$\varepsilon_r=4\%$

Tableau II-2: Caractéristiques de l'acier

Le calcul de l'équilibre de la structure commence par une évaluation des efforts internes sans la participation de la précontrainte avec la théorie des sections planes.

Ainsi, pour plusieurs valeurs de l'effort normal N pour la section (voir Figure **I-13**) nous avons obtenu les diagrammes d'interactions (Figure **II-9**).

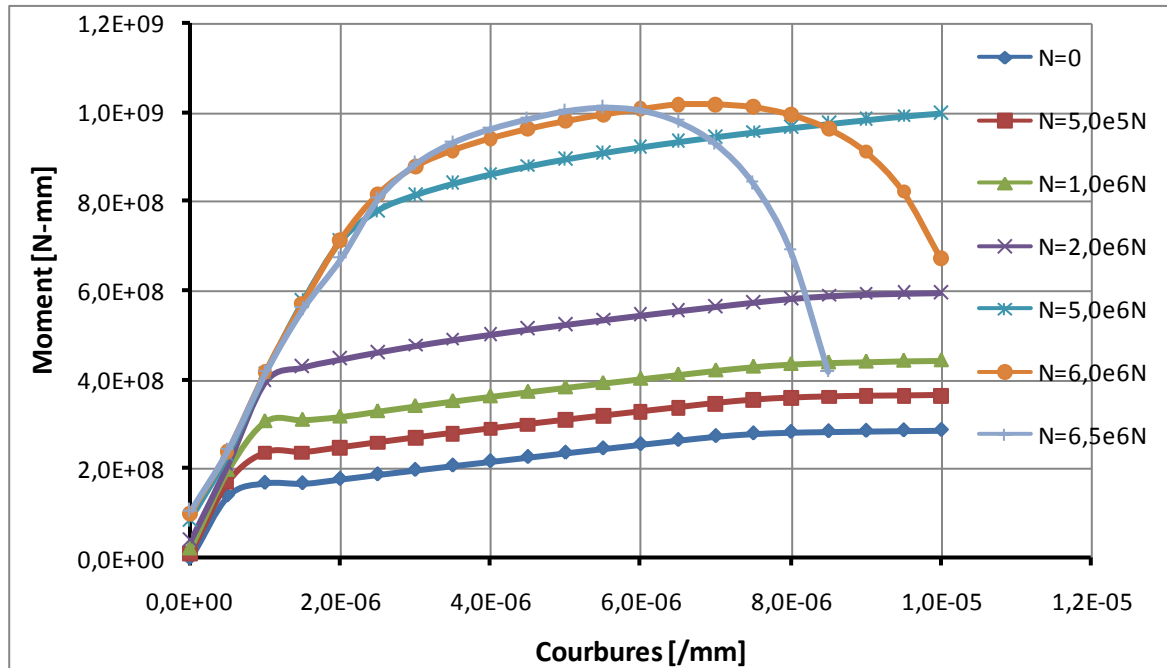


Figure II-9 : courbes d'interaction

On voit qu'à chaque fois on augmente N la résistance augmente jusqu'à $N = 6 \text{ MN}$. Après la résistance diminue donc la résistance optimale à la flexion est évaluée entre 6 MN et 6.5 MN . Les courbes d'interaction servent à trouver les résistances optimales à la flexion.

Conclusion

L'étude présentée jusqu'ici nous permet de simuler le comportement non linéaire des sections. Le calcul des sections est une étape importante pour le calcul des structures de poutre; l'intégration des états de déformations des sections soumise à la flexion composée nous permettra de calculer la déformée et déduire le comportement des poutres en béton armé soumise à un chargement croissant.

CHAPITRE III. Formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULLI et la théorie de TIMOSHENKO

Introduction

L'étude consiste à présenter une méthode de résolution de l'équilibre d'une poutre soumise à la précontrainte extérieure. Le comportement de cette poutre est considéré dans ses deux aspects : mécanique (comportement non linéaire des matériaux de la structure) et géométrique (chargement dépendant de la configuration déformée de la structure). La précontrainte extérieure est considérée dans la méthode de résolution, comme une force extérieure agissante qui varie avec le déplacement d'ensemble du système poutre-câble. Il est prévu de simuler le comportement du système en introduisant la méthode de chargement pas-à-pas.

Deux formulations sont typiquement utilisées pour construire un modèle élément fini poutre de cinématique Bernoulli ou Timoshenko pour des calculs non linéaires.

III.1. Théorie de Navier-Bernoulli

On s'intéresse à la modélisation du comportement non-linéaire des structures planes constituées d'éléments structuraux droits (poutres, poteaux, portiques et ossatures planes). En se basant sur la méthode des éléments finis, on présente, dans ce qui suit, une formulation détaillée d'un élément poutre mince.

III.1.1. Hypothèses de base

On s'intéresse à un élément poutre plan orienté selon l'axe longitudinal x et dont les dimensions dans le plan $y-z$ normal à l'axe x sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale (**Figure III-1**).

On se base sur les hypothèses suivantes :

1. L'axe longitudinal de la poutre est droit ;
2. La section droite est symétrique par rapport au plan x-z ;
3. Les chargements agissant sur la poutre sont appliqués dans le plan x-z ;
4. La poutre se déforme selon le plan de symétrie x-z (en membrane, flexion et en cisaillement) ;
5. La poutre transmet des efforts normaux $N_x(x)$ suivant x, les efforts tranchants $T_z(x)$ suivant z et des moments fléchissant $M_y(x)$;
6. Les sections planes et droites avant déformation restent planes et orthogonal à la fibre neutre après déformation. Les déformations dues à l'effort tranchant sont négligées.
7. Les déplacements et les déformations du second ordre sont négligés (relation linéaire entre déformation et déplacements).

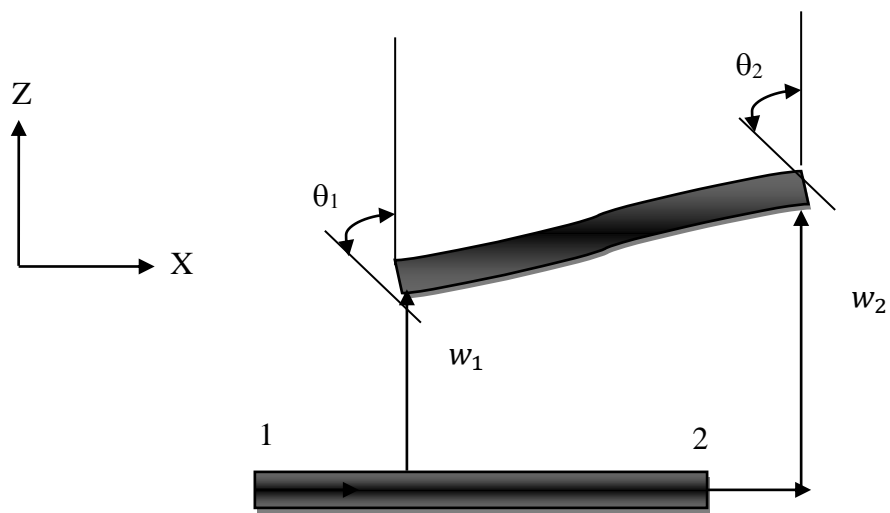


Figure III-1: schématisation de l'élément avant et après déformation

III.1.2. Cinématique

Considérons un tronçon de poutre de la figure **III-2** avant et après déformation :soit le point M de coordonnées (x-z) sur la configuration non déformée. Après déformation le point M subit un déplacement axial u selon x et un déplacement transversal w selon z tels que :

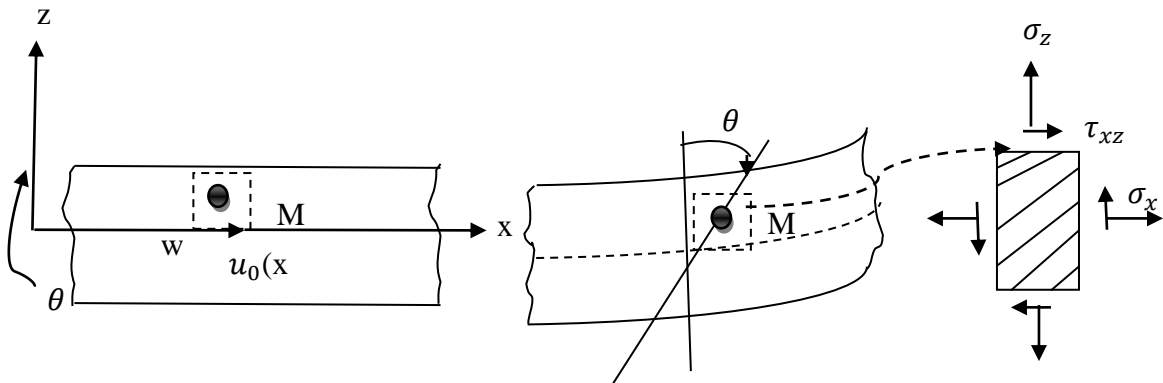


Figure III-2: Cinématique de la poutre de Bernoulli

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) + z\theta(x) \\ w(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad \text{III-1}$$

Ou: $u_0(x)$ Le déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la section transversale $\Sigma(x)$ d'abscisse x et $\theta(x)$ est la rotation de la même section tel que :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} + \gamma \quad \text{III-2}$$

ou γ est la rotation due au cisaillement transversal.

Dans le cadre de l'hypothèse de Navier-Bernoulli, les déformations dues à l'effort tranchant (ou cisaillement sont négligées, $\gamma=0$), D'où :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx}$$

La relation (III-1) devient :

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) - z \frac{dw}{dx} \\ w(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad \text{III-3}$$

La relation (III-3) exprime l'hypothèse de Navier-Bernoulli, valable dans le cas des poutres minces.

III.1.3. Relation contrainte-déformation

Si on considère un état plan de contrainte au point M alors dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire et isotrope :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\vartheta^2} \begin{bmatrix} 1 & \vartheta & 0 \\ \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\vartheta}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad \text{III-4}$$

Avec :E : module de Young.

ϑ : Coefficient de poisson.

Dans le cas des poutres, on considère un état de contrainte uni axial, alors

$$\sigma_z = 0 \quad \text{III-5}$$

D'après les relations (III-4) et (III-5), on obtient

$$\varepsilon_z = -\vartheta \varepsilon_x \quad \text{III-6}$$

En remplaçant (III-6) dans (III-4) on obtient :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad \text{III-7}$$

III.1.4. Relation déformations –déplacements :

Selon l'hypothèse précédente, la relation déformations-déplacements est linéaire :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} \quad \text{III-8}$$

En tenant compte de la relation (III-3), on obtient

$$\varepsilon_x = \frac{du_0(x)}{dx} - z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad \text{III-9}$$

Ou encore :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + z\varnothing \quad \text{III-10}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} \\ \varnothing = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \end{cases}$$

Avec : ε_{0x} = déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence.

\varnothing = courbure

III.1.5. Principe des travaux virtuels (P.T.V) :

On considère une poutre mince droite de longueur l, ayant une section transversale de hauteur h et de longueur b(z) variant avec la hauteur

On suppose que la poutre est soumise à un chargement réparti transversal fz et longitudinal fx.

D'après le **principe des travaux virtuels (P.T.V)**, pour toute variation des déplacements et déformations virtuels $\delta \hat{u}, \delta \hat{w}, \delta \hat{\varepsilon}$, le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs :

$$\partial \hat{W}_{int} = \partial \hat{W}_{ext} \quad \text{III-11}$$

Ce qui donne l'expression :

$$\int_V \langle \delta \varepsilon_x \rangle \{ \sigma \} dv = \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx + \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx \quad \forall \delta \hat{\varepsilon}, \delta \hat{w}, \text{ et } \delta \hat{u}$$

$$\int_0^l \int_S \delta \hat{\varepsilon}_x \cdot \sigma_x ds dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\text{Or } \delta \varepsilon_x = \delta \hat{\varepsilon}_{x0} + z \delta \hat{\phi} \text{ d'après}$$

III-12

$$\int_0^l \int_S (\delta \hat{\varepsilon}_{x0} + z \delta \hat{\phi}) \cdot \sigma_x ds dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l \int_S (\delta \hat{\varepsilon}_{x0} \sigma_x + \delta \hat{\phi} \cdot \sigma_x \cdot z) ds dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l [\delta \hat{\varepsilon}_x \int \sigma_x ds + \delta \hat{\phi} \int \sigma_x z ds] dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

III-13

III.1.6. Relation entre efforts et déformation

L'effort normal dans la section transversale d'abscisse x est :

$$N = N(x) = \int_S \sigma_x ds$$

$$= \int_S E \varepsilon_x ds$$

$$= \int_S E (\varepsilon_{0x} + z \phi) ds$$

$$= \int_S E \varepsilon_{0x} ds + \int_S E \cdot z \cdot \phi \cdot ds$$

$$= \varepsilon_{0x} \int_S E ds + \phi \int_S E \cdot z \cdot ds$$

On pose : $\overline{EA} = \int_S E \cdot ds$ = rigidité à l'effort normal (de membrane)

$$\overline{ES} = \int_S E \cdot z \cdot ds = \text{rigidité du au couplage effort normal + flexion}$$

L'expression de l'effort normal s'écrit comme suit :

$$N = \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \cdot \phi$$

III-14

De même, le moment fléchissant dans la section transversale d'abscisse x, par rapport à l'axe de référence est :

$$M = \int_S \sigma_x \cdot z ds$$

$$= \int_S E \varepsilon_x \cdot z ds$$

$$= \int_S E (\varepsilon_{0x} + z \phi) z ds$$

$$= \varepsilon_{0x} \int_s E z ds + \varnothing \int_s E \cdot z^2 \cdot ds$$

On pose : $\overline{EI} = \int_s E \cdot z^2 \cdot ds =$ rigidité à la flexion

$$\overline{ES} = \int_s E \cdot z \cdot ds = \text{rigidité du au couplage effort normal + flexion}$$

L'expression de moment fléchissant devient :

$$M = \overline{ES} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{EI} \cdot \varnothing \tag{III-15}$$

Ainsi, dans la section transversale d'abscisse x, la relation entre les efforts et les déformations est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varnothing \end{Bmatrix} \tag{III-16}$$

En tenant compte des relations (III-14) et (III-5), la relation (III-12) peut se réécrire sous la forme :

$$\int_0^l [\delta \hat{\varepsilon}_{0x} \cdot N + \delta \hat{\varnothing} \cdot M] dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \hat{\varnothing} \rangle \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \hat{\varnothing} \rangle \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varnothing \end{Bmatrix} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\forall \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \forall \delta \hat{\varnothing} \tag{III-18}$$

III.1.7. Modélisation par élément finis et calcul de la matrice de rigidité

Pour la discrétisation des déplacements, on utilise un élément finis à deux nœuds. Chaque nœud est caractérisé par deux déplacements et une rotation qui constituent les degrés de liberté de l'élément (soit 6 d.d.l). Ces déplacements sont représentés par un vecteur de dimension 6x1 de la manière suivante :

$$\{U\}' = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2\}$$

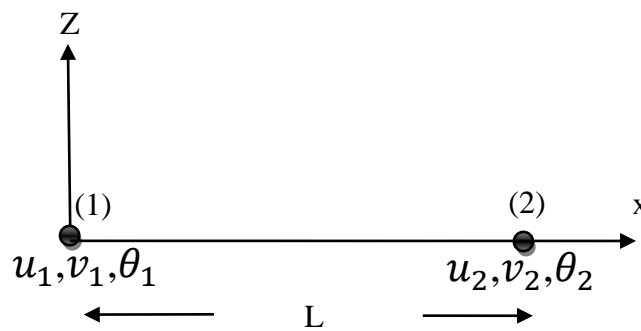


Figure III-3 : Élément fini à 2 nœuds et 6 d.d.l

Le déplacement longitudinal $u_0(x)$, au niveau de l'axe de référence, est approximé par des fonctions d'interpolations de type Lagrange de degré 1 dans la base polynomiale.

$$u_0(x) = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 \quad \text{III-19}$$

Avec u_1, u_2 les valeurs du déplacement longitudinal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

$$\text{Avec } \begin{cases} N_1 = (1 - \frac{x}{l}) \\ N_2 = \frac{x}{l} \end{cases}$$

On posant : $\xi = \frac{x}{l}$, l'expression du déplacement devient :

$$u_0(x) = (1 - \xi) \cdot u_1 + \xi \cdot u_2 \quad \text{III-20}$$

Pour le déplacement transversal $w(x)$, on utilise des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré 3 dans la base polynomiale :

$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 \theta_3 + N_4 \theta_4$$

Les fonctions d'interpolations sont données par :

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$N_2 = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$N_3 = l\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$$

$$N_4 = 1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3$$

Avec w_1, w_2 : Les valeurs de déplacement transversal respectivement aux nœuds 1 et 2

θ_1, θ_2 : Les valeurs de la rotation respectivement aux nœuds 1 et 2.

La déformation longitudinal au niveau de l'axe de référence de l'élément poutre est donnée par :

$$\varepsilon_{0X} = \frac{du_0(x)}{dx} = \frac{-1}{l} \cdot u_1 + \frac{1}{l} \cdot u_2$$

La rotation $\theta(x)$ est donnée par :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} = -(N_1'(x) \cdot w_1 + N_2'(x) \cdot w_2 + N_3'(x) \cdot \theta_1 + N_4'(x) \cdot \theta_2)$$

La courbure ϕ s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi(x) = -\frac{d^2w}{dx^2} = -(N_1''(x) \cdot w_1 + N_2''(x) \cdot w_2 + N_3''(x) \cdot \theta_1 + N_4''(x) \cdot \theta_2)$$

On déduit que :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0X} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) & 0 & \left(\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{III-23}$$

Ce qui s'écrit sous la forme matricielle : $\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} = [B] \cdot \{u_n\}$

III-24

A partir de l'expression (III-16) du P.T.V, on obtient :

$$\int_0^l \langle \delta \hat{u} \rangle [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{u_n\} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

III-25

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}) & (\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}) & 0 & (\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}) & (\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}) \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \text{III-26}$$

On déduit l'expression de la matrice de rigidité élémentaire $[k]_e$ [24] :

$$[k]_e = \int_0^l [B]^t \cdot [D] \cdot [B] dx$$

III-27

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire donne :

$$[k]_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ \text{symétrie} & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \text{III-28}$$

Remarque : Les composantes de la matrice de rigidité élémentaire $[k]_e$ sont évaluées en utilisant une intégration numérique.

III.2. Théorie de Timoshenko

La théorie de Timoshenko considère que les sections planes restent planes après la déformation (pas nécessairement perpendiculaires à l'axe moyen). Cette théorie introduit donc une liberté de rotation à la section, appelé angle de distorsion, qui permet de calculer la déformation de cisaillement.

III.2.1. Cinématique

Le champ des déformations s'écrit :

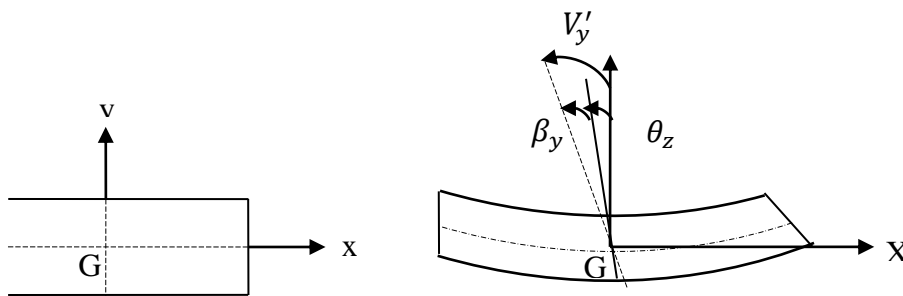


Figure III-4: Cinématique de la poutre, théorie de Timoshenko

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial U_x}{\partial x} = U'_x(x) - y\theta'_x(x)$$

III-29

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} = U'_y(x) - \theta_x(x) = \beta_y \neq 0$$

La théorie de Timoshenko permet par conséquent de calculer une déformation de cisaillement constante le long de la section. Ceci n'est évidemment pas conforme avec la distribution parabolique qu'on trouve selon la théorie d'élasticité et ne respecte pas les conditions aux limites. Pour améliorer la performance de l'approche, un coefficient de correction de cisaillement est donc introduit pour le calcul des contraintes.

III.2.2. Formulations d'éléments finis poutre Timoshenko

La formulation éléments finis adoptée ici est une formulation en déplacements. On considère une structure poutre linéique de longueur L discrétisée en n éléments finis poutres de longueur L_e composées (au minimum) de 2 nœuds i et j . Chaque nœud possède trois degrés de liberté : un déplacement axial U_x , un déplacement transversal V_y et une rotation θ_z . Les déplacements aux nœuds des éléments sont les inconnues du problème

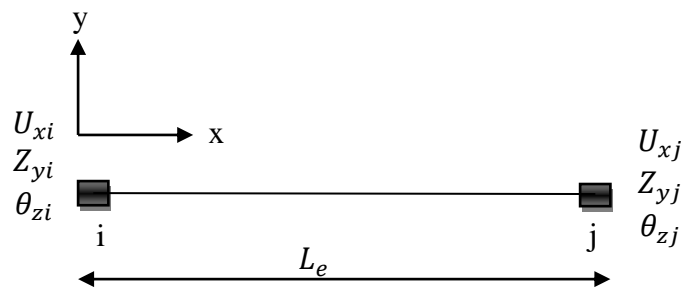


Figure III-5 Élément fini poutre à 2 nœuds

III.2.3. Principe des travaux virtuels (P.T.V) :

Les déplacements virtuels forment des variations des déplacements réels cinématiquement admissibles (i.e. nulles où les conditions aux limites sont appliquées). Dans la suite, les déplacements virtuels sont interpolés par le biais des mêmes fonctions de forme que les déplacements réels (méthode de Galerkin). Ainsi, les déformations virtuelles peuvent se

déduire simplement des déplacements virtuels aux nœuds. Le travail virtuel pour une structure poutre Timoshenko de longueur L s'écrit

$$\int_0^L \int_S (\delta \varepsilon_x + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) dS dx - w_{\text{externe}} = 0 \quad \text{III-30}$$

avec $\delta \varepsilon_x$ et $\delta \gamma_{xy}$ les déformations virtuelles calculées à partir des déplacements virtuels et w_{externe} le travail des actions mécaniques extérieures. on obtient :

$$\int_0^L \int_S (\delta(U'_x - y\theta'_z) \sigma_x + (\delta(U'_y - \theta_z) \tau_{xy}) dS dx \quad \text{III-31}$$

avec

δU_x le déplacement axial virtuel, δV_y le déplacement transversal virtuel et $\delta \theta_z$ la rotation virtuelle. Par ailleurs, les définitions suivantes sont adoptées pour les forces généralisées :

$$F_x = \int_S \sigma_x ds \quad F_y = \int_S \tau_{xy} ds \quad M_z = - \int_S y \sigma_x ds$$

Effort normal

Effort tranchant

Moment de flexion

on a :

$$\int_0^L \left(F_x \frac{d}{dx} \delta U_x + F_y \frac{d}{dx} \delta \beta_y + M_z \frac{d}{dx} \delta \theta_z \right) dx - w_{\text{external}} = 0 \quad \text{III-32}$$

avec β_y l'angle de distorsion moyen de la section

$$\beta_y = \frac{dV_y}{dx} - \theta_z = U'_y - \theta_z \quad \text{III-33}$$

III.2.4. Matrices de rigidité

La loi de comportement (élasticité linéaire) prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_f & 0 \\ 0 & kG_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{III-34}$$

Par ailleurs :

$$F_x = \int_S \sigma_x ds = \int_S E_f \varepsilon_x ds = \int_S E_f \left(\frac{dU_x}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} \right) ds = \int_S E_f ds U'_x - \int_S E_f y ds \theta'_z$$

$$F_y = \int_S \tau_{xy} ds = \int_S kG_f \gamma_{xy} ds = \int_S kG_f (\beta_y) ds = \int_S kG_f ds \beta_y \quad \text{III-35}$$

$$M_z = - \int_S y \sigma_x ds = - \int_S y E_f \varepsilon_x ds = - \int_S y E_f \left(\frac{dU_x}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} \right) ds = - \int_S E_f y ds U'_x + \int_S E_f y^2 ds \theta'_z$$

Par conséquent, le vecteur des forces généralisées F_s a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_s E_f ds & 0 & -\int_s E_f y ds \\ 0 & \int_s k G_f ds & 0 \\ -\int_s E_f y ds & 0 & \int_s E_f y^2 ds \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} = K_s \cdot \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} \quad \text{III-36}$$

avec U'_x , β_y , θ'_z les déformations généralisées et K_s la matrice représentant la rigidité de la section, indépendante de la position de l'axe neutre [Guedes et al., 1994]. Enfin, en considérant le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\int_0^l \delta [U'_x \ \beta_y \ \theta'_z] K_s [U'_x \ \beta_y \ \theta'_z]^T dx - w_{external} = 0 \quad \text{III-37}$$

Le vecteur des déplacements généralisés est donné par :

$$\begin{bmatrix} U_x \\ V_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u & N_2^u & N_3^u & N_4^u & N_5^u & N_6^u \\ N_1^v & N_2^v & N_3^v & N_4^v & N_5^v & N_6^v \\ N_1^\theta & N_2^\theta & N_3^\theta & N_4^\theta & N_5^\theta & N_6^\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad \text{III-38}$$

Où d_e est le vecteur contenant les déplacements nodaux de l'élément e et N la matrice des fonctions de forme dépendant de x (u pour les déplacements et θ pour les rotations). Les déformations généralisées sont calculées comme :

$$\begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_x \\ U'_y - \theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^\varepsilon & B_2^\varepsilon & B_3^\varepsilon & B_4^\varepsilon & B_5^\varepsilon & B_6^\varepsilon \\ B_1^\gamma & B_2^\gamma & B_3^\gamma & B_4^\gamma & B_5^\gamma & B_6^\gamma \\ B_1^K & B_2^K & B_3^K & B_4^K & B_5^K & B_6^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^\varepsilon \\ B^\gamma \\ B^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad \text{III-39}$$

avec B la matrice contenant les dérivées par rapport à x des fonctions de forme N (ε pour le axial, γ pour le cisaillement et K pour les rotations). L'introduction de (III-34) dans le

principe des travaux virtuels (**III-32**) donne les expressions de la matrice de rigidité K_e de l'élément e :

$$K_e = \int_0^{l_e} B^T K_s B dx \quad \text{III-40}$$

L'assemblage donne la matrice de rigidité totale de la structure poutre :

$$K_{tot} = A_{e=1}^n \int_0^{l_e} B^T K_s B dx \quad \text{III-41}$$

L'extension des équations précédentes en 3D est simple et suit les mêmes étapes [Guedes et al., 1994].

III.2.5. Vecteurs de forces

Comme mentionné précédemment, le vecteur des forces généralisées F_s de la section a la forme suivante :

$$F_s = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = K_s \cdot \int_0^{l_e} B^T K_s B dx \quad \text{III-42}$$

avec U'_x , β_y , θ'_z les déformations généralisées et K_s la matrice représentant la rigidité de la section (**III-31**).

Le vecteur des forces internes de l'élément est :

$$F_{int,e} = \int_0^{L_e} B^T F_s dx \quad \text{III-43}$$

Après assemblage on obtient le vecteur total des forces internes, pour toute la structure poutre

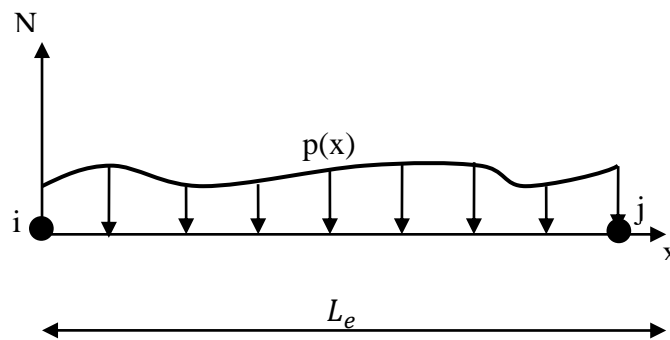


Figure III-6: Un élément fini poutre soumis à un chargement

$$F_{int,tot} = A_{e=1}^n \int_0^{L_e} B^T F_s dx \tag{III-44}$$

Pour un chargement externe transversal distribué $p(x)$, le vecteur des forces externes est évalué en utilisant également le principe des travaux virtuels.

Le travail externe virtuel (III-32) pour un seul élément e prend la forme suivante :

$$w_{external,e} = \int_0^{L_e} \delta V_y(x) p(x) dx = \int_0^{L_e} \delta (N^v d_e)^T p(x) dx = \delta d_e^t \int_0^{L_e} N^{vT} p(x) dx = \delta d_e^t F_{ext,e}$$

III-45

Avec $N^{vT} = [N_1^v \quad N_2^v \quad N_3^v N_4^v \quad N_5^v \quad N_6^v]$

Le vecteur des forces externes de l'élément devient :

$$f_{ext,e} = \int_0^{L_e} N^{vT} p(x) dx = \int_0^{L_e} [N_1^v \quad N_2^v \quad N_3^v N_4^v \quad N_5^v \quad N_6^v]^T p(x) dx \tag{III-46}$$

La matrice de rigidité analytique d'une poutre Timoshenko homogène élastique

III.3. Etude de la Précontrainte extérieure

Dans le cadre de cette étude, on se limite au cas de la précontrainte extérieure au béton qui est définie géométriquement par le passage d'un câble au droit de deux déviateurs successifs pour chaque tronçon.

L'effet de la précontrainte est introduit comme une force extérieure agissante sur la structure en déformation à la seule différence que cette force varie avec la configuration déformée. Exerçant sur la section de béton un effort de compression égal et opposé à l'effort de traction dans le câble, cet effort est appliqué au niveau des déviateurs suivant une droite reliant deux points successifs de passage du câble dans la structure (Figure I-7).

III.4. Glissement sur les déviateurs

Le comportement provoqué par le glissement des câbles n'est pas seulement non linéaire : il est aussi non réversible. Les démonstrations expérimentales ne manquent pas.

Ce phénomène est tellement complexe qu'il devient très intéressant de le cerner entre deux limites extrêmes qui sont :

- L'absence complète de frottement qui se traduit par l'égalisation des tensions d'un câble sur ses différents tronçons. Nous devons donc considérer la variation de la longueur totale du câble qui est la somme des variations de sa longueur sur chacun des tronçons ;
- Et le blocage total des glissements sur les déviateurs : ce peut être la situation normale si des dispositifs spéciaux sont installés pour empêcher tout glissement; dans ce cas, la variation de longueur du câble doit être considérée indépendamment pour chaque tronçon.

Il est aussi très intéressant de présenter une démonstration mathématique qui conduit à la résolution d'un système d'équilibre des différents tronçons de câble dans le cas de glissement parfait, en guise d'introduction pour le cas d'un frottement quantifié (existence d'un coefficient de frottement en courbe ni nul ni infini).

III.5. Présentation générale de CASTEM 2000

INTRODUCTION

Castem est un logiciel de simulation numérique utilisé en mécanique des structures et développé par le département de modélisation des systèmes et structures (DMT), du commissariat français à l'Energie atomique et aux énergies alternatives(CEA).Il est mis à la disposition gracieusement pour l'enseignement et la recherche. Il utilise la méthode des éléments finis pour résoudre différents types de problèmes scientifiques.

III.5.1. Etapes de calcul sur Castem

Nous allons présenter dans ce paragraphe les étapes générales de calcul d'une structure de poutre par éléments finis.

1. Choix des options générales de calcul

OPTIDIME2ELEM SEG2 ;

Le calcul s'effectue en dimension deux avec des éléments finis de type segmentaire à deux nœuds.

2. Définition de la géométrie de la structure et du maillage

Notre poutre est modélisée par une ligne moyenne définie par deux extrémités. Il y a lieu de définir d'abord les coordonnées des points ensuite les segments.

Définition de points :

A1 = 0.0 0.0 ;

A2 = 7600.0 0.0 ;

Définition des segments :

POUTRE1 = DROI A1 A2 DINI 300 DFIN 300 ;

POUTRE1 est un objet maillage défini par les points **A1** et **A2** avec une densité d'éléments égale à 300 mm/élément (dimension moyenne des éléments).

3. Définition d'un modèle de structure

MODPOUT1 = MODE POUTRE1 MECANIQUE ELASTIQUE SECTION PLASTIQUE SECTION TIMO ;

Le modèle est une poutre de Timochenko en calcul non linéaire.

4. Définition des caractéristiques matérielles de la poutre

MATPOUT1 = MATE MODPOUT1 MODS MSBA MATS CSBA ;

MSBA est le modèle de section précédemment définis et **CSBA** contient toutes les caractéristiques matérielles d'une section en béton armé.

5. Définition des conditions aux limites

RGDT1 = BLOQ UX UY A1 ;

RGDT2 = BLOQ UY A2 ;

Les objets rigidités **RGDT1** et **RGDT2** représentent des appuis simple et double.

6. Définition de chargement

CHAR1 = FORC FY (-450000.0)q1;

CHAR2 = FORC FY (450000.0)q2;

Les objets **CHAR1** et **CHAR2** sont des objets chargement type force concentrée appliquée aux point **q1** et **q2** déjà définis sur le maillage **POUTRE1**.

Il faut en plus définir un programme de chargement pour un calcul incrémental.

CHARGE0 = CHAR MECA (CHAR1 ET CHAR2) MEVOL0 ;

CHARGE0 est un objet chargement avec programme d'évolution définie par **MEVOL0**.

7. Remplissage d'une table de donnée

TABINOUT = TABLE ;

TABINOUT. 'MODELE' = **MODPOUT1** ;

TABINOUT. 'CARACTERISTIQUES' = **MATPOUT1** ;

TABINOUT. 'BLOCAGES_MECANIQUES' = **RGDT1 ET RGDT2**

TABINOUT. 'CHARGEMENT' = **CHARGE0** ;

TABINOUT. 'TEMPS_CALCULES' = **TempsCalc** ;

TempsCalc est un objet contenant les pseudo-temps de calcul.

8. appel de la procédure de calcul non linéaire

PASAPAS TABINOUT ;

9. Sauvegarde des résultats

OPTI SAUVresultpoutre ;

SAUVTABINOUT ;

La commande **SAUV** sauvegarde les résultats du calcul dans un fichier dont le nom est **resultpoutre** en vue d'une visualisation par un autre fichier programme.

Par ailleurs, l'organigramme de la procédure PASAPAS est détaillé sur la figure **III-7**.

Le calcul de la précontrainte extérieure est réalisé par l'introduction d'une procédure appelé CHARMECA préexistante dans la procédure PASAPAS mais réécrite selon les données de la structure. La procédure PASAPAS appellera la procédure CHARMECA à

condition d'ajouter dans la table de données TABINOUT une ligne de commande suivante juste avant l'appel :

TABINOUT . PROCEDURE_CHARMECA = VRAI ;

Il y a lieu d'ajouter les données relatives à la précontrainte dans la table de données TABINOUT. Ce sont les excentricités, la section, les longueurs initiale et libre des câbles ainsi que les sections de déviateurs.

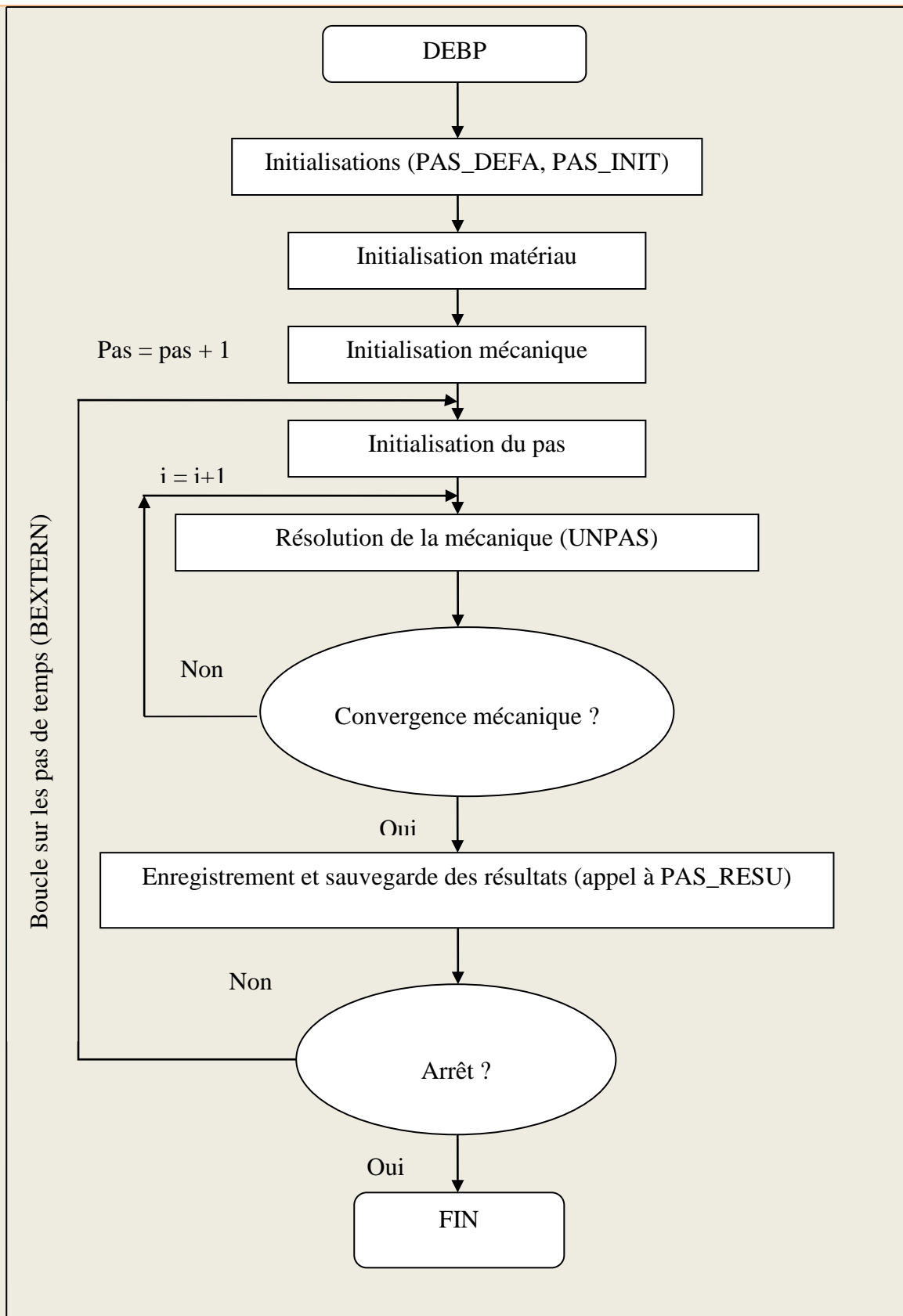


Figure III-7 : Organigramme de calcul adapté de la procédure PASAPAS de CASTEM

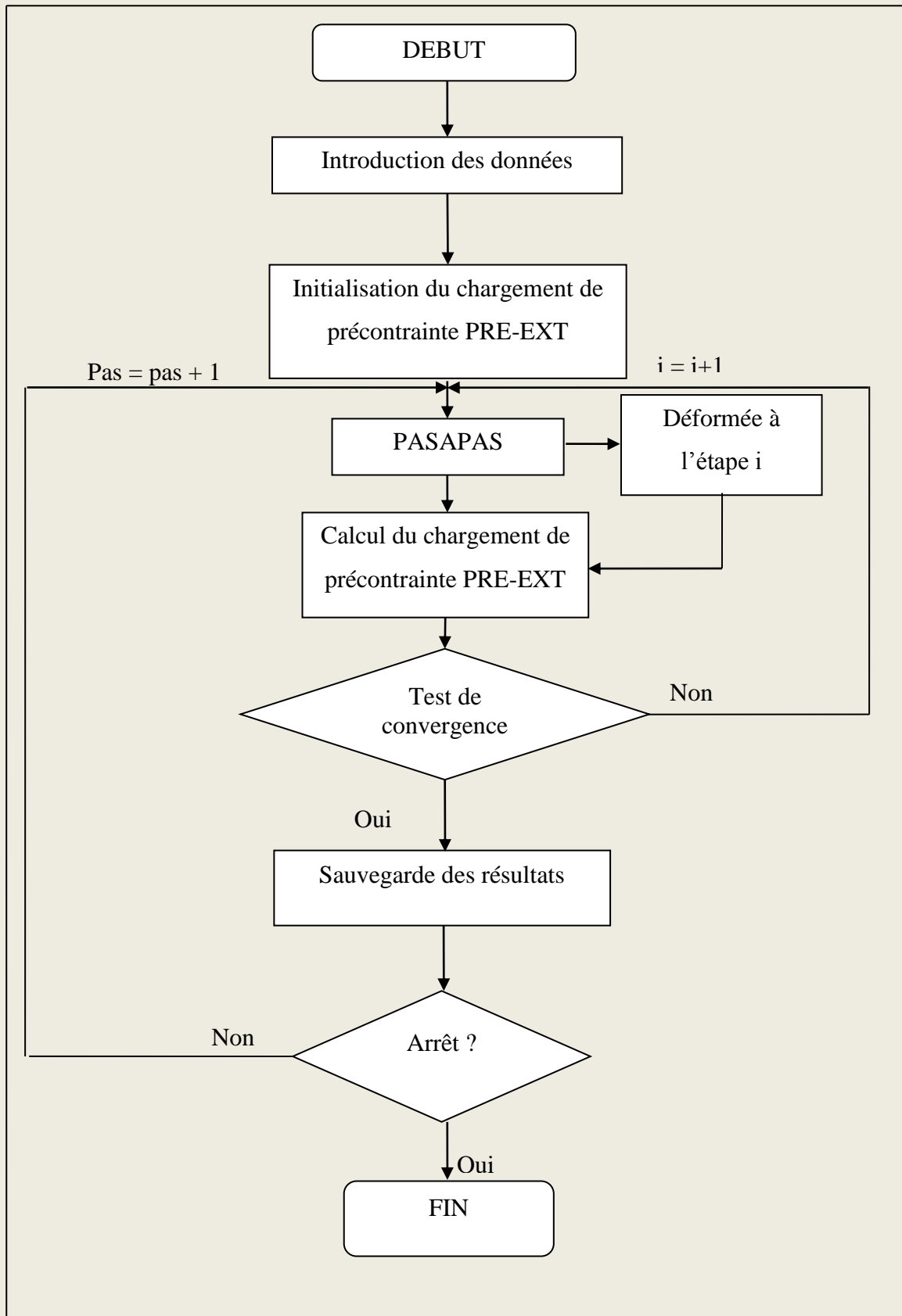


Figure III-8 : Organigramme de calcul avec précontrainte extérieure

III.6. Résultats et interprétation

III.6.1. Les poutres NM

Le calcul est porté sur des poutres isostatiques géométriquement symétriques par rapport à son centre. Précontraintes par des câbles extérieurs, elles ont fait l'objet d'un programme de recherche de l'université du Texas et de simulation numériques par la méthode incrémentale au moyen de la procédure PASAPAS de CASTEM.

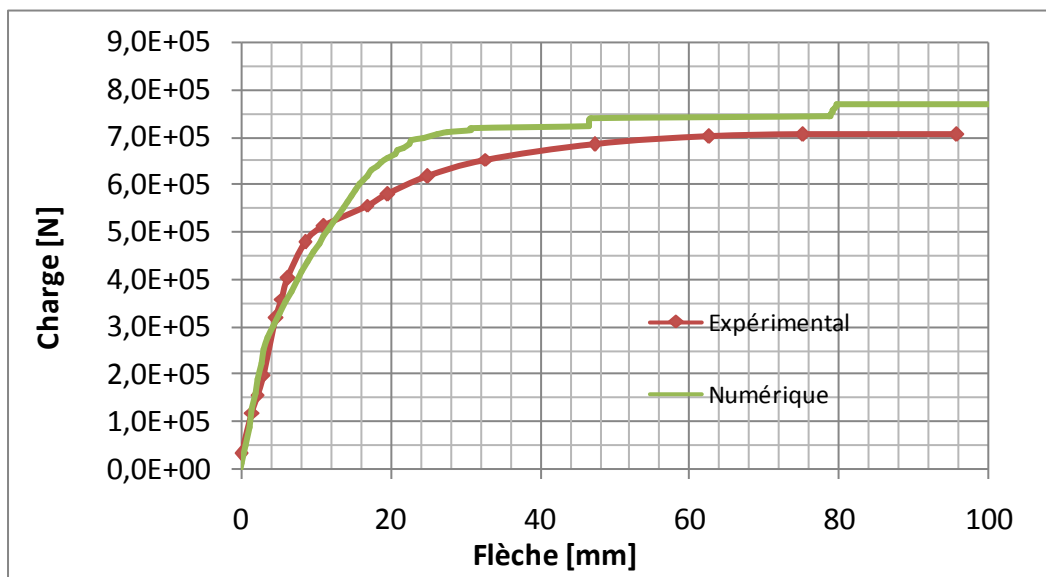


Figure III-9 : Courbe charge-flèche de la poutre (NM1 et NM5)

Les figures **III-9** à **III-12** montrent les courbes de comportement des poutres précontraintes par un câble extérieur avec absence de glissement (adhérence parfaite) au niveau des déviateurs. Les courbes sont corrigées par un état de référence qui est celui de la décompression de la fibre supérieure des sections médianes des poutres. Elles correspondent à un chargement de 31000N environ. Ceci nous oblige à faire la correction dans le sens des déplacements des courbes en calculant le déplacement correspondant.

Les phases élastiques des courbes numériques et expérimentales coïncident même si la traction du béton est négligée. Nous déduisons que celle-ci n'apparaissent pas encore grâce à l'existence de la précontrainte. Au fur et à mesure que le chargement augmente, la structure entre dans la phase post-élastique et les courbes commencent à s'éloigner. Un palier de résistance apparaît mais décalé par rapport à celui correspondant aux essais.

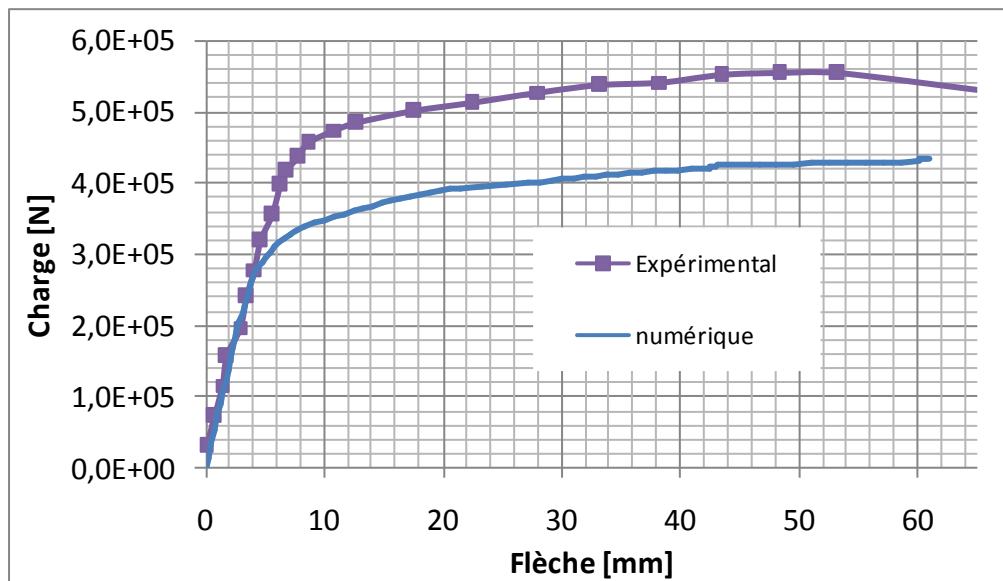


Figure III-80: Courbe charge-flèche de la poutre (NM6, NM7 et NM9)

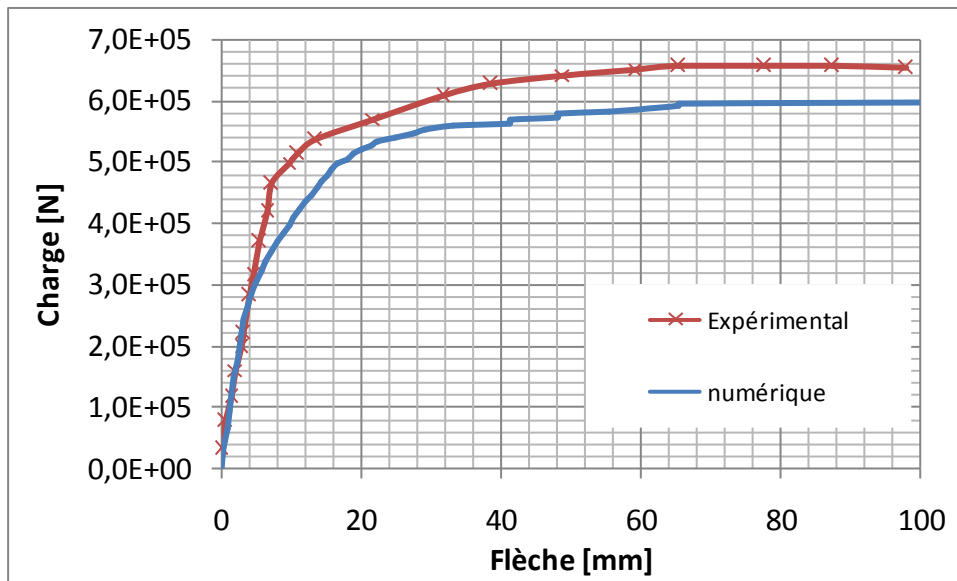


Figure III-11 : Courbe charge-flèche de la poutre(NM8 et NM11)

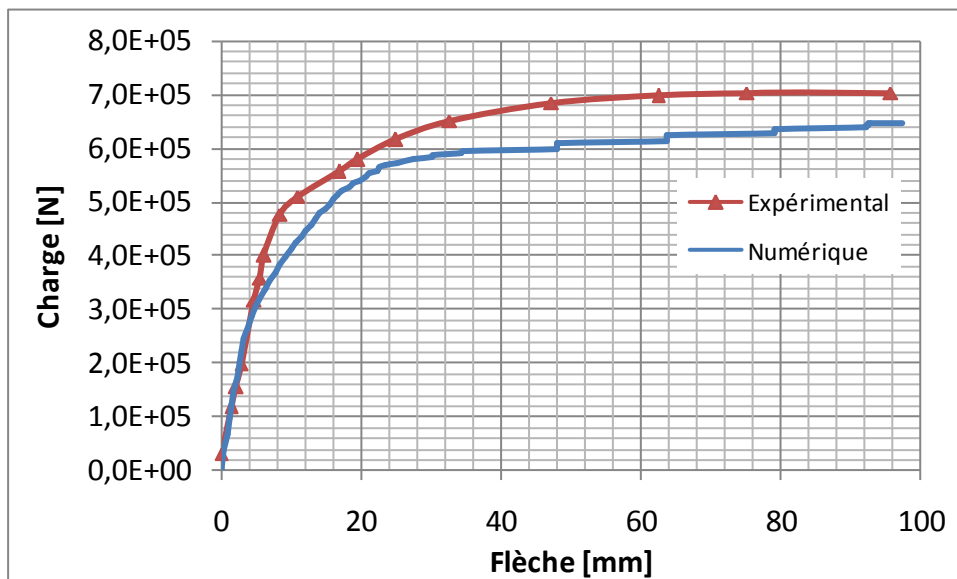


Figure III-12 : Courbe charge-flèche de la poutre (NM10)

En général, les calculs numériques sous estiment la résistance ultime d'environ 10% par rapport à sa valeur expérimentale. Ceci s'explique aisément par le modèle BAEL choisi pour le comportement des sections de béton armé qui néglige la traction. La résistance ultime

de la section **NM6**, **NM7** et **NM9** est très faible à cause de l'apparition précoce de la traction engendrée par le faible taux de ferrailage (aciers passifs).

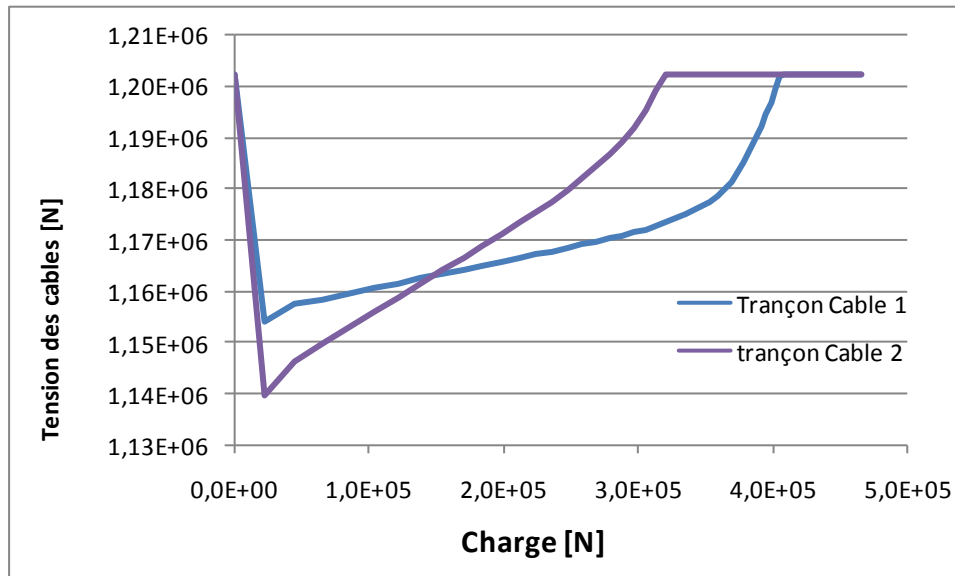


Figure III-13 : Courbe tension des câbles-charge

La **Figure III-13** montre Courbe tension des câbles-charge. La tension initiale dans les tronçons de câble est égale à **1.21MN** juste avant le recul d'ancrage. Après recul d'ancrage, celle-ci chute à environ **1.15MN**. Ensuite on monte avec le chargement jusqu'à la limite élastique. après elle reste constante dans le domaine plastique.

III.6.2. Les poutres Hyperstatiques

Les poutres que nous avons choisies pour la simulation numérique sont celles décrites au chapitre I sur les poutres hyperstatiques (les essais américains). Les câbles de précontrainte possèdent trois tracés différents. Nous avons concentré la section des câbles sur un tracé moyen des câbles identique à celui du milieu.

Pour permettre l'étude et l'analyse du comportement d'une poutre continu à précontrainte extérieure, on a développé un programme informatique (poutre_hyperstatique)

rédigé en Castem. On se propose donc dans ce qui suit, de valider les méthodes de calcul présentées précédemment. Nous présentons dans ce chapitre l'exemple de validation sur une poutre continu (essais de l'université du Texas à Austin), ces essais sont bien détaillés en chapitre I. Les résultats du calcul comparé à ceux expérimentaux sont donnés en (Figure III-14) sous forme de l'évaluation de la flèche au niveau de la charge appliquée.

On constate que le comportement de la poutre étudiée est bien approché par le calcul dans cette présente étude. La simulation montre une bonne estimation en termes de flèche et de charge.

Cependant, la simulation numérique a franchi la phase élastique pour pénétrer dans la phase de ductilité. Le processus numérique a divergé bien avant la rupture.

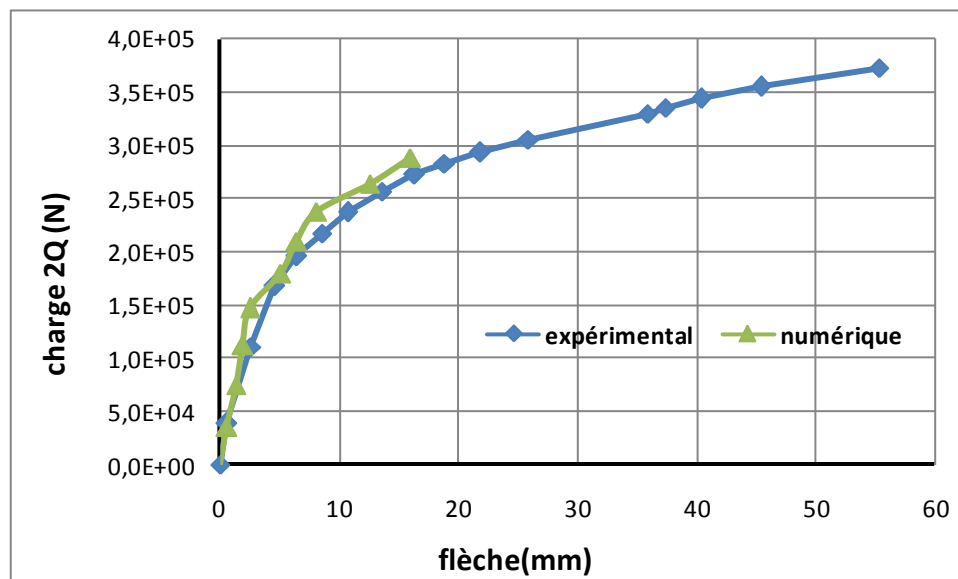


Figure III-14 : Poutre hyperstatique avec précontrainte extérieure

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé une structure isostatique et une structure hyperstatique précontrainte par des câbles extérieurs. Les non-linéarités mécaniques et géométriques ont été prises en compte. Nous avons pris le choix de fixer les câbles sur les déviateurs (adhérence parfaite ou glissement nul).

Le calcul permet de conclure que le modèle estime bien le comportement de ce type de poutres.

Conclusion générale

L'étude de comportement non-linéaire des structures à précontrainte extérieure nécessite la prise en considération des effets non-linéaire dus au comportement des matériaux, aux effets de second ordre et au glissement des câbles sur les déviateurs. Ces effets influent sur le comportement de la structure et sur le niveau de surtension des câbles de précontrainte.

Dans le cadre de ce travail on s'est intéressé à la modélisation et à la simulation du comportement jusqu'à rupture des poutres (isostatiques et hyperstatiques) à précontrainte extérieure en intégrant les phénomènes cités précédemment liés à cette technique. Dont la méthode de calcul est basée sur une procédure de résolution itérative.

Le calcul des poutres NM à câblage extérieur avec un ferrailage passif varié et des formes de section transversales complexes permet de conclure que le modèle estime correctement le comportement des poutres précontraintes par des câbles extérieur au béton dans le domaine élastique.

Le calcul de la poutre hyperstatique à câblage extérieur testé à l'université de Texas à Austin permet de noter que le modèle estime bien le comportement de ce type de poutre aussi bien dans le domaine élastique que dans le domaine post-élastique.

Les développements futurs de cette étude numérique, consistent à améliorer d'avantage le programme de calcul, on peut citer les orientations suivantes : Introduction des déformations dues à l'effort tranchant, prise en compte de l'adhérence béton-acier et prise en considération de l'ouverture des joints dans le cas des poutres à voussoirs préfabriqués ainsi que le glissement des câbles dans les déviateurs.

Les résultats obtenus au cours de cette étude nous encouragent à la poursuite dans cette même voie de façon à comprendre encore mieux les mécanismes du comportement d'une poutre fléchie à précontrainte mixte et les moyens de le modéliser.