REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MASTER 2
en
MATHEMATIQUES

Option :
Méthodes et modèles de décision

Thème :

Equilibre Cournot-Nash et application

Présenté par

BEDOUHENE Abderahmane
SAADA Smaïl dit Massinissa

Dirigé par : Mme Achemine
Examiné par :
....
....

Remerciements

Nous tenons à adresser nos sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants, et toutes personnes qui ont par leurs paroles, écrits, conseils et critiques, guidé notre travail.
Nous remercions sur-tout notre professeur Madame Achemine de nous avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.
Nous remercions également tous ceux qui se sont montrés comprehensifs à l'égard de notre objectif.

Table des matières

Introduction **3**

1 Concepts de base de la théorie des jeux. **5**

1.1 Introduction : 5
1.2 La théorie des jeux 5
1.2.1 Qu'est ce qu'un jeu ? 5
1.2.2 Le conflit 7
1.2.3 Autres définitions utiles : 7
1.3 Classification des jeux 7
1.3.1 Selon le comportement : 7
1.3.2 Selon l'information : 8
1.3.3 Autres classes de jeux : 9
1.4 Présentation d'un jeu non coopératif 9
1.4.1 Jeu sous forme normale 10
1.4.2 Jeu sous forme extensive 11
1.5 Concept de solution dans les jeux non coopératifs sous forme normale . . . 12
1.5.1 Procédé EISSD 12
1.5.2 Optimum de Pareto 15
1.5.3 Conclusion 16

2 Equilibre de Cournot-Nash. **17**

2.1 Introduction 17
2.2 Equilibre de Nash 17
2.3 Correspondance des meilleurs réponses 18
2.4 Existence de l'équilibre de Nash 19
2.5 Insuffisances de l'équilibre de Nash 20
2.6 Duopole de Cournot 21

3 Equilibre de Cournot-Nash : Avec contraintes de capacité. 26

3.1 Introduction : 26

3.2 La guerre des Chardonnay : 26

3.3 Le modèle : 27

3.4 Equilibre sans contraintes 28

3.5 Equilibre avec contraintes : Résolution 30

3.5.1 Meilleure réponse et projection 30

3.5.2 Relation entre équilibre contraint et équilibre non contraint 31

3.5.3 Problème équivalent 32

3.5.4 Calcul de l'équilibre contraint 34

3.5.5 Application 36

Conclusion 38

Annexe 39

Bibliographie 42

Introduction

Le propos de la théorie des jeux est l'étude de toute situation présentant des caractéristiques semblables à celles des jeux de société, c'est-à-dire des situations où des individus font des choix en interaction, dans un cadre stipulé à l'avance. On peut dire aussi que la théorie des jeux est la théorie de la prise de décision par des individus dans une situation conflictuelle. Cette théorie issue de l'étude des jeux de société tels que le Poker, les échecs et le Bridge a acquis son fondement le plus solide en 1944 quand J.V. Neuman et Oscar morgen Stern ont publié l'ouvrage "La théorie des jeux et le comportement économique".

L'équilibre de Nash est le concept de solution le plus connu et le plus utilisé dans les applications de la théorie des jeux. Cette notion d'équilibre a été introduite par John Forbes Nash (1949) dans sa thèse appelée "Jeux non coopératif". Cet équilibre est un état dans lequel aucun joueur ne souhaite changer sa stratégie en tenant compte les stratégiques choisies par les autres joueurs.

Le duopole de Cournot est un modèle économique qui doit son nom au mathématicien français Antoine-Augustin Cournot (1801-1877), ce modèle est utilisé pour décrire une structure industrielle dans laquelle les entreprises sont en concurrence par rapport à leurs volumes de production. Elles décident de ces volumes indépendamment les unes des autres, et ce à un même instant.

Le concept d'équilibre de Nash est particulièrement adéquat, dans ce contexte. L'équilibre de Cournot est précisément l'équilibre de Nash du duopole (on l'appelle aujourd'hui équilibre de Cournot-Nash).

Dans ce mémoire, l'étude se portera, sur le travail du laboratoire LORIA (Laboratoire d'Organisation Industrielle Agro-alimentaire) sur l'équilibre Cournot-Nash avec contraintes de capacité. En effet, celui-ci propose une formule simple et explicite de l'équilibre de Cournot-Nash lorsque des entreprises sont en concurrence par rapport à leurs volumes de production sont contraints en capacité. [2]

Notre document sera organisé comme suit. Dans le chapitre 1, nous passerons en revue les notions générales de la théorie des jeux. Le chapitre 2 est consacré à l'équilibre de Nash et le duopole de Cournot. Dans le troisième chapitre, nous exposons une partie du travail des chercheurs Christophe Caron et Jacques-Alexandre Laye, qui consiste en une application de l'équilibre Cournot-Nash sur des secteurs de productions concurrents contraints en capacité, notamment la guerre des Chardonnay.

Chapitre 1

Concepts de base de la théorie des jeux.

1.1 Introduction :

La théorie des jeux est un outil mathématique d'analyse des comportements humains développée principalement par **John Von Neumann** à partir de 1920 et qui a connu un essor considérable depuis la parution de son ouvrage " The Theory of Games and Economic Behavior " (qu'il a coédité avec Morgenstern).
La théorie des jeux se voit comme une éventuelle solution aux problèmes de formalisation que connaissent les sciences sociales, de ce fait, cet outil permet de décrire et d'analyser de nombreuses relations économiques et sociales sous forme de jeux stratégiques.

1.2 La théorie des jeux

1.2.1 Qu'est ce qu'un jeu ?

Définition 1.1. Un jeu décrit une situation où des individus rationnels appelés " joueurs " sont confrontés à choisir des actions " stratégies " dans un cadre défini à l'avance.
Ces choix conduisent à des issues aux-quelles sont associés des gains pour chaque joueur dépendant des choix des autres.

- **Ensemble des Joueurs :** Individus participants au jeu.
- **Ensemble de stratégies :** Ensemble d'actions des joueurs.
- **Stratégie :** Description de la façon dont un joueur entreprend une action.
- **Gain :** Résultat obtenu par chaque joueur à la fin du jeu.

Exemple 1.1. L'un des exemples les plus connu de la théorie des jeux est celui du dilemme du prisonnier.
En effet, ce jeu met en scène deux prisonniers détenus dans des cellules séparés, on propose à chacun des accusés le marché suivant :
"Tu as le choix entre dénoncer ton complice ou non. Si tu le dénonces et qu'il te dénonce aussi, vous aurez une remise de peine d'un an (1 an) tous les deux. Si tu le dénonces et que ton complice te couvre tu auras une remise de peine de cinq ans (5 ans), mais ton complice tirera le maximum. Mais si vous vous couvrez mutuellement vous aurez tous les deux une remise de peine de trois ans (3 ans)."
Il est clair que dans cette situation,si les deux prisonniers se couvrent ils s'en tirent globalement mieux que si l'un d'eux dénonce l'autre, dans ce cas, l'un d'eux sera tenté de dénoncer son complice. Craignant cela l'autre risque aussi de dénoncer son complice pour ne pas prendre la peine maximale et avoir donc un gain beaucoup moins important que le premier.

		Joueur B	
		C	D
Joueur A	C	(3,3)	(0,5)
	D	(5,0)	(1,1)

Exemple 1.2. Un autre exemple connu : La bataille des sexes. Les deux joueurs sont représentés par un homme et une femme ayant chacun deux possibilités :
Acheter un billet pour l'opéra ou bien un billet pour un match de football.
Ces possibilités sont notées respectivement par O et F.
Les deux joueures préfèrent avant tout être ensemble, mais la femme préfère l'opéra et l'homme le football.
Comme dans l'exemple précédent la situation peut être représentée par un tableau, la

femme choisit une colonne et l'homme choisit une ligne.

		Femme	
		O	F
Homme	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

1.2.2 Le conflit

Un conflit est une situation qui met en jeu différents individus, elle est caractérisée par trois conditions :

1. Tout joueur peut, par sa propre décision, influer sur l'issue du jeu. (Donc il est primordial de savoir qui participe au jeu).
2. Aucun joueur ne peut décider seul du résultat d'un jeu.
3. Les joueurs sont motivés par différentes issues du jeu.

Dans l'exemple précédent, on remarque clairement qu'il résume une situation de conflit.

1.2.3 Autres définitions utiles :

Coalition : Groupe de joueurs collaborant en vue d'intérêts communs.
Si en plus, dans un jeu, chaque individu décide de rejoindre une coalition, on obtient alors une partition de l'ensemble des joueurs qu'on appelle : **structure de coalition**.

Accord contraignant : Un accord entre des joueurs est dit contraignant s'il existe un organe de contrôle qui assure son application.

Paiements latéraux : Echange d'utilité entre les joueurs (modifie les paiements fixés).

1.3 Classification des jeux

1.3.1 Selon le comportement :

Si on classe un jeu selon le comportement des joueurs, On peut en distinguer deux types :

- Jeux coopératifs.
- Jeux non coopératifs.

a- Jeux coopératifs : Un jeu est dit coopératif si les individus qui y participent ont la possibilité de communiquer et de former des **coalitions** par un **accord contraignant**. Les jeux coopératifs se divisent en deux catégories :

– jeux avec paiements latéraux.
– jeux sans paiements latéraux.

b- Jeux non coopératifs : Un jeu non coopératif si les joueurs ne peuvent pas former de coalitions. Il n'est pas exclue que ces joueurs puissent communiquer entre eux à condition de ne jamais contracter d'accord contraignant.

1.3.2 Selon l'information :

On distingue deux types de jeux selon l'information dont disposent les joueurs :

- Jeux à information complète.
- jeux à information incomplète.

a- Jeux à information complète :
On dit d'un jeu qu'il est à information complète si chaque joueur connait l'ensemble de ses stratégies et des gains ainsi que celui des autres joueurs. On distingue aussi deux types de jeux à information complète :

- Jeux à information parfaite.
- Jeux à information imparfaite.

Jeux à information parfaite :

Un jeu est à information parfaite si au moment de choisir son action, chaque joueur a une connaissance totale (donc parfaite) de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs.

Jeux à information imparfaite :
Quand un joueur ne connait pas, à un moment donné du jeu, certaines des actions précédentes des autres joueurs, alors le jeu est qualifié d'un jeu à information imparfaite.

b- Jeux à information incomplète :
On dit qu'un jeu est à information incomplète quand les joueurs manquent d'informations sur les stratégies et fonctions gain des autres joueurs.

1.3.3 Autres classes de jeux :

Définition 1.2. Jeux à n- personnes : Du fait que les jeux à deux personnes regroupent la plus grande partie des jeux courants, ils ont fait l'objet d'analyse poussée par les théoriciens. Mais lorsqu'on étend les résultats de ces recherches à des jeux à n-personnes, le problème se complique, et par conséquent, il devient complexe de savoir comment prévoir les interactions possibles entre les joueurs.

Définition 1.3. Jeux à somme nulle : Un jeu à deux personnes est dit à somme nulle, si le montant total des gains à la fin du jeu est nul, la perte d'un joueur est équivalente au gain de l'autre.
Il a été démontré en 1940 (par **Von Neumann** et **Oscar-Morgenstern**) que tout jeu à somme nulle pour n-personnes n'était qu'une forme généralisée de jeux à somme nulle pour deux personnes, et que celui-ci pouvait toujours se ramener à un jeu à (n+1) personnes.
Par conséquent, les jeux à somme nulle à deux personnes constituent la plus grande partie de la théorie mathématique des jeux.

1.4 Présentation d'un jeu non coopératif

Il existe deux formes de jeux non coopératifs :

1. Forme normale (stratégique).
2. Forme extensive (étendue).

1.4.1 Jeu sous forme normale

Définition 1.4.1. En général, un jeu sous forme normale est représenté par le modèle :

$$\langle N, X, f \rangle$$

où

1. $N = \{1, 2, 3, ..., n\}$ l'ensemble des n joueurs.
2. $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n, \quad X_i$: l'ensemble des stratégies des joueurs $i \in N$.
3. $f = (f_1, ..., f_n), \quad f_i : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to \mathbb{R}$ la fonction gain du joueur $i \in \mathbb{N}$.

Règles du jeu :

– Les stratégies des joueurs sont choisies de façon simultanée.
– Le jeu est à information parfaite.
– Le but de chaque joueur est de maximiser son gain.
– Tous les joueurs sont rationnels.

Remarques

– Un jeu est fini si X_i est fini $\forall i \in \mathbb{N}$.
– La forme normale d'un jeu peut être utilisée dans le cas où les joueurs jouent simultanément.
– Dans le cas des jeux finis à deux personnes, la représentation se fait par un tableau ou une matrice donnant les gains des joueurs pour chacune des issues possibles et où les lignes et les colonnes correspondent aux stratégies.

On remarque que l'exemple cité plus haut (Le dilemme du prisonnier) est un jeu sous forme normale.

– L'ensemble des joueurs est $N = \{1, 2\}$.
– l'ensemble des stratégies pour les deux joueurs est $X_1 = X_2 = \{C, D\}$.
– La fonction gain du joueur 1 est :

$f(C, C) = 3$

$f(C, D) = 0$

$f(D, C) = 5$

$f(D, D) = 1$

– La fonction gain du joueur 2 est :

$f(C, C) = 3$

$f(C, D) = 5$

$f(D, C) = 0$

$f(D, D) = 1$

1.4.2 Jeu sous forme extensive

Un jeu sous forme extensive se déroule en plusieurs coups, il dispose également d'une liste de règles qui déterminent le comportement de chaque joueur et les gains associés à chaque issue possible.
La représentation d'un tel jeu se fait par l'arbre de Kuhn.

Définition 1.4.2. Soit (X, x_0, f) un arbre de Kuhn tel que :

X est un ensemble dénombrable.

$x_0 \in X$.

f est une application, $f : X \setminus \{x_0\} \to X$ tel que :

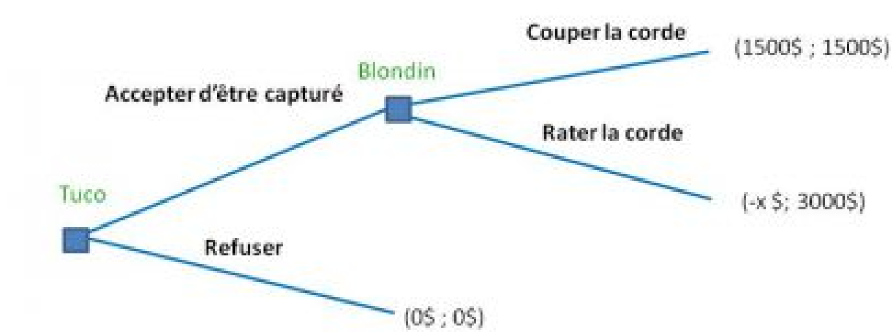
$$\forall x \in X \setminus \{x_0\}, \exists n \geqslant 1, f^n(x) = x_0, f^n = f \circ f \circ ... \circ f.$$

X désigne l'ensemble des sommets, x_0 est la racine de l'arbre et $f(x)$ est l'unique prédecesseur immédiat du sommet x.

$T = \{x \in X/f(y) \neq x, \ \forall y \in X\}$ désigne l'ensemble des sommets qui ne sont les successeurs d'aucun autre sommets.

On note l'application $r : T \to R$, où R est l'ensemble des résultats possibles.

Exemples 1.4.1. (Le jeu du bon et du truand) Au début du film, l'ignoble Tuco (le « truand »), incarné magistralement par Eli Wallach conclut un pacte avec Blondin (le « bon »), interprété par Clint Eastwood. Recherché dans la plupart des états de l'Ouest, les autorités promettent pour sa capture 3000dolars. Les deux complices mettent alors au point une arnaque dans laquelle Blondin « capture » Tuco, le remettant aux autorités locales, et empoche la récompense. Celui-ci est immanquablement condamné à être pendu haut et court, compte tenu de son passif judiciaire. Au moment fatidique où la corde enserre le coup de Tuco, Blondin, caché à quelques encablures de là, ajuste d'un tir de carabine la corde et la coupe aussi sûr que 2 et 2 font 4. Les deux partagent la somme, chacun empochant donc 1500dolars. Le partenariat dure un certain temps avant d'être unilatéralement dénoncé par Blondin, qui part sous les injures de Tuco avec les 3000dolars. Bien évidemment, c'est l'aspect stratégique du jeu qui est intéressante dans cette histoire... En effet, quelle est l'incitation de Blondin à couper la corde ? S'il la rate, il empoche les 3000dolars au lieu de 1500dolars et aucune rétorsion n'est à attendre puisque le pauvre Tuco serait expédié ad patres. Le jeu peut se résumer ainsi : Tuco accepte d'être capturé ou non, puis Blondin coupe la corde ou ne la coupe pas. Si on suppose que ce jeu séquentiel est répété une fois, il est improbable que le partenariat puisse exister. En effet, l'arbre du jeu sous sa forme extensive est le suivant :



1.5 Concept de solution dans les jeux non coopératifs sous forme normale

1.5.1 Procédé EISSD

Considérons un jeu sous forme normale $< N, X, f >$. Nous utiliserons les notations :

$X_{-i} = \prod_{j=i} X_j = X_1 \times X_2 \times ... \times X_{i-1} \times X_i \times ... \times X_n$

$x_{-i} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \in X_{-i}.$

$(x_i, x_{-i}) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n) \in X_{-i}.$

Définition 1.5.1. (Stratégies dominées)

Une stratégie $x_i \in X_i$ du joueur i est dite dominée si $\exists y_i$ telle que

$$f_i(x_i, x_{-i}) \leq f_i(y_i, x_{-i}) \forall x_{-i} \in X_{-i}.$$

On dit aussi y_i domine x_i.

Définition 1.5.2. Une stratégie $x_i \in X_i$ du joueur i est dite strictement dominée si $\forall y_i$ telle que

$$f_i(x_i, x_{-i}) < f_i(y_i, x_{-i}), \quad \forall x_{-i} \in X_{-i}.$$

Définition 1.5.3. (Stratégies dominantes)

- Une stratégie $x_i \in X_i$ du joueur i est dominante si $\exists y_i$ telle que

$$f_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}), \quad \forall x_{-i} \in X_{-i}.$$

- Une stratégie $x_i \in X_i$ du joueur i est dite strictement dominante si $\forall y_i$ telle que

$$f_i(x_i, x_{-i}) > f_i(y_i, x_{-i}), \quad \forall x_{-i} \in X_{-i}.$$

Procédé EISSD

En partant du principe que si dans un jeu sous forme normale une stratégie x_i est strictement dominée par une autre stratégie y_i, alors face à n'importe quelle stratégie jouée par les autres joueurs, le joueur i devrait jouer y_i pour maximiser son gain. Il est donc naturel de supposer qu'un joueur rationnel ne joue pas de stratégie dominée, ce qui l'amènera nécessairement à jouer une stratégie dominante (si elle existe) et ainsi s'assurer d'avoir le gain maximal.

Définition 1.5.4. Un joueur rationnel vise toujours à maximiser son gain.

Hypothèses :

- Un joueur rationnel ne joue jamais de stratégie dominée.
- Tous les joueurs sont rationnels.

PEISSD :

Le procédé des éliminations itérées des stratégies strictement dominées (PEISSD) sert à résoudre le problème d'un jeu sous forme normal en utilisant le principe des stratégies strictement dominées.
Pour tout $J =< N, x, f >$ et tout joueur $i \in N$.
On note : $SD^i(J)$.
$SD^i(J) = \{$ stratégie du joueur i strictement dominées dans le jeu $J\}$
Soit le procédé suivant :

- On démarre d'un jeu $J_0 =< N, X, f >$, $x = \prod x_i$.
- Pour tout $i \in N$, On pose :
  $X_i^1 = X_i \backslash SD^i(J_0)$ et $J_1 =< N, (X_i^1), f >$ le jeu où les fonctions de gain sont restreintes à $\prod_i X_i^1$.
- A l'itération $k \geq 1$: on pose $X_i^k = X_i^{k-1} \backslash SD^i(J_{k-1})$ et $J_k =< N, (X_i^k, f >$.
- Pour tout $i \in N$ on pose : $X_i^\infty = \bigcap\limits_k X_i^k$ et $J_\infty =< N, X_i^\infty, f >$.

Résultat :

- Un jeu peut être résolu par **EISSD** si le résultat obtenu en éliminant les stratégies strictement dominées est unique. C'est à dire :

  $X_i^\infty =$ singleton.

  $\forall i, f / \prod\limits_i X_i^\infty$ est constante.

Exemples 1.5.1. Soit le tableau suivant :

	X_1	X_2
Y_1	(1,1)	(7,6)
Y_2	(2,4)	(3,5)
Y_3	(1,3)	(2,3)

on remarque que $Y_2 > Y_3$ (Y_3 est strictement dominée par Y_4. Le tableau se réduit alors à :

	X_1	X_2
Y_1	(1,1)	(7,6)
Y_2	(2,4)	(3,5)

$X_2 > X_1$ ce qui nous donne le tableau suivant :

	X_2
Y_1	(7,6)
Y_2	(3,5)

$Y_1 > Y_2$, il nous reste alors le singleton suivant :

	X_2
Y_1	(7,6)

Le profit est unique, donc la solution selon ce procédé est (Y_1, X_2) et le gain des joueurs correspondant est $(7, 6)$.

1.5.2 Optimum de Pareto

La Pareto-optimalité est souvent utilisée dans l'optimisation multicritère. Un problème de décision où plusieurs objectifs sont pris en considération.

Notations

Soit $a, b \in \mathbb{R}^n$ tels que $a = (a_1, a_2, ..., a_n), b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, on considère les notations :

1. $a > b \Leftrightarrow a_i > b_i, \forall i \in I$;
2. $a \geq b \Leftrightarrow a_i \geq b_i, \forall i \in I$ et $\exists j \in I, a_j > b_j$.

Définition 1.4. – Si $a > b$ on dira que a domine strictement b.

- Si $a \geq b$ on dira que a domine b.
- Une solution $x^0 \in X$ est dite **Pareto-optimale** si $\forall x \in X$, il est impossible d'avoir la relation $f(x^0) \leq f(x)$.

Interprétation :

Cette définition signifie qu'à partir du point x^0 il n'extiste plus d'autre solution capable d'augmenter un critère sans en diminuer un autre. On dit alors que x_0 vérifie le principe de la rationnalité collective.

1.5.3 Conclusion

Nous avons résumé dans ce chapitre quelque notions basiques sur la théorie des jeux ainsi qu'un bref aperçu sur certains concepts de solution des problèmes modélisés grâce à cet outil. Celui-ci nous permettra de mieux comprendre ce qu'est l'équilibre de Nash et son utilité une fois appliqué au duopole de Cournot.

Chapitre 2

Equilibre de Cournot-Nash.

2.1 Introduction

Nous avons précédemment rappelé des concepts de solution pour certains modèles de jeux dont le procédé itératif d'élimination des stratégies strictement dominées (PEISSD). Le PEISSD étant très utile pour obtenir un jeu réduit, celui-ci ne suffit pas toujours pour obtenir une solution optimale à un jeu. En 1949, John Forbes Nash écrit " le théorème fondamental de la théorie des jeux à n-joueurs " dans sa thèse sur les jeux non-coopératifs. Dans cette dernière, il introduit sa célèbre notion d'équilibre connue sous le nom d' " équilibre de Nash " . Nous reprendrons dans ce chapitre cette notion d'équilibre de Nash dans un jeu sous forme normale en stratégies pures.

2.2 Equilibre de Nash

On considère le jeu sous forme normale suivant :

$$< N, X, f > \tag{2.1}$$

N, X et f sont donnés dans le chapitre 1.

Définition 2.1. (Equilibre de Nash)
Un profile de stratégies $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, ..., x_n^*) \in X$ est un équilibre de Nash en stratégies pures si et seulement si :

$$\forall i \in \mathbb{N} \ , \forall x_i \in X_i, \quad f_i(x_i, x_{-i}^*) \leq f_i(x^*).$$

Interpretation de l'équilibre de Nash : L'équilibre de Nash tel qu'il est défini ci-dessus reflète deux propriétés importantes.
1/ L'issue x^* de l'équilibre de Nash est stable dans le sens où : aucun joueur n'a intérêt à s'écarter seul de la stratégie appartenant à cet équilibre.
2/ L'issue x^* vérifie le principe de la rationalité individuelle. En d'autres termes l'équilibre de Nash assure à chaque joueur au moins son niveau de sécurité α_i (voir définition 2.2).

Définition 2.2. (Stratégie prudente)
Une solution $x_i^0 \in X_i$ est prudente pour le joueur i si :

$$\inf_{y_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i^0, y_{-i}) = \sup_{x_i \in X_i} \inf_{y_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, y_{-i}) = \alpha_i.$$

Définition 2.3. (Rationnalité individuelle)
Un profil de stratégies $x^0 \in X$ est individuellement rationnel si :

$$\forall i \in I, f_i(x^0) \geq \alpha_i.$$

Quelques propriétés de l'équilibre de Nash

1. L'équilibre de Nash est une issue individuellement rationnelle.
2. Aucun joueur n'a intérêt de dévier unilatéralement de cet équilibre.
3. Compte tenu des choix de ses adversaires, aucun joueur ne regrette ses choix à l'équilibre.

2.3 Correspondance des meilleurs réponses

Etant donné l'absence de stratégie dominante ou dominée dans la plus part des jeux simultanés (du moins dans leurs jeux réduits), on passe alors à l'analyse de la meilleure réponse pour chaque joueur.

Définition 2.3.1. Pour chaque joueur $i \in N$ et pour chaque profit d'actions des autres joueurs x_{-i} on dit que x_i est la meilleur réponse du joueur i contre x_{-i} si :

$$f_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_i), \forall y_i \in X_i.$$

Autrement dit : $\left(f_i(x_i, x_{-i}) = \max\limits_{y_i \in X_i} f_i(y_i, x_{-i}) \right)$.

Définition 2.3.2. (Correspondance des meilleurs réponses)
On appelle **Correspondance des meilleurs réponses** du joueur i l'application :

$$C_i\,;\, X_{-i} \to 2^{X_i} = P(X_i)$$

$$x_{-i} \to C_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i / f_i(x_i, x_{-i}) = \max_{y_i \in X_i} f_i(y_i, x_{-i})\}$$

Définition 2.3.3. On rappelle qu'une application multivoque de X dans Y, est une application $C(.)$ qui associe à un élément x dans X un sous ensemble de Y.

Remarque 2.3.1. La correspondance des meilleures réponses est une application multivoque.

2.4 Existence de l'équilibre de Nash

Théorème. *(Théorème de Nash)*
On suppose que dans le jeu (2.1) *les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *X_i, $i = \overline{1, n}$, sont non vides, convexes et compacts ;*
2. *Les fonctions $x \mapsto f_i(x)$ sont continues sur X ;*
3. *Les fonctions $x_i \mapsto f_i(x_i, x_{-i})$ sont quasi concaves, $\forall x_{-i} \in X_{-i}$ $i \in I$.*

Alors le jeu (2.1) *admet au moins un équilibre de Nash.*

Il existe plusieurs approches pour montrer l'existence de l'équilibre de Nash. Dans ce qui suit, nous allons brièvement introduire une de ces approches, celle-ci est basée sur le théorème du point fixe de ***Kakutani*** *pour les applications multivoques.*

Théorème 2.1. *(Kakutani) Si X est un ensemble compact, convexe et non vide et C est une application multivoque de X à valeurs dans 2^X et telle que pour tout x dans X, $C(x)$ non vide, compact et convexe, alors $C(.)$ admet un point fixe x^0 dans X i.e. $x^0 \in C(x^0)$.*
On considère l'application :

$$\begin{aligned} C : X &\to X \\ x &\to \prod_{i=i}^{n} C_i(x_{-i}), \end{aligned}$$

où $C_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i / \ f_i(x_i, x_{-i}) = \sup_{y_i \in X_i} f_i(y_i, x_{-i})\}$.

Proposition 2.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. x^0 *est un point fixe pour* C.
2. x^0 *est un équilibre de Nash pour le jeu* (2.1).

Preuve. (Preuve du théorème de Nash) Sous les conditions du Théorème 2.1, on a toutes les conditions du théorème de Kakutani qui sont vérifiées. Donc l'application C admet un point fixe x^*. Par la Proposition 2.1, x^* est un équilibre de Nash.

2.5 Insuffisances de l'équilibre de Nash

Remarque 2.5.1. Dans ce qui suit nous allons représenter dans la matrice initiale la meilleure réponse du joueur 1 par un carré (□) et celle du joueur 2 par une croix (×). L'équilibre de Nash correspond à l'intersection des deux figures (⊠).

1- L'équilibre de Nash n'existe pas toujours :

Exemples 2.5.1. Pile ou face

Deux individus lancent une pièce de monnaie simultanément, puis à la réception ils regardent tous les deux le résultat. Si celui-ci est identique (pile×pile ou face×face) le joueur 1 donne sa pièce au joueur 2, dans le cas contraire (pile×face ou face×pile) c'est le joueur 2 qui donne sa pièce au joueur 1.

Cette situation peut être modélisée sous forme d'un jeu à deux joueurs (les deux individus), à somme nulle (le gain d'un joueur est égale à la perte de l'autre).

		Joueur 2	
		Pile	Face
Joueur 1	Pile	(1,-1)	(-1,1)
	Face	(-1,1)	(1,-1)

→

		Joueur 2	
		Pile	Face
Joueur 1	Pile	□	×
	Face	×	□

2- L'équilibre de Nash n'est pas nécessairement unique

Exemples 2.5.2. La bataille des sexes

Nous avons introduit dans le chapitre 1 l'exemple sur la bataille des sexes et nous avons obtenu le tableau suivant :

		Femme	
		O	F
Homme	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

$\rightarrow$

		Femme	
		O	F
Homme	O	$\boxtimes$	
	F		$\boxtimes$

On remarque dans le second tableau qu'il existe deux $\boxtimes$ donc deux équilibres de Nash.

3- L'équilibre de Nash n'est pas toujours Pareto optimal

Exemples 2.5.3. Le dilemme du prisonnier

		Joueur B	
		C	D
Joueur A	C	(3,3)	(0,5)
	D	(5,0)	(1,1)

$\rightarrow$

		Joueur B	
		C	D
Joueur A	C		$\square$
	D	$\times$	$\boxtimes$

(D,D) est l'équilibre de Nash de ce jeu mais il n'est pas Pareto optimal car il est dominé par (C,C).

2.6 Duopole de Cournot

La théorie des jeux non-coopératif s'intéresse à comment des individus rationnels interagissent les uns avec les autres dans le but d'atteindre un objectif de manière individuelle. Le premier théorème formel dans ce domaine a été prouvé par Antoine Cournot (1838). On notera plusieurs similitudes avec le théorème de John Nash un peu plus d'un siècle plus tard.

Définition 2.4. Duopole de Cournot

Un modèle de duopole est le jeu stratégique dans lequel :

- Les joueurs sont des entreprises.
- Les actions de chaque entreprise sont des productions possibles.
- Le gain de chaque entreprise est exprimé par ses profits.

Exemples 2.6.1. (Duopole de Cournot)

Nous verrons dans cet exemple deux entreprises rivalisant sur le même marché avec plusieurs stratégies qui cherchent un équilibre entre compétition parfaite et monopole sur le marché.

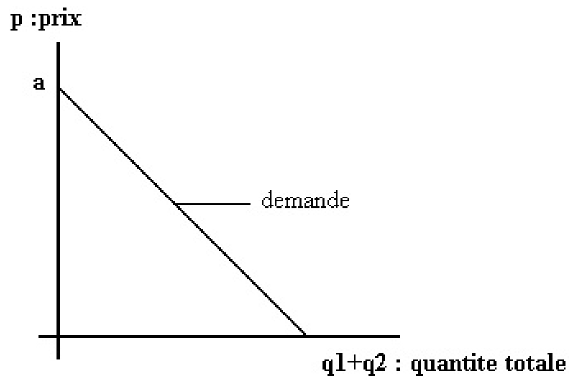
Dans ce jeu chaque entreprise choisit sa production indépendamment de sa concurrente et le marché détermine son prix de vente.

- Les joueurs : Deux entreprises (Nokia, Samsung).
- Les stratégies : Les quantités d'un même produit.
  q_1 : Quantité de Nokia.
  q_2 : Quantité de Samsung.
  $q = q_1 + q_2$: Quantité totale.
- Le coût de production : cq où c est la constante du coût marginale.
- Le prix : Soient a et b des constantes, le prix s'érit de la manière suivante. $p = a - b(q_1 + q_2)$.
- Les profits u_i, $i = \{1, 2\}$.

$$u_i(q_1, q_2) = pq_i - cq_i.$$

Le but des entreprises est de maximiser leurs profits.

L'équation $p = a - b(q_1 + q_2)$ nous montre que plus ces entreprises produisent, moins les produits coûtent.



Dans cet exemple, on calcule la meilleure réponse de Samsung par rapport aux stratégies de Nokia, et vice versa.
En remplaçant la fonction du prix p dans la fonction gain u_1 on obtient :

$$u_1(q_1, q_2) = aq_1 - 2bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1.$$

On dérive par rapport à q_1 et en identifiant à 0, on a

$$a - 4bq_1 - 2bq2 - c = 0.$$

La seconde dérivée donne le résultat $-4b < 0$, donc c'est bien un maximum.
Meilleures réponses :
On note q_1^* meilleure réponse pour Nokia et q_2^* meilleure réponse pour Samsung.

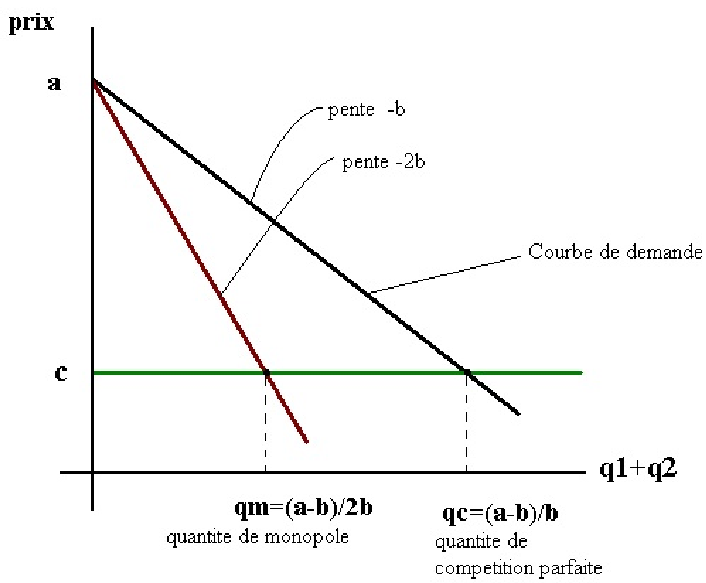
$$\begin{cases} q_1^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{q_2}{2} \\ q_2^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{q_1}{2} \end{cases}$$

Calcul des points critiques, pour Nokia :

$q_2 = 0 \Rightarrow MR_1(0) = q_1^* = \frac{(a-c)}{2b}$ et $q_1^* = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{(a-c)}{b}$.

Même chose pour Samsung :

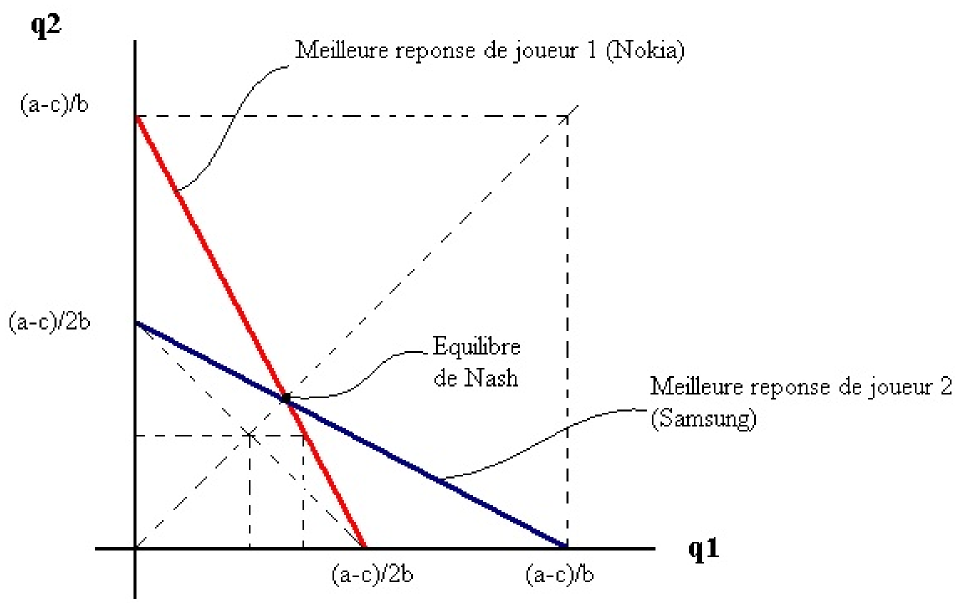
$q_1 = 0 \Rightarrow MR_2(0) = q_2^* = \frac{(a-c)}{2b}$ et $q_2^* = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{(a-c)}{b}$.



Pour trouver l'intersection des meilleures réponses, il suffit de résoudre le système suivant :

$q_1^* = \frac{(a-c)}{b} - \frac{q_2^*}{2}$ et $q_2^* = \frac{(a-c)}{b} - \frac{q_1^*}{2}$, on trouve $q_1^* = q_2^* = \frac{(a-c)}{3b}$.

On appelle cette quantité : La quantité de Cournot.



Les producteurs n'ayant pas la possibilité de passer un accord officiel sur la production, chacun d'eux essayera de produire plus pour maximiser son gain, et ainsi ils convergeront tous les deux à l'équilibre de Nash.

Chapitre 3

Equilibre de Cournot-Nash : Avec contraintes de capacité.

3.1 Introduction :

Ce chapitre sera consacré à l'étude de l'équilibre de Cournot-Nash dans un secteur de concurrence oligopolistique dans un contexte multi-marché lorsqu'on introduit des contraintes de capacité ainsi que du lien étroit qui existe entre équilibre contraint et la projection sur l'équilibre non contraint. On montre ensuite que la solution se résume à la recherche du zéro d'une fonction.

N.B. Ce chapitre repose sur l'article [2].

3.2 La guerre des Chardonnay :

Le secteur du vin est un environnement très pratique pour illustré et mettre en application la problématique citée si dessus, en effet celui-ci a motivé l'étude et l'introduction de contrainte de capacité dans un modèle de concurrence en quantité, dans la mesure où les surfaces plantés en vigne déterminent sur le long terme les capacités de production des régions viticoles.

On considère tout d'abord un producteur français (producteur 1) possédant un vignoble en Bourgogne et un producteur australien (producteur 2). Tous deux produisent un Chardonnay. On supposera que cette production est homogène. Du côté de la demande, on

suppose que le bien homogène proposé est destiné à deux marchés : britannique et nord-américain. On considère que ce sont les quantités que chacun des producteur décide d'allouer aux différents marchés, sous contrainte de capacité qui sont les variables stratégiques des producteurs. Ces marchés sont supposés étanches dans le sens qu'il n'échangent pas de Chardonnay dont la provision ne peut venir que des régions productrices.
Le prix du bien sur chaque marché est supposé décroître linéairement avec la quantité totale arrivant sur ce marché.

3.3 Le modèle :

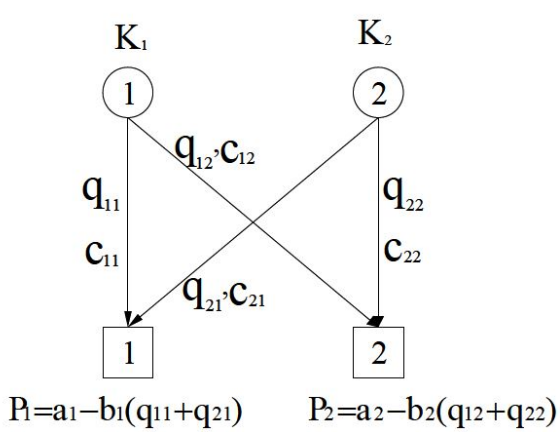
On considère deux producteurs (France, Australie) en concurrence et deux marchés (Etats Unis et Grande Bretagne). On note q_{ij} la quantité que le producteur $i \in \{1, 2\}$ destine au marché $j \in \{1, 2\}$. La quantité totale p_j sur chaque marché est une fonction linéaire décroissante de la quantité totale offerte $Q_j = q_{1j} + q_{2j}$:

$$\begin{cases} p_1 = a_1 - b_1(q_{11} + q_{21}) \\ p_2 = a_2 - b_2(q_{12} + q_{22}) \end{cases}$$

Chacun des deux producteurs peut fournir les deux marchés, sous contrainte de capacité, c'est à dire que :

$$\begin{cases} q_{11} + q_{12} \leq K_1 \\ q_{12} + q_{22} \leq K_2 \end{cases}$$

Le schéma suivant précise les flux de Chardonnay des régions productrices vers les marchés consommateurs :



Un producteur est contraint en capacité de production à hauteur de K_j, $j = \{1, 2\}$ et subit des coûts proportionnels aux quantités de Chardonnay vendu sur le marché (Britannique ou Américain).
La somme des coûts de production, transport et autres coûts pour le producteur i lorsqu'il dessert le marché j est noté c_{ij}. Celui-ci est toujours défini par la relation bilatérale existant entre pays producteur et marché consommateur (distance, politique douanière, etc...).
On considère que le seul objectif des producteurs est de maximiser leurs profits qui ont pour expression :

$$\begin{cases} \Pi_1(q_1) = [p_1 - c_{11}]q_{11} + [p_2 - c_{12}]q_{12} \\ \Pi_2(q_2) = [p_1 - c_{21}]q_{21} + [p_2 - c_{22}]q_{22} \end{cases}$$

Dans ces équations q_i est le vecteur (q_{i1}, q_{i2}) des quantités destinés aux deux marchés par le producteur i, et représente la seule variable stratégique du producteur.
Chaque producteur va donc maximiser son profit en tenant compte des contraintes de capacité ainsi que des décisions des quantités mises sur chaque marché par son concurrent.
Le programme de chaque producteur i s'écrit :

$$\begin{cases} \max\limits_{i} \Pi_i(q_i) \\ q_i \geq 0 \\ q_{i1} + q_{i2} \leq K_i \end{cases}$$

Quelque notations suplémentaires :

- $q_i^{MR}(q_j)$: Meilleure réponse du producteur i, à la stratégie de j.
- $\bar{q}_i$: Stratégie du producteur i lorsqu'il est contraint en capacité.
- q^* : Stratégie d'équilibre de Nash du producteur i non contraint en capacité.
- $\bar{q}_{ij}^*$: Quantité mise sur le marché j par le producteur i à l'équilibre de Nash avec contraintes de capacité.

Dans ce qui va suivre nous allons supposer que $b_1 = b_2 = 1$.

3.4 Equilibre sans contraintes

L'équilibre sans contrainte sert de point de départ pour résoudre l'équilibre sous contrainte de capacité. En remplaçant les prix par leurs valeurs dans l'expression des profits, on obtient une nouvelle expression plus détaillée :

$$\begin{cases} \Pi_1(q_1) = [a_1 - b_1(q_{11} + q_{21}) - c_{11}]q_{11} + [a_2 - b_2(q_{12} + q_{22}) - c_{12}]q_{12} = \Pi_{11} + \Pi_{12} \\ \Pi_2(q_2) = [a_1 - b_1(q_{11} + q_{21}) - c_{21}]q_{21} + [a_2 - b_2(q_{12} + q_{22}) - c_{22}]q_{22} = \Pi_{21} + \Pi_{22} \end{cases}$$

Où Π_{ij} est la part du profit Π_i qui provient de la quantité q_{ij}.

Les fonctions de profit sont continues et concaves, ce qui fait que la condition du premier ordre $\frac{d\Pi_{ij}}{dq_{ij}} = 0$ fournit la meilleur réponse sur chaque marché du producteur i, les quantité de concurrence étant fixées :

$$\begin{cases} q_{11}^{MR}(q_{21}) = (a_1 - b_1 q_{21} - c11)/2b_1 \\ q_{12}^{MR}(q_{22}) = (a_2 - b_2 q_{22} - c12)/2b_2 \\ q_{21}^{MR}(q_{11}) = (a_1 - b_1 q_{11} - c21)/2b_1 \\ q_{22}^{MR}(q_{12}) = (a_2 - b_2 q_{12} - c22)/2b_2 \end{cases}$$

L'équilibre de Nash s'obtient en déterminant le point fixe de la correspondance des meilleurs réponses du jeu : $C = C_1 \times C_2$, avec

$q_2 = (q_{21}, q_{22})$ et $q_1 = (q_{11}, q_{12})$

$C_1(q_{21}, q_{22}) = \left\{(q_{11}^{MR}, q_{12}^{MR}) \in \mathbb{R}^2 / \max \Pi_1(q_1) = \Pi_1(q_{11}^{MR}, q_{12}^{MR})\right\}$

$= \{((a_1 - b_1 q_{21} - c11)/2b_1, (a_2 - b_2 q_{22} - c12)/2b_2)\}.$

$C_2(q_{11}, q_{12}) = \left\{(q_{21}^{MR}, q_{22}^{MR}) \in \mathbb{R}^2 / \max \Pi_2(q_2) = \Pi_2(q_{21}^{MR}, q_{22}^{MR})\right\}$

Ensuite par substitution :

$$\begin{cases} q_{11}^* = (a_1 + c21 - 2c11)/3b_1 \\ q_{12}^* = (a_2 + c22 - 2c12)/3b_2 \\ q_{21}^* = (a_1 + c11 - 2c21)/3b_1 \\ q_{22}^* = (a_2 + c12 - 2c22)/3b_2 \end{cases}$$

On en déduit que $p_j^* = (a_j + c_{1j} + c_{2j})/3$ est le prix sur chacun des deux marchés à l'équilibre.

Et que le profit à l'équilibre s'écrit :

$$\Pi_i^* = b_1 q_{i1}^2 + b_2 q_{i2}^2.$$

Remarque 3.1. L'équilibre de Nash ne dépend que des coûts c_{ij} des producteurs sur les différents marchés.

Dans ce qui va suivre, nous allons voir comment l'introduction de contraintes de capacité influence l'équilibre de Nash.

3.5 Equilibre avec contraintes : Résolution

3.5.1 Meilleure réponse et projection

Dans un premier temps, nous allons voir comment l'introduction des contraintes influence la fonction de meilleure réponse.

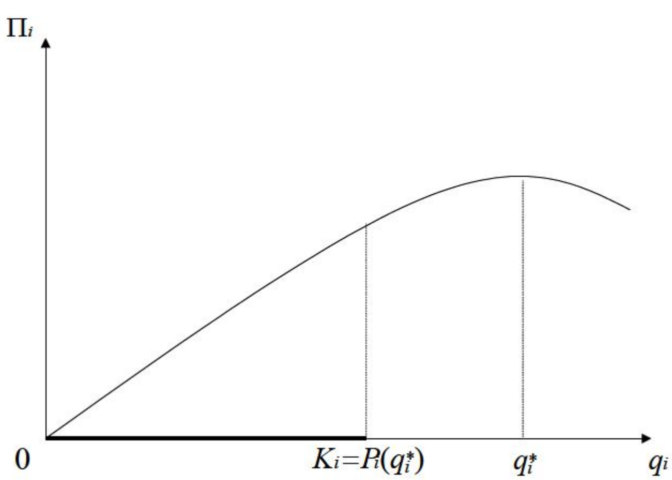
Lemme 3.5.1. *La fonction de meilleur réponse d'un producteur lorsqu'il est contraint en capacité est la projection sur l'ensemble des contraintes de sa meilleure réponse sans contraintes, c'est à dire :*

$$\bar{q}_i^{MR} = P_{S_i}(q_i^{MR})$$

P_{S_i} *: Projection sur l'ensemble :*

$$S_i = \{q \in \mathbb{R}^2_+, \quad q_{i1} + q_{i2} \leq K_i\}$$

Preuve. Si on considère la concurrence des deux producteurs sur un seul marché, le profit de l'un des deux lorsque la quantité de son concurrent est fixé est alors une parabole et l'ensemble des contraintes correspond au segment $[0, K_i]$.
$\Pi_i = -(q_{i1} - q_{i1}^{MR})^2 + q_{i1}^{MR}$

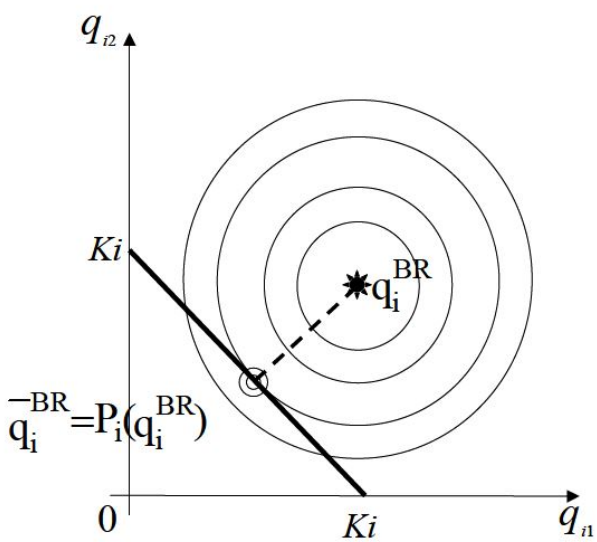


La meilleure réponse d'un producteur contraint en capacité consiste à :
- Mettre la quantité K_i sur le marché si $K_i < q_i^*$.
- Ne pas desservir le marché si $q_i^* < 0$.
- Choisir la quantité q_i^* si $q_i^* \in [0, K_i]$.

Ce qui veut dire que sa meilleure réponse est le projeté de sa meilleure réponse sans contraintes q_i^* sur $[0, K_i]$.

A la dimension 2 ce résultat reste vrai. Dans le cas des deux producteurs et des deux marchés qu'on a considéré jusqu'ici, le profit est une fonction décroissante de la distance à l'optimum non contraint, et les courbes d'isoprofit sont des boules pour la norme euclidienne.

En effet , on peut remarquer que : $\Pi_i = -(q_{i1} - q_{i1}^{MR})^2 - (q_{i2} - q_{i2}^{MR})^2 + q_{i1}^{MR} + q_{i2}^{MR}$,i=1,2.



Le point de S_i qui maximise le profit est donc le point le plus proche de q_i^{MR}, celui-ci n'est autre que sa projection sur S_i. S_i étant un fermé borné convexe en dimension finie, l'existence et l'unicité de la projection sont assurées.

3.5.2 Relation entre équilibre contraint et équilibre non contraint

Dans l'étape qui va suivre, l'équilibre de Nash avec contraintes sera exprimé en fonction de l'équilibre non contraint.

Proposition 3.5.1. *Les vecteurs $\bar{q}_i$ des quantités mises sur les 2 marchés par chaque producteur i à l'équilibre de Nash avec contraintes de capacité vérifie l'équation :*

$$\begin{cases} \bar{q}_1^* = P_{S_1}[q_1^* - (\bar{q}_2^* - q_2^*)/2] \\ \bar{q}_2^* = P_{S_2}[q_2^* - (\bar{q}_1^* - q_1^*)/2] \end{cases}$$

Preuve. La fonction de meilleure réponse du joueur i est donnée par :

$$q_i^{MR}(q_{-ij}) = [a_j - b_j(q_{kj} - c_{ij})]/2b_j, \quad k \neq i.$$

C'est une fonction linéaire par rapport aux quantités du concurrent de i, on peut l'écrire en fonction du changement de stratégie de la firme concurrente :

$$q_i^{MR}(q_{-ij}) = q_{ij}^{MR}(q\acute{}_{-ij}) - (q_{kj} - q\acute{}_{kj})/2, \quad \forall j \in \{1,2\}, \;\; i \in \{1,2\}, \quad k \neq i.$$

Ou encore en notation vectorielle :

$$q_i^{MR}(q_{-i}) = q_i^{MR}(q\acute{}_{-i}) - (q_k - q\acute{}_k)/2, \;\; \forall q\acute{}_{-i}.$$

En particulier $q_i^{MR} = q_i^* - (q_k - q_k^*)/2$, car par définition de l'équilibre de Nash $q_i^{MR} = q_i^*$.

Par changement de variable, on aura

$$u_i^{MR} = u_i^* - (u_k - u_k^*)/2.$$

Puis d'après le **Lemme 1**

$$\overline{u}_i^{MR}(u_k) = P_{S_i}(u_i^* - (u_k - u_k^*)/2.$$

Or, l'équilibre de Nash étant un point fixe des fonctions de meilleure réponse, on a :

$$\overline{u}_i^* = \overline{u}_i^{MR}(\overline{u}_k).$$

d'où le résultat $\overline{u}_i^* = P_{S_i}(u_i^* - (u_k - u_k^*)/2$.
A ce stade, on n'a fait qu'exprimer la stratégie d'un joueur en fonction de celle de son concurrent. Ceci permet d'obtenir un système d'équations qui caractérise l'équilibre de Nash.

3.5.3 Problème équivalent

Il est possible de ramener la résolution du système d'équations précédent à la simple étude du zéro d'une fonction.

Théorème. *Soit* $\Delta = (q_1^* - \bar{q}_1^*) + (q_2^* - \bar{q}_2^*)$ *la somme des écarts entre les vecteurs quantité à l'équilibre non contraint et à l'équilibre contraint. Trouver l'équilibre de Nash sous contraintes de capacité revient à résoudre en* Δ *l'équation :*

$$\Psi(\Delta) = \Delta + P_{t_{-u_1^*}(S_1)}(\Delta) + P_{t_{-u_2^*}(S_2)}(\Delta) = 0$$

où $P_{t_{-u_i^*}(S_i)}$ *est la projection sur le translaté de* S_i *de vecteur* $-u_i$*.*

Preuve. D'après la proposition 3.5.1 pour chacun des deux joueurs :

$$\begin{aligned} \bar{q}_1^* &= P_{S_1}[q_1^* + \Delta/2 + (\bar{q}_1^* - q_1^*)/2] = P_{S_1}[(q_1^* + \Delta + \bar{q}_1^*)/2] \\ \bar{q}_2^* &= P_{S_2}[q_2^* + \Delta/2 + (\bar{q}_2^* - q_2^*)/2] = P_{S_2}[(q_2^* + \Delta + \bar{q}_2^*)/2] \end{aligned}$$

On pose $v_1 = (q_1^* + \Delta + \bar{q}_1^*)/2$ et $v_2 = (q_2^* + \Delta + \bar{q}_2^*)/2$
$\bar{q}_1^* = P_1(v_1) = 2v_1 - q_1^* - \Delta$ et $\bar{q}_2^* = P_2(v_2) = 2v_2 - q_2^* - \Delta$
On inverse ces équations pour isoler v_1 et v_2 en utilisant le Lemme suivant :

Lemme 3.5.2. *L'équation* $P(v) = 2v + \alpha$ *pour* $v, \alpha \in \mathbb{R}^2$ *et* P *la projection sur* S_i *a pour solution unique* $v = (-\alpha + P(-\alpha))/2$*.*
On en déduit que $v_1 = (\Delta + q_1^* + P_{S_1}(\Delta + q_1^*))/2$ *et* $v_2 = (\Delta + q_2^* + P_{S_2}(\Delta + q_2^*))/2$*.*
D'autre part on avait $v_1 = (q_1^* + \Delta + \bar{q}_1^*)/2$ *et* $v_2 = (q_2^* + \Delta + \bar{q}_2^*)/2$ *d'où :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{q}_1^* = P_{S_1}(\Delta + q_1^*) \\ \bar{q}_2^* = P_{S_2}(\Delta + q_2^*) \end{array} \right.$$

Or $P_{S_i}(\Delta + q_i^*) = P_{t_{-q_i^*}(S_i)}(\Delta) + q_i^*$*.*

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{t_{-q_1^*}(S_1)}(\Delta) + q_1^* - \bar{q}_1^* = 0 \\ P_{t_{-q_2^*}(S_2)}(\Delta) + q_2^* - \bar{q}_2^* = 0 \end{array} \right.$$

Enfin, comme $\Delta = (q_1^* - \bar{q}_1^*) + (q_2^* - \bar{q}_2^*)$*, en faisant la somme de ces deux équations on obtient :*

$$\Psi(\Delta) = \Delta + P_{t_{-q_1^*}(S_1)}(\Delta) + P_{t_{-q_2^*}(S_2)}(\Delta) = 0.$$

3.5.4 Calcul de l'équilibre contraint

On a ramené l'étude de l'équilibre de Nash avec contraintes de capacité à la recherche du zéro d'une fonction Ψ.

Proposition 3.5.2. *La solution de $\Psi(\Delta) = 0$ existe et est unique.*

Preuve. On fixe $\Delta_0 \in \mathbb{R}$ quelconque et on regarde comment varie la j-ème de Ψ lorsqu'on fait varier la i-ème composante de Δ_0 de x.

Soit $f_{\Delta_{0,i,j}}(x) = \Psi(\Delta_0 + x\overrightarrow{e_i})\overrightarrow{e_j}$

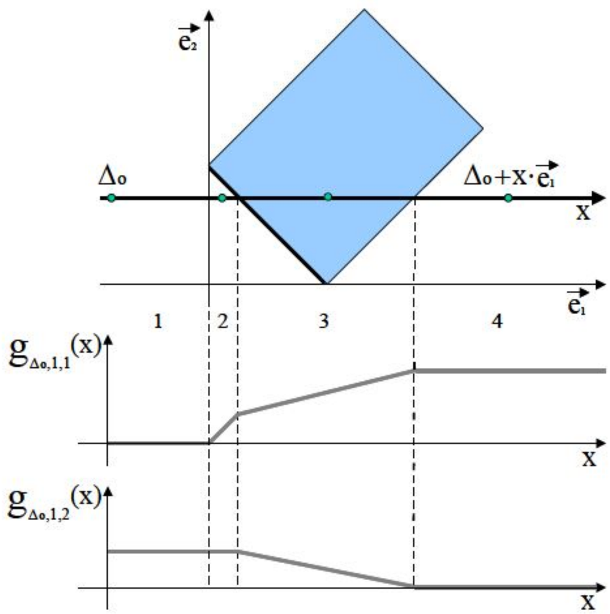
$= (\sum_{i=1}^{n} P_{t_{-u_i^*}(S_i)}(\Delta_0 + x\overrightarrow{e_i})\overrightarrow{e_j} + (\Delta_0 + x\overrightarrow{e_i})\overrightarrow{e_j}$

Et soit $g_{\Delta_{0,i,j}}(x) = P_{t_{-u_i^*}(S_i)}(\Delta_0 + x\overrightarrow{e_i})\overrightarrow{e_j}$

On décrit dans la figure suivante le cas où on part d'un point $\Delta_0$de coordonnées (x_0, y_0) dont on augmente la première composante d'une quantité x. On observe comment évolue la projection sur l'ensemble des contraintes (translaté) $P_{t_{-u_1^*}(S_i)}$, d'abord selon la première composante grâce à la fonction $g_{\Delta_{0,1,1}}(x)$, puis selon la deuxième composante grâce à $g_{\Delta_{0,1,2}}(x)$.

Les trois droites horizontales représentées en pointillés définissent quatre zones numérotés de 1 à 4. Les limites de ces zones sont des points charnières :

- Dans la zone 1, les points $\Delta_0 + x\overrightarrow{e_1}$ sont projetés sur S_i en un même point $(0, y_0)$, donc $g_{\Delta_{0,1,1}}(x) = 0$ et $g_{\Delta_{0,1,2}}(x) = y_0$
- Dans la zone 2, les points $\Delta_0 + x\overrightarrow{e_1}$ sont à l'intérieur de S_i, la transformation est maintenant l'identité et $g_{\Delta_{0,1,1}}(x)$ croit à la même vitesse que x tandis que $g_{\Delta_{0,1,2}}(x)$ reste en y_0.
- Dans la zone 3, les points $\Delta_0 + x\overrightarrow{e_1}$ appartiennent à une bande représentée en grisé et sont projetés sur la facette de S_i définie par la contrainte de capacité K_i. La première composante du projeté augmente avec x mais avec une pente inférieure à 1 (ce qui était le cas dans la zone 2), tandis que la deuxième composante du projeté décroît avec x.
- Dans la zone 4, les points $\Delta_0 + x\overrightarrow{e_1}$ sont projetés en un même point $(K_i, 0)$, donc $g_{\Delta_{0,1,1}}(x) = K_i$ et $g_{\Delta_{0,1,2}}(x) = 0$



Les résultats obtenus sont valables pour les points initiaux Δ_0 dont la deuxième composante$y_0 \in [0, K_i]$.

Cette étude pour des points initiaux Δ_0 situés entre les deux autres région de l'espace, tel que $y_0 < 0$ puis tel que $y_0 > K_i$.

On observe ensuite ce qui se produit lorsqu'on augmente la deuxième composante de Δ_0, également dans les trois configurations possibles : $x_0 < 0,\ x_0 \in [0, K_i]$ puis $x_0 > K_i$.

L'étude générale de g montre que le même phénomène se produit quelque soit Δ_0, et on peut en déduire le comportement de la fonction f, à savoir :

Si $i \neq j$ alors $\frac{dg}{dx} \leq 0$ et donc $\frac{df}{dx} = \sum \frac{dg}{dx} + 0 \leq 0$

Si $i = j$ alors $\frac{dg}{dx} \geq 0$ et donc $\frac{df}{dx} = \sum \frac{dg}{dx} + 1 > 0$

On voit donc que depuis tout point de $\mathbb{R}^2$, en se déplaçant dans la direction $\overrightarrow{e_i}$, on augmente strictement la i-ème composante de Ψ tout en diminuant l'autre composante.

Méthode pour trouver Δ :

- Annuler toutes les composantes de $\Psi(\Delta)$.

- Soit $L_i = \{x \in \mathbb{R}^2 / \Psi(x).\overrightarrow{e_i} = 0\}$ le lieu des x tel que la i-ème composante de Ψ soit nulle. Δ est à l'intérieur de L_1 et L_2.

- Les S_i étant bornés, on peut trouver un vecteur Δ_0 tel que $\Psi(\Delta_0).\overrightarrow{e_i} \leq 0$ pour tout i.

- On fait varier $\overrightarrow{e_1}$ d'une quantité x jusqu'à ce que $\Psi(\Delta_0+x\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}=0$. Grâce à la continuité et à la croissance stricte de f lorsque $i=j$. Ceci nous amènera au point Δ_1 de L_1.

- On itère alternativement cette opération suivant chacune des deux composantes à chaque itération on annule une composante tout en diminuant l'autre car si $i\neq j$ alors $\frac{df}{dx}\leq 0$.

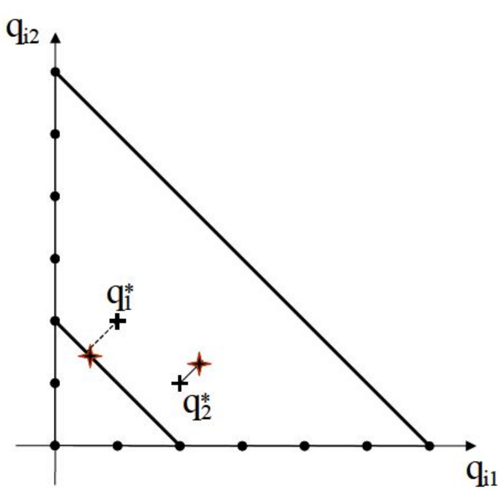
Les composantes de la suite (Δ_n) sont des suites croissantes, majorées par les lignes de niveau L_i qui sont elles-mêmes majorées. La suite est donc convergente à la limite : $\Delta_{(\inf)}\in L_1\cap L_2$.

3.5.5 Application

Supposons que le producteur 1 et le producteur 2 ont des capacités de production respective $K_1=2$ et $K_2=6$. Ils sont en concurrence sur les deux marchés caractérisés par $a_1=a_2=6$, $b_1=b_2=1$ et leurs coûts sur chaque marché sont $c_{11}=c_{22}=2$, $c_{12}=c_{21}=1$. A l'équilibre sans contraintes les producteurs jouent :

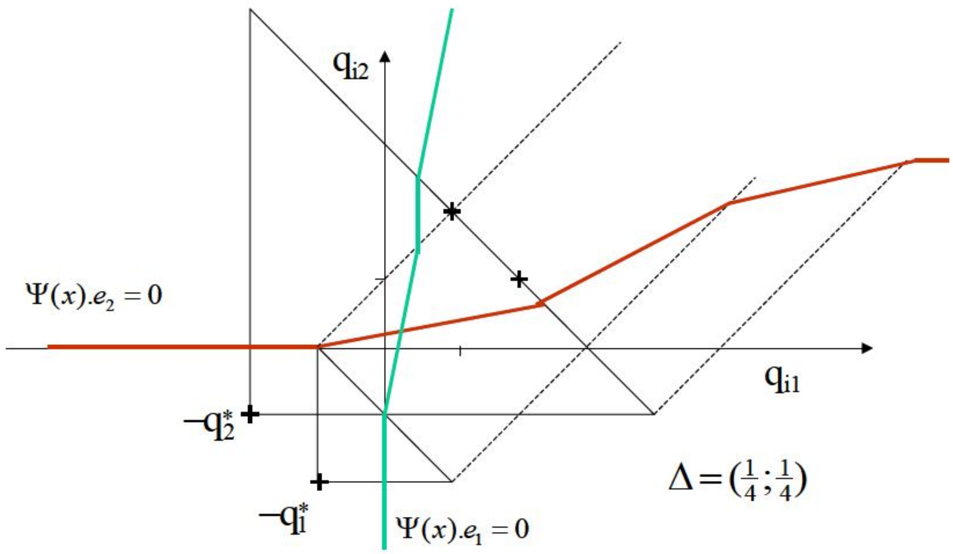
$$\begin{cases} q^*_{11}=(a_1+c21-2c11)/3b_1=(6+1-4)/3=1\\ q^*_{12}=(a_2+c22-2c12)/3b_2=(6+2-2)/3=2\\ q^*_{21}=(a_1+c11-2c21)/3b_1=(6+2-2)/3=2\\ q^*_{22}=(a_2+c12-2c22)/3b_2=(6+2-4)/3=1\end{cases}$$

$q^*_1=(1,2)$, $q^*_2=(2,1)$.



On a montré précédemment que l'équilibre de Cournot-Nash avec contraintes de capacité existe et est unique et s'écrit $\overline{q}^*_i=P_{S_i}(q^*_i+\Delta)$.

Il suffit donc de trouver un vecteur Δ, tel que $\Psi(\Delta) = 0$. En traçant les points de l'ensemble L_1, puis ceux de l'ensemble L_2, on obtient Δ comme intersection de ces courbes (fonction linéaire par morceaux).



Dans cet exemple $\Delta = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. On remarque aussi que Δ est orthogonal à la facette définie par la contrainte de capacité, de ce fait pour le producteur 1, $P_{S_i}(u_i^* + \Delta) = P_{S_i}(u_i^*)$.

Par contre, quand Δ ne l'est pas, $P_{S_i}(u_i^* + \Delta) \neq P_{S_i}(u_i^*)$, c'est à dire qu'en général, l'optimum avec contraintes de capacité ne coïncide pas avec le projeté de l'optimum sans contraintes.

$$u_1^* = P_{S_1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}) = P_{S_1}(\begin{pmatrix} 1,25 \\ 2,25 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$
$$u_2^* = P_{S_2}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}) = P_{S_2}(\begin{pmatrix} 2,25 \\ 1,25 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2,25 \\ 1,25 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien que le producteur 2, non contraint *ex−post* en capacité a profité de la moitié des quantités libérées sur chaque marché par son concurrent en raison de sa contrainte.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons montré l'intérêt que présente la théorie des jeux dans la résolution de certains problèmes économiques tels que les duopoles. Suite au rôle des capacités de production dans l'obtention de parts de marché, nous avons vu qu'il était intéressant de prendre en compte les contraintes de capacité dans un modèle oligopolistique.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude d'un duopole de Cournot. La résolution du duopole avec contraintes se fait grâce à la projection des meilleures réponses sur l'ensemble des contraintes de capacités représentés par un convexe fermé de dimension finie. L'un des points intéressant de cette étude est la transformation du problème de calcul de l'équilibre contraint en la recherche du zéro d'une fonction Ψ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Comme perspectives, nous voudrions dans un premier temps, traiter des problèmes de grandes tailles ainsi que des modèles où les marchés sont différenciés. Puis appliquer ce mode de résolution à des modèles locaux dans un second temps.

Annexe

Cette annexe sera consacrée à un bref rappel sur les espaces topologiques et métriques, sur les fonctions et leurs propriétés : convexité et concavité.

Espaces topologiques

Définitions. On appelle topologie sur l'ensemble E la donnée d'une famille τ de sous-ensembles de E appelés partis ouvertes ou ouverts de E vérifiant les propriétés suivantes :

1. Les ensembles E et $\emptyset$ appartiennent à la famille τ.
2. Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
3. L'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert.

Définition. Une partie F de E est dite fermée si son complémentaire $C_F = E \setminus F$ est ouvert.

Définition. Soit (E, τ) un espace topologique et x_0 un point de E. On appelle voisinage de x_0 toute partie V de E qui contient un ouvert U qui lui-même contient x_0. On note $V(x_0)$l'ensemble des voisinages d'un point x_0.

Proposition. une partie U de E est un ouvert si et seulement si U est voisinage de chacun de ses points.

Espaces métriques

Etant donné un ensemble E, une topologie sur E consiste à se donner une famille d'ouverts vérifiant les axiomes d'une topologie. Un autre moyen est de donner une fonctionnelle appelée distance qui permet de générer ces ouverts.

Définition. On appelle espace métrique un coupe (E, d) constitué d'un ensemble (espace)

E d'éléments (points) et d'une distance (métrique) d , C'est à dire une fonction

$$d : E \times E \to \mathbb{R}^+$$

$$(x, y) \to d(x, y)$$

Vérifiant les trois axiomes suivants

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition. Dans un espace métrique E. On dit qu'un sous ensemble A de E est ouvert s'il est vide ou si pour tout $x \in E$, il existe une boule ouverte $B(x, r)$ dans A, de rayon $r > 0$, avec $B(x, r) = (y \in E/d(x, y) < r)$.
Définition. Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(X_n)_n$ d'élément de E converge vers x, si la suite des nombres réels $d(x_n, x)_n$ converge vers 0.
Proposition : Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.

1. Si la dimension de E est fini, alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné.
2. A est compact si et seulement si pour toute suite d'éléments de A, On peut extraire une sous suite convergente dans A .
3. La limite d'une suite est unique dans un espace métrique.

Espaces compacts

Définition : : Un espace topologique E est dit compact s'il est séparé et si il vérifie la propriété, dite propiété de Borel-Lebesgue : de toute famille $(U_I \in I)$ de parties ouvertes de E dont la réunion est E, on peut extraire une sous famille finie $(U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{in})$, $i_1, i_2 \ldots, i_n \in I$ dont la réunion est E.
Théorème. Tout sous ensemble fermé d'un espace compact est un espace compact.
Théorème. Une partie A d'un espace métrique (E, d) est dite bornée s'il existe un nombre $r > 0$ tel que $A \subset B(a, r)$ (la boule ouverte de centre a et de rayon r).

Ensembles convexes.

Définition : Soit E un espace vectoriel réel. Un sous ensemble A de E est dit convexes si :

$$\forall x, y \in A et \forall \lambda \in [0,1] alors \lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$

On dit que$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est une combinaison convexe des éléments $X_i \in E$ si a $\forall \lambda i > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Proposition. Soit A un sous ensemble d'un espace vectoriel E.

1. Un sous ensemble $A \subset E$ est convexe si et seulement si toute combinaison convexe d'éléments $X_i \in A i = 1, .., n$ appartient a A.
2. L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble convexe par une application linéaire sont convexes.
3. Tout produit d'ensembles convexes est convexe.

Fonction quasi-concave

Définition. Soit f une fonction définie sur une partie convexe A et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est quasi-concave si

- $\forall (x, y) \in A^2$, $\lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \{\sup(f(x), f(y))\}$.

Théorème de projection sur un convexe fermé

Le théorème de projection orthogonale sur un convexe est un résultat de minimisation de la distance dont le principal corolaire est l'existence d'un supplémentaire orthogonal, donc d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel.

Produit scalaire

Soient $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ et $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ deux vecteurs non nuls. On appelle produit scalaire des vecteurs U et V, noté : $\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

Théorème (Théorème de la projection sur un convexe complet)

Il existe une unique application P_c de E dans C, dite projection sur le convexe, qui associe à x le point $P_c(x)$ de C, tel que la distance de x à C soit égale à celle de x à $P_c(x)$. Le vecteur $P_c(x)$ est l'unique point de C vérifiant les deux propositions suivantes, qui sont équivalentes :

1. $\forall y \in C \|X - P_c(x)\| \leq \|x - y\|$.
2. $\forall y \in C \langle x - P_c(x), y - P_c(x) \rangle \leq 0$.

Bibliographie

[1] Achemine F. These de magister :"Etude d'un jeu à deux personnes avec paramètres indéterminés dans le cas de l'ignorance totale ", Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou (2001).
[2] Christophe Caron., Jacques-Alexandre Laye : Equilibre de Cournot-Nash avec contraintes de capacité : une formule explicite", LORIA (Laboratoire d'Organisation Industrielle Agro-alimentaire).
[3] Nash J.F., Non-cooperative games, Ann Math, Vol. 54, pp. 286—295 (1951).
[4] Von Neumann and economist Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press (1944).
[5] YILMAZ AKYILDIZ, Projet de fin d'étude : "Equilibre de Nash", Université de Galatasaray, Turquie.