

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE Mouloud Mammeri – Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Physique

POLYCOPIÉ DE COURS

Physique II : Électricité

Arslane BOUDGHENE STAMBOULI

2024

POLYCOPIÉ DE COURS PHYSIQUE II
ÉLECTRICITÉ

Arslane BOUDGHENE STAMBOULI

29 juin 2024

Avant-Propos

Ce document est un recueil de cours d'électricité. Il s'adresse aux étudiants inscrits en première année du système LMD (Licence-Master-Doctorat) dans le domaine en Sciences et Technologies, conformément au programme officiel, comprenant la totalité des connaissances essentielles requises pour cette matière d'enseignement. Afin de favoriser la compréhension du cours par l'étudiant ce manuscrit s'accompagne de quelques exemples d'applications.

Le premier chapitre comporte des rappels mathématiques sur les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques et les outils mathématiques essentiels lors de la résolution de toute problématique physique.

Le deuxième chapitre traite sur les interactions électrostatiques, le phénomène d'électrisation et la loi de Coulomb pour les charges ponctuelles.

Le troisième chapitre comporte des concepts de champs et potentiels électrostatiques et leur détermination pour les cas des distributions des charges discrètes ou continues ainsi que dans le cas d'un dipôle électrique. Le théorème de Gauss est aussi introduit dans la dernière partie de ce chapitre.

Le quatrième chapitre définit les conducteurs en équilibre électrostatiques ainsi que les condensateurs.

Le cinquième chapitre se consacre à l'électrocinétique, couvrant les concepts de courant électrique, résistance et loi d'Ohm, tout en explorant les lois sur les réseaux électriques.

Le dernier chapitre se concentre sur la magnétostatique, où l'étude se focalise particulièrement sur le contexte des états stationnaires.

Table des matières

1	Rappels Mathématiques	4
1.1	Introduction	5
1.2	Coordonnées cartésiennes	5
1.3	Coordonnées cylindriques	6
1.4	Coordonnées sphériques	8
2	Interactions Électrostatiques	11
2.1	Introduction	12
2.2	Définition	12
2.3	Phénomènes d'électrisation	12
2.4	Classement des matériaux	13
2.5	Types d'électrisation	14
2.6	Charge électrique	16
2.7	Principe de la conservation de la charge	17
2.8	La force électrostatique	17
3	Champ et Potentiel Électrostatiques	20
3.1	Introduction	22
3.2	Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle	22
3.3	Champ et potentiel électrostatiques créée par une distribution continue de charges	32
3.4	Dipôle électrique	37
3.5	Théorème de Gauss	42

4	Conducteurs en Équilibre Électrostatique	50
4.1	Introduction	51
4.2	Définition	51
4.3	Propriétés des conducteurs en équilibre électrostatique	51
4.4	Champ électrostatique au voisinage d'un conducteur en équilibre	52
4.5	Pouvoir des pointes	53
4.6	Capacité d'un conducteur	53
4.7	Énergie potentielle d'un conducteur	54
4.8	Phénomènes d'influences	54
4.9	Condensateurs	55
5	Electrocinétique	62
5.1	Introduction	63
5.2	Courant électrique	63
5.3	Loi d'Ohm	65
5.4	Loi de Joule	66
5.5	Circuits électriques	67
5.6	Associations des résistances	69
5.7	Lois de Kirchhoff	71
6	Magnétostatique	75
6.1	Introduction	76
6.2	Le champ magnétique	76
6.3	Les forces magnétiques	77
6.4	Expression du champ magnétique	80
6.5	Flux du champ magnétique	82
6.6	Circulation du champ magnétique autour d'un fil infini	83
6.7	Théorème d'Ampère	84

Rappels Mathématiques

Sommaire

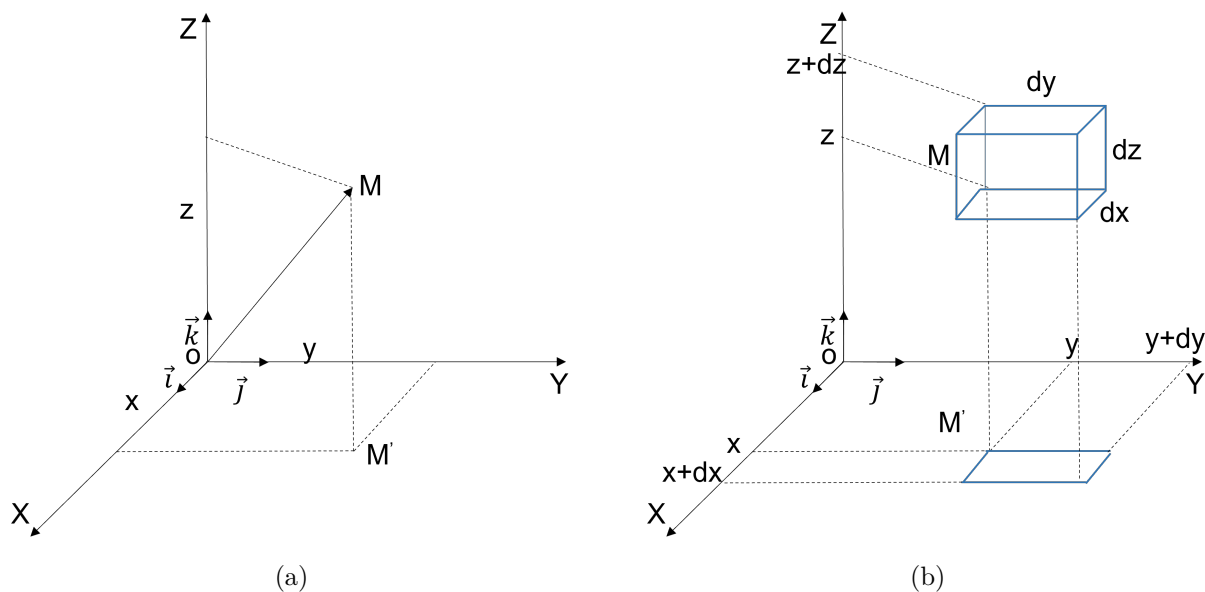
1.1	Introduction	5
1.2	Coordonnées cartésiennes	5
1.2.1	Définition	5
1.2.2	Élément de longueur	6
1.2.3	Élément de surface	6
1.2.4	Élément de volume	6
1.3	Coordonnées cylindriques	6
1.3.1	Définition	6
1.3.2	Élément de longueur	7
1.3.3	Élément de surface	7
1.3.4	Élément de volume	7
1.4	Coordonnées sphériques	8
1.4.1	Définition	8
1.4.2	Élément de longueur	9
1.4.3	Élément de surface	9
1.4.4	Élément de volume	10

1.1 Introduction

Un système de coordonnées permet de décrire la position des points dans l'espace. L'utilisation des systèmes de coordonnées en physique permet de simplifier les calculs en choisissant un système de coordonnées adapté aux symétries du problème (par exemple, cylindriques pour les problèmes ayant une symétrie cylindrique ou sphériques pour ceux ayant une symétrie sphérique), ainsi les équations et les intégrales deviennent souvent plus simples à résoudre, elle permet aussi de rendre les problèmes plus tractables et de mieux comprendre et visualiser les phénomènes physiques.

1.2 Coordonnées cartésiennes

1.2.1 Définition



Soit un point M se déplaçant dans un repère cartésien (x, y, z) d'origine O (figure a). Le vecteur position \overrightarrow{OM} est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Pour un déplacement infinitésimal du point $M(x, y, z)$ au point $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ (figure b) on définit le vecteur déplacement tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

1.2.2 Élément de longueur

On définit l'élément de longueur \vec{dl} :

❖ Dans le plan (xoy) : $\vec{dl} = \vec{dx} + \vec{dy}$

❖ Dans l'espace (xyz) : $\vec{dl} = \vec{dx} + \vec{dy} + \vec{dz}$

1.2.3 Élément de surface

On exprime l'élément de surface comme suit :

❖ Dans le plan (xoy) : $dS_1 = dx dy$

❖ Dans le plan (yoz) : $dS_2 = dy dz$

❖ Dans le plan (xoz) : $dS_3 = dx dz$

1.2.4 Élément de volume

Dans l'espace (o,x,y,z), l'élément de volume est défini par le déplacement infinitésimal, délimite le parallélépipède tel que :

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

1.3 Coordonnées cylindriques

1.3.1 Définition

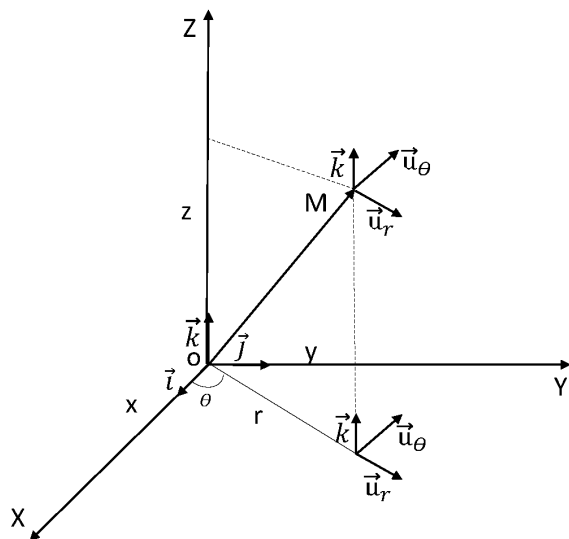
Les coordonnées cylindriques est un système de coordonnées à 3 dimensions. On définit par M un point repéré par les coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, où $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ sont les coordonnées polaires dans le plan (xoy) et z est la distance orientée du plan (xoy) à M (figure c).

Le vecteur position est de la forme :

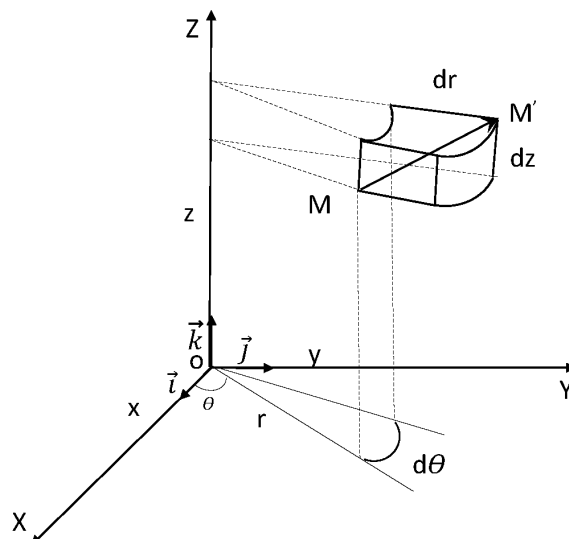
$$\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$$

Si on déplace le point M de coordonnées (r, θ, z) au point M' de coordonnées $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$, (figure d), le vecteur de déplacement est donné par :

$$\vec{dl} = \vec{MM'} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$$



(c)



(d)

Avec $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in [-\infty, +\infty]$.

1.3.2 Élément de longueur

L'élément de longueur s'écrit :

$$\begin{cases} dl_r = dr, & (\text{variation suivant } r) \\ dl_\theta = r d\theta, & (\text{variation suivant } \theta) \\ dl_z = dz, & (\text{variation suivant } z) \end{cases}$$

1.3.3 Élément de surface

Dans le cas où on fixe r , l'élément de surface devient :

$$dS = r d\theta dz$$

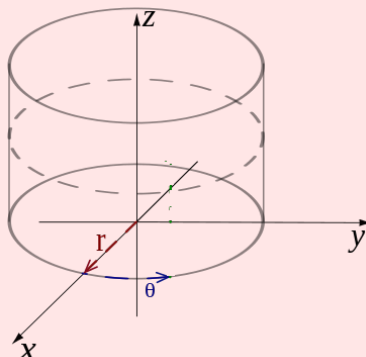
1.3.4 Élément de volume

L'élément de volume est défini comme suit :

$$dV = r dr d\theta dz$$

Exemple

Soit un cylindre de hauteur h de coordonnées (r, θ, z) , exprimant en coordonnées cylindriques la surface et le volume de ce cylindre ?



-Pour déterminer la surface du cylindre on sait que :

$$ds = r d\theta dz$$

$$\Rightarrow \iint ds = r \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$$

Donc :

$$S = 2\pi r h$$

-Ensuite pour déterminer le volume du cylindre on a :

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\Rightarrow \iiint dV = \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$$

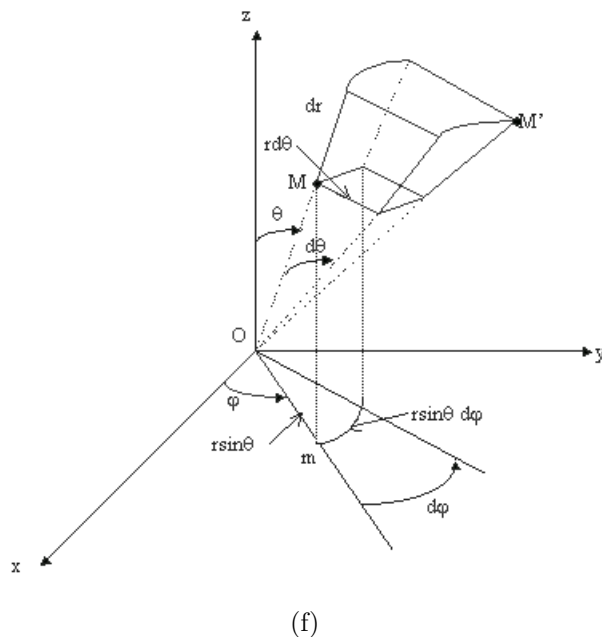
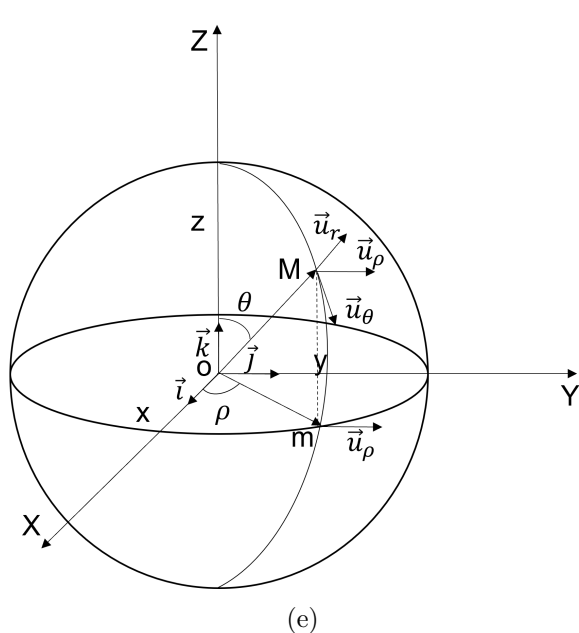
On aura :

$$V = \pi r^2 h$$

1.4 Coordonnées sphériques

1.4.1 Définition

Comme le système de coordonnées cylindriques, les coordonnées sphériques est aussi un système de coordonnées en trois dimensions, l'utilisation de système de coordonnées sphériques peut être particulièrement avantageuse pour résoudre des problèmes présentant une symétrie radiale, en prenant un point central comme origine du système. Soit un point M



qui est repéré par les coordonnées (r, θ, z) dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\rho)$, (figure.e). Le vecteur position est de la forme :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r$$

donc le vecteur déplacement \vec{MM}' est tel que, (figure.f) :

$$\vec{dl} = \vec{MM}' = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\rho \vec{u}_\rho$$

Avec $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\rho \in [0, 2\pi]$.

1.4.2 Élément de longueur

L'élément de longueur s'écrit :

$$\begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\theta = r d\theta \\ dl_\rho = r \sin \theta d\rho \end{cases}$$

1.4.3 Élément de surface

L'élément de surface est donné par la relation :

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\rho$$

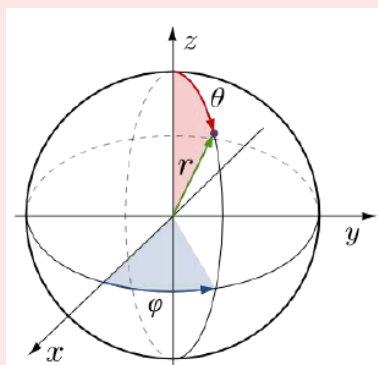
1.4.4 Élément de volume

L'élément de volume est défini par la relation :

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\rho$$

Exemple

Soit une sphère (s) de rayon r, on souhaite exprimé en coordonnées sphérique la surface et le volume de cette sphère ?



-Pour déterminer la surface, on sait que :

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\rho$$

$$\Rightarrow \iint ds = r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\rho$$

Donc :

$$S = 4\pi r^2$$

-De même pour déterminer le volume de la sphère on a :

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\rho$$

$$\Rightarrow \iiint dV = \int_0^r r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\rho$$

On aura :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Interactions Électrostatiques

Sommaire

2.1	Introduction	12
2.2	Définition	12
2.3	Phénomènes d'électrisation	12
2.4	Classement des matériaux	13
2.4.1	Les matériaux conducteurs	13
2.4.2	Les matériaux isolants	14
2.5	Types d'électrisation	14
2.5.1	Électrisation par frottement	14
2.5.2	Électrisation par contact	15
2.5.3	Électrisation par influence	15
2.6	Charge électrique	16
2.7	Principe de la conservation de la charge	17
2.8	La force électrostatique	17
2.8.1	La loi de Coulomb	17
2.8.2	Force électrostatique créée par un ensemble de charge : Principe de superposition	18

2.1 Introduction

Les interactions électrostatiques sont des forces fondamentales qui agissent entre les particules chargées. Elles jouent un rôle crucial dans une vaste gamme de phénomènes physiques et chimiques. À l'échelle microscopique, ces forces déterminent la structure des atomes, des molécules et des cristaux. Elles sont également responsables des liaisons chimiques, de la conductivité électrique et des propriétés des matériaux. Les interactions électrostatiques obéissent à la loi de Coulomb, qui stipule que la force entre deux charges est proportionnelle au produit de leurs charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Comprendre ces interactions est essentiel pour expliquer et prédire le comportement de la matière dans de nombreux contextes scientifiques et technologiques.

2.2 Définition



L'électrostatique est une branche de la physique. Elle élabore les phénomènes provoqués par l'électricité statique. Elle se concentre sur les propriétés et les interactions des charges électriques immobiles, ainsi que sur les forces électriques qu'elles exercent les unes sur les autres. Les principaux concepts de l'électrostatique incluent la loi de Coulomb, qui décrit la force entre deux charges, la distribution des charges électriques sur les surfaces conductrices, et les phénomènes électrostatiques dans les matériaux isolants. L'électrostatique trouve des applications dans de nombreux domaines, tels que l'électrotechnique, la microélectronique, la physique des plasmas, et même dans des domaines de la vie quotidienne comme la charge électrique des objets et les phénomènes liés à l'électricité statique.

2.3 Phénomènes d'électrisation



Exemple

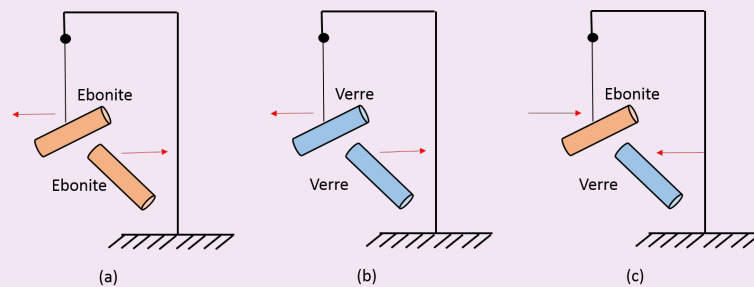
Lorsque vous frottez une baguette de verre avec un morceau de tissu en soie, cela engendre un phénomène appelé électrisation par frottement. Ce processus entraîne un transfert d'électrons entre la baguette de verre et la soie, conférant une charge positive

à la baguette et une charge négative à la soie. Les petits copeaux de papier réagissent à cette charge en étant attirés vers la baguette.

Explication :

La matière est composée d'atomes et donc elles comportent des e^- (particules chargées), lorsqu'on frotte la baguette de verre sur la soie, par effet mécanique (il y a création de la chaleur) et donc une énergie suffisamment grande pour qu'un électron quitte l'atome, ces atomes deviennent chargés positivement (**phénomène d'électrisation**).

Expérience



- * Dans l'expérience (a) et (b), les deux corps se repoussent lors de l'électrisation \Rightarrow les deux corps sont de même nature et donc même signe de charge (++) ou (--).
- * Dans l'expérience (c), les deux corps sont de nature différentes et donc de signe de charge différent (+-) ou (-+).
- * Un corps non chargé est appelé \Rightarrow **neutre**.

Il existe deux sortes d'électricité :

- ✧ électricité positive.
- ✧ électricité négative.

2.4 Classement des matériaux

On définit deux types de matériaux :

2.4.1 Les matériaux conducteurs

Se sont des matériaux pour lesquels l'électrisation produite se propage le long du matériau (dans tout les points). Les métaux, le corps humain, l'eau..., sont des exemples de

matériaux conducteurs à l'intérieur, les électrons peuvent se déplacer librement à travers la structure cristalline ou le réseau atomique. Les métaux, tels que le cuivre et l'aluminium, sont d'excellents conducteurs en raison de leur structure électronique qui favorise la mobilité des électrons. Les conducteurs sont largement utilisés dans les câbles électriques, les circuits électriques et électroniques, et dans de nombreuses autres applications nécessitant le transport de l'électricité.

2.4.2 Les matériaux isolants

Également appelés diélectriques, dont l'électrisation produite reste localisée à l'endroit où le frottement a eu lieu, autrement dit, ce sont des matériaux qui s'opposent au passage du courant électrique. Dans ces matériaux, les électrons sont fortement liés aux atomes et ne peuvent pas se déplacer facilement. Les isolants sont utilisés pour empêcher le passage du courant électrique, assurant ainsi l'isolation électrique et la sécurité dans de nombreuses applications. Les plastiques, le verre et le caoutchouc sont des exemples d'isolants couramment utilisés dans les câbles, les appareils électroniques et les équipements électriques.

2.5 Types d'électrisation

Les différents types d'électrisations pour changer un matériaux sont :

2.5.1 Électrisation par frottement

Elle s'explique par l'arrachement mécanique d'électrons d'un corps neutre frotté et le transfert sur l'autre (exemple du paragraphe 2.2).

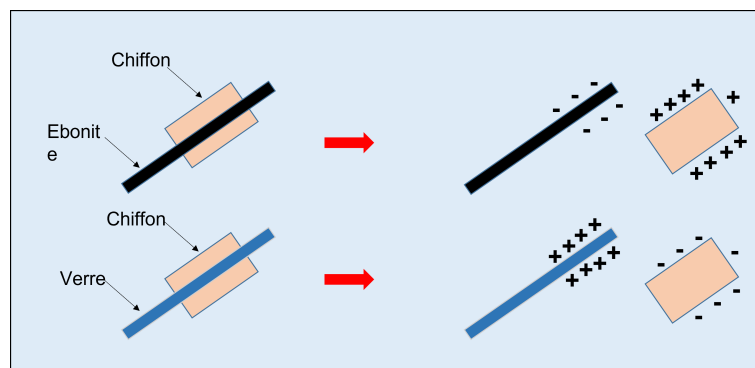


FIGURE 2.1 – Électrisation par frottement

2.5.2 Électrisation par contact

Elle est définie par un partage de charge électrique de même signe entre un matériau électrisé mis en contact avec un autre matériau.

Exemple

Si on met en contact une tige de verre frottée et une boule conductrice (neutre), on remarque une répulsion entre la boule et la partie électrisée du verre.

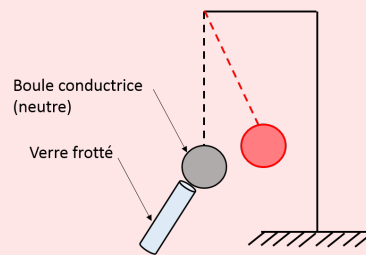


FIGURE 2.2 – Électrisation par contact

Explication :

Lorsque un corps A initialement neutre est en contact avec un corps B portant une charge q , cette charge **se répartie** entre A et B , et donc q_A et q_B obtenu après contact auront le **même** signe de charge (on a répulsion).

2.5.3 Électrisation par influence

Si on approche une tige en verre frottée (c'est à dire électrisée), de la boule conductrice initialement neutre, on remarque que la boule est attirée vers la tige en verre (figure 2.3). On dit que la boule est électrisée par **influence**, cet effet s'explique par la répartition ou redistribution des charges électriques d'un corps sous l'effet d'un autre corps chargé (**sans contact**).

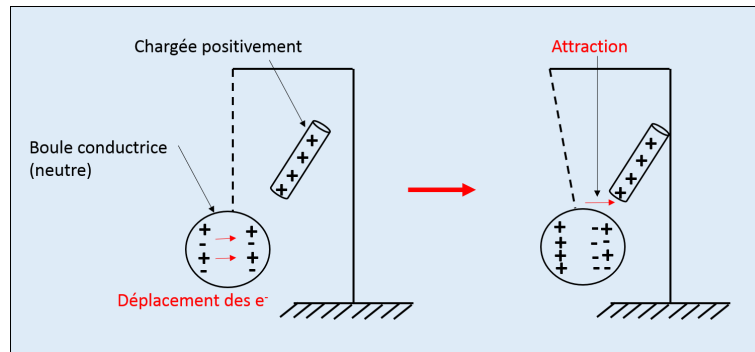


FIGURE 2.3 – Électrisation par Influence

2.6 Charge électrique

La matière est constituée de plusieurs atomes, chacun est constitué de noyau (**neutrons** de charges nulles et **protons** de charges positives). Autour de ce noyau gravitent des **électrons**, caractérisés par une charge **élémentaire** $q_e = -1,60210^{-19}C$ (l'unité de la charge est le Coulomb).

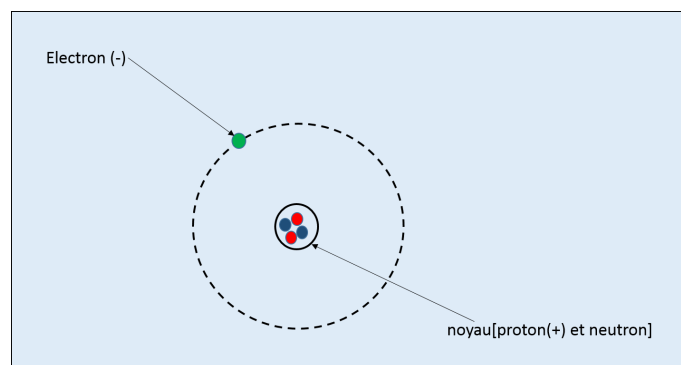


FIGURE 2.4 – Structure d'un atome

Toute charge q est quantifiée (elle n'existe que sous forme de multiples d'une charge élémentaire e), tel que $q = Ne$.

- * Pour une charge positive : $q_p = +e$.
- * Pour une charge négative : $q_e = -e$.

Les charges électriques se distinguent ainsi :

- * **Charge ponctuelle** : On appelle charge ponctuelle toute charge électrique localisé en un point géométrique sans dimension.
- * **Distribution de charge** : elle se définit comme la répartition continue de charges électriques à travers l'espace, on distingue 3 types : **linéique** (la répartition des charges

est selon un axe), **surfactive** (la distribution est sur une surface) et **volumique** (sur un volume).

2.7 Principe de la conservation de la charge

La somme algébrique des charges électriques totales dans un système isolé reste constante :

$$\sum_{sys\ isolé} q_i = cste$$

2.8 La force électrostatique

2.8.1 La loi de Coulomb

La loi de Coulomb décrit la force qui agit sur une charge ponctuelle q_1 en raison de la présence d'une autre charge q_2 , située à une distance r .

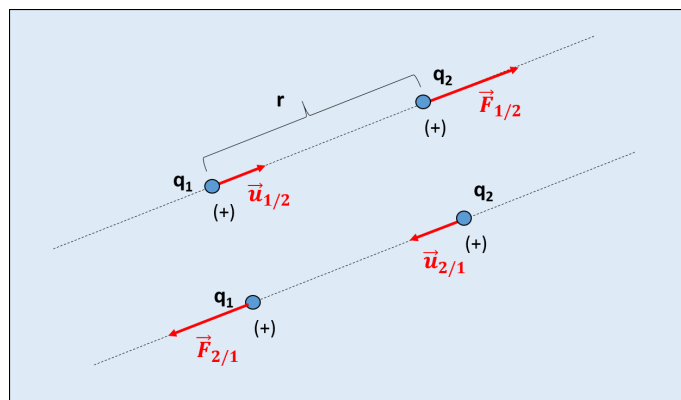


FIGURE 2.5

* La force électrostatique $\vec{F}_{1/2}$ exercée par q_1 sur la charge q_2 est de la forme :

$$\vec{F}_{1/2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1/2}$$

* La force électrostatique $\vec{F}_{2/1}$ exercée par q_2 sur la charge q_1 est de la forme :

$$\vec{F}_{2/1} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{2/1}$$

⚠ Remarques

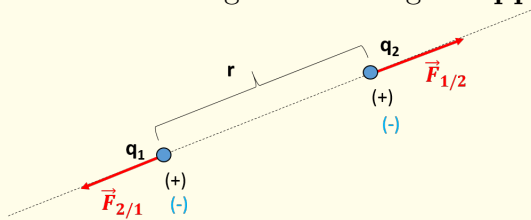
* k est une constante tel que $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9$ en (SI), (l'unité est $N.m^2.C^{-2}$)

* ϵ_0 : est la permittivité électrique du vide, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} (F/m)$

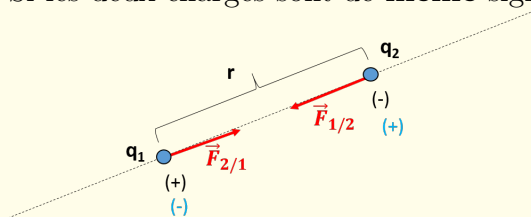
- * Le vecteur unitaire \vec{u} est toujours **sortant** de la charge qui exerce la force.
- * $|\vec{F}_{1/2}| = |\vec{F}_{2/1}|$, par contre $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$.

Important

- * Si les deux charges sont de signes **opposés**, la force est répulsive.



- * Si les deux charges sont de **même** signe, la force est attractive.



- * $|\vec{F}_{1/2}| = |\vec{F}_{2/1}|$, par contre $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$.

2.8.2 Force électrostatique créée par un ensemble de charge : Principe de superposition

D'après le principe de superposition, la force électrostatique résultante créée sur une charge donnée q_2 , est la somme vectorielles des forces appliquées par plusieurs charges (q_1, q_3, \dots).

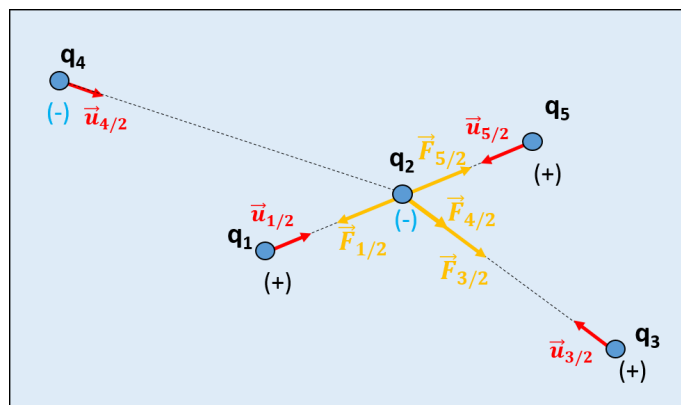
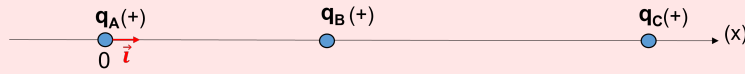


FIGURE 2.6

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{3/2} + \vec{F}_{4/2} + \vec{F}_{5/2}$$

Exemple

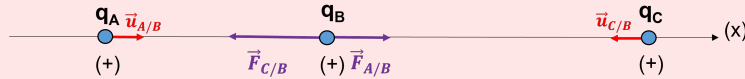
On pose sur un axe (ox) trois charges positives q_A , q_B , q_C (voir figure).



-Déterminer la force résultante sur la charge q_B produite par les autres charges ?

On donne : $q_A = 2\mu\text{C}$, $q_B = 4\mu\text{C}$, $q_C = 6\mu\text{C}$, $r_{AB} = 3\text{cm}$, $r_{CB} = 7\text{cm}$, $K = 9 \cdot 10^9 \text{SI}$

Solution :



$$\vec{F}_B = \vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{C/B}$$

On a

$$\vec{F}_{A/B} = K \frac{q_A q_B}{r_{AB}^2} \vec{u}_{A/B}$$

avec

$$\vec{u}_{A/B} = \vec{i}$$

$$\vec{F}_{A/B} = \frac{(9 \cdot 10^9)(2 \cdot 10^{-6})(4 \cdot 10^{-6})}{(3 \cdot 10^{-2})^2} \vec{i}$$

on aura

$$\vec{F}_{A/B} = 80 \vec{i}$$

d'autre part

$$\vec{F}_{C/B} = K \frac{q_C q_B}{r_{CB}^2} \vec{u}_{C/B}$$

avec

$$\vec{u}_{C/B} = -\vec{i}$$

$$\vec{F}_{C/B} = \frac{(-9 \cdot 10^9)(6 \cdot 10^{-6})(4 \cdot 10^{-6})}{(7 \cdot 10^{-2})^2} \vec{i}$$

on aura

$$\vec{F}_{C/B} = -44 \vec{i}$$

Au final

$$\Rightarrow \vec{F}_B = 80 \vec{i} - 44 \vec{i} = 36 \vec{i}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_B| = 36 \text{N}$$

Champ et Potentiel Électrostatiques

Sommaire

3.1	Introduction	22
3.2	Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle	22
3.2.1	Champ électrique	22
3.2.2	Champ électrique créé par un ensemble de charges : Principe de superposition	23
3.2.3	Potentiel électrostatique	25
3.2.4	Potentiel créé par un ensemble de charges : Principe de superposition	27
3.2.5	Relation entre le champ et le potentiel électrostatique	27
3.2.6	Lignes de champ électrique et surface équipotentielle	28
3.2.7	Énergie potentielle et énergie interne d'un système de charge	30
3.3	Champ et potentiel électrostatiques créés par une distribution continue de charges	32
3.3.1	Distribution continue de charges	32
3.3.2	Calcul du champ et potentiel électrostatique	34
3.4	Dipôle électrique	37
3.4.1	Introduction	37
3.4.2	Définition	38
3.4.3	Potentiel créé par un dipôle électrique	38
3.4.4	Le champ créé par un dipôle électrique	39
3.4.5	Dipôle placé dans un champ électrique	39

3.4.6	Énergie potentielle d'un dipôle placé dans un champ électrique . . .	40
3.5	Théorème de Gauss	42
3.5.1	Introduction	42
3.5.2	Vecteur surface	42
3.5.3	Flux d'un vecteur champ électrique à travers une surface	42
3.5.4	Énoncé du théorème de Gauss	43
3.5.5	Étapes pour appliquer le théorème de Gauss	43
3.5.6	Quelques exemples d'applications	43

3.1 Introduction

Le champ électrique est un concept fondamental en physique, essentiel pour comprendre les interactions entre charges électriques. Il décrit la force électrique exercée par une charge ou un ensemble de charges sur une charge test placée dans son voisinage. Le potentiel électrostatique permet de décrire l'énergie électrique associée à une charge dans un champ électrique. Le potentiel électrostatique permet de comprendre l'énergie potentielle électrique de cette charge en un point donné de l'espace. Le potentiel électrostatique V en un point est défini comme le travail nécessaire pour déplacer une charge q depuis l'infini jusqu'à ce point, sans accélération.

3.2 Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle

3.2.1 Champ électrique

Soit une charge q_1 placée en un point O, exerçant une force électrostatique sur une charge q_2 située en un point M.

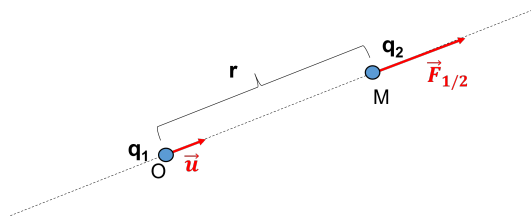


FIGURE 3.1

La force d'interaction est donnée par la loi de Coulomb :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1/2} &= K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} \\ \vec{F}_{1/2} &= q_2 \left(\frac{K q_1}{r^2} \vec{u} \right) \\ \vec{F}_{1/2} &= q_2 \vec{E}(M)\end{aligned}$$

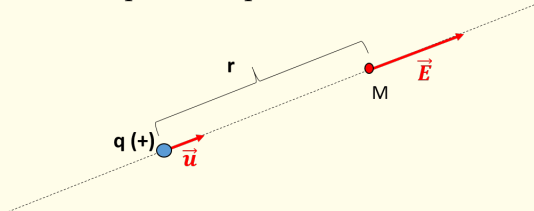
La quantité entre parenthèse qui ne dépend que de la charge q_1 est nommée **champ électrique**, créée par q_1 en un point M dans l'espace différent de O. On note ce champ vectoriel

par \vec{E} .

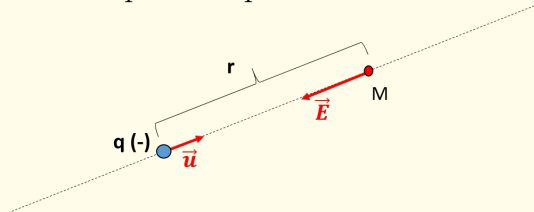
$$\vec{E}(M) = K \frac{q_1}{r^2} \vec{u}$$

Important

* Le champ électrique est **sortant** si la charge est positive.



* Le champ électrique est **entrant** si la charge est négative.



* Le vecteur unitaire \vec{u} est toujours **sortant** de la charge qui crée le champ, dirigé vers le point M.

* Le champ électrique n'est pas défini au point où se trouve la charge ($r = 0$).

3.2.2 Champ électrique créé par un ensemble de charges : Principe de superposition

Le champ électrique résultant créé par les charges ponctuelles autour de M est égale à la somme vectorielles des champs individuels :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Avec

$$\vec{E}_i = K \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

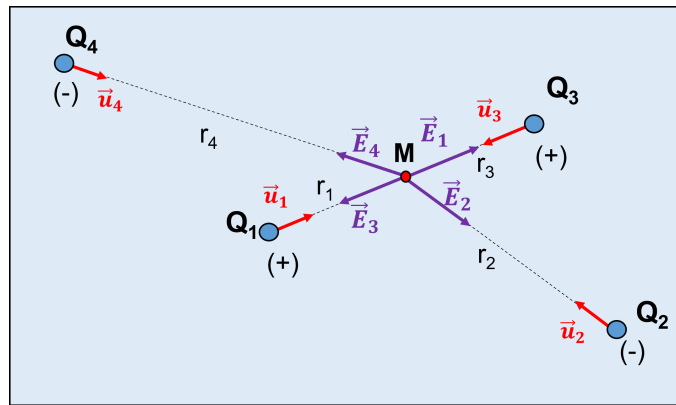
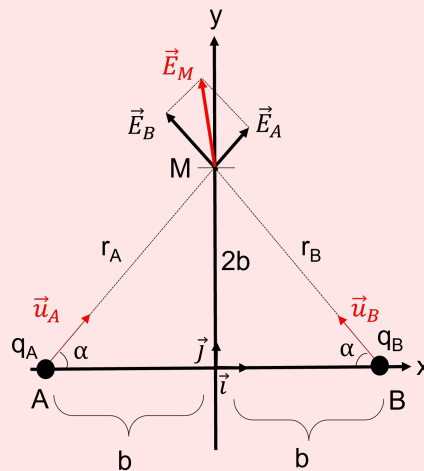


FIGURE 3.2

Exemple

Soit deux charges ponctuelles $q_A = 20\mu\text{C}$ et $q_B = 30\mu\text{C}$, sont placées respectivement au point $A(-b, 0)$ et $B(b, 0)$ suivant l'axe (ox) . Déterminer le champ \vec{E} créée par les deux charges q_A et q_B au point $M(0, 2b)$ avec $b = 1\text{m}$.

Solution :



$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

tel que

$$\vec{E}_A = K \frac{q_A}{r_A^2} \vec{u}_A$$

et

$$\vec{E}_B = K \frac{q_B}{r_B^2} \vec{u}_B$$

On a :

$$\vec{u}_A = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{u}_B = -\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

$$r_A^2 = b^2 + (2b)^2 = 5b^2$$

$$r_B^2 = b^2 + (2b)^2 = 5b^2$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{r_A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } \sin \alpha = \frac{2b}{r_A} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

d'où

$$\vec{E}_A = K \frac{q_A}{r_A^2} (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$$

$$\vec{E}_A = K \frac{q_A}{5b^2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{j} \right)$$

et

$$\vec{E}_B = K \frac{q_B}{r_B^2} (-\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$$

$$\vec{E}_B = K \frac{q_B}{5b^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{j} \right)$$

au final :

$$\vec{E}(M) = \frac{K}{5\sqrt{5}b^2} (q_A - q_B) \vec{i} + \frac{2K}{5\sqrt{5}b^2} (q_A + q_B) \vec{j}$$

A.N :

$$\vec{E}(M) = -8.05 \cdot 10^3 \vec{i} + 80.5 \cdot 10^3 \vec{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}(M)| = 80.9 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

3.2.3 Potentiel électrostatique

Soit une courbe quelconque (AB) et soit un champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par une charge ponctuelle Q en un point O de l'espace dont son expression est :

$$\vec{E}(M) = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Soit $d\vec{l}$ un élément de longueur de cette courbe tel que :

$$d\vec{l} = d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp}$$

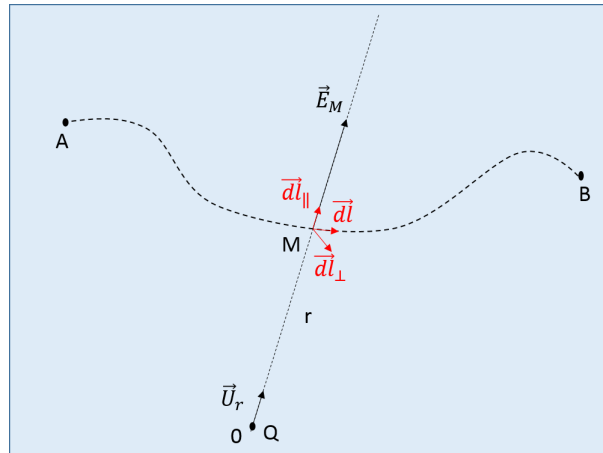


FIGURE 3.3

La circulation élémentaire dC du champ $\vec{E}(M)$ sur l'élément de longueur \vec{dl} est le produit scalaire tel que :

$$\begin{aligned} dC &= \vec{E}(M) \cdot \vec{dl} \\ &= K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \cdot (\vec{dl}_{\parallel} + \vec{dl}_{\perp}) \\ &= K \frac{Q}{r^2} (\vec{u}_r \cdot \vec{dl}_{\parallel} + \vec{u}_r \cdot \vec{dl}_{\perp}) \end{aligned}$$

On a

$$\vec{u}_r \cdot \vec{dl}_{\perp} = 0 \quad (\vec{u}_r \perp \vec{dl}_{\perp})$$

Donc

$$\begin{aligned} dC &= K \frac{Q}{r^2} (\vec{u}_r \cdot \vec{dl}_{\parallel}) \\ &= K \frac{Q}{r^2} (\vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r), \quad (dr \vec{u}_r = \vec{dl}_{\parallel}) \\ \Rightarrow dC &= K \frac{Q}{r^2} dr \end{aligned}$$

Pour déterminer la circulation du champ électrostatique entre le point A et B :

$$\begin{aligned} C_{AB} &= \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} \\ &= \int_A^B K \frac{Q}{r^2} dr \\ \Rightarrow C_{AB} &= \frac{kQ}{r_A} - \frac{kQ}{r_B} \end{aligned}$$

La circulation du champ électrique ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position **initiale** et **finale**.

Le potentiel électrostatique $V(M)$ est défini tel que la circulation du champ entre deux

positions est égal à la différence de potentiel entre les points A et B.

$$\begin{aligned} C_{AB} &= \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} \\ &= K \frac{Q}{r_A} - K \frac{Q}{r_B} \\ &= V_A - V_B = -\Delta V \end{aligned}$$

Avec

$$V(M) = K \frac{Q}{r} + cste$$

Si on pose

$$\begin{aligned} V(r \rightarrow \infty) = 0 &\Rightarrow cste = 0 \\ \Rightarrow V(M) &= K \frac{Q}{r} \end{aligned}$$

* Contrairement à \vec{E} et \vec{F} le potentiel électrostatique est une fonction **scalaire**, son unité est le Volt (V).

3.2.4 Potentiel crée par un ensemble de charges : Principe de superposition

Soit un ensemble de charges ponctuelles, le potentiel électrostatique crée par ce dernier est la somme **algébrique** des potentiels créés par chaque charge au point M.

$$V(M) = \sum_i K \frac{q_i}{r_i}$$

3.2.5 Relation entre le champ et le potentiel électrostatique

On a défini précédemment que la circulation du champ élémentaire s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} dC &= \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= K \frac{Q}{r^2} dr \\ \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -dV \end{aligned}$$

Si on exprime le vecteur champ électrostatique ainsi que le vecteur déplacement en coordonnées cartésiennes, on aura :

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

et

$$d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

la quantité dV peut s'écrire comme suit :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{dl} &= E_x dx + E_y dy + E_z dz \\ &= - \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) \end{aligned}$$

par identification :

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = - \left[\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right]$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$$

* On dit que Le champ électrostatique **dérive d'un potentiel**.

Remarque

On peut exprimer le champ électrostatique en fonction du potentiel dans les coordonnées cylindriques ou sphériques tel que :

***/En coordonnées cylindriques :**

$$\vec{E} = - \left[\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \right]$$

***/En coordonnées sphériques :**

$$\vec{E} = - \left[\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_\rho \right]$$

3.2.6 Lignes de champ électrique et surface équipotentielle

3.2.6.1 Lignes de champ électrique

Une ligne de champ est toute courbe tangente en tout point au champ électrique \vec{E} , et orientée dans le même sens de \vec{E} .

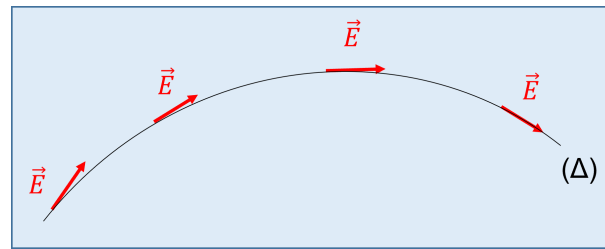


FIGURE 3.4

- Pour le cas d'une charge ponctuelle q isolée :

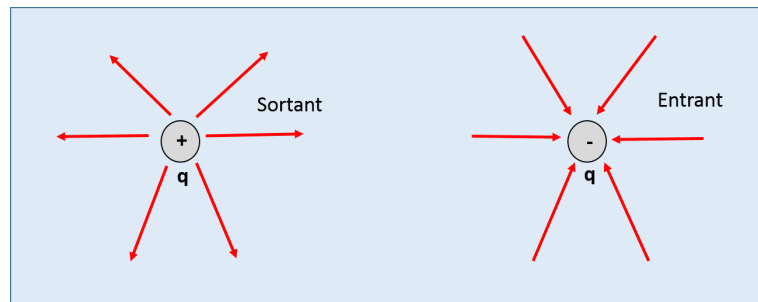


FIGURE 3.5

- Pour le cas de deux charges voisines :

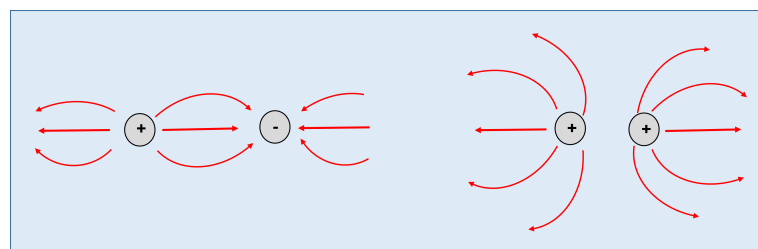


FIGURE 3.6

⚠ Remarque

- Les lignes de champ ne se croisent jamais.
- Les lignes de champ sont sortantes des charges positives et entrantes si les charges sont négatives.

3.2.6.2 Surface équipotentielle

Une surface équipotentielle se définit par l'ensemble des points M ayant le même potentiel.

$$\Rightarrow V(M) = cste$$

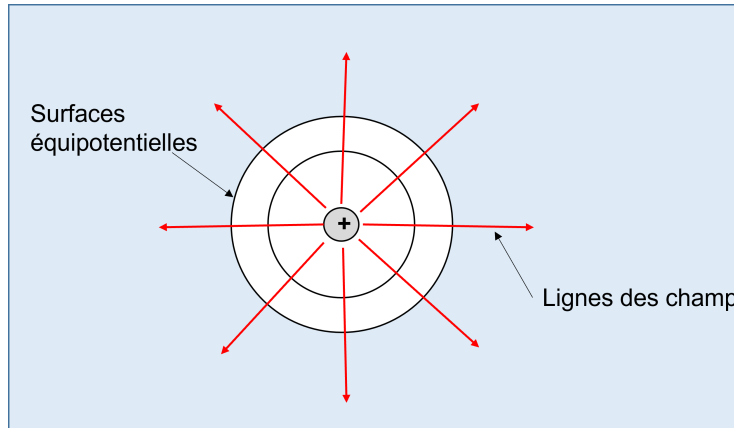


FIGURE 3.7

Les lignes équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ :

$$\begin{aligned} \int dV &= - \int \vec{E} \cdot \vec{dl} \\ \Rightarrow \int_{V_M}^{V_{M'}} dV &= - \int \vec{E} \cdot \vec{dl} \\ \Rightarrow V_{M'} - V_M &= - \int \vec{E} \cdot \vec{dl} \end{aligned}$$

Sur une même surface équipotentielle :

$$V_M = V_{M'} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{dl}$$

3.2.7 Énergie potentielle et énergie interne d'un système de charge

3.2.7.1 Énergie potentielle

Par définition, la circulation élémentaire du champ électrique pour un déplacement \vec{dl} est telle que :

$$dV = - \int \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

si on pose une charge q dans ce champ électrique, alors cette charge va subir une force tel que :

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

soit

$$\begin{aligned} q \vec{E} \cdot \vec{dl} &= -q dV \\ \Rightarrow \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{dl}}_{(1)} &= -q dV \end{aligned}$$

(1) \Rightarrow détermine le travail élémentaire de la force \vec{F} pour un déplacement \vec{dl} .

Le travail effectué par la force électrique pour le déplacement de $A \rightarrow B$:

$$\begin{aligned}W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} \\ &= -q \int_{V_A}^{V_B} dV \\ \Rightarrow W_{A \rightarrow B} &= qV_A - qV_B\end{aligned}$$

On définit le produit qV par l'énergie potentielle, on écrit :

$$E_p = qV(M)$$

3.2.7.2 Énergie interne d'un système à plusieurs charges

On définit l'énergie interne d'un système composé de deux charges électriques q_1 et q_2 correspond au travail nécessaire pour assembler ces deux charges en l'absence d'interaction initiale. Il s'agit de l'énergie potentielle de la charge q_2 (ou q_1) lorsqu'elle est placée dans le champ électrique généré par la charge q_1 (ou q_2).

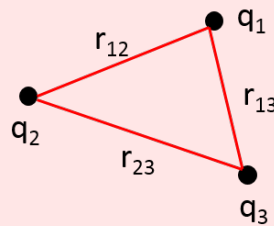
L'énergie interne d'un système à plusieurs charges q_1, q_2, q_3, \dots est la somme des énergies potentielles qui correspond à chacune des charges ramener de l'infini vers la charge déjà présente, on écrit de manière générale :

$$U = \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_{i \neq j}^n \frac{k q_i q_j}{r_{ij}}$$



Exemple

-Déterminer l'énergie interne du système formé par les trois charges ponctuelles q_1, q_2, q_3 .



Solution :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_{i \neq j}^n \frac{k q_i q_j}{r_{ij}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{k q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{k q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{k q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{k q_2 q_1}{r_{21}} + \frac{k q_3 q_1}{r_{31}} + \frac{k q_3 q_2}{r_{32}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2k q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{2k q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{2k q_1 q_3}{r_{13}} \right) \\
 \Rightarrow U &= K \left(\frac{k q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{k q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{k q_1 q_3}{r_{13}} \right)
 \end{aligned}$$

3.3 Champ et potentiel électrostatiques crée par une distribution continue de charges

3.3.1 Distribution continue de charges

On considère tout objet ayant une charge q répartie d'une manière continue caractérisé par **une densité de charge** (c'est la quantité de charge par unité d'espace) on distingue 3 types de distributions de charges continues :

3.3.1.1 Distribution linéique (λ)

Les charges sont distribuées dans une géométrie linéaire, pour une longueur infinitésimale dl .

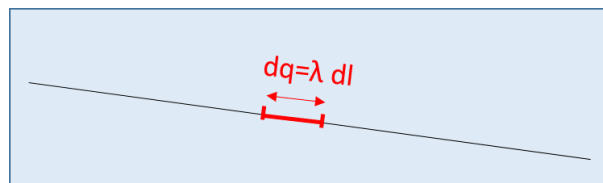


FIGURE 3.8

La charge élémentaire est défini par la relation :

$$dq = \lambda dl$$

Avec λ : *densité linéique*, l'unité est (C/m).

3.3.1.2 Distribution surfacique (σ)

Les charges sont distribuées dans une géométrie surfacique.

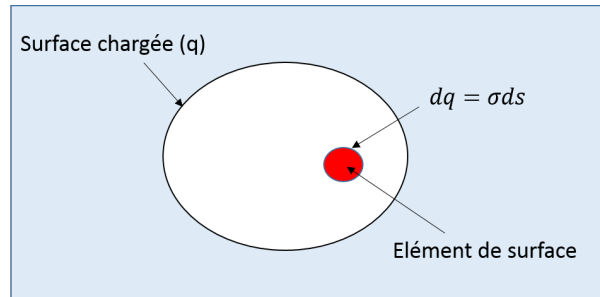


FIGURE 3.9

Pour une surface élémentaire ds , la charge dq est de la forme :

$$dq = \sigma ds$$

Avec σ : densité surfacique, l'unité est (C/m^2).

3.3.1.3 Distribution volumique (ρ)

les charges sont distribuées dans un volume.

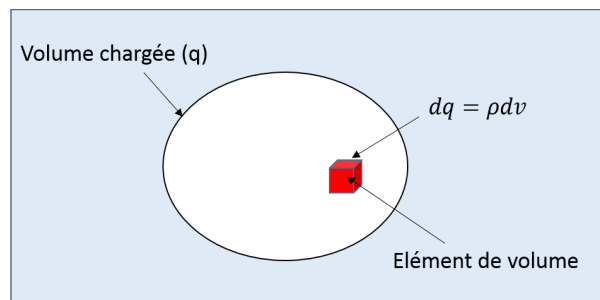


FIGURE 3.10

Pour un volume élémentaire dV , la charge élémentaire est :

$$dq = \rho dV$$

Avec ρ : densité volumique, l'unité est (C/m^3).

Remarque

Si la distribution de charge est uniforme pour les 3 cas de géométrie, alors leurs densités de charges correspondantes sont constantes.

3.3.2 Calcul du champ et potentiel électrostatique

Pour déterminer le champ et le potentiel électrostatique total produits par une distribution de charge, on commence par calculer l'élément de champ et de potentiel (dE, dV) créée par un élément de charge dq (considéré comme une charge ponctuelle), ensuite on somme (intègre) sur toute la géométrie du corps, on aura :

$$\begin{aligned}\vec{dE} &= \frac{K dq}{r^2} \vec{u} \\ dV &= \frac{K dq}{r}\end{aligned}$$

- Cas linéaire : $dq = \lambda dl$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \int \vec{dE} = \int \frac{K dq}{r^2} \vec{u} \\ \vec{E} &= \int \frac{K \lambda dl}{r^2} \vec{u}\end{aligned}$$

De même pour le potentiel :

$$\begin{aligned}V &= \int dV = \int \frac{K dq}{r} \\ V &= \int \frac{K \lambda dl}{r}\end{aligned}$$

- Cas surfacique : $dq = \sigma ds$

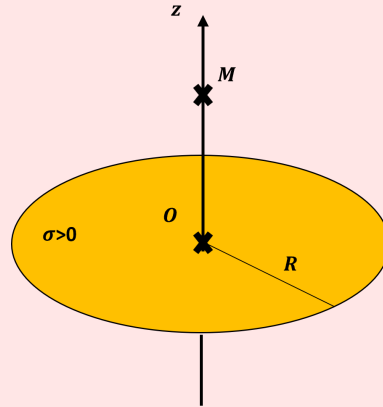
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \iint \vec{dE} = \iint \frac{K dq}{r^2} \vec{u} \\ \vec{E} &= \iint \frac{K \sigma ds}{r^2} \vec{u} \\ V &= \iint dV = \iint \frac{K dq}{r} \\ V &= \iint \frac{K \sigma ds}{r}\end{aligned}$$

- Cas volumique : $dq = \rho dV$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \iiint \vec{dE} = \iiint \frac{K dq}{r^2} \vec{u} \\ \vec{E} &= \iiint \frac{K \rho dV}{r^2} \vec{u} \\ V &= \iiint dV = \iiint \frac{K dq}{r} \\ V &= \iiint \frac{K \rho dV}{r}\end{aligned}$$

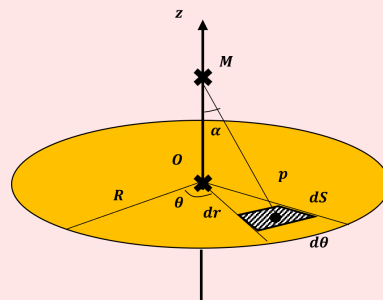
Exemple

Un disque de rayon R porte une charge électrique positive répartie uniformément sur sa surface avec une densité de charge surfacique σ (voir figure).



- 1- Calculer le potentiel V créée par ce disque en un point M , situé sur l'axe du disque à une distance z de son centre.
- 2- En déduire l'expression du champ électrostatique $E(M)$.
- 3- Tracer la courbe $E(z)$ et en déduire le champ au centre O du disque.
- 4- Retrouver le champ crée par un plan infini uniformément chargé.

Solution :



1- Le potentiel $V(M)$:

Soit dS un élément de surface du disque de charge élémentaire dq centré en p .

Soit $dq = \sigma dS$ crée au point $M(0, 0, z)$ un potentiel élémentaire $dV(M)$ tel que :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 PM}$$

Avec dS l'élément de surface s'écrit sous la forme : $dS = r dr d\theta$

D'autre part

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -r\vec{u}_r + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow PM = (r^2 + z^2)^{1/2}$$

Le potentiel élémentaire s'écrit :

$$dV(M) = \frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{1/2}} dr$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|)$$

$$\Rightarrow V(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - z), & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} + z), & z < 0 \end{cases}$$

2- L'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$:

La relation qui relie le champ $\vec{E}(M)$ et la potentiel électrostatique $V(M)$:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

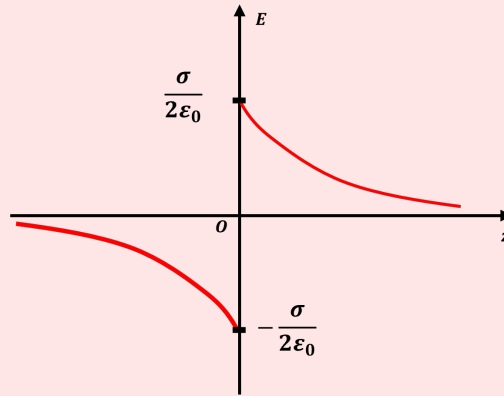
La distribution présente une symétrie de révolution autour de l'axe z . Tout plan contenant l'axe z est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ \vec{E} en un point M de l'axe z est porté par \vec{k} , donc on a :

$$E(M) = -\frac{\partial V(M)}{\partial z}$$

$$\Rightarrow E(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 1 \right) \vec{k}, & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + 1 \right) \vec{k}, & z < 0 \end{cases}$$

3-Tracer de la courbe $E(z)$:



Le champ \vec{E} est discontinu à travers une surface chargée, pour $z = 0 \Rightarrow \vec{E}(0) = 0$ (le champ est nul).

4-le champ crée par un plan infini uniformément chargé :

Il suffit de tendre R vers l'infini on obtient un plan infini uniformément chargé :

$$\vec{E} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}, & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}, & z < 0 \end{cases}$$

3.4 Dipôle électrique

3.4.1 Introduction

On détermine dans la nature des systèmes électriquement neutres mais dont le centre des charges (barycentre) des charges négatives ne coïncide pas avec celui des charges positives. Ces systèmes peuvent souvent être décrits, par deux charges ponctuelles opposées, $+q$ et $-q$, séparées par une distance fixe. Ce type de configuration est appelé : **dipôle électrostatique**.

Exemple

Chimie moléculaire : Les molécules d'eau (H_2O) sont des dipôles électriques naturels. Les deux atomes d'hydrogène et l'atome d'oxygène forment une configuration où le centre des charges positives ne coïncide pas avec celui des charges négatives, créant un dipôle.

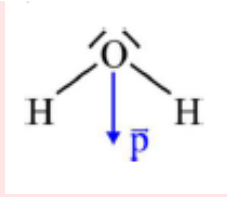


FIGURE 3.11

3.4.2 Définition

Un dipôle électrique est représenté par un ensemble composé de deux charges ponctuelles égales mais de signes opposés $(-q, +q)$ séparées par une petite distance d . Il est caractérisé par le moment dipolaire tel que :

$$\vec{P} = q \cdot \vec{d} \text{ (C.m)}$$

Le moment dipolaire \vec{P} est orienté de la charge $(-)$ vers la charge $(+)$.

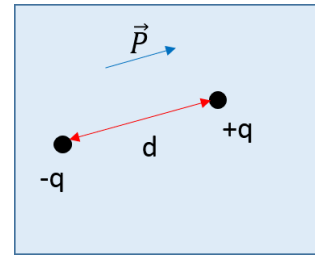


FIGURE 3.12

3.4.3 Potentiel crée par un dipôle électrique

Supposant un dipôle formé par deux charges $(q_1 = -q, q_2 = +q)$, distant de d .

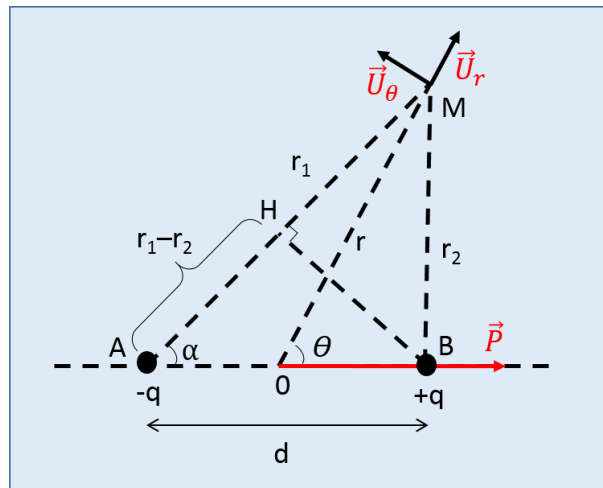


FIGURE 3.13

Le potentiel au point M distant du centre dû au dipôle est tel que :

$$\begin{aligned}
 V(M) &= V_1(M) + V_2(M) \\
 &= \frac{K q_1}{r_1} + \frac{K q_2}{r_2} \\
 &= Kq \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right] \\
 &= Kq \left[\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right]
 \end{aligned}$$

On suppose que le point M est très loin du point O $\Rightarrow r_1 \gg d$ et $r_2 \gg d$.

Alors d'une part : $r_1 \simeq r_2 \simeq r \Rightarrow r_1 r_2 = r^2$

et d'autre part : $r_1 - r_2 = d \cos \alpha \simeq d \cos \theta$

Le potentiel d'un dipôle est de la forme :

$$\begin{aligned}
 V(M) &\simeq \frac{K q d \cos \theta}{r^2} \\
 \Rightarrow V(M) &= \frac{K P \cos \theta}{r^2}
 \end{aligned}$$

3.4.4 Le champ crée par un dipôle électrique

Prenons l'équation qui relie le champ et le potentiel électrostatique : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

Exprimons cette dernière en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta \\
 &= - \left[\frac{dv}{dr} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{dv}{d\theta} \vec{u}_\theta \right]
 \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} E_r = -\frac{dv}{dr} = \frac{2 K P \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{dv}{d\theta} = \frac{K P \sin \theta}{r^3} \end{cases}$$

L'expression vectorielle du champ est alors :

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{2 K P \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{K P \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta \\
 \Rightarrow E &= \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} \\
 \Rightarrow E &= \frac{K P}{r^3} \left(1 + 3 \cos^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

3.4.5 Dipôle placé dans un champ électrique

Supposons qu'un dipôle électrique défini par son moment dipolaire \vec{P} , est positionné dans un champ électrique extérieur uniforme \vec{E} . Cela signifie que les forces électriques exercées

sur les charges opposées du dipôle sont égales en intensité mais opposées en sens (deux forces égales et opposées) :

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = q\vec{E}$$

Ce couple de force est défini par rapport au centre par le moment $\vec{\Gamma}$ tel que :

$$\vec{\Gamma} = \vec{P} \times \vec{E}$$

Ce couple tend à tourner le dipôle jusqu'à aligner \vec{P} avec \vec{E}

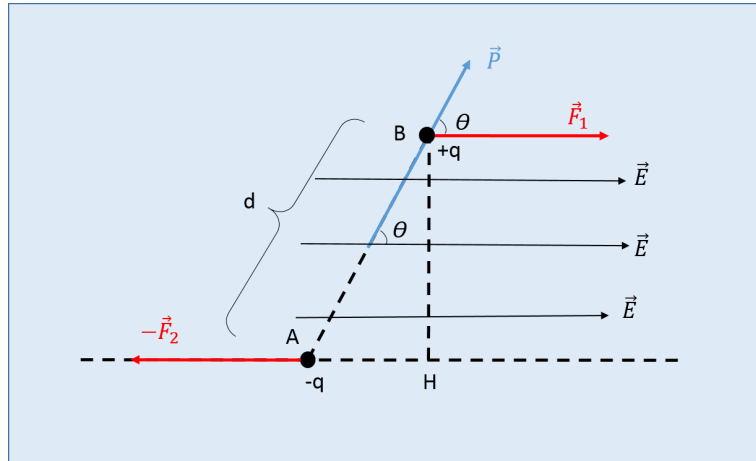


FIGURE 3.14

3.4.6 Énergie potentielle d'un dipôle placé dans un champ électrique

Supposons un dipôle régnant dans un champ électrique extérieur uniforme, alors l'énergie potentielle du dipôle est telle que :

$$\begin{aligned} E_p &= E_{P_A} + E_{P_B} \\ &= -qV(A) + qV(B) \\ &= q[V(B) - V(A)] \\ &= q(-\vec{E} \cdot \vec{AB}) \\ \Rightarrow E_p &= -\vec{E} \cdot \vec{P} \\ \Rightarrow E_p &= -EP \cos \theta \end{aligned}$$

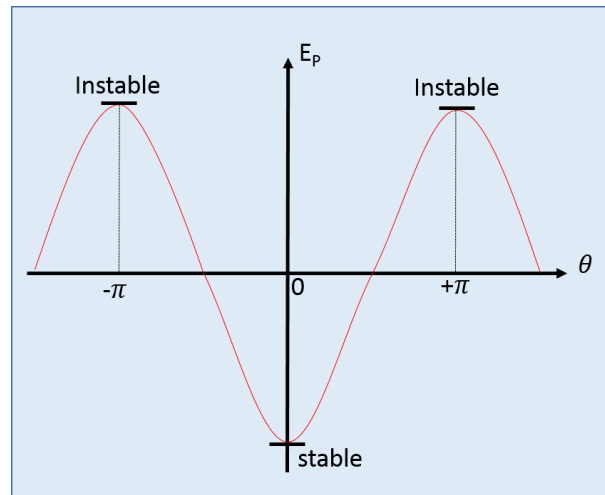


FIGURE 3.15

Étudions la valeur de l'énergie potentielle en fonction de l'angle θ :

- Pour $\theta = 0$:

l'énergie est minimale, le dipôle est en position d'équilibre **stable**, (le dipôle à le même sens et direction que \vec{E}).

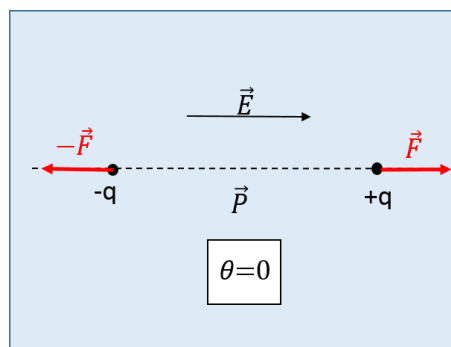


FIGURE 3.16

- Pour $\theta = \pm\pi$:

l'énergie est maximale, le dipôle est en position d'équilibre **instable**, (le dipôle à le sens inverse et même direction que \vec{E})

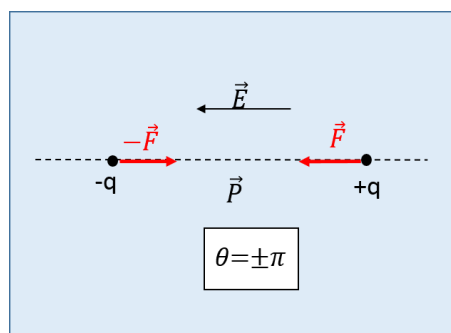


FIGURE 3.17

3.5 Théorème de Gauss

3.5.1 Introduction

On a vu précédemment que le calcul du champ électrique pour une distribution continue de charge se fait par la loi de Coulomb, dans certaines cas où la distribution de charge est plus complexe l'utilisation de cette loi peut rapidement devenir difficile. Dans ce cas, nous étudions un théorème qui simplifie les calculs lorsque le système créant le champ possède des symétries et des invariances particulières. Ce théorème est appelé : **Théorème de Gauss**.

3.5.2 Vecteur surface

Considérons une surface S décomposée en plusieurs éléments de surface dS tel que chaque élément dS est représenté par un vecteur \vec{dS} , soit un vecteur unitaire \vec{n} , qui est normale à dS , on représente cet élément de surface par un vecteur tel que :

$$\vec{dS} = ds \vec{n}$$

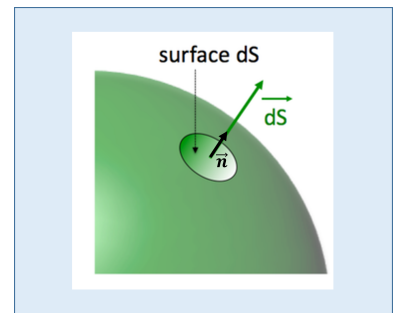


FIGURE 3.18

On note que :

- \vec{dS} est toujours perpendiculaire à la surface dS .
- Pour une surface fermée, \vec{dS} est toujours **sortant** de la surface.

3.5.3 Flux d'un vecteur champ électrique à travers une surface

On appelle flux élémentaire du champ électrostatique \vec{E} à travers l'élément de surface dS , la quantité scalaire définie par :

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

avec ϕ est le flux total tel que :

$$\phi = \iint_{(s)} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

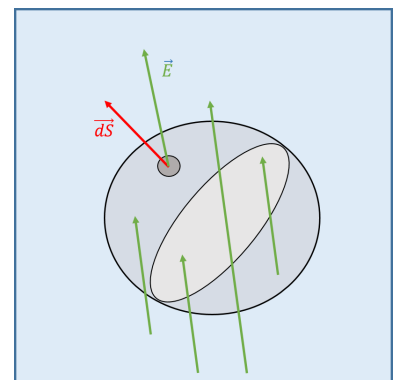


FIGURE 3.19

- Le flux électrique à travers une surface est proportionnel au nombre de lignes de champ qui la traversent.

3.5.4 Énoncé du théorème de Gauss

Le flux du champ électrique ϕ à travers une surface fermée (S) est équivalent à la somme des charges électriques ($\sum Q_{int}$) contenues à l'intérieur de cette surface, divisée par la permittivité du vide ϵ_0 , cette loi s'exprime mathématiquement comme suit :

$$\phi = \iint_{(SG)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

*(SG) : Surface de Gauss.

3.5.5 Étapes pour appliquer le théorème de Gauss

- Le calcul du champ électrique produit par les charges ayant une symétrie.
- Choisir une surface fermée (surface de Gauss) tel qu'elle passe par le point où on veut calculer le champ \vec{E} (sphere, cylindre...).
- La direction du champ électrique est soit perpendiculaire ou parallèle à la surface de Gauss ($\vec{E} \perp \vec{dS}$ ou $\vec{E} \parallel \vec{dS}$).
- Déterminer le flux ϕ sur toute la surface.
- Les charges électriques correspondant au calcul se trouvent dans de la surface de Gauss.

3.5.6 Quelques exemples d'applications

3.5.6.1 Champ crée par une charge ponctuelle



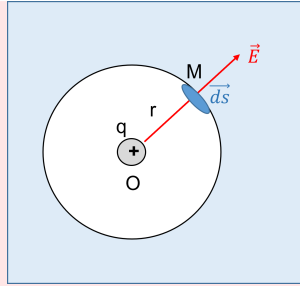
Exemple

Déterminons en utilisant le théorème de Gauss le champ électrique crée par une charge ponctuelle $q > 0$ placé en O, en un point M de l'espace :

Solution :

Le champ crée par la charge est radial. La charge ponctuelle a une géométrie sphérique.

On choisit comme surface de Gauss une sphere fermée de rayon r.



Le flux du champ électrique est :

$$\phi = \iint_{(SG)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(SG)} E \cdot dS \cdot \cos 0 = ES$$

Avec $S = 4\pi r^2$ (surface de Gauss sphérique).

$$\Rightarrow \phi = E \cdot 4\pi r^2 \quad (1)$$

d'après le théorème de Gauss : $\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ (2)

de (1) et (2) $\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

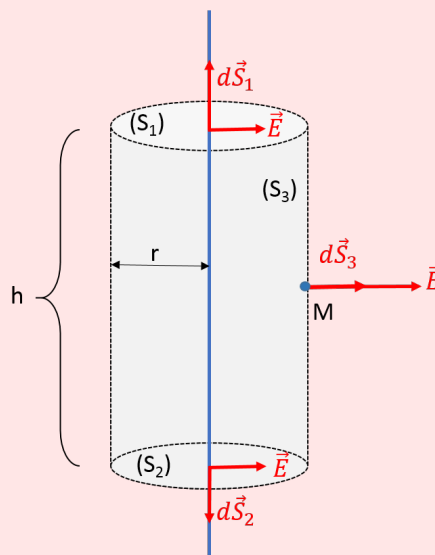
3.5.6.2 Champ créé par un fil infini

Exemple

On veut calculer par la méthode de Gauss, le champ créé en M par un fil infini chargé en longueur avec une densité uniforme linéique λ positive.

Solution :

Par raison de symétrie le champ créé par le fil sur l'axe (\perp au fil) est radial $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r) \vec{u}(r)$.



On choisit comme surface fermée de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h , avec l'axe (oz) comme l'axe de révolution .

Le théorème de Gauss permet d'écrire :

$$\phi = \iint_{(SG)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Ce cylindre se compose de trois surfaces :

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_{(s)} \vec{E} \cdot \vec{dS} \\ &= \underbrace{\iint_{(s_1)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1}_{=0 (\vec{E} \perp \vec{dS}_1)} + \underbrace{\iint_{(s_2)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2}_{=0 (\vec{E} \perp \vec{dS}_2)} + \iint_{(s_3)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_3 \\ \phi &= \iint_{(s_3)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_3 \\ &= \iint_{(s_3)} E \cdot dS \quad (\text{avec } dS \text{ en coordonnées cylindriques : } dS = r \, d\theta \, dz) \\ \phi &= E \cdot r \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \\ &= E \cdot 2\pi r h \end{aligned}$$

Pour les charges intérieures de la surface de Gauss : $\sum Q_{int} = ?$

on a

$$Q_{int} = \int_0^h \lambda \, dl = \lambda h$$

$$\begin{aligned} E \cdot 2\pi r h &= \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \end{aligned}$$

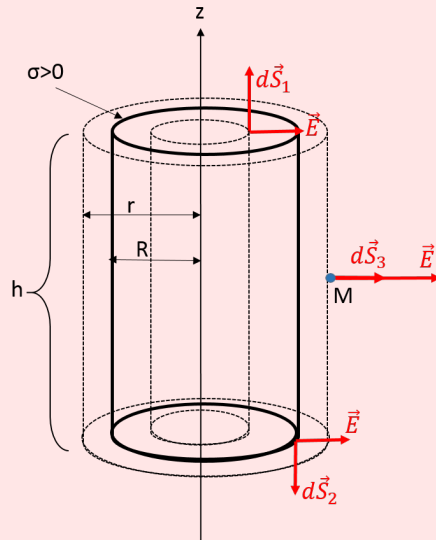
3.5.6.3 Champ créé par un cylindre infini chargé en surface

Exemple

On calcule le champ créé en M par un cylindre infini chargé en surface avec une densité uniforme $\sigma > 0$ en M .

Solution :

On choisit comme surface fermée un cylindre de rayon r et de hauteur h . Par raison de symétrie le champ créé par cette distribution de charge en M est radial et perpendiculaire à l'axe (oz)



$$\begin{aligned}
 \phi &= \iint_{(s)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
 &= \underbrace{\iint_{(s_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1}_{=0 (\vec{E} \perp d\vec{S}_1)} + \underbrace{\iint_{(s_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2}_{=0 (\vec{E} \perp d\vec{S}_2)} + \iint_{(s_3)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 \\
 \Rightarrow \phi &= \iint_{(s_3)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi r h \\
 \Rightarrow E \cdot 2\pi r h &= \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

- Cas $r < R$:

$$Q_{int} = 0$$

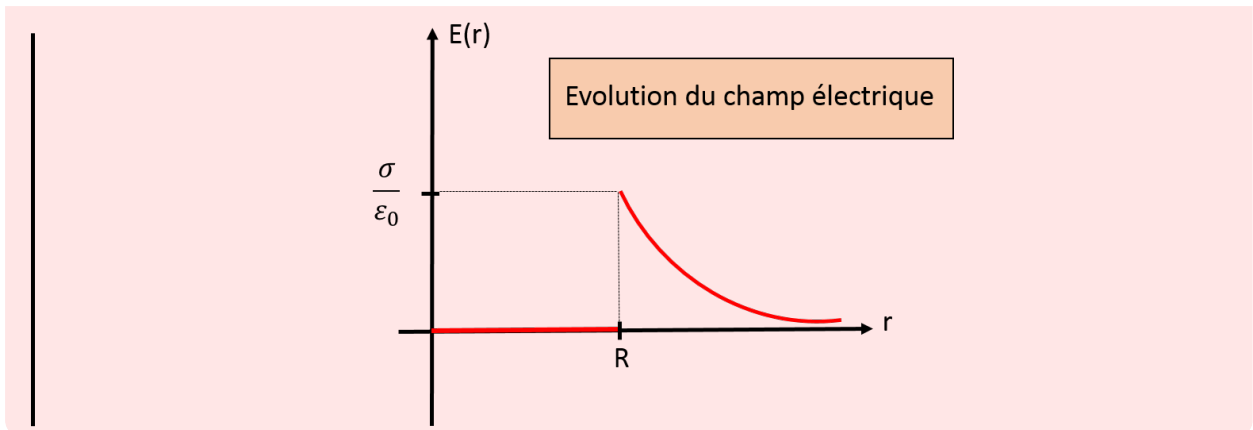
$$\Rightarrow E_1(r) = 0$$

- Cas $r > R$:

$$\sum Q_{int} = \sigma s = \sigma 2\pi R h$$

$$\Rightarrow E(r) 2\pi r h = \frac{\sigma 2\pi R h}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_2(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$



3.5.6.4 Champ créé par un plan infini chargé en surface ($\sigma > 0$)

Exemple

Soit un plan infini chargé en surface ($\sigma > 0$). Calculer le champ créé par ce plan infini en utilisant le théorème de Gauss.

Solution :

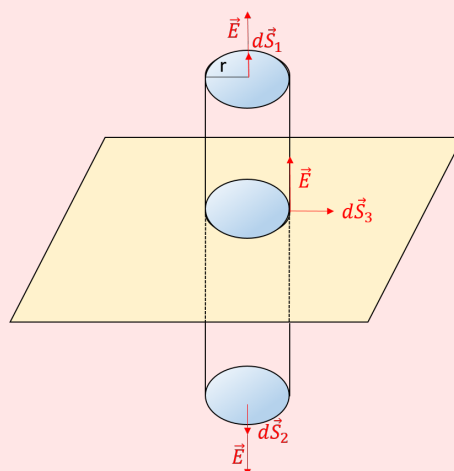
Rappel :

le champ créé par le plan infini en utilisant la méthode directe a donné un champ total (par raison de symétrie) porté par l'axe (oz) :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} E(z) \vec{k} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}, & z > 0 \\ -E(z) \vec{k} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}, & z < 0 \end{cases}$$

Retrouvons ce résultat par le théorème de Gauss :

On choisit comme surface de Gauss un cylindre fermé par ses bases de rayon r et de hauteur h .



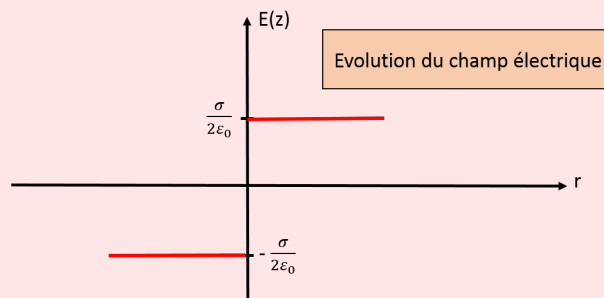
On a :

$$\begin{aligned}
 \phi &= \iint_{(s)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_{(s_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(s_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \underbrace{\iint_{(s_3)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3}_{=0} \\
 &= \iint_{(s_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(s_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 \\
 &= E S_1 + E S_2 \\
 &= E \pi r^2 + E \pi r^2 \\
 \Rightarrow \phi &= 2 \pi r^2 E \\
 \Rightarrow 2 \pi r^2 E &= \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \\
 \Rightarrow 2 \pi r^2 E &= \frac{\sigma \pi r^2}{2\epsilon_0} \\
 \Rightarrow E(z) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

Donc le champ électrique $\vec{E}(z)$ est :

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}, & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}, & z < 0 \end{cases}$$

\Rightarrow c'est un champ uniforme.



3.5.6.5 Champ créé par une sphère chargée en surface

Exemple

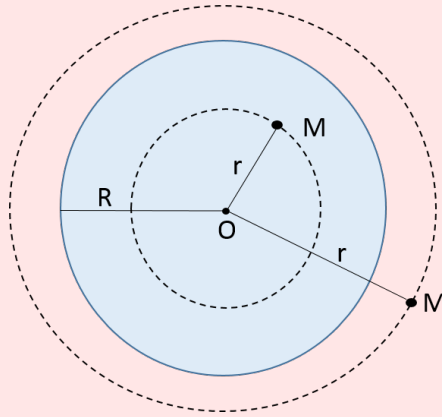
Calculons par le théorème de Gauss le champ créé en un point M de l'espace par une sphère chargée uniformément en surface avec une densité de charge $\sigma > 0$.

Solution :

Le champ créé par la sphère est radial (par raison de symétrie) $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r \vec{u}_r$

On choisit comme surface fermée de Gauss une sphère de rayon r et de centre O et de

surface $S = 4\pi r^2$.



$$\begin{aligned}\phi &= \iint_{(SG)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \phi &= \iint_{(SG)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E S_G = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \phi &= E 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

- Cas $r < R$:

$$Q_{int} = 0$$

$$\Rightarrow E_1(r) = 0$$

- Cas $r > R$:

$$\sum Q_{int} = \sigma s = \sigma 4\pi R^2$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_2(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

Conducteurs en Équilibre Électrostatique

Sommaire

4.1	Introduction	51
4.2	Définition	51
4.3	Propriétés des conducteurs en équilibre électrostatique	51
4.4	Champ électrostatique au voisinage d'un conducteur en équilibre	52
4.5	Pouvoir des pointes	53
4.6	Capacité d'un conducteur	53
4.7	Énergie potentielle d'un conducteur	54
4.8	Phénomènes d'influences	54
4.8.1	Influence partielle	54
4.8.2	Influence totale	54
4.9	Condensateurs	55
4.9.1	Définition	55
4.9.2	Différents types du condensateur	56
4.9.3	Énergie emmagasinée par un condensateur	59
4.9.4	Association de condensateurs	60

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons appris à calculer le champ électrique et le potentiel électrostatique associés à une distribution de charges donnée. Nous allons maintenant examiner comment les charges se répartissent dans des matériaux conducteurs lorsqu'ils sont en équilibre électrostatique, c'est-à-dire lorsque les distributions de charges ne varient pas dans le temps.

4.2 Définition



- On définit un conducteur électrique par tout corps à l'intérieur duquel les porteurs de **charges libres** peuvent se déplacer librement (passage de courant).
- Un conducteur est en équilibre électrostatique, si les charges sont immobiles à l'intérieur de ce conducteur, autrement dit les charges situées à l'intérieur ne subissent aucune force. \vec{F} .

4.3 Propriétés des conducteurs en équilibre électrostatique

- ⊛ Le champ total \vec{E} est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique puisque $\vec{F} = q\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$
- ⊛ Le champ électrique extérieur près de la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique est perpendiculaire à la surface.
- ⊛ Le potentiel à l'intérieur dans le conducteur est constant, puisque :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = 0 \Rightarrow V = \text{cst}$$
 On dit que le conducteur constitue un volume équipotentiel.
- ⊛ La charge à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nulle (la charge est répartie sur la surface).

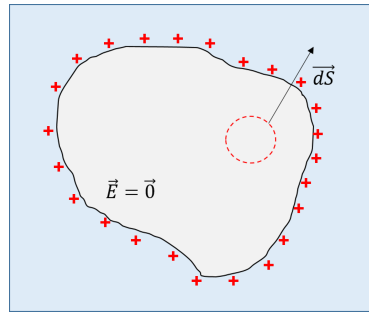


FIGURE 4.1

D'après le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_{(SG)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \\ &\Rightarrow \sum Q_{int} = 0\end{aligned}$$

4.4 Champ électrostatique au voisinage d'un conducteur en équilibre

Considérant un conducteur présentant une géométrie arbitraire. Pour calculer le champ au voisinage d'un conducteur on utilise le théorème de Gauss. On choisit comme surface fermée, un cylindre aplati de faible hauteur dont la base qui est parallèle au conducteur passe par le point M.

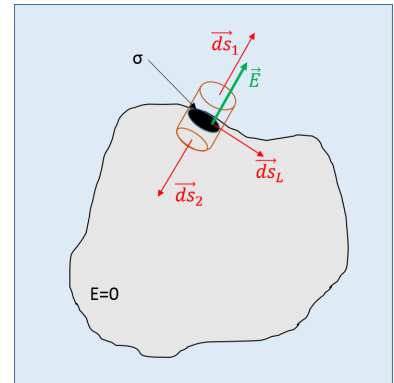


FIGURE 4.2

On a :

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_{(SG)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \\ &= \underbrace{\iint_{(s_L)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L}_{=0 (E \perp dS_L)} + \iint_{(s_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \underbrace{\iint_{(s_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2}_{=0 (E=0)} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \iint_{(s_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 &= \frac{\int \sigma dS_1}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E \cdot S_1 &= \frac{\sigma S_1}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}, \text{ (définition du théorème de Coulomb)}\end{aligned}$$

4.5 Pouvoir des pointes

Si on considère deux sphères conductrices (éloigné l'une de l'autre), de rayon R_1 et R_2 tel que $R_1 > R_2$ et si on relie les deux sphères par un fil conducteur, ils forment alors un seul conducteur de même potentiel.

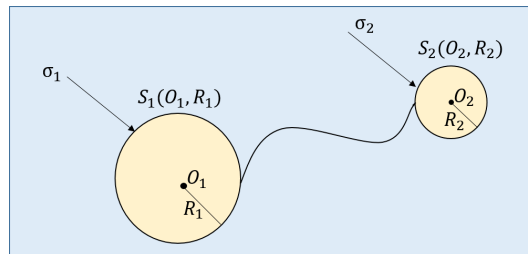


FIGURE 4.3

On a

$$\begin{aligned} V_1 = V_2 &\Rightarrow \frac{K Q_1}{R_1} = \frac{K Q_2}{R_2} \\ &\Rightarrow \frac{\sigma_1 S_1}{R_1} = \frac{\sigma_2 S_2}{R_2} \\ &\Rightarrow \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2} \\ &\Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

Puisque $R_1 \gg R_2 \Rightarrow \sigma_2 \gg \sigma_1$ (les charges s'accumulent sur les rayons de faible courbures).

\Rightarrow c'est le **pouvoir des pointes**.

4.6 Capacité d'un conducteur

La capacité (C) est définie par la quantité de charge (Q) emmagasinée sur un corps à un potentiel (V) donné. Elle ne dépend que de la géométrie du conducteur et se mesure en Farad (F) tel que :

$$C = \frac{Q}{V} \text{ (quantité positive, l'unité } F \text{ ou } C/V)$$

4.7 Énergie potentielle d'un conducteur

L'énergie potentielle se traduit par le travail qu'il faut pour charger le conducteur. Soit un conducteur en équilibre de capacité (C), portant une charge (Q) :

$$\begin{aligned} E_p &= \int dE_p = \int_0^q V dq \\ &= \int_0^{q=Q} \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \\ \Rightarrow E_p &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 \end{aligned}$$

Pour N conducteurs :

$$E_p = \sum_i \frac{1}{2C_i} Q_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} Q_i V_i = \sum_i \frac{1}{2} C_i V_i^2$$

4.8 Phénomènes d'influences

4.8.1 Influence partielle

Considérons deux conducteurs, A et B, en équilibre. Le conducteur B est chargé positivement, tandis que le conducteur A demeure neutre.

Lorsque les deux conducteurs sont rapprochés, le conducteur B génère un champ \vec{E}_B à l'intérieur du conducteur A (les électrons libres dans A se déplacent en sens opposé à \vec{E}_B , tandis que les charges positives (+) sont repoussées par \vec{E}_B . On qualifie alors que le conducteur A est électrisé par **influence**. L'influence est dite **partielle**, si une partie des lignes de champ sortant du conducteur B arrive sur le conducteur A.

Aussi le champ induit \vec{E}_i créé dans le conducteur A va influencer le conducteur B. On dit que l'influence est **mutuelle**.

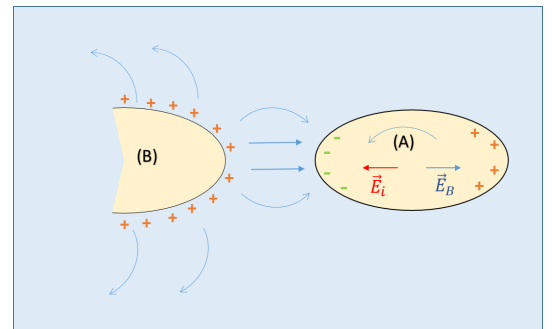


FIGURE 4.4

4.8.2 Influence totale

Le phénomène d'influence totale entre deux conducteurs se manifeste lorsque toutes les lignes du champ émanant d'un des conducteurs atteignent le second conducteur.

Supposons un conducteur en équilibre électrostatique composé de deux sphères conductrices concentriques, la sphère B est chargée positivement tandis que la sphère A est neutre, Calculons les charges $q_{A_{int}}$ et $q_{A_{ext}}$?

Appliquons le théorème de Gauss :

Soit une surface à l'intérieur du conducteur A :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi &= \iint \underbrace{\vec{E}}_{=0} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \\ \Rightarrow \sum Q_{int} &= q_B + q_{A_{int}} = 0 \\ &\Rightarrow q_B = -q_{A_{int}} \end{aligned}$$

Si le conducteur A est neutre, par conservation de charge :

$$\begin{aligned} \Rightarrow q_{A_{ext}} &= -q_{A_{int}} \\ \Rightarrow q_B &= q_{A_{ext}} \end{aligned}$$

Si le conducteur A porte une charge Q :

$$\begin{aligned} \Rightarrow q &= q_{A_{ext}} + q_{A_{int}} \\ q_{A_{ext}} &= q - q_{A_{int}} = q + q_B \end{aligned}$$

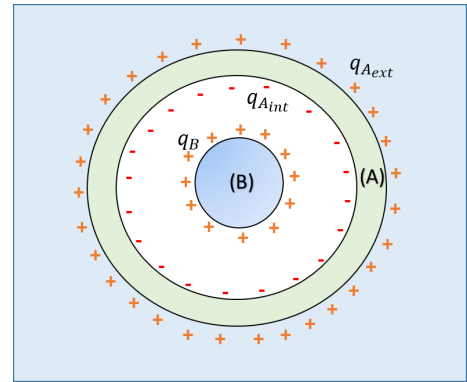


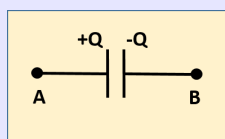
FIGURE 4.5

4.9 Condensateurs

4.9.1 Définition



- Un condensateur est formé par deux conducteurs en équilibre électrostatique en influence totale, l'espace compris entre ces conducteurs très rapprochés est soit le vide ou un milieu isolant. Ces deux conducteurs (appelé aussi armatures) portent des charges de la même quantité mais de sens opposés.
- On représente schématiquement un condensateur comme suit :



- La capacité d'un condensateur est donnée par :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

4.9.2 Différents types du condensateur

4.9.2.1 Condensateur Plan

On suppose qu'on a deux conducteurs (armatures) plans et parallèles de même surface S , séparées d'une distance d et portant une charge $+Q$ et $-Q$ répartie en surface avec une densité σ , respectivement.

En utilisant le théorème de Gauss afin de calculer le champ total créé entre les armatures, soit un cylindre fermé par ces bases de rayon R et de hauteur h , l'une des bases se trouvant dans l'armature de charge positive.

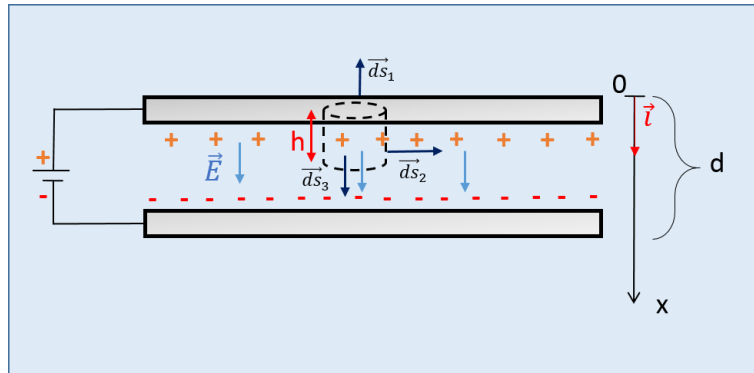


FIGURE 4.6

On a :

$$\begin{aligned} \phi &= \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{(s_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1}_{=0} + \underbrace{\iint_{(s_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2}_{=0} + \iint_{(s_3)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 \\ \Rightarrow \iint_{(s_3)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 &= \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E\pi R^2 &= \frac{\sigma\pi R^2}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i} \end{aligned}$$

On calcul par la suite la différence de potentiel entre les armatures, on a :

$$\begin{aligned} -\Delta V &= \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ \Rightarrow \int_0^d -dV &= \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^d dx \\ \Rightarrow V(0) - V(d) &= \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{Q}{V(0) - V(d)} \\
 \Rightarrow C &= \frac{\sigma S}{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}} \\
 \Rightarrow C &= \frac{\epsilon_0 S}{d} \text{ (capacité d'un condensateur plan)}
 \end{aligned}$$

4.9.2.2 Condensateur sphérique

Considérons un condensateur composé de deux sphères conductrices concentriques, où la sphère A, de rayon R_1 , est chargée positivement, et la sphère B, creuse et neutre de rayon intérieur R_2 . On suppose que les deux sphères sont en influence totale.

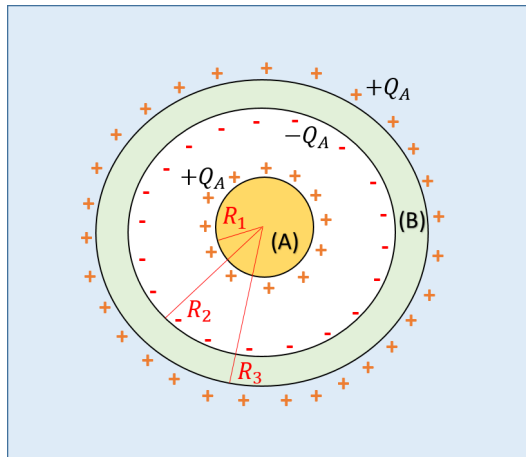


FIGURE 4.7

En appliquant le théorème Gauss pour le calcul du champ au point M situé entre R_1 et R_2

$\Rightarrow R_1 < r < R_2$:

$$\begin{aligned}
 \phi &= \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \\
 \Rightarrow E S &= E 4\pi r^2 = \frac{Q_A}{\epsilon_0} \\
 \Rightarrow E &= \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2}
 \end{aligned}$$

La différence de potentiel entre les armatures :

$$\begin{aligned}
 - \int_{V(R_1)}^{V(R_2)} dV &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr \\
 &= KQ_A \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} \\
 \Rightarrow V(R_1) - V(R_2) &= KQ_A \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)
 \end{aligned}$$

La capacité du condensateur sphérique est de la forme :

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{Q_A}{V(R_1) - V(R_2)} = \frac{Q_A}{KQ_A \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)} \\
 \Rightarrow C &= 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)
 \end{aligned}$$

4.9.2.3 Condensateur cylindrique

Considérons un condensateur formé par deux cylindres coaxiaux de longueur L et de rayon R_1 et R_2 tel que $R_1 > R_2$ et calculons le champ par le théorème de Gauss : ($R_1 < r < R_2$)

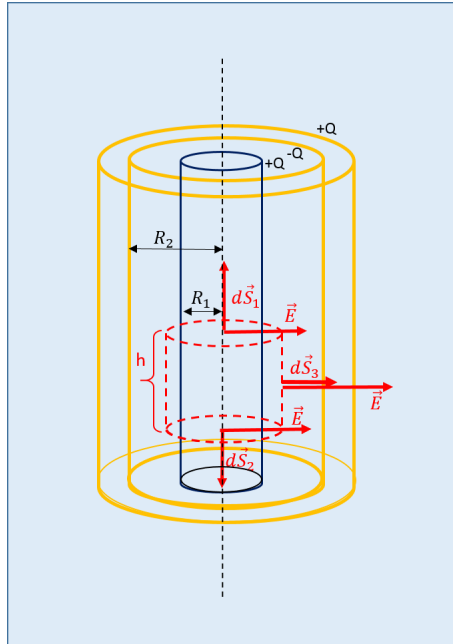


FIGURE 4.8

On choisit un cylindre fermé par ses bases comme surface de Gauss de rayon r et de hauteur h .

$$\begin{aligned}\phi &= \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow 2\pi r h E &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow E &= \frac{Q}{2\pi h \varepsilon_0 r}\end{aligned}$$

Le potentiel entre les armatures :

$$\begin{aligned}- \int_{V(R_1)}^{V(R_2)} dV &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr \\ \Rightarrow V(R_1) - V(R_2) &= \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\end{aligned}$$

La capacité du condensateur cylindrique est de la forme :

$$\begin{aligned}C &= \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \\ \Rightarrow C &= \frac{2\pi \varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\end{aligned}$$

4.9.3 Énergie emmagasinée par un condensateur

Considérons un condensateur dont l'une de ses armatures est maintenue à un potentiel V_1 avec une charge $Q_1 = +Q$, l'autre armature est maintenue à un potentiel V_2 , en raison de l'influence totale, la surface interne de cette armature porte une charge $Q_2 = +Q$.

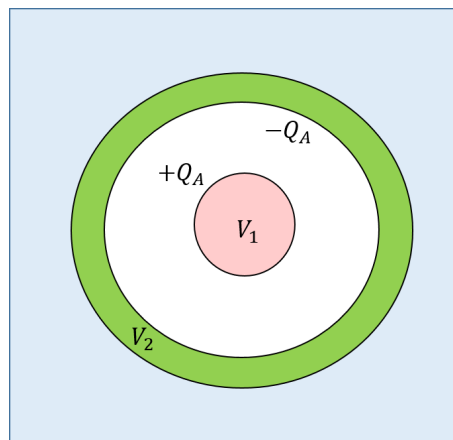


FIGURE 4.9

L'énergie emmagasinée par ce condensateur est exprimée par :

$$\begin{aligned}
 E_p &= \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 \\
 E_p &= \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) \\
 \Rightarrow E_p &= \frac{1}{2}Q \Delta V = \frac{1}{2}C \Delta V^2 = \frac{1}{2C} Q^2
 \end{aligned}$$

4.9.4 Association de condensateurs

- ✓ Association en série : La charge est identique sur tous les condensateurs.
- ✓ Association en parallèle : La différence de potentiel est identique pour tous les condensateurs.

4.9.4.1 Condensateur en série

Considérons un groupe de N condensateurs ayant une capacité C_i associés en série entre le point O et le point N, portant le potentiel V_0 et V_N , lorsque une charge Q est introduite alors par influence totale, la charge va être la même $\pm Q$.

On écrit alors :

$$\begin{aligned}
 V_N - V_0 &= (V_1 - V_0) + (V_2 - V_1) + \dots + (V_N - V_{N-1}) \\
 V_N - V_0 &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_N} \\
 &= Q \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right] = Q \left(\frac{1}{C_{eq}} \right)
 \end{aligned}$$

Le condensateur équivalent :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Avec :

$$Q_{eq} = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_N$$

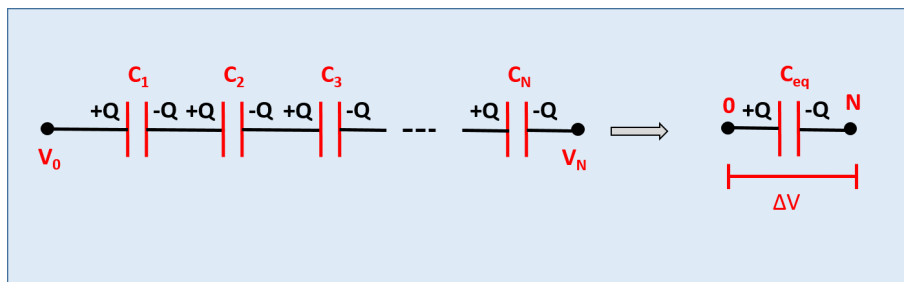


FIGURE 4.10

4.9.4.2 Condensateur en parallèle

Considérons N condensateurs de capacités C_i associés en parallèle, les condensateurs portent le même potentiel, par contre la charge totale est :

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N \\ &= C_1 \Delta V + C_2 \Delta V + \dots + C_N \Delta V \\ &= C_{eq} \Delta V = (C_1 + C_2 + \dots + C_N) \Delta V \end{aligned}$$

On a donc :

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N = \sum_i C_i$$

Avec :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N$$

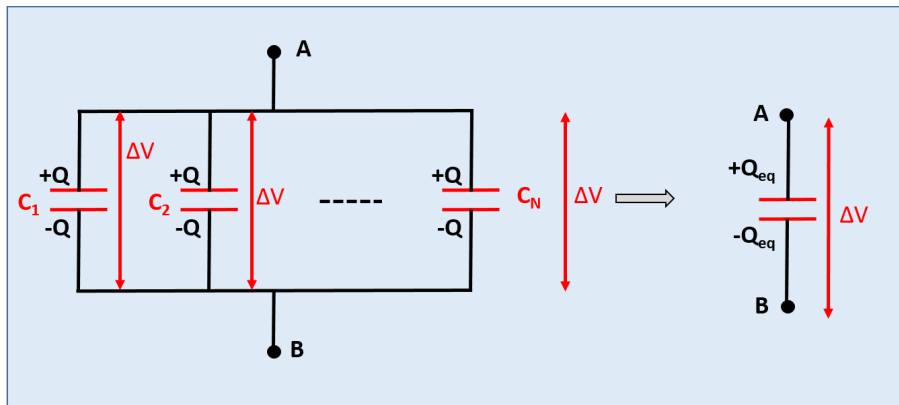


FIGURE 4.11

Electrocinétique

Sommaire

5.1	Introduction	63
5.2	Courant électrique	63
5.2.1	Définition	63
5.2.2	Intensité de courant	63
5.2.3	Densité de courant	64
5.2.4	Potentiel électrique-Tension électrique	64
5.3	Loi d'Ohm	65
5.3.1	A l'échelle macroscopique	65
5.3.2	A l'échelle microscopique	65
5.4	Loi de Joule	66
5.5	Circuits électriques	67
5.6	Associations des résistances	69
5.6.1	Association en série	69
5.6.2	Association en parallèle	70
5.7	Lois de Kirchhoff	71
5.7.1	Loi des mailles	71
5.7.2	Loi des nœuds	72

5.1 Introduction

Dans les parties précédentes nous nous sommes intéressé à l'étude des phénomènes électrostatique qui étudient les lois relatives à l'électricité immobile. Dans ce qui suit nous nous intéressons aux phénomènes électrocinétiques (déplacement des charges mobiles) dans un conducteur. L'électrocinétique, est une branche de la physique, qui se concentre sur l'étude des courants électriques, explorant ainsi le mouvement des charges électriques à travers des circuits conducteurs, essentiellement des matériaux conducteurs.

5.2 Courant électrique

5.2.1 Définition



On génère un courant électrique (qui est une grandeur algébrique) par tout déplacement des charges libres (généralement des e^-) mobiles dans un conducteur (métaux, plasma...).

L'apparition d'un courant électrique dans un conducteur est relié par une différence de potentiel (d.d.p) entre les bornes du conducteur.

5.2.2 Intensité de courant

On définit l'intensité de courant électrique par la quantité de charges déplacées à travers une surface (ou section) par unité de temps :


$$I = i(t) = \frac{dq}{dt} (\text{Ampère})$$


Avec dq en Coulomb (C) et dt en seconde (s).



Remarque

Le sens de courant est de même sens des déplacements des charges positives, un courant électrique traversant un conducteur décrit quelques phénomènes :

 **Effet thermique :** Lorsqu'un courant traverse un conducteur, il se produit une libération de chaleur, connue sous le nom d'effet Joule.

 **Effet chimique :** Décomposition des produits chimiques (effet Faraday), lors du

passage du courant ($H_2O \Rightarrow H, O$).

Effet magnétique : Lors du passage du courant, sur une aiguille aimantée engendre une déviation de l'aiguille

5.2.3 Densité de courant

Prenons un conducteur filaire de section S portant n porteurs de charges q , circulant d'une vitesse \vec{v} sur un intervalle de temps dt , les charges parcourent une distance $\vec{dl} = \vec{v} dt$. On définit par dq la quantité de charge électrique qui passe par une surface \vec{dS} pour un temps dt est l'équivalent de la quantité de charge contenue dans un volume dV :

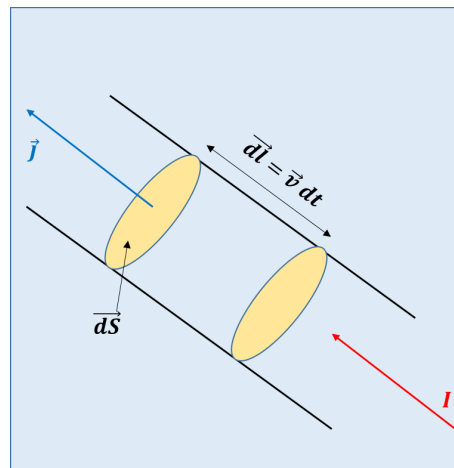


FIGURE 5.1

$$dq = n q dV, \text{ avec } (n q : \text{densité porteur de charge}) \text{ et } (dV = \vec{dl} \vec{dS})$$

$$dq = n q \vec{dl} \vec{dS} \Rightarrow (1)$$

$$dq = \underbrace{n q \vec{v}}_{\vec{j}} dt \vec{dS}$$

La densité de courant :

$$\vec{j} = n q \vec{v}$$

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \text{ (Am}^{-2}\text{)}$$

On peut exprimer la densité de courant en fonction de l'intensité de courant :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} = \vec{j} \vec{dS}$$

$$I = \iint \vec{j} \vec{dS}$$

5.2.4 Potentiel électrique-Tension électrique

- Le potentiel électrique, mesuré en volts (V), est une grandeur physique qui reflète l'état électrique d'un point M dans l'espace.

- Alors que la tension électrique (ou différence de potentiel) est associée à la circulation du champ électrique \vec{E} à travers le circuit, elle représente la différence de potentiel (d.d.p) entre deux points A et B, ayant des potentiels respectifs V_A et V_B tel que : $U_{AB} = V_A - V_B$.
- On mesure la tension avec un voltmètre branché en parallèle.

5.3 Loi d'Ohm

5.3.1 A l'échelle macroscopique

- ✓ Par définition la loi d'Ohm exprime la relation entre la résistance (R), l'intensité de courant électrique (I) qui traverse un conducteur ohmique et la tension (U) entre ses bornes :

$$V = RI$$

V est exprimé en Volt (V), R en Ohm (Ω) et I en Ampère (A).

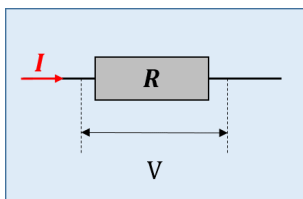


FIGURE 5.2

- ✓ La résistance a pour fonction de restreindre le flux du courant électrique dans un circuit, et elle varie en fonction du type de matériau utilisé et de sa géométrie.

5.3.2 A l'échelle microscopique

Précédemment, nous avons établi que le courant électrique est en fonction de la densité de courant pour un conducteur de forme cylindrique et de longueur déterminée L est :

$$I = jS$$

d'autre part le champ \vec{E} sur ce conducteur est :

$$E = \frac{V}{l}$$

$$\Rightarrow V = El$$

on a

$$V = R I$$

$$\Rightarrow E l = R j S$$

$$\Rightarrow j = \frac{l}{R S} E$$

On pose : $\sigma = \frac{l}{R S}$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, (\sigma : \text{conductivité du matériau})$$

✓ L'inverse de σ (conductivité du matériau) est la résistivité du matériau.

On note $\rho = \frac{1}{\sigma}$:

$$\rho = \frac{\vec{E}}{\vec{j}}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{S E}{I} ((V.m)/A)$$

✓ Dans le cas d'un conducteur en forme de fil :

$$\rho = \frac{S E}{I} = \frac{S (V/l)}{I}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{S V}{l I} = \frac{R l}{S}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\rho l}{S}$$

5.4 Loi de Joule

La loi de Joule (l'effet de Joule), est une manifestation ou apparition d'une énergie (ou chaleur) lors d'une circulation d'un courant I dans un conducteur électrique.

Soit un conducteur et un courant I qui le traverse, le travail de \vec{F} fournit pour déplacer une charge q de A à B :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B E dl$$

$$\Rightarrow W = q(V_A - V_B)$$

D'autre part : $dq = I dt \Rightarrow q = I t$

$$\Rightarrow W = I t (V_A - V_B)$$

$$\Rightarrow W = R I^2 t$$

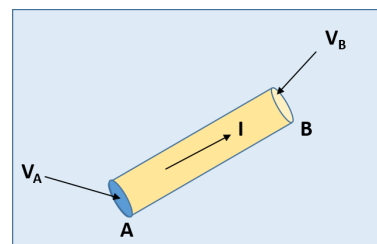


FIGURE 5.3

W est l'énergie dissipée sous forme de chaleur.

Sa puissance P est de la forme :

$$P = \frac{dW}{dt} = R I^2$$
$$\Rightarrow P = R I^2$$

5.5 Circuits électriques

Un circuit électrique est caractérisé par un regroupement de composants électriques (ou dipôles électriques), tels que des résistances, des diodes, des condensateurs, disposés en série ou en parallèle. Ces composants sont connectés par des fils conducteurs et traversés par un courant électrique. On cite deux types de circuit :

- ❖ Un circuit électrique passif : qui est traduit par une consommation d'énergie (résistance, bobine, condensateur...).
- ❖ Un circuit électrique actif : il fournit de l'énergie (diode, circuit intégré...).

On définit :

- 👉 **La branche** : une portion du circuit reliant entre deux nœuds consécutif.
- 👉 **Le nœud** : un point commun pour au moins trois branches.
- 👉 **La maille** : un ensemble de branche formant un circuit fermé.

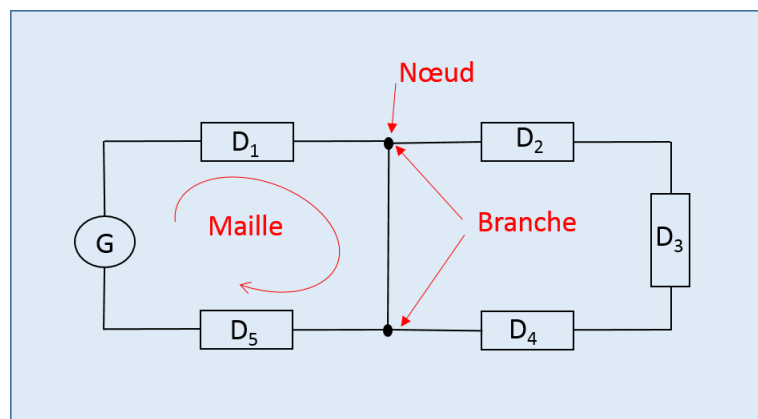


FIGURE 5.4

- 👉 **Le récepteur** : un dipôle passif, capable de convertir l'énergie électrique reçue en énergie (mécanique, thermique...)

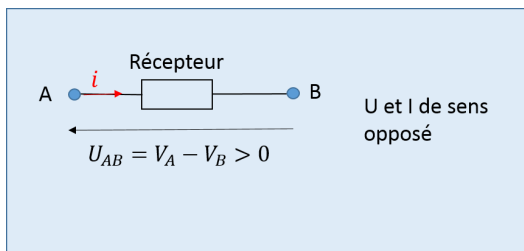


FIGURE 5.5

👉 **Le générateur de tension :** un dipôle actif, il apporte de l'énergie électrique au circuit électrique.

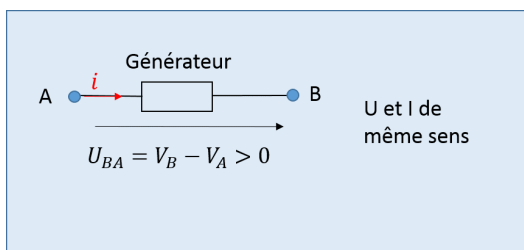


FIGURE 5.6

Deux types de générateurs :

- ▶ **Générateur de tension idéale :** Il se distingue par une tension constante entre ses bornes, qui reste indépendante du courant délivré par le générateur. Un générateur idéal présente une résistance interne nulle. $R_{interne}$ ou $r = 0$

$$V_A - V_B = e = cst, \forall i$$

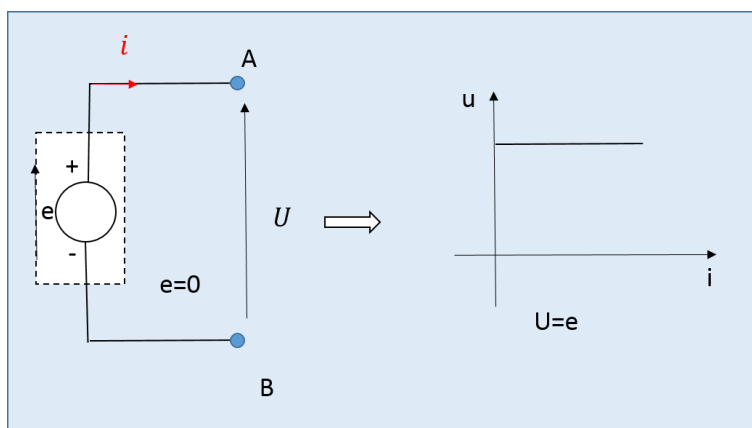


FIGURE 5.7

- ▶ **Générateur de courant idéale :** Il se manifeste par un courant constant, qui demeure indépendant de la tension aux bornes du générateur. La résistance interne est infinie dans le cas d'un générateur idéal. $R_{interne}$ ou $r \rightarrow \infty$

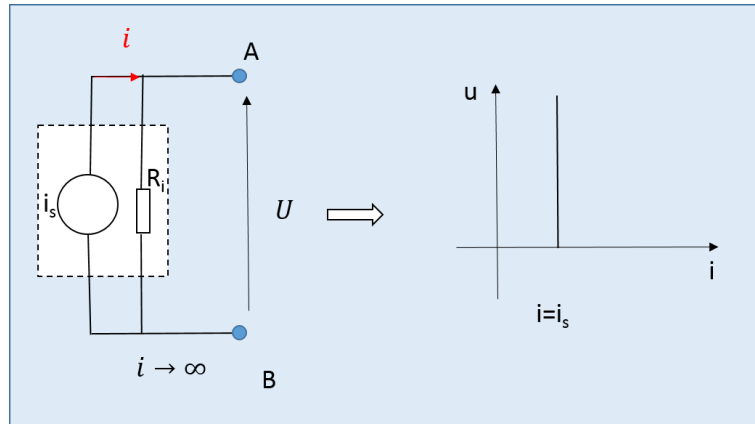


FIGURE 5.8

5.6 Associations des résistances

5.6.1 Association en série

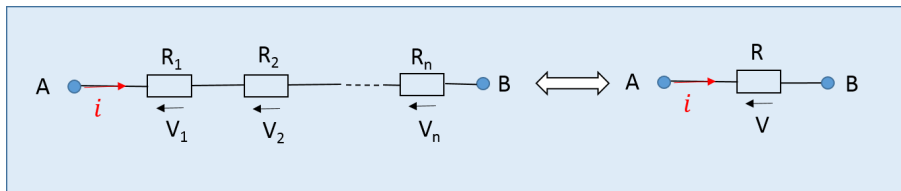


FIGURE 5.9

$$\begin{aligned} V &= V_A - V_B = V_1 + V_2 + \dots + V_n \\ &= R_1 i_1 + R_2 i_2 + \dots + R_n i_n \end{aligned}$$

on a

$$i_1 = i_2 = \dots = i_n$$

On obtient :

$$\begin{aligned} V &= (R_1 + R_2 + \dots + R_n)i = R_{eq}i \\ \Rightarrow R_{eq} &= \sum_{i=1}^n R_i \end{aligned}$$

5.6.2 Association en parallèle

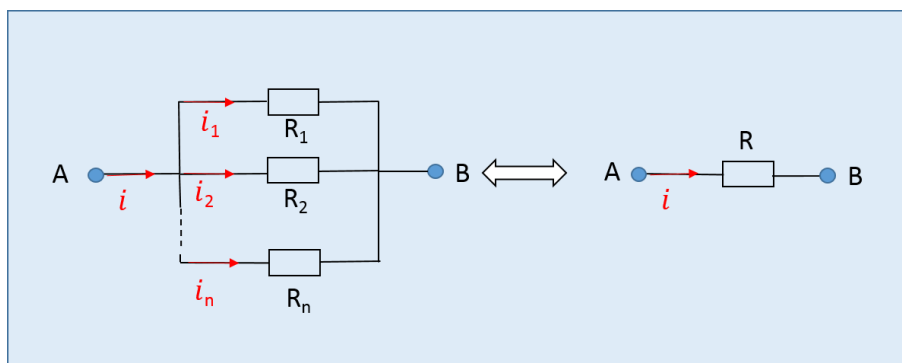


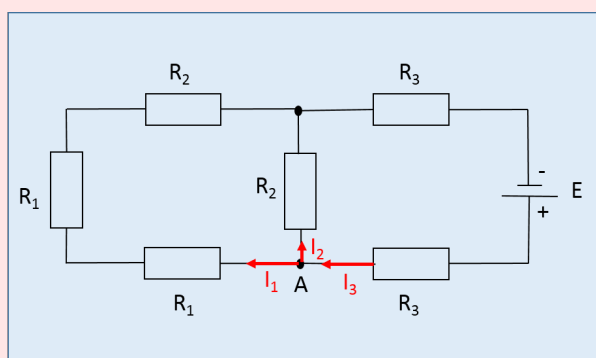
FIGURE 5.10

Les tensions sont les memes, on a :

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n \\
 &= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} \\
 &= U \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right] \\
 \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \\
 \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}
 \end{aligned}$$

Exemple

On donne $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 7\Omega$, $E = 12V$.



1. Calculer la résistance équivalente ?
2. Calculer l'intensité des courants électrique ?

Solution :

1. $R_{eq} = ?$

*) R_1, R_1 et R_2 sont en série :

$$R'_{eq} = R_1 + R_1 + R_2 = 5 + 5 + 6 = 16\Omega$$

$$\Rightarrow R'_{eq} = 16\Omega$$

*) R'_{eq} et R_2 sont en parallèle :

$$\frac{1}{R''_{eq}} = \frac{1}{R'_{eq}} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow R''_{eq} = 4,3\Omega$$

*) R''_{eq}, R_3 et R_3 sont en série :

$$R_{eq} = R''_{eq} + R_3 + R_3 = 4,3 + 7 + 7 = 18,3\Omega$$

$$\Rightarrow R_{eq} = 18,3\Omega$$

2. l'intensité de courant : ($I_1, I_2, I_3?$)

On a R_1, R_1 et R_2 parcourus le même courant I_1 (en série).

On a R'_{eq} est parallèle à $R_2 \Rightarrow I_3 = I_2 + I_1$

et on a aussi $E = R_{eq} I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{12}{18,3} = 0,65A$

$\Rightarrow I_3 = 0,65A$

ensuite $V''_{eq} = R''_{eq} I_3 \Rightarrow V''_{eq} = 4,3 \times 0,65 = 2,795V$

Comme $V''_{eq} = V'_{eq} = V_2 = R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{V''_{eq}}{R_2} = \frac{2,795}{6} = 0,465A$

$\Rightarrow I_2 = 0,465A$

Pour $I_1 = ?$

on a $I_1 = I_3 - I_2 = 0,65 - 0,465 = 0,18A$

$I_1 = 0,18A$

5.7 Lois de Kirchhoff

5.7.1 Loi des mailles

La loi des mailles détermine la somme algébrique des tensions dans une maille est nulle :

$$\sum \pm U = 0$$

On choisit un sens de rotation arbitraire positif de la maille et on place un signe (+) devant la tension dont les flèches suivent le sens de rotation et un (-) dans le sens contraire. Soit le circuit suivant :

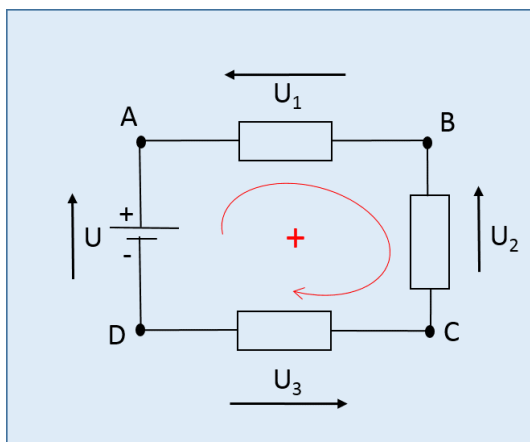


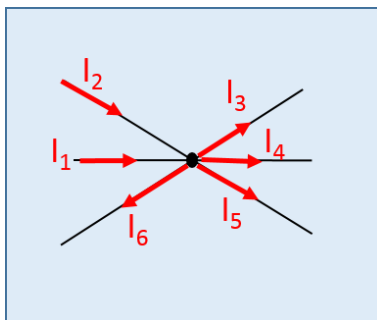
FIGURE 5.11

$$U - U_1 - U_2 - U_3 = 0$$

5.7.2 Loi des nœuds

La somme des courants entrant dans un nœud est égale à la somme des courants sortant dans le même nœud.

La somme algébrique des courants est nulle $\Rightarrow \sum \pm I = 0$



$$\Rightarrow \underbrace{I_1 + I_2}_{\sum I_{entrant}} = \underbrace{I_3 + I_4 + I_5 + I_6}_{\sum I_{sortrant}}$$



Exemple

On calcul pour le même circuit précédent l'intensité de courant en utilisant les lois de Kirchhoff ?

[Solution :](#)

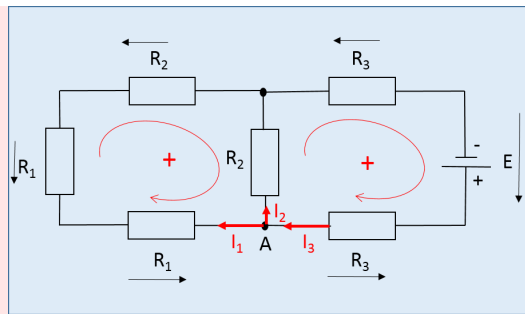


FIGURE 5.12

*) Au point A :

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad (1)$$

*) maille (1) :

$$E - U_3 - U_2 - U_3 = 0$$

$$\Rightarrow E - R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

$$\Rightarrow E - 2R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0 \quad (2)$$

*) maille (2) :

$$U_2 - U_1 - U_1 - U_2 = 0$$

$$\Rightarrow R_2 I_2 - R_1 I_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$

$$\Rightarrow R_2 I_2 - I_1 (2R_1 + R_2) = 0 \quad (3)$$

A.N : $I_1 = 0,176A$, $I_2 = 0,47A$, $I_3 = 0,64A$

*) 2^{ème} méthode (calcul du determinant) :

$$\begin{cases} 0,43 I_2 + I_3 = 0,85 \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ -I_1 + 0,375 I_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0,43 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0,375 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0,85 & 0,43 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0,375 & 0 \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0,85 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0,43 & 0,85 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0,375 & 0 \end{vmatrix}}{\det A}$$

A.N :

$$\det A = 1,805$$

$$I_1 = 0,17A$$

$$I_2 = 0,47A$$

$$I_3 = 0,64A$$

Chapitre 6

Magnétostatique

Sommaire

6.1	Introduction	76
6.2	Le champ magnétique	76
6.3	Les forces magnétiques	77
6.3.1	Force de Lorentz	77
6.3.2	Force de Laplace	78
6.4	Expression du champ magnétique	80
6.4.1	Champ magnétique créé par une charge en mouvement	80
6.4.2	Champ créé par un ensemble de charges en mouvement : Principe de superposition	80
6.4.3	Champ créé par un circuit électrique (Loi de Biot et Savart)	81
6.5	Flux du champ magnétique	82
6.6	Circulation du champ magnétique autour d'un fil infini	83
6.7	Théorème d'Ampère	84

6.1 Introduction

La magnétostatique est l'étude des champs magnétiques statiques, dans des conditions où les charges électriques et les courants électriques sont constants dans le temps. Elle explore les propriétés des aimants permanents, autrefois les Grecs remarquent qu'une pierre nommée (la magnétite), présentait la propriété d'exercer une force sur de petits morceaux de fer. Par la suite, il fut noté que les caractéristiques d'un aimant se manifestent uniquement à ses extrémités appelés pôle nord et pôle sud. Ils présentent des propriétés distinctes, en effet l'expérience démontre que deux pôles identiques (de même noms) se repoussent, tandis que deux pôles de noms opposés s'attirent.

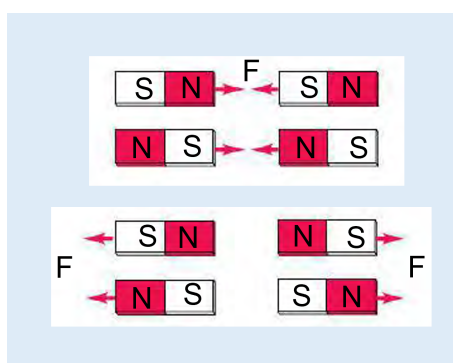


FIGURE 6.1

6.2 Le champ magnétique

Si on approche une boussole à un aimant, on remarque que l'aiguille de la boussole varie. De même si on disperse de la limaille de fer au voisinage d'un aimant, alors les aiguilles de fer s'alignent et s'aimantent.

Cela se traduit par une présence d'un **champ magnétique** noté \vec{B}

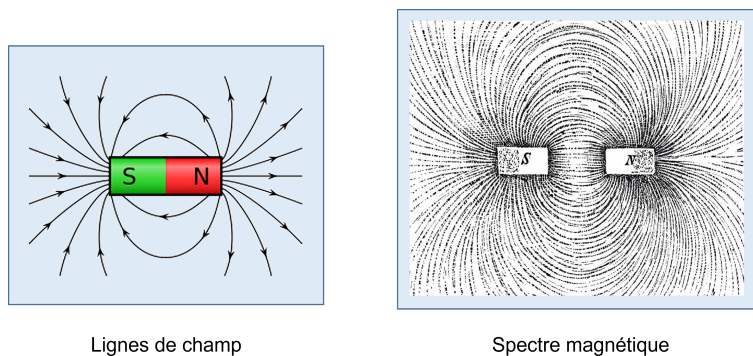


FIGURE 6.2

Remarque

- * Un champ magnétique désigne une zone de l'espace soumise à l'action d'une force due à un aimant.
- * Les lignes de champ magnétique émanent du pôle nord et pénètrent par le pôle sud de l'aimant.
- * Le champ \vec{B} est tangent aux lignes de champ.
- * L'unité du champ magnétique est le Tesla (T).

6.3 Les forces magnétiques

6.3.1 Force de Lorentz

Dans un référentiel Galiléen, soit une charge ponctuelle q baigne dans un champ magnétique se déplaçant avec une vitesse \vec{v} et dans un champs électrique, alors la force que subisse cette charge est de la forme :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$$

tel que \vec{F}_e est la composante de la force électrique et \vec{F}_m est la composante de la force magnétique, on a :

$$\begin{cases} \vec{F}_e = q \vec{E} \\ \vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} \end{cases} \\ \Rightarrow \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

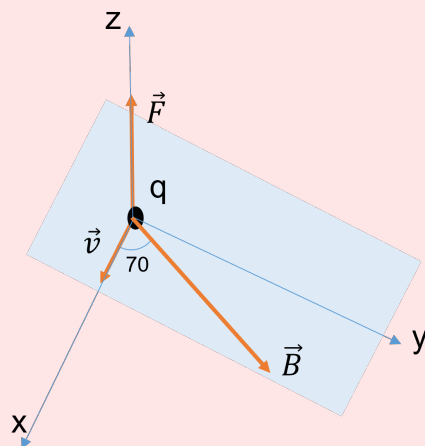
Cette force est défini comme la force de Lorentz.

La force magnétique $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$, est tel que \vec{F} , \vec{v} et \vec{B} forment un trièdre direct, le sens est déterminé en appliquant la règle des trois doigts de la main droite :

Exemple

Soit une charge $q = 1.602 \cdot 10^{-19} C$ se déplace avec une vitesse $v = 9 \cdot 10^6 m/s$ suivant l'axe x, pénètre dans un champ magnétique d'une valeur $B = 2,5 T$ et il forme un angle $\theta = 70^\circ$ avec l'axe des x. Calculer la force subie par cette charge q .

[Solution :](#)



On a :

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= q \vec{v} \wedge \vec{B} \\ &= 1,602 \cdot 10^{-19} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 2,5 \cos 70 & 2,5 \sin 70 & 0 \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \vec{F}_B &= 3,38 \cdot 10^{-12} \vec{k} \\ \Rightarrow F_B &= 3,38 \cdot 10^{-12} \text{ N} \end{aligned}$$

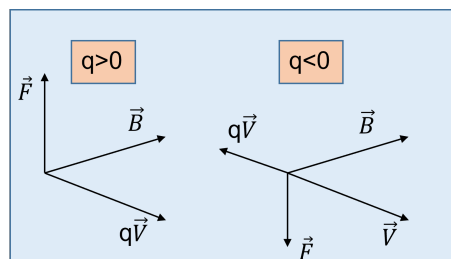
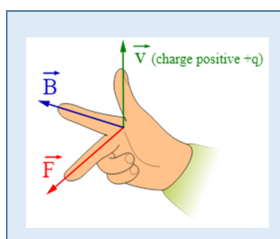


FIGURE 6.3

6.3.2 Force de Laplace

La force de Laplace correspond à la force électromagnétique exercée par un champ magnétique sur un conducteur transportant un courant.

En prenant en compte un fil conducteur de section S traversé par un courant I placé dans un champ magnétique, alors chaque élément $d\vec{l}$ du fil est soumis à une force appelée force de Laplace, formulée par :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

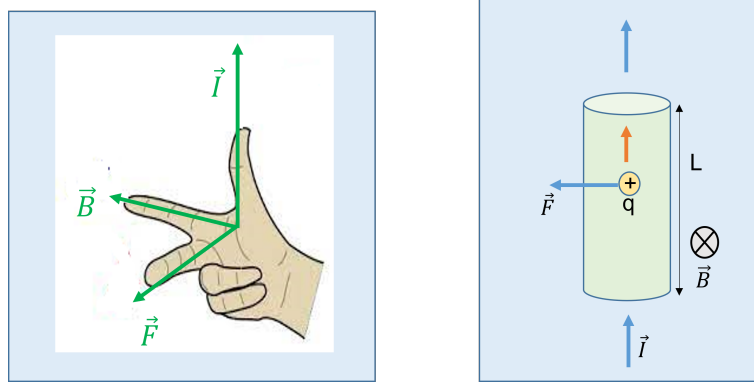
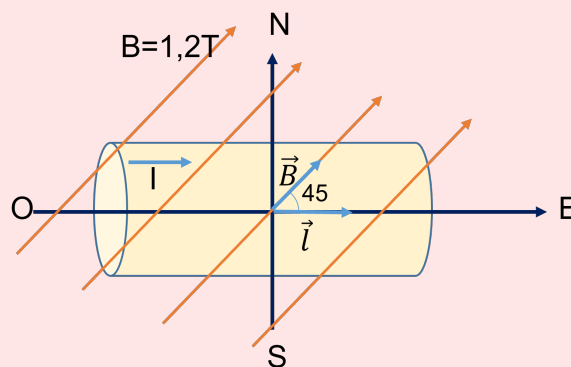


FIGURE 6.4

Exemple

Une tige de cuivre horizontale transporte un courant I de 50A (sens d'ouest vers l'est), cette tige se trouve entre deux pôles d'un électroaimant où il y a un champ magnétique $B = 1,20T$, sa direction est $N45^\circ E$. Déterminer la force magnétique produite pour une longueur $l = 1m$ de la tige.

Solution :



On a :

$$\vec{F} = I \vec{l} \wedge \vec{B}$$

Avec $\vec{l} = 1 \vec{i}$, $\vec{B} = 1,2 \cos 45^\circ \vec{i} + 1,2 \sin 45^\circ \vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{F} = 50 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1.2 \cos 45 & 1.2 \sin 45 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 42.4 \vec{k}$$

$$\Rightarrow F = 42.4N$$

6.4 Expression du champ magnétique

6.4.1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

On définit un champ magnétique \vec{B} généré en un point M par une particule de charge q, localisée en un point P et se déplaçant avec une vitesse \vec{v} tel que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 q \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{4\pi \|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

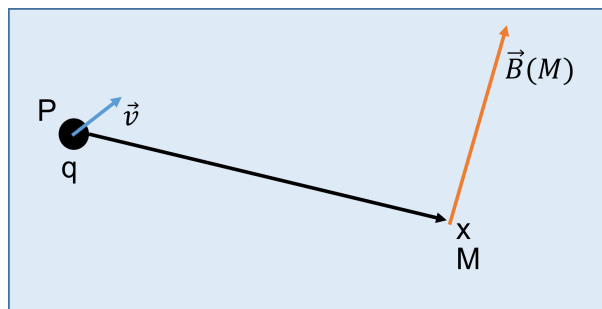


FIGURE 6.5

Avec $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$: perméabilité du vide.

6.4.2 Champ créé par un ensemble de charges en mouvement : Principe de superposition

Admettons N particules de charges q_i localisées en des points p_i , chacune ayant une vitesse v_i . En appliquant le principe de superposition, le champ magnétique induit en un point M est la somme vectorielle des champs générés par chaque particule, et il est défini par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3}$$

Remarque

Pour une distribution de charge continue dans un volume, le champ résultant est de la forme :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{dq \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

6.4.3 Champ créé par un circuit électrique (Loi de Biot et Savart)

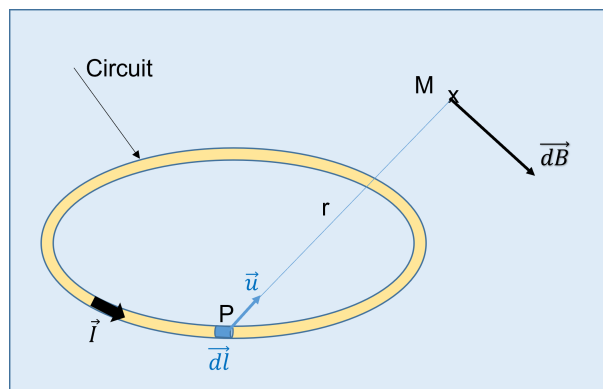


FIGURE 6.6

Considérons un élément de longueur \vec{dl} traversant par un courant électrique I , alors l'élément de champ magnétique créé au point M séparée par une distance $||\vec{PM}||$ est donnée par la loi de **Biot et Savart** :

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{4\pi ||\vec{PM}||^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{||\vec{PM}||^2}$$

- ✓ $(\vec{dB}, \vec{dl}, \vec{u})$ construis un trièdre direct.
- ✓ l'élément de champ \vec{dB} est perpendiculaire à (\vec{dl}, \vec{u}) .

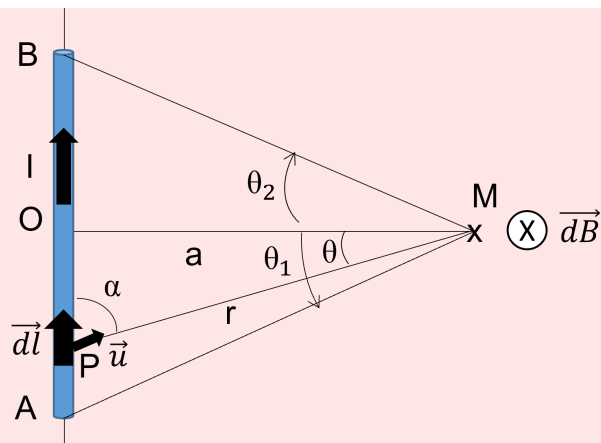
Exemple

Soit un segment de fil $[AB]$ parcouru par un courant d'intensité I . Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en un point M distant de a du segment $[AB]$, dans le cas :

- 1- le fil est de longueur fini.
- 2- Le fil est infiniment long.

Solution :

Soit un élément de longueur \vec{dl} du segment $[AB]$, crée un élément de champ \vec{dB} au point M , perpendiculaire au plan $(\vec{dl} \wedge \vec{PM})$, orienté vers l'intérieur.



$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

On a : $\sin \alpha = \frac{a}{r}$ et $\cos \theta = \frac{a}{r} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \theta$

On a aussi : $\tan \theta = \frac{l}{r} \Rightarrow dl = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \cos \theta}{4\pi \frac{a^2}{\cos^2 \theta}}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta$$

1- Cas d'un fil fini :

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

2- cas du fil AB infiniment long :

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

6.5 Flux du champ magnétique

Soit une surface S fermée liée à une courbe C fermée et orientée. On définit un élément de surface $d\vec{S} = dS \vec{n}$, avec \vec{n} (vecteur normal dirigé vers l'extérieur).

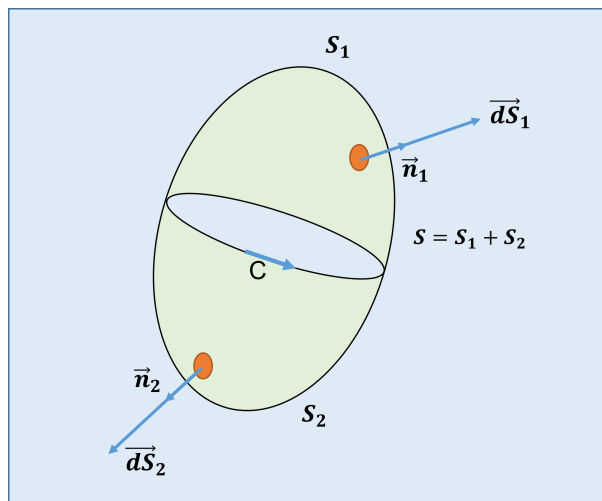


FIGURE 6.7

Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est donnée par la relation suivante :

$$\phi = \int \int_s \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

En effet, examinons un contour S tel que sa direction (voir figure ci-dessus), dans une première étape, considérons deux surface S_1 et S_2 positionnées de part et d'autre de S et s'appuyant sur ce contour C , la combinaison de S_1 et S_2 forme une surface fermée S , en orientant cette surface vers l'extérieur, la loi de conservation du flux indique :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2 \\ \Rightarrow \phi_1 &= -\phi_2 \end{aligned}$$

Le flux est le même, par contre le signe (-) résulte de la convention d'orientation de la normale.

6.6 Circulation du champ magnétique autour d'un fil infini

Le champ \vec{B} crée par un fil infini en un point M de l'espace exprimé en coordonnée cylindrique :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{\mu}_\theta$$

Soit un $\vec{dl} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$ est le déplacement élémentaire en coordonnée cylindrique pour une courbe C fermée quelconque. On définit la circulation élémentaire du champ \vec{B}

par la relation :

$$dC = \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow C = \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \int \frac{d\theta}{2\pi}$$

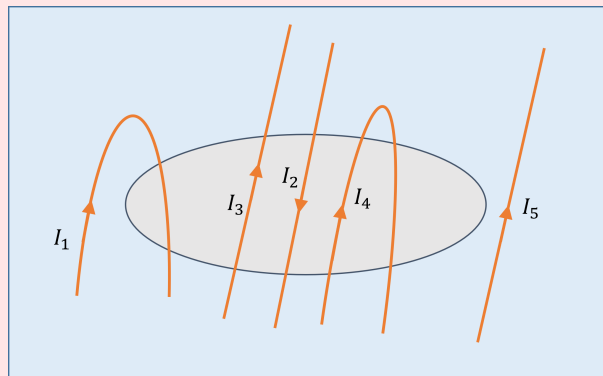
6.7 Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour de forme quelconque fermée est égal au produit de μ_0 par la somme algébrique des intensités des courants traversant la surface délimitée par C :

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{alg} I_{int}$$

- ✓ Le courant est positive s'il traverse le contour C dans le sens de la règle de la main droite.
- ✓ Le courant qui ne traverse pas le contour, ne sont pas pris en considération dans la loi d'Ampère.

Exemple



$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_4)$$

$$\Rightarrow \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(-I_1 - I_2 + I_3)$$

