

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

**Mémoire de fin d'études**  
Présenté en vue de l'obtention  
du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Electronique

Option : Communication

***Thème:***

***ETUDE ET SIMULATION DU FILTRE DE  
KALMAN***

**Proposé et dirigé par :**

**M<sup>elle</sup>:AIT OUZZOU.**

**Présenté par :**

**- HETTAK Mennad.  
-SAIDOUN Ferhat.**

**Année universitaire 2008/2009**

# REMERCIEMENTS

## **Nous tenons à remercier :**

- le bon Dieu qui nous a donné la bonne santé et la Persévérance durant notre cursus.
- Nos parents et tous ceux qui nous ont aidé pour mener à terme ce travail.
- Notre promotrice Mademoiselle AIT OUAZZOU qui nous a guidée durant la période de la réalisation de notre travail.
- Les membres du jury qui ont accepté de juger notre travail.

# *Dédicaces*

**Je dédie ce modeste travail à :**

- Mes très chers parents
- Mes très chers frères.
- Tous mes amis.
- Mon ami et binôme Ferhat.
- Notre promotrice.
- Tous mes camarades de l'électronique.

**Mennad**

# Dédicaces

**Je dédie ce modeste travail à :**

- Mes très chers parents
- Mes très chers frères et sœurs.
- Tous mes amis.
- Mon ami et binôme Mennad.
- Notre promotrice.
- Tous mes camarades de l'électronique.

**Ferhat**

# Sommaire :

INTRODUCTION

## Chapitre I : Généralités sur les signaux aléatoires et l'espace d'état.

I. 1 INTRODUCTION .....	2
I. 2 NOTION DE PROBABILITE.....	2
I. 3 DEFINITION DE LA PROBABILITE.....	2
I. 4 PROBABILITE CONDITIONNELLE.....	3
I. 5 RÈGLE DE BAYES.....	3
I. 6 VARIABLE ALEATOIRE.....	3
I.6.1 Variable aléatoire discrète.....	4
I.6.2 Variable aléatoire continue.....	4
I. 7 FONCTION DE REPARTITION ( DISTRIBUTION ) .....	4
I. 8 MOMENTS.....	4
I.8.1 Espérance mathématique (valeur moyenne).....	4
I.8.2 Variable aléatoire centrée.....	5
I.8.3 Variance.....	5
I.8.4 Ecart type (Standard Deviation).....	5
I.8.5 Variable aléatoire réduite.....	5
I.8.6 Fonction génératrice des moments - MGF (Moment Generating Function).....	6
I. 9 VARIABLE ALEATOIRE GAUSSIENNE.....	6
I. 10 VARIABLE ALEATOIRE UNIFORME.....	6
I. 11 VARIABLE ALEATOIRE INDEPENDANTE.....	7
I. 12 SIGNAL ALEATOIRE.....	7
I. 13 FONCTION D'AUTOCORRELATION.....	7
I. 14 MATRICE DE VARIANCE - COVARIANCE.....	7
I. 15 NOTION DE STATIONNARITE.....	8
I. 16 DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE.....	8
I. 17 BRUIT BLANC.....	8
I. 18 REPRESENTATION D'ETAT.....	9
I.18.1 Présentation générale des modèles espace - état.....	9
I.18.2 Définitions et notations.....	10
I. 19 CONCLUSION.....	11

## Chapitre II : Filtrage de Kalman

II.1 INTRODUCTION.....	12
II.2 BREF HISTORIQUE .....	12
II.3 LE PRINCIPE DU FILTRE DE KALMAN.....	12
II.3.1 Représentation d'état discrète des processus linéaires.....	12
II.3.2 Hypothèses.....	13
II.3.3 Equations du filtre de Kalman .....	14
II.3.3.1 Cycle d'estimation de Kalman.....	14
II.3.3.2 Notion d'innovation.....	15
II.3.3.3 Algorithme du filtre.....	15
II.4 LIMITES DU FILTRE DE KALMAN .....	16
II.5 VARIANTES DU FILTRE DE KALMAN .....	16
II.6 DOMAINES D'APPLICATION DU FILTRE DE KALMAN.....	17
II.7 EXEMPLE NUMERIQUE D'APPLICATION.....	18

## **Chapitre III : simulation de quelques applications**

III.1 INTRODUCTION.....	21
III.2 PRESENTATION DE QUELQUES RESULTATS DE SIMULATION.....	21
III.2.1 Application 1 : estimation d'une constante noyée dans un bruit .....	21
III.2.2 Application 2 : estimation d'une variable scalaire pour illustrer les deux étapes prédiction et correction du filtre de Kalman.....	32
III.2.3 Application 3 : extraction de deux sinusoides amorties noyées dans un bruit .	39
III.2.4 Application 4 : estimation de la position et de la vitesse d'un véhicule en mouvement rectiligne uniformément accéléré .....	50
III.3 CONCLUSION.....	61

## **CONCLUSION**

## **LISTE DES FIGURES :**

- Figure II.1 : Le tracé des courbes des valeurs réelles de  $x$  et de ses valeurs estimées
  
- Figure III.1 : Le tracé de la mesure de la constante,  $A=0,9355$
- Figure III.2 : Le tracé de la valeur réelle de la constante et de son estimée
- Figure III.3 : Le tracé de l'erreur d'estimation
- Figure III.4 : Le tracé de la variance de l'erreur d'estimation
- Figure III.5 : Le tracé de la mesure de la constante,  $A=0,6155$ .  
 $X_0=0$ ,  $R_0=0$  et  $V$  est un bruit uniforme
- Figure III.6 : Le tracé de la valeur réelle de la constante et de son estimée.  
 $A = 0.6155$ ,  $X_0=0$ ,  $R_0=0$  et  $V$  est un bruit uniforme
- Figure III.7 : Le tracé de l'erreur d'estimation.  $A = 0.6155$ ,  $X_0=0$ ,  $R_0=0$  et  $V$  est un bruit uniforme
  
- Figure III.8 : Le tracé de la variance de l'erreur d'estimation.  $A = 0.6155$ ,  $X_0=0$ ,  
 $R_0=0$  et  $V$  est un bruit uniforme
- Figure III.9 : Le tracé de la mesure de la constante,  $A = 0.9271$
- Figure III.10 : Le tracé de la valeur réelle de la constante et de son estimée  
 $A = 0.9271$ ,  $X_0=0$ ,  $R_0 = 10$
- Figure III.11 : Le tracé de l'erreur d'estimation.  $A = 0.9271$ ,  $X_0=0$ ,  $R_0 = 10$
- Figure III.12 : Le tracé de la variance de l'erreur d'estimation.  $A = 0.9271$ ,  $X_0=0$ ,  
 $R_0 = 10$
  
- Figure III.13 : Le tracé de la mesure de la constante,  $A = 0.5945$
- Figure III.14 : Le tracé de la valeur réelle de la constante et de son estimée.  $A = 0.5945$ ,  
 $X_0=1$ ,  $R_0 = 10$
- Figure III.15 : Le tracé de l'erreur d'estimation.  $0.5945$ ,  $X_0=1$ ,  $R_0 = 10$
  
- Figure III.16 : Le tracé de la variance de l'erreur d'estimation.  $A = 0.5945$ ,  $X_0=1$ ,  $R_0 = 10$
- Figure III.17 : l'état  $x$  et ses valeurs à priori et à posteriori
- Figure III.18 : calcul de la covariance à priori et à posteriori
- Figure III.19 : l'erreur actuelle, à priori et à posteriori
- Figure III.20 : gain de Kalman
- Figure III.21 : l'état  $x$  et ses valeurs à priori et à posteriori.  $X_0 = 1$ ,  $Q = 0.1$ ,  $R = 20$ ,  
 $X_0$  (à posteriori) = 1.5,  $P_0$  (à posteriori) = 1
- Figure III.22 : calcul de la covariance à priori et à posteriori.  $X_0 = 1$ ,  $Q = 0.1$ ,  $R = 20$ ,  
 $X_0$  (à posteriori) = 1.5,  $P_0$  (à posteriori) = 1
- Figure III.23 : l'erreur actuelle, à priori et à posteriori.  $X_0 = 1$ ,  $Q = 0.1$ ,  $R = 20$ ,  
 $X_0$  (à posteriori) = 1.5,  $P_0$  (à posteriori) = 1
- Figure III.24 : gain de Kalman.  $X_0 = 1$ ,  $Q = 0.1$ ,  $R = 20$ ,  $X_0$  (à posteriori) = 1.5,  
 $P_0$  (à posteriori) = 1

- Figure III.25 : l'état  $x$  et ses valeurs à priori et à posteriori.  $X_0 = 1$ ,  $x$  à priori = 0,  $x$  à posteriori = 0,  $Q = 0.01$ ,  $R = 2$
- Figure III.26 : calcul de la covariance à priori et à posteriori.  $X_0 = 1$ ,  $x$  à priori = 0,  $x$  à posteriori = 0,  $Q = 0.01$ ,  $R = 2$
- Figure III.27 : l'erreur actuelle, à priori et à posteriori.  $X_0 = 1$ ,  $x$  à priori = 0,  $x$  à posteriori = 0,  $Q = 0.01$ ,  $R = 2$
- Figure III.28 : gain de Kalman.  $X_0 = 1$ ,  $x$  à priori = 0,  $x$  à posteriori = 0,  $Q = 0.01$ ,  $R = 2$
- Figure III.29 : tracé des signaux à filtrer  $x_1$  et  $x_2$
- Figure III.30 : tracé des bruits de mesures
- Figure III.31 : tracé des signaux mesurés  $y_1$  et  $y_2$
- Figure III.32 : tracé des estimées  $x_1$  et  $x_2$
- Figure III.33 : tracé des erreurs d'estimation sur  $x_1$  et  $x_2$ .
- Figure III.34 : tracé de la covariance de l'erreur d'estimation
- Figure III.35 : tracé des signaux à filtrer  $x_1$  et  $x_2$ .  $X_0 = (0 \ 0)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av0.1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.36 : tracé des bruits de mesures.  $X_0 = (0 \ 0)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av0.1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.37 : tracé des signaux mesurés  $y_1$  et  $y_2$ .  $X_0 = (0 \ 0)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av0.1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.38 : tracé des estimées  $x_1$  et  $x_2$ .  $X_0 = (0 \ 0)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av0.1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.39 : tracé des erreurs d'estimation sur  $x_1$  et  $x_2$ .  $X_0 = (0 \ 0)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av0.1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.40 : tracé de la covariance de l'erreur d'estimation  
 $X_0 = (0 \ 0)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av0.1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.41 : tracé des signaux à filtrer  $x_1$  et  $x_2$ .  $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.42 : tracé des bruits de mesures.  $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.43 : tracé des signaux mesurés  $y_1$  et  $y_2$ .  $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.44 : tracé des estimées  $x_1$  et  $x_2$ .  $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.45 : tracé des erreurs d'estimation sur  $x_1$  et  $x_2$ .  $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.46 : tracé de la covariance de l'erreur d'estimation.  $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$
- Figure III.47 : position du véhicule (vraie, mesurée et estimée)
- Figure III.48 : l'erreur de position mesurée et l'erreur de position estimée
- Figure III.49 : la vitesse du véhicule (vraie et estimée)
- Figure III.50 : l'erreur de vitesse estimée
- Figure III.51 : position du véhicule (vraie, mesurée et estimée,  $X_0 = (0 \ 0)^T$ , bruit de position = 2m, bruit d'accélération = 0.02m/s<sup>2</sup>)
- Figure III.52 : l'erreur de position mesurée et l'erreur de position estimée.  $X_0 = (0 \ 0)^T$ , bruit de position = 2m, bruit d'accélération = 0.02m/s<sup>2</sup>

- Figure III.53 : la vitesse du véhicule (vraie et estimée).  $X_0 = (0 \ 0)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>
- Figure III.54 : l'erreur de vitesse estimée.  $X_0 = (0 \ 0)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>
- Figure III.55 : position du véhicule (vraie, mesurée et estimée.  $X_0 = (5 \ 5)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>
- Figure III.56 : l'erreur de position mesurée et l'erreur de position estimée.  $X_0 = (5 \ 5)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>
- Figure III.57 : la vitesse du véhicule (vraie et estimée).  $X_0 = (5 \ 5)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>
- Figure III.58 : l'erreur de vitesse estimée.  $X_0 = (5 \ 5)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>

# **CHAPITRE I**

**Généralités sur les signaux  
aléatoires et l'espace d'état**

## I. 1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous donnons les notions élémentaires en probabilité, processus et variables aléatoires et quelques notions générales concernant l'espace d'état.

## I. 2 NOTION DE PROBABILITE

Considérer l'expérience d'un jet de deux dés. L'ensemble des résultats de l'expérience forme " l'espace des échantillons ".

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) & (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

**L'événement A :** La somme des dés est 7.

**L'événement B :** Une f est paire et l'autre est impaire.

$$A = \{(1,6) \ (2,5) \ (3,4)(4,3) \ (5,2) \ (6,1)\}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{cccccc} (2,1) & (4,1) & (6,1) & (1,4) & (3,4) & (5,4) \\ (1,2) & (3,2) & (5,2) & (2,5) & (4,5) & (6,5) \\ (2,3) & (4,3) & (6,3) & (1,6) & (3,6) & (5,6) \end{array} \right\}$$

## I. 3 DEFINITION DE LA PROBABILITE

Si S est l'ensemble des échantillons de l'expérience et A est un événement, une fonction de probabilité  $p(.)$  est définie comme l'association entre l'événement A et l'ensemble des nombres réels tels que :

**(i) :**  $P(A) \geq 0$  pour chaque événement A.

**(ii) :**  $P(S) = 1$

**(iii) :** S'il existe un nombre entier d'événement  $A_1 A_2 \dots \dots \dots A_n$  disjoints.

$$(A_i \cap A_j) = \emptyset \quad i \neq j$$

$$\text{Donc} \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \dots \dots + P(A_n)$$

**Exemple :** Considérons l'expérience du jet des 2 dés.

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

## I. 4 PROBABILITE CONDITIONNELLE

A et B deux événements tel que  $P(B) \geq 0$ .

La probabilité de l'événement A sachant B est :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A et B sont indépendants si :  $P(A/B) = P(A)$

Ce qui est équivalent à :  $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Pour trois événements  $A_1, A_2, A_3$ :  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2)$

Ces événements sont indépendants, ils sont également indépendants en paire :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j) \quad i \neq j$$

et

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)$$

## I. 5 RÈGLE DE BAYES

Si on a n événements disjoints  $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

La règle de Bayes dit que :  $P(A_k/A) = \frac{P(A_k \cap A)}{P(A)}$

La probabilité totale de A est :

$$P(A) = P(A/A_1).P(A_1) + P(A/A_2).P(A_2) + \dots + P(A/A_n).P(A_n)$$

## I. 6 VARIABLE ALEATOIRE

Une variable aléatoire X est une règle qui fait correspondre à chaque élément de l'espace un nombre réel.

## I.6.1 Variable aléatoire discrète

Si la variable aléatoire  $X$  ne prend que des valeurs discrètes, on dit que  $X$  est une variable aléatoire discrète.

$$P(x_i) = P(X = x_i) = P_i \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

La probabilité de  $x_i$ ,  $P(x_i)$  doit satisfaire :

$$P(x_i) \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$$

## I.6.2 Variable aléatoire continue

Si la variable aléatoire  $X$  est continue, sa fonction densité de probabilité  $f_X(x)$

doit satisfaire :  $f_X(x) \geq 0$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$

## I.7 FONCTION DE REPARTITION ( DISTRIBUTION )

La fonction de distribution de  $X$  est  $F_X(x)$ .

- **Variable aléatoire discrète :**

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

$F_X(x)$  doit satisfaire les deux relations :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

- **Variable aléatoire continue :**

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

## I.8 MOMENTS

### I.8.1 Espérance mathématique (valeur moyenne)

$E(x)$  : Espérance mathématique ou valeur moyenne.

$$E(x) = \sum_x xP(X = x) = \sum_x xP(x) \quad , \text{ le cas discret}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad , \text{ le cas continu}$$

**Remarque :**

(i) Si X est une variable aléatoire, donc la fonction  $g(X)$  est aussi une variable

aléatoire de moyenne : 
$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(X) f_X(x) dx$$

(ii) Si la fonction  $g(x) = X^n \quad n = 0,1,2,\dots$  donc :

$$E[g(X)] = E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx$$

$E(X^n)$  s'appelle le moment d'ordre n de la variable aléatoire X par rapport à l'origine.

**n=1** :  $E(X^1) = E(X)$  , c'est l'espérance mathématique.

**n=2** :  $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx$  , c'est le moment du second ordre.

$E(X^2)$  : Valeur quadratique moyenne (Mean Square Value - MSV)

**I.8.2 Variable aléatoire centrée**

Une variable aléatoire centrée est définie par une moyenne nulle.

$$E(x) = 0$$

**I.8.3 Variance**

$\delta_x^2$  est la variance de la variable aléatoire X.

$$\delta_x^2 = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

**I.8.4 Ecart type (Standard Deviation)**

$\delta_x$  : écart type de la variable aléatoire X.

L'écart type est la racine carrée de la variable aléatoire.

### I.8.5 Variable aléatoire réduite

Une variable aléatoire réduite est définie par une variance unitaire.

$$\delta_x^2 = 1$$

### I.8.6 Fonction génératrice des moments - MGF (Moment Generating Function)

La MGF  $M_X(t)$  de la variable aléatoire  $X$  est définie par :  $M_X(t) = E(e^{tx})$

- Si  $X$  est une variable aléatoire discrète avec  $P(x)$  fonction densité de probabilité,

alors : 
$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} P_X(x)$$

- Si  $X$  est une variable aléatoire continue avec  $f_X(x)$  fonction densité de probabilité,

alors : 
$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

## I. 9 VARIABLE ALEATOIRE GAUSSIENNE

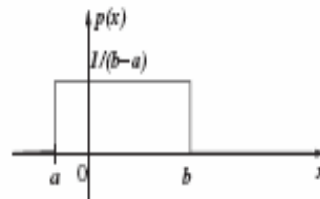
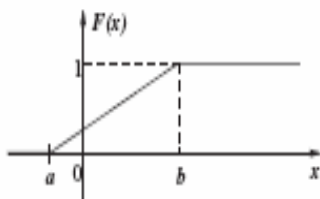
Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $m$  et d'écart type  $\delta_x$ . Sa fonction densité de probabilité  $f_X(x)$  est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\delta_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta_x^2}}$$

## I. 10 VARIABLE ALEATOIRE UNIFORME

Soit  $X$  une variable aléatoire uniforme. Sa fonction densité de probabilité  $f_X(x)$  et sa fonction de répartition est  $F_X(x)$ .

est : 
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Sa valeur moyenne :

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

Sa variance :

$$\begin{aligned} varX = E[(X - E[X])^2] &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{3} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \right]_a^b \\ \Rightarrow varX &= \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

## I. 11 VARIABLE ALEATOIRE INDEPENDANTE

X et y deux variables aléatoires.

X et y sont indépendantes si  $E(xy) = E(x)E(y)$

## I. 12 SIGNAL ALEATOIRE

Si la variable aléatoire est un vecteur à n composante alors on parle d'un signal aléatoire ou processus aléatoire. Toutes les propriétés de la variable aléatoire scalaire s'appliquent aux vecteurs aléatoires (signaux aléatoires).

## I. 13 FONCTION D'AUTOCORRELATION

La fonction d'auto corrélation d'un signal aléatoire x(t) est définie par :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t \pm \tau)^* dt$$

\* : le conjugué pour un signal complexe.

## I. 14 MATRICE DE VARIANCE - COVARIANCE

Soit X un signal aléatoire donné par :  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$

On définit la matrice de variance - covariance comme suit :

$$C = \begin{bmatrix} E(x_1^2) & E(x_1x_2) & \dots & E(x_1x_n) \\ E(x_2x_1) & E(x_2^2) & \dots & E(x_2x_n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ E(x_nx_1) & E(x_nx_2) & \dots & E(x_n^2) \end{bmatrix}$$

tel que les éléments de la diagonale  $E(x_i^2)$  sont les variances ou les puissances des composantes  $x_i$ .

## I. 15 NOTION DE STATIONNARITE

On dit qu'un signal aléatoire est stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes par translation de l'origine des temps.

Autrement dit, un signal aléatoire est dit stationnaire à l'ordre 2 si sa moyenne est constante,  $E(x) = \text{constante}$  et sa fonction d'auto corrélation ne dépend que de la translation  $\tau$ .

## I. 16 DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE

La densité spectrale de puissance (dsp) est définie par :

$$dsp = TF[R_x(\tau)] = [|X(f)|]^2$$

TF : transformée de Fourier.

$|X(f)|$  le module de la transformée de Fourier du signal  $x(t)$ .

L'information apportée par le calcul de la densité spectrale de puissance est le contenu fréquentiel du signal  $x(t)$ .

## I. 17 BRUIT BLANC

Un bruit blanc est un signal aléatoire stationnaire de variance infinie dont la fonction d'auto corrélation est similaire à un Dirac (c'est-à-dire un spectre complexe constant sur toute la plage des fréquences). Cela veut dire que les valeurs du signal prises à deux instants, même très proches, ne sont pas du tout corrélées.

Les bruits blancs gaussiens centrés  $w(t)$  et  $v(t)$  que nous avons utilisés pour le filtre de Kalman définis par leur densités spectrales respectives  $W(t)$  et  $V(t)$ :

$$E[w(t)w(t+\tau)^T] = W(t)\delta(\tau) \quad E[v(t)v(t+\tau)^T] = V(t)\delta(\tau)$$

Les matrices  $w(t)$  et  $v(t)$  deviennent constantes dans le cas du bruit blancs stationnaires.

## I. 18 REPRESENTATION D'ETAT

### I.18.1 Présentation générale des modèles espace - état

Les modèles espace - état intègrent la distinction entre les variables observées (le signal) et les variables cachées (l'état interne). Ils sont constitués :

- d'une ou plusieurs équation(s) de mesure (équation (1)) décrivant la manière dont les variables observées sont générées par les variables cachées et les résidus.
- d'une ou plusieurs équation(s) d'état (équation (2)) décrivant la manière dont les variables cachées sont générées à partir de leur retard et d'innovations.

Les modèles espace - état peuvent s'écrire sous une forme dite développée (I.1) qui implique, sous certaines hypothèses, que la variable de mesure s'écrit sous la forme d'une moyenne mobile où réside donc l'intérêt de recourir aux modèles espace - état pour décomposer ou prévoir une série temporelle relativement aux techniques classiques développées par Box et Jenkins (1976). D'une part, on s'épargne ici les problèmes de stationnarité et de racine unitaire qui se posent préalablement à l'estimation d'un modèle ARMA. En particulier, les résultats du filtre de Kalman restent valides en présence de séries non-stationnaires. Par ailleurs, ce cadre permet également d'oublier l'hypothèse d'une distribution gaussienne pour les bruits. D'autre part, l'estimation optimale prend en compte l'information disponible à partir de l'instant initial  $t = 0$ , alors que les estimateurs optimaux ARMA prennent en compte l'information à partir de  $t = -\infty$  (en pratique, ils sont tronqués à partir du premier instant connu). Finalement, les coefficients du modèle peuvent évoluer et ne

sont pas obligatoirement considérés comme invariants au cours de la période d'estimation.

Dans leur version élémentaire, les modèles espace-état reposent sur un certain nombre d'hypothèses principales : les équations de mesure et d'état sont linéaires ; les bruits d'observation et d'innovation sont des bruits blancs ; les variables cachées suivent à un instant initial donné une loi gaussienne. À ces dernières, se sont ajoutées des hypothèses secondaires permettant de déterminer la forme canonique l'indépendance entre les bruits d'observation et d'innovation (condition d'invisibilité) et l'indépendance entre la variable cachée initiale et ces bruits (condition de causalité). Toutes ces hypothèses sont destinées à simplifier les procédures d'estimation.

### I.18.2 Définitions et notations

La terminologie suivante est utilisée :

$Y(k)$  est appelé observation ou variable de mesure ;

$X(k)$  est la variable d'état à l'instant  $k$  ;

$W(k)$  est le vecteur des innovations à l'instant  $k$  ;

$V(k)$  est le vecteur des erreurs de mesures à l'instant  $k$  ;

$A$  est la matrice de transition ;

$C$  est la matrice de mesure ;

Soit un processus multidimensionnel  $Y(k)$ , on appelle modèle espace-état discret de ce processus, le système (I) décrit par les équations matricielles suivantes :

$$\begin{cases} X(k+1) = A.X(k) + B.U(k) + W(k) \\ Y(k) = C.X(k) + V(k) \end{cases} \quad \text{I}$$

où les matrices  $A$ ,  $C$  sont de taille  $N \times N$  et  $n \times N$ , et  $B$ , est une matrice déterministe de taille  $N_1 \times N$  et  $N_2 \times N$  et  $X_0$  est un vecteur aléatoire de loi  $N(m, P)$  indépendant du bruit blanc normal

Les variables d'état et de mesure s'écrivent donc en fonction de la variable d'état initiale, du passé des erreurs de mesure et des innovations. Cette forme est particulièrement utile lorsqu'on s'intéresse à l'estimateur des moindres carrés généralisé du vecteur d'état ou à l'initialisation du filtre de Kalman. Enfin, le modèle espace d'états (I) est dit invariant par rapport au temps si les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne dépendent pas du temps.

## **I. 19 CONCLUSION**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions de base utilisées pour analyser les signaux aléatoires tels que l'espérance mathématique et la variance. Nous avons également défini le bruit gaussien centré (hypothèse requise dans le modèle de Kalman présenté dans le chapitre suivant) qui a l'avantage d'être entièrement caractérisé par sa fonction d'auto corrélation similaire à une impulsion de Dirac et son spectre de puissance quasiment uniforme sur toutes les fréquences.

# **CHAPITRE II**

## **Filtrage de Kalman**

## **II.1 INTRODUCTION**

Le Filtre de Kalman est une approche statistique, dont le principe est d'estimer les paramètres d'un modèle (position, vitesse, accélération, température, pression, ) en combinant les observations avec l'information fournie par le modèle de façon à minimiser l'erreur entre la valeur réelle du paramètre et sa valeur estimée. Autrement dit, ce filtre nous permet d'obtenir, à partir des mesures bruitées (les mesures obtenues via un capteur), une estimation optimale du paramètre inconnu du processus.

## **II.2 BREF HISTORIQUE [1]**

Le filtre de Kalman doit son nom à " Rudolf Kalman " bien que Thorvald Nicolai Thiele et Peter Swerling aient développé un algorithme similaire avant lui. La paternité du filtre fait l'objet d'une petite controverse dans la communauté scientifique. Le filtre a été décrit dans diverses publications par Swerling (1958), Kalman ( 1960) et Kalman - Bucy ( 1961).

Une grande variété de filtres de Kalman ont été, depuis, développées à partir de la formulation originale dite filtre de Kalman simple. Schmidt développa le filtre de Kalman étendu, Bierman, Thornton et bien d'autres développèrent toute une gamme de filtres racine carré.

## **II.3 LE PRINCIPE DU FILTRE DE KALMAN [2], [4],[5], [10]**

### **II.3.1 Représentation d'état discrète des processus linéaires**

Dans cette partie, nous présentons le principe du filtre de Kalman pour les systèmes linéaires, la modélisation d'état prenant en compte deux variables aléatoires le bruit de processus et le bruit de mesure. Dans ce cas, le modèle d'état est stochastique.

Un processus (système ou signal) peut être modélisé par sa représentation d'état discrète constituée de deux équations :

Une équation d'évolution :

$$X(k+1) = A \cdot X(k) + B \cdot U(k) + W(k) \quad II.1$$

Une équation de mesure :

$$Y(k) = C \cdot X(k) + V(k) \quad II.2$$

Tel que :

A et B sont les matrices du système.

C est la matrice de mesure.

Y(k) est l'observation (mesure).

U(k) est la commande (l'entrée du système) à l'instant k.

X(k) est l'état (inconnu) du système à l'instant k.

W(k) est le bruit de modélisation lié à l'incertitude que l'on a sur le modèle de processus. C'est sans doute le paramètre le plus difficile à quantifier. On le considère blanc, centré ( $E[W(k)] = 0$ ) et gaussien, de variance supposée connue

$$Q = E[W(k) \cdot W(k)^T].$$

V(k) est le bruit de mesure également considéré : blanc, gaussien et centré ( $E[V(k)] = 0$ ) et de variance supposée aussi connue ( $R = E[V(k) \cdot V(k)^T]$ ).

### II.3.2 Hypothèses

Nous supposons que :

**H1** : la paire (A,C) est observable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode inobservable dans le système, en d'autres termes les matrices du système sont supposées connues.

Dans le cas où A, B et C sont constantes alors on dit que le système est stationnaire.

**H2** : les bruits W(k) et V(k) sont des bruits blancs, gaussiens et centrés mais, aussi supposés non corrélés entre eux (indépendants) et non corrélés à l'état initial du système X<sub>0</sub>.

**H3** : V(k) est inversible (il y a autant de sources de bruits indépendantes que de mesures dans l'équation de mesure).

### II.3.3 Equations du filtre de Kalman

#### II.3.3.1 Cycle d'estimation de Kalman

L'estimation optimale consiste à chercher à chaque instant une estimation  $\hat{x}(k)$  de l'état  $x(k)$  en minimisant un critère qui est la variance de l'erreur d'estimation

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad P(k) = E(\tilde{x}(k) \cdot \tilde{x}(k)^T)$$

On peut séparer le cycle en deux étapes :

#### **- une étape de prédiction**

Après avoir exploité la mesure  $y(k)$  à l'instant  $k$ , nous obtenons une estimation  $\hat{x}(k/k)$  de l'état  $x(k/k)$ , elle donne lieu à une erreur d'estimation  $\tilde{x}(k/k)$ .

Quelle sera la meilleure estimation de l'état  $x(k+1)$  immédiatement avant l'exploitation de la mesure à l'instant  $k+1$  :  $\hat{x}(k+1/k)$  ?

Quelle est l'erreur d'estimation  $\tilde{x}(k+1/k)$  et sa variance  $P(k+1/k)$  ?

Les équations d'estimation de l'étape de prédiction sont :

$$\hat{x}(k+1/k) = A \cdot \hat{x}(k/k) + B \cdot U(k)$$

II.3

$$P(k+1/k) = A \cdot P(k/k) \cdot A^T + Q$$

#### **- une étape de correction**

L'exploitation d'une mesure à un instant donné nous permet de réajuster l'estimation de manière optimale compte tenu de cette dernière donnée.

Nous disposons à l'instant  $k+1$ , immédiatement avant l'exploitation de la mesure  $y(k+1)$  d'une estimation d'état  $\hat{x}(k+1/k)$ , elle donne lieu à une erreur d'estimation  $\tilde{x}(k+1/k)$  de variance  $P(k+1/k)$ .

.Nous utilisons la mesure  $y(k+1)$  pour améliorer cette estimation de façon optimale selon les équations de correction suivantes :

$$\hat{x}(k+1/k+1) = A \cdot \hat{x}(k+1/k) + K \cdot (y(k+1) - C \cdot \hat{x}(k+1/k))$$

II.4

$$P(k+1/k+1) = (I - K \cdot C) \cdot P(k+1/k).$$

$$K = P(k+1/k) \cdot C^T \Sigma^{-1}$$

II.5

$$\Sigma^{-1} = (C \cdot P(k+1/k) \cdot C^T + R)^{-1}$$

Le poids  $\mathbf{K}$  est appelé le gain de Kalman, il est choisi de manière optimale. Le gain  $\mathbf{K}$  doit minimiser la variance de l'erreur d'estimation  $P(k+1/k+1)$ , et peut être calculé à priori car il tient juste compte des caractéristiques statistiques du bruit de mesure mais ne dépend pas des données mesurées.

### II.3.3.2 Notion d'innovation

Entre deux mesures, successives, la dynamique du système fait évoluer les grandeurs d'état. On définit l'innovation  $I(k)$  par :

$$I(k+1) = y(k+1) - C \cdot \hat{x}(k+1/k)$$

Seule l'information provenant d'une nouvelle mesure à l'instant  $k$  permettra de réduire l'erreur d'estimation à ce même instant.

Par conséquent,  $I(k+1)$  représentera l'apport d'information entre deux instant d'observations. C'est pour cette raison que cette information s'appelle l'innovation.

### II.3.3.3 Algorithme du filtre

L'état initial  $x_0$  est supposé être gaussien avec une matrice de covariance  $P_0$ . Afin d'obtenir l'état optimal du système, on doit combiner les observations  $y(k)$  avec l'information fournie par le modèle  $x(k)$ .

L'algorithme qui suit nous montre les différentes étapes pour obtenir un état estimé à chaque instant :

. L'initialisation de l'état du système et de sa matrice de covariance :

$$x(0/0) = x_0$$

$$P(0/0) = P_0$$

. Calcul de l'estimée  $\hat{x}(k+1/k)$  de l'état du système à l'instant  $k+1$  à partir des mesures disponibles à l'instant  $k$  :

$$\hat{x}(k+1/k) = A \cdot \hat{x}(k/k) + B \cdot U(k)$$

. Mise à jour intermédiaire de la matrice de covariance de l'état en tenant compte de l'évolution prévue par l'équation d'évolution de l'état :

$$P(k+1/k) = A \cdot P(k/k) \cdot A^T + Q$$

. Calcul du gain du filtre optimal ( qui peut être calculé à priori ) :

$$K = P(k+1/k) \cdot C^T \cdot (C \cdot P(k+1/k) \cdot C^T + R)^{-1}$$

. Mise à jour de la matrice de covariance de l'état :

$$P(k+1/k+1) = (I - K \cdot C) \cdot P(k+1/k).$$

. Réactualisation de l'état estimé :

$$\hat{x}(k+1/k+1) = A \cdot \hat{x}(k+1/k) + K \cdot (y(k+1) - C \cdot \hat{x}(k+1/k))$$

## **II.4 LIMITES DU FILTRE DE KALMAN : [4]**

Le filtre de Kalman classique est appliqué aux systèmes linéaires, sous l'hypothèse que, les bruits de processus ainsi que ceux des mesures sont indépendants, et leurs covariance sont supposées connues, qu'en est-il dans le cas ou :

- nous voudrions estimer les états d'un système non linéaire ?

- nous voudrions estimer les états du système comme une fonction du temps, après avoir obtenu l'historique des mesures et non pas, pas à pas comme dans le filtre classique ? par exemple la reconstruction de la trajectoire d'un véhicule.

- les bruits de processus  $W(k)$  et de mesures  $V(k)$  sont corrélés entre eux (dépendants) ?

- les covariances des bruits de processus  $Q$  et de mesures  $R$  sont inconnues ?

Ainsi le filtre de Kalman classique s'avère limité aux hypothèses citées précédemment.

En réponse à toutes ces questions, et au delà même de ces limites, des variantes du filtre ont été développées et adaptées à chaque cas.

## **II.5 VARIANTES DU FILTRE DE KALMAN : [8], [11]**

Dans le cas des problèmes non linéaires, autrement dit l'une des équations d'évolution ou celle de mesure n'est pas linéaire, une application très répandue du

filtrage de Kalman a été adaptée à cette situation. C'est le filtre de Kalman étendu EKF (Extended Kalman Filter). En utilisant le développement de Taylor, on peut linéariser le paramètre inconnu autour de sa valeur estimée en calculant les dérivées partielles à la fois de la fonction de processus ainsi que celle de la mesure.

L'EKF est fiable uniquement pour des systèmes aux comportements quasi-linéaires durant l'intervalle de temps de mise à jour, ce qui est parfois complexe et peut être sources d'erreurs. Afin de pallier à ce problème, une autre variante du filtre de Kalman a été développée, c'est Unscented Kalman Filter - UKF, qui permet de s'affranchir de la linéarisation du modèle de prédiction et de mesure.

En réalité, les processus sont non linéaires, les bruits de processus et de mesure sont corrélés entre eux, et on dispose d'aucune information sur leurs covariances. Ce problème est soulevé par le filtre " H infinity ".

## **II.6 DOMAINES D'APPLICATION DU FILTRE DE KALMAN [9]**

Le filtre de Kalman est utilisé dans une large gamme de domaines technologiques (radar, vision électronique, communication ...). C'est un thème majeur de l'automatique et du traitement du signal. Un exemple d'utilisation peut être la mise à disposition, en continu, d'informations telles que la position ou la vitesse d'un objet à partir d'une série d'observations relative à sa position, incluant éventuellement des erreurs de mesures.

Par exemple, pour le cas de la poursuite des cibles radar, les données sur la position de la cible, sa vitesse et son accélération sont mesurées à chaque instant mais avec énormément de perturbations dues au bruit ou aux erreurs de mesure. Le filtre de Kalman fait appel à la dynamique de la cible qui définit son évolution dans le temps, éliminant ainsi l'effet du bruit. Ces données peuvent être calculées pour l'instant présent (filtrage), dans le passé (lissage), ou sur un horizon futur (prédiction).

Le filtrage de Kalman est aussi de plus en plus utilisé en dehors du domaine du traitement du signal, par exemple en météorologie et en océanographie, pour l'assimilation de données dans un modèle numérique, en finance ou en navigation et il est même utilisé dans l'estimation des états de trafic routier.

## II.7 EXEMPLE NUMERIQUE D'APPLICATION

Dans cette partie, nous présentons une application numérique du filtre de Kalman qui consiste en l'estimation d'un scalaire pour quatre itérations.

La représentation d'état est la suivante :

$$X(k+1) = A \cdot X(k) + w(k)$$

$$Y(k) = C \cdot X(k) + v(k)$$

### Matrices du système :

$$A = 1$$

$$C = 3$$

### Les covariances des bruits :

$$Q = 0.1$$

$$R = 20$$

### Conditions initiales :

$$\hat{x}(0/0) = 1.5$$

$$P_0 = P(0/0) = 1$$

### 1<sup>ere</sup> itération :

**La valeur réelle de x :**  $x(1) = 0.8632$

#### **Etape de prédiction :**

$$\hat{x}(1/0) = A \cdot \hat{x}(0/0) = 1.5$$

$$P(1/0) = A \cdot P(0/0) \cdot A + Q = 1.1$$

#### **Etape de correction :**

$$K = P(1/0) \cdot C^T \cdot (C \cdot P(1/0) \cdot C^T + R)^{-1} = 0.1104$$

$$I(1) = y(1) - C \cdot \hat{x}(1/0) = -0.5937$$

$$\hat{x}(1/1) = A \cdot \hat{x}(1/0) + K \cdot I(1) = 1.4345$$

$$P(1/1) = P(1/0) \cdot (1 - K \cdot C) = 0.7358$$

### 2<sup>eme</sup> itération :

**La valeur réelle de x :**  $x(2) = 0.3365$

#### **Etape de prédiction :**

$$\hat{x}(2/1) = A \cdot \hat{x}(1/1) = 1.4345$$

$$P(2/1) = A \cdot P(1/1) \cdot A + Q = 0.8358$$

**Etape de correction :**

$$K = P(2/1) \cdot C^T \cdot (C \cdot P(2/1) \cdot C^T + R)^{-1} = 0.0911$$

$$I(2) = y(2) - C \cdot \hat{x}(2/1) = -9.2695$$

$$\hat{x}(2/2) = A \cdot \hat{x}(2/1) + K \cdot I(2) = 0.5900$$

$$P(2/2) = P(2/1) \cdot (1 - K \cdot C) = 0.6074$$

**3<sup>eme</sup> itération :**

**La valeur réelle de x :**  $x(3) = 0.3761$

**Etape de prédiction :**

$$\hat{x}(3/2) = A \cdot \hat{x}(2/2) = 0.5900$$

$$P(3/2) = A \cdot P(2/2) \cdot A + Q = 0.7074$$

**Etape de correction :**

$$K = P(3/2) \cdot C^T \cdot (C \cdot P(3/2) \cdot C^T + R)^{-1} = 0.0805$$

$$I(3) = y(3) - C \cdot \hat{x}(3/2) = 2.5530$$

$$\hat{x}(3/3) = A \cdot \hat{x}(3/2) + K \cdot I(3) = 0.7955$$

$$P(3/3) = P(3/2) \cdot (1 - K \cdot C) = 0.5366$$

**4<sup>eme</sup> itération :**

**La valeur réelle de x :**  $x(4) = 0.4671$

**Etape de prédiction :**

$$\hat{x}(4/3) = A \cdot \hat{x}(3/3) = 0.7955$$

$$P(4/3) = A \cdot P(3/3) \cdot A + Q = 0.6366$$

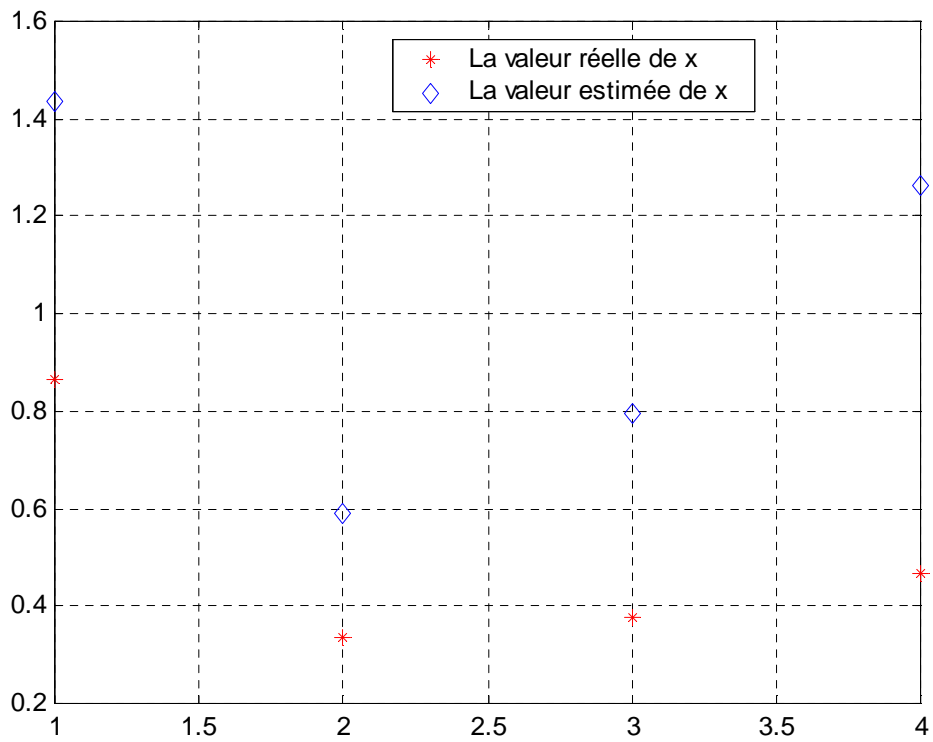
**Etape de correction :**

$$K = P(4/3) \cdot C^T \cdot (C \cdot P(4/3) \cdot C^T + R)^{-1} = 0.0742$$

$$I(4) = y(4) - C \cdot \hat{x}(4/3) = 6.2757$$

$$\hat{x}(4/4) = A \cdot \hat{x}(4/3) + K \cdot I(4) = 1.2613$$

$$P(4/4) = P(4/3) \cdot (1 - K \cdot C) = 0.4948$$



**Figure II.1 :** *Le tracé des courbes des valeurs réelles de  $x$  et de ses valeurs estimées.*

# **CHAPITRE III**

## **Simulation de quelques applications**

### **III.1 INTRODUCTION**

Nous avons présenté dans le chapitre précédent le principe et le détail du filtre de Kalman. L'estimation du paramètre consiste en la prédiction de la valeur de ce paramètre puis l'estimation en utilisant deux termes importants qui sont l'innovation et le gain de Kalman.

Cette partie est consacrée à la présentation de quelques résultats de simulation. Nous donnons ainsi les courbes de la mesure, de la valeur réelle et de son estimée, de l'erreur d'estimation et finalement de la variance de l'erreur, et ceci en fonction du nombre d'itérations.

#### **Remarque :**

Notant que l'initialisation des bruits (mesure et processus) se fait aléatoirement. Par conséquent, à chaque nouvelle exécution du programme, nous obtenons des résultats différents des précédents.

### **III.2 PRESENTATION DE QUELQUES RESULTATS DE SIMULATION**

#### **III.2.1 Application 1 Estimation d'une constante noyée dans un bruit**

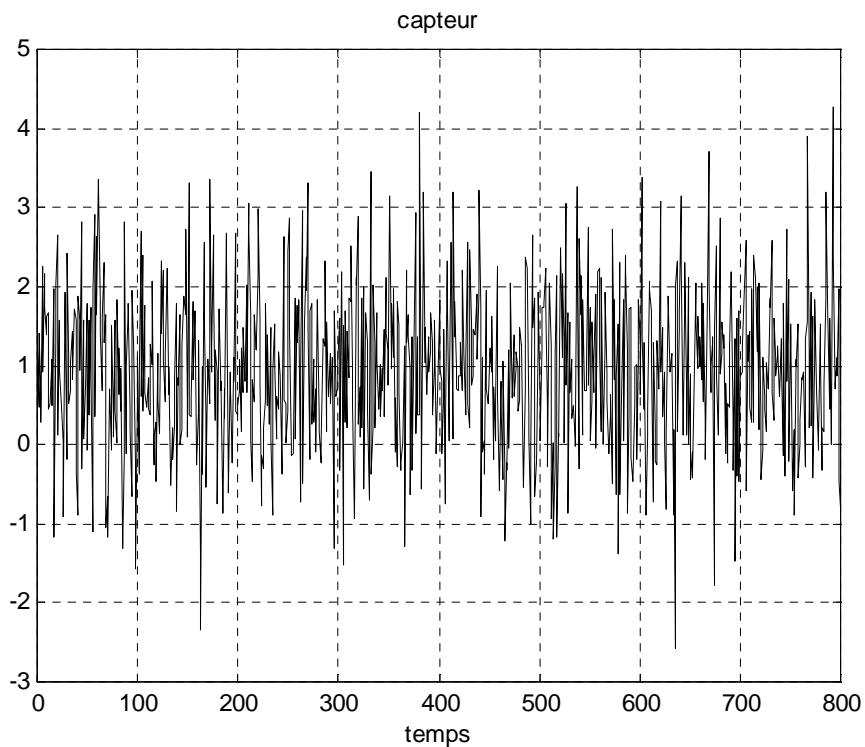
Dans cette simulation, nous appliquons le filtre de Kalman pour estimer une constante noyée dans un bruit. Cette constante est mesurée par un capteur bruité.

#### **Le 1<sup>er</sup> cas :**

- La valeur de la constante égale à  $A = 0.9355$ .
- Le bruit est centré, gaussien de variance égale à 1.
- Les conditions initiales sont nulles pour l'estimée est égale à 1 pour la variance de l'erreur d'estimation.
- Le nombre d'itérations est 800.

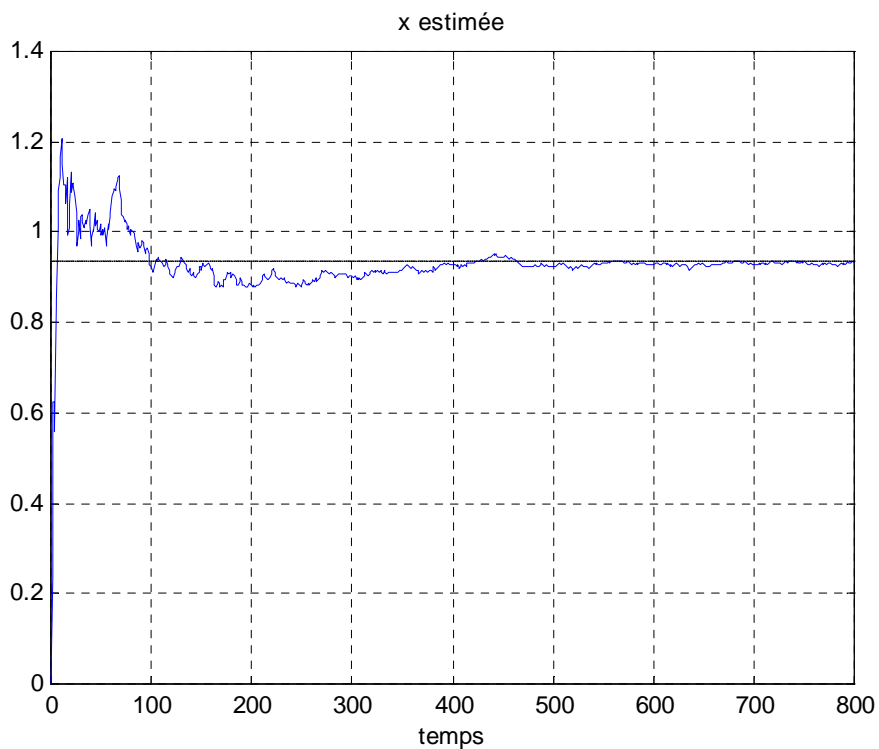
Dans le cas particulier d'une constante, le filtrage s'effectue en une seule étape, la correction uniquement sans prédiction, cela est dû à l'absence du bruit du processus.

Les Figures III.1, III.2, III.3 et III.4 montrent le tracé de la mesure, de l'erreur, de l'estimée et de la variance de l'erreur respectivement.



**Figure III.1 : Le tracé de la mesure de la constante,  $A=0,9355$ .**

La Figure III.1 montre les mesures obtenues via le capteur bruité. La valeur réelle de la constante dans ce cas est 0,9355. Nous constatons d'après cette Figure, que le bruit additif augmente la valeur de la constante jusqu'à 4.



**Figure III.2 : Le tracé de la valeur réelle de la constante et de l'estimée.**

La Figure III.2 montre les valeurs réelles de la constante (la droite horizontale noire) ainsi que, les valeurs estimées de la constante (le tracé en bleu).

Nous constatons qu'à partir de la 260<sup>ème</sup> itération, la courbe de l'estimée se rapproche de la courbe réelle. Au delà de la 500<sup>ème</sup> itération, l'estimée est pratiquement égale à la valeur réelle. Ceci peut se traduire par la diminution de la variance de l'erreur d'estimation qui est, rappelons le, le résultat principale du filtrage de Kalman.

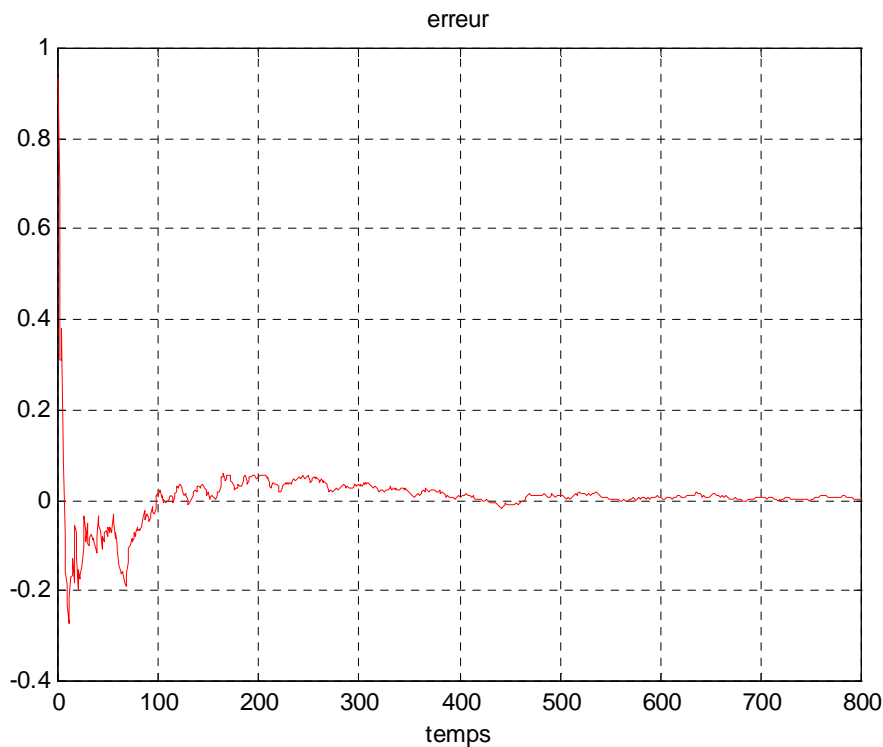


Figure III.3 : *Le tracé de l'erreur d'estimation.*

La Figure III.3 montre l'évolution de l'erreur d'estimation qu'on notera "err" par la suite, avec :

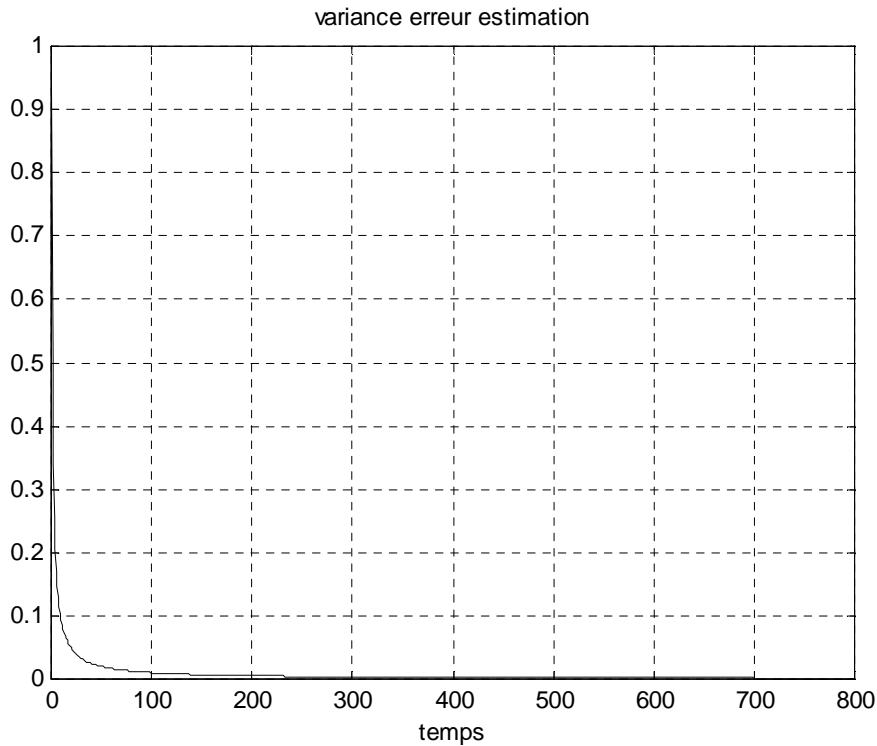
$$\text{err} = \text{constante} - \hat{x}, \text{ où } \hat{x} \text{ est la valeur estimée de la constante.}$$

Nous constatons que l'erreur est minimisée de telle sorte à converger vers zéro. Autrement dit, les valeurs estimées se rapprochent des valeurs réelles de la constante.

**- Relevé des deux dernières valeurs de l'erreur d'estimation :**

799<sup>ème</sup> itération : err =  $4 \times 10^{-4}$

800<sup>ème</sup> itération : err =  $2 \times 10^{-3}$



**Figure III.4 : Le tracé de la variance de l'erreur d'estimation.**

La Figure III.4 montre l'évolution de la variance de l'erreur d'estimation P. L'analyse de cette courbe montre que l'erreur est minimisée, et qu'elle tend vers zéro à partir de la 250<sup>ème</sup> itération. Ceci se traduit par une bonne estimation de la constante A.

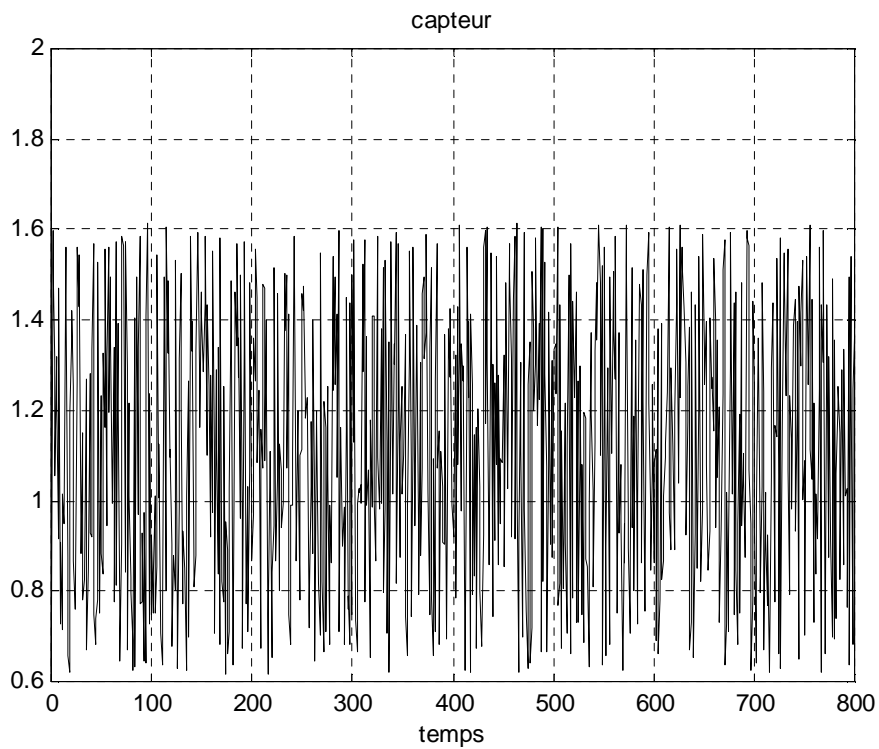
**- Relevé des deux dernières valeurs de la variance de l'erreur d'estimation :**

799<sup>ème</sup> itération : P =  $1.3 \times 10^{-3}$

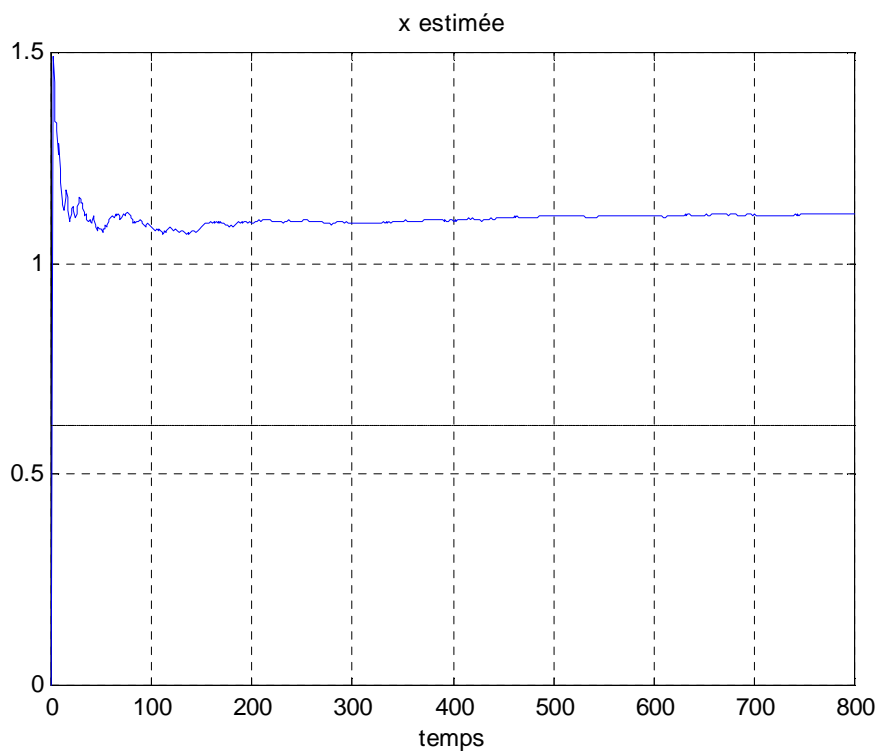
800<sup>ème</sup> itération : P =  $1.3 \times 10^{-3}$

**Le 2<sup>ème</sup> cas :**

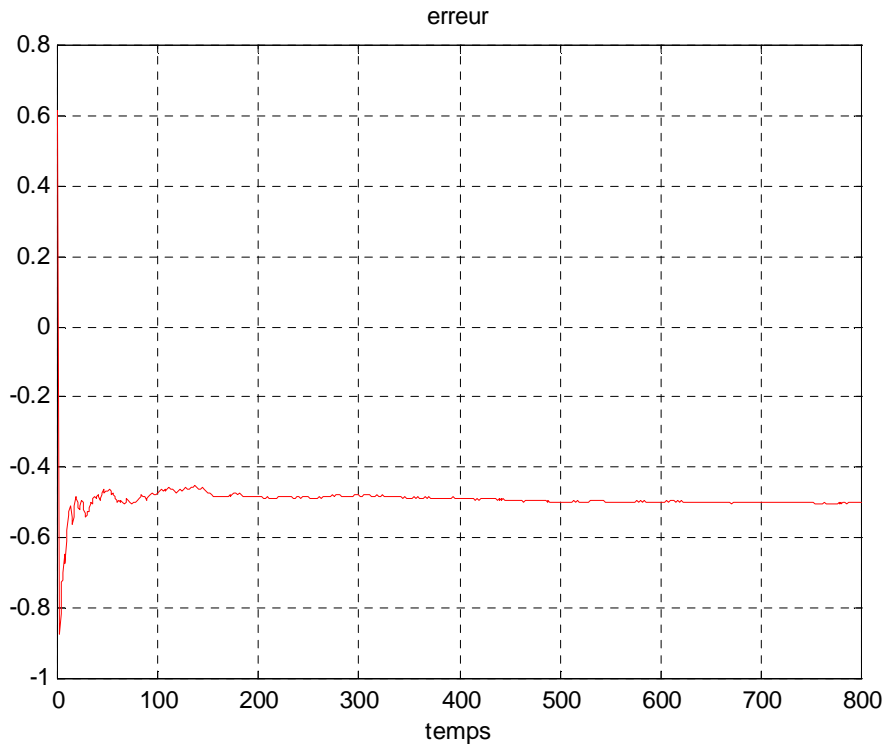
$A = 0,6155$ ,  $x_0=0$ ,  $R_0=0$  et  $V$  est un bruit uniforme.



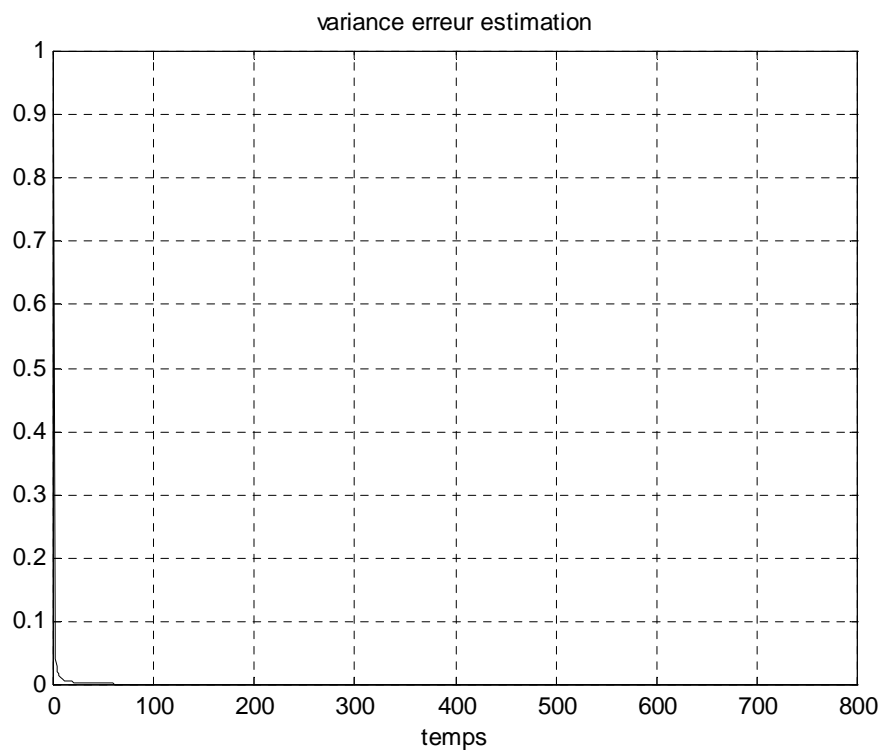
**Figure III.5 : Le tracé de la mesure de la constante,  $A=0,6155$ .  
 $X_0=0$ ,  $R_0=0$  et  $V$  est un bruit uniforme**



**Figure III.6 : Le tracé de la valeur réelle de la constante et de son estimée.  
 $A = 0,6155$ ,  $X_0=0$ ,  $R_0=0$  et  $V$  est un bruit uniforme.**



**Figure III.7 : Le tracé de l'erreur d'estimation.**  
 $A = 0,6155$  ,  $X_0=0$  ,  $R_0=0$  et  $V$  est un bruit uniforme.



**Figure III.8 : Le tracé de la variance de l'erreur d'estimation.**  
 $A = 0,6155$  ,  $X_0=0$  ,  $R_0=0$  et  $V$  est un bruit uniforme.

Les Figures III.5, III.6, III.7 et III.8 montrent les résultats obtenus pour une constante égale à 0.6155.

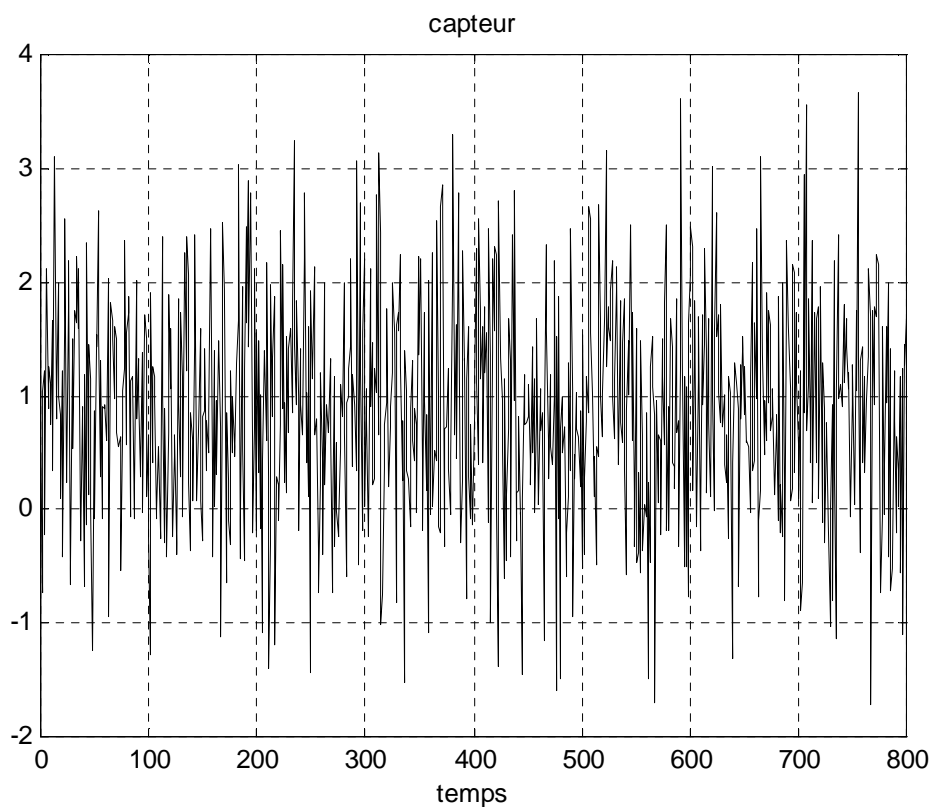
D'après ces Figures, nous constatons que pour un bruit de mesure uniforme, l'erreur d'estimation ne converge pas vers 0.

**Le 3<sup>ème</sup> cas :**

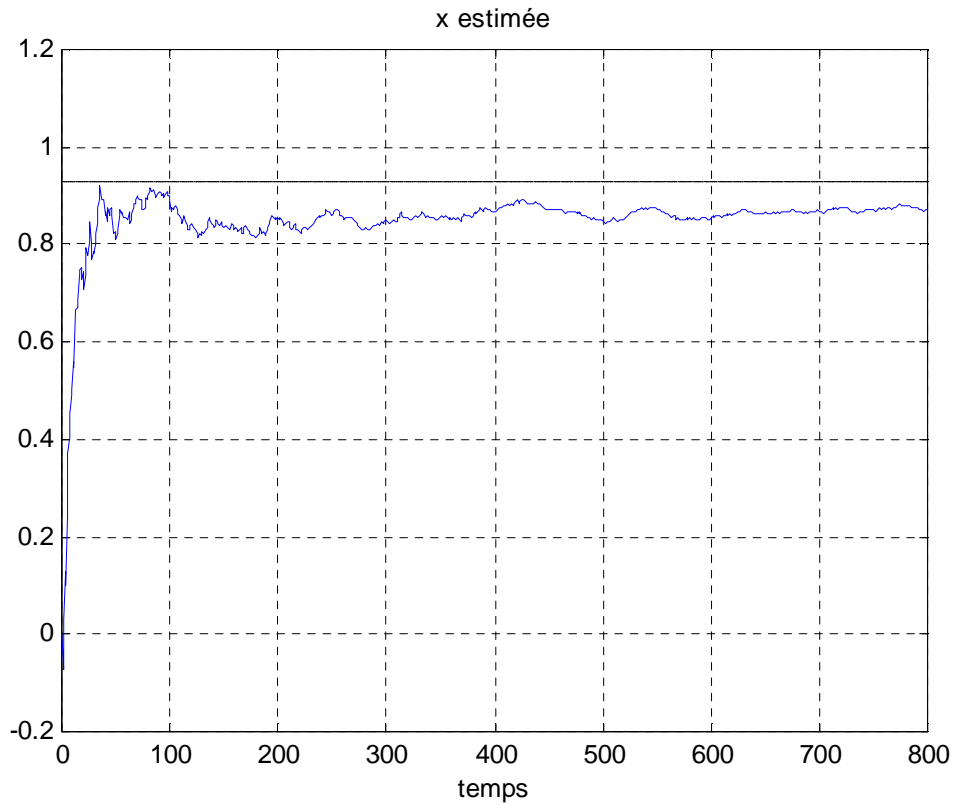
$A = 0.9271$ .

$X_0=0$ , l'état initial.

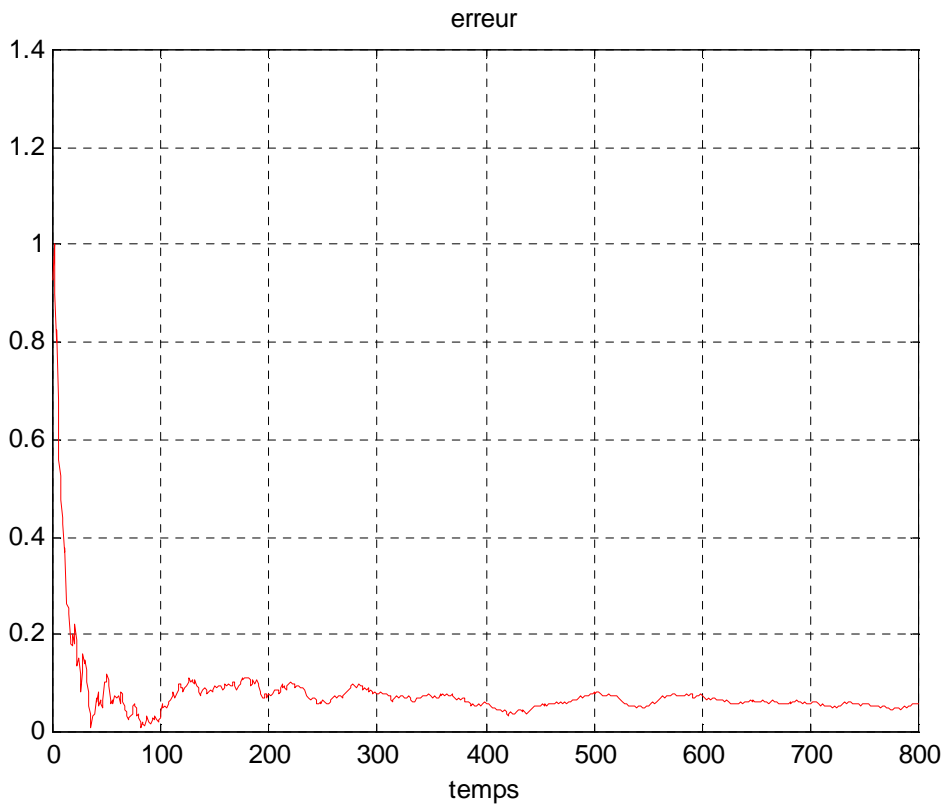
$R_0 = 10$  (la variance du bruit de mesure est multipliée par 10)



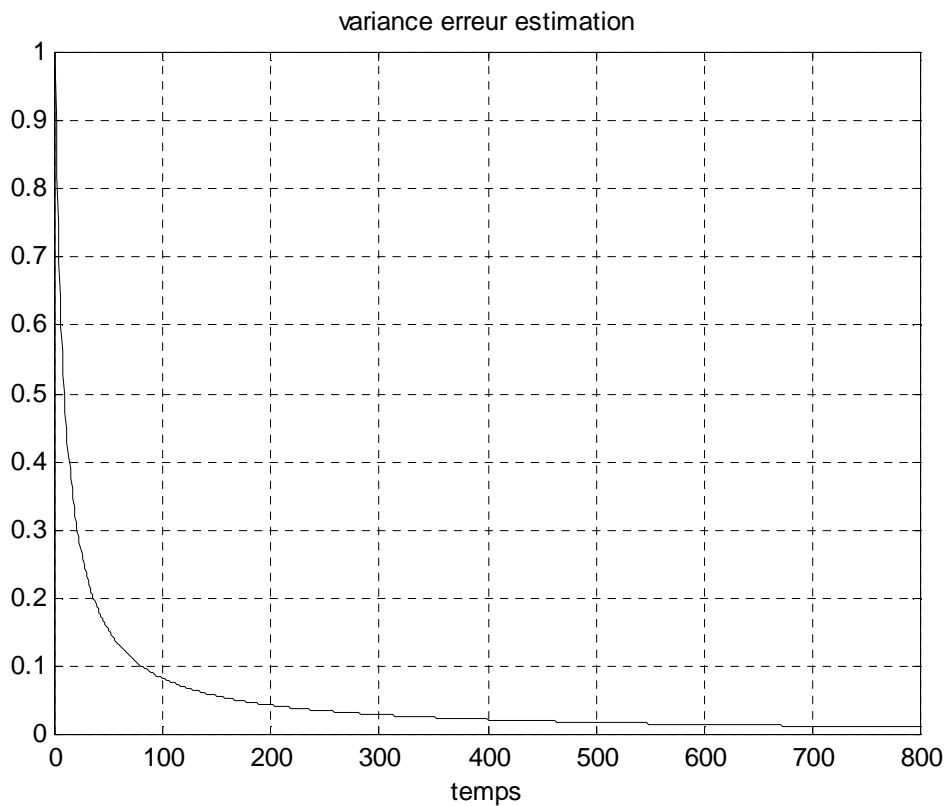
**Figure III.9 : Le tracé de la variance de l'erreur d'estimation.  
 $A = 0.9271$  ,  $X_0=0$  ,  $R_0 = 10$**



**Figure III.10 : Le tracé de la valeur réelle de la constante et de son estimée.  $A = 0.9271$  ,  $X_0=0$  ,  $R_0 = 10$**



**Figure III.11 : Le tracé de l'erreur d'estimation. constante = 0.9271 ,  $X_0=0$  ,  $R_0 = 10$**



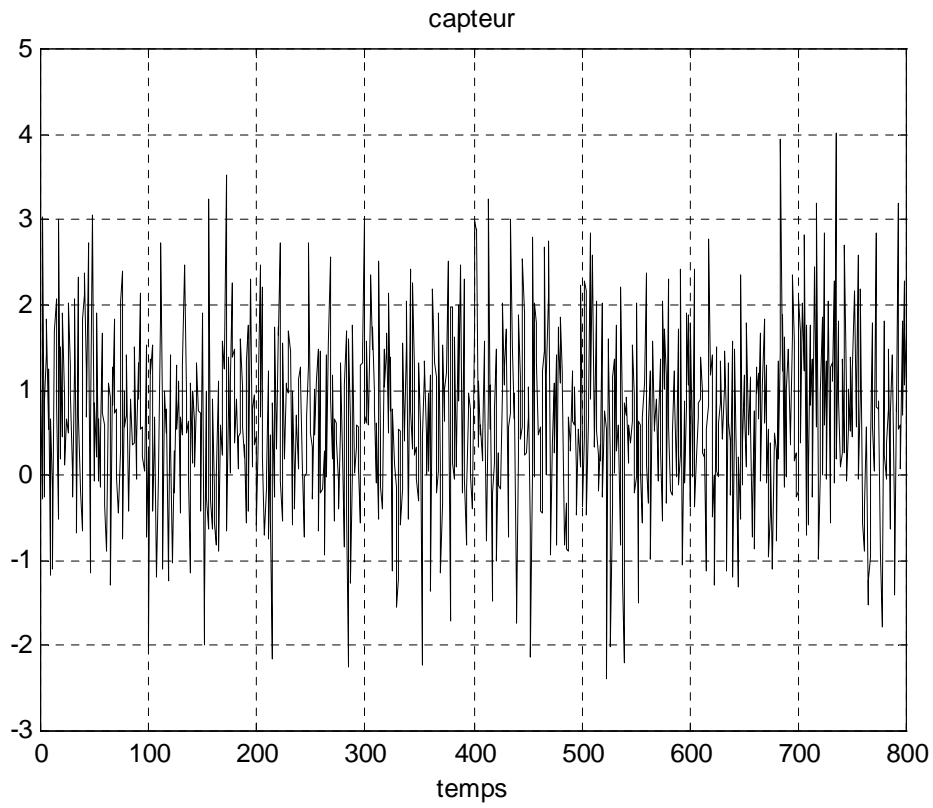
**Figure III.12 : Le trace de la variance de l'erreur d'estimation.  
constante = 0.9271 ,  $X_0=0$  ,  $R_0 = 10$**

**- Relevé des trois dernières valeurs de l'erreur :**

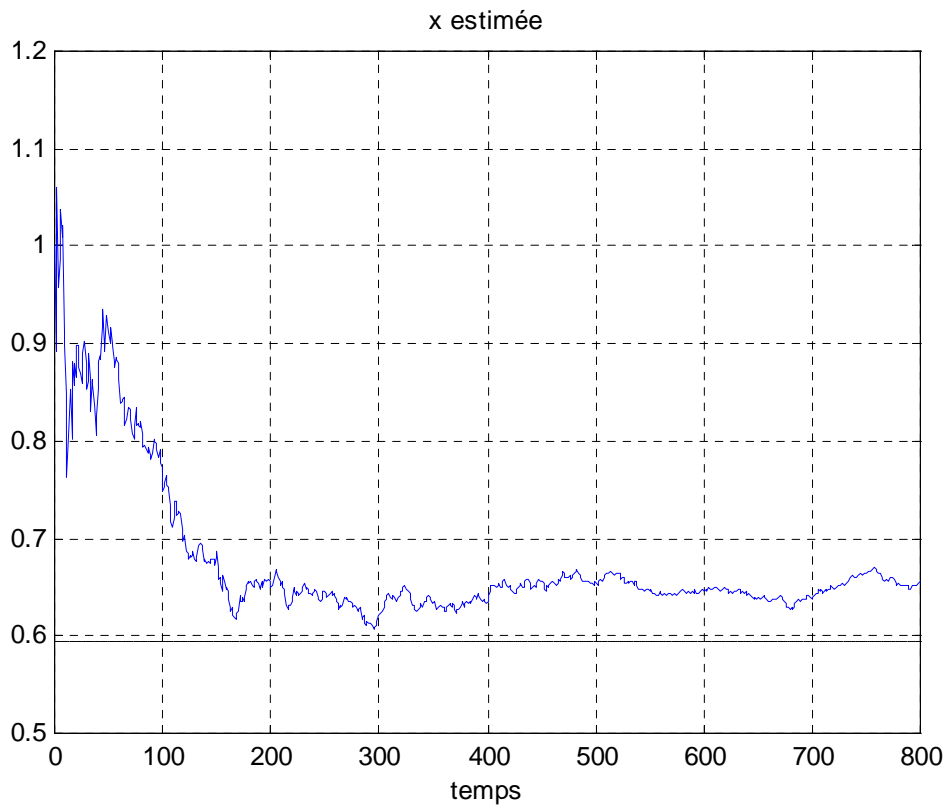
799<sup>ème</sup> pas : err =  $0.57 \cdot 10^{-1}$ , 800<sup>ème</sup> pas : err =  $0.56 \cdot 10^{-1}$ , 801<sup>ème</sup> pas : err =  $0.55 \cdot 10^{-1}$

**Le 4<sup>ème</sup> cas :**

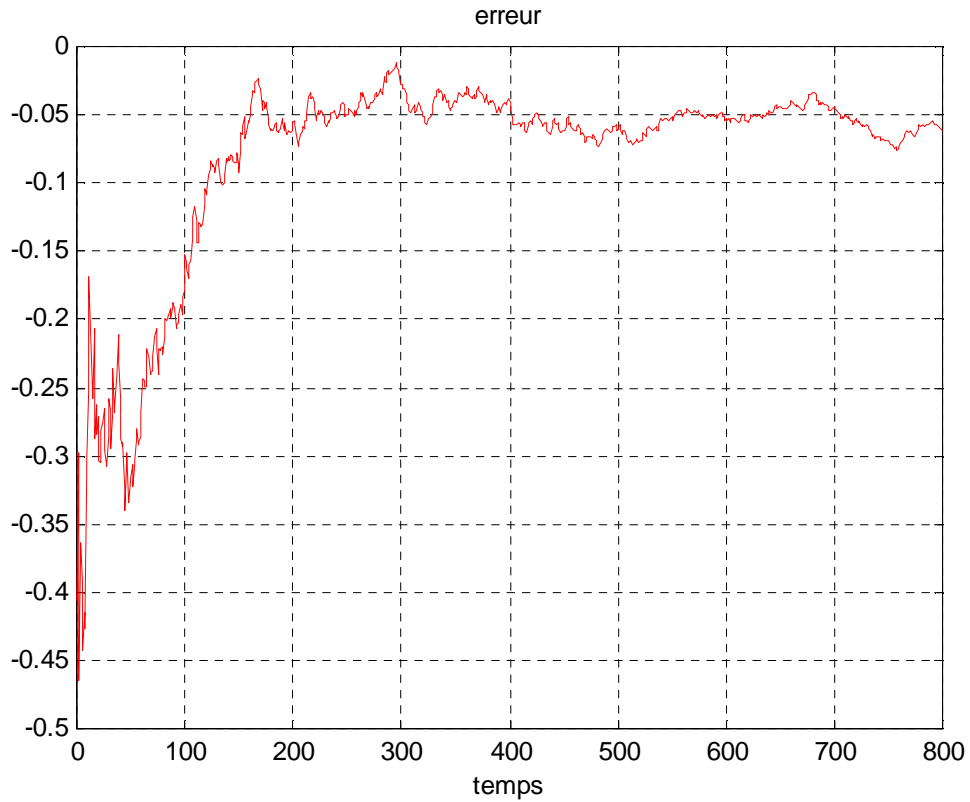
\_ constante = 0.5945,  $X_0=1$ ,  $R_0 = 10$  (on a multiplié la variance du bruit de mesure initiale par 10)



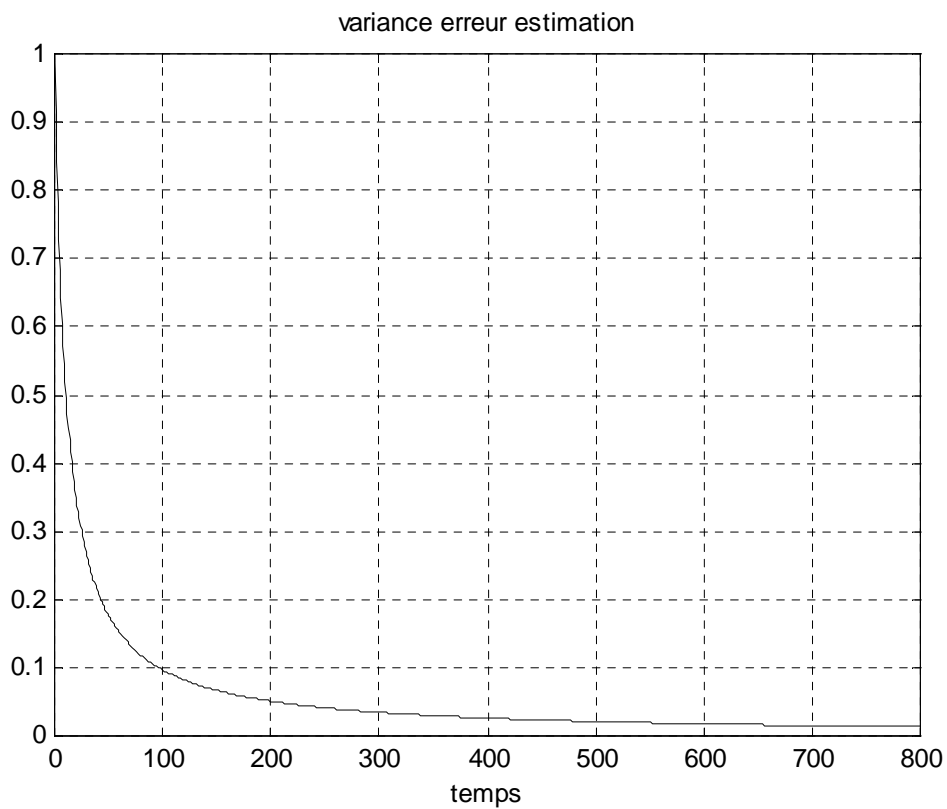
**Figure III.13 : Le tracé de la variance de l'erreur d'estimation.  
0.5945 ,  $X_0=1$  ,  $R_0 = 10$**



**Figure III.14 : Le tracé de la valeur réelle de la  
constante et de son estimée.0.5945 ,  $X_0=1$  ,  $R_0 = 10$**



**Figure III.15 : Le tracé de l'erreur d'estimation.**  
*0.5945 ,  $X_0=1$  ,  $R_0 = 10$*



**Figure III.16 : Le tracé de la variance de l'erreur d'estimation.**  
*0.5945 ,  $X_0=1$  ,  $R_0 = 10$*

### **III.2.2 Application 2 : Estimation d'une variable scalaire**

En deuxième simulation, nous allons appliquer le filtre de Kalman à un scalaire variable pour bien illustrer les deux phases de l'algorithme, à savoir, l'étape de prédiction et celle de correction. Pour se faire, et pour plus d'explications on écrit les équations suivantes :

$$X(1) = a \cdot X(0) + w(1)$$

$$y(1) = h \cdot X(1) + v(1)$$

#### **Etape de prédiction :**

$$X(\text{à priori}(1)) = X(\text{à posteriori}(0))$$

$$P(\text{à priori}(1)) = a \cdot P(\text{à posteriori}(0)) + Q$$

$$\text{Innovation}(1) = y(k+1) - k \cdot X(\text{à priori}(1))$$

#### **Etape de correction :**

$$K = h \cdot P(\text{à priori}(1)) \cdot (h \cdot P(\text{à priori}(1)) \cdot h + R)^{-1}$$

$$P(\text{à posteriori}(1)) = P(\text{à priori}(1)) \cdot (1 - h \cdot K)$$

$$X(\text{à posteriori}(1)) = X(\text{à priori}(1)) + K \cdot \text{innovation}(1)$$

Pour le reste des valeurs on aura :

#### **Etape de prédiction :**

$$X(\text{à priori}(k+1)) = X(\text{à posteriori}(k))$$

$$P(\text{à priori}(k+1)) = a \cdot P(\text{à posteriori}(k)) + Q$$

$$\text{Innovation}(k+1) = y(k+1) - k \cdot X(\text{à priori}(k+1))$$

#### **Etape de correction :**

$$K = h \cdot P(\text{à priori}(k+1)) \cdot (h \cdot P(\text{à priori}(k+1)) \cdot h + R)^{-1}$$

$$P(\text{à posteriori}(k+1)) = P(\text{à priori}(k+1)) \cdot (1 - h \cdot K)$$

$$X(\text{à posteriori}(k+1)) = X(\text{à priori}(k+1)) + K \cdot \text{innovation}(k+1)$$

**Le 1<sup>er</sup> cas :**

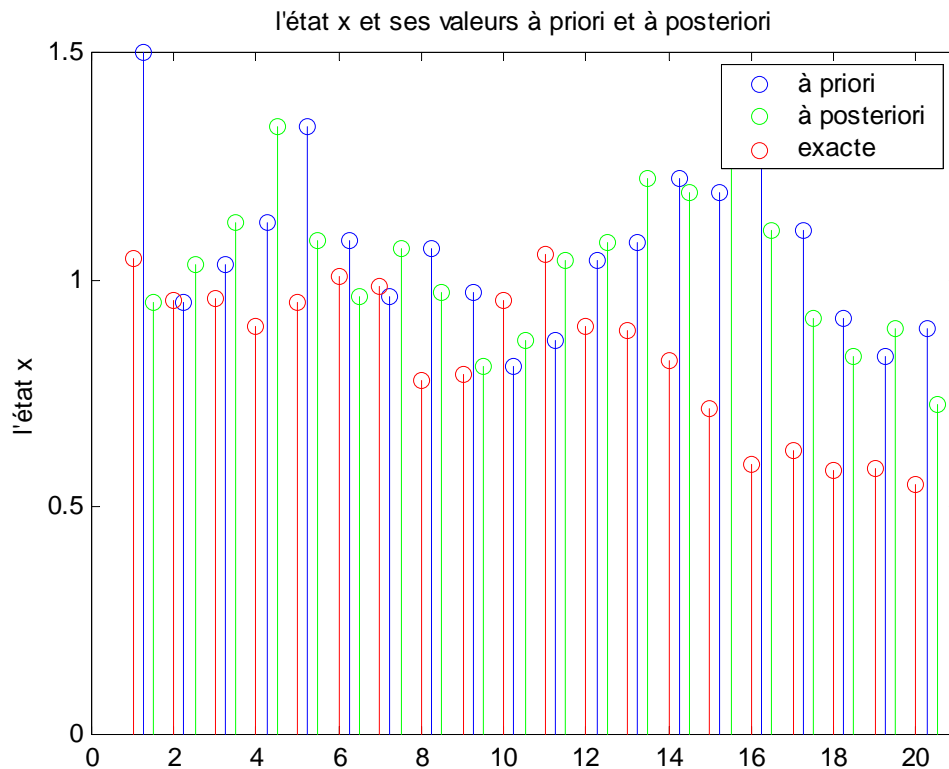
**Nombre de d'itérations :** 20

**Matrices du système :**  $a = 1$  ,  $h = 3$

**Les covariances des bruits :**  $Q = 0.01$  ,  $R = 2$

**Conditions initiales :**  $X_0 = 1$ ,  $X_0$  (à posteriori) = 1.5,  $P_0$  (à posteriori) = 1

Les Figures suivantes montrent les l'état  $x$  est ses valeurs à priori et à posteriori, la covariance de l'erreur à priori et à posteriori, l'erreur actuelle, à priori et à posteriori, et le gain de Kalman.



**Figure III.17 : L'état  $x$  et ses valeurs à priori et à posteriori.**

La Figure III.17 montre la valeur exacte de l'état  $x$  (en rouge) ainsi que ses valeurs à priori (en bleu) et à posteriori (en vert). Cette Figure illustre clairement les deux phases de l'algorithme du filtre de Kalman, à savoir, la prédiction et la correction.

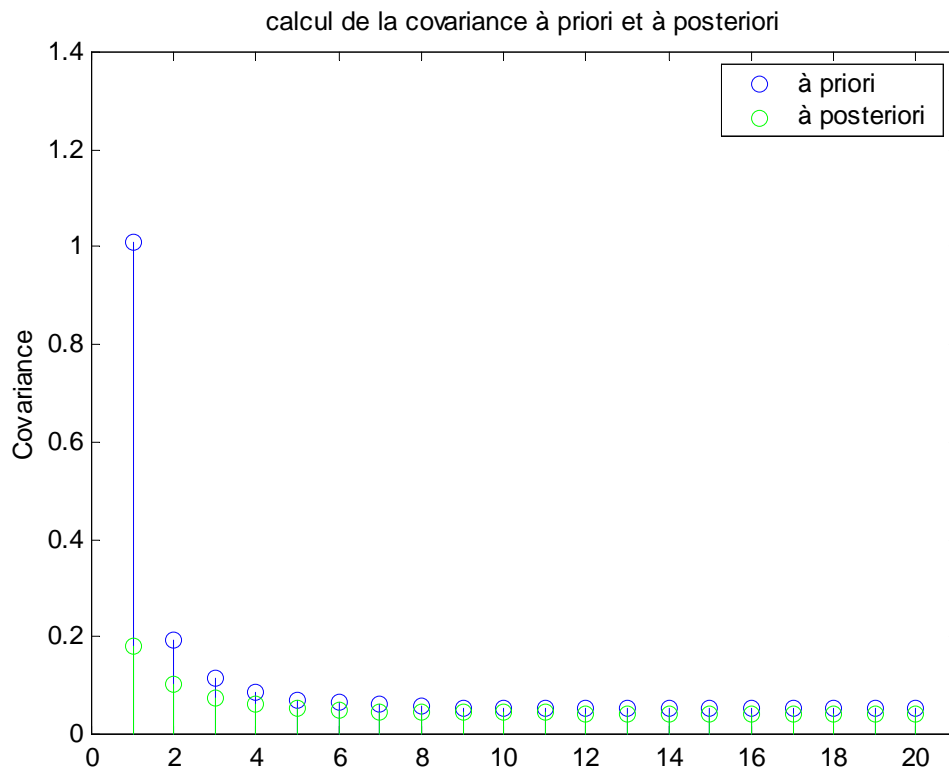


Figure III.18 : Le calcul de la covariance à priori et à posteriori.

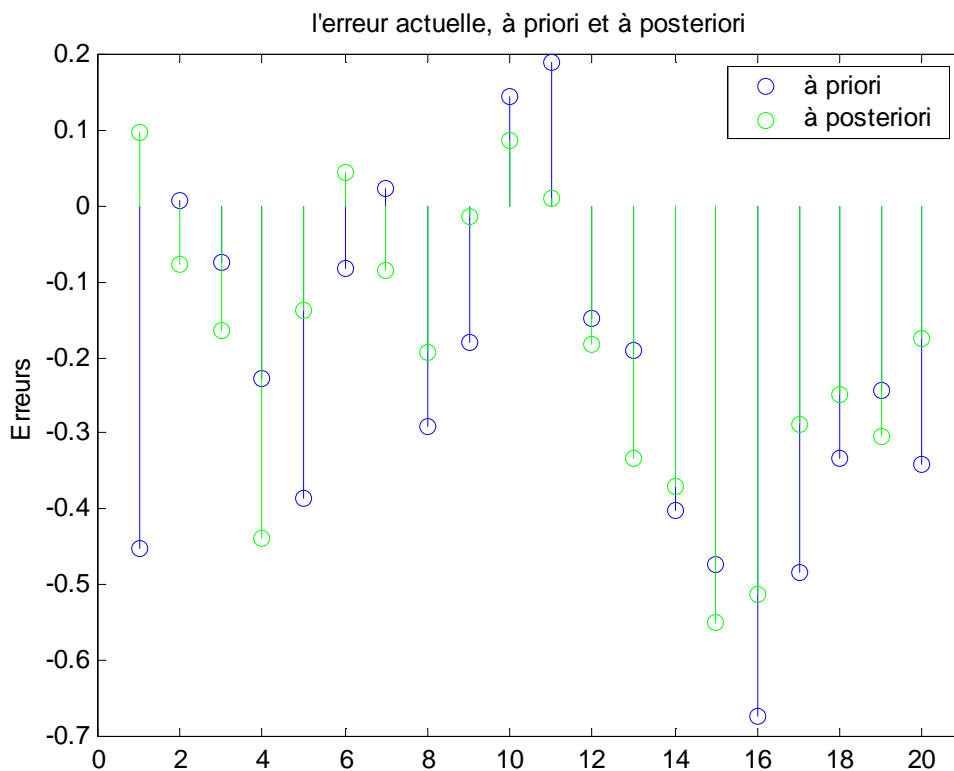


Figure III.19 : Le tracé de l'erreur, à priori et à posteriori.

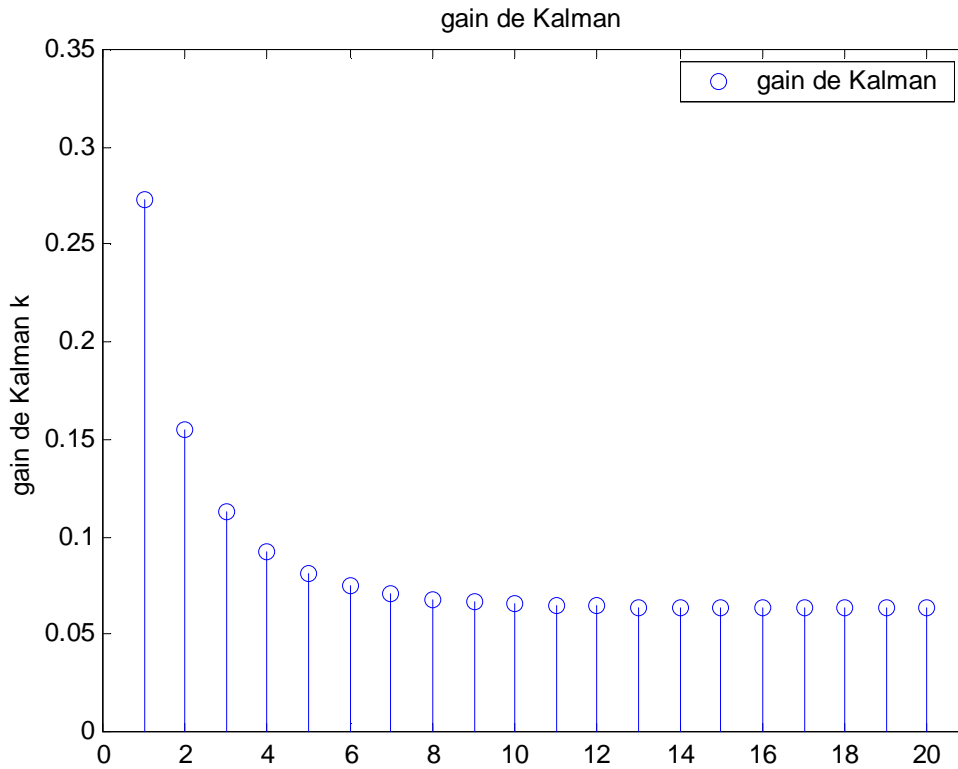


Figure III.20 : Le gain de Kalman.

**Le 2<sup>ème</sup> cas :**

$X_0 = 1$ ,  $Q = 0.1$   $R = 20$  (les covariances des bruits sont multipliées pas 10)

$X_0$  (à posteriori) = 1.5,  $P_0$  (à posteriori) = 1

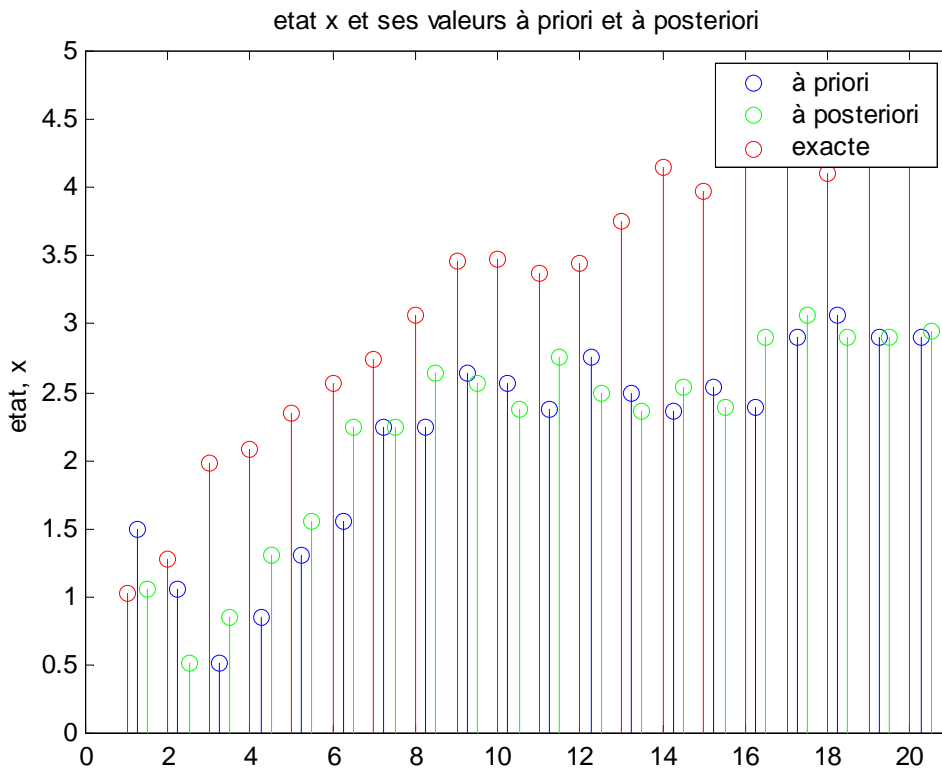


Figure III.21 : L'état x et ses valeurs à priori et à posteriori.  
 $X_0 = 1$ ,  $Q = 0.1$ ,  $R = 20$ ,  $X_0$  (à posteriori) = 1.5,  $P_0$  (à posteriori) = 1

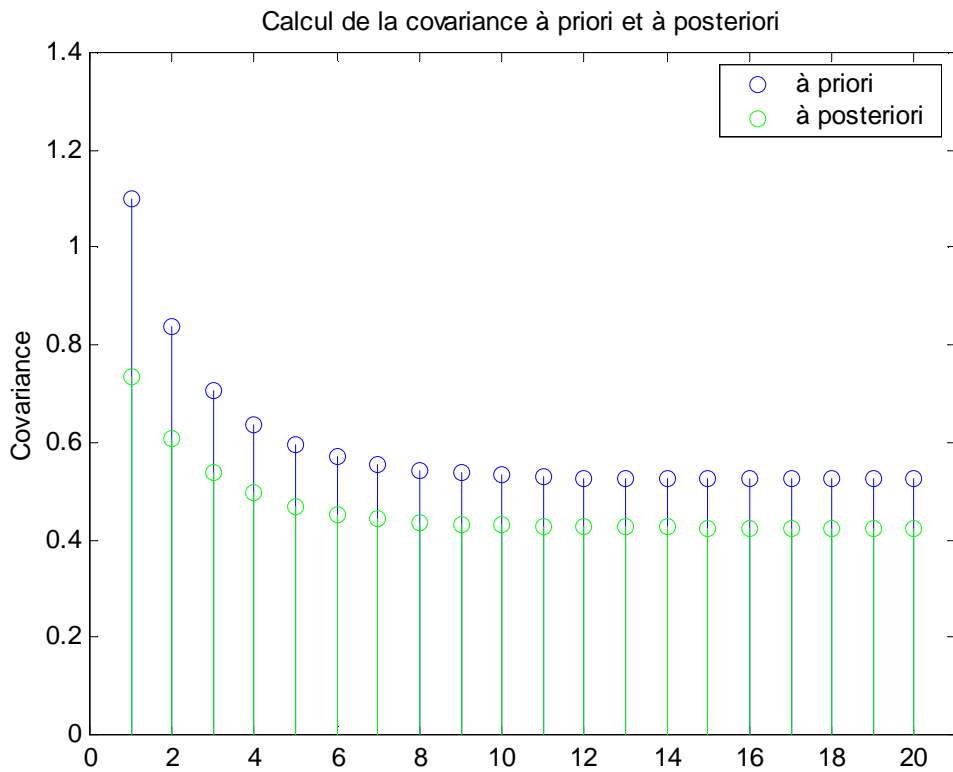


Figure III.22 : Le tracé de la covariance à priori et à posteriori.  
 $X_0 = 1$ ,  $Q = 0.1$ ,  $R = 20$ ,  $X_0$  (à posteriori) = 1.5,  $P_0$  (à posteriori) = 1

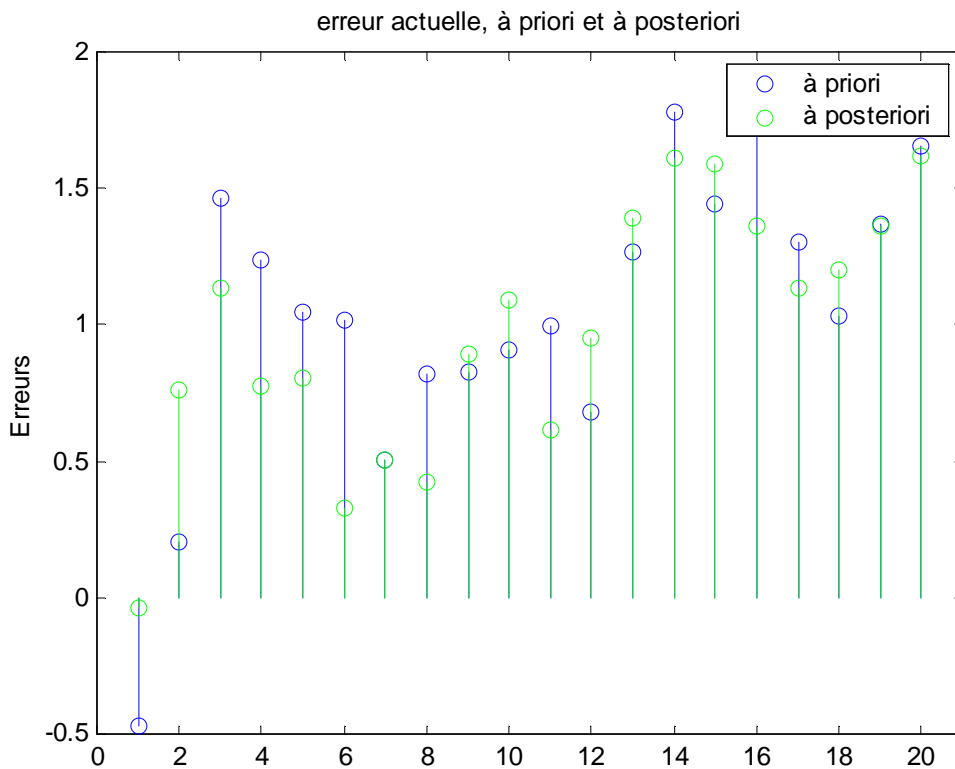


Figure III.23 : l'erreur actuelle, à priori et à posteriori.  
 $X_0 = 1$ ,  $Q = 0.1$ ,  $R = 20$ ,  $X_0$  (à posteriori) = 1.5,  $P_0$  (à posteriori) = 1

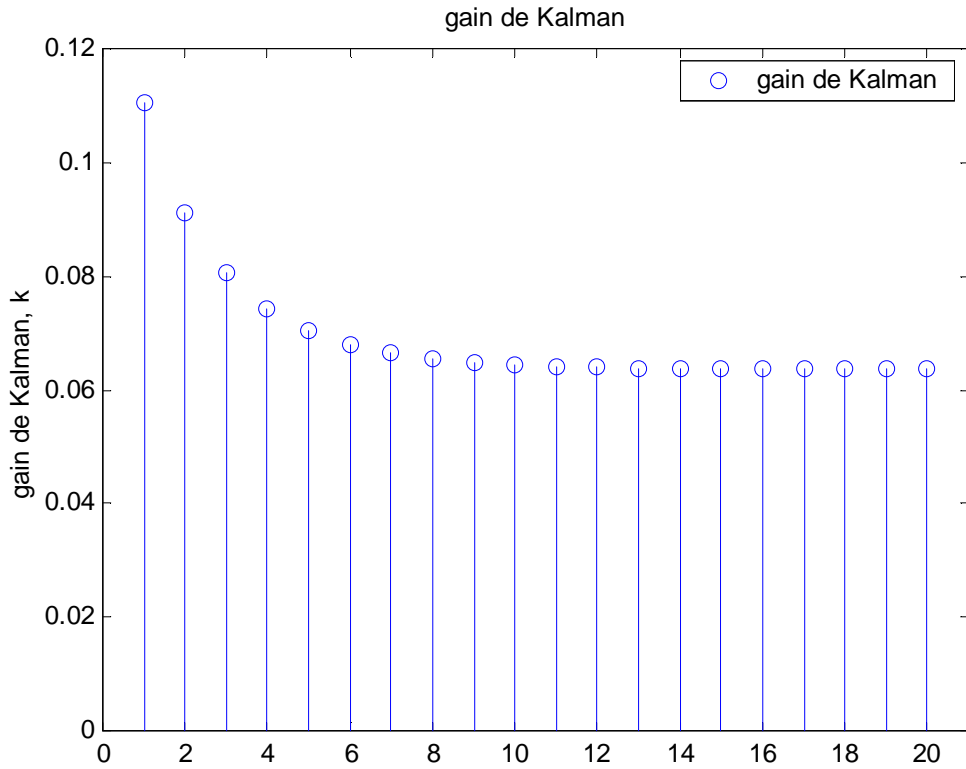


Figure III.24 : gain de Kalman.  
 $X_0 = 1, Q = 0.1, R = 20, X_0$  (à posteriori) = 1.5,  $P_0$  (à posteriori) = 1

**Le 3<sup>ème</sup> cas :**

$X_0 = 1, x$  à priori = 0,  $x$  à posteriori = 0,  $Q = 0.01, R = 2$

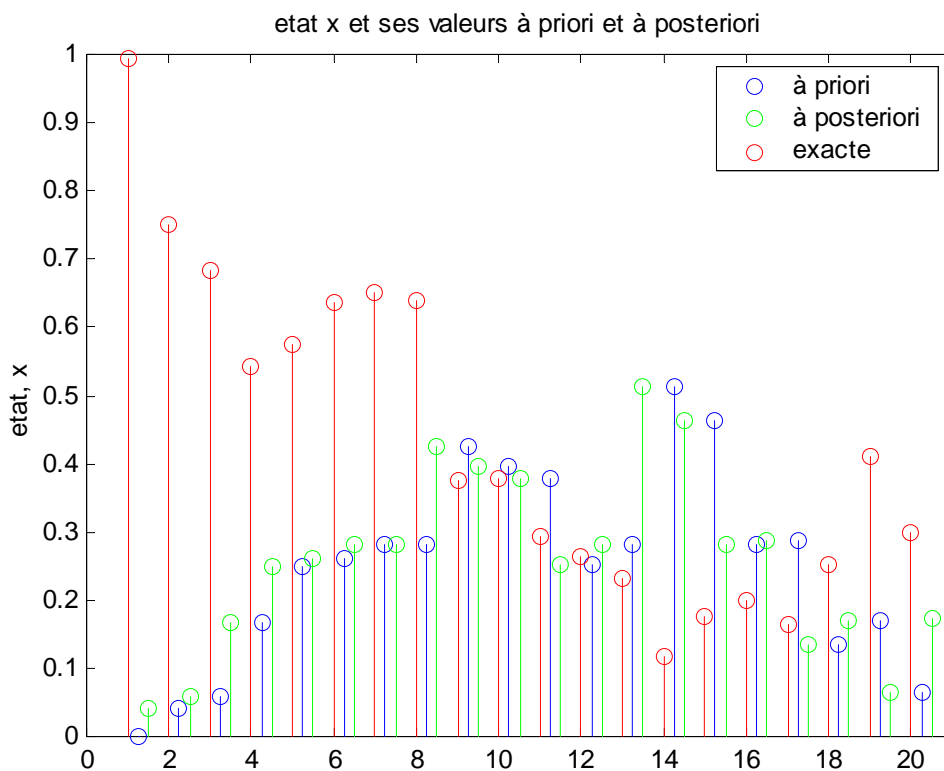


Figure III.25 : l'état  $x$  et ses valeurs à priori et à posteriori.  
 $X_0 = 1, x$  à priori = 0,  $x$  à posteriori = 0,  $Q = 0.01, R = 2$

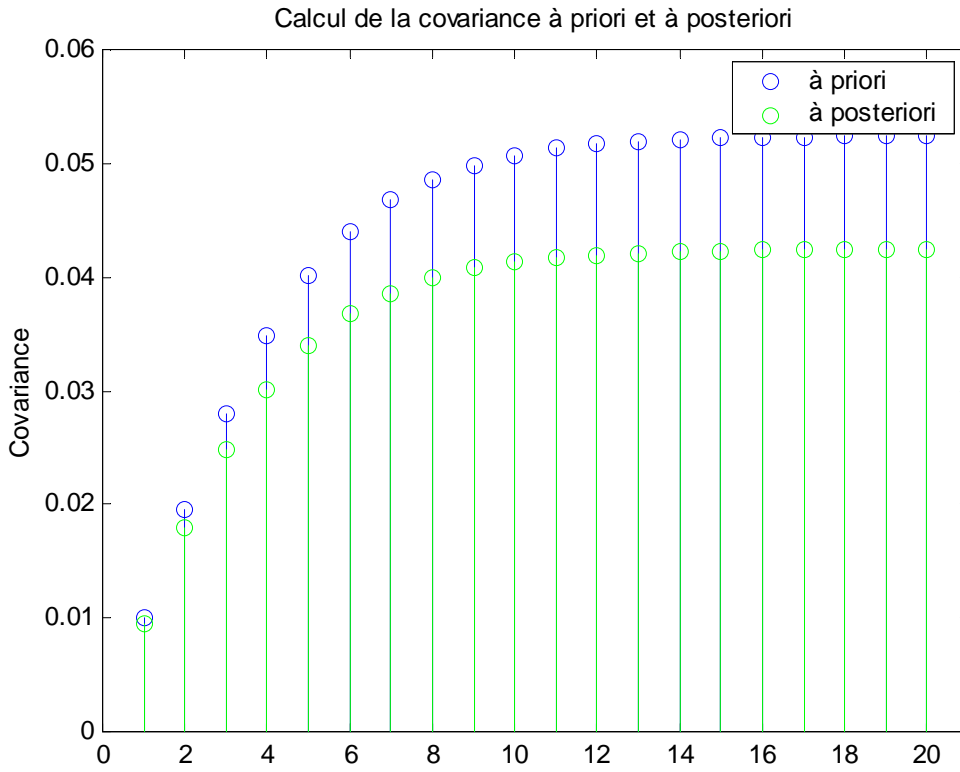


Figure III.26 : calcul de la covariance à priori et à posteriori.  
 $X_0 = 1$ ,  $x$  à priori = 0,  $x$  à posteriori = 0,  $Q = 0.01$ ,  $R = 2$

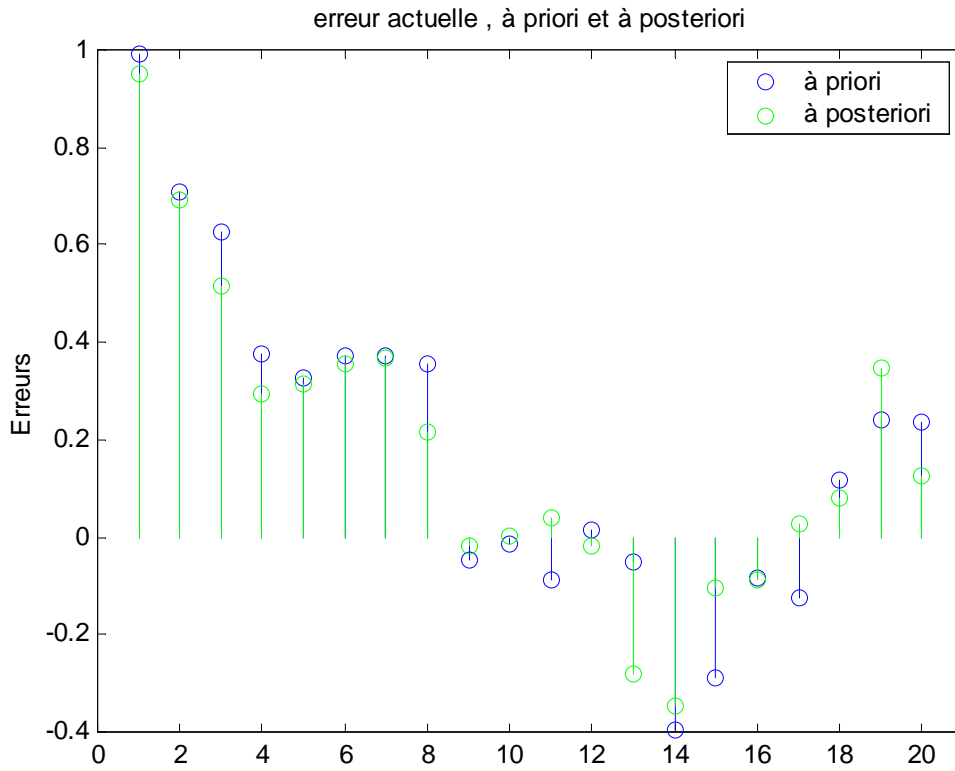


Figure III.27 : La courbe de l'erreur, à priori et à posteriori.  
 $X_0 = 1$ ,  $x$  à priori = 0,  $x$  à posteriori = 0,  $Q = 0.01$ ,  $R = 2$

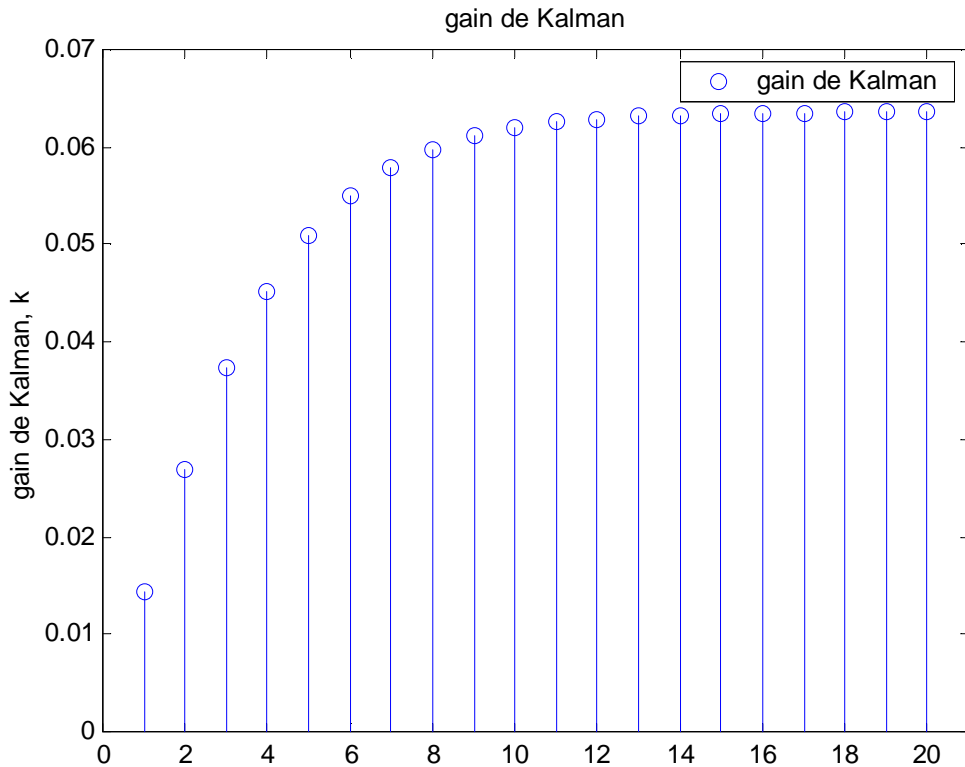


Figure III.28 : Le gain de Kalman.  
 $X_0 = 1$ ,  $x$  à priori = 0,  $x$  à posteriori = 0,  $Q = 0.01$ ,  $R = 2$

### III.2.3 Application 3 : Extraction de deux sinusoïdes amorties noyées dans un bruit

Concernant cette simulation, l'objectif est d'extraire deux sinusoïdes amorties noyées dans du bruit.

- Le vecteur d'état est un vecteur à 2 composantes :

$$X1 = 10 \exp(-at) \cdot \cos(\omega t)$$

$$X2 = 10 \exp(-at) \cdot \sin(\omega t)$$

- Le bruit de système est centré, gaussien et de variance  $\text{var}(u1)$  et  $\text{var}(u2)$ .

- Le bruit de mesures est centré, gaussien et de variance  $\text{var}(v1)$  et  $\text{var}(v2)$ .

**Le 1<sup>er</sup> cas :** Conditions initiales : Vecteur d'état initial  $X_0 = (0 \ 0)^T$

Les composantes du vecteur d'état sont nulles à l'origine et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $P_0$  est initialisée à 0.01 fois la matrice identité.

**Le bruit de système :**

$\text{Sigmau1} = 0.1$  avec ( $u1 = \text{sigmau1} * \text{randn}(\text{size}(t))$ ) (fonction matlab)

$\text{Sigmau2} = 0.1$

**Le bruit de mesures :**  $\text{Sigmap1} = 1$ ,  $\text{Sigmap2} = 0.1$

Les Figures suivantes montrent le tracé des signaux sans bruits, des bruits de mesures, des mesures, des estimées, des erreurs et des variances

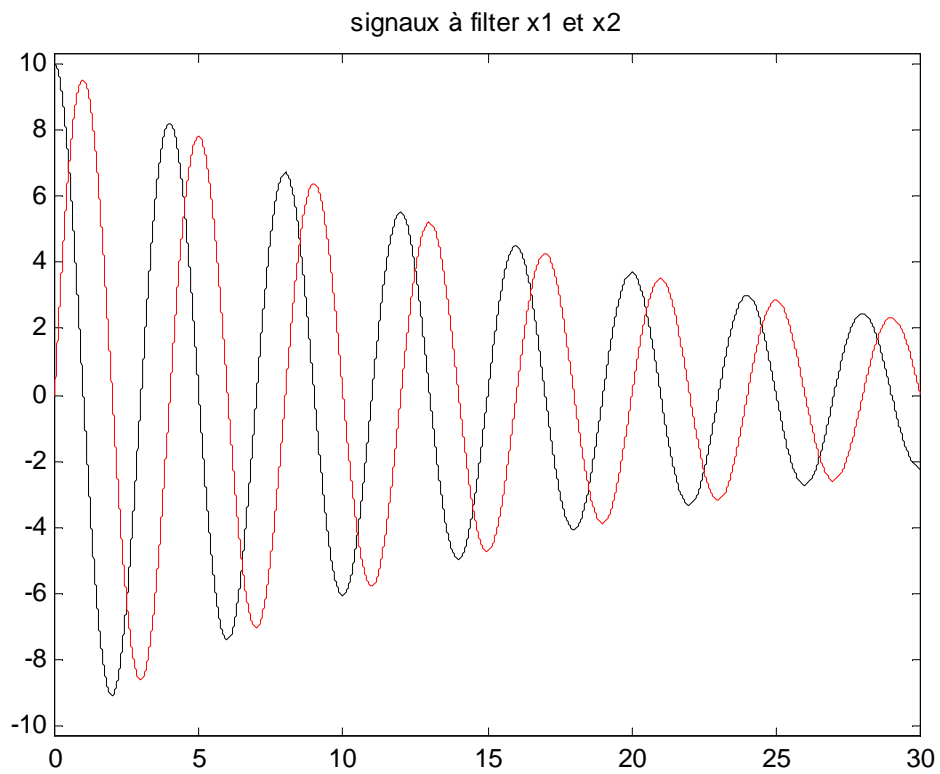


Figure III.29 : Le tracé des signaux à filtrer  $x_1$  et  $x_2$ .

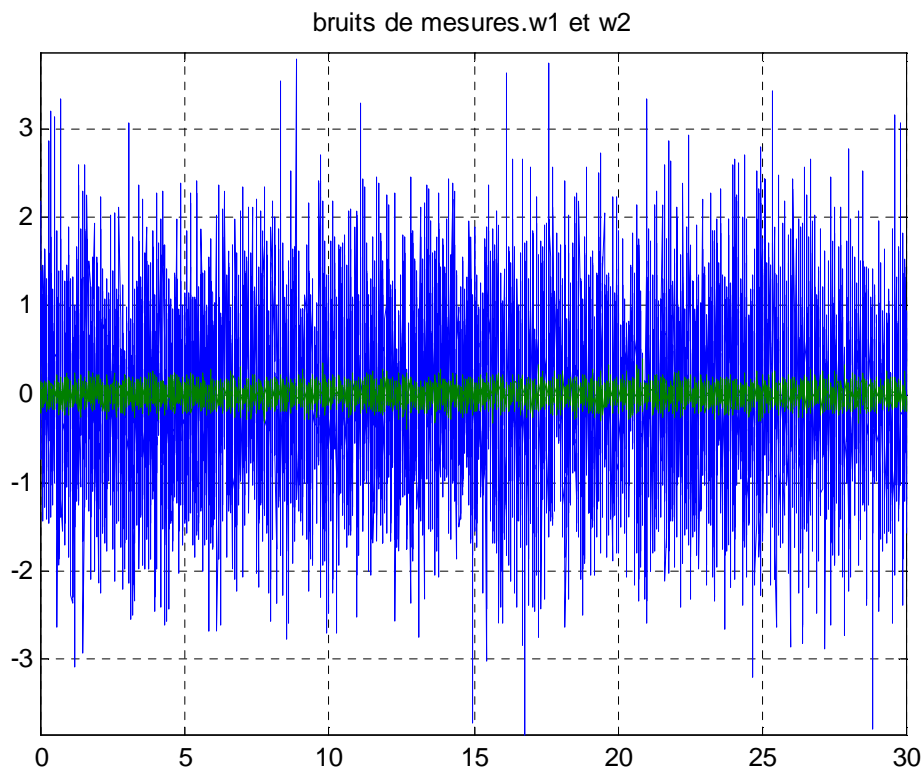


Figure III.30 : Le tracé des bruits de mesures.

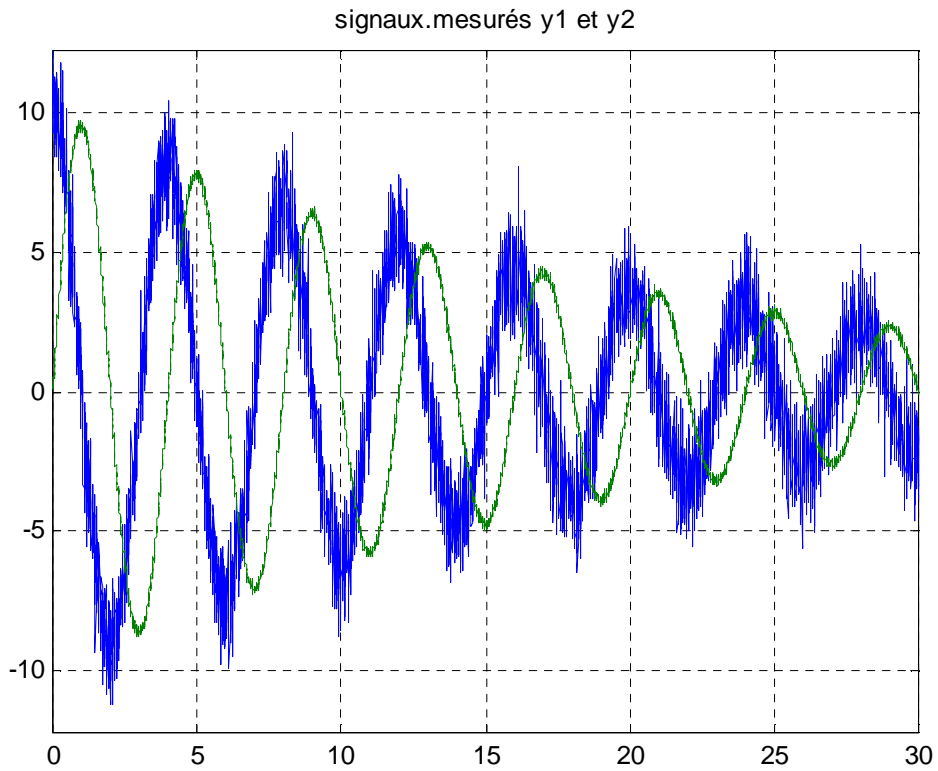


Figure III.31 : Le tracé des signaux mesurés  $y_1$  et  $y_2$ .

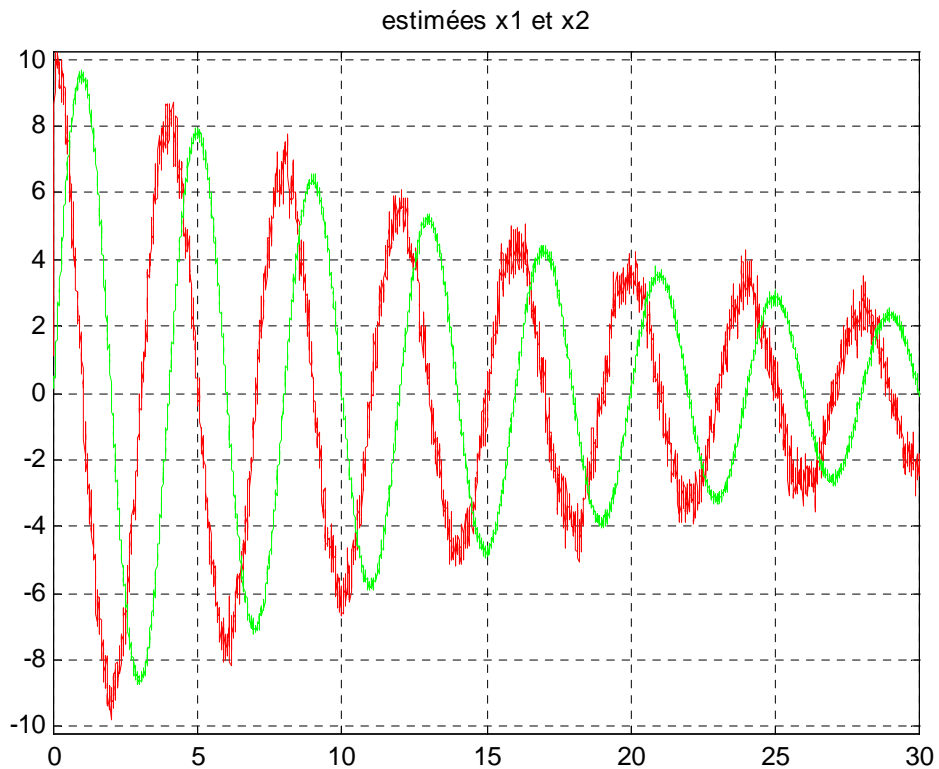


Figure III.32 : Le tracé des estimées  $x_1$  et  $x_2$ .

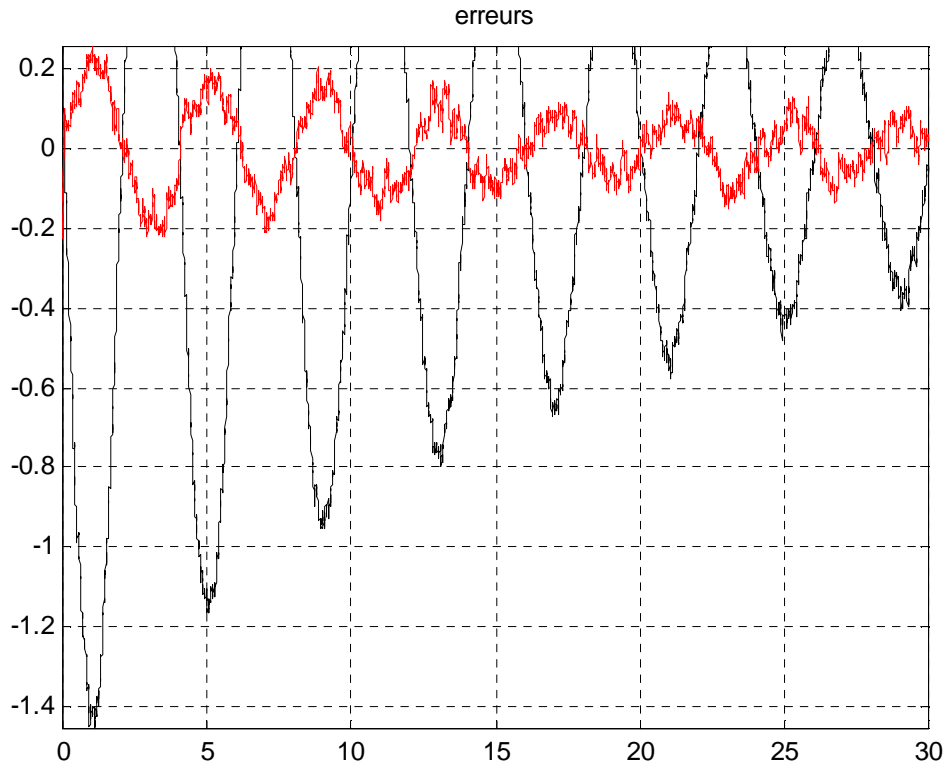


Figure III.33 : Le tracé des erreurs d'estimation sur  $x_1$  et  $x_2$ .

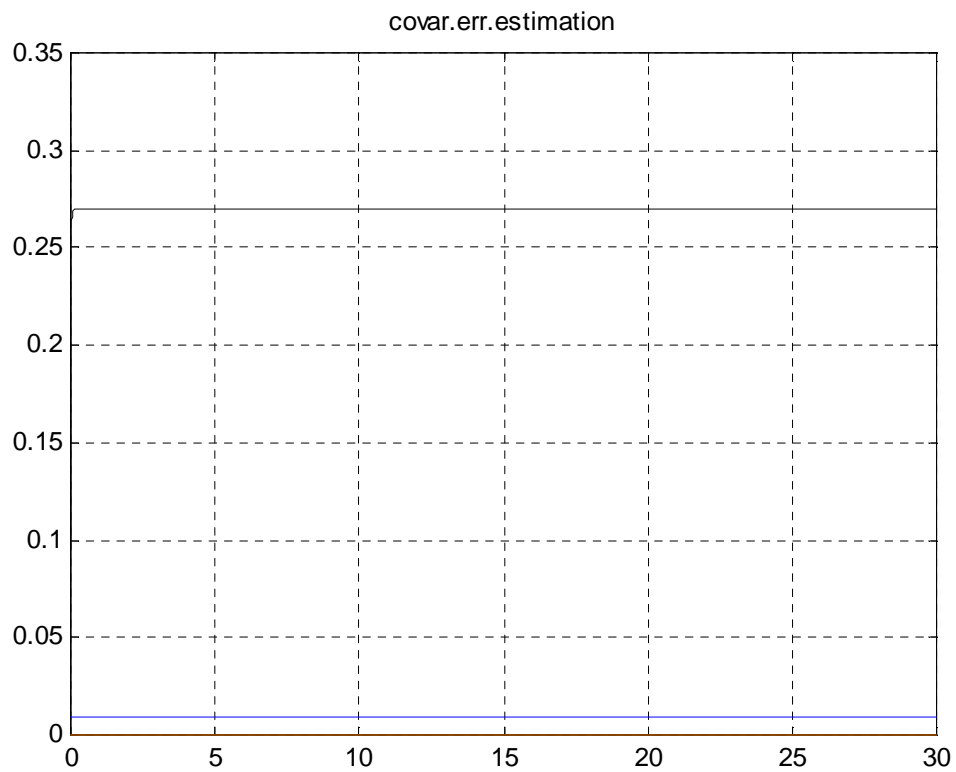


Figure III.34 : Le tracé de la covariance de l'erreur d'estimation.

D'après la Figure III.33, nous constatons que l'erreur d'estimation commise sur  $x_1$  est importante. Ceci est confirmé en Figure III.34. Ceci est du à la valeur initiale importante du bruit de mesure  $\sigma_{v1}$ . Malgré la valeur importante de l'erreur (0,01), les sinusoïdes sont extraites du bruit.

**Le 2<sup>ème</sup> cas :**

Conditions initiales : Vecteur d'état initial  $X_0 = (0 \ 0)^T$

Les composantes du vecteur d'état sont nulles à l'origine et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $P_0$  est initialisée à 0.1 fois la matrice identité (on a multiplié la covariance initiale fois 10)

**Le bruit de système :**

$\Sigma_{u1} = 0.1$  avec, ( $u1 = \sigma_{u1} * \text{randn}(\text{size}(t))$ ) ( fonction matlab)

$\Sigma_{u2} = 0.1$

**Bruit de mesures ( du même ordre)**

$\Sigma_{v1} = 0.1$

$\Sigma_{v2} = 0.2$

Les Figures suivantes montrent le tracé des signaux sans bruits, des bruits de mesures, des mesures, des estimées, des erreurs et des variances

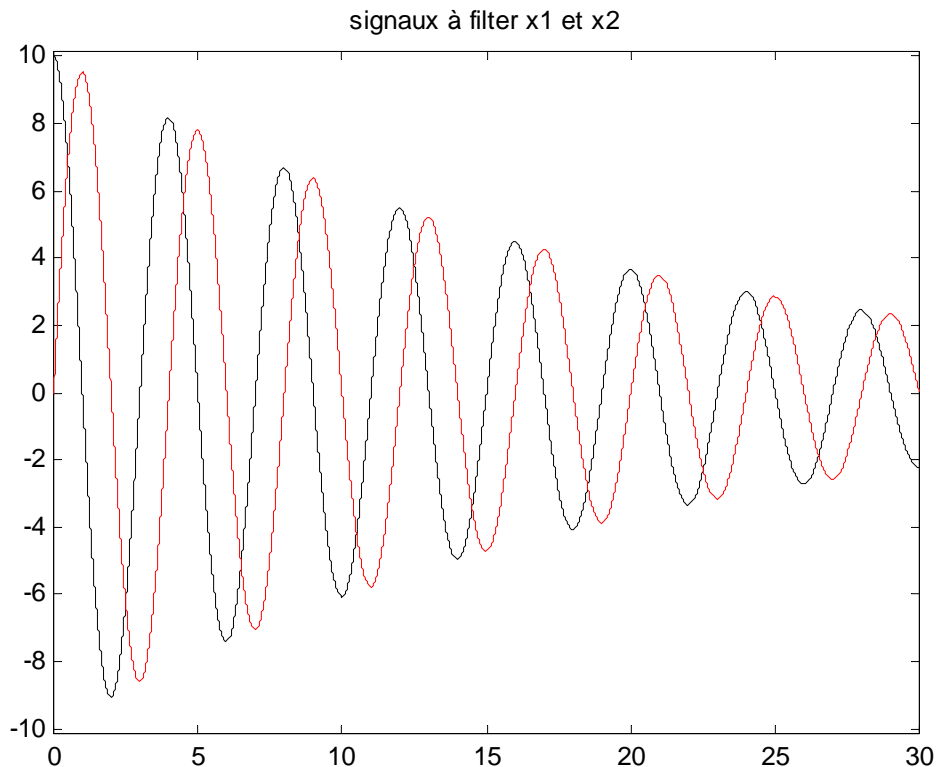
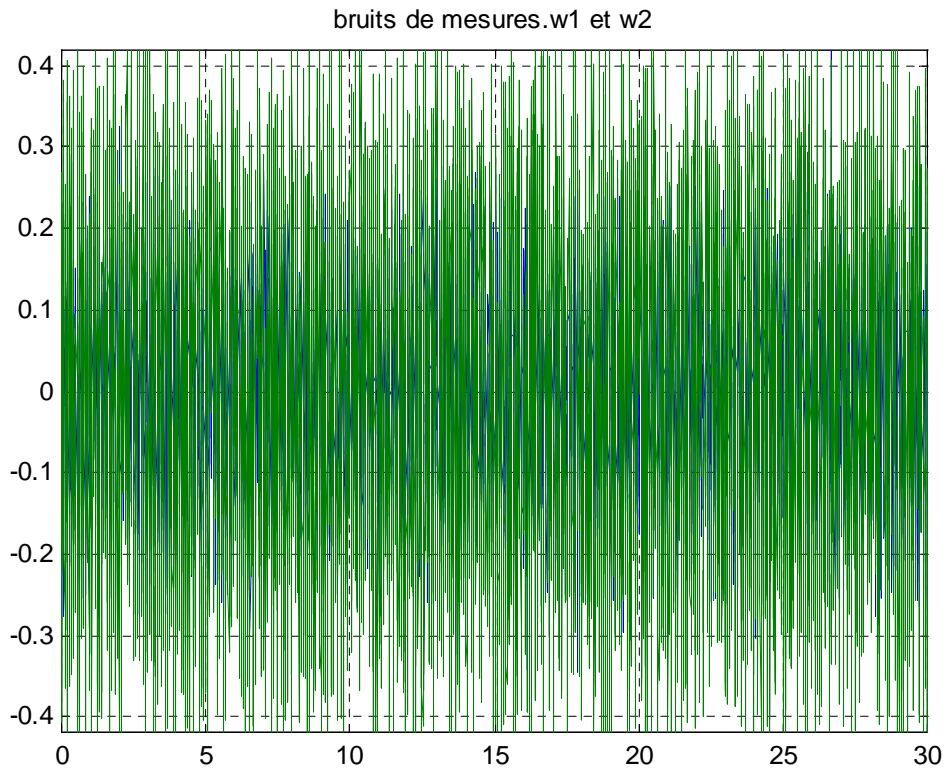
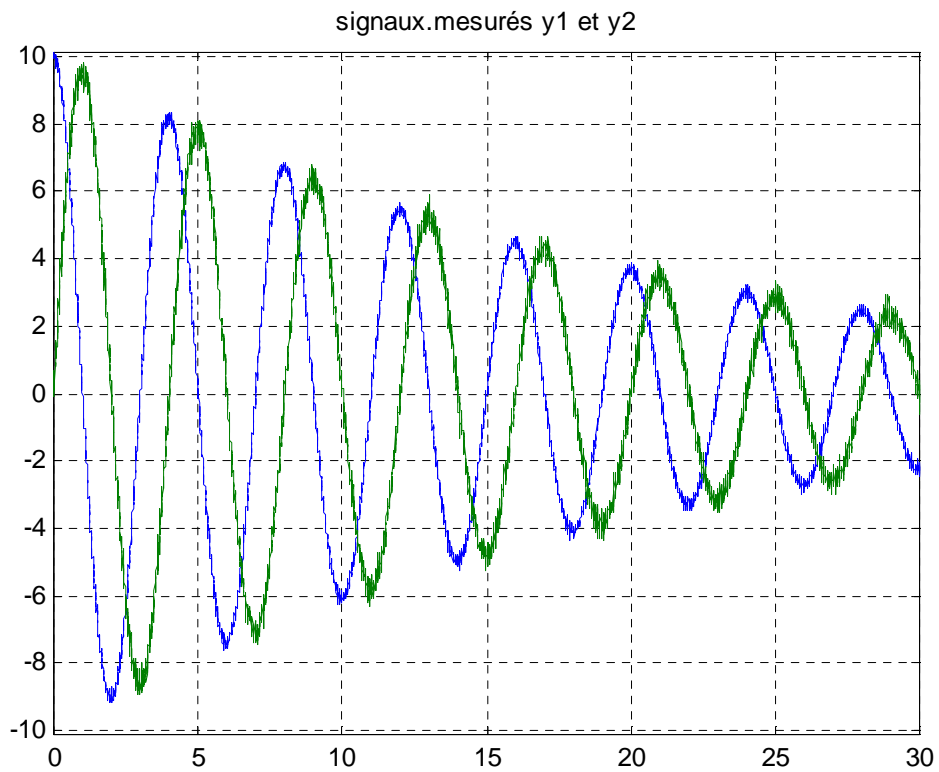


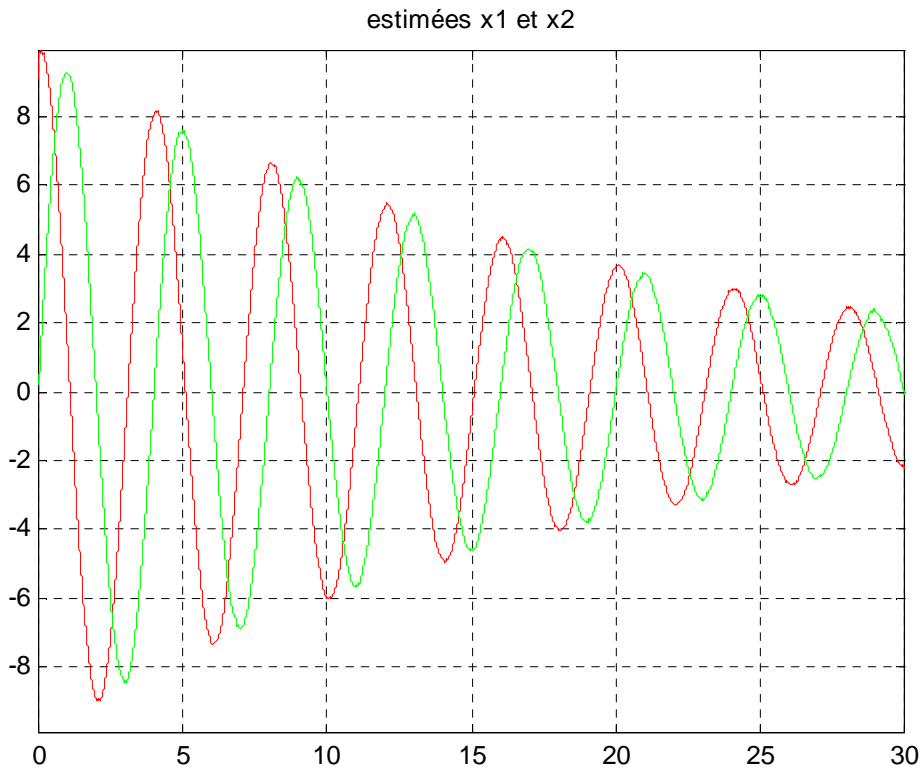
Figure III.35 : tracé des signaux à filtrer  $x_1$  et  $x_2$ .  
 $X_0 = (0 \ 0)^T, P_0 = 0.1, \sigma_{v1} = 0.1, \sigma_{v2} = 0.2$



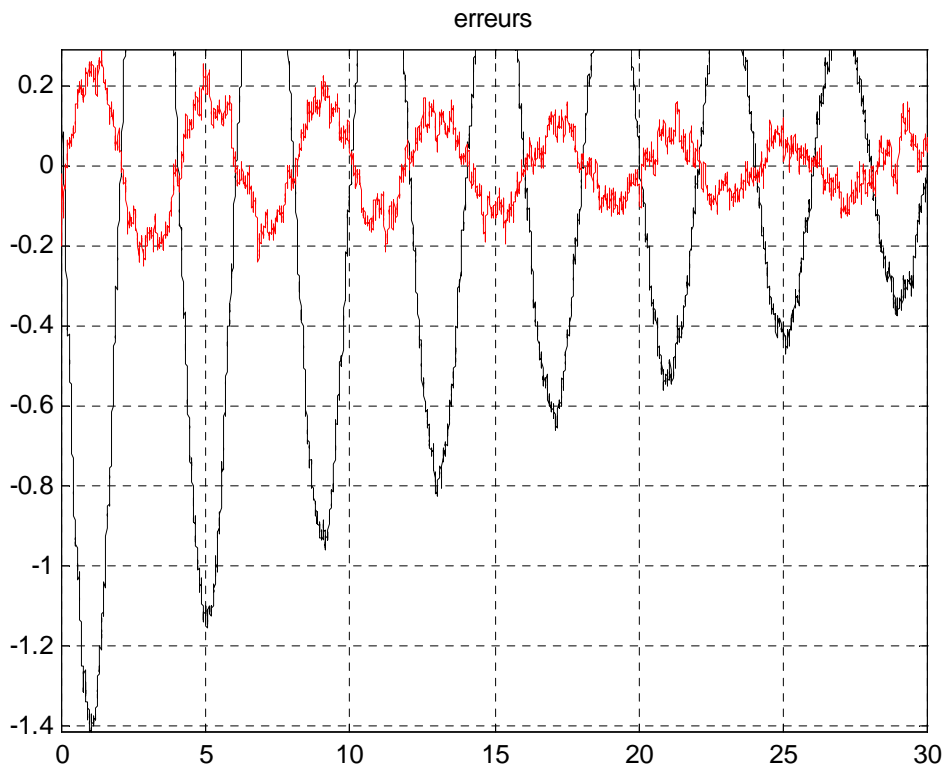
**Figure III.36 : tracé des bruits de mesures.**  
 $X_0 = (0 \ 0)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{w1} = 0.1$ ,  $\sigma_{w2} = 0.2$



**Figure III.37 : tracé des signaux mesurés y1 et y2.**  
 $X_0 = (0 \ 0)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{w1} = 0.1$ ,  $\sigma_{w2} = 0.2$



**Figure III.38 : tracé des estimées  $x_1$  et  $x_2$ .**  
 $X_0 = (0 \ 0)^T, P_0 = 0.1, \text{sigmav}1=0.1, \text{sigmav}2=0.2$



**Figure III.39 : tracé des erreurs d'estimation sur  $x_1$  et  $x_2$ .**  
 $X_0 = (0 \ 0)^T, P_0 = 0.1, \text{sigmav}0.1=0.1, \text{sigmav}2=0.2$

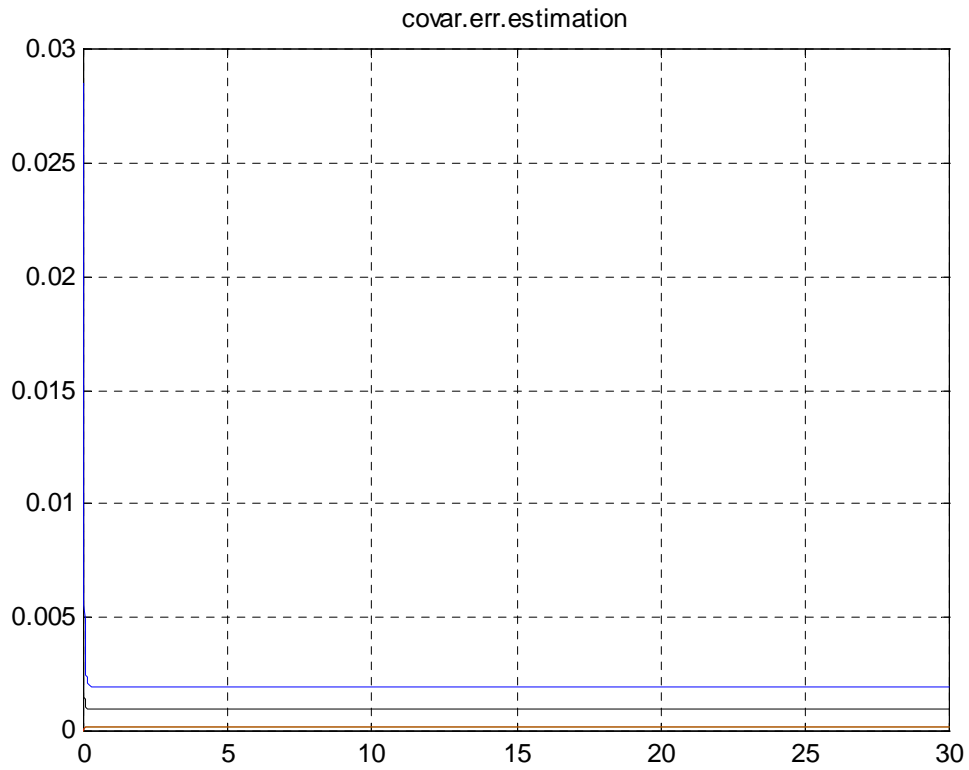


Figure III.40 : *tracé de la covariance de l'erreur d'estimation.*  
 $X_0 = (0 \ 0)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{\text{max}0.1} = 0.1$ ,  $\sigma_{\text{max}2} = 0.2$

Les Figures III.38 III.39 III.40 montrent le résultat de l'extraction des deux sinusôides noyées dans un bruit de mesure de variance 0,1 et 0,2 et pour les mêmes conditions initiales que le cas précédent.

Nous constatons que l'erreur de l'estimation converge vers zéro. Ce qui se traduit par une bonne qualité d'estimation.

### Le 3<sup>ème</sup> cas :

Conditions initiales :

Vecteur d'état initial  $X_0 = (10 \ 10)^T$

Les composantes du vecteur d'état sont nulles à l'origine et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $P_0$  est initialisée à 0.1 fois la matrice identité (nous avons multiplié la covariance initiale fois 10)

**Le bruit de système :**

$\text{Sigma}u1=0.1$  avec, ( $u1 = \text{sigma}u1 * \text{randn}(\text{size}(t))$ ) ( fonction matlab)

$\text{Sigma}u2 = 0.1$

**Bruit de mesures ( du même ordre)**

$\text{Sigma}v1 = 0.1$

$\text{Sigma}v2 = 0.2$

Les Figures suivantes montrent le tracé des signaux sans bruits, des bruits de mesures, des mesures, des estimées, des erreurs et des variances.

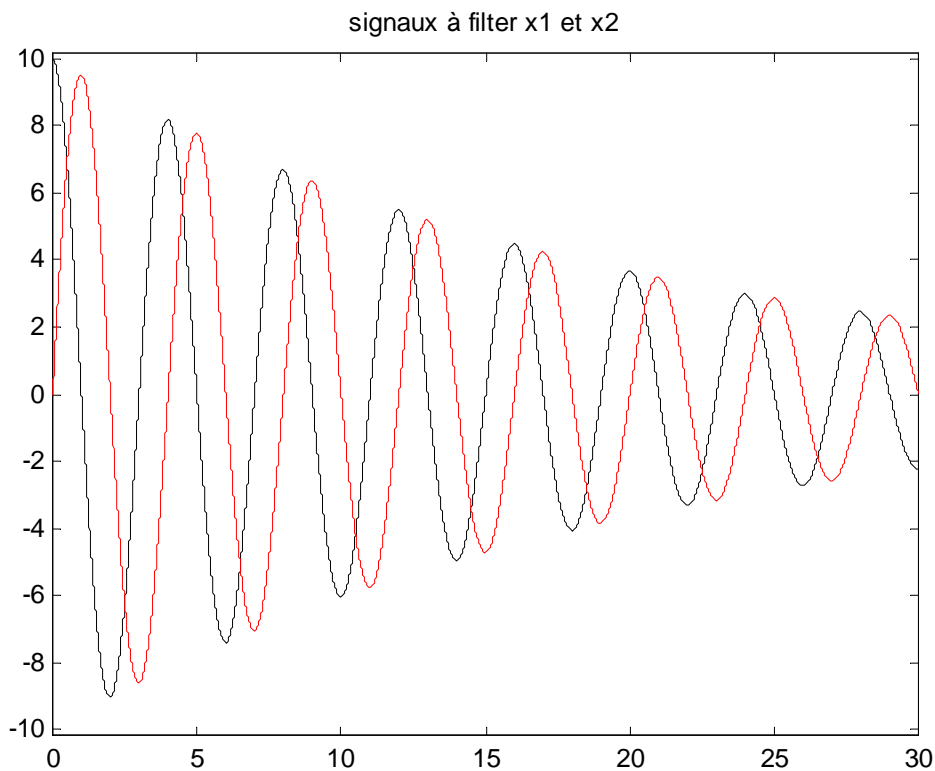


Figure III.41 : tracé des signaux à filtrer  $x1$  et  $x2$ .  
 $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\text{sigma}v1=0.1$ ,  $\text{sigma}v2=0.2$

bruits de mesures.w1 et w2

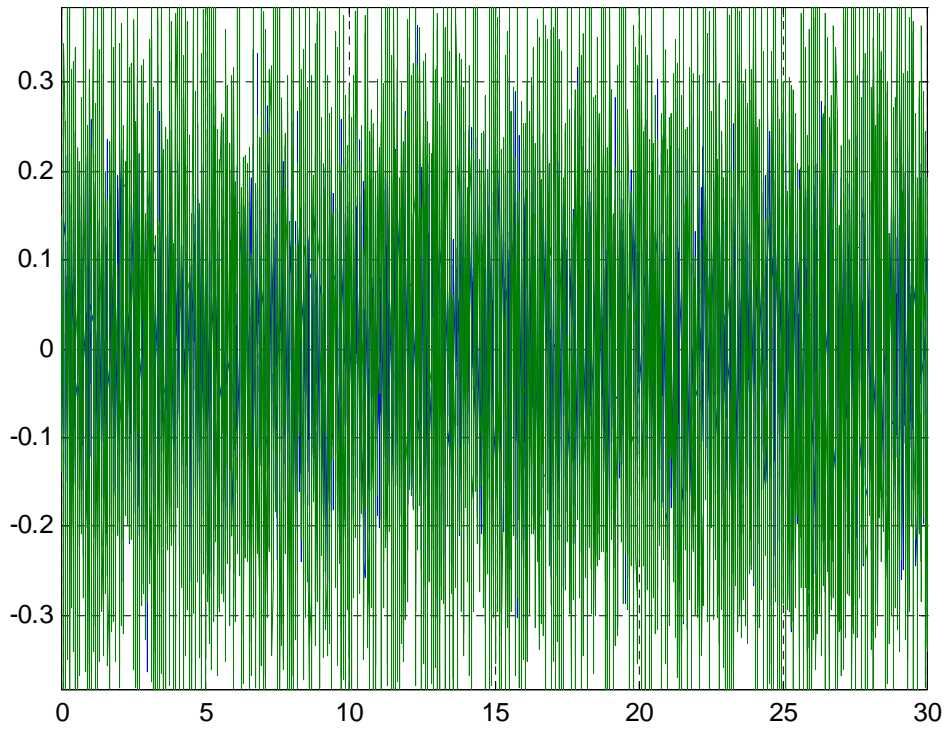


Figure III.42 : tracé des bruits de mesures.  
 $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\text{sigmav}1=0.1, \text{sigmav}2=0.2$

signaux.mesurés y1 et y2

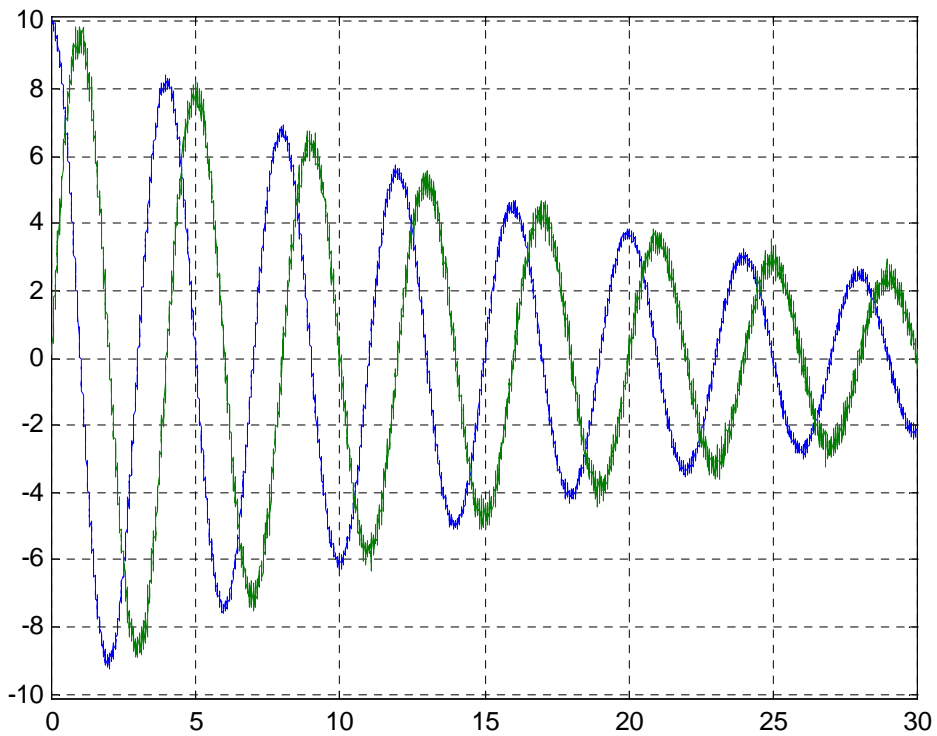
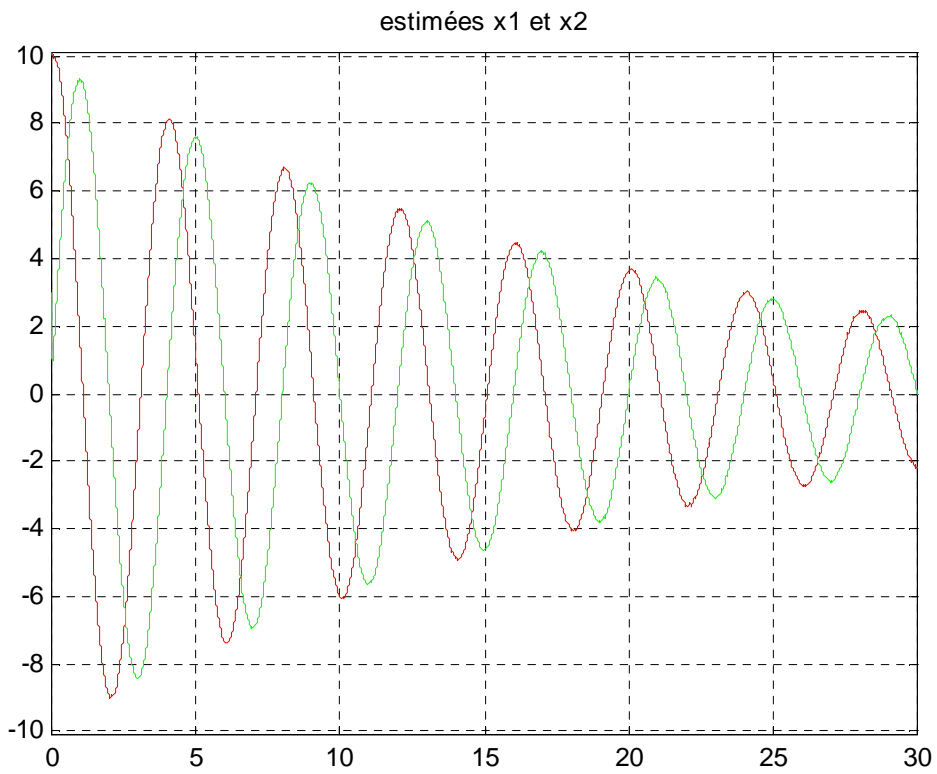
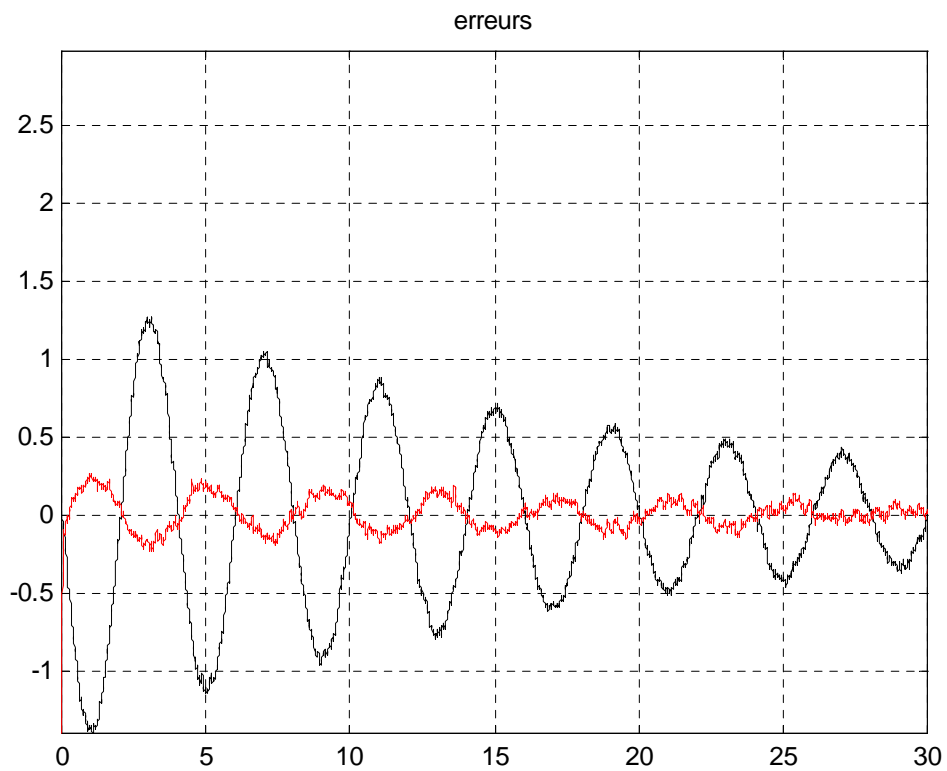


Figure III.43 : tracé des signaux mesurés y1 et y2.  
 $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\text{sigmav}1=0.1, \text{sigmav}2=0.2$



**Figure III.44 : tracé des estimées  $x_1$  et  $x_2$ .**  
 $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{\text{nav}1} = 0.1$ ,  $\sigma_{\text{nav}2} = 0.2$



**Figure III.45 : tracé des erreurs d'estimation sur  $x_1$  et  $x_2$ .**  
 $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{\text{nav}1} = 0.1$ ,  $\sigma_{\text{nav}2} = 0.2$

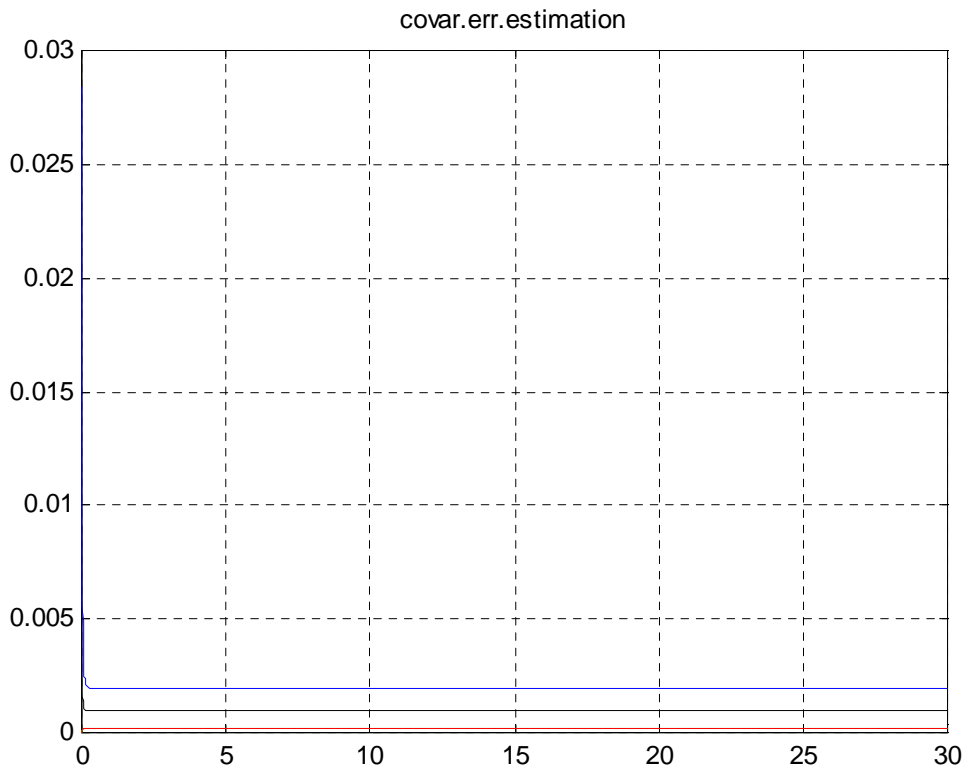


Figure III.46 : tracé de la covariance de l'erreur d'estimation.  
 $X_0 = (10 \ 10)^T$ ,  $P_0 = 0.1$ ,  $\sigma_{av1} = 0.1$ ,  $\sigma_{av2} = 0.2$

Concernant la simulation du troisième cas, les deux signaux bruités sont bien estimés malgré le changement des valeurs initiales. Les deux bruits de mesure sont de même ordre de grandeur.

L'erreur de l'estimation oscille avant de converger vers zéro. Ceci est aux valeurs initiales  $X_0 = (10 \ 10)^T$

### III.2.4 Application 4 : Estimation de la position et de la vitesse d'un véhicule en mouvement rectiligne uniformément accéléré

La trajectographie est l'un des domaines où le filtre de KALMAN est très utilisé, c'est pourquoi nous avons choisi de faire une simulation d'un véhicule qui se déplace le long d'une route droite, la position du véhicule est mesurée à l'aide des capteurs de position, mais comme les mesures sont bruitées voir fausses ou inexistantes parfois, le filtre de KALMAN nous permet d'avoir une trajectoire très proche du vrai chemin qu'empreinte le véhicule.

Le vecteur d'état du système est défini par la position du véhicule et sa vitesse. L'entrée U est la commande d'accélération, et y la mesure de position du véhicule. On varie l'accélération et on mesure après chaque période T secondes, l'équation de la vitesse dans ce cas est :

$$V(k+1) = V(k) + T \cdot U$$

La vitesse à chaque période est égale à la vitesse à l'instant (k-T) plus, la commande d'accélération multipliée par la période T mais, l'équation précédente nous permet pas d'avoir une valeur précise de v(k+1) , la vitesse est perturbée par des bruits qui sont dus aux contraintes du vent, les irrégularités de la route et bien d'autres facteurs , pour être mieux réaliste l'équation deviendra :

$$V(k+1) = V(k) + T \cdot U + \tilde{V}(k)$$

Avec :  $\tilde{V}(k)$  est le bruit de vitesse

Une équation similaire peut être tirée pour la position :

$$P(k+1) = p(k) + T \cdot V(k) + 1/2T^2 \cdot U(k) + \tilde{P}(k)$$

Avec :  $\tilde{P}(k)$  est le bruit de position

A présent, on peut définir le vecteur d'état du système, qui est constitué de la position et de la vitesse du véhicule :

$$X(k) = \begin{bmatrix} P(k) \\ V(k) \end{bmatrix}$$

on peut écrire les équations du système linéaire comme suit :

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} U(k) + W(k)$$

$$Y(k) = [1 \ 0] X(k) + Z(k)$$

Avec :  $Z(k)$  le bruit de mesure du à beaucoup de facteurs tels que les erreurs d'instrumentation et la qualité des capteurs.

Le véhicule se déplace le long d'une route droite, sa position est mesurée avec une erreur de 10 m, l'accélération est constante  $1\text{m/s}^2$ , la position est mesurée 10 fois par seconde  $T = 0.1\text{s}$ . Maintenant comment avoir une estimation meilleure que les données mesurées, vu l'écart d'erreur important.

Comme la position est proportionnelle à 0.005 fois l'accélération et le bruit d'accélération est égal  $0.2 \text{ m/s}^2$  la variance du bruit de position est  $(0.005)^2 \cdot (0.2)^2 = 10^{-6}$ .

De même, pour la vitesse, comme cette dernière est proportionnelle à 0.1 fois l'accélération la variance du bruit de vitesse est  $(0.1)^2 \cdot (0.2)^2 = 4 \cdot 10^{-4}$

Finalement la covariance du bruit de position et celui de la vitesse est égal à  $(0.005 \cdot 0.2) \cdot (0.1 \cdot 0.2) = 2 \cdot 10^{-5}$

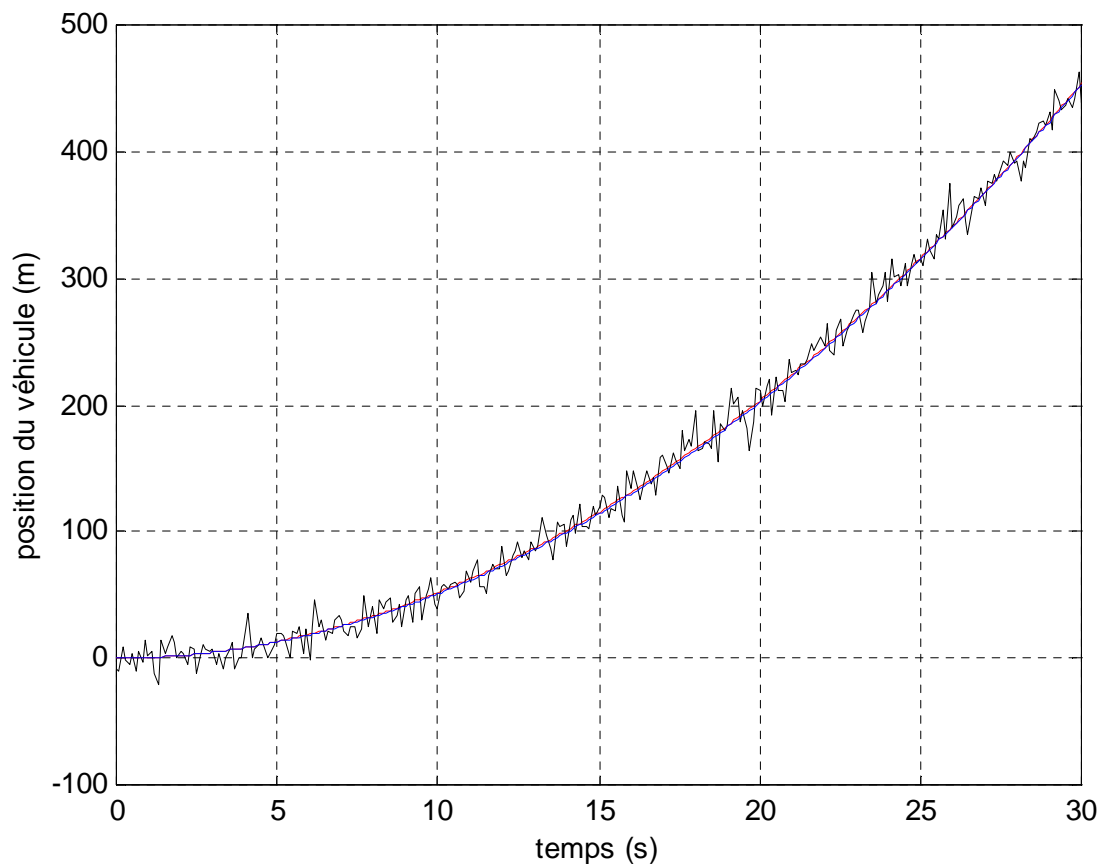
En combinant tous ces calculs on obtient la matrice Q

$$Q = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 2 \cdot 10^{-5} \\ 2 \cdot 10^{-5} & 4 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$R = (\text{bruit de position})^2 = 100$$

### Le 1<sup>er</sup> cas :

Après avoir simulé cette application sous matlab, les résultats obtenus, sont les suivants :



**Figure III.47 :** *position du véhicule (réelle, mesurée et estimée).*

La Figure III.47 montre la position réelle du véhicule, la position mesurée et la position estimée (trois courbes : rouge-bleue-noire).

Nous constatons que les courbes (position mesurée et estimée) sont très proches l'une de l'autre.

**En rouge :** la position réelle du véhicule.

**En noir :** la position mesurée du véhicule.

**En bleu :** la position estimée du véhicule.

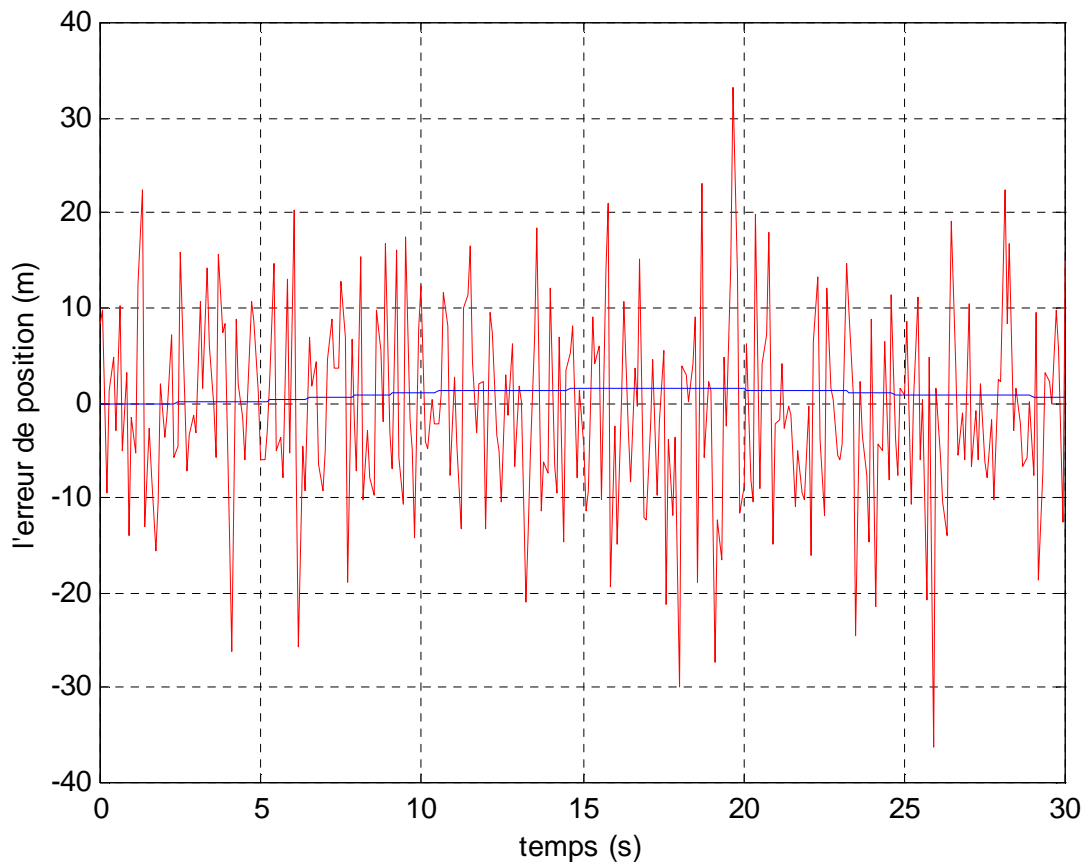


Figure III.48 : *l'erreur de position mesurée et l'erreur de position estimée.*

**En rouge :** l'erreur de position mesurée.

**En bleu :** l'erreur de position estimée.

La Figure III.48 montre l'erreur entre la position réelle et la position mesurée, ainsi que la position réelle et la position estimée.

D'après le résultat obtenu, nous constatons que l'erreur est réduite à un intervalle (0 - 1,5m) et en fonction du temps (des itérations), cette erreur diminue.

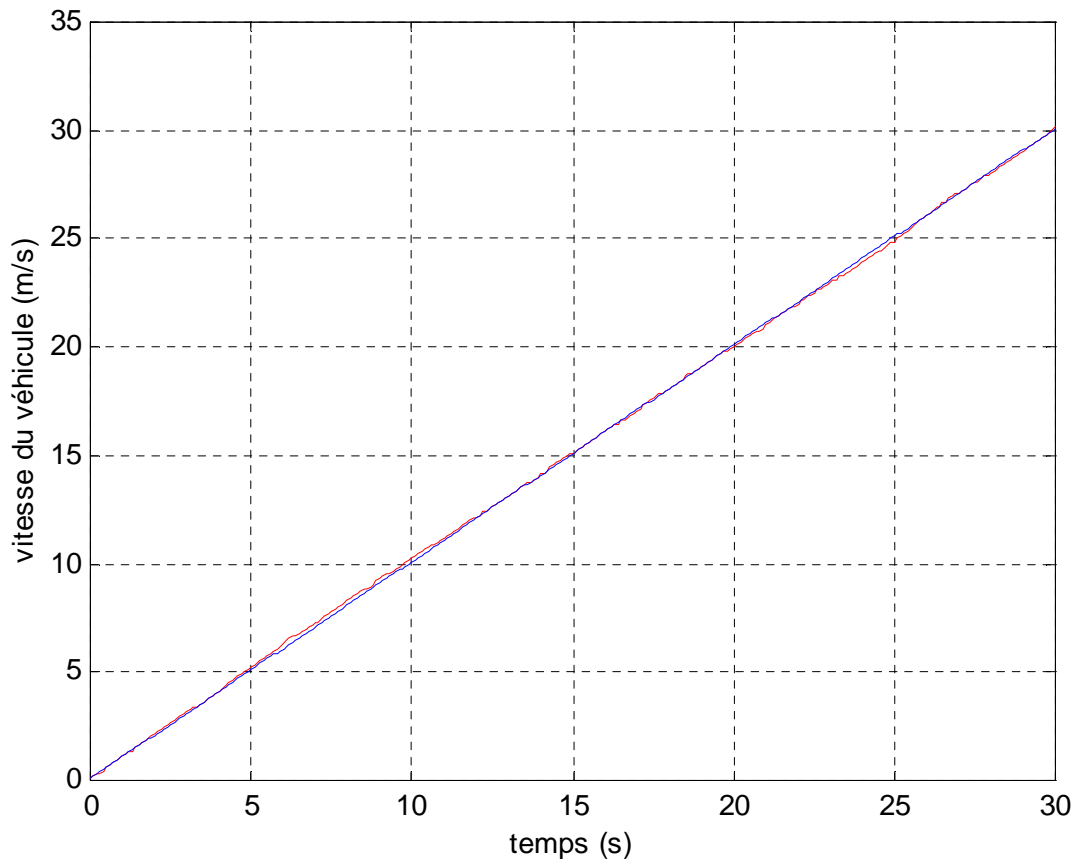


Figure III.49 : la vitesse du véhicule (réelle et estimée).

**En rouge** : la vitesse vraie du véhicule

**En bleu** : la vitesse estimée du véhicule

La Figure III.49 montre l'estimation de la deuxième composante du vecteur d'état qu'on obtient avec le filtre de Kalman (la vitesse).

Comme la vitesse du véhicule fait parti du vecteur d'état du processus, nous obtenons la vitesse estimée en parallèle avec la position estimée.

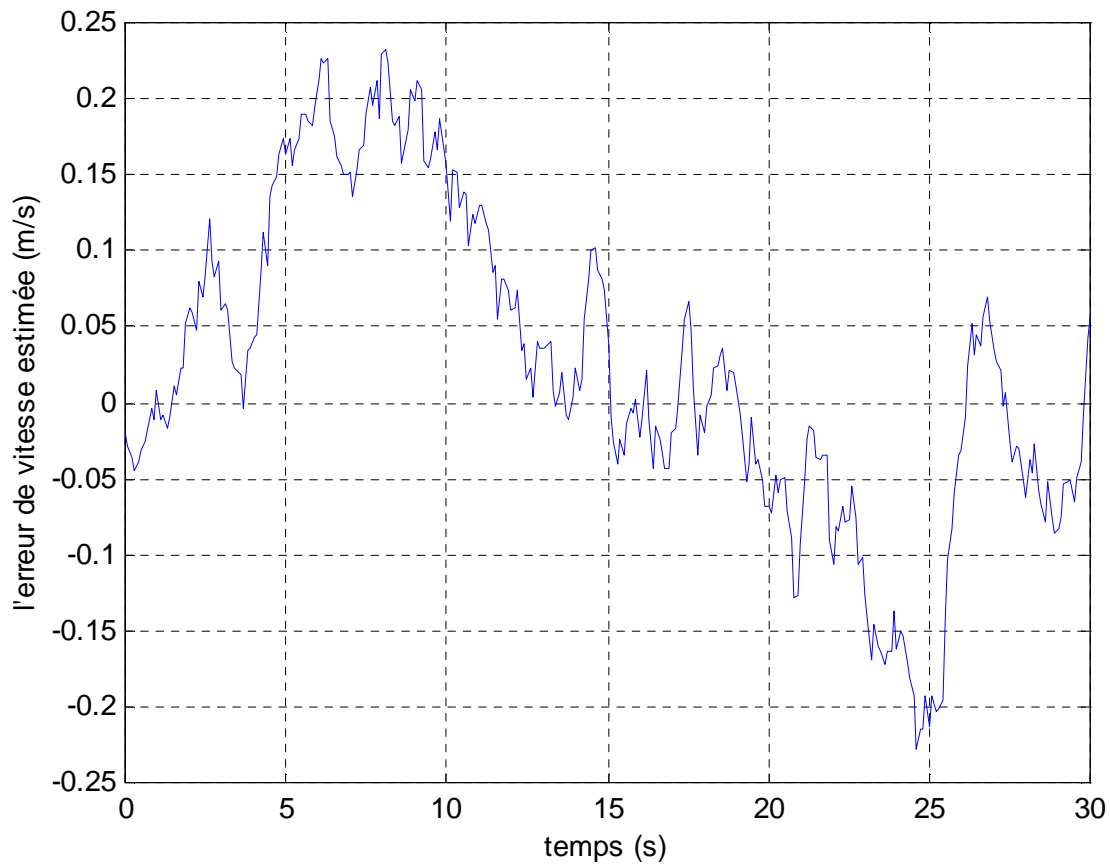


Figure III.50 : l'erreur de vitesse estimée.

La Figure III.50 montre l'erreur commise sur de la vitesse estimée. La courbe de l'erreur oscille autour de zéro.

**Le 2<sup>ème</sup> cas :**

Conditions initiales : Vecteur d'état :  $X = (0 \ 0)^T$

Le bruit de position = 2m

Le bruit d'accélération = 0.02m/s<sup>2</sup>

Cela se traduit par la diminution des matrices de covariance de système Q et de mesures R

Nous obtenons les résultats suivants :

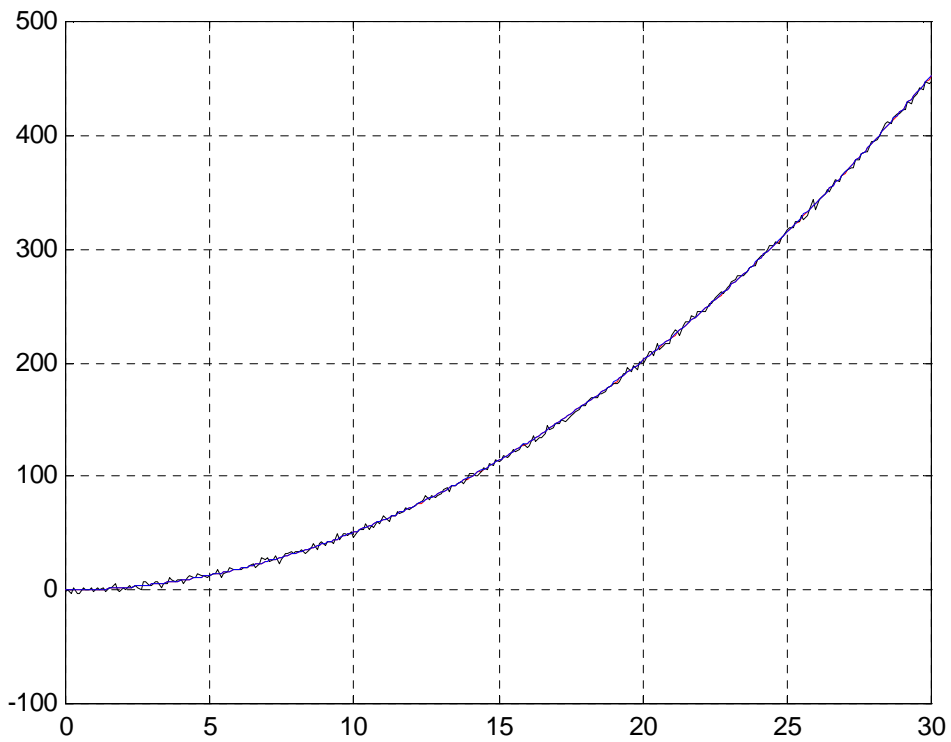


Figure III.51 : position du véhicule réelle, mesurée et estimée.  
 $X_0 = (0 \ 0)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>

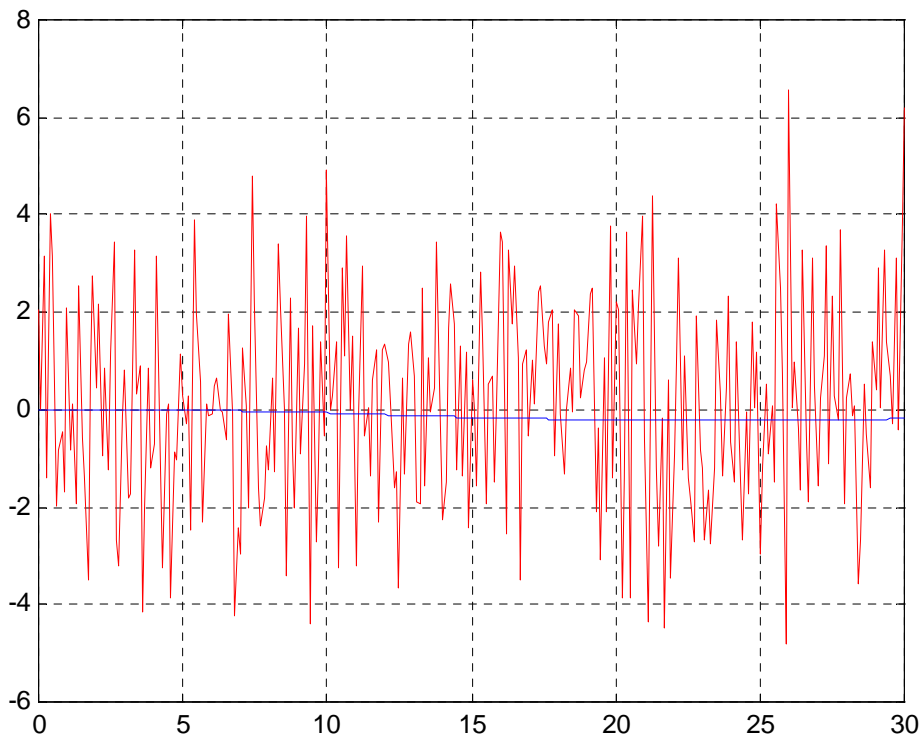


Figure III.52 : l'erreur de position mesurée et l'erreur de position estimée.  
 $X_0 = (0 \ 0)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>

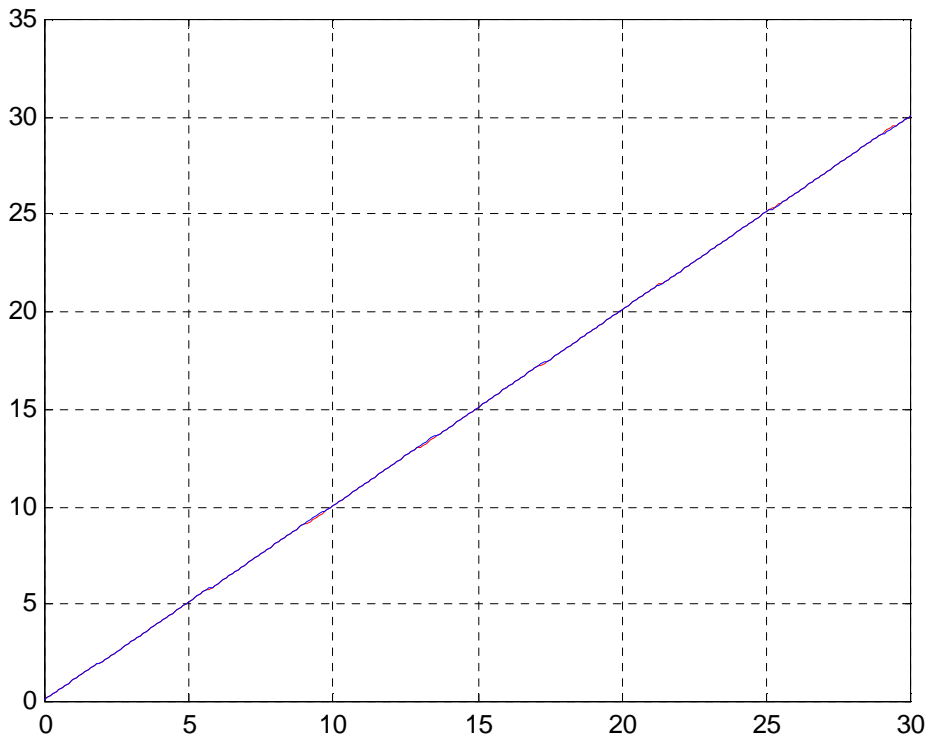


Figure III.53 : la vitesse du véhicule (réelle et estimée).  
 $X_0 = (0 \ 0)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>



Figure III.54 : l'erreur de vitesse estimée.  
 $X_0 = (0 \ 0)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>

La Figure III.53 montre que la vitesse est bien estimée vu la superposition des courbes (réelle et estimée). Ceci est dû à la réduction de la variance du bruit d'accélération de  $0,2 \text{ m/s}^2$  à  $0,02 \text{ m/s}^2$ .

L'erreur de vitesse varie comme le, cas précédent autour de zéro.

### Le 3<sup>ème</sup> cas :

Concernant ce cas, nous gardons les mêmes paramètres en modifiant l'état initial.

Conditions initiales : Vecteur d'état :  $X = (5 \ 5)^T$

Le bruit de position =  $2\text{m}$

Le bruit d'accélération =  $0.02\text{m/s}^2$

Cela se traduit par la diminution des matrices de covariance de système  $Q$  et de mesures  $R$ .

Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

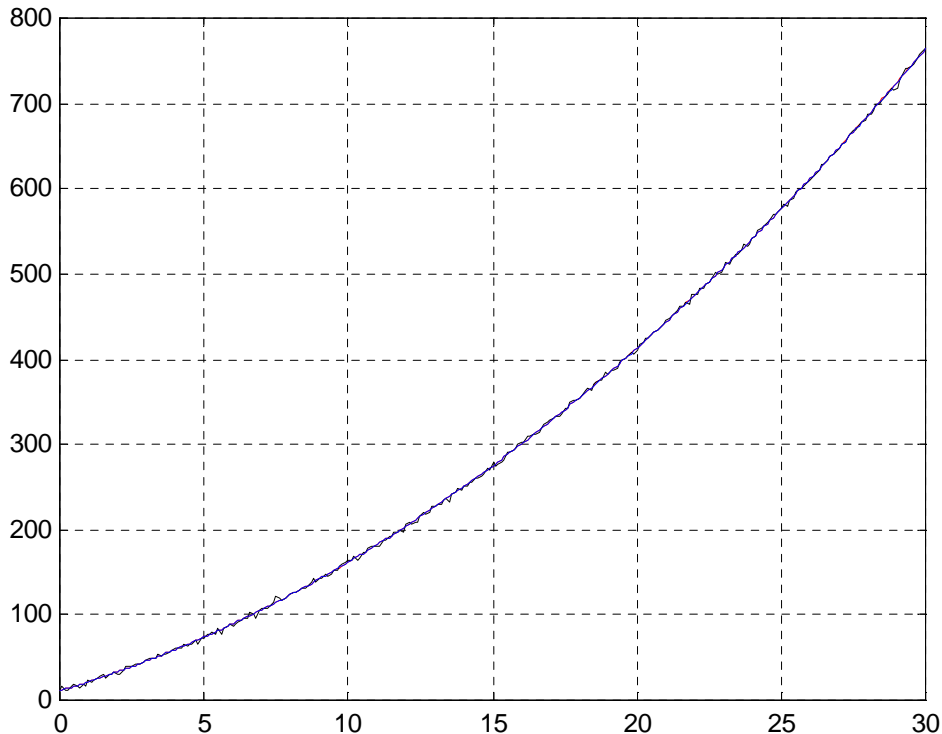


Figure III.55 : position du véhicule (réelle, mesurée et estimée).  
 $X_0 = (5 \ 5)^T$ , bruit de position =  $2\text{m}$ , bruit d'accélération =  $0.02\text{m/s}^2$

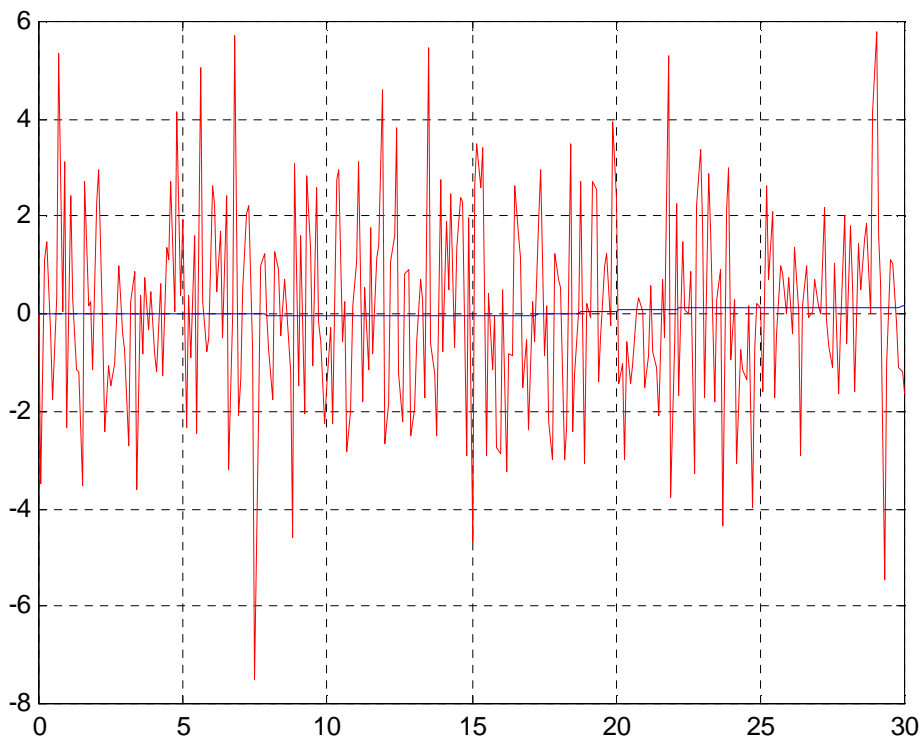


Figure III.56 : l'erreur de position mesurée et l'erreur de position estimée.  
 $X_0 = (5 \ 5)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>

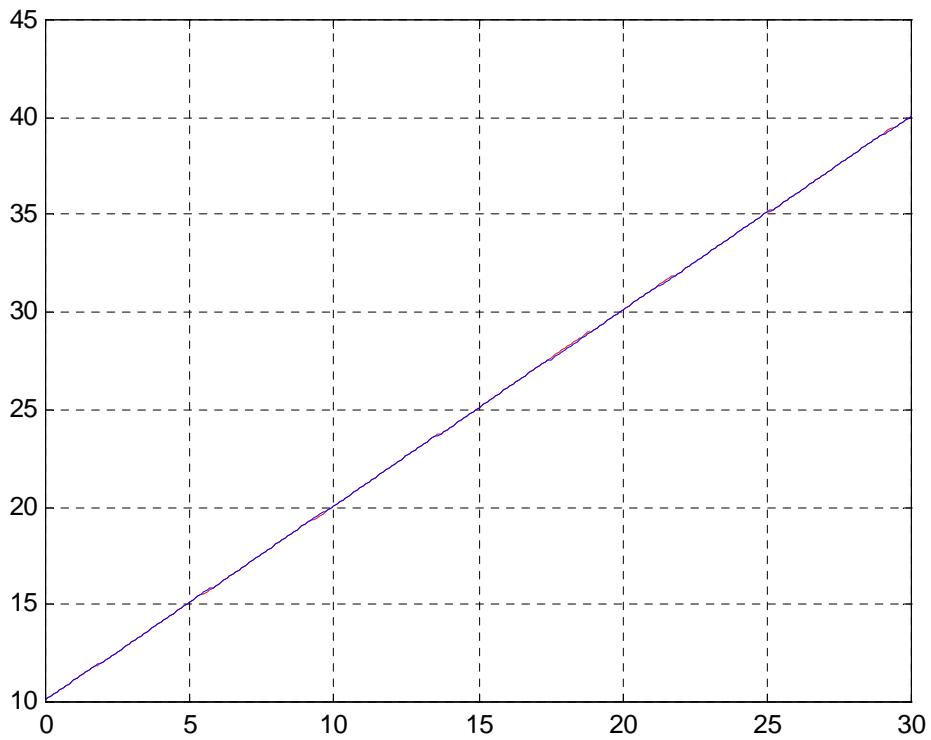
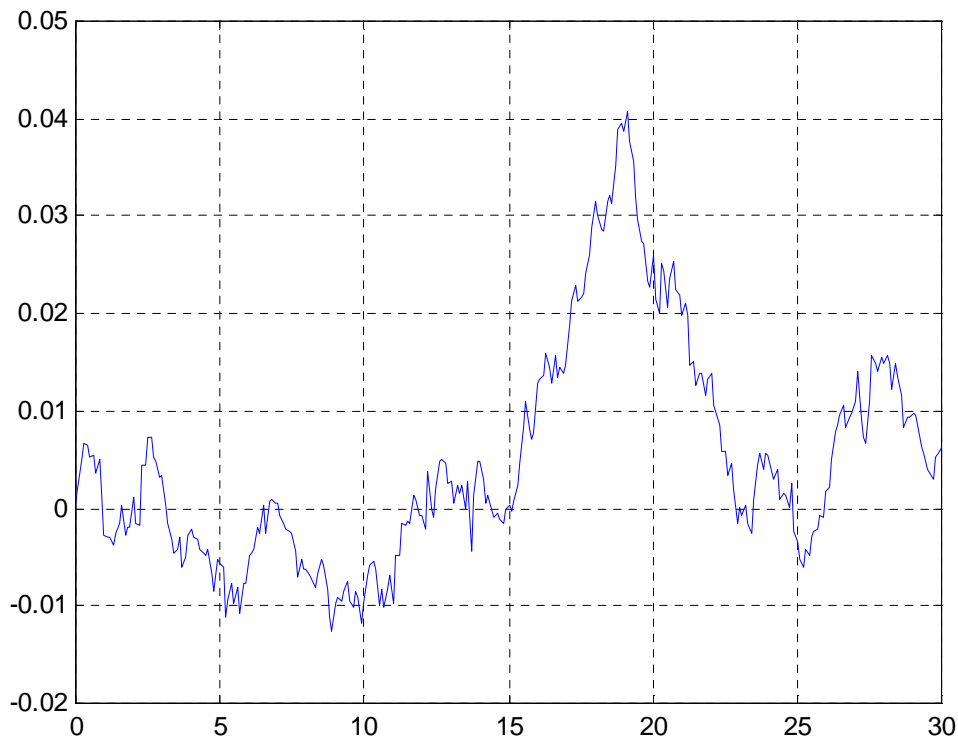


Figure III.57 : la vitesse du véhicule (réelle et estimée).  
 $X_0 = (5 \ 5)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>



**Figure III.58 : l'erreur de vitesse estimée.**  
 $X_0 = (5 \ 5)^T$ , bruit de position=2m, bruit d'accélération=0.02m/s<sup>2</sup>

D'après III.55, nous constatons que l'écart entre la position réelle et la position estimée est très faible. La Figure III.56 montre que l'erreur de position estimée tend vers zéro.

La Figure III.57 montre que l'écart entre la vitesse réelle et la vitesse estimée est minime malgré le changement des valeurs initiales. La courbe de l'erreur donnée en Figure III.58 montre que l'estimation de la vitesse est bonne car l'erreur varie et oscille autour de zéro.

### III.3 CONCLUSION

Ce chapitre a fait l'objet de la présentation des différents résultats de simulation (sous Matlab) obtenus avec le filtre classique de Kalman.

Nous avons présenté quatre applications différentes :

- Estimation d'une constante noyée dans un bruit,
- Estimation d'une variable scalaire pour illustrer les deux étapes "prédiction" et "correction" du filtre de Kalman.
- Extraction de deux sinusoides amorties noyées dans le bruit,
- Estimation de la position et de la vitesse d'un véhicule en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

D'après les résultats obtenus, nous avons constaté que pour les quatre applications, l'estimation se fait avec une erreur acceptable qui converge vers zéros en fonction du nombre d'itérations.

L'analyse des résultats montre que le filtre de Kalman est sensible aux conditions initiales. De plus, malgré les valeurs importantes des variances, nous obtenons des valeurs estimées proches des valeurs réelles.

## CONCLUSION

L'objectif de ce travail est de simuler le Filtre de Kalman classique appliqué aux processus linéaires.

Nous avons présenté quatre applications différentes :

- Estimation d'une constante noyée dans un bruit,
- Estimation d'une variable scalaire pour illustrer les deux étapes "prédiction" et "correction" du filtre de Kalman.
- Extraction de deux sinusoides amorties noyées dans un bruit,
- Estimation de la position et de la vitesse d'un véhicule en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Le Filtre de Kalman est robuste dans le cas des systèmes linéaires, il donne une bonne estimation des grandeurs inconnues malgré les mesures fortement bruitées.

Par conséquent, la qualité de l'estimation du Filtre de Kalman dépend essentiellement des conditions initiales de l'algorithme.

En perspectives, nous proposons de simuler le filtre de Kalman étendu EKF ( Extended Kalman Filter ) qui est adapté aux systèmes non linéaires. A l'aide du développement, séries de Taylor, on peut linéariser l'estimée en utilisant les dérivées partielles à la fois de la fonction de processus et celle de mesures. Notons que l'EKF est développé sous les hypothèses du filtre classique, c'est-à-dire, que les variances des bruits sont supposées connues.

Nous proposons également de simuler la poursuite de mobiles en utilisant des données vidéo (succession d'images).

Enfin, nous proposons l'implémentation de cet algorithme sur carte DSP afin de réaliser une poursuite en temps réel.

## Bibliographie :

[1] [http://fr.wikipedia.org/wiki/Filtre\\_de\\_Kalman](http://fr.wikipedia.org/wiki/Filtre_de_Kalman).

[2] Jean-Claude Bertein Roger Ceschi, « processus stochastiques discrets et filtrages optimaux », Editions LAVOISIER, 2005.

[3] Emmanuel Duflos, Philippe Vanheeghe, « Estimation Prédiction », Editions TECHNIP, 2000.

[4] GREG WELCH and GARY BISHOP, July 24, 2006, « An introduction to the Kalman filter », (university of North Carolina).

FREDERIC ROTTELA « Filtrage optimal », (Ecole nationale de Tabres). [5]

[6] « Estimation optimale », (université de Caen).

[7] PHILIPPE BOUGEROL « Filtre de Kalman Bucy et exposants de Lyapounov », (université Nancy 1).

[8] DAN SIMON, June 2001, « Kalman filtering », (Cleveland state university).

[9] Olivier BONNET TORRES, « Filtrage de Kalman appliqué à la navigation inertielle », 15 décembre 2003 (Onera-DCSD).