

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
**Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU**

Faculté du Génie de la Construction  
Département de Génie Civil



## MÉMOIRE DE MASTER ACADIMIQUE

Spécialité : Génie Civil  
Option : structures

### Thème

# **Evaluation de la performance des modèles de Comportement sur la réponse non linéaire des poutres en béton armé**

Proposé et dirigé par :

M<sup>r</sup>.KAHIL Amar

et

M<sup>r</sup>. NEKMOUCHE Aghiles

Présenté par :

M<sup>elle</sup> DJEROUM Ouardia

**Promotion 2015-2016**

# Résumé

---

Notre étude est consacrée à l'évaluation du comportement non linéaire d'une poutre en béton armé. Deux types de chargement sont testés. Le premier type est un chargement statique jusqu'à la rupture (poutre de Mattock (1964)). Une étude comparative entre trois modèles de comportements du béton existant dans le logiciel CAST3M est effectuée (BAEL et d'Hognestad avec et sans prise en compte du confinement). Les résultats en termes de charge-flèche de la poutre en utilisant le modèle du béton BAEL ont montré une résistance très élevée comparativement à l'expérimental. La modélisation de la structure sans prise en compte des cadres transversaux a conduit à un comportement fragile. Le modèle du béton Uni avec prise en compte du confinement a présenté la meilleure réponse (charge-flèche) comparativement à l'expérimentale. Un autre exemple de poutre avec un ferrailage symétrique de la section transversale est étudié sous chargement cyclique. Les courbes des forces en fonction de chargement sont confrontées, un écart en terme de charge est observé dans les derniers cycles (solicitation maximale de la poutre).

## **Mots clés :**

Simulation numérique, Approche multifibre, calcul non-linéaire, béton armé, chargement cyclique.

# REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon promoteur **M<sup>r</sup>. KAHIL Amar** pour avoir accepté de diriger ce modeste travail, et pour son aide, sa disponibilité, ses orientations, ses conseils et la volonté qu'il a manifesté tout au long de l'élaboration du présent mémoire.

Je tiens à remercier mon co-promoteur **M<sup>r</sup>. NEKMOUCHE Aghiles** pour ses précieux conseils et sa disponibilité. Il m'a en plus apporté toute son aide en mettant à ma disposition tous les moyens nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je remercie également **M<sup>r</sup>. KHELIL Nacim** et **M<sup>r</sup>. BENSAADA Rachid** pour leur aide précieuse, leur conseils, et leur encouragements.

Je remercie aussi **M<sup>r</sup>. BOUKAIS Said** et **M<sup>r</sup>. MERAKEB Seddik** pour leur aide précieuse.

Sans oublier ma famille et tous mes très chers amis qui m'ont soutenu et encouragé pendant la réalisation de ce travail.

Je remercie enfin, les membres du jury pour avoir accepté d'examiner ce Travail.

# Dédicaces

Je dédie ce travail à :

A la mémoire de mon cher père, j'aurai aimé qu'il soit là mais hélas. A ma chère mère que dieu me la protège et lui donne une longue vie.

Ces quelques mots ne peuvent exprimer ma gratitude envers ces êtres affectueux, pour les nombreux sacrifices qu'ils ont consentis pour moi et leur soutien moral au cours de toute ma vie.

Mes chers frères Djamel, Samir, Belkacem.

Ma très chère sœur Lynda et son mari Mohamed Idir et leurs enfants : Kenza, Saadi, Islam, Imane, Ahcen.

Mes oncles : Mokrane, Mouloud, Nacer.

Mes tantes : Malika et Taous et leurs maris.

Mes cousins et cousines.

Mes très chers amis (es).

# Table de matière

---

<b><u>Introduction générale</u></b> .....	1
<b><u>Chapitre 1 Approches de modélisation</u></b>	
1- Introduction.....	3
2- Les approches de modalisations.....	3
2-1- Approche globale .....	3
2-1-1- Généralités .....	3
2-1-2- Eléments finis de barre.....	4
2-1-3- Description des lois de comportement globales.....	4
2-2- Approche locale .....	4
2-2-1- Introduction.....	4
2-2-2- Lois de comportement du Béton seul.....	4
2-2-2-1- Généralités .....	4
2-2-2-2- Comportement expérimentale du béton .....	5
A- Le béton en compression.....	5
B- Le béton en traction .....	6
2-2-3- ACIER.....	7
2-3- Approche multi fibre.....	8
2-3-1 Éléments finis de poutre .....	9
2-3-1-1 L'élément poutre (POUT) .....	10
2-3-1-2 L'élément TIMO .....	11
2-3-2- Poutre multi fibre .....	12
2-3-2-1 - Introduction.....	12
2-3-2-2 -Élément de la théorie des poutres .....	13
2-3-2-3 Elément fini poutre multifibre Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions ..	
d'interpolation d'ordre supérieur. ....	16
a- Fonctions d'interpolation .....	16
b-Matrices de rigidités .....	18
c-Intégration dans le cas non-linéaire (matrice de rigidité).....	19

## Table de matière

d- Matrices de masse .....	19
e- Efforts internes et efforts résultants.....	20
2-3-2-4 Elément fini poutre multifibre Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions ... d'interpolation d'ordre 1 .....	21
a- Fonctions d'interpolation .....	21
b- Matrices de rigidité.....	21
c- Matrices de masse .....	22
d- Efforts internes .....	22
2-3-2-5 -Elément fini poutre multifibre Euler – Bernoulli.....	22
a- Fonctions d'interpolation .....	22
b- Matrices de rigidité .....	23
c- Matrices de masse.....	24
d- Efforts internes et efforts résultants .....	24
3- Comparaissant entre les avantages et inconvénients des différents approches .....	25
Avantages .....	25
Inconvénients .....	25
Modélisation de coque globale.....	25
Modélisation locale (éléments massifs) .....	25
Modélisation semi-globale poutre multifibre .....	26

## **Chapitre 2 Les modèles de comportement**

1- INTRODUCTION .....	27
2- Les modèles de comportements .....	27
2-1- Modèles de comportement utilisé dans l'approche globale .....	27
2-1-1- Les lois bilinéaires BILIN_MOMY et BILIN_EFFZ.....	27
2-1-2 - Les lois trinéaires de Takeda TAKEMO_MOMY et TAKEMO_EFFZ .....	28
2-1-3- Le modèle globale.....	29
2-1-4- La loi CISAIL_NL.....	30
2-1-5 - Le modèle INFILL_UNI.....	31
2-2- Les modèles de comportement utilisés dans l'approche locale et semi locale .....	33
2-2-1- ACIER .....	33
a- Modèle du Parc et Paulay.....	33
b- Modèle de Mander .....	34

## Table de matière

2-2-2- les modèles du béton .....	34
2-2-2-1- Le modèle de béton simplifié BAEL .....	34
2-2-2-2- Le modèle de béton de Mazars .....	35
2-2-2-3- Béton confinée .....	37
a- Définition.....	37
b- Effet du confinement du béton sur la ductilité des structures enB.A.....	37
c- Comportement du béton confiné en élasticité nonlinéaire .....	38
C-1- Modèle d'Hognestad(1951).....	39
c-1-1- Comportement encompression .....	39
La prise en compte du confinement encompression.....	40
c-1-2- Comportement entraînement .....	41
c-2- Modèle de Sheikh et Uzumeri(1982) .....	42
c-3- Modèle de Saatcioglu et Razvi(1992) .....	43
c-4- Modèle H.-S. Chung et al(2002) .....	44
c-5- Modèle de B. Bousalem et N. Chikh(2007) .....	45
c-6-Modèle de Bouafia et al(2010).....	46
3- Travaux antérieurs .....	49
Exemple 1 .....	50
Exemple2 .....	51
Exemple 3 .....	53

### **Chapitre 3 Simulation numérique**

1- Présentation de CAS3M.....	56
1-1- introduction .....	56
1-2- Langage de Cast3M .....	56
Définition du Gibiane .....	56
1-3- Système d'unités .....	56
2- Procédure de résolution d'un problème avec CASTEM.....	57
3- Présentation de modèle étudiée .....	57
3-1- partie 1 .....	58
3-1-1- la géométrie de la poutre 1 .....	58
3-1-2- Le maillage.....	59
3-1-3- Caractéristique des matériaux de la poutre .....	60

## Table de matière

3-1-4- Les modèles de comportement utilisé.....	60
3-1-5- Chargement et conditions aux limites .....	61
3-2- Partie 2 .....	61
3-2-1- la géométrie et les caractéristique de la poutre 2 .....	61
a- Exemple étudié .....	61
b- Simulation .....	62
3-2-2- Le maillage.....	63
3-2-3- Caractéristique des matériaux de la poutre .....	63
3-2-4- chargement .....	64
3-2-5- les modèle de comportement utilisée dans notre modèle.....	64

### **Chapitre 4 Présentation et interprétation des résultats**

1- Résultats et interprétation .....	65
1 <sup>er</sup> type : Chargement monotone .....	65
A-1- Etude de la convergence du maillage.....	65
A-1-1- Choix du nombre d'élément dans la section transversale .....	65
A-1-2- Pour la zone centrale dans le sens longitudinal de la poutre.....	66
A-2- Comparaison de comportement des différents types du béton .....	67
A-2-1- Le modèle du Béton BEAL par rapport à l'expérimental.....	68
A-2-2- Le modèle du Béton uni sans prise en compte de confinement par rapport à l'expérimental .....	68
A-2-3- Le modèle du Béton uni avec confinement par rapport à l'expérimental .....	69
A-2-4- Le modèle du Béton BEAL et le modèle du Béton uni sans pris en compte de confinement.....	70
A-2-5- Le modèle du Béton BEAL et le modèle du Béton uni avec confinement .....	71
A-3- Comparaison de comportement des différents types de béton dans le même graphe..	72
B- 2 <sup>eme</sup> type : Chargement cyclique.....	73
2-Conclusion : .....	74

# Liste des Figures

## **Chapitre 1 Approches de modélisation.**

figure1.1 : Comportement du béton en compression.....	5
figure1.2 : Comportement du béton en traction.....	7
figure1.3 : Courbe contrainte-déformation typique pour le fer en fonte et l'acier doux.....	8
figure1.4 : Poutre en 3D dans un repère local .....	9
figure1.5 : Orientation, conventions et positions des points de Gauss des éléments de poutre d'Euler-Bernoulli .....	11
figure1.6 : Orientation, conventions et positions des points de Gauss des éléments de poutre de Timoshenko .....	12
figure1.7 : Description d'une poutre multifibre.....	13
figure1.8 : Poutre d'Euler 3D.....	13
figure1.9 : Élément poutre Pour chaque nœud, on stocke d'abord les grandeurs liées aux trois translations, puis celles liées aux trois rotations. ....	16

## **Chapitre 2 Les modèles de comportement.**

Figure 2.1: Modèles bilinéaires et Takeda pour la flexion et l'effort tranchant .....	27
Figure 2.2: Signification des paramètres $\alpha$ , $\beta$ et $\gamma$ des lois Takeda.....	29
Figure 2.3: Lois de fonctionnement du modèle global.....	30
Figure 2.4: Lois de comportement globales Cisail_NL et Infill_Uni.....	32
Figure 2.5: Courbe contrainte-déformation typique pour de l'acier.....	33
Figure 2.6: Courbe contrainte-déformation de l'acier proposée par Mander et al (1984). ..	34
Figure 2.7: Loi de comportement béton simplifié BAEL.....	35
Figure 2.8: Représentation de la formation d'arches dans le béton confiné .....	38
Figure 2.9: Loi de comportement du béton confiné Hognestad (1951).....	39
Figure 2.10: Comportement en traction du béton Hognestad (1951) .....	41
Figure 2.11: Courbe contrainte déformation du béton confiné, Sheikh et Uzumeri (1982) ...	42
Figure 2.12: Courbe contrainte-déformation du béton confiné et non confiné, Saatcioglu et Razvi (1992) .....	43
Figure 2.13: Courbe contrainte déformation du béton confiné.....	44
Figure 2.14: Courbe contrainte – déformation du béton confiné.....	45

Figure 2.15: Diagramme contrainte – déformation du béton confiné, Bouafia et al. (2010)..	47
Figure 2.16: Discrétisation du la poutre de Kent#24.....	49
Figure 2.17: Moment courbure présenté par KABA et MAHIN .....	50
Figure 2.18: Discrétisation du la poutre R-1.....	51
Figure 2.19: Charge déplacement de la poutre R-1 .....	52
Figure 2.20: Moment courbure de la poutre R-1 .....	52
Figure 2.21: Structure du maillage pour la poutre 1 et 2 .....	53
Figure 2.22: Courbe charge déplacement dans la direction Z .....	54
Figure 2.23: Courbe charge déplacement dans la direction Y .....	54
Figure 2.24: Courbe charge déplacement dans la direction Z .....	55

### **Chapitre 3 Simulation.**

Figure 3.1 : Horganigramme résolution d'un problème avec CASTEM .....	57
Figure 3.1 : La géométrie de la poutre 1 .....	62
Figure 3.2 : Ferrailage de la poutre 1 .....	62
Figure 3.3 : Section transversale du modèle à fibre de la poutre 1 .....	63
Figure 3.4 : Détails du maillage et conditions aux limites de la poutre 1 .....	63
Figure 3.5 : Loi de comportement acier simplifié PARFAIT_UNI.....	64
Figure 3.6 : Chargement et conditions aux limites de la poutre 1 .....	65
Figure 3.7 : Le schéma principal pour la poutre 2 .....	65
Figure 3.8 : La coupe longitudinale de ferrailage pour la poutre 2 .....	65
Figure 3.9 : La coupe transversale (A-A) pour la poutre 2.....	66
Figure 3.10 : Le schéma de modèle multifibres pour la poutre 2 .....	66
Figure 3.11 : Détails du maillage de la poutre 2 .....	67
Figure 3.12 : Le chargement appliqué sur la poutre 2 .....	68

### **Chapitre 4 Présentation et interprétation des Résultats**

Figure 4.1 : Comparaison des courbes charge-flèche en fonction du nombre d'éléments (maillage de la section transversale) .....	65
Figure 4.2 : Comparaison des courbes charge-flèche en fonction du nombre d'éléments (maillage de la section transversale) .....	66
Figure 4.3 : Comparaison du Béton BEAL par rapport à l'expérimental .....	67

Figure 4.4 : Comparaison du Béton sans prise en compte de confinement par apport à l'expérimental.....	68
Figure 4.5 : Comparaison Béton avec prise en compte du confinement par apport à l'expérimental.....	69
Figure 4.6 : Comparaisent du Béton BEAL et Béton-uni sans prise en compte du confinement .....	70
Figure 4.7 : Comparaison des courbes du Béton BEAL et Béton-Uni avec prise en compte du confinement.....	71
Figure 4.8 : Comparaison des courbes (force-déplacement) des différents modèles de Béton étudiés .....	72
Figure 4.9 : Chargement cyclique force en fonction de temps .....	73
Figure 4.10 : Comparaison des courbes hystérisées des modèles du béton PCC et SPCC .....	74

# Liste des tableaux

## **Chapitre 1 Approches de modélisation.**

<b>tableau1.1:</b>	Récapitulatif des types de modalisation pour les poteaux et les poutres.....	3
<b>tableau1.2:</b>	Déformations et contraintes généralisée dans le repère local.....	10
<b>tableau1.3:</b>	les avantages et inconvénients de chaque approche.....	25

## **Chapitre 2 Les modèles de comportement.**

Tableau 2.1	Discrétisation du la poutre de Kent#24 .....	49
Tableau 2.2	Propriétés du béton.....	50
Tableau 2.3	Propriétés de l'acier.....	50
Tableau 2.4	Discrétisation du la poutre R-1.....	51
Tableau 2.5	Propriétés du béton.....	51
Tableau 2.6	Propriétés de l'acier.....	52
Tableau 2.7	Propriétés du béton.....	53
Tableau 2.8	Propriétés de l'acier.....	53

## **Chapitre 3 Simulation.**

tableau3.1	Système d'unité .....	61
tableau3.2	caractéristique expérimentale de la poutre 1 .....	64
tableau3.3	Caractéristique des matériaux de la poutre2.....	67

# Introduction générale

---

## Introduction

Les outils de simulations dans le domaine de la construction sont de nos jours, de plus en plus performants permettant une description très fine des phénomènes. De plus, ces outils ne se limitent plus à la mécanique linéaire, mais des modèles sont développés pour décrire des comportements plus compliqués allant jusqu'à la ruine des structures (comportement non linéaire).

Afin d'évaluer le comportement non linéaire des structures en béton armé, trois approches de modélisation existent dans la littérature (l'approche globale, locale, semi-locale). Chacune de ces dernières a ses avantages et ses inconvénients, d'où le choix très important de l'approche à utiliser. L'approche globale est utilisée généralement pour l'étude des structures de bâtiments, celle-ci est très simplifiée (une section homogène, utilisation de lois de comportements simplifiées...). Parmi ces avantages: un temps de calcul très réduit ce qui implique que cette approche est trop générale pour un élément de structure (poteau, poutre, voile). L'approche locale est la plus préconisée pour ces éléments de structures de par sa prise en compte de tous les paramètres qui peuvent reproduire le véritable comportement de ces structures (lois de comportement), cette approche nécessite un temps de calcul très important. Elle requiert donc des machines puissantes pour le faire. L'approche semi-locale elle est la plus utilisée dans la littérature pour ce type d'éléments en béton armé, elle prend les lois de comportements à l'échelle locale et l'analyse se fait à l'échelle globale avec un temps de calcul moyen. Plusieurs études expérimentales et théoriques ont été effectuées dans le monde sur le comportement des éléments en béton armé, quelques exemples seront présentés dans ce travail.

Notre étude consiste à évaluer le comportement d'une poutre en béton armé par le biais d'une simulation numérique réalisée avec le code éléments finis « CAST3M ». Cette étude propose deux poutres en béton armé sous différents types de chargement, la première d'étudier est testée par Mattock(1964) sous chargement statique. Ainsi que sous chargement cyclique. Une étude comparative entre trois modèles de comportements pour le béton : Béton BEAL(modèle très simplifié, loi avec une résistance à la compression constante au-delà de

son pic, résistance en traction nulle), Béton UNI(modèle le plus complet dans ce code élément fini, présente un comportement plus approché avec prise en compte de tous les paramètres qui reproduisent le comportement réel du béton), ce modèle présente la possibilité d'étudier le béton aussi bien avec prise en compte du confinement(présence d'armatures transversales) que sans prise en compte du confinement (simplification en modélisant uniquement les armatures longitudinales(flexion), armatures transversales négligées). Concernant la deuxième poutre, un chargement cyclique lui est appliqué en utilisant le modèle du Hognestad(1951), pour sa capacité à reproduire le comportement cyclique du béton. Une comparaison entre le même modèle est là aussi faite en effectuant deux simulations (prise en compte du confinement apporté par les cadres, négligence des cadres).

### **Objectif de l'étude**

L'objectif du présent mémoire est l'étude de l'influence des modèles de comportement non linéaires du béton sur la réponse (force-flèche) d'une poutre en béton armé sous deux types de chargements « statique et dynamique ». L'approche semi-locale (multifibres) est choisie, en ayant à l'esprit les principaux objectifs suivants:

- Confirmer la performance de l'approche multifibre dans la prédiction du comportement non linéaire global d'une poutre en béton armé.
- Investigation de la performance des modèles du béton.
- Influence de la prise en compte du confinement sur la réponse globale pour les deux types de chargement (statique et dynamique).

# Chapitre 1

## Approches de modélisation

---

### Sommaire :

1- Introduction .....	3
2- Les approches de modalisations.....	3
2-1- Approche globale .....	3
2-1-1- Généralités .....	3
2-1-2- Eléments finis de barre.....	4
2-1-3- Description des lois de comportement globales.....	4
2-2- Approche locale .....	4
2-2-1- Introduction.....	4
2-2-2- Lois de comportement du Béton seul.....	4
2-2-2-1- Généralités .....	4
2-2-2-2- Comportement expérimentale du béton .....	5
A- Le béton en compression .....	5
B- Le béton en traction .....	6
2-2-3- ACIER.....	7
2-3- Approche multi fibre.....	8
2-3-1 Éléments finis de poutre .....	9
2-3-1-1 L'élément poutre (POUT) .....	10
2-3-1-2 L'élément TIMO .....	11
2-3-2- Poutre multi fibre .....	12
2-3-2-1 - Introduction.....	12
2-3-2-2 -Élément de la théorie des poutres .....	13
2-3-2-3 Elément fini poutre multifibre Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions ..	
d'interpolation d'ordre supérieur. ....	16

---


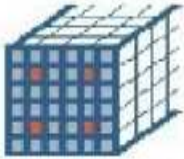
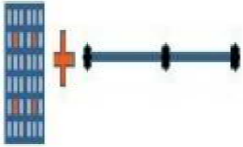
a- Fonctions d'interpolation .....	16
b- Matrices de rigidités .....	18
c- Intégration dans le cas non-linéaire (matrice de rigidité) .....	19
d- Matrices de masse .....	19
e- Efforts internes et efforts résultants .....	20
2-3-2-4 Elément fini poutre multifibre Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions ... d'interpolation d'ordre 1 .....	21
a- Fonctions d'interpolation .....	21
b- Matrices de rigidité .....	21
c- Matrices de masse .....	22
d- Efforts internes .....	22
2-3-2-5 -Elément fini poutre multifibre Euler – Bernoulli .....	22
a- Fonctions d'interpolation .....	22
b- Matrices de rigidité .....	23
c- Matrices de masse .....	24
d- Efforts internes et efforts résultants .....	24
3- Comparaison entre les avantages et inconvénients des différentes approches .....	25
Avantages .....	25
Inconvénients .....	25
Modélisation de coque globale .....	25
Modélisation locale (éléments massifs) .....	25
Modélisation semi-globale poutre multifibre .....	26

**1- Introduction**

Dans le cadre d'évolution sismique des bâtiments de génie civil, les simulations numériques permet d'appréhender le comportement non linéaire des structures.

Il existe dans la littérature trois approches de modélisation des structures: globale, locale et semi-locale illustré dans le Tableau (1.1) (Code Aster), chaque approche a ces avantages et inconvénients d'ou le choix est très important.

**tableau1.1:** Récapitulatif des types de modalisation pour les poteaux et les poutres.

	<b>Modélisation globale</b>	<b>Modélisation locale (EF massifs)</b>	<b>Modélisation semi-globale</b>
<b>Eléments de poutre et de poteau</b>		 <b>Modilisation3D (éléments solide pour le béton)</b>	 <b>Modélisation poutre multifibres</b>

**2- Les approches de modélisations**

**2-1- Approche globale**

**2-1-1- Généralités**

Dans l'approche globale, le comportement du béton armé est décrit en variables généralisées ( $N-\epsilon_n, V-\gamma, M-\Phi$ ). La formulation peut s'appuyer sur des observations phénoménologiques ou bien peut être basée sur les théories classiques de la plasticité avec l'introduction de surfaces de plasticité ou surfaces seuils type  $f(N, V, M) = 0$ , ou de la mécanique de l'endommagement par l'introduction d'une variable interne représentative de l'état de détérioration du matériau.

La loi de comportement porte sur les variables globales telles que les moments, l'effort normal, les rotations et les déplacements. Il faut alors identifier cette loi pour chaque géométrie et chaque matériau (RAGUNEAU Frédéric, 1999).

Le calcul proprement dit sera peu coûteux mais des calculs préalables seront nécessaires pour identifier le comportement de chaque type de sous structure (RAGUNEAU Frédéric,

1999). D'autre part, les informations locales sont difficilement accessibles et nécessitent un calcul supplémentaire.

### 2-1-2- Eléments finis de barre

L'élément fini de barre à 2 nœuds (BARR) a pour support géométrique l'élément "SEG2" et fonctionne uniquement en traction-compression. La déformation axiale est constante sur l'élément. Cet élément sert de support à plusieurs lois de comportement d'acier et de béton ainsi qu'à la loi globale "INFILL\_UNI" utilisable pour les murs de remplissage. L'utilisateur doit fournir la section "SECT" en plus des caractéristiques du matériau (YOUN et NU en élastique). La déformation axiale ( $\epsilon_x$ ) et l'effort normal ( $N_x$ ) sont notés respectivement EPSS et EFFX (COMBRESURE.D, 2001).

### 2-1-3- Description des lois de comportement globales

Les lois de comportement globales sont des relations entre une déformation généralisée ( $\phi_x, \phi_z, \phi_y, \gamma_y, \gamma_z$  ou  $\epsilon_x$ ) et sa contrainte associée ( $M_x, M_y, M_z, T_y, T_z$  ou  $N_x$ ) sans passage par des lois matériaux locales. Les lois disponibles dans Castem 2000 ne comportent aucun couplage entre les différents modes de fonctionnement (par exemple, entre les moments de flexion et l'effort normal) (FARDIS, 1991) (POLITOPOULOS, 1998).

## 2 -2- Approche locale

### 2-2-1- Introduction

Dans cette approche, les matériaux acier et béton sont modélisés séparément. On utilise des éléments finis massifs pour le béton et des modèles de comportements associés en 3D. Ce type d'approche permet d'obtenir une description détaillée des phénomènes non linéaires en jeu mais son application à la totalité d'une structure de type industrielle peut s'avérer difficile. De plus, l'utilisation de modèles de comportement locaux entraîne des problèmes de non convergence importants.

### 2-2-2- Lois de comportement du Béton seul

#### 2-2-2-1- Généralités

Le béton présente un grand nombre de microfissures, en particulier, à l'interface entre les agrégats et le mortier, avant même l'application des charges. La présence de ces microfissures a un grand effet sur le comportement mécanique du béton, puisque leur propagation pendant le chargement contribue au comportement non linéaire sous de faibles charges et provoque la dilatation de volume avant la rupture. Plusieurs de ces microfissures sont causées par la ségrégation, le rétrécissement ou la dilatation thermique du mortier. Quelques microfissures peuvent se développer pendant le chargement en raison de la différence dans la rigidité entre les

agrégats et le mortier. Puisque l'interface agrégat-mortier a une résistance à la traction sensiblement inférieure à celle du mortier, elle constitue le lien le plus faible dans le système composite. C'est la raison primaire de la faible résistance à la traction du béton.

La réponse d'une structure sous l'action des charges dépend en grande partie de la relation contrainte -déformation des matériaux constitutifs et de la magnitude des contraintes.

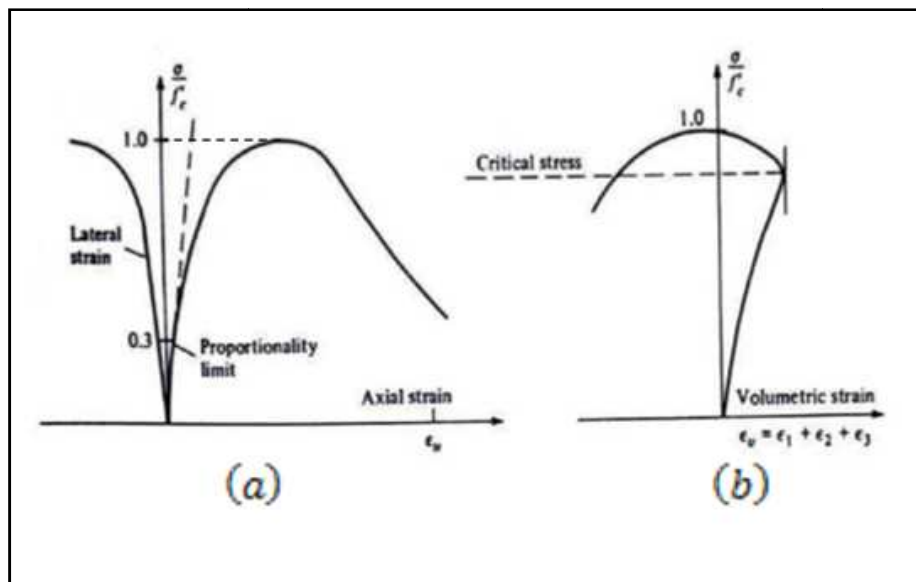
### 2-2-2-2- Comportement expérimentale du béton

Le béton armé est un matériau composé d'acier et de béton, deux matériaux aux réponses mécaniques très différentes lorsque ce déforme, surtout en traction. Il est donc essentiel, dans l'objectif de construire un modèle de calcul du comportement d'éléments en béton armé, de bien comprendre les hypothèses émises et les lois considérées dans la définition du comportement de chacun de ces matériaux. La résistance à la compression et à la traction du béton sont très différentes; il importe donc de les considérer séparément.

#### A- Le béton en compression

Il est très facile de connaître la résistance en compression par l'essai d'écrasement à la presse hydraulique qui est le plus souvent appliqué sur des éprouvettes cylindriques normalisées

(32 x 16) cm.



**Figure 1.1:** Comportement du béton en compression

La Figure 1.1 a montre que la réponse est linéaire jusqu'à 30% - 40% de la limite en compression  $\frac{\sigma}{f_c}$  puis la courbe devient de plus en plus non linéaire jusqu'à 75% - 90% de la limite  $f_c$ . Apparition de l'irréversibilité (déformation permanente). La courbe présente un pic

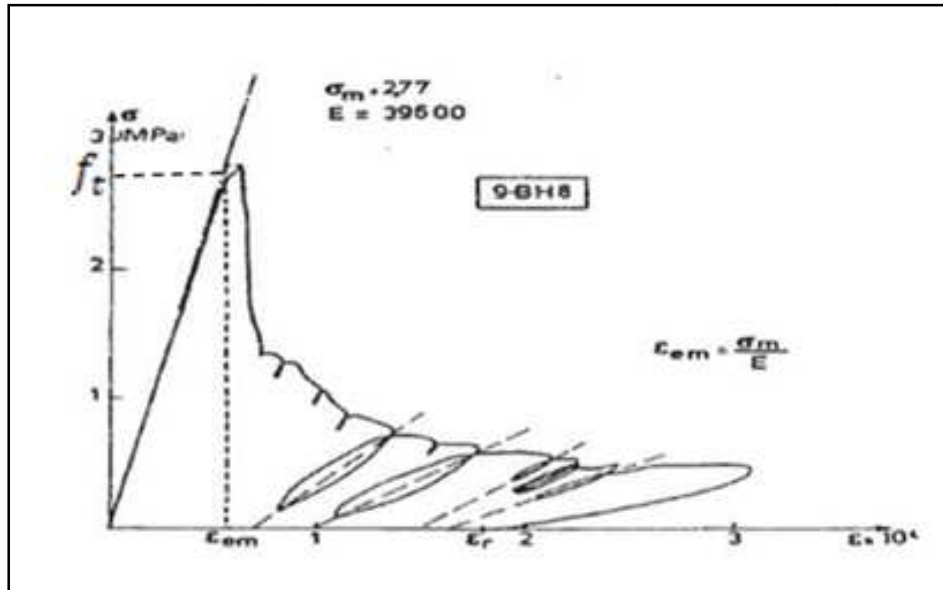
suivi d'une branche post - pic correspondant à un comportement adoucissant. Le coefficient de Poisson évolue (Figure 1.1a).

La rupture apparaît progressivement au-delà du pic par l'assemblage de microfissures et augmentation de volume ( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  sont les déformations principales (Figure 1.1b).

L'interprétation micromécanique de ce comportement a fait l'objet de nombreux travaux, (MAZAR, 1984) (BERTHAUD, 1988) et il est maintenant bien admis que la dégradation est essentiellement liée au développement de microfissures, qui sont liées à l'effet des extensions (déformation positive) (MAZAR, 1984).

### **B- Le béton en traction**

Le béton offre de bonnes performances en compression mais présente une grande faiblesse en traction. Les réponses en traction sont nécessaires pour arriver à une identification quasi complète du comportement du matériau ; ceci se fait le plus souvent par des essais indirects. Il est souvent admissible de considérer la résistance en traction du béton entre 7% et 10% de sa résistance en compression. La Figure 1.2 représente le comportement en traction du béton, ou ce comportement est caractérisé par une propagation stable et constante de fissures perpendiculairement à l'axe de chargement qui se traduit par une relation pratiquement linéaire et proportionnelle au module d'élasticité du béton, jusqu'à l'atteinte de la limite en tension. En l'absence de données expérimentales, cette limite peut être reliée à la résistance en compression et pour un béton de densité normale. Cette limite représente l'assemblage de microfissures pour mener à la propagation rapide d'une fissure localisée (macro fissure) qui fait diminuer brusquement la contrainte sous déformation croissante. Il est alors généralement considéré que le béton en traction ne peut reprendre aucun effort, c'est-à-dire que la résistance en traction du béton est négligée après la fissuration.



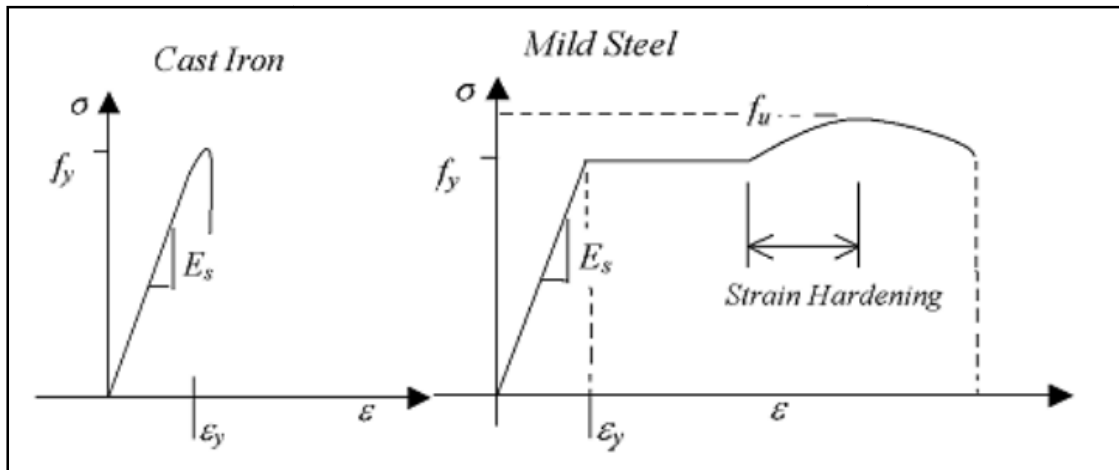
**Figure 1.2:** Comportement du béton en traction (JOHNSON Sanya , 2006).

La Figure 1.2 présente deux phases :

La première phase ( $0, \epsilon_{em}$ ) nous avons un domaine élastique très réduit présentant une perte de raideur juste avant le pic ( $f_t$  contrainte limite en traction), la deuxième phase ( $\epsilon_{em}, 3$ ) on observe une chute brutale de la contrainte due à la rupture des éléments microstructuraux qui représentent une traction directe (les fissures se propagent dans un sens perpendiculaire à la contrainte principale en traction).

### 2-2-3- ACIER

L'acier peut être classé en deux groupes en fonction de sa ductilité. La figure 1.7 montre une courbe contrainte-déformation typique pour le fer en fonte qui a une nature fragile, et une courbe contrainte-déformation typique pour l'acier doux. Du fait que l'acier utilisé pour les structures et éléments en béton armé est généralement du dernier type, tous les modèles discutés ici correspondent à cette catégorie.



**Figure 1.3:** Courbe contrainte-déformation typique pour le fer en fonte et l'acier doux.

Plusieurs essais ont montré que la courbe contrainte-déformation monotone pour les armatures en acier peut être décrite par trois branches bien définies. C'est généralement le cas pour approximativement tous les types d'armatures utilisées dans les éléments en béton armé. Différents modèles sont proposés pour la réponse monotone contrainte-déformation de l'acier. Certains de ces modèles sont brièvement discutés.

### 2-3- Approche multi fibre

La discrétisation est la même que pour les approches globales. Des hypothèses permettent de calculer les variables cinématiques locales (déformations) en fonction des variables cinématiques globales (déplacements, rotations). Une loi de comportement permet de calculer les variables statiques locales (contraintes) qui sont ensuite intégrées pour déterminer les variables statiques généralisées (moments, efforts) (GATUINGT Fabrice, 1999) (RAGUENEAU Frédéric, 1999) :

La loi de comportement porte sur les variables globales telles que les moments, l'effort normal, les rotations, les déplacements. Il faut alors identifier cette loi pour chaque géométrie et chaque matériau.

Cette méthode est un bon compromis pour les structures à géométrie simple car elle est beaucoup moins coûteuse que les méthodes locales et permet d'accéder à un niveau d'informations intéressant compte tenu des restrictions imposées par les hypothèses.

#### 2-3-1 Éléments finis de poutre

Dans Castem 2000, il existe deux éléments finis de poutre d'Euler-Bernoulli et poutre Timoshenko (COMBRESURE.D,2001) (Figure 1.5 -1.6):

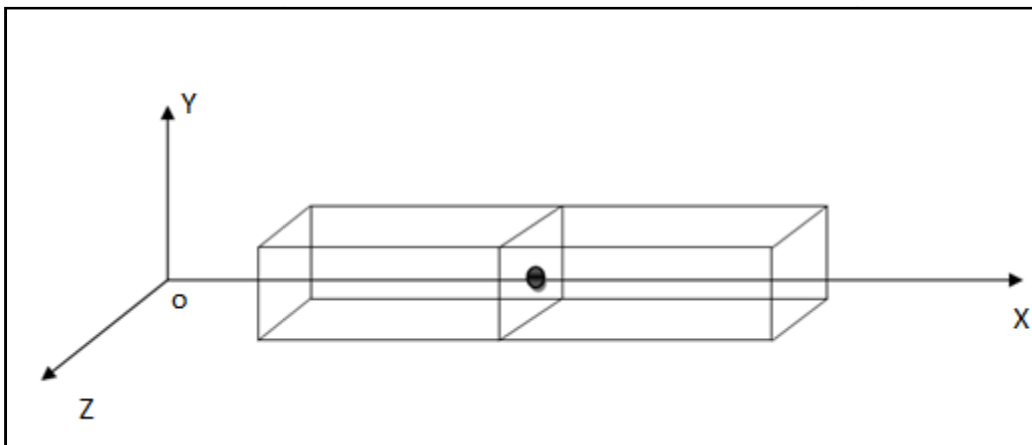
L'élément poutre d'Euler-Bernoulli sans déformation de cisaillement et avec une répartition de courbure linéaire sur la hauteur de l'élément.

L'élément poutre Timoshenko avec déformation de cisaillement et une répartition de courbure constante sur l'élément.

Ces deux éléments finis de poutre ont pour support géométrique l'élément à 2 nœuds (SEG2) et fonctionnent en 3D et en 2D (contraintes planes et déformations planes). Ils servent de support à plusieurs lois de comportement globales et semi globales en traction-compression, flexion et en cisaillement.

Pour ces deux éléments, l'utilisateur doit fournir la section SECT, les inerties de flexion INRY (uniquement en 3D) et INRZ et l'inertie de torsion INRX (uniquement en 3D). Les sections réduites pour le cisaillement SECY et SECZ sont facultatives. Le module de cisaillement  $G$  est calculé à partir du module d'Young ( $E$ ) et du coefficient de Poisson ( $\nu$ ) :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$



**Figure 1.4:** Poutre en 3D dans un repère local

Dans le repère local (Figure 1.4), la direction de la poutre est noté Ox. En 3D, l'utilisateur peut fixer l'axe Oy grâce au paramètre facultatif VECT (objet POINT). Par la suite, nous ne présenterons que la formulation 3D. Les déformations et contraintes généralisées sont exprimées dans le repère local de la poutre:

tableau1.2: Déformations et contraintes généralisée dans le repère local

Définition	Notation	Notation CASTEM
Allongement axial	$\varepsilon_x$	EPS
	$N_x$	EFFX
Flexion	$\Phi_y$	CY
	$\Phi_z$	CZ
	$M_y$	MOMY
	$M_z$	MOMZ
Torsion	$\phi_x$	CX
	$M_x$	MOMX
Cisaillement	$\gamma_y$	GXY
	$\gamma_z$	GXZ
	$T_y$	EFFY
	$T_z$	EFFZ

### 2-3-1-1 L'élément poutre (POUT)

L'élément de poutre vérifie les hypothèses d'Euler-Bernoulli (les sections droites restent droites et il n'y a aucune déformation de cisaillement). Les fonctions de forme sont :

- de degré 3 pour les déplacements transverses  $u_y$  et  $u_z$
- de degré 2 pour les rotations de flexion  $\theta_y$  et  $\theta_z$
- de degré 1 pour les courbures  $\phi_y$  et  $\phi_z$
- de degré 1 pour le déplacement longitudinal  $u_x$
- constante pour la déformation axiale  $\varepsilon_x$
- de degré 1 pour la rotation de torsion  $\theta_x$
- constante pour le gauchissement de torsion  $f_x$

Les contraintes et les déformations généralisées sont données aux 2 extrémités de l'élément.

Il faut remarquer que l'allongement axial, le gauchissement de torsion et les contraintes

correspondantes sont identiques aux 2 extrémités, seules les courbures diffèrent (figure 1.5). Les déformations de cisaillement  $\gamma_y$  et  $\gamma_z$  sont nulles.

En élasticité, cet élément donne une solution exacte pour des forces et des moments appliqués aux nœuds des éléments.

Pour cet élément de poutre, l'utilisateur peut donner les sections réduites en cisaillement. La matrice de rigidité est alors modifiée pour tenir compte de la flexibilité additionnelle. Cette correction est bien évidemment ignorée en plasticité.

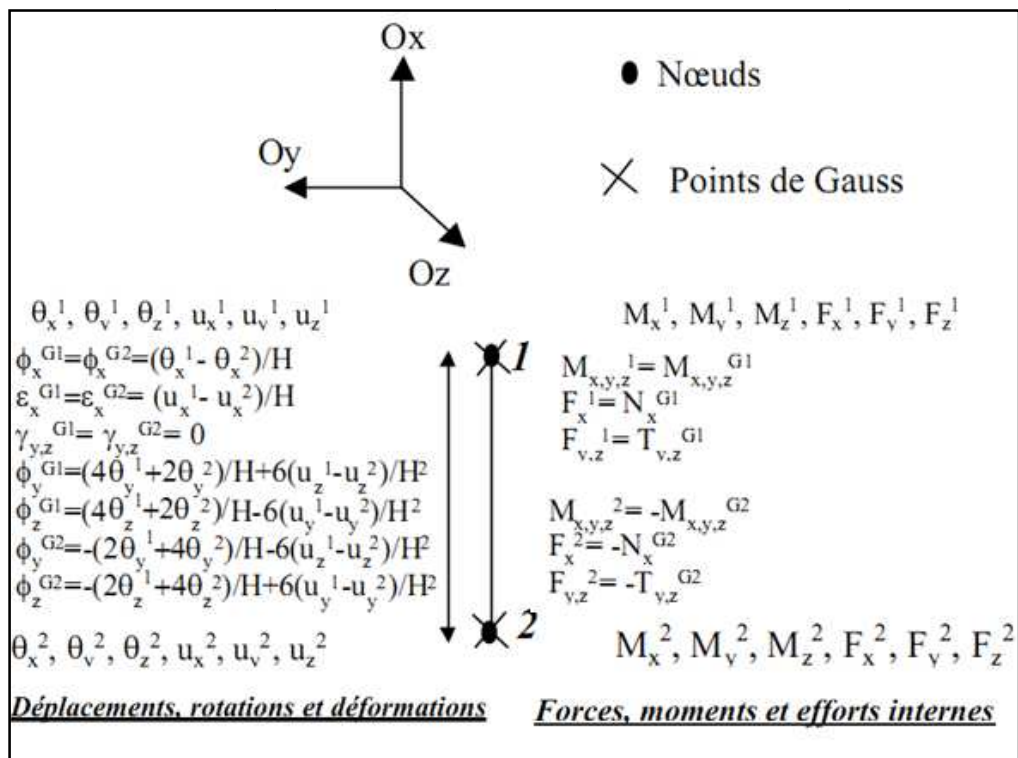


Figure 1.5: Orientation, conventions et positions des points de Gauss des éléments de poutre d'Euler-Bernoulli

### 2-3-1-2 L'élément TIMO

Elément de poutre vérifie de Timoshenko les hypothèses suivantes (les sections planes restent planes mais pas obligatoirement normales à la fibre moyenne, possibilité de déformations de cisaillement). (PEGON ; 1993). Les fonctions de forme sont donc :

- de degré 1 pour les rotations, les déplacements transverses et le déplacement axial.
- constante pour les courbures, les déformations de cisaillement et l'allongement axial.

Cet élément a donc une convergence spatiale limitée par rapport à l'élément POUT et son utilisation nécessite une discrétisation plus fine. Les contraintes et déformations sont données

au point de Gauss unique situé au centre de l'élément (figure 1.6). Une des différences par rapport à l'élément POUT est que, pour l'élément TIMO, l'équation d'équilibre locale  $T=dM/ds$  est vérifiée grâce à l'équilibre global alors que, pour l'élément POUT, cette relation est directement imposée dans l'élément (les efforts tranchants sont déduits directement des moments fléchissant).

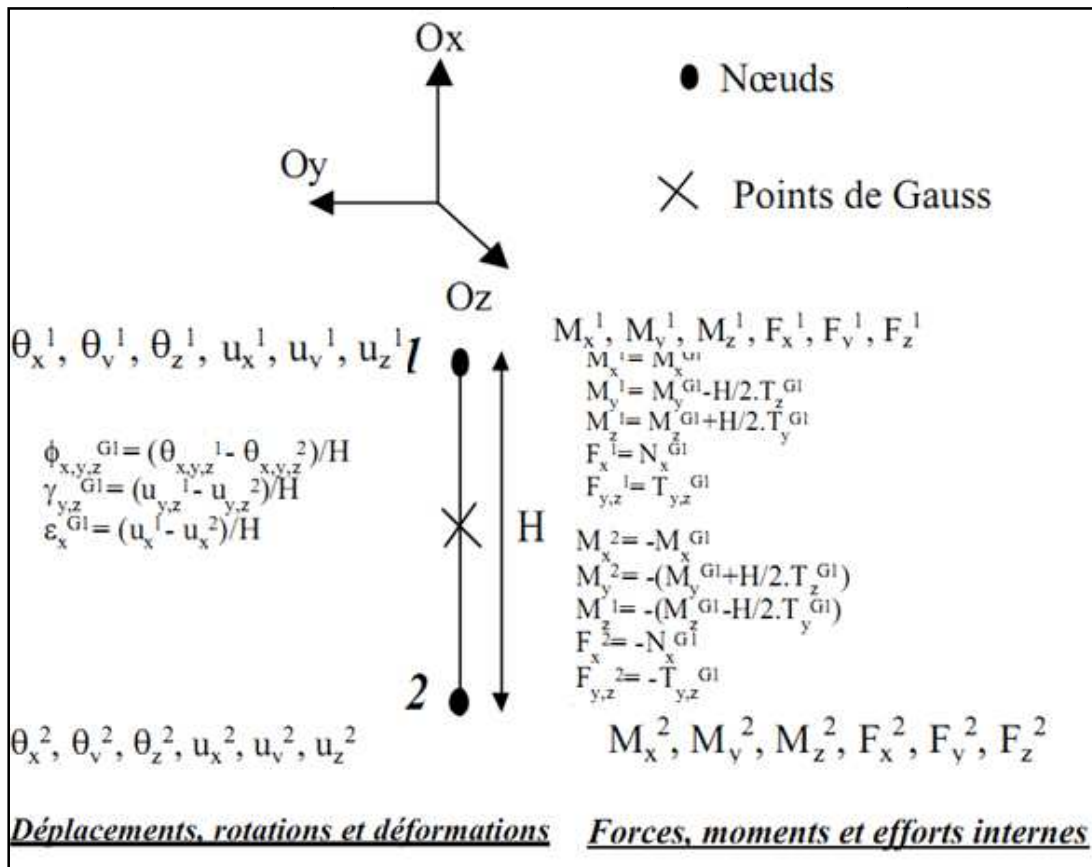


Figure 1.6: Orientation, conventions et positions des points de Gauss des éléments de poutre de Timoshenko

### 2-3-2- Poutre multi fibre

#### 2-3-2-1 - Introduction

Les modèles « classiques » E.F. sont des outils puissants pour la simulation du comportement non linéaire des parties complexes des structures (joints, assemblages, ...), leur application à la totalité d'une structure peut s'avérer peu pratique à cause d'un temps de calcul très important ou de la taille mémoire nécessaire à la réalisation de ce calcul. Par contre, une modélisation de type poutre multifibre (voir Figure 1.7), possède les avantages des hypothèses simplificatrices d'une cinématique de type poutre d'Euler Bernoulli ou Timoshenko tout en offrant une solution pratique et efficace pour une analyse non linéaire complexe d'éléments de structures composites tels que ceux que l'on peut rencontrer par exemple en béton armé. De plus, cette modélisation

"intermédiaire" est relativement robuste et peu coûteuse en temps de calcul du fait de l'utilisation de modèles de comportement non linéaires 1D (MOULIN Stéphane, 2009).

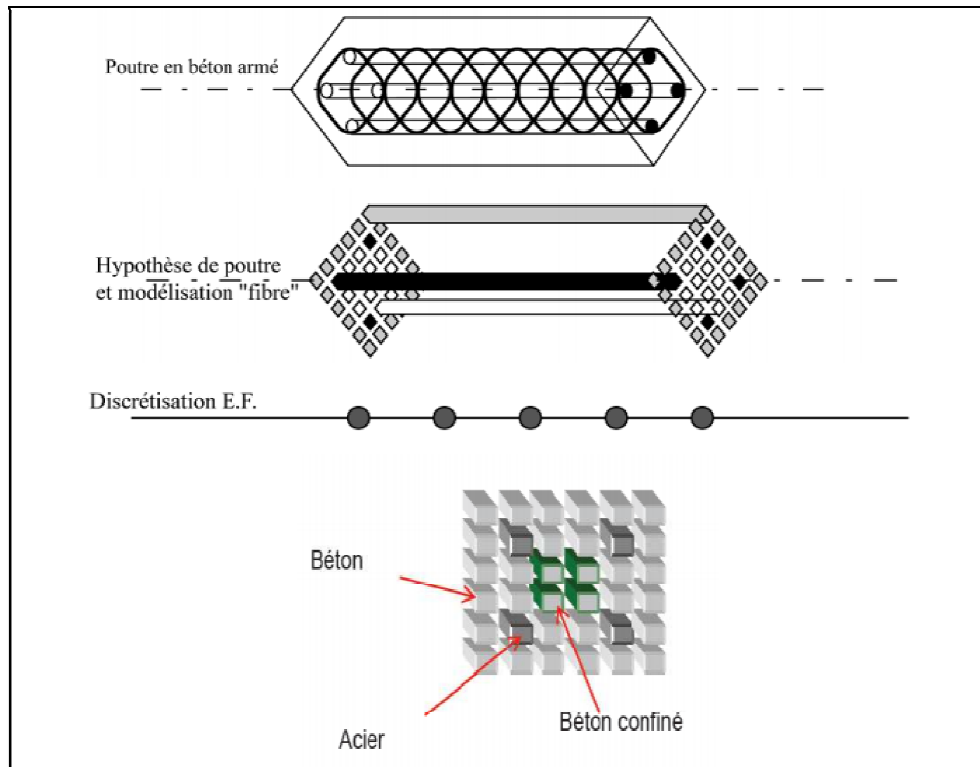


Figure 1.7: Description d'une poutre multifibre

### 2-3-2-2 -Élément de la théorie des poutres

Soit une poutre droite 3D de longueur  $L$  (Figure 1.8) orientée selon la direction  $x$  et soumise à des efforts distribués  $q_y$ ,  $q_z$ .

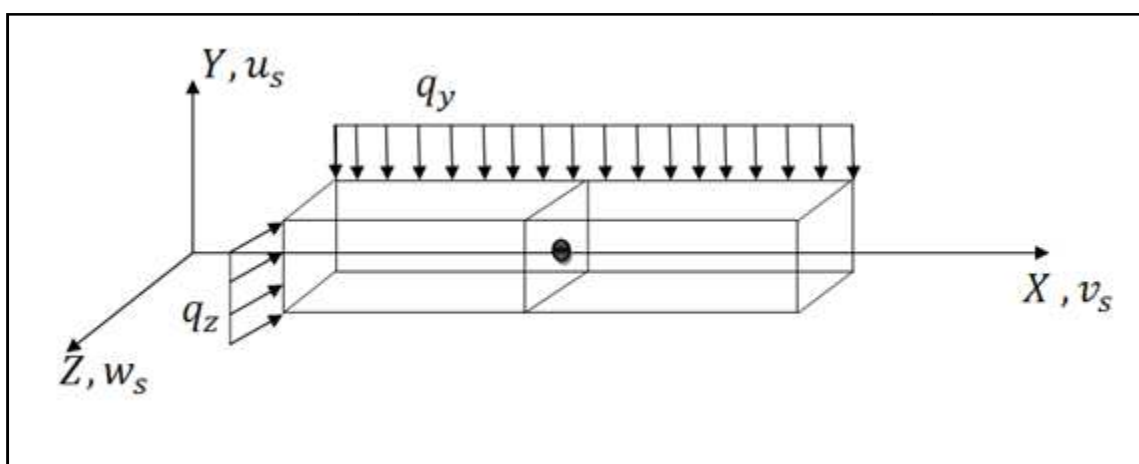


Figure 1.8: Poutre d'Euler 3D

**Principe des travaux virtuel** : est un principe fondamental en mécanique, qui postule un équilibre de puissance dans un mouvement virtuel, il s'agit d'une formulation d'une analyse fonctionnelle du principe fondamentale de la dynamique.

L'hypothèse des sections planes (théorie Timoshenko) permet d'exprimer les déplacements  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  d'un point quelconque de la poutre en fonction des déplacements  $u_s$ ,  $v_s$ ,  $w_s$  d'un point situé sur l'axe de référence  $x$  et des déplacements dus aux rotations de la section  $S$  :

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y\theta_{sz}(x) + z\theta_{sy}(x) \quad (\text{Eq-1.1})$$

$$v(x, y, z) = v_s(x) - z\theta_{sx}(x) \quad (\text{Eq-1.2})$$

$$w(x, y, z) = w_s(x) + y\theta_{sx}(x) \quad (\text{Eq-1.3})$$

Le champ de déformation prenant alors la forme suivante :

$$\varepsilon_{xx} = u'_s(x) - y\theta'_{sz}(x) + z\theta'_{sy}(x) \quad (\text{Eq-1.4})$$

$$2\varepsilon_{xy} = v'_s(x) - \theta_{sz}(x) - z\theta'_{sx}(x) \quad (\text{Eq-1.5})$$

$$2\varepsilon_{xz} = w'_s(x) - \theta_{sy}(x) + y\theta'_{sx}(x) \quad (\text{Eq-1.6})$$

En introduisant le principe des travaux virtuels dans l'équation (1.1) à (1.6) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^L (\delta\varepsilon_{xx} \cdot \sigma_{xx} + 2\delta\varepsilon_{xy} \cdot \sigma_{xy} + 2\delta\varepsilon_{xz} \cdot \sigma_{xz}) dV_0 &= \int_0^L (\delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \\ \int_0^L (N\delta u'_s(x) + T_y\delta\beta_{sy}(x) + T_z\delta\beta_{sy}(x) + M_x\delta\theta'_{sy}(x) + M_z\delta\theta'_{sz}(x)) \\ &= \int_0^L (\delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \end{aligned} \quad (\text{Eq-1.7})$$

$$\text{avec effort normal : } N = \int_s \sigma_{xx} ds \quad (\text{Eq-1.8})$$

$$\text{Effort tranchant: } T_y = \int_s \sigma_{xy} ds; T_z = \int_s \sigma_{xz} ds \quad (\text{Eq-1.9})$$

$$\text{Les moment de flexion: } M_y = \int_s z\sigma_{xx} ds; M_z = \int_s -y\sigma_{xx} ds \quad (\text{Eq-1.10})$$

Les moments de torsion :

$$M_x = \int_s (-z\sigma_{xy} + y\sigma_{xz}) ds \quad (\text{Eq1.11})$$

$$\beta_{sy}(x) = v'_s(x) - \theta_{sz}(x); \beta_{sz}(x) = w'_s(x) - \theta_{sy}(x) \quad (\text{Eq1.12})$$

La théorie des poutres et les équations d'élasticité donnent:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= E \cdot \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} &= 2G \cdot \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 2G \cdot \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Eq-1.13})$$

avec E le module de Young de la section et G le module de cisaillement. Dans le cadre de la théorie d'Euler - Bernoulli (les sections planes restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre), les équations précédentes (Eq-1.1) a (Eq-1.6) prennent la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y\theta_{sz}(x) + z\theta_{sy}(x) \quad (\text{Eq-1.14})$$

$$v(x, y, z) = v_s(x) \quad (\text{Eq-1.15})$$

$$w(x, y, z) = w_s(x) \quad (\text{Eq-1.16})$$

$$\varepsilon_{xx} = u'_s(x) - y\theta'_{sz}(x) + z\theta'_{sy}(x) \quad (\text{Eq-1.17})$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0 \quad (\text{Eq-1.18})$$

Contrairement à la poutre Timochenko, la poutre Euler - Bernoulli néglige les déformations dues au cisaillement (équation 1.18). En appliquant le principe des travaux virtuels, nous obtenons finalement.

$$\int_0^L (N\delta u'_s(x) + M_y\delta\theta'_{sy}(x) + M_z\delta\theta'_{sz}(x)) ds = \int_0^L (\delta v_s(x)q_y + \delta w_s(x)q_z) dx \quad (\text{Eq-1.19})$$

$$N = \int_s \sigma_{xx} ds ; M_y = \int_s z \sigma_{xx} ds ; M_z = \int_s -y \sigma_{xx} ds . \quad (\text{Eq-1.20})$$

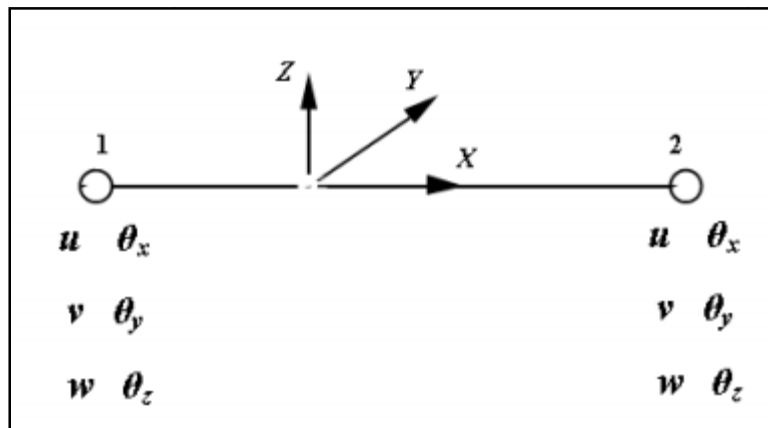
Remarque :

Le moment de torsion  $M_x$  et les efforts tranchants  $T_y$  et  $T_z$  ne peuvent pas être calculés par intégration des contraintes de cisaillement puisque ces dernières sont négligées. Dans la suite nous présentons en détail plusieurs éléments finis poutre multifibre existants dans la littérature basées sur la théorie de Timoshenko ou d'Euler - Bernoulli.

### 2-3-2-3 Élément fini poutre multifibre Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur

Soit une poutre Timoshenko 3D à 2 nœuds, de longueur  $L$ , soumise à des efforts distribués  $q_y$  et  $q_z$  (figure 1.8).  $S$  est la section de la poutre discrétisée en fibres de coordonnées  $y, z$ . Nous présentons ici une généralisation où l'axe de référence choisi pour la poutre est indépendant de toute considération géométrique, inertielle ou mécanique. (KOTRONIS Panagiotis, 2008) (MOULIN Stéphane, 2010) (NGUYEN Xuân Huy, 2006).

La discrétisation en éléments "exacts" de poutre s'effectue sur un élément linéique à deux nœuds et six degrés de liberté par nœuds. Ces degrés de liberté sont les trois translations  $u, v, w$  et les trois rotations  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  (Figure 1.9).



**Figure 1.9:** Élément poutre Pour chaque nœud, on stocke d'abord les grandeurs liées aux trois translations, puis celles liées aux trois rotations.

Par exemple, un vecteur déplacement sera structuré de la manière suivante :

$$\{U^T\} = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}\} \quad (\text{Eq-1.21})$$

#### a- Fonctions d'interpolation :

Nous considérons le champ de déplacements continus en tout point de la ligne moyenne  $x$  en fonction du champ de déplacements discrétisés :

$$U_S = [N].\{U\} \quad (\text{Eq-1.22})$$

$$\text{avec } \{U_S\}^T = \{u_S(x) v_S(x) w_S(x) \theta_{Sx}(x) \theta_{Sy}(x) \theta_{Sz}(x)\} \quad (\text{Eq-1.23})$$

Le choix des fonctions d'interpolation  $[N]$  conditionne la performance numérique de l'élément. Le phénomène du blocage par cisaillement (apparition de rigidité 'parasite' quand

l'élément est élançé) est présent dans tous les éléments finis de poutre Timoshenko où les déplacements transversaux et les rotations sont discrétisés séparément.

Afin d'affranchir ce problème, la formulation présentée ci-dessous opte pour une interpolation polynomiale de degré supérieur pour les déplacements transversaux (par exemple cubique) et les rotations (par exemple quadratique) qui ne sont plus indépendants. Ce type d'approche conduit à des éléments finis à plus de deux nœuds (deux nœuds aux extrémités et des nœuds intérieurs), ou à des éléments finis à deux nœuds dont les fonctions d'interpolation dépendent des propriétés des matériaux (MAZARS et al. 2006). Dans cette dernière formulation les fonctions d'interpolation prennent la forme suivante :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3^* & 0 & 0 & -N_4^* & 0 & 0 & N_5^* & 0 & -N_6^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_7^* & 0 & 0 & N_8^* & 0 & 0 & -N_9^* & 0 & N_{10}^* & 0 \\ 0 & N_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & N_9 & 0 & 0 & 0 & N_{10} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq1.24})$$

$$\text{avec: } \left\{ \begin{array}{l} N_1 = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 = \frac{x}{L} \\ N_3 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \phi \left( \frac{x}{L} \right) + 1 + \phi \right\} \\ N_4 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ \left( \frac{x}{L} \right)^3 - \left( 2 + \frac{\phi}{2} \right) \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \left( 1 + \frac{\phi}{2} \right) \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \\ N_5 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \phi \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \\ N_6 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left( \frac{x}{L} \right)^3 - \left( 1 + \frac{\phi}{2} \right) \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{\phi}{2} \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \\ N_7 = \frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \\ N_8 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - (4 + \phi) \left( \frac{x}{L} \right) + (1 + \phi) \right\} \\ N_9 = -\frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \\ N_{10} = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - (2 - \phi) \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \\ N_i^* = N_i(\phi^*) \\ \phi = \frac{12}{L^2} \left( \frac{\int_s E y^2 ds}{\int_s G ds} \right) \\ \phi^* = \frac{12}{L^2} \left( \frac{\int_s E z^2 ds}{\int_s G ds} \right) \end{array} \right. \quad (\text{Eq1.25})$$

**b-Matrices de rigidités :**

La relation entre les forces et les déformations « généralisées » dans la section prend la forme suivante (GUEDES et al. 1994) :

$$\{F\} = [K_s].\{D\} \quad (\text{Eq-1.26})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \{F\}^T = \{N, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z\} \\ \{D\}^T = \{u'_s(x), v'_s - \theta_{sz}(x), w'_s + \theta_{sy}(x), \theta'_{sx}(x), \theta'_{sy}(x), \theta'_{sz}(x)\} \end{cases} \quad (\text{Eq-1.27})$$

La matrice de rigidité de la section devient finalement :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} K_{s11} & 0 & 0 & 0 & K_{s15} & K_{s16} \\ & K_{s22} & 0 & K_{s24} & 0 & 0 \\ & & K_{s33} & K_{s34} & 0 & 0 \\ & & & K_{s44} & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & K_{s55} & K_{s56} \\ & & & & & K_{s66} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq-1.28})$$

$$\begin{cases} K_{s11} = \int_s E ds \\ K_{s15} = \int_s E z ds \\ K_{s16} = - \int_s E y ds \\ K_{s22} = k_y \int_s G ds \end{cases} \quad (\text{Eq-1.29})$$

$$\begin{cases} K_{s24} = -k_y \int_s G z ds \\ K_{s33} = k_z \int_s G ds \\ K_{s34} = k_z \int_s G y ds \end{cases} \quad (\text{Eq-1.30})$$

$$\begin{cases} K_{s44} = \int_s G (k_z y^2 + k_y z^2) ds \\ K_{s55} = \int_s E z^2 ds \end{cases} \quad (\text{Eq-1.31})$$

$$\begin{cases} K_{s56} = - \int_s E y z ds \\ K_{s66} = \int_s E y^2 ds \end{cases} \quad (\text{Eq-1.32})$$

Les variables  $k_y$  et  $k_z$  sont les coefficients de correction de cisaillement de la section.

L'introduction des équations 1.26 à 1.32 dans le principe des travaux virtuels conduit à :

$$\int_0^L \delta\{D\}^T [K_s]\{D\} dx = \int_0^L (\delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \quad (\text{Eq-1.33})$$

La déformation généralisée est calculée par

$$\{D\} = [B].\{U\} \quad (\text{Eq-1.34})$$

avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_3 - N_7 & 0 & 0 & 0 & N'_4 - N_8 & 0 & N'_5 - N_9 & 0 & 0 & 0 & N'_6 - N_{10} \\ 0 & 0 & N_3^* - N_7^* & 0 & -N_4^* + N_8^* & 0 & 0 & 0 & N_5^* - N_9^* & 0 & -N_6^* + N_{10}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_7^* & 0 & N_8^* & 0 & 0 & 0 & -N_9^* & 0 & N_{10}^* & 0 \\ 0 & N'_7 & 0 & 0 & 0 & N'_8 & 0 & N'_9 & 0 & 0 & 0 & N'_{10} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq-1.35})$$

La matrice de rigidité de l'élément est donnée par :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx \quad (\text{Eq-1.36})$$

### c- Intégration dans le cas non-linéaire (matrice de rigidité)

Lorsque le comportement du matériau est non linéaire, pour permettre une intégration correcte des efforts internes, il est nécessaire d'avoir au moins deux points d'intégration le long de la poutre (les points de Gauss), la matrice de rigidité est calculée en utilisant l'équation suivante :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T \cdot [K_s] \cdot [B] dx = J \sum_{i=1}^2 w_i [B(x_i)]^T \cdot K_s \cdot [B(x_i)] \quad (\text{Eq-1.37})$$

où :  $x_i$  est la position du point de Gauss  $i$  dans un élément de référence de longueur 1, c'est-à-dire :

$$1 \pm \frac{0.5773502698963}{2}$$

$w_i$  est le poids du point de Gauss  $i$ . On prend ici  $w_i = 0.5$  pour chacun des 2 points ;  $J$  est le Jacobien.

Cette formule est utilisée également avec les autres types de poutre multifibre que nous présentons dans la suite.

### d- Matrices de masse :

Le travail virtuel des efforts d'inertie et la matrice de masse de la section prennent la forme suivante [Guedes et al. 1994] :

$$W_{int} = \int_0^L \int_s \rho \left( \delta u(x, y, z) \cdot \frac{d^2 u(x, y, z)}{dt^2} + \delta v(x, y, z) \cdot \frac{d^2 v(x, y, z)}{dt^2} + \delta w(x, y, z) \cdot \frac{d^2 w(x, y, z)}{dt^2} \right) ds \cdot dx$$

$$W_{int} = \int_0^L \delta \{U_s\}^T \cdot [M_s] \cdot \frac{d^2 \{U_s\}}{dt^2} \cdot dx \quad (\text{Eq-1.38})$$

Avec  $U_s$  le vecteur des déplacements généralisés.

Ce qui donne pour la matrice de masse :

$$[M_s] = \begin{bmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & 0 & M_{s15} & M_{s16} \\ & M_{s22} & 0 & M_{s24} & 0 & 0 \\ & & M_{s33} & M_{s34} & 0 & 0 \\ & & & M_{s44} & 0 & 0 \\ sym & & & & M_{s55} & M_{s56} \\ & & & & & M_{s66} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq-1.39})$$

$$\begin{cases} M_{s11} = \int_s \rho ds \\ M_{s15} = \int_s \rho z ds \\ M_{s16} = \int_s \rho y ds \\ M_{s22} = k_y \int_s \rho ds \end{cases} \quad (\text{Eq-1.40})$$

$$\begin{cases} M_{s24} = -k_y \int_s \rho z ds \\ M_{s33} = k_z \int_s \rho ds \\ M_{s34} = k_z \int_s \rho y ds \end{cases} \quad (\text{Eq-1.41})$$

$$\begin{cases} M_{s44} = \int_s \rho (k_z y^2 + k_y z^2) ds \\ M_{s55} = \int_s \rho z^2 ds \end{cases} \quad (\text{Eq-1.42})$$

$$\begin{cases} M_{s56} = - \int_s \rho y z ds \\ M_{s66} = \int_s \rho y^2 ds \end{cases} \quad (\text{Eq-1.43})$$

avec  $\rho$  masse volumique.

La matrice de masse de l'élément est finalement donnée par :

$$[M_{elem}] = \int_0^L [N]^T [M_s] [N] dx \quad (\text{Eq-1.44})$$

**Remarque :** Cette expression de la matrice de masse est rarement présentée dans la littérature. Dans la plupart des codes éléments finis elle est remplacée par la matrice de masse de type Euler - Bernoulli (ainsi les termes de correction de cisaillement intervient uniquement dans la matrice de raideur).

#### e- Efforts internes et efforts résultants :

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait finalement par l'intégrale suivante:

$$\{F_{int}\} = \int_0^L [B]^T \cdot \{F\} \cdot dx \quad (\text{Eq-1.45})$$

Les efforts résultants sont donnés par :

$$\{F_{res}\} = \int_0^L [N]^T \cdot \{Q\} \cdot dx \quad (\text{Eq-1.46})$$

Avec [N] qui est donné par les équations 1.24-1.25. Le vecteur Q dépend du chargement extérieur :

$$\{Q\}^T = (0 \quad q_y \quad q_z \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (\text{Eq-1.47})$$

Si nous considérons que les efforts distribués sont constants, nous obtenons le vecteur des forces résultantes suivant :

$$\{F_{\text{res}}\}^T = (0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (\text{Eq-1.48})$$

Remarque :

Pour des sections homogènes de comportement linéaire et quand l'axe de référence coïncide avec l'axe neutre de la poutre la matrice de rigidité de l'élément ainsi calculée est la même que la matrice de rigidité exacte d'un élément Timoshenko. Un seul élément fini est donc suffisant pour calculer les déplacements exacts d'une poutre soumise à des chargements statiques. Pour des sections hétérogènes la qualité des résultats dépend de la précision de calculs des propriétés élastiques de la section. - Lorsque l'élancement devient grand  $\delta \rightarrow 0$  et  $\delta^* \rightarrow 0$  et donc la matrice de rigidité tend vers celle d'un élément Bernoulli.

### 2-3-2-4 Elément fini poutre multifibre Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1

#### a- Fonctions d'interpolation :

La matrice des fonctions d'interpolation [N] est de la forme (Panagiotis Kotronis , 2008)(Stéphane MOULIN, 2010)( Xuân Huy NGUYEN ,2006) :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq-1.49})$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (\text{Eq-1.50})$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (\text{Eq-1.51})$$

#### b- Matrices de rigidité

La matrice de rigidité de la section [K<sub>s</sub>] est donnée par les équations 1.41 à 1.45. La déformation généralisée est calculée comme avant par { D } = [B]{U} avec :

La matrice de rigidité d'élément est finalement donnée selon l'équation (1.49):

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & N'_1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq-1.52})$$

$$\begin{cases} N'_1 = -\frac{1}{L} \\ N'_2 = \frac{1}{L} \end{cases} \quad (\text{Eq-1.53})$$

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx$$

La matrice [B] devait être alors :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L-x}{L} & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x}{L} \\ 0 & 0 & N'_1 & 0 & \frac{L-x}{L} & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq-1.54})$$

$$\begin{cases} N'_1 = -\frac{1}{L} \\ N'_2 = \frac{1}{L} \end{cases} \quad (\text{Eq-1.55})$$

**c- Matrices de masse :**

la matrices de masse de la section et matrice masse de l'élément sont données par les équations (Eq-1.38 à 1.44) (paragraphe 2-3-2-3-d).

**d- Efforts internes :**

voir paragraphe (2-3-2-3-e).

**2-3-2-5 -Elément fini poutre multifibre Euler – Bernoulli**

**a- Fonctions d'interpolation**

La matrice des fonctions d'interpolation [N] est de la forme (MOULIN Stéphane, 2010)

(NGUYEN Xuân Huy, 2006)(GUEDES et al. 1994) :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & -N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_3' & 0 & N_4' & 0 & 0 & 0 & -N_5' & 0 & N_6' & 0 \\ 0 & N_3' & 0 & 0 & 0 & N_4' & 0 & -N_5' & 0 & 0 & 0 & N_6' \end{bmatrix} \quad (\text{Eq-1.56})$$

Avec les fonctions d'interpolation suivantes, et leurs dérivées utiles :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad N_1' = -\frac{1}{L} \\ N_2 = \frac{x}{L} \quad N_2' = \frac{1}{L} \\ N_3 = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \quad N_3' = -\frac{6x}{L^2} + 6\frac{x^2}{L^3} \\ N_4 = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad N_4' = 1 - \frac{4x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \\ N_5 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad N_5' = \frac{6x}{L^2} - 6\frac{x^2}{L^3} \\ N_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad N_6' = -\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \end{array} \right. \quad (\text{Eq-1.57})$$

**b- Matrices de rigidité :**

La matrice de rigidité de la section devient :

$$\{F\} = [K_s] \cdot \{D\} \quad (\text{Eq-1.58})$$

$$\{F\}^T = \{N, M_y, M_z, M_x\} \quad (\text{Eq-1.59})$$

$$\{D\}^T = \{u_s'(x), \theta_{sy}'(x), \theta_{sz}'(x), \theta_{sx}'(x)\} \quad (\text{Eq-1.60})$$

La matrice  $K_s$  peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$K_s = \begin{pmatrix} K_{s11} & K_{s12} & K_{s13} & 0 \\ & K_{s22} & K_{s23} & 0 \\ sym & & K_{s33} & 0 \\ & & & K_{s44} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq-1.61})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{s11} = \int_s E ds \\ K_{s12} = \int_s E z ds \\ K_{s13} = -\int_s E y ds \end{array} \right. \quad (\text{Eq-1.62})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{s22} = \int_s E \cdot z^2 \cdot ds \\ K_{s23} = \int_s E \cdot y \cdot z ds \\ K_{s33} = \int_s E \cdot y^2 \cdot ds \end{array} \right. \quad (\text{Eq-1.63})$$

Le terme de torsion  $K_{s44} = G \cdot J_x$  est donné par l'utilisateur à l'aide de la donnée de  $J_x$ .

$$\{D\} = [B] \cdot \{U\} \quad (\text{Eq-1.64})$$

avec la matrice B suivante :

$$[B] = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_3'' & 0 & N_4'' & 0 & 0 & 0 & -N_5'' & 0 & N_6'' & 0 \\ 0 & N_3'' & 0 & 0 & 0 & N_4'' & 0 & N_5'' & 0 & 0 & 0 & N_6'' \\ 0 & 0 & 0 & N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq-1.65})$$

$$\begin{cases} N_3'' = -\frac{6}{L^2} + 12\frac{x}{L^3} \\ N_4'' = -\frac{4}{L^2} + 6\frac{x}{L^2} \end{cases} \quad (\text{Eq-1.66})$$

$$\begin{cases} N_5'' = \frac{6}{L^2} - 12\frac{x}{L^3} \\ N_6'' = -\frac{2}{L} + 6\frac{x}{L^2} \end{cases} \quad (\text{Eq-1.67})$$

La matrice de rigidité de l'élément est finalement donnée par l'équation

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx \quad (\text{Eq-1.68})$$

### c- Matrices de masse

Les matrices de masse de la section et de l'élément prennent les formes suivantes :

$$[M_s] = \begin{bmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & M_{s12} & M_{s13} & 0 \\ & M_{s11} & 0 & 0 & 0 & -M_{s12} \\ & & M_{s11} & 0 & 0 & -M_{s13} \\ & & & M_{s22} & 0 & 0 \\ sym & & & & M_{s33} & 0 \\ & & & & & M_{s22} + M_{s33} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq-1.69})$$

$$\begin{cases} M_{s11} = \int_s \rho \cdot ds \\ M_{s12} = \int_s \rho \cdot z \cdot ds \\ M_{s13} = - \int_s \rho \cdot y \cdot ds \end{cases} \quad (\text{Eq-1.70})$$

$$\begin{cases} M_{s23} = \int_s \rho \cdot yz \cdot ds \\ M_{s33} = \int_s \rho \cdot y^2 \cdot ds \\ M_{s22} = \int_s \rho \cdot z^2 \cdot ds \end{cases} \quad (\text{Eq-1.71})$$

### d- Efforts internes et efforts résultants

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait finalement par l'intégrale suivante:

$$\{F_{int}\} = \int_0^L [B]^T \cdot \{F\} \cdot dx \quad (\text{Eq-1.72})$$

Avec {F} le vecteur des forces de la section issu de l'intégration des contraintes dans les fibres (équations 1.8-1.11, 1.27) et [B] qui est donné par l'équation 1.35. Si nous considérons que les efforts distribués sont constants, nous obtenons le vecteur des forces résultantes suivant :

$$\{F_{res}\}^T = \left( 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad -\frac{L^2q_z}{2} \quad \frac{L^2q_y}{2} \quad 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad \frac{L^2q_z}{2} \quad \frac{L^2q_y}{2} \right) \text{ (Eq-1.73)}$$

**3- Comparaissant entre les avantages et inconvénients des différents approches :**

*tableau1.3:* les avantages et inconvénients de chaque approche

	<b>Avantages</b>	<b>Inconvénients</b>
<b>Modélisation globale pour les coques</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Elle est adaptée à la modélisation des structures minces de type coque (dalle et voile).</li> <li>•Elle est peu coûteuse en temps CPU et en taille mémoire.</li> <li>•Elle peut être combinée à l'emploi d'autres éléments de structure (coques multicouches ...).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Elle ne permet pas de représenter finement les phénomènes mécaniques et les réponses locales (contraintes...).Le comportement de la structure est « homogénéisé ».</li> <li>•La mise en œuvre de modèles de comportement globaux nécessite une identification des paramètres pouvant être difficile.</li> </ul>
<b>Modélisation locale (éléments massifs)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Elle permet de représenter finement des géométries complexes du type nœuds d'ossatures ou zones que l'on cherche à modéliser avec précision (y compris l'ensemble du ferrailage longitudinal et</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Elle est plus coûteuse en temps CPU et en taille mémoire que les modélisations semi-globales et globales.</li> <li>•Le mélange éléments massifs (béton) et barre (acier) peut introduire des</li> </ul>

	<p>transverse).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•Elle permet de représenter tous les types de chargement.</li> <li>•Elle permet d'accéder aux grandeurs globales et locales.</li> </ul>	<p>singularités source de non convergence.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•La délocalisation n'est pas disponible avec DYNA_NON_LINE.</li> </ul>
<p><b>Modélisation globale multifibre</b></p> <p><b>semi-poutre</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Elle est adaptée à la modélisation des structures minces de type poutre.</li> <li>•Elle permet de réduire la taille du problème par rapport à une modélisation en éléments massifs.</li> <li>•Elle est peu coûteuse en temps.</li> <li>•Elle peut être combinée à l'emploi d'autres éléments de structure (coques multicouches...).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Elle ne permet pas de représenter le ferrailage transverse.</li> <li>•Elle n'est pas adaptée aux chargements de type cisaillement.</li> <li>•Elle est plutôt adaptée aux structures relativement simples.</li> </ul>

# Chapitre 2

## Les modèles de comportement

---

### Sommaire:

1- Introduction.....	27
2- Les modèles de comportements .....	27
2-1- Modèles de comportement utilisé dans l'approche globale .....	27
2-1-1- Les lois bilinéaires BILIN_MOMY et BILIN_EFFZ.....	27
2-1-2 - Les lois trlinéaires de Takeda TAKEMO_MOMY et TAKEMO_EFFZ .....	28
2-1-3- Le modèle globale.....	29
2-1-4- La loi CISAIL_NL.....	30
2-1-5 - Le modèle INFILL_UNI.....	31
2-2- Les modèles de comportement utilisés dans l'approche locale et semi locale .....	33
2-2-1- ACIER .....	33
a- Modèle du Parc et Paulay.....	33
b- Modèle de Mander .....	34
2-2-2- les modèles du béton.....	34
2-2-2-1- Le modèle de béton simplifié BAEL .....	34
2-2-2-2- Le modèle de béton de Mazars .....	35
2-2-2-3- Béton confinée .....	37
a- Définition.....	37
b- Effet du confinement du béton sur la ductilité des structures en B.A .....	37
c- Comportement du béton confiné en élasticité non linéaire.....	38
C-1- Modèle d'Hognestad (1951) .....	39
c-1-1- Comportement en compression .....	39
La prise en compte du confinement en compression.....	40
c-1-2- Comportement en traction .....	41
c-2- Modèle de Sheikh et Uzumeri(1982) .....	41
c-3- Modèle de Saatcioglu et Razvi (1992).....	43

c-4- Modèle H.-S. Chung et al (2002).....	44
c-5- Modèle de B. Bousalem et N. Chikh (2007).....	45
c-6-Modèle de Bouafia et al(2010). ....	46
3- Travaux antérieurs .....	49
Exemple 1 .....	49
Exemple2 .....	51
Exemple 3 .....	53

## 1- Introduction

Il existe plusieurs modèles de comportement pour l'acier et pour le béton ; dans ce chapitre en présent quelque modèles pour ces matériaux utilise dans les diffères approches de modélisation.

## 2- Les modèles de comportements existant dans CAS3M

### 2-1- Modèles de comportement utilisé dans l'approche globale

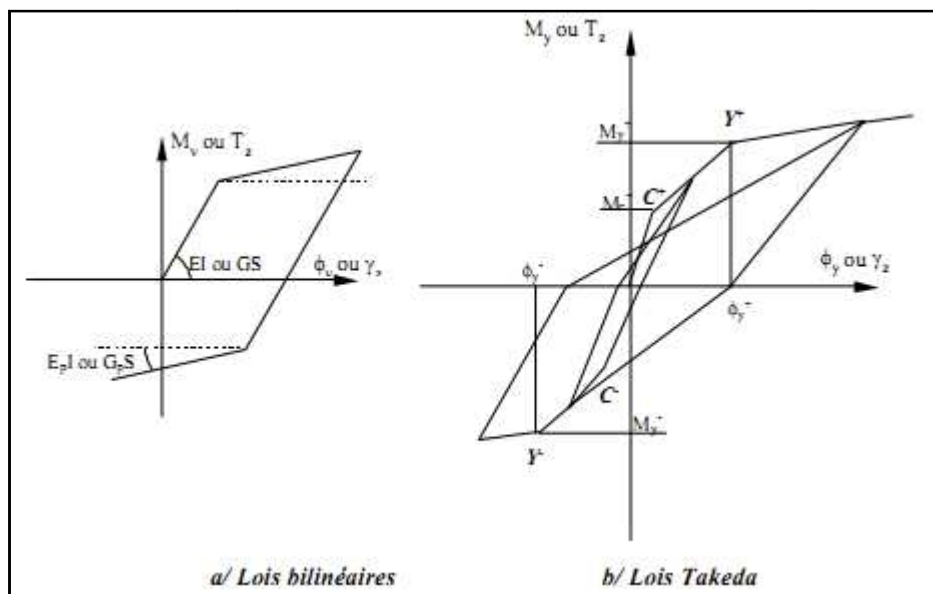
#### 2-1-1- Les lois bilinéaires BILIN\_MOMY et BILIN\_EFFZ

La même loi uni-axiale élasto-plastique avec écrouissage cinématique est utilisée pour relier la courbure  $\phi_y$  au moment de flexion  $M_Y$  (loi BILIN\_MOMY) et la déformation de cisaillement  $\gamma_z$  à l'effort tranchant  $T_Z$  (loi BILIN\_EFFZ). La loi BILIN\_MOMY fonctionne sur les éléments de poutre de Bernoulli POUT et de Timoshenko TIMO alors que la loi BILIN\_EFFZ ne fonctionne évidemment que sur les éléments de Timoshenko TIMO (Figure 2.1-a et b).

Deux paramètres sont nécessaires pour décrire le comportement non linéaire :

Le moment ou l'effort tranchant résistant (YMOM ou YEFF)

Le module d'Young post plastification EAYI : la pente post-plastification de la relation moment-courbure vaut (INRYxEAYI) pour la loi en flexion et (SECZxEAYI) pour la loi en cisaillement.



**Figure 2.1:** Modèles bilinéaires et Takeda pour la flexion et l'effort tranchant

### 2-1-2 - Les lois trilineaires de Takeda TAKEMO\_MOMY et TAKEMO\_EFFZ

La loi de Takeda est une des lois simplifiées les plus répandues pour modéliser les structures en béton armé (TAKEDA, 1970). La loi disponible dans Castem est la loi de Takeda modifiée valable aussi pour le comportement en cisaillement (Figure 2.2).

Le comportement non linéaire nécessite trois paramètres (ou 6 paramètres pour une section non symétrique).

La courbe de première charge  $z$  qui peut être différente dans les 2 sens de chargement est tri-linéaire :

- Le premier segment passant par l'origine est caractéristique du comportement élastique.
- Le second segment de la fissuration du béton.
- Le troisième segment de la plastification des aciers.

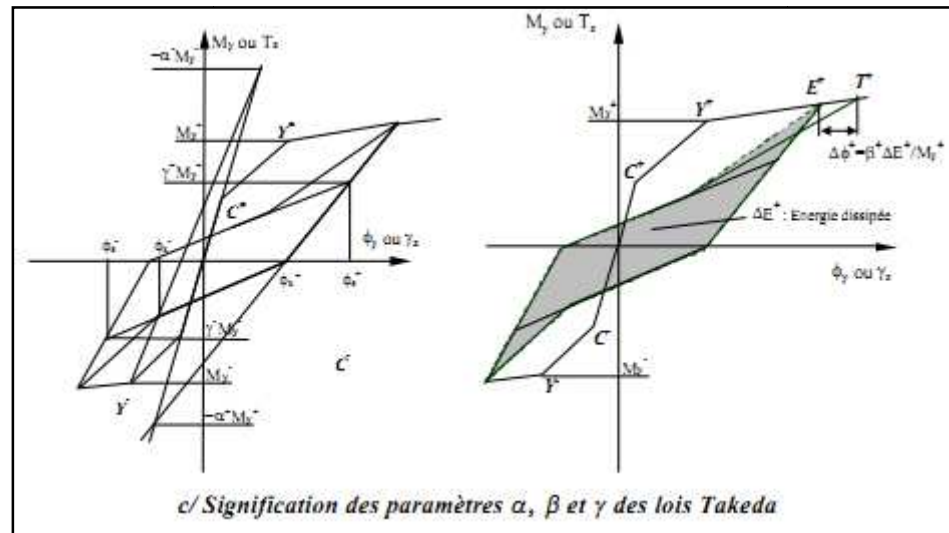
Cette courbe est obligatoirement monotone croissante et comporte 4 points dans le cas d'une section symétrique et 9 points dans le cas d'une section non symétrique (le 5ème point étant l'origine). Les points définissant la plastification des aciers ont pour ordonnées  $M_y^+$  et  $M_y^-$ .

Les 3 (ou 6) paramètres scalaires décrivent le comportement cyclique régis par 15 règles. Dans la loi Takeda du code IDARC, les paramètres sont les suivants (COMBRESURE.D, 2001)

- $\alpha^+$  et  $\alpha^-$  définissent le module de décharge élastique qui est effectué en visant un point d'ordonnée  $-\alpha^+ M_y^+$  et  $-\alpha^- M_y^-$  situé sur la droite passant par l'origine et ayant la pente de la rigidité initiale. La loi Takeda de Castem 2000 a pour paramètres  $SFDP = \alpha^+$  et  $SFDN = \alpha^-$ .
- $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  définissent le pincement des courbes sous chargement cyclique. Lorsque l'effort change de signe, le point d'ordonnée  $\gamma^+ M_y^+$  ou  $\gamma^- M_y^-$  situé sur la courbe de décharge opposée est visé jusqu'à atteindre la courbure  $\phi_{1^+}$  ou  $\phi_{1^-}$ . La loi Takeda de Castem 2000 a pour paramètres  $PINP = |\gamma^+ M_y^+|$  et  $PINN = |\gamma^- M_y^-|$ .
- $\beta^+$  et  $\beta^-$  définissent la dégradation de résistance sous chargement cyclique. Lors d'un cycle décharge- recharge, le dernier point visé n'est pas le point atteint lors du cycle précédent sur la courbe de première charge mais un point situé sur la

courbe de première charge, mais à une abscisse plus élevée d'un facteur  $\Delta\phi^+ = \beta^+ \cdot (\Delta E^+ / M_y^+)$ .

(ou  $\Delta\phi^- = \beta^- \cdot (\Delta E^- / M)$ ). Ce décalage d'abscisse simule une dégradation de résistance lorsque des cycles à amplitude constante sont réalisés. La loi Takeda de Castem 2000 a pour paramètres  $SRDP = |\beta^+ / M_y^+|$  et  $SRDN = |\beta^- / M_y^-|$ .



**Figure 2.2:** Signification des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  des lois Takeda

### 2-1-3- Le modèle globale

Le modèle global non linéaire regroupe 3 lois de comportement découplées pour respectivement la compression/traction (éléments TIMO et POUT), la flexion (éléments TIMO et POUT) et l'effort tranchant (élément TIMO uniquement)

(Figure 2.3-a,b,c). Un même élément peut être non linéaire suivant 1, 2 ou 3 modes de fonctionnement suivant les paramètres considérés (COMP, FLXY ou FLXZ et CISY ou CISZ). (LAVARENNE, 1994 ;1995,1996)

Les 3 lois ont un fonctionnement similaire à celui de la loi Takeda mais seule la courbe de première charge est spécifiée.

En traction-compression, la courbe de première charge comporte un total de 6 points, soient 2 segments en traction et 3 segments en compression. Cette courbe est donnée en déplacement-force axiale avec les conventions génie civil (valeurs négatives en traction).

En flexion, la courbe de première charge donner le moment en fonction de la rotation multipliée par la longueur de l'élément et comporte 7 points, soient 3 segments pour chaque

direction de chargement. Les 2 premiers segments sont représentatifs de la fissuration : la décharge a lieu en visant l'origine et aucune déformation plastique n'est créée. Après le début de la plastification, la rigidité diminue proportionnellement à un facteur

$(d_{max}/d_{plas}) 0.5$  où  $d_{max}$  est le déplacement maximal atteint dans la même direction et  $d_{plas}$  le déplacement de début de plastification.

La loi en cisaillement est identique à la loi en flexion à l'exception du pincement sous chargement cyclique. La courbe de première charge donne l'effort tranchant en fonction du déplacement différentiel.

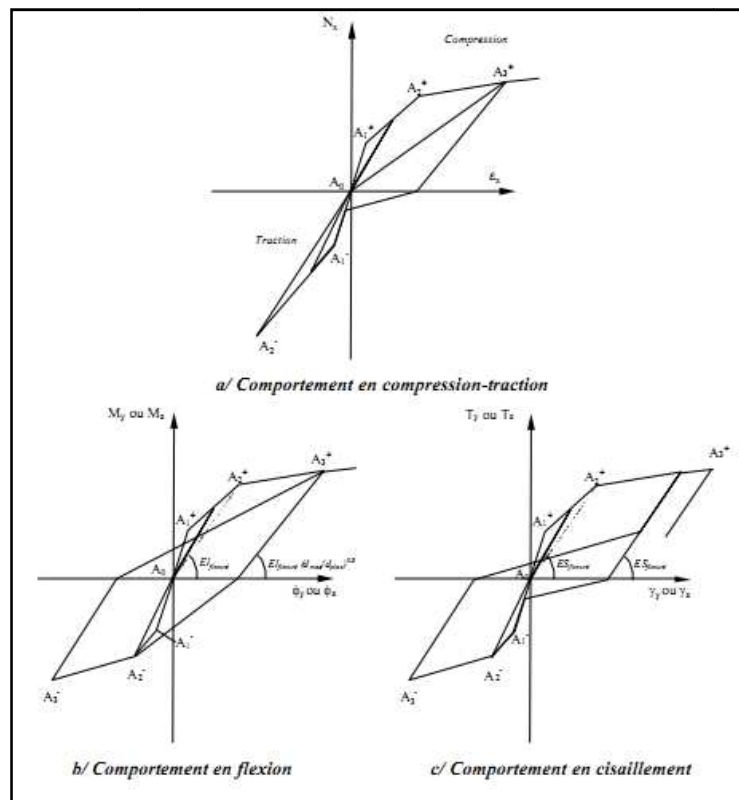


Figure 2.3: Lois de fonctionnement du modèle global

2-1-4- La loi CISAIL\_NL

Cette loi est valable pour le cisaillement (suivant  $Oz$  car elle relie  $\gamma_z$  et  $T_z$ ). Elle permet de modéliser les comportements adoucissants (Figure 2.4). Ce développement est décrit dans (COMBRESURE.D, 1996a et b). La courbe de première charge est multilinéaire et doit être spécifiée dans chacune des 2 directions. Cette courbe comporte 3 parties (et doit donc comporter au moins 4 points): une première zone linéaire élastique, une zone d'endommagement - la non-linéarité provient uniquement de la baisse de raideur- et une zone plastique la non- linéarité provient de la création de déformation plastique sans modification de raideur.

- DELP et DELN : Déformation limite du domaine élastique  $\gamma_c$ .
- Si  $T_c$  est l'effort tranchant de fissuration, la déformation associée vaut  $g_c = \frac{T_c}{G.S}$
- DMAP et DMAN : Endommagement maximum au début de la plastification  $D_m$ . Si  $T_p$  est l'effort tranchant de plastification et  $\gamma_p$  la déformation associée,
- $D_m = 1 - \frac{T_p}{S.G.g_p}$
- MONP et MONO : Evolution de l'effort tranchant en fonction de la déformation plastique. Le premier point de cette courbe est obligatoirement  $(0, T_p)$ . 3 autres paramètres servent à régler le pincement sous chargement cyclique (paramètre BETA):
  - si BETA=1, il n'y a pas de pincement,
  - si BETA=0, le modèle est similaire à un modèle de glissement
  - la dégradation de résistance sous chargement cyclique : Ce phénomène est pris en compte en multipliant la courbe de première charge (MONP et MONN) par un facteur  $Degr = \theta + (1 - \theta). e^{-\alpha.d_{plastic}}$ .

$d_{plastic}$  est la déformation plastique accumulée.

$\theta$  (paramètre TETA) représente la résistance résiduelle.

$\alpha$  (paramètre ALPH) permet de régler la vitesse de la dégradation de résistance.

Si ce phénomène est négligé,  $\theta$  et  $\alpha$  peuvent être pris égal à 1 et 0 respectivement.

### 2-1-5 - Le modèle INFILL\_UNI

Ce modèle permet de modéliser les murs de remplissage en maçonnerie à l'aide de 2 éléments de barre ayant une loi non linéaire en traction-compression (COMBRESURE.D , 1996a et b). (Figure 2.4-b). La résistance en traction est nulle et la courbe de première charge décrivant le comportement en compression est multilinéaire et peut comporter de l'adoucissement. Cette courbe comporte 3 parties identiques à la courbe du modèle CISAIL\_NL:

Une première zone linéaire élastique, une zone d'endommagement/fissuration et une zone plastique représentative de la ruine de la maçonnerie par compression. Les conventions béton

armé doivent être adoptées pour les déformations et les contraintes : les valeurs positives définissent une compression. Sous chargement cyclique, la loi tient compte du comportement unilatéral dont la fissuration (principalement à l'interface entre le panneau et la maçonnerie) est à l'origine. Un paramètre permet de régler le pincement de la courbe lors de la refermeture des fissures.

Enfin, comme pour le modèle CISAIL\_NL, le phénomène de dégradation de résistance sous chargement cyclique peut être reproduit par le modèle. Les paramètres non linéaires sont :

- DELA : Déformation limite du domaine élastique  $e_c = \frac{N_C}{S.E}$
- DMAX : Endommagement maximum au début de la plastification,  $Dm = 1 - \frac{T_p}{S.G.g_p}$
- MONO : Evolution de l'effort normal en fonction de la déformation axiale plastique.
- Paramètre contrôlant le pincement de la courbe  $\beta$ : BETA.
- Paramètres contrôlant la dégradation de résistance sous chargement cyclique  $\theta$  et  $\alpha$ : TETA et ALPH.
- Paramètres contrôlant la position du point de fin de glissement et de début de recharge  $\gamma$  et  $\gamma'$  avec :

$$\varepsilon_{glissement} = \gamma \cdot \varepsilon_{plastique} + \gamma' \cdot \varepsilon_e \text{ GAMM et GAMP.}$$

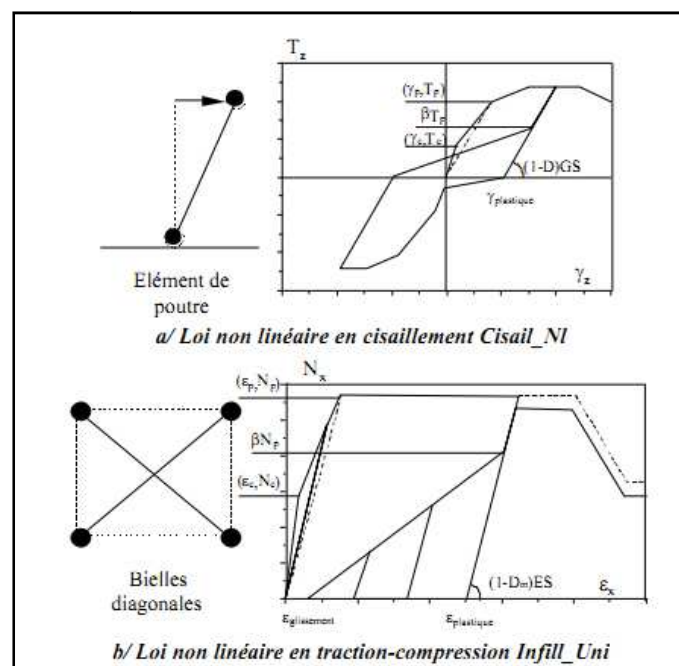


Figure 2.4: Lois de comportement globales Cisail\_NL et Infill\_Uni

2-2- Les modèles de comportement utilisés dans l'approche locale et semi locale

2-2-1- ACIER

L'acier peut être classé en deux groupes en fonction de sa ductilité. La Figure 2.5 montre une courbe contrainte-déformation typique pour l'acier en fonte qui a une nature fragile, et une courbe contrainte-déformation typique pour l'acier doux. Du fait que l'acier utilisé pour les structures et éléments en béton armé est généralement du dernier type, tous les modèles discutés ici correspondent à cette catégorie.

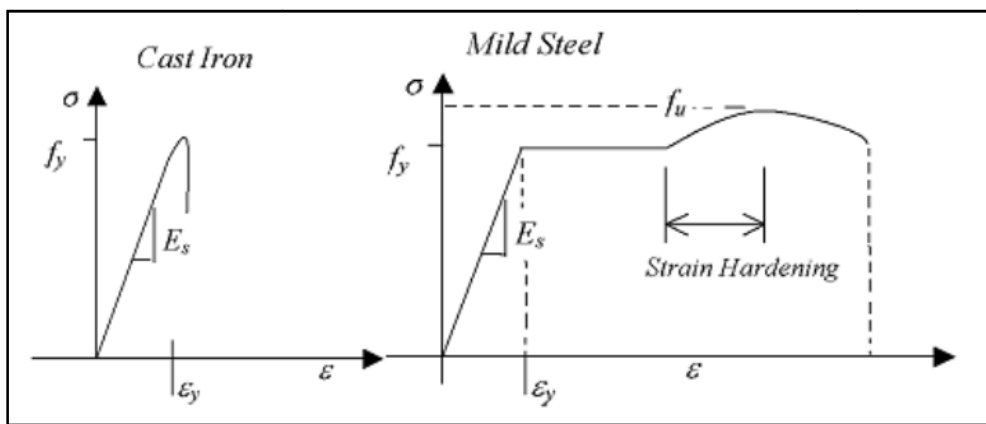


Figure 2.5: Courbe contrainte-déformation typique pour de l'acier

Plusieurs essais ont montré que la courbe contrainte-déformation monotone la courbe de comportement est définie par trois branches. C'est généralement le cas pour approximativement tous les types d'armatures utilisées dans les éléments en béton armé. Différents modèles sont proposés pour la réponse monotone contrainte-déformation de l'acier. Certains de ces modèles sont brièvement discutés.

a- Modèle du Parc et Paulay

La courbe actuelle contrainte-déformation de l'acier, dans sa forme générale, a été modélisée par (PARKet PAULAY 1975). Les équations sont :

$$\text{Branche AB : } f_s = \epsilon_s E_s \tag{Eq-2.1}$$

$$\text{Branche BC : } f_s = f_y \tag{Eq-2.2}$$

$$\text{Branche CD : } f_s = f_y \left[ \frac{m(\epsilon_s - \epsilon_{sh}) + 2}{60(\epsilon_s - \epsilon_{sh}) + 2} + \frac{(\epsilon_s - \epsilon_{sh})(60 - m)}{2(30r - 1)^2} \right] \tag{Eq-2.3}$$

$$\text{avec : } m = \frac{\left(\frac{f_{sh}}{f_y}\right)(30r - 1)^2 - 60r - 1}{15r^2} \tag{Eq-2.4}$$

$$r = (\epsilon_s - \epsilon_{sh}) \tag{Eq-2.5}$$

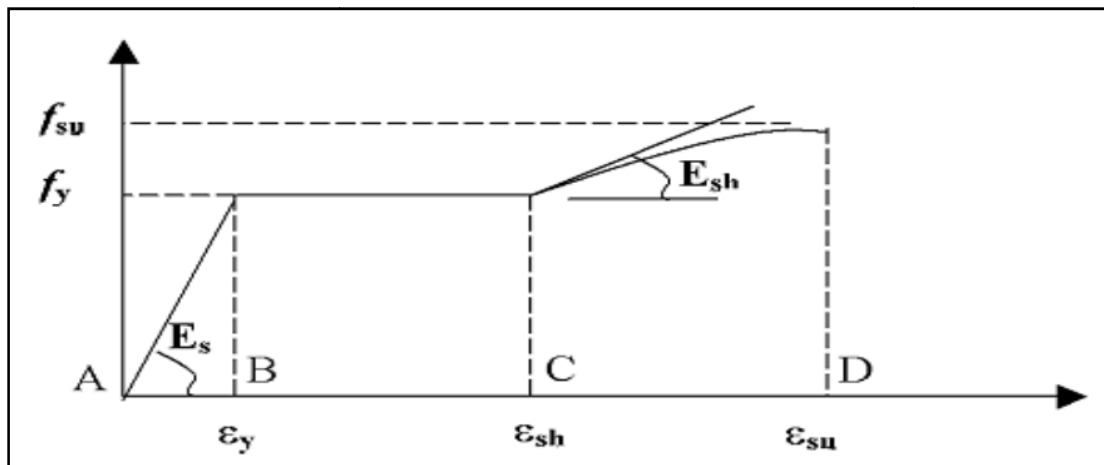
**b- Modèle de Mander**

Le modèle suivant (figure 2.6) est un échantillon du comportement réel de l'acier doux qui donne des résultats proches quand des paramètres adéquats sont utilisés. (MANDER et al 1984) ont constaté que la région déformation-écrouissage ( $\epsilon_{sh} < \epsilon_s < \epsilon_{su}$ ) dans la courbe contrainte-déformation peut être prédite avec une bonne précision par :

$$f_s = (f_{su} - f_y) \left( \frac{\epsilon_{su} - \epsilon_s}{\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}} \right)^P \tag{Eq-2.6}$$

Où  $\epsilon_s$  est la déformation de l'acier ;  $\epsilon_{sh}$  est la déformation de l'acier au début de la déformation d'écrouissage ;  $\epsilon_{su}$  est la déformation de l'acier pour  $f_{su}$  ;  $f_s$  est la contrainte de l'acier ;  $f_{su}$  est la résistance ultime en traction de l'acier ;  $f_y$  est la limite d'élasticité de l'acier ;  $E_{sh}$  est le module d'écrouissage de l'acier ; et :

$$P = E_{sh} \left( \frac{\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}}{f_{su} - f_y} \right) \tag{Eq-2.7}$$



**Figure 2.6:** Courbe contrainte-déformation de l'acier proposée par Mander et al (1984).

**2-2-2- les modèles du béton**

**2-2-2-1- Le modèle de béton simplifié BAEL**

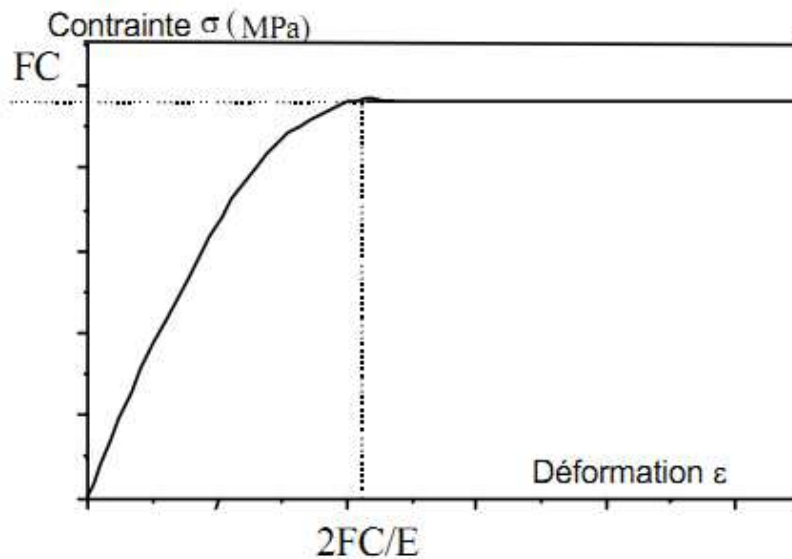
La loi BAEL permet d'effectuer des calculs de vérification réglementaires. Elle reprend la loi parabole - rectangle des règles BAEL (Figure 2.7). En plus du module d'Young, il suffit de spécifier la contrainte maximale en compression (paramètre  $f_c$ ) (COMBRESURE. D, 2001).

En compression, la contrainte est une fonction parabolique de la déformation jusqu'à  $f_c$  (pente nulle au pic) puis est constante (Figure 2.7). La non linéarité ne provient que de la formation de déformation plastique (pas de dégradation de raideur). La déformation plastique vaut donc

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \tag{Eq-2.8}$$

Il faut noter que le plateau peut débuter pour une déformation valant 0.2% si le module d'Young est pris égal à  $E = \frac{f_c}{0.002}$  (Eq-2.9)

En traction, aucune résistance n'est admise i.e.  $\sigma=0$  si  $\varepsilon < \varepsilon_p$  (convention de signe béton armé). La loi reproduit le caractère unilatéral du béton : on retrouve la raideur élastique uniquement si  $\varepsilon > \varepsilon_p$



**Figure 2.7:** Loi de comportement béton simplifié BAEI

**2-2-2-2- Le modèle de béton de Mazars**

Le modèle de béton de Mazars (MAZARS, 1991) a été introduit dans le modèle à fibre dans sa formulation 3D complète (COMBRESURE.D, 1994): il permet le calcul non seulement de la contrainte axiale  $\sigma_{xx}$  mais aussi des contraintes de cisaillement  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{xz}$ . Rappelons que ce modèle est un modèle d'endommagement scalaire :

$$S_{ij} = \frac{E(1-D)}{1+n} \cdot (e_{ij} + \frac{n}{1-2n} \cdot d_{ij} \cdot T_{re}) \tag{Eq-2.10}$$

avec :  $D = a_c^b D_c + a_t^b D_t$  et, si  $\tilde{e} > e_{do}$

$$D_c = 1 - \frac{e_{do}(1-A_c)}{\tilde{e}} - A_c e^{(B_c \cdot (e_{do} - \tilde{e}))}$$

pour la compression.

$$D_t = 1 - \frac{e_{do}(1-A_t)}{\tilde{e}} - A_t e^{(B_t \cdot (e_{do} - \tilde{e}))}$$

pour la traction.

Les paramètres caractérisant le comportement non linéaire sont :

$\varepsilon_{d0}$  : Déformation de traction à partir de laquelle l'endommagement devient non-nul (déformation de début de fissuration généralement des déformations complet.)

$$e_{d0} = \frac{f_t}{E} \quad (\text{Eq-2.11})$$

$A_c$  et  $B_c$  commandent le comportement en compression Ces 2 valeurs doivent vérifier la relation suivante pour assurer la continuité de la dérivée première de la courbe contrainte-déformation dans le cas de la compression simple:

$$B_c = \frac{A_c - 1}{A_c \cdot e_{d0}} \quad (\text{Eq-2.12})$$

On peut exprimer la résistance en compression  $f_c$  et la déformation au pic  $\varepsilon_{fc}$  en fonction des 3 paramètres précédents et des caractéristiques élastiques  $E$  et  $\nu$ :

$$f_c = E \left| -\frac{(1-A_c)^2}{A_c} + A_c e^{\left| -\frac{1}{A_c} \right|} \right| \frac{e_{d0}}{\sqrt{2} \cdot n} \quad (\text{Eq-2.13})$$

$$e_{fc} = \frac{1}{B_c \sqrt{2} \cdot n} = \frac{A_c \cdot e_{d0}}{(1-A_c) \sqrt{2} \cdot n} \quad (\text{Eq-2.14})$$

$A_t$  et  $B_t$  commandent le comportement en traction :  $A_t$  contrôle l'asymptote horizontale ( $A_t=0$  signifie que le comportement est adoucissant jusqu'à une contrainte nulle) et  $B_t$  détermine la vitesse de l'adoucissement.

$\beta$  caractérise le comportement en cisaillement (on le prend généralement égal à 1.06).

On définit la déformation équivalente à partir des déformations principales positives :

$$\tilde{e} = \sqrt{\sum_i \langle e_i \rangle^2}$$

Le fait que ce modèle soit un modèle d'endommagement scalaire permet de déduire les déformations  $\gamma_{yz}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{zz}$  d'après les autres déformations si on adopte l'hypothèse classique pour les poutres :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{yz} = 0 \quad (\text{Eq-2.15})$$

$$\gamma_{yz} = 0 ; \varepsilon_{yy} = -\nu \cdot \varepsilon_{xx} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = -\nu \cdot \varepsilon_{xx} \quad (\text{Eq-2.16})$$

Les calculs de la variable d'endommagement et des contraintes sont effectués avec le tenseur

$$S_{xx} = E \cdot (1 - D) \cdot e_{xx} \quad (\text{Eq-2.17})$$

$$t_{xy} = \frac{E \cdot (1 - D)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot g_{xy} \quad (\text{Eq-2.18})$$

$$t_{xz} = \frac{E.(1-D)}{2.(1+n)} \cdot g_{xz} \quad (\text{Eq-2.19})$$

Cette formulation du modèle de Mazars permet d'avoir un comportement non linéaire en cisaillement sur les éléments de poutre de Timoshenko. Le principal effet est de tenir compte de l'inclinaison des directions principales du tenseur des contraintes (qui restent identiques à celles du tenseur des déformations pour ce modèle) par rapport à l'axe de la poutre. Cela permet d'« assouplir » le comportement à l'effort tranchant.

### 2-2-2-3- Béton confinée

#### a- Définition

C'est un volume de béton pourvu d'armatures transversales disposées de façon à s'opposer au gonflement du matériau sous l'effet des contraintes de compression ainsi qu'au

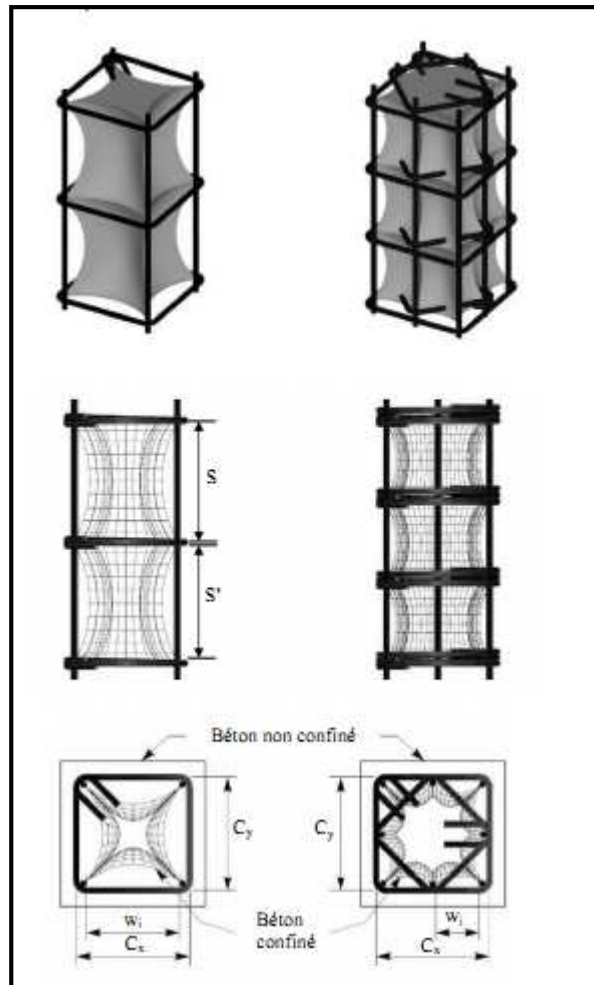
flambement des armatures longitudinales en zone comprimée, ce qui impose une entre distance (s) limitée (Figure 2.8).

L'armature de confinement est soumise à une pression latérale perpendiculaire à la surface, qui la met en traction. La déformation à la rupture du béton confiné peut être estimée en fonction de l'armature transversale et sont imposées dans les zones dissipatives ou critiques.

#### b- Effet du confinement du béton sur la ductilité des structures en B.A

La prise en compte de la contribution des armatures transversales (Figure 2.8) (confinement interne) améliore la résistance du béton à la compression. Ces armatures doivent être disposées de façon adéquate dans les éléments en béton armé (poteaux - poutres) pour permettre à la structure d'avoir un comportement ductile sous les sollicitations qui lui sont appliquées (efforts sismique...). En effet, l'augmentation de la résistance du béton à la compression par des armatures transversales exerce un effet positif qui peut se traduire par la capacité de résister à des déformations ou déplacements importants que la structure peut subir.

Les effets du béton confiné sur la ductilité des structures en béton armé seront quantifiés au niveau de la section puis au niveau de la structure entière.



**Figure 2.8:** Représentation de la formation d'arches dans le béton confiné

### c- Comportement du béton confiné en élasticité non linéaire

La plupart des recherches sur le confinement du béton se (PAULTRE. P et LEGERON.F 2008) sont inspirées du modèle de RICHART et al (1928) qui a été développé pour des cylindres soumis à une pression hydraulique, c'est-à-dire triaxiale. RICHART et al. Ont remarqué que la résistance en compression du béton confiné  $f_{cc}$  augmentait en fonction de la pression appliquée. Pour ce, ils ont proposé le modèle suivant :

Où  $f_{co}$  est la résistance du béton non confiné et  $f_l$  est la pression de confinement.

Ce modèle permet d'évaluer la contrainte maximale et la déformation du béton confiné.

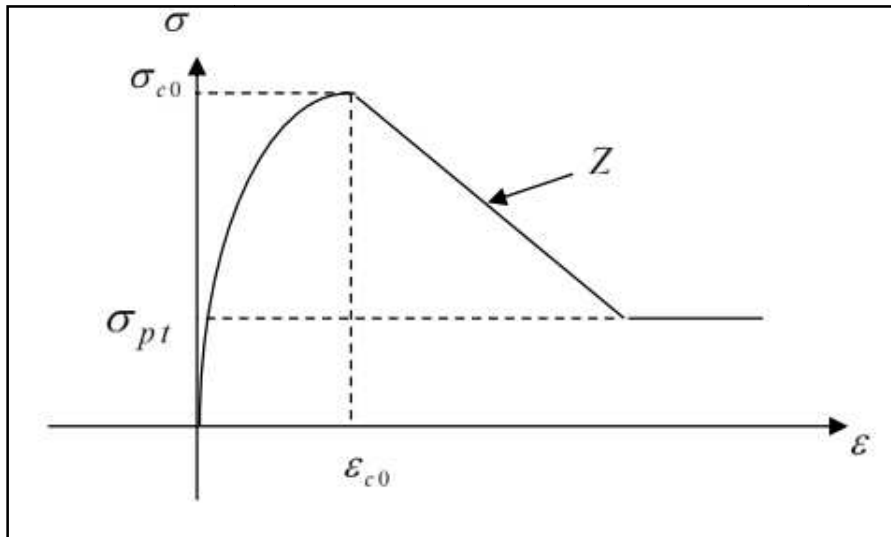
Par la suite, plusieurs autres chercheurs se sont intéressés à ce sujet.

Dans ce qui suit, un résumé sur quelques modèles analytiques ont été établit que ce soit pour les sections rectangulaires ou circulaires.

**C-1- Modèle d'Hognestad (1951)**

La loi de comportement du béton reprend le modèle d'Hognestad (1951) permet de reproduire l'adoucissement après fissuration, le comportement unilatéral du béton (refermeture des fissures) ainsi que l'adoucissement après avoir atteint la résistance en compression et la prise en compte du confinement sur cet adoucissement et la résistance en compression

(Figure 2.9).



**Figure 2.9:** Loi de comportement du béton confiné Hognestad (1951)

**c-1-1- Comportement en compression**

Sous chargement monotone, la loi est du type parabole puis linéaire avec adoucissement. Un plateau avec une contrainte résiduelle non nulle peut-être défini après l'adoucissement. En utilisant les conventions (déformation positive en compression) :

$$\frac{\sigma}{\sigma_{c0}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \cdot \left( 2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_{c0} \quad \text{(Eq-2.20)}$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_{c0}} = 1 - Z \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{c0}) \quad \varepsilon_{c0} < \varepsilon \quad \text{(Eq-2.21)}$$

- $\varepsilon_{c0} = 2 \cdot \frac{\sigma_{c0}}{E}$  et de plus il faut prendre la contrainte résiduelle.
- $\sigma_{pt=20\%}$  de la contrainte maximale.
- $\varepsilon_{c0}, \sigma_{c0}$  : sont les coordonnées du pic de la courbe de compression.
- Z : pente après le pic.
- $\sigma_{c0}$  : contrainte résiduelle.

**La prise en compte du confinement en compression**

La ductilité d'une section en béton armé et donc le comportement sismique de la structure dépendent fortement du confinement du béton et le paramètre  $Z$  qui est directement fonction du confinement apporté par les cadres.

- Si  $Z < 0$  : la valeur de  $Z$  est calculée à partir des coefficients  $\alpha$  et  $\omega_w$ . De plus, dans ce cas, la contrainte et la déformation au pic corrigées d'un facteur  $\beta$  :

$$\sigma'_{c0} = \beta \cdot \sigma_{c0} \quad \varepsilon'_{c0} = \beta^2 \cdot \varepsilon_{c0} \tag{Eq-2.22}$$

avec : 
$$\beta = \min(1 + 2,5 \cdot \alpha \cdot \omega_w; 1,125 + 1,25\alpha \cdot \omega_w) \tag{Eq-2.23}$$

Donc : 
$$Z = \frac{\beta - 0,85}{\beta(0,1\alpha \cdot \beta + 0,0035 + \varepsilon_{c0})} \tag{Eq-2.24}$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\omega_w$  sont déterminées à l'aide des formules suivantes :

$$\alpha = \left(1 - \frac{8}{3n}\right) \left(1 - \frac{s}{2 \cdot b_c}\right) \left(1 - \frac{s}{2 \cdot h_c}\right) \tag{Eq-2.25}$$

$$\beta = \left(\frac{A_{cadre} \cdot f_{yt}}{b_c \cdot h_c \cdot f_{cu}}\right) \Sigma \left(\frac{l_w}{s}\right) \tag{Eq-2.26}$$

avec :

- $n$  : Nombre de barres de flexion.
- $b_c$  et  $h_c$  : Dimension de la surface de béton confiné par les cadres.
- $s$  : Espacement des cadres.
- $A_{cadre}$  : Section d'un cadre.
- $l_w$  : Longueur totale des cadres.
- $f_{cu}$  : Contrainte ultime pour le béton.
- $f_{yt}$  : Contrainte de plastification des cadres

- Si  $Z > 0$  : Les coefficients  $\alpha$  et  $\omega_w$  sont ignorés, et la valeur de  $Z$  peut être déterminée à l'aide des formules précédentes.

### c-1-2- Comportement en traction

Le béton possède une résistance en traction mais est fragile après fissuration (Hognestad 1951).

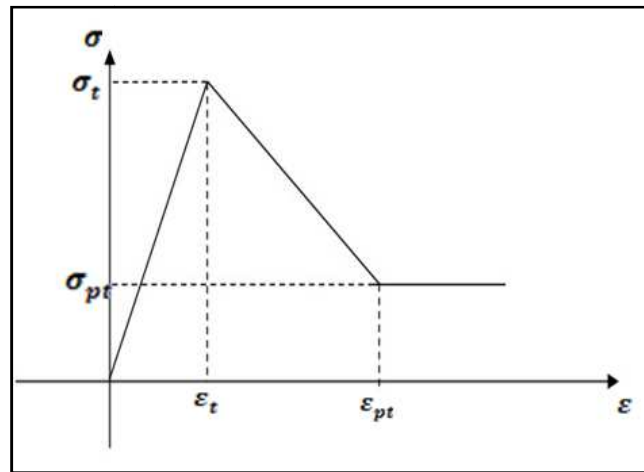
La loi est linéaire par morceau en traction (Figure 2.10):

- jusqu'au pic, le comportement est linéaire, la résistance en traction est notée  $\sigma_t$ .

L'adoucissement est linéaire la déformation ultime est proportionnelle à la déformation au pic, le facteur de proportionnalité étant noté  $\sigma_{pt}$ .

- un plateau résiduel a été introduit, la résistance résiduelle est notée ( $\sigma_{pt}$ ).

L'avantage de ce type de modèle, réside dans la prise en compte implicite de l'effet de l'effort normal sur le moment fléchissant résistant maximal ainsi que sur la ductilité de la section.



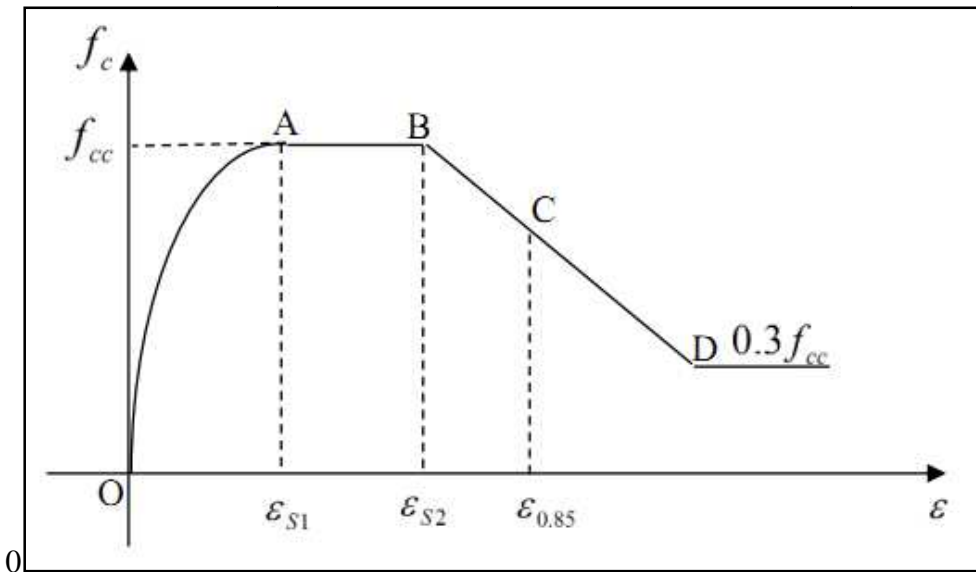
**Figure 2.10:** Comportement en traction du béton Hognestad (1951)

### c-2- Modèle de Sheikh et Uzumeri(1982)

Sheikh et Uzumeri publient une explication rationnelle concernant l'effet de confinement du béton (Figure 2.11). La détermination de la résistance du béton confiné se définit comme une fonction de:

- La valeur de la résistance au centre du béton.
- Volume total d'acier.
- L'espacement des étriers.
- La limite élastique des étriers.
- La configuration des étriers.

- L'effet des dimensions de la section.



**Figure 2.11:** Courbe contrainte déformation du béton confiné, Sheikh et Uzumeri (1982)

La résistance à la compression maximale du béton confiné  $f_{cc}$  est donnée par la formule suivante :

$$f_{cc} = 0,85f'_s \left( 1 + \frac{A_e \beta \sqrt{\rho_s f'_s}}{P_{occ}} \right) \quad (\text{Eq-2.27})$$

$A_e$  : surface du béton confiné.

$f'_c$  : contrainte du béton non renforcé.

$f'_s$  : limite élastique de l'acier.

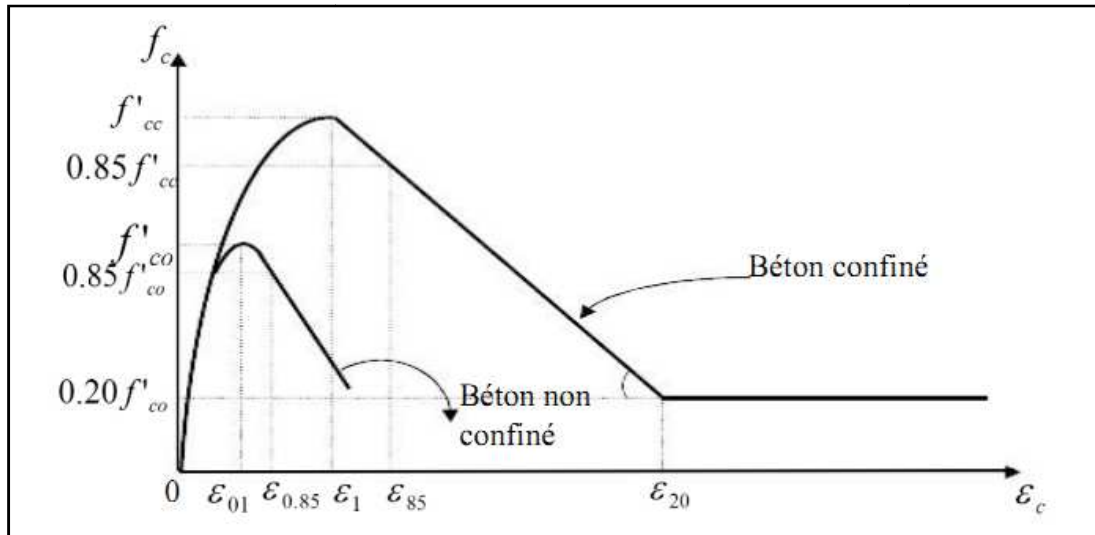
$\rho_s$  : rapport entre le volume latéral de renforcement et le volume du béton confiné.

$\beta$  constante.

$\rho_{acc} = 0,85f'_c (c_x \cdot c_y - A_s)$ , avec  $C_x$  : distance d'axe à axe des étriers extérieurs dans une direction et  $C_y$  : distance d'axe à axe des étriers extérieurs.

**c-3- Modèle de Saatcioglu et Razvi (1992)**

La courbe contrainte déformation est délimitée par trois régions selon la valeur de la déformation où il a été aussi tenu compte du confinement (Figure 2.12).



**Figure 2.12:** Courbe contrainte-déformation du béton confiné et non confiné, Saatcioglu et Razvi (1992)

$$\sigma_{cc} = f_{cc} [2x - (x)^2]^{\frac{1}{(1+2K)}} \tag{Eq-2.28}$$

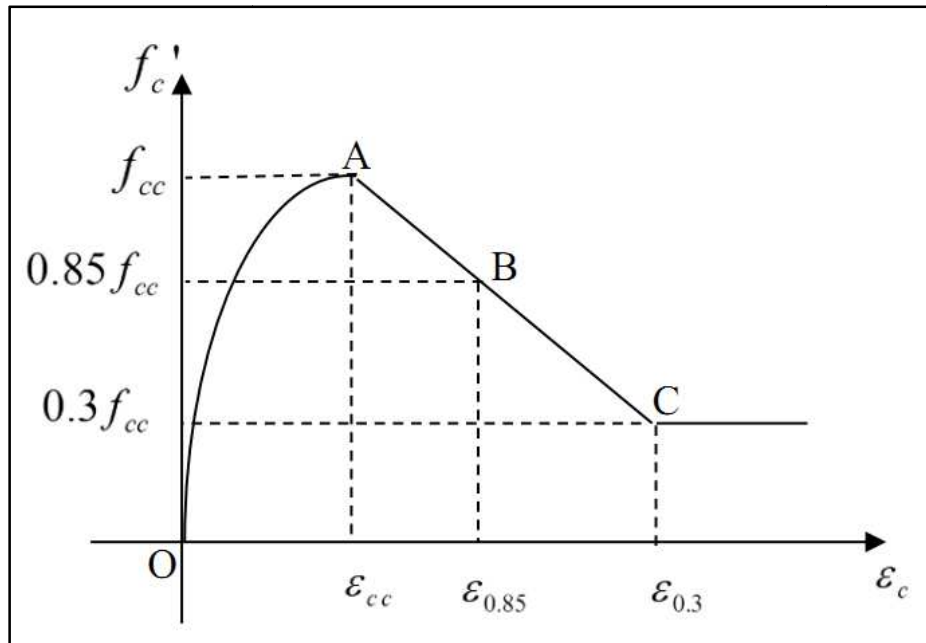
$$\sigma_{cc} = f_{cc} - Z(\epsilon_c - \epsilon_{cc}) \geq 0.2f_{cc} \tag{Eq-2.29}$$

$$Z = \frac{0.15 \times f_{cc}}{\epsilon_{85} - \epsilon_{cc0}} \tag{Eq-2.30}$$

- $\sigma_{cc}$  : Contrainte du béton confiné
- $f_{cc}$  : Résistance limite du béton confiné
- $K$  : Coefficient de confinement effectif
- $\epsilon_{cc0}$  : Déformation correspondante à la contrainte du béton confiné
- $\epsilon_{85}$  : Déformation correspondante à 85% de  $f_{cc}$

**c-4- Modèle H.-S. Chung et al (2002)**

La courbe contrainte-déformation du béton confiné peut être prédite par les trois coordonnées, A, B et C comme montré par la Figure (2.13). La coordonnée A correspond au pic contrainte / déformation ( $f_{cc}, \epsilon_{cc}$ ), B la contrainte / déformation ( $0.85f_{cc}, \epsilon_{0.85}$ ), et C la contrainte / déformation ( $0.3f_{cc}, \epsilon_{0.3}$ ). Le C coordonner localise à la ligne d'extension pour connecter les coordonnées A et B.



**Figure 2.13:** Courbe contrainte déformation du béton confiné

D'après les résultats et les équations empiriques présentées par Popovics (1973), la relation contrainte-déformation dans la région ascendante OA peut être calculée comme suit :

$$f_c = f_{cc} \left[ \frac{\left(\frac{\gamma \epsilon_c}{\epsilon_{cc}}\right)}{\gamma - 1 + \left(\frac{\gamma \epsilon_c}{\epsilon_{cc}}\right)^\gamma} \right] \quad \epsilon_c \leq \epsilon_{cc} \quad \text{(Eq-2.31)}$$

où  $\gamma$  est la pente initiale de la courbe ascendante OA.

$$\gamma = \frac{E_c}{E_c - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cc}}} \quad ; \quad E_c = \frac{f'_c}{\epsilon_B} \quad \text{(Eq-2.32)}$$

La relation contrainte-déformation de la partie descendante AC peut être déterminée par la relation suivante  $f_c = -D\epsilon_c + f_{cc} + D\epsilon_{cc} \quad \epsilon_{cc} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{0.3}$  (Eq-2.33)

$$D = \frac{0.15f_{cc}}{\epsilon_{0.85} - \epsilon_{cc}} \quad \text{(Eq-2.34)}$$

Où D est la pente de la courbe descendante, et définie comme suite :

Après que la contrainte  $f_c$  atteint la contrainte  $0.3f_c$ , la contrainte du béton confiné est restée constante  $0.3f_c$  quel que soit le croissant de la déformation.

**c-5- Modèle de B. Bousalem et N. Chikh (2007)**

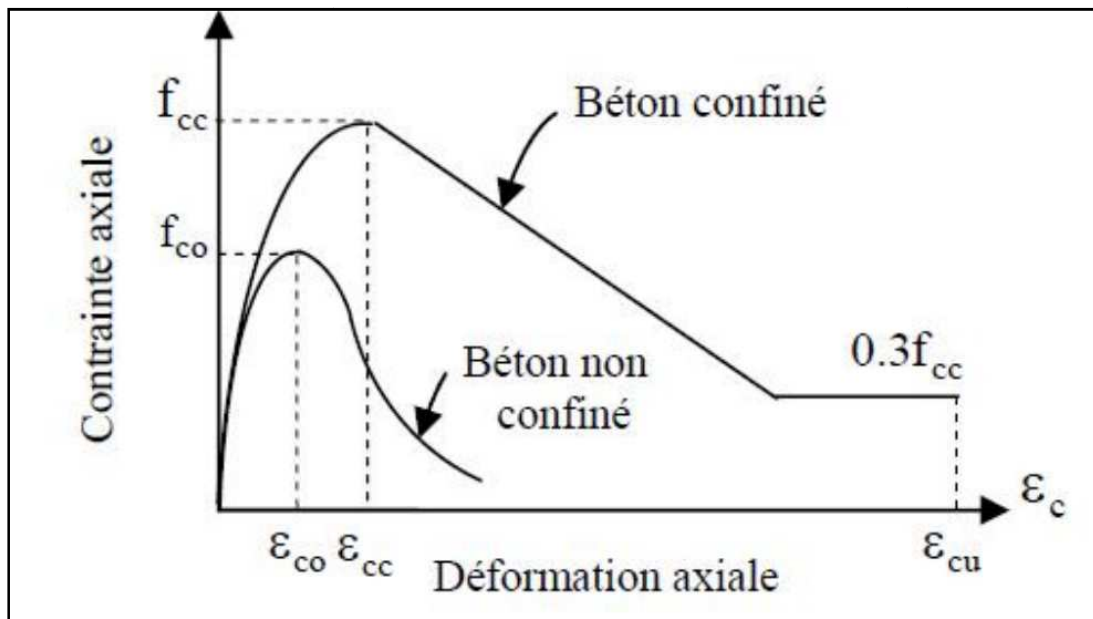
L'évidence expérimentale montre que la courbe contrainte-déformation du béton confiné est composée de trois régions: la branche ascendante, la branche descendante et la branche maintenue. La courbe typique contrainte déformation utilisée pour le modèle proposé est schématiquement représentée dans la Figure (2.14).

La formulation de la partie ascendante de la courbe est basée sur l'équation de Popovics (1973) adoptée également par Mander et al. (1988) et dont la relation est exprimée par :

$$f_c = \frac{f_{cc} x^n}{n-1+x^n} \tag{Eq-2.35}$$

Où  $x = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cc}}$  et  $n = \frac{E_c \epsilon_{cc}}{E_c \epsilon_{cc} - f_{cc}}$  (Eq-2.36)

Avec  $E_c = 11000 \sqrt[3]{f_{c0}}$



**Figure 2.14:** Courbe contrainte – déformation du béton confiné.

L'examen des coordonnées des points sur la ligne tombante montre que l'équation de la partie descendante de la figure (2.14) peut s'écrire :

$$f_c = f_{cc} - E_s(\epsilon_c - \epsilon_{cc0}) \geq 0.3f_{cc} \tag{Eq-2.37}$$

$$E_s = \frac{4 \times f_{c0}^2}{k_e \times \rho_s \times f_{yh}}$$

Où  $E_S$  est la valeur contrôlant la pente de la partie descendante.

Les essais de Sheikh et al. (1982), Park et al. (1982), Saatcioglu et al. (1992) ont montré que la contrainte résiduelle poursuivant la branche descendante est de l'ordre de 20 à 30 % de la résistance pic,. Dans le modèle proposé, la contrainte résiduelle est supposée égale à 30 % de la contrainte pic.

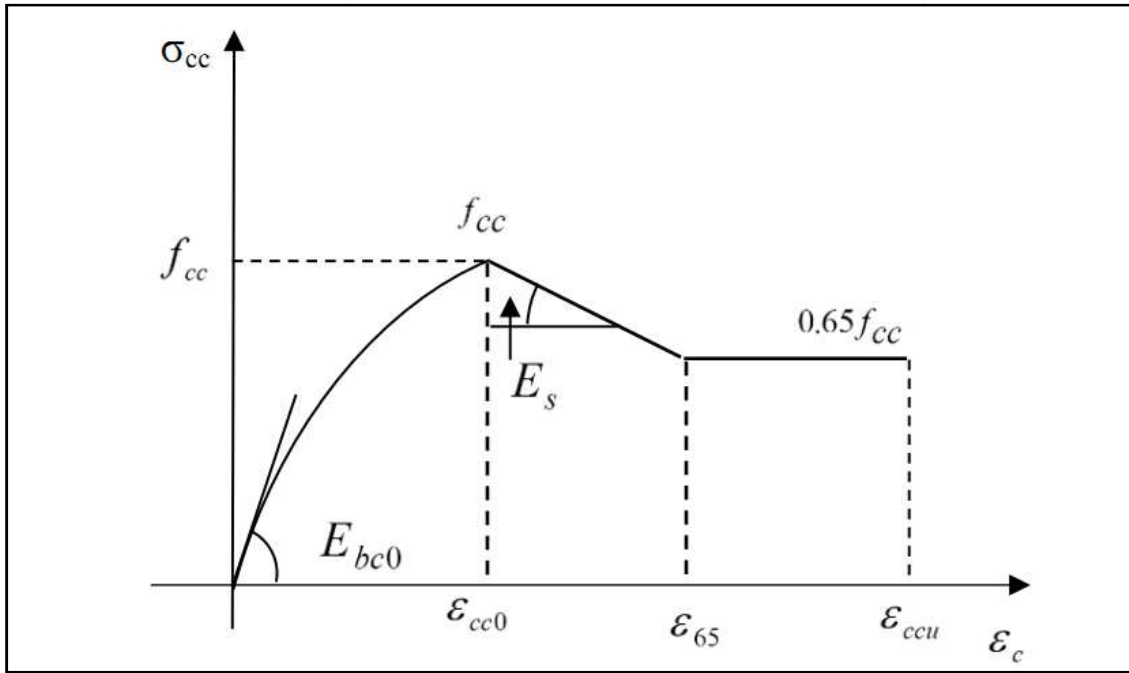
avec :

- $f_c$  : Contrainte du béton non confiné.
- $f_{cc}$  : Contrainte du béton confiné.
- $E_S$  : Module correspondant à la branche descendante du béton confiné.
- $k_e$  : Coefficient de confinement effectif.
- $f_{yh}$  : Contrainte limite des aciers transversaux.
- $\rho_s$  : Rapport entre le volume des armatures de confinement transversales et le volume du béton confiné.
- $f_{c0}$  : Contrainte du béton non confiné à l'âge  $j$ .
- $\epsilon_{cc0}$  : Déformation au pic, correspondante à la contrainte du béton confiné.
- $\epsilon_c$  : Déformation du béton confiné.

### c-6-Modèle de Bouafia et al(2010).

Plusieurs modèles théoriques pour prédire le comportement contrainte -déformation du béton confiné ont été proposés. Nous adoptons ici le modèle proposé par Bouafia et al(2010), dont la courbe contrainte-déformation du béton confiné est composée de trois régions : la branche ascendante, la branche descendante et la branche maintenu

La courbe définissant la relation contrainte-déformation du béton confiné utilisé pour le modèle proposé par Bouafia et al. (2010), est représentée dans la (Figure 2.15).



**Figure 2.15:** Diagramme contrainte – déformation du béton confiné, Bouafia et al. (2010).

La première partie est une courbe ascendante non linéaire, la loi de Sargin a été modifiée pour tenir compte du confinement :

$$0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{cc} :$$

$$\sigma_{cc} = f_{cc} \times \frac{k_c \times \bar{\varepsilon}_c (k'_c) \times \bar{\varepsilon}_c^2}{1 + (k_c - 2) \times \bar{\varepsilon}_c \times \bar{\varepsilon}_c^2} \quad (\text{Eq-2.38})$$

$f_{cc}$ : résistance à la compression maximale du béton confiné définie précédemment, elle est donnée par :

$$f_{cc} = f_{c0} \left( -1,254 + 2,254 \sqrt{1 + \frac{7,94 f'_l}{f_{c0}}} - \frac{2 f'_l}{f_{c0}} \right) \quad (\text{Eq-2.39})$$

$f'_l$  : pression latérale du renforcement transversale supposer uniformément distribuée sur la surface du béton. V

$$\text{avec : } \bar{\varepsilon}_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} ; \varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0} \times \left[ 1 + 5 \left( \frac{f_{cc}}{f_c} - 1 \right) \right] \quad (\text{Eq-2.40})$$

$$k_c = \frac{E_{bc0} \times \varepsilon_{cc}}{f_{cc}} ; k'_c = k_c - 1$$

La deuxième partie est descendante linéaire après le pic (poste pic), la relation est décrite par :

$$*\varepsilon_{cc} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{65}$$

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - E_s(\varepsilon_c - \varepsilon_{cc}) \quad (\text{Eq-2.41})$$

$$\text{avec: } E_s = \frac{6 \times f_{co}^2}{E_s \times \rho_s \times f_{yh}} \quad ; \quad \varepsilon_{65} = \frac{0.35 \times f_{cc}}{E_s} + \varepsilon_{cc} \quad (\text{Eq-2.42})$$

Et la troisième partie représente un palier de ductilité, la relation contrainte –déformation est donnée par :

$$*\varepsilon_{65} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ccu} : \quad \sigma_{cc} = 0.65 f_{cc} \quad (\text{Eq-2.43})$$

Dans ce palier linéaire de ductilité, l'acier participe jusqu'à sa plastification puis se rompt autour de 40% en terme de déformation, la relation qui a été proposé est décrite par :

$$\varepsilon_{ccu} = \varepsilon_{cu} + 0,40. \frac{f_1}{f_{co}} = 0.0035 + 0.4. \frac{f_1}{f_{co}} \quad (\text{Eq-2.44})$$

3- Travaux antérieurs

Exemple d'une poutre en porte à faux ( Enrico Spacone and Filip C, 1991)

Exemple 1

Représente les résultats obtenus par la simulation d'une poutre en porte à faux par le code de calcul d'éléments finis BEAMCOL réalisé par Kaba et Mahin qui ont été comparés à des résultats des essais expérimentaux testé par kent(1969).

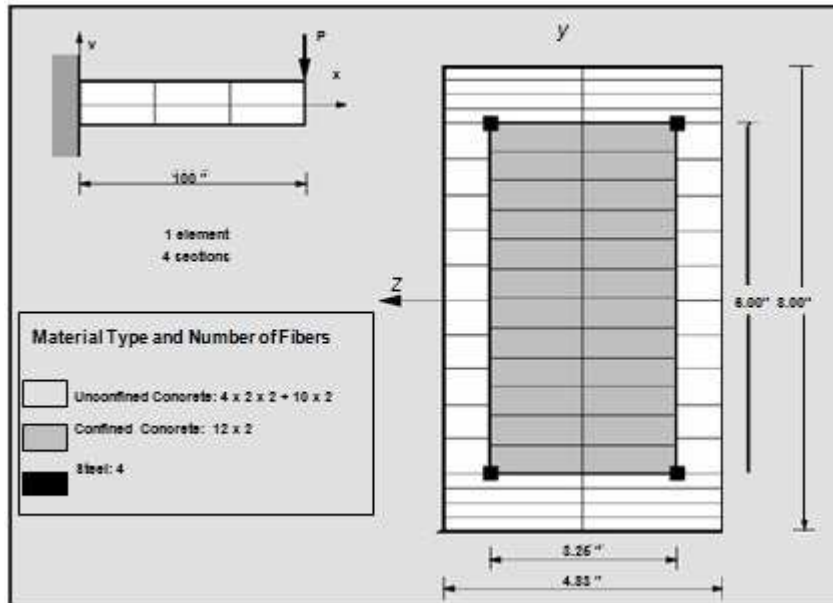


Figure 2.16: Discretisation de la poutre de Kent#24

Tableau 2.1 Discretisation de la poutre de Kent#24

Kent Beam #24				
number of beam-column elements = 1				
Length of Element = 100 in.		Number of Sections = 4		
Number of fibers				
Section type	Unconfined Concrete	Confined Concrete	Steel	Total
I	18x2	12x2	4	64

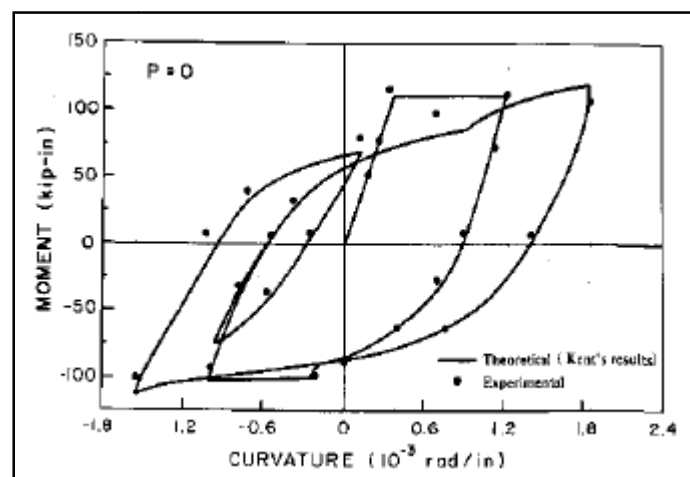
**Tableau 2.2 Propriétés du béton**

Concrete Properties				
Concrete type	$E_c$ [ksi]	$f'_c$ [ksi]	$\epsilon_0$	$\epsilon_u$
Unconfined (I)	3805	-8.95	-0.0027	-0.00292
Confined (I)	3805	-8.95	-0.0027	-0.03810

**Tableau 2.3 Propriétés de l'acier**

Steel Properties			
Steel type	$E_s$ [ksi]	$f_y$ [ksi]	Strain hard. ratio
Steel type I (I)	29,000	48.4	0.0042

Les résultats



**Figure 2.17:** Moment courbure présenté par KABA et MAHIN

Les résultats théorique et expérimentale en une bonne concordance.

Exemple2

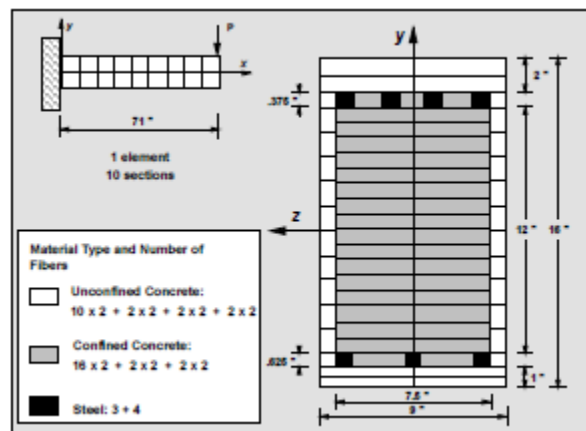


Figure 2.18: Discretisation de la poutre R-1

Tableau 2.4 Discretisation de la poutre R-1

Cantilever Beam R-1				
Number of beam-column elements: 1				
Length of Element = 71 in.		Number of Sections = 10		
Number of fibers				
Section type	Unconfined Concrete	Confined Concrete	Steel	Total
I	16x2	20x2	7	79

Tableau 2.5 Propriétés du béton

Concrete Properties				
Concrete type	$E_c$ [ksi]	$f'_c$ [ksi]	$\epsilon_0$	$\epsilon_u$
Unconfined	3980	-5.07	-0.00200	-0.003
Confined	3980	-5.43	-0.00214	-0.069

Tableau 2.6 Propriétés de l'acier

Steel Properties			
Steel type	$E_s$ [ksi]	$f_y$ [ksi]	Strain hard. ratio
Steel type 1	29,000	66.5	0.0085

Résultats

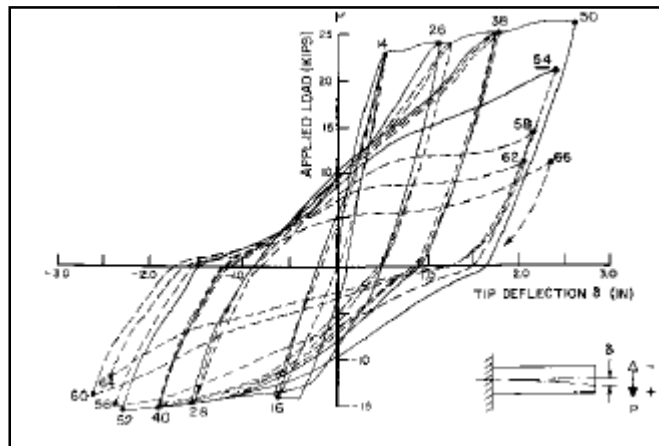


Figure 2.19: Charge déplacement de la poutre R-1

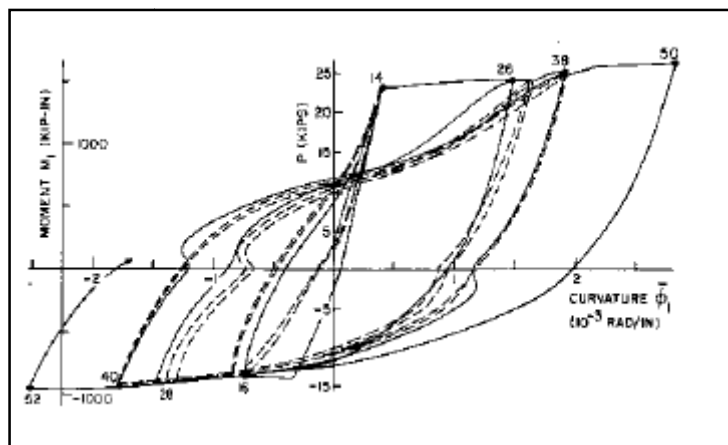


Figure 2.20: Moment courbure de la poutre R-1

Les résultats théorique et expérimentales en une bonne concordance en termes force déplacement ou bien moment courbure.

Exemple 3

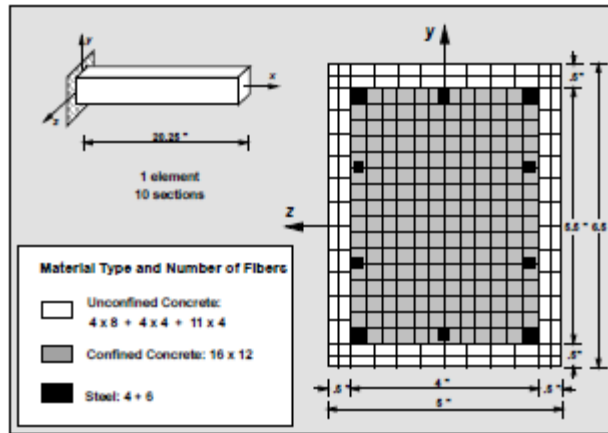


Figure 2.21: Structure du maillage pour la poutre 1 et 2

Tableau 2.7 Propriétés du béton

Concrete Properties				
Concrete type	$E_c$ [ksi]	$f'_c$ [ksi]	$\epsilon_0$	$\epsilon_u$
Unconfined (Sections I and II)	3700	-5.30	-0.00200	-0.0119
High Confinement (Section I)	3700	-6.53	-0.00246	-0.3710
Medium Confinement (Section II)	3700	-6.11	-0.00231	-0.2330

Tableau 2.8 Propriétés de l'acier

Steel Properties			
Steel type	$E_s$ [ksi]	$f_y$ [ksi]	Strain hardening ratio
Steel type 1	29,000	64.9	0.0067
Steel type 2	29,000	64.4	0.0038
Steel type 3	29,000	73.1	0.0050

Résultats

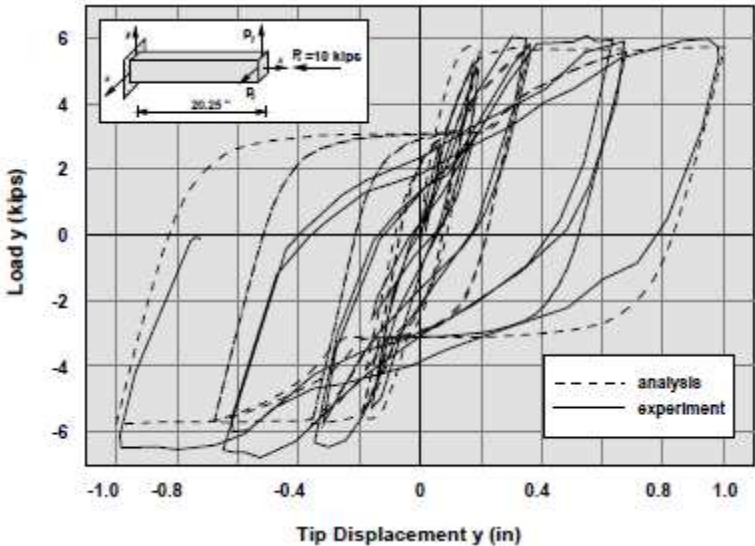


Figure 2.22: Courbe charge déplacement dans la direction Z

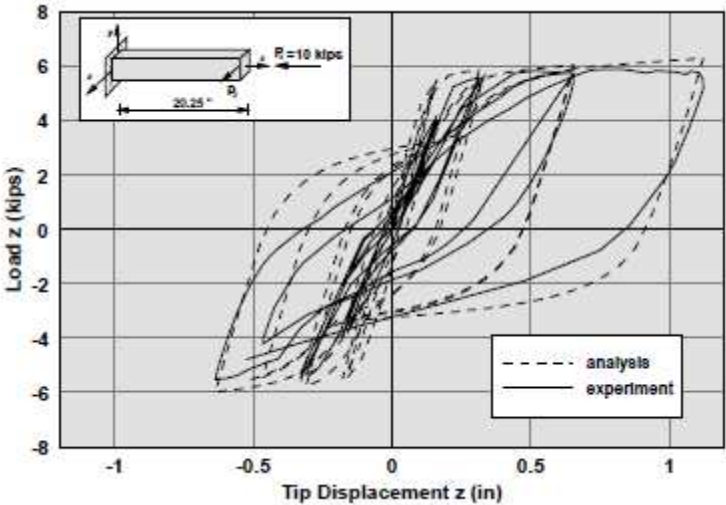


Figure 2.23: Courbe charge déplacement dans la direction Y

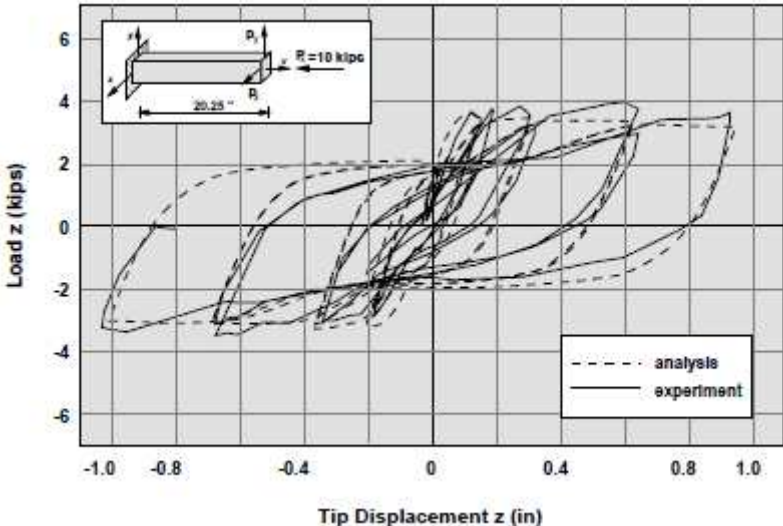


Figure 2.24: Courbe charge déplacement dans la direction Z

Dans cette exemple ils sont varié les directions de l'application de la charge latérale mais dans tous les cas résultats théorique et l'expérimentale en une bonne concordance.

## Sommaire

1- Présentation de CAS3M.....	56
1-1- introduction .....	56
1-2- Langage de Cast3M .....	56
Définition du Gibiane .....	56
1-3- Système d'unités .....	56
2- Procédure de résolution d'un problème avec CASTEM.....	57
3- Présentation de modèle étudié .....	58
3-1- partie 1 .....	58
3-1-1- la géométrie de la poutre 1 .....	58
3-1-2- Le maillage.....	59
3-1-3- Caractéristique des matériaux de la poutre .....	60
3-1-4- Les modèles de comportement utilisé.....	60
3-1-5- Chargement et conditions aux limites .....	61
3-2- Partie 2 .....	61
3-2-1- la géométrie et les caractéristique de la poutre 2 .....	61
a- Exemple étudié .....	61
b- Simulation .....	62
3-2-2- Le maillage.....	63
3-2-3- Caractéristique des matériaux de la poutre .....	63
3-2-4- chargement .....	64
3-2-5- les modèle de comportement utilisée dans notre modèle.....	64

## 1- Présentation de CAS3M

### 1-1- introduction

Cast3M est un logiciel de calcul de structures par la méthode des éléments finis et plus généralement de résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis. La principale particularité de Cast3M, est d'être extrêmement adaptable aux multiples applications propres à chaque utilisateur (J.S.FLEURET, 1996).

Cast3M est développé depuis les années 80 par le Département Mécanique et Technologie (DMT) du Commissariat français à l'Énergie atomique et aux énergies alternatives (CEA) . Originellement désigné CASTEM2000, dans sa version actuelle ce logiciel est appelé Cast3M. De nouvelles versions sont proposées annuellement au téléchargement, garantissant la compatibilité avec la plupart des systèmes d'exploitation (J.S.FLEURET, 1996).

### 1-2- Langage de Cast3M

Cast3M utilise le langage Gibiane pour décrire les données et les opérations. Cast3M, contrairement à la plupart des codes éléments finis, est rédigé entièrement en Français. Cast3M est à la fois un programme de maillage, un programme de calcul et un programme de visualisation des résultats. (COMBRESURE.D ,2001).

### Définition du Gibiane

Gibiane est le langage qui permet de communiquer avec le programme. La syntaxe est basée sur l'utilisation de directives, d'opérateurs et de procédures qui s'appliquent à des opérandes COMBRESURE.D ,2001).

### 1-3- Système d'unités

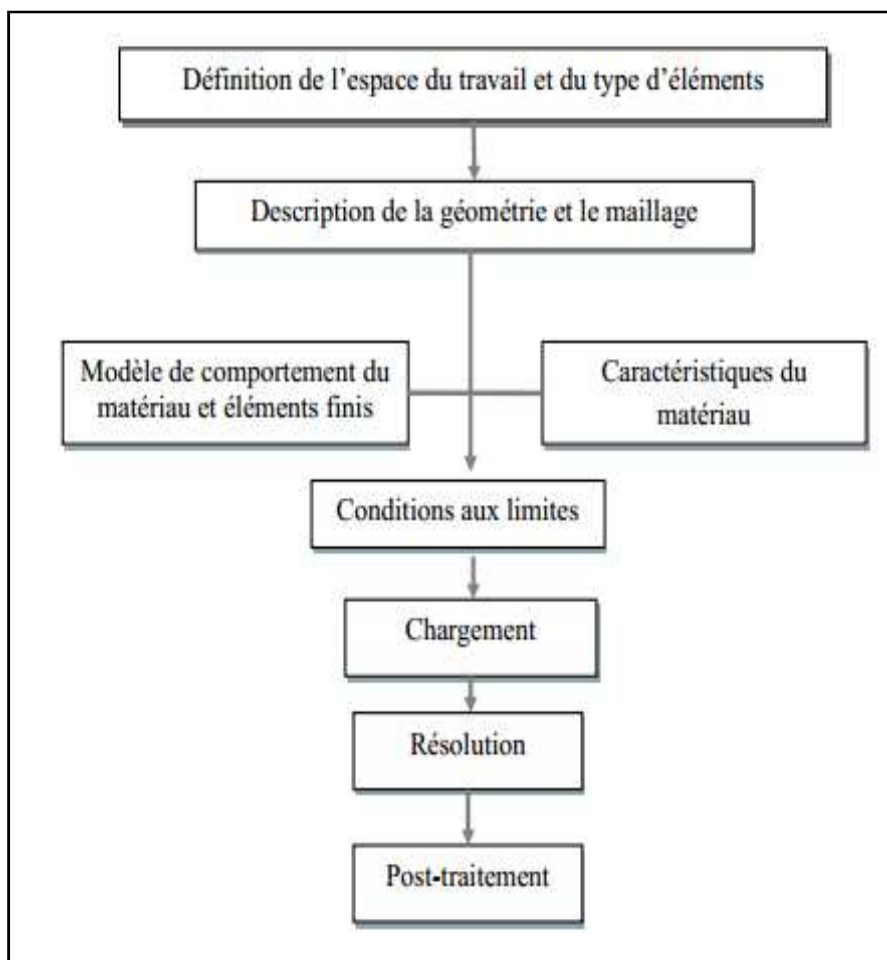
Cast3M ne dispose d'aucun système particulier d'unité de mesure. C'est à l'utilisateur de fournir les données dans un système cohérent. Une fois que les unités de mesure utilisées dont les données sont définies, tous les résultats seront exprimés dans ces mêmes unités. Le tableau suivant regroupe quelques exemples de systèmes d'unités de mesure cohérents (MULTONN Stéphane, 2007-2008).

**Tableau3.1:** Système d'unité

Longueur	Force	Contrainte
M	N	Pa
M	MN	MPa
Mm	N	MPa

**2- Procédure de résolution d'un problème avec CASTEM**

Tout problème (mécanique, thermique, chimique, ...) résolu avec CASTEM doit être construit de la manière suivante (MULTONN Stéphane, 2007-2008) :



**Figure 3.1:** Horganigramme de résolution d'un problème avec CASTEM

**3- Présentation de modèle étudié**

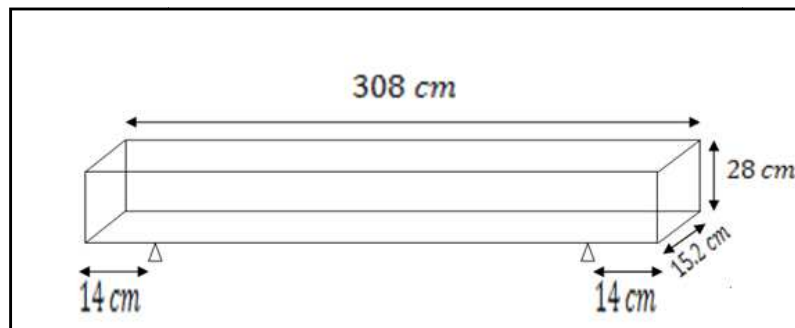
Notre étude contient deux parties, dans la première on a utilisé un déplacement imposé par contre dans la deuxième on a utilisé un chargement cyclique.

**3-1- partie 1**

On a choisi pour notre étude une poutre (1) testé par MATTOCK en 1964.

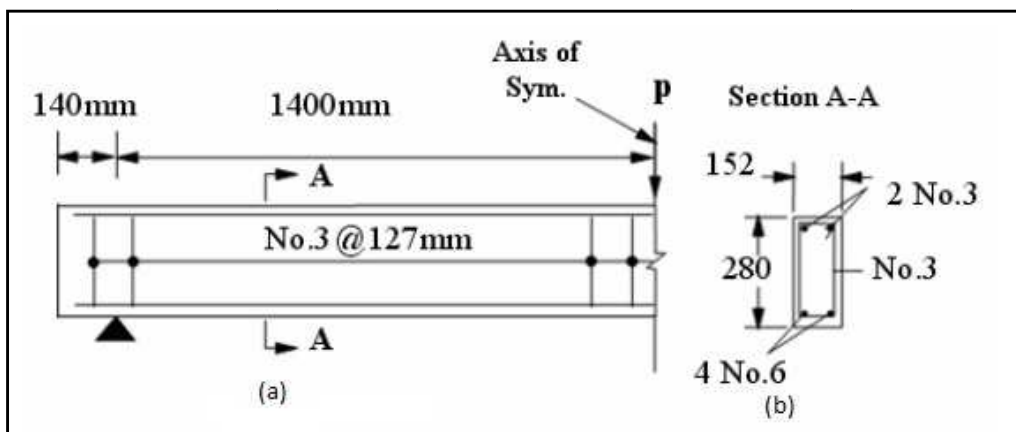
**3-1-1- la géométrie de la poutre 1**

On a une poutre de dimension 15.2x28x308cm. Cette dernière est appuyée à 14cm de ces deux extrémités comme illustrée dans la Figure 3.2.



**Figure 3.2:** La géométrie de la poutre 1

Pour le ferrailage de la poutre on a une dissymétrie pour la section transversale (Figure 3.3-b) et les détaille de ferrailage sont illustré dans la Figure 33-a.



**Figure 3.3:** Ferrailage de la poutre 1

Les détails pour l'enrobage et le béton confinée et non confinée sont illustré dans la Figure 3.4

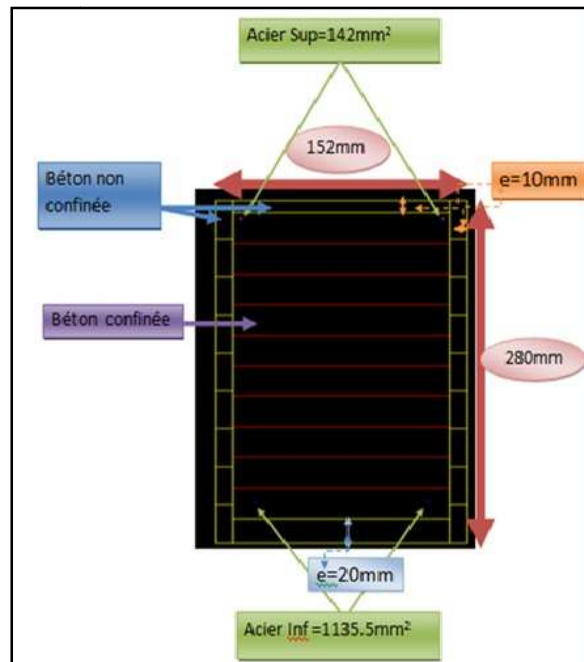


Figure 3.4: Section transversale du modèle à fibre de la poutre 1

### 3-1-2- Le maillage

On a fait une variation du maillage sur le nombre de fibres pour la section transversale et pour le nombre d'éléments le long de la poutre jusqu'à attendre la stabilité des résultats.

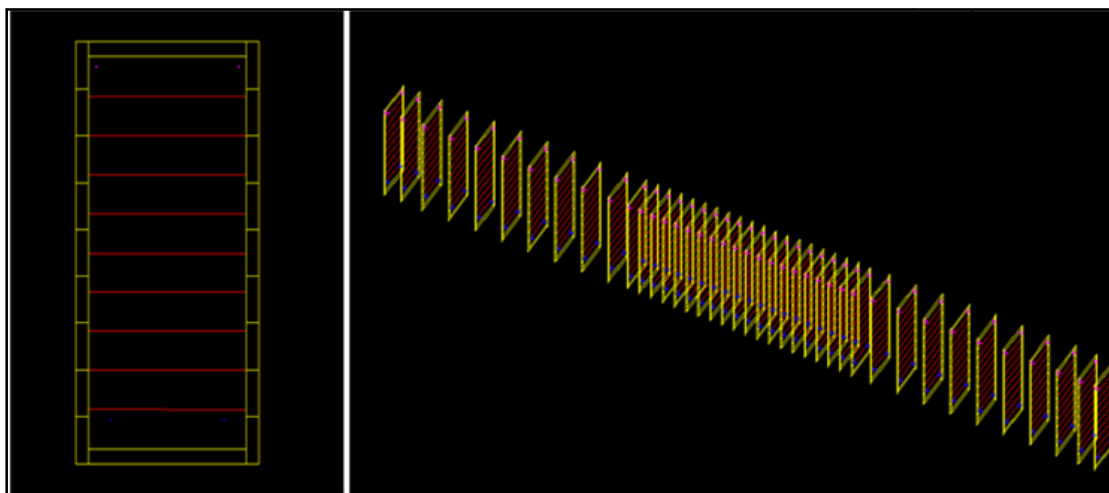


Figure 3.5: Détails du maillage de la poutre 1

**3-1-3- Caractéristique des matériaux de la poutre**

Les caractéristiques du béton et de l’acier utilisées sont illustrées dans le tableau 3.2.

**Tableau3.2:** caractéristique expérimentale de la poutre 1

$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$A_s'$ (mm <sup>2</sup> )	$f_c'$ (MPa)	$E_0$ (MPa)	$\epsilon_{CU}$	$f_t'$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$E_s$ (MPa)	$E_s^*$ (MPa)	$\epsilon_{SU}$
1135.5	142.0	23.4	23145	0.0078	3.0	328.2	195130	5515	0.05

**3-1-4- Les modèles de comportement utilisé**

Dans notre étude on a utilisée deux modèles pour le béton (béton BAEL et béton UNI) et un seule modèle pour l’acier (PARFAIT\_UNI).

**Béton BAEL:** Ce modèle est très simplifié, il présente une loi avec une résistance constante au-delà de FC28 se qui n’est pas réel avec une résistance en traction nulle.

Dans ce modèle on aura besoin seulement de spécifier la contrainte maximale en compression (FC28), pour plus détaillés voir paragraphe (2-2-2-1).

**Béton UNI:** C’est le modèle le plus complet dans ce code élément fini, il présente un comportement plus réel avec possibilité de prise en compte du confinement des armatures transversales pour plus détaillés voir paragraphe (C-1).

**PARFAIT\_UNI :** c’est Un modèle de comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope.

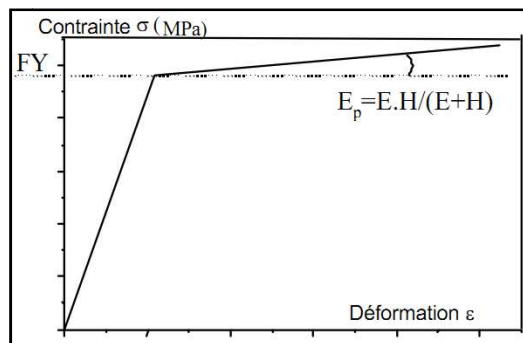
Les 2 paramètres de ce modèle sont :

La contrainte de plastification.

Le module d’écrouissage qui vaut 0 pour un matériau parfaitement plastique.

Telle que le module d’écrouissage est lié à la pente après plastification  $E_p$  avec la relation

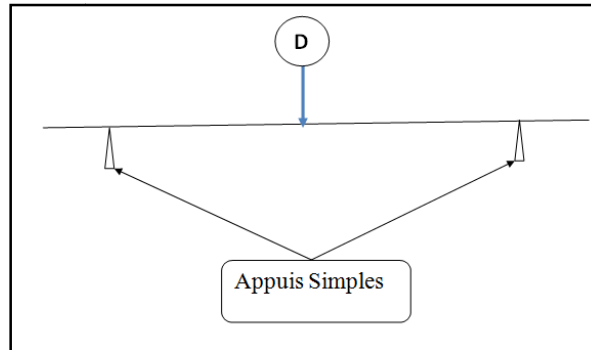
suivante :  $E_p = \frac{E.H}{E+H}$



**Figure 3.6:** Loi de comportement acier simplifié PARFAIT\_UNI

**3-1-5- Chargement et conditions aux limites**

Notre poutre est simplement appuyée à 14 Cm de ces deux extrémités, et pour le chargement on a appliqué un déplacement imposé au centre de la poutre.



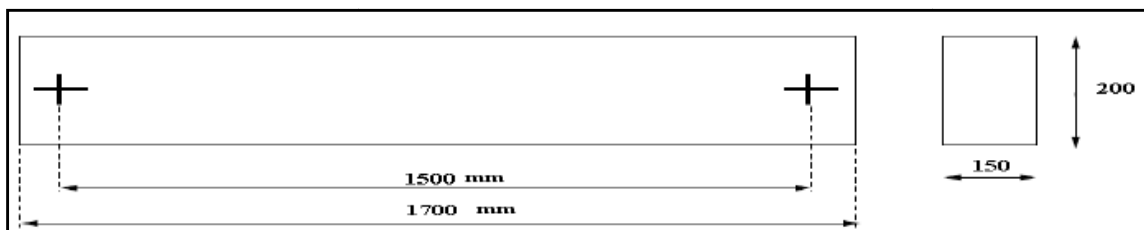
**Figure 3.7:** Chargement et conditions aux limites de la poutre 1

**3-2- Partie 2**

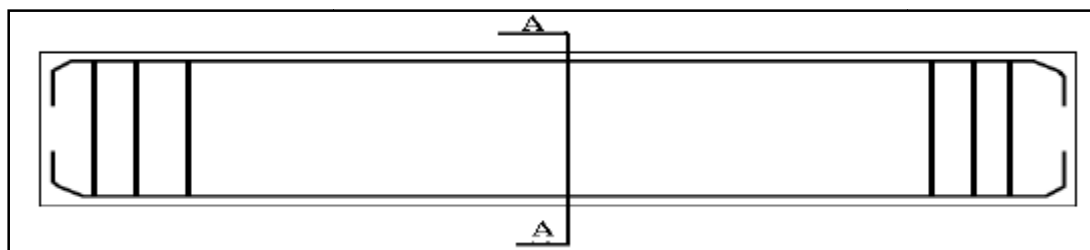
Dans cette partie on a choisi une autre poutre sur la quelle on a appliqué un chargement cyclique.

**3-2-1- la géométrie et les caractéristique de la poutre 2**

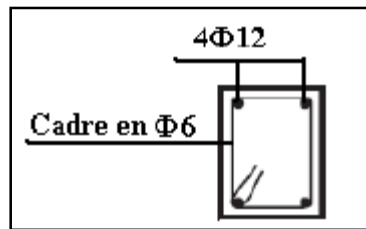
**a- Exemple étudié :** notre choix est porté sur la poutre suivante :



**Figure 3.8:** Le schéma principal pour la poutre 2



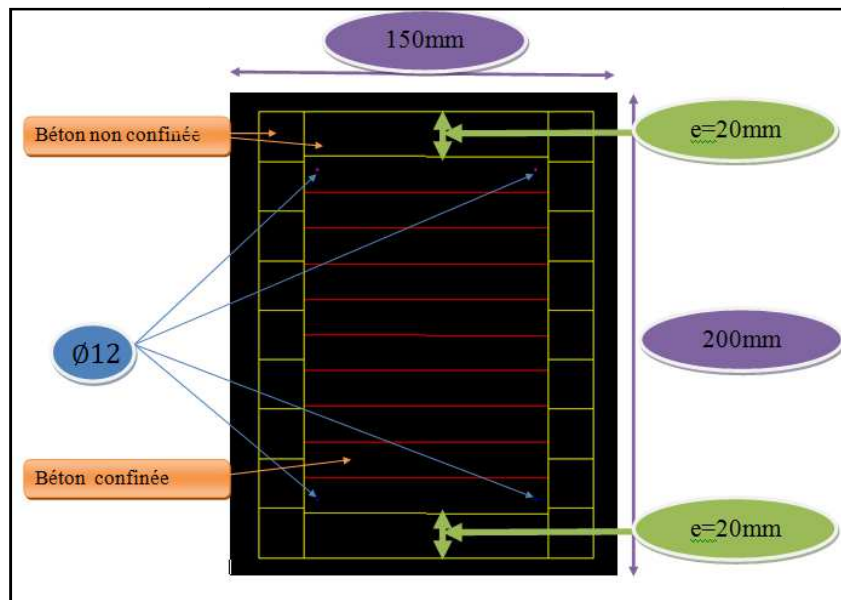
**Figure 3.9:** La coupe longitudinale de ferrailage pour la poutre 2



**Figure 3.10:** La coupe transversale (A-A) pour la poutre 2

Le choix de cette géométrie s'explique par la symétrie de ferrailage de la section transversale de cette poutre car le chargement cyclique qui exige cette symétrie.

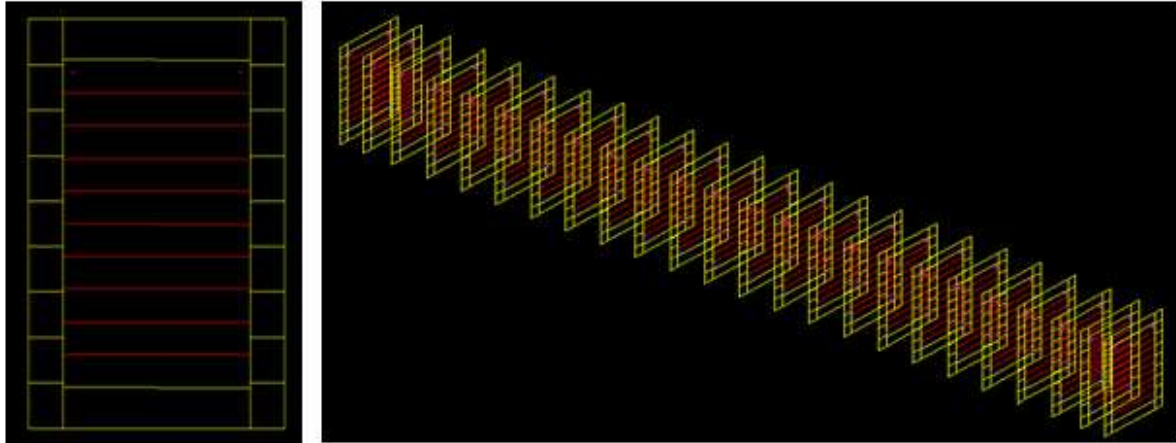
### b- Simulation



**Figure 3.11:** Le schéma de modèle multifibres pour la poutre 2

### 3-2-2- Le maillage

On a fait une variation du maillage sur le nombre de fibres pour la section transversale et pour le nombre d'éléments le long de la poutre jusqu'à attendre la stabilité.



**Figure 3.12:** Détails du maillage de la poutre 2

### 3-2-3- Caractéristique des matériaux de la poutre

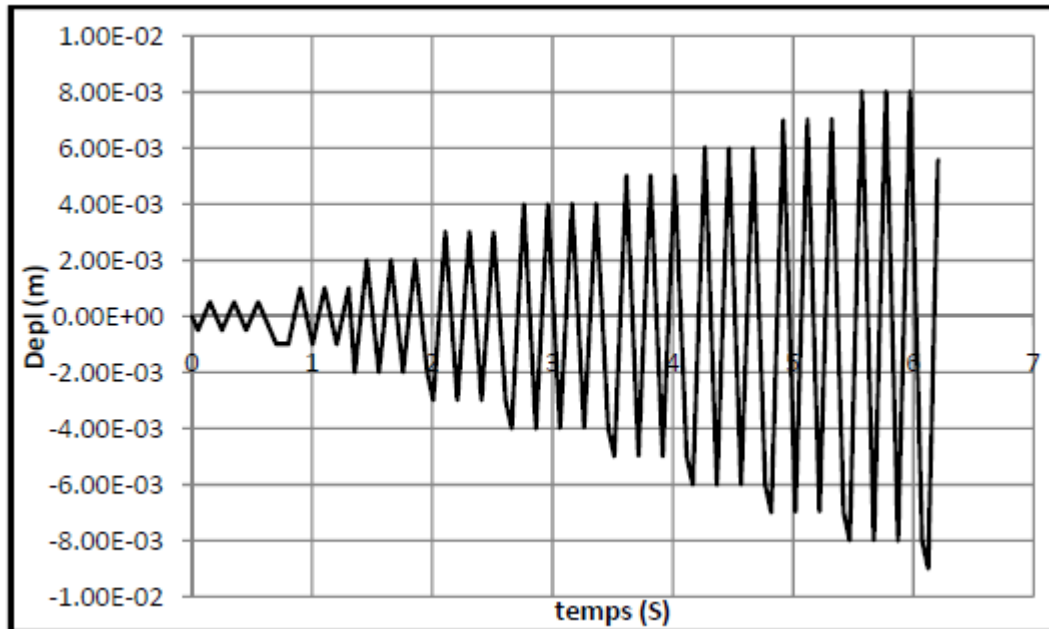
Les caractéristiques du béton et de l'acier utilisées sont illustrées dans le tableau 3.

**Tableau3.3:** Caractéristique des matériaux de la poutre2

Matériau	Paramètre	Valeur
Béton	E	28000 MPA
	$f_{c28}$	35 MPA
Acier	E	205000 MPA
	$f_t$	600 MPA
	Ferraillage longitudinal	4HA12
	Ferraillage transversal	Ø6/15cm

### 3-2-4- chargement

Dans ce cas on a appliqué un chargement cyclique de type déplacement comme montré dans la figure.



**Figure 3.13:** Le chargement appliqué sur la poutre 2

### 3-2-5- les modèle de comportement utilisée dans notre modèle

On a utilisée les mêmes modèles de comportement que la partie 1.

# Chapitre 4

## Présentation et interprétation des résultats

---

### Sommaire

1- Résultats et interprétation .....	64
1 <sup>er</sup> type : Chargement monotone .....	64
A-1- Etude de la convergence du maillage.....	64
A-1-1- Choix du nombre d'élément dans la section transversale.....	64
A-1-2- Pour la zone centrale dans le sens longitudinal de la poutre.....	65
A-2- Comparaison de comportement des différents types du béton .....	66
A-2-1- Le modèle du Béton BEAL par rapport à l'expérimental.....	66
A-2-2- Le modèle du Béton uni sans prise en compte de confinement par rapport à l'expérimental .....	67
A-2-3- Le modèle du Béton uni avec confinement par rapport à l'expérimental.....	68
A-2-4- Le modèle du Béton BEAL et le modèle du Béton uni sans pris en compte de confinement.....	70
A-2-5- Le modèle du Béton BEAL et le modèle du Béton uni avec confinement .....	70
A-3- Comparaison de comportement des différents types de béton dans le même graphe..	71
B- 2 <sup>eme</sup> type : Chargement cyclique.....	72
2-Conclusion : .....	73

### 1- Résultats et interprétation

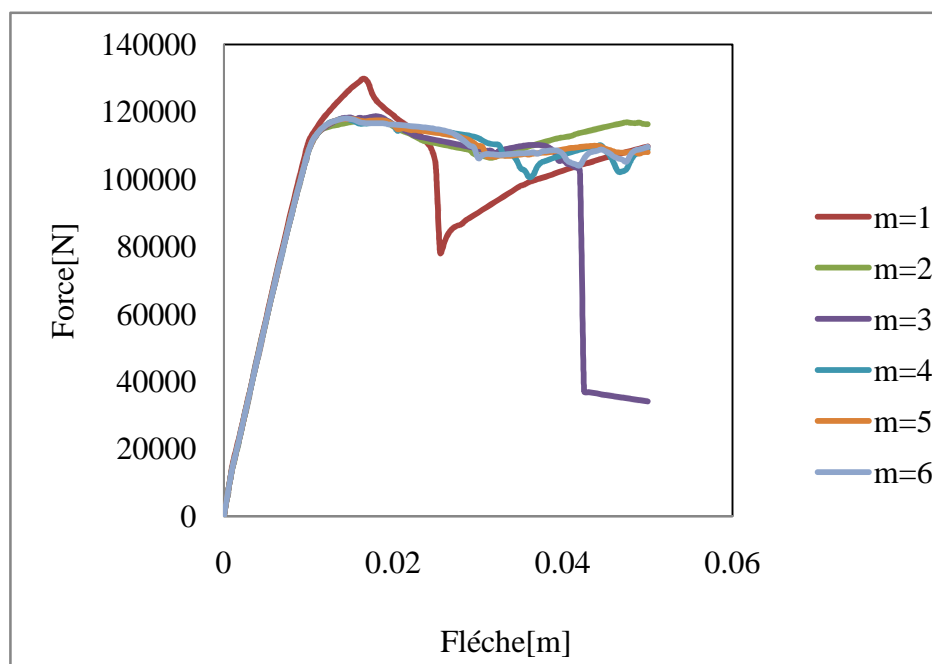
Ce chapitre va résumer les résultats obtenus pour deux types de poutres dont la première est sollicitée sous chargement statique (monotone), et la deuxième sous chargement dynamique (cyclique). Des études comparatives entre les différents modèles de comportement du béton ont été menées, la confrontation des courbes (charge-flèche) est effectuée entre tous les modèles étudiés.

#### 1<sup>er</sup> type : Chargement monotone

Pour ce type de chargement, trois modèles de comportement pour le béton ont été utilisés (béton BAEL, béton avec prise en compte de confinement, béton sans prise en compte de confinement) les résultats de ces comportements sont illustrés dans les sous titres suivants.

#### A-1- Etude de la convergence du maillage

##### A-1-1- Choix du nombre d'élément dans la section transversale

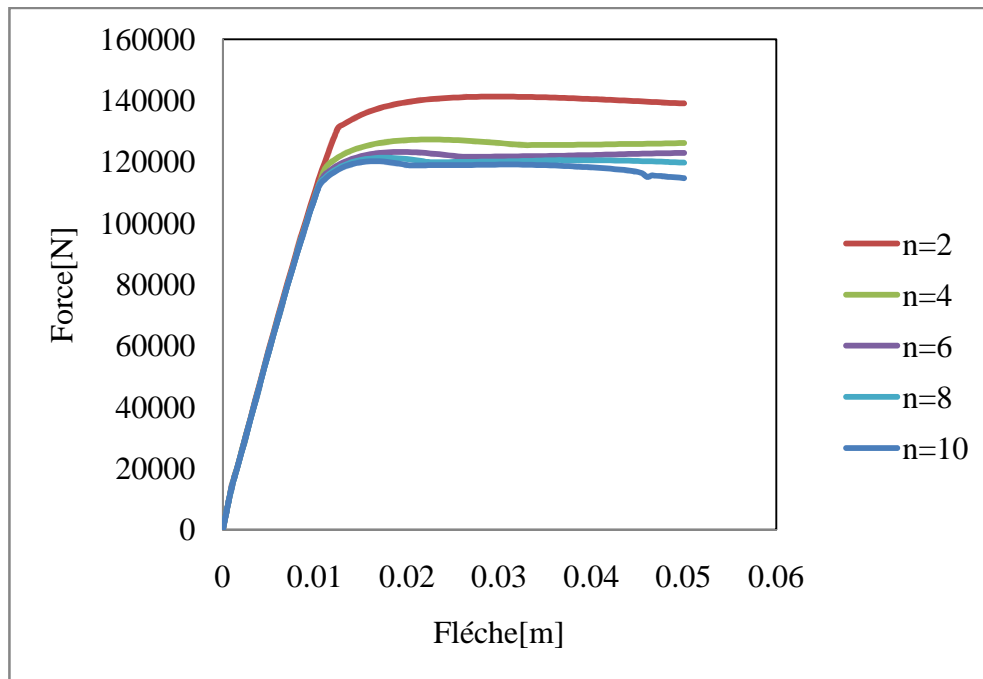


**Figure 4.1:** Comparaison des courbes charge-flèche en fonction du nombre d'éléments (maillage de la section transversale)

La Figure 4.1 présente la confrontation des courbes charge-déplacement obtenus, dont l'objectif est le choix du nombre d'éléments à prendre en considération pour la section

transversale. On remarque qu'à partir de 5 éléments les courbes sont confondues, cela nous permet de dire que le maillage est stable.

#### A-1-2- Pour la zone centrale dans le sens longitudinal de la poutre



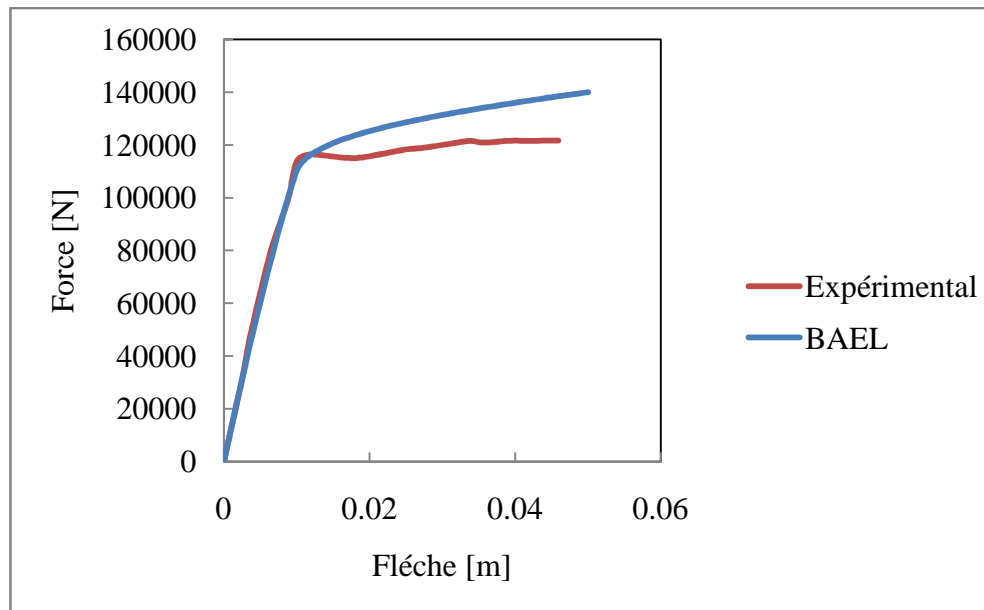
**Figure 4.2:** Comparaison des courbes charge-flèche en fonction du nombre d'éléments (maillage de la section transversale)

La Figure 4.2 présente la confrontation des courbes charge-déplacement obtenues, dont l'objectif est le choix du nombre d'éléments à prendre en considération pour la discrétisation de la poutre, on remarque qu'à partir de 6 éléments, les courbes sont confondues, se qui nous confirme la stabilité du maillage.

## A-2- Comparaison de comportement des différents types de béton

SPCC	Sans Prise en Compte de Confinement
PCC	avec Prise en Compte de Confinement

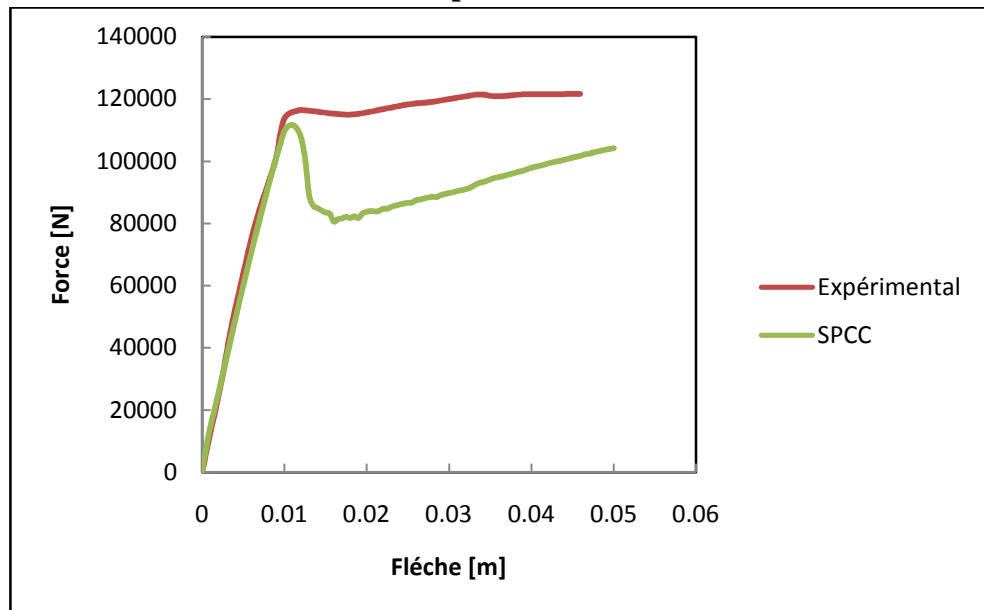
## A-2-1- Le modèle du Béton BEAL par rapport à l'expérimental



**Figure 4.3:** : Comparaison du Béton BEAL par rapport à l'expérimental

Figure 4.3 présente la comparaison des courbes force-déplacement obtenues entre le modèle du Béton BAEL comparant à l'expérimental. Les courbes sont confondues dans le domaine élastique, alors nous dirons que ce modèle a reproduit parfaitement le comportement expérimental de la structure. Au-delà de la limite élastique, le modèle surestime la résistance de la poutre en présentant un écrouissage avec une résistance qui augmente jusqu'à atteindre une charge maximale de 143 Kn. 10.51% de surestimation est notée pour ce modèle, cette différence peut s'expliquer par le palier constant de la courbe de comportement en compression au-delà du pic (négligence de l'adoucissement).

### A-2-2- Le modèle du Béton uni sans prise en compte de confinement par rapport à l'expérimental

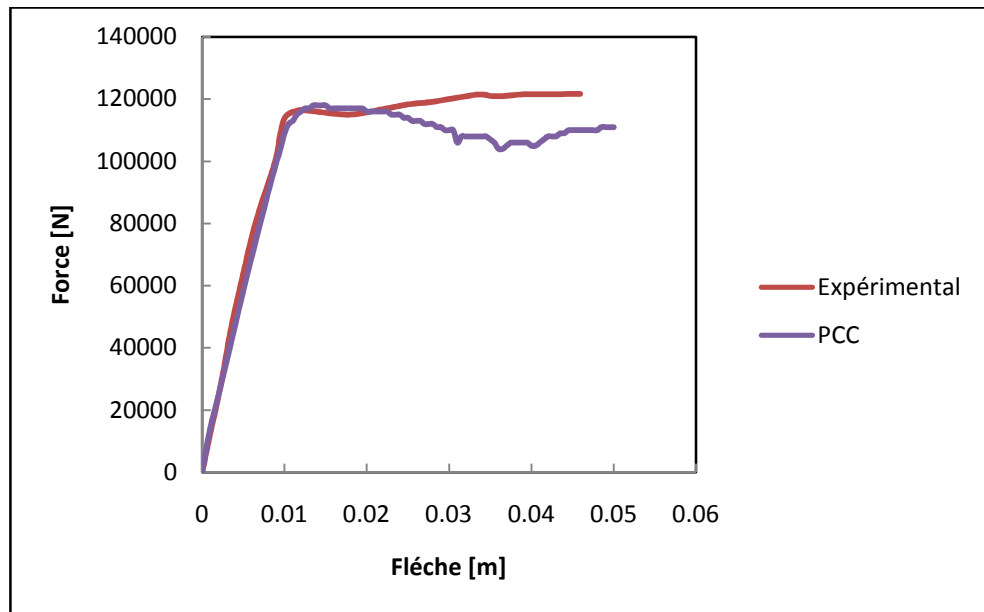


**Figure 4.4:** Comparaison du Béton sans prise en compte de confinement par rapport à l'expérimental

Telle que **SPCC** : Sans Prise en Compte de Confinement.

La Figure 4.4 présente la confrontation des courbes charge-déplacement pour le modèle de comportements du Béton-Uni sans prise en compte de confinement (cadres transversale sont négligés) et le modèle expérimental. On remarque que les courbes ont un même comportement dans le domaine élastique jusqu'à une charge de 110 Kn. A partir de cette dernière, Le modèle du Béton uni subit une rupture fragile par écrasement du béton, contrairement à l'expérience ou la poutre se plastifie sans rupture. La limite élastique est sous-estimée par le modèle d'un pourcentage de 8.78%. La poutre du Modèle numérique à subi une rupture brute avec une dégradation de charge de 12.7%. Après rupture du béton, les efforts sont repris par les armatures.

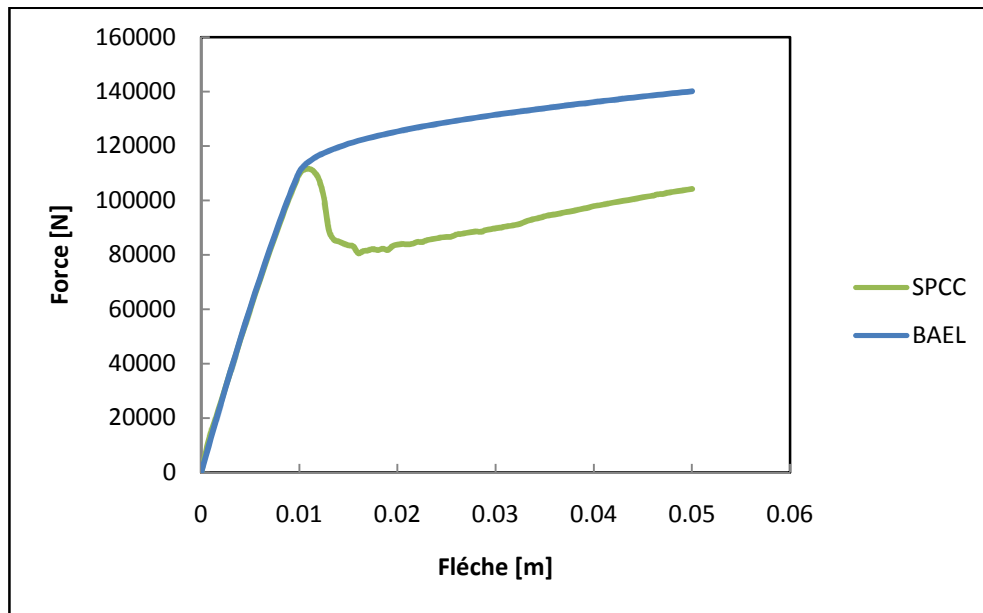
## A-2-3- Le modèle du Béton uni avec confinement par rapport à l'expérimental



**Figure 4.5:** Comparaison Béton avec prise en compte du confinement par rapport à l'expérimental

Telle que PCC : Prise en Compte de Confinement.

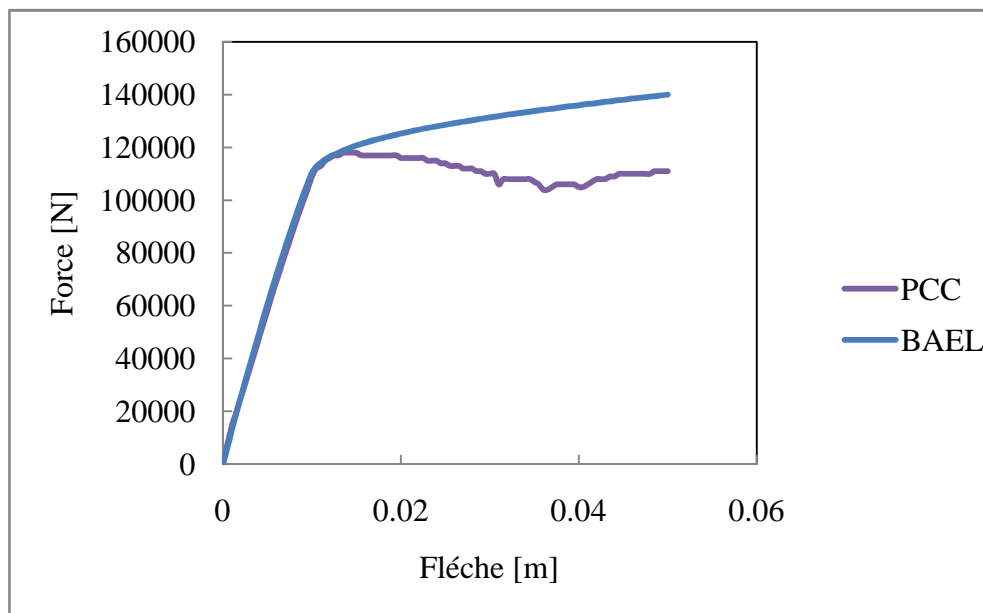
La Figure 4.5 présente la superposition des courbes charge-déplacement du modèle du Béton uni avec prise en compte de confinement (PCC) par rapport à l'expérimental. On remarque que la réponse obtenue par le modèle du béton PCC est la même jusqu'à un déplacement de 0,02 m, ce qui nous montre que ce dernier a pu reproduire d'une manière satisfaisante le comportement de la poutre dans le domaine élastique ainsi qu'au début de la plastification. Au-delà de ce déplacement (0,02 m) une divergence est observée, le modèle PCC subit une dégradation de résistance contrairement à l'expérimental avec une différence de charge maximal de 8,4 %.

**A-2-4- Le modèle du Béton BEAL et le modèle du Béton uni sans pris en compte de confinement**

**Figure 4.6:** Comparaison du Béton BEAL et Béton-uni sans prise en compte du confinement

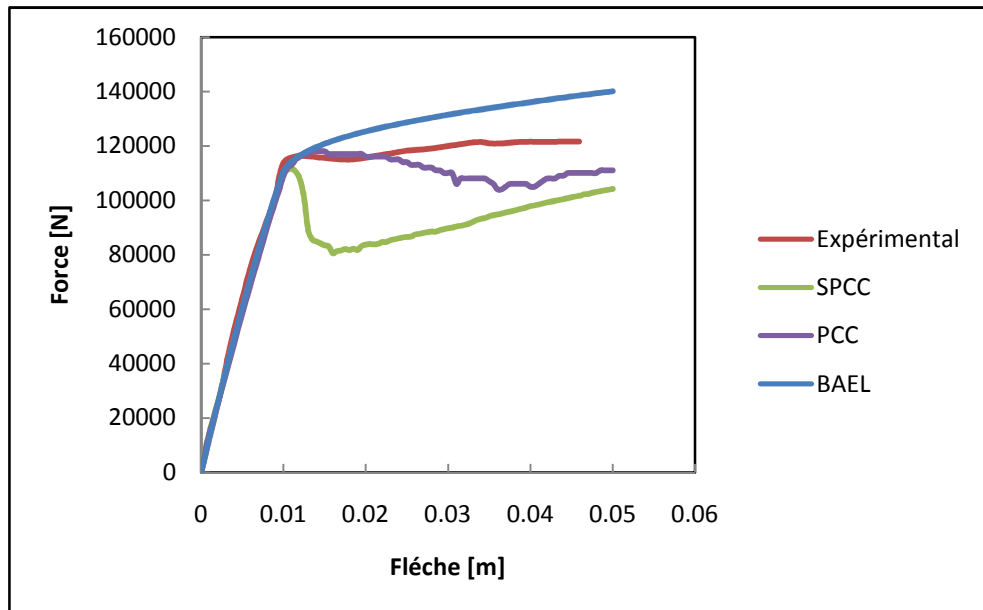
La Figure 4.6 présente une confrontation des courbes charge-déplacement pour le comportement de modèle du Béton BAEL et le modèle du Béton sans prise en compte de confinement. Ces deux derniers montrent un comportement identique dans le domaine élastique. Au-delà de la limite élastique une chute brusque de 12,7 % est observée pour le modèle (SPCC), la fragilité de ce modèle peut être expliquée par le non prise en compte des cadres transversales dans la simulation, Contrairement au Modèle BAEL qui continue à résister dans le domaine plastique atteignant une charge maximale supérieure à 140 Kn. Ce modèle (BAEL) ignore l'adoucissement du béton en compression en gardant un palier plastique constant au-delà de sa résistance maximale d'où le résultat obtenu semble logique.

## A-2-5-Le modèle du Béton BEAL et le modèle du Béton uni avec confinement



**Figure 4.7:** Comparaison des courbes du Béton BEAL et Béton-Uni avec prise en compte du confinement

La Figure 4.7 une confrontation des courbes charge-déplacement entre le modèle du Béton BAEL et le modèle du Béton-Uni avec prise en compte de confinement (PCC). Une bonne concordance est visualisée entre les courbes dans le domaine élastique (Courbes confondues). Une divergence entre les courbes est remarquée dans le domaine plastique, le modèle avec PCC présente un endommagement après atteinte d'une charge de 120 KN correspondant à un déplacement de 1.5 cm qui est du au comportement adoucissant du béton en compression, ce dernier est négligé par le modèle du béton BAEL d'où sa résistance augmente sans dégradation.

**A-3- Comparaison de comportement des différents types de béton dans le même graphe**

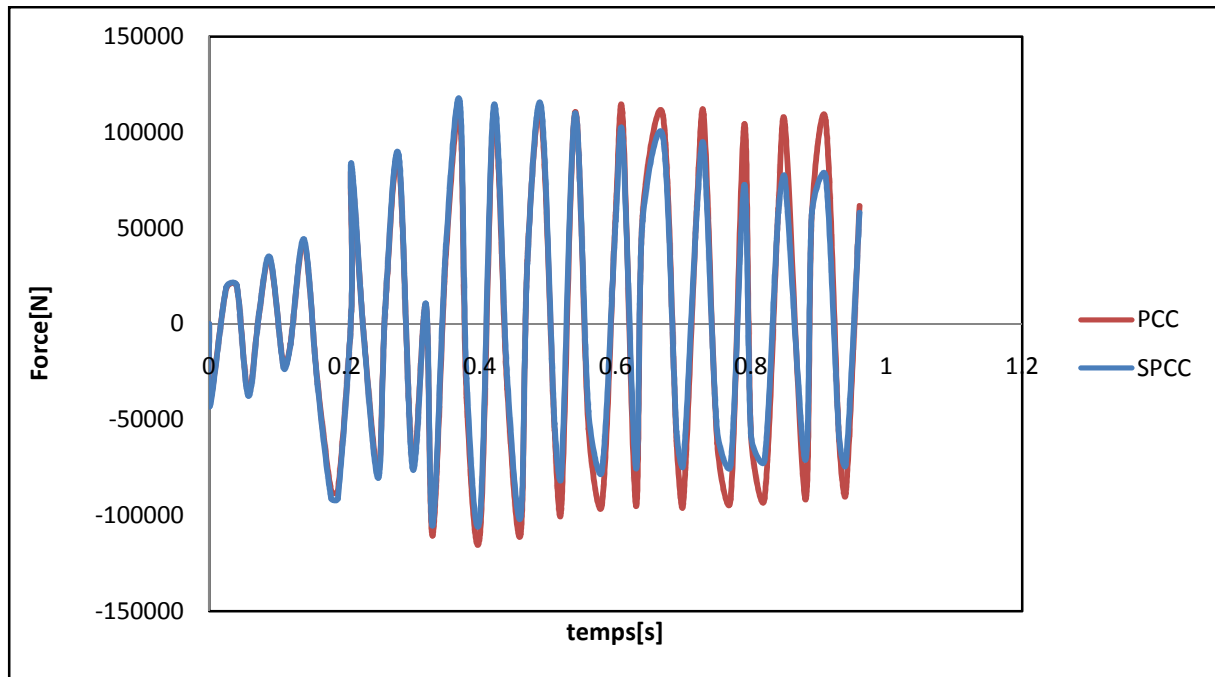
**Figure 4.8:** Comparaison des courbes (force-déplacement) des différents modèles de Béton étudiés

Figure 4.8 présente une comparaison des courbes charge-déplacement de tous les modèles étudiés par rapport au résultat expérimental. Le comportement présenté par tous les modèles sur la figure est divisé en deux phases, une phase élastique où toutes les courbes ont montré un même comportement (courbes confondues), contrairement à la deuxième phase (domaine plastique). Dans ce dernier, une divergence importante est remarquée entre les résultats. Le meilleur comportement obtenu dans cette phase est donné par le modèle du béton-Uni avec PCC, cela semble très logique vu que c'est le modèle le plus complet où tous les paramètres sont pris en considération (résistance à la traction, modélisation des armatures transversales ainsi que l'adoucissement du béton en compression).

**B- 2<sup>ème</sup> type : Chargement cyclique**

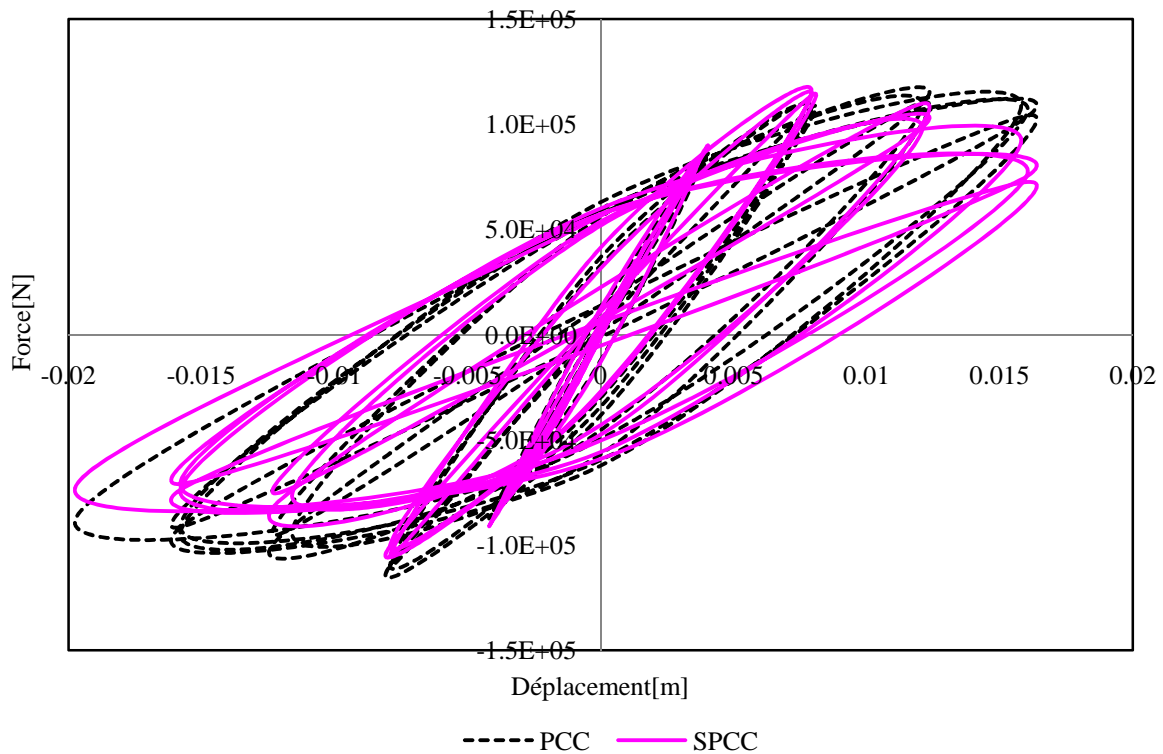
**PCC** : Prise en Compte de Confinement.

**SPCC** : Sans Prise en Compte de Confinement.



**Figure 4.9:** Chargement cyclique force en fonction de temps

La Figure 4.9 présente une comparaison des courbes (force – temps) entre les modèles du Béton-Uni (PCC et SPCC) sous chargement cyclique vu que ce modèle modélise le comportement cyclique du béton. Les courbes sont confondues jusqu'à 0.3s du chargement ou un comportement identique est présenté, à partir de cet instant, une différence entre les pics de forces est enregistrée plus particulièrement aux derniers cycles ou la charge appliquée est importante (solicitation maximale des matériaux). Le modèle avec PCC a montré un comportement meilleur en termes de résistance, ce dernier peut s'expliquer par le confinement apporté par les cadres transversales pour ce modèle. Un pourcentage maximal de différence de charge qui atteint les 27.65 % est noté.



**Figure 4.10:** Comparaison des courbes hystériques des modèles du béton PCC et SPCC

La Figure 4.10 présente une comparaison entre le modèle PCC et SPCC sous chargement cyclique. Une bonne concordance est observée aux deux premiers cycles, une variation de la charge est remarquée à partir du troisième cycle où le modèle SPCC a présenté un adoucissement plus important par rapport à l'autre, cela est dû à la non prise en compte des armatures transversales par ce dernier conduisant à un comportement insatisfaisant (sous-estimation de la réponse).

## 2-Conclusion :

Dans ce chapitre, on a mis en évidence l'importance des modèles existants dans la modélisation du comportement du béton sous différentes sollicitations. La réponse charge-déplacement présentée ci-dessus est influencée d'une manière significative par le modèle de comportement utilisé.

# Conclusion générale

---

Nous avons présenté dans ce travail une technique de modélisation simplifiée basée sur des éléments de poutre multifibre Timoshenko, en utilisant le code de calcul CAS3M les résultats obtenus nous a permis de les valider aux résultats expérimentaux.

L'utilisateur a la possibilité d'associer dans chaque fibre une loi du comportement non-linéaire de béton et de l'acier séparément. De cette façon il arrive à diminuer le nombre nécessaire de degrés de liberté ainsi que le temps de calcul. Les lois utilisées pour le béton et l'acier sont basées sur la mécanique de l'endommagement et la plasticité respectivement. Les modèles utilisés permettent de modéliser de façon satisfaisante le comportement global des structures en béton armé sous chargement statique et cyclique. Sur la base de cette étude, certaines conclusions peuvent être déduites :

- Le modèle de comportement du béton BAEL surestime la résistance de la poutre dans le domaine post-élastique d'une différence (écart) de 10.51%.
- Le modèle du béton-uni sans prise en compte du confinement des armatures transversales a montré un comportement fragile d'un pourcentage de 12.7%.
- Le confinement a une influence considérable sur la réponse de la poutre en Béton Armé d'où sa prise en compte est primordial.
- Le modèle de comportement du béton-uni avec confinement des cadres a présenté le meilleur répons (écart) 8.4%.
- Sous chargement cyclique, la prise en compte du confinement apporté par les cadres à une influence sur le comportement global notant un pourcentage de 27.65%.
- Le type de chargement n'a pas d'influence sur la réponse (charge-flèche) de la poutre en béton armé.

À partir de ce travail, on peut constater que le comportement de la poutre est proportionnel au comportement des matériaux (béton et acier) en se basant sur les constatations suivantes :

- Le modèle du béton BAEL a surestimé la résistance de la poutre, car ce dernier ne prend pas en considération l'adoucissement du béton dans sa loi de comportement en compression.

- La fragilité du modèle du Béton-Uni sans prise en compte de confinement apporté par les armatures transversales est dû à la considération de la partie centrale de la section transversale comme étant un béton non confiné avec un comportement qui tend à être fragile comparant au béton confiné.
- Le modèle du Béton uni avec prise en compte du confinement a présenté un comportement plus proche de l'expérimental, car la modélisation des matériaux dans ce cas reflète le comportement réel de ces derniers.
- La réponse dynamique a montré aussi que la prise en compte du confinement influe le comportement cyclique des poutres en béton armé. À partir de ce résultat, la réponse numérique des éléments en béton armé est indépendante du chargement appliqué et elle est proportionnelle aux lois de comportement des matériaux.

- ANSARI, F, 1987:** Stress-strain response of microcracked concrete in direct tension. ACI Materials Journal, Vol. 84, No. 6, 481-490.1987.
- AREDE.A, 1997:** « Seismic assessment of reinforced concrete frame structures with a new flexibility based element », PhD Thesi, Universidade do Porto préparée au JRC Ispra, October 1997.
- BAHN, B. Y., and HSU, C. -T., T, 1998:** Stress-strain behavior of concrete under cyclic loading. ACI Materials Journal, Vol. 95, No. 2, 178-193. 1998.
- BAZANT, Z. P, 1983:** Comment of orthotropic models for concrete and geomaterials. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 109, No. 3, 849-865.1983.
- BERTHAUD Y ,1988 :** Mesure de l'endommagement du béton par une méthode ultrasonore. Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 175p. 1988.
- BOUAFIA Y, IDDIR A, KACHI MS, 2010 :** Influence de la prise en compte du confinement dans le calcul non linéaire des sections en béton armé. ACMA, Marrakech, Morocco, May 12-14, 2010.
- BOUSALEM B, CHIKH N, 2007:** Development of a confined model for rectangular ordinary reinforced concrete columns. Materials and structures ; Vol. 40, No.6,605-13.,2007
- CHEN, W.F. and SALLEEB, A.F, 1982:** "Constitutive equations for engineering materials", Vol. 1 -elasticity and modeling," Book published by Wiley Interscience, New York, pp. 580, 1982.
- CHUNG HS, YANG KH, Lee YH, Eun HC, 2002:** Stress-strain curve of laterally confined concrete. Eng. Struct; vol.24, No.9:1153-63. 2002.
- Code\_Aster, 2013 :** Réalisation d'une étude de génie civil sous charge[...] ;21 juin2013.
- COMBRESURE.D, P. PEGON.P 1994:** «A Fiber Model accounting for Transverse Shear in Castem 2000», JRC Special Publication N°I.94.59, Ispra, 1994.
- COMBRESURE.D, P. Pegon1996a:** « Introduction of two new global models in Castem 2000 for seismic analysis of civil engineering structures», JRC Special Publication N°I.96.34, Ispra, April 1996.
- COMBRESURE.D, 1996b :** « Modélisation du comportement sismique des structures portiques comportant des murs de remplissage ». Thèse de doctorat ECP préparée au JRC Ispra, Octobre 1996.
- COMBRESURE.D, 2001 :** "Modélisation des structures de génie civil sous chargement sismique à l'aide de CASTEM 2000" ,2001
- Enrico Spacone and Filip C. Filippou ,1991:** A Fiber Beam-Column Element for Seismic Response Analysis of Reinforced Concrete Structures; • JAN UARY 1991.
- FARDIS M, 1991:** « Member – type models for the non linear seismic response analysis of reinforced concrete structures » in Experimental and numerical methods in earthquake engineering, EURO Courses, Reliability and risk analysis, Volume 2, Ispra 1991.

- FLEURETL.J.S, 1996:** “PRISE EN MAIN DE CASTEM 2000 PAR EXEMPLE”CEA Saclay/DRN/DMT/LAMS.Avril1996.
- GATUINGT Fabrice, 1999:** « Prédiction de la rupture des ouvrages en béton sollicités endynamique rapide » Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan année 1999.
- GOPALARATNAM, V. S, and SHAH, S. P, 1985:** Softening response of plain concrete in direct tension. ACI Materials Journal, Vol. 82, No. 3, 310-323.1985.
- HILLERBORG, A, MODEER, M., and PERTERSSON, P. E, 1976:** Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite element. Cement and Concrete Research, Vol. 6, 773-782.1976.
- HONGSTAD E, 1951:** A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members.Bulletin Series No 399, University of Illinois Engineering Experiment Station, Urbana, 1951.
- JANSEN, D. C., and SHAH, S. P, 1997:** Effects of length on compressive strain softening of concrete. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 123, No. 1, 25-35.1997.
- JIRASEK, M., and BAZANT, Z. P, 2002:** Inelastic analysis of structures. John Willey & Son, New York.2002.
- JOHNSON Sanya, 2006:** Comparison of Nonlinear Finite Element Modeling Tools for Structural Concrete,university of illinois at urbana champaign, (December 15, 2006).
- KOTRONIS Panagiotis, 2008 :** « Stratégies de Modélisation de Structures en Béton Soumises à des Chargements Sévères. » Thèse de diplôme d'habilitation à diriger des recherches- Université Joseph Fourier en France année 2008.
- LAIBLE, J. P, WHITE, R. N, and GERGELY, P, 1977:** Experimental investigation of seismic shear transfer across cracks in concrete nuclear containment vessels. ACI Special Publication, Vol. 53, No. 9, 203-226.1977.
- LAVARENNE. S, 1994 :** « Développement d'éléments globaux pour l'étude du comportement sismique des structures en béton armé ». Rapport DMT/94-110, 1994.
- LAVARENNE. S, 1995 :** « Exemple d'application des éléments globaux de Castem 2000 sur une structure de génie civil irrégulière ». Rapport DMT/95-343, 1995.
- LAVARENNE. S, 1996 :** « Utilisation de l'élément global de Castem 2000 dans le cas d'un voile en béton armé ». Rapport DMT/96-371, 1996.
- MANDER J.B, PREISTLEY M.J.N., PARK R, 1984:** “Seismic Design of Bridge Piers”, Res. Rep. 84-2, Department of Civil Engineering, University of Canterbury, Christ church, New Zealand, 1984.
- MANDER J.B, PREISTLEY M.J.N., PARK R, 1988:** Theoretical stress–strain model for confined concrete. J. Struct. Engin.,;vol.114No.8-1804–26. ASCE 1988.
- MANDER J.B, PREISTLEY M.J.N., PARK R ,1988:** Observed stress–strain behavior of confined concrete. J. Struct. Engin., ASCE 1988;vol.114No.8-1827–49. ASCE 1988.
- MAZARS.J ,1984 :** Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structurel. Thèse de doctorat d'état, Université Paris6.1984.

- MAZARS.J, 1991:** « Damage models for concrete and their usefulness for seismic loadings » in Experimental and numerical methods in earthquake engineering, EURO Courses, Reliability and risk analysis, Volume 2, Ispra 1991.
- MAZARS, J., KOTOTRONIS, P., RAGUENEAU, F. and CASAUX, G, 2006:**“Using Multifiber Beams to Account for Shear and Torsion Applications to Concrete Structural Elements”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195, 7264-7281, 2006.
- MEHTA, P. K., and MONTEIRO, P. J. M, 1993:** Conc rete: structure, prope rties, and methods. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., New York, 1993.
- MOULIN Stéphane, 2009 :** document R3.08.08 code aster « Élément de poutre multifibre (droite) » Année 2009.
- MOULIN Stéphane, 2010:** document U2.06.10 code aster « Réalisation d'une étude de génie civil sous chargement sismique » Année 2010.
- MULTON Stéphane, BUFFO Laurie ,2007-2008 :**“ Initiation à CASTEM“2007-2008.
- NECHNECH echnech Wahid, 2000 :** « Contribution à l'étude numérique du comportement du béton et de structures en béton armé soumises à des sollicitations thermiques et mécaniques  
couplées : une approche thermo-élastoplastique endommageable » Thèse de doctorat- Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. Décembre 2000.
- PARK R., PAULAY T; John Wiley & Sons, 1975:** "Reinforced Concrete Structures ", USA, 1975.
- PAULTRE P, LEGERON F, 2008 :** Confinement reinforcement design for reinforced concrete columns. J. Struct. Engin.,vol. 134No5. 738–49, ASCE 2008.
- PETERSSON, P. E, 1981:** Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. Report TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.1981.
- POLITOPOULOS.I, 1998 :** « Etude bibliographique sur la modélisation des bâtiments en béton armé », Rapport SEMT/EMSI/RT/98-047A.1998.
- POPOVICS S, 1973:** A numerical approach to complete stress–strain curve of concrete. Cement and Concrete Res. 3:583–99. 1973.
- RAGUENEAU Frédéric, 1999:** « Fonctionnement dynamique des structures en béton-influence des comportements hystérétiques locaux » Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan année 1999.
- REINCHARDT, H, CORNELSSEN, H. A. W., and HORDJIL, D. A, 1986:** Tensile tests and failure analysis of concrete. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 112, No. 11, 2462-2477. 1986.
- RICHART, F.E, BRANDTZAEG, A., and BROWN, R.L.1928:** "A Study of the Failure of Concrete Under Combined Compressive Stresses," Univ. Of Illinois Eng. Exp. Station, Bulletin No. 185, Vol. 26, No. 12, pp. 1-105, November, 1928.
- SAATCIOGLUM, RAZVI SR1992:** Strength and ductility of confined concete. J. Struct. Engin.;vol.118No.6-1590–607. ASCE 1992.

**SFER, D., CAROL, I., GETTU, R., and ESTE, G, 2002:** Study of the behaviour of concrete under triaxial compression. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol 128, No. 2, 156-163.2002.

**SHEIKH SA, 1982:** A comparative study of confinement models. ACI Journal Proceedings 1982; vol.79No.4-296-06.

**SINHA, B. P., GERSTLE, K. H., and TULIN, L. G., 1964:** Stress-strain relations for concrete under cyclic loading. ACI Journal, Vol. 61, No. 2, 195-210.1964.

**Takeda. T, SOZEN. M.A, NIELSE N.N. N, 1970:**« Reinforced concrete response to simulated earthquakes », Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 96, N°ST12, 1970.