

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITE MOULOUD MAMMERY**  
- TIZI OUZOU -

**Faculté du Génie de la construction**  
**Département de Génie Civil**

**MÉMOIRE DE MAGISTÈRE**

*Spécialité : génie civil*  
*Option : géotechnique et environnement*

Présenté par :

**M. BAZIZ. Karim**

*THÈME*

***Effet de la variabilité des paramètres  
de calcul sur la stabilité des murs de  
soutènement***

*Devant le jury :*

<b>Mr AIT TAHAR Kamel</b>	<b>Professeur</b>	<b>UMMTO</b>	<b>Président</b>
<b>Mr BOUHERAOUA Ali</b>	<b>Maître de conférences</b>	<b>UMMTO</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Mr MELBOUCI Bachir</b>	<b>Professeur</b>	<b>UMMTO</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr AIT AIDER Hacène</b>	<b>Maître de Conférences</b>	<b>UMMTO</b>	<b>Examineur</b>

*Soutenu le :    /    / 2011*

# ***REMERCIEMENTS***

Que tout ceux qui m'ont apporté leur aide, pour la réalisation de ce travail, trouvent ici l'expression de m'a profonde gratitude.

Je tiens notamment à remercier :

Monsieur **A. BOUHERAOUA** maître de conférences A au département de génie civil de l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, pour avoir dirigé ce travail, et de m'avoir permis ainsi de le mener à son terme.

Monsieur **K. AIT TAHAR** professeur au département de génie civil de l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, qui a bien voulu examiner ce travail et présider le jury.

Monsieur **B. MELBOUCI** professeur au département de génie civil de l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, d'avoir voulu accepter d'être examinateur dans le jury de soutenance.

Monsieur **H. AIT AIDER** maître de conférences A au département de génie civil de l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, d'avoir voulu accepter d'être examinateur dans le jury de soutenance.

Je n'oublie surtout pas mes amis qui m'ont apporté aide et réconfort.

# **SOMMAIRE**

Chapitre 0	<b>INTRODUCTION</b>	01
Chapitre I	<b>REVUE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	04
<b>I.1. introduction</b>		04
<b>I.2. Origines et caractéristiques de la variabilité des sols</b>		04
<b>I.3 Modélisation des incertitudes</b>		07
<b>I.4 Modélisation en variables aléatoires</b>		08
<b>I.5 Effets de la variabilité des paramètres des sols (modélisation de l'alea en champs aléatoires)</b>		10
I.5.1 Modèles stochastiques		
I.5.2 Caractéristiques probabilistes de la variabilité spatiale des propriétés de sol		
I.5.3 Analyse stochastique en éléments finis		
I.5.4 Effets de la variation des propriétés du sol sur le comportement géotechnique		
<i>I.5.4.1 Consolidation</i>		
<i>I.5.4.2 Tassement des fondations superficielles et profondes</i>		
<i>I.5.4.3 L'infiltration à travers les sols hétérogènes</i>		
<i>I.5.4.4 Effets de la variabilité de sol sur la portance des fondations superficielles</i>		
<b>I.6 Conclusion</b>		27
Chapitre II	<b>VARIABILITE SPATIALE DES PARAMETRES GEOTECHNIQUES</b>	28
<b>II.1 Introduction</b>		28
<b>II.2 sources d'incertitudes sur les paramètres de sol</b>		29
II.2.1 Incertitude liée à la variabilité naturelle des paramètres des sols		
II.2.2 Erreurs et incertitudes liées à la caractérisation des sols		
1. <i>Erreurs d'observation</i>		
a) Erreurs de mesure, $e_{ao}$		
b) Erreurs de représentativité, $e_{Rep}$		
c) Erreurs de l'instant, $e_{inst}$		
2. <i>Erreurs d'enquête</i>		
a) Erreurs d'enquêtes proprement dites		
b) Erreurs d'échantillonnage		
II.2.3 Incertitudes liées à l'imperfection des modèles rhéologiques		
<b>II.3 Approche probabiliste</b>		33
II.3.1 Principe général		
II.3.2 Principales étapes de l'approche probabiliste		
1. <i>Modélisation des données aléatoires</i>		
2. <i>Choix du modèle et incertitudes associées</i>		
3. <i>Calculs probabilistes</i>		
4. <i>Exploitation des résultats</i>		
<b>II.4 Modélisation stochastique de la variabilité spatiale</b>		36
II.4.1 Différentes formes de variation des paramètres de sol		
II.4.2 Dérive et autocorrélation des propriétés des sols		

1. Décomposition des variations spatiales des variables aléatoires	
2. Etude de la dérive $D(x, y, z)$	
3. Etude de la composante aléatoire $A(x, y, z)$	
4. Génération du vecteur des variables aléatoires corrélées	
<b>II.5 Conclusion</b>	<b>41</b>
Chapitre III	<b>MURS DE SOUTÈNEMENT</b>
<b>III.1 Introduction</b>	<b>42</b>
<b>III.2 Définition</b>	<b>42</b>
<b>III.3 Différents types d'ouvrages de soutènement</b>	<b>43</b>
III.3.1 murs gravitaires ou murs-poids	
a) <i>Mur à caissons</i>	
b) <i>Mur gravitaire en maçonnerie</i>	
c) <i>Mur gravitaire à redans</i>	
III.3.2 Murs-voiles	
a) <i>Mur en «T renversé» classique</i>	
b) <i>Mur à contreforts</i>	
c) <i>Diverses dispositions de bèches</i>	
d) <i>Autres murs</i>	
<b>III.4 Précautions</b>	<b>47</b>
III.4.1 Précautions-Drainage et gel	
III.4.2 Précautions-Compactage	
a) <i>Sols pulvérulents</i>	
b) <i>Sols cohérents</i>	
<b>III.5 Pression latérale des terres</b>	<b>50</b>
III.5.1 Introduction	
III.5.2 Pression des terres au repos et relation pression latérale-déformation latérale	
III.5.3 Essais sur la poussée des terres	
a) <i>Etat actif</i>	
b) <i>Etat passif</i>	
III.5.4 Calcul pratique de la poussée et de la butée	
III.5.4.1 Théorie de Rankine (1857)	
a) <i>Etat actif</i>	
b) <i>Etat passif</i>	
c) <i>Poussée due à une surcharge uniforme</i>	
e) <i>Cas de massif à surface libre inclinée avec un angle <math>\beta</math></i>	
III.5.4.2 Théorie de Coulomb (1776)	
a) <i>Etat actif</i>	
b) <i>Etat passif</i>	
III.5.4.3 Théorie de Boussinesq (Tables de Caquot et Kérisel)	
III.5.4.4 Construction de Culmann	
<b>III.6 Vérification de la stabilité des murs de soutènement</b>	<b>66</b>
III.6.1 Prédimensionnement des murs de soutènement	
III.6.2 Stabilité des murs-poids	
a) <i>Rotation ou renversement du mur</i>	
b) <i>Glissement du mur</i>	

c) <i>Glissement profond</i>	
d) <i>Résistance du sol de fondation</i>	
e) <i>Stabilité interne du mur</i>	
III.6.3 Stabilité des murs en béton armé	
Chapitre IV	<b>ELEMENTS DE STATISTIQUES ET PROBABILITES</b> 78
<b>IV.1 Généralités</b>	<b>78</b>
IV.1.1 Besoin de statistiques	
IV.1.2 Statistique descriptive et statistique inférentielle	
IV.2 Distributions statistiques et représentations associées	
IV.2.1 Définitions de base	
IV.2.2 Types de variables statistiques	
IV.2.3 Distributions statistiques. Effectifs, fréquences	
IV.2.4 Représentations graphiques des distributions statistiques	
a. <i>Variables nominales</i>	
b. <i>Variables ordinales et variables discrètes</i>	
c. <i>Variables continues : histogramme, polygone des fréquences, diagramme « branche et feuille »</i>	
<b>IV.2 Distributions statistiques et représentations associées</b>	<b>79</b>
IV.2.1 Définitions de base	
IV.2.2 Types de variables statistiques	
IV.2.3 Distributions statistiques. Effectifs, fréquences	
IV.2.4 Représentations graphiques des distributions statistiques	
<b>IV.3 Fréquences cumulées et fonction de répartition</b>	<b>85</b>
IV.3.1. Fréquences cumulées	
IV.3.2 Fonction de répartition	
<b>IV.4 Caractéristiques d'une distribution. Tendance centrale et dispersion</b>	<b>86</b>
IV.4.1 Généralités	
IV.4.2 Caractéristiques de tendance centrale	
a. <i>Mode</i>	
b. <i>Médiane et quantiles</i>	
c. <i>Moyenne arithmétique</i>	
IV.4.3 Caractéristiques de dispersion	
1. <i>Écart interquartile</i>	
2. <i>Écart-type. Variance</i>	
3. <i>Coefficient de variation <math>C_v(X)</math></i>	
IV.4.4 Moments et caractéristique de forme	
1. <i>Moments empiriques</i>	
2. <i>Caractéristique de forme</i>	
<b>IV.5. Modèle théorique de distribution. Variables aléatoires d'échantillonnage</b>	<b>94</b>
IV.5.1 Variables aléatoires	
IV.5.2 Espérance et moments	
IV.5.3 Lois de distribution théorique	
1. <i>Introduction</i>	
2. <i>Fonction de distribution</i>	

IV.5.4	Définition générale d'une variable Gaussienne	
Chapitre V	<b>SIMULATION ET GENERATION DE VARIABLES ALEATOIRES</b>	100
<b>V.1</b>	<b>Simulation</b>	100
V.1.1	Généralités	
V.1.2	Méthodologie de la simulation	
V.1.3	Un triptyque non ordonné	
V.1.4	qu'est-ce qu'une simulation numérique	
V.1.5	Comment se déroule une simulation numérique	
<b>V.2</b>	<b>Génération de variables et vecteurs aléatoires</b>	106
V.2.1	Introduction	
V.2.2	Simulation d'une variable aléatoire	
V.2.3	Suites équiréparties	
1.	<i>Méthode du milieu du carré (Von Newman, 1951)</i>	
2.	<i>Méthode de Lehmer (1951) généralisée</i>	
4.	<i>Méthodes relatives à la loi normale</i>	
-	Méthode directe	
-	Méthodes logarithmique- trigonométrique	
-	Description de la méthode	
V.2.4	Simulation d'un vecteur aléatoire	
V.2.5	Génération de variables corrélées	
V.2.6	Génération de variables corrélées et présentant une dérive	
<b>V.3</b>	<b>Simulation de Monte Carlo</b>	114
Chapitre VI	<b>LES TECHNIQUES DE GEOSTATIQUE</b>	118
<b>VI.1</b>	<b>Introduction</b>	118
<b>VI.2</b>	<b>Bases de la géostatistique</b>	119
VI.2.1	Hypothèse de stationnarité	
a.	<i>Stationnarité au sens strict</i>	
b.	<i>Stationnarité au sens large (d'ordre 2)</i>	
c.	<i>l'hypothèse intrinsèque</i>	
<b>VI.3</b>	<b>Propriétés du variogramme</b>	121
<b>VI.4</b>	<b>Variation d'estimation et variance de dispersion</b>	124
<b>VI.5</b>	<b>Le Krigeage</b>	125
VI.5.1	Absence de dérive (krigeage ponctuel simple)	
VI.5.2	Prise en compte d'une dérive (krigeage universel)	
VI.5.3	Krigeage étendu (estimation des valeurs moyennes)	
<b>VI.6</b>	<b>Cokrigeage</b>	133
Chapitre VII	<b>METHODE DES ELEMENTS FINIS</b>	134
<b>VII.1</b>	<b>Introduction</b>	134
<b>VII.2</b>	<b>modélisation, systèmes discrets et systèmes continus</b>	135
VII.2.1	Modélisation numérique	

VII.2.2	Systèmes discrets et systèmes continus	
<b>VII.3</b>	<b>Formulation intégrale</b>	<b>136</b>
VII.3.1	Introduction	
VII.3.2	Méthodes des résidus pondérés	
VII.3.2.1	<i>Méthode de collocation par points</i>	
VII.3.2.2	<i>Méthode de collocation par sous domaines</i>	
VII.3.2.3	<i>Méthode des moments</i>	
VII.3.2.4	<i>Méthode de Galerkin</i>	
VII.3.2.5	<i>Forme intégrale faible</i>	
<b>VII.4</b>	<b>Approximation par éléments finis</b>	<b>139</b>
VII.4.1	Démarche fondamentale	
VII.4.2	Définition de la géométrie des éléments	
a)	<i>Nœuds géométriques</i>	
b)	<i>Règles de répartition du domaine en éléments</i>	
c)	<i>Formes d'éléments classiques</i>	
<b>VII.4.3</b>	<b>Approximation nodale</b>	<b>142</b>
<b>VII.5</b>	<b>Analyse globale : assemblage</b>	<b>144</b>
Chapitre VIII	<b>PRESENTATION DU CODE DE CALCUL CESAR-LCPC</b>	<b>145</b>
<b>VIII.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>145</b>
<b>VII.2</b>	<b>Présentation générale de CESAR-LCPC</b>	<b>145</b>
VIII.2.1	Les composants de la version actuelle	
VIII.2.2	Grands domaines d'application et types d'ouvrages traités	
<b>VIII.3</b>	<b>Principes et Organisation d'une étude CESAR-LCPC</b>	<b>147</b>
VIII.3.1	L'interface	
a)	<i>Etape 1 : Création du maillage : de la géométrie au maillage</i>	
b)	<i>Etape 2 : Initialisation du modèle et propriétés</i>	
c)	<i>Etape 3 : Données d'initialisation</i>	
d)	<i>Etape 4 : "Conditions aux limites"</i>	
e)	<i>Etape 5 : Cas de charges</i>	
f)	<i>Etape 6 : Préparation du calcul</i>	
g)	<i>Etape 7 : Exploitation des résultats</i>	
h)	<i>Etape 8 : Exploitation des résultats</i>	
Chapitre IX	<b>ANALYSE PROBABILISTE DU COMPORTEMENT DES MURS DE SOUTÈNEMENT</b>	<b>156</b>
<b>IX.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>156</b>
<b>IX.2</b>	<b>Méthodologie</b>	<b>156</b>
IX.2.1	Introduction	
IX.2.2	Programme de calcul en éléments finis	
IX.2.3.3	<i>Analyse statistique des paramètres E et <math>\varphi</math></i>	
IX.2.3.1	<i>Généralités</i>	
IX.2.3.2	<i>Choix des paramètres de calcul</i>	
IX.2.3	Procédure de calcul répétitif et d'analyse statistique des résultats	
IX.2.4	Déroulement de la procédure de calcul statistique	

---

<b>IX.3 Simulation numérique</b>	159
V.3.1 Présentation du cas étudié	
<b>IX.4 Hypothèse de modélisation</b>	160
<b>IX.5 Maillage d'éléments finis.</b>	161
<b>IX.6 Comportement des matériaux et des interfaces</b>	162
<b>IX.7 Cas déterministe</b>	163
IX.7.1 Présentation du cas étudié	
IX.7.2 Présentation des résultats	
IX.7.3 Interprétation des résultats	
<b>IX.8 Cas statistiquement homogène</b>	171
IX.8.1 Présentation du cas étudié	
IX.8.2 Présentation des résultats	
IX.8.3 Interprétation des résultats	
<b>IX.9 Cas d'analyse d'un multicouche</b>	181
IX.9.1 Présentation du cas étudié	
IX.9.2 Présentation des résultats	
IX.9.3 Interprétation des résultats	
<b>IX.10 Cas hétérogène</b>	190
IX.10.1 Présentation du cas étudié	
IX.8.2 Présentation des résultats	
IX.10.3 Interprétation des résultats	
<b>IX.11 Comparaison des différentes analyses effectuées</b>	201
IX.11.1 Introduction	
IX.11.2 Résultats des calculs	
IX.11.3 Comparaison des résultats obtenus	
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	216

## ***LISTE DES FIGURES***

**Figure I.1** Types des incertitudes des propriétés du sol (Kulhawy, 1992).

**Figure I. 2** Résultats de la résistance de pointe in-situ (Popescu et al., 1997).

**Figure I. 3** Comparaison du coefficient de variation des coefficients de consolidation équivalents définies par (a) la surpression interstitielle  $vt_{50p}$  avec  $\rho=1.0$  et, (b) la surpression interstitielle  $vt_{50p}$  avec  $\rho=0.0$  (a) le tassement  $vt_{50s}$   $\rho=1.0$  (b) le tassement  $vt_{50s}$   $\rho=0.0$

**Figure I.4** Histogrammes des  $cvt_{50p}$  et  $cvt_{50s}$  simulées (avec 2000 simulations) ainsi que la distribution log-normale lissée pour une analyse, (a) 1D et, (b) 2D

**Figure I.5** Influence du coefficient de variation et la distances de corrélation de la perméabilité ( $\theta = \theta_b = \theta_b$ ) sur le débit moyen ( $mQ$ ) et son écart type ( $SQ$ ) (Griffiths et Fenton, 1997).

**Figure I.6** Maille déformée typique. Les régions plus foncées indiquent un sol plus faible (Griffiths et Fenton 2001).

**Figure II.1** Schéma général de calcul par un modèle de type probabiliste

**Figure II.2** Les différentes formes de variation des paramètres de sol en fonction de la profondeur (Jaksa, 1995).

**Figure II.3** Modification des caractéristiques d'autocorrélation par séparation de la dérive (Magnan, 1982).

**Figure III.1** Nomenclature des termes usuels

**Figure III.2** Mur à caissons

**Figure III.3** Mur gravitaire en maçonnerie

**Figure III.4** Mur à redans

**Figure III.5** Mur en «T renversé» classique

**Figure III.6** Mur à contreforts

**Figure III.8** Diverses dispositions de bèches

**Figure III.7** Classification des ouvrages de soutènement d'après le mode de reprise de la poussée

**Figure III.9** Précaution-drainage

**Figure III.10** Précaution-gel

**Figure III.11** Précaution-compaction

- Figure III.12** Variation de K en fonction de la déformation
- Figure III.13** Etat actif
- Figure III.14** Etat passif
- Figure III.15** Cercle de Mohr à l'équilibre limite
- Figure III.16** Lignes de glissement
- Figure III.17** actif de Rankine lignes de glissement
- Figure III.18** Diagramme de la pression active
- Figure III.19** Etat passif de Rankine lignes de glissement
- Figure III.20** Diagramme de la pression passive
- Figure III.21** Massif chargé uniformément
- Figure III.22** Poussée du à une surcharge uniforme
- Figure III.23** Massif à surface libre inclinée
- Figure III.24** Etat de contrainte
- Figure III.25** Coin de Coulomb
- Figure III.26** Théorie de Coulomb. Etat actif
- Figure III.27** Diagramme de l'équilibre des forces
- Figure III.28** Théorie de Coulomb. Etat actif. Sol cohérent
- Figure III.29** Théorie de Coulomb. Etat passif
- Figure III.30** Construction de Culmann pour le calcul de la poussée active
- Figure III.31** Construction de Culmann pour le calcul de la poussée passive
- Figure III.32** Dimensions usuelles d'un mur-poids.
- Figure III.33** Dimensions usuelles d'un mur de soutènement en béton armé
- Figure III.34** mur-poids
- Figure III.35** Sécurité au glissement.
- Figure III.36** Rupture superficielle.
- Figure III.37** Rupture profonde.
- Figure III.38** Lignes de glissement

**Figure III.39** Répartition théorique des contraintes sur le sol de fondation.

**Figure III.40** Mur de soutènement en béton armé.

**Figure III.41** La ligne de glissement coupe le talus.

**Figure III.42** La ligne de glissement coupe la face interne du voile.

**Figure III.43** Ecran vertical fictif

**Figure IV.1** Représentations graphiques des variables nominales

**Figure IV.2** Représentations graphiques des variables continues

**Figure IV.3** Fonction de répartition

**Figure IV.4** Classe médiane

**Figure IV.5** Coefficients d'asymétrie

**Figure IV.6** Distribution t de student (type VII de Pearson)

**Figure IV.7** Exemples de distribution gamma.

**Figure IV.8** Classification des distributions selon la valeur de K

**Figure IV.9** La courbe en cloche

**Figure V.1** Procédure de génération de valeurs aléatoires d'une variable X dont la fonction de répartition  $G(x)$  est connue.

**Figure VI.1** Exemple de variogramme

**Figure VI.2** Ajustement du variogramme- Modèle théorique.

**Figure VI.3** Modèles de variogramme

**Figure VI.4** Variance d'estimation (a) et variance de dispersion (b)

**Figure VII.1** Transformation des équations d'un système physique.

**Figure VII.2** Les divers types de frontières entre les éléments.

**Figure VII.3** Trou inadmissible entre les éléments.

**Figure VII.4** Minimisation de l'erreur de discrétisation géométrique.

**Figure VII.5** Eléments à une dimension.

**Figure VII.6** Eléments triangulaires.

**Figure VII.7** Eléments quadrilatéraux.

**Figure VII.8** Eléments tétraédriques.

**Figure VII.9** Eléments hexaédriques

**Figure VIII.1** Les composants de CESAR-LCPC version 4.0

**Figure IX.1** Schéma montrant les différentes étapes nécessaires à la détermination de la solution probabiliste.

**Figure IX.2** Présentation du mur de soutènement poids étudié.

**Figure IX.3** Maillage réalisé pour l'étude du mur de soutènement poids

**Figure IX.4** Maillage et conditions aux limites (cas déterministe)

**Figure IX.5** Isovaleurs des déplacements horizontaux « $u$ »

**Figure IX.6** Isovaleurs des déplacements verticaux « $v$ »

**Figure IX.7** Isovaleurs des contraintes verticales « $S_{yy}$ »

**Figure IX.8** Isovaleurs des contraintes horizontales « $S_{xx}$ »

**Figure IX.9** Déformé du modèle étudié

**Figure IX.10** Ligne de coupe derrière le mur.

**Figure IX.11** Contraintes horizontales derrière le mur

**Figure IX.12** Déplacements horizontaux derrière le mur

**Figure IX.13** Ligne de coupe base du mur.

**Figure IX.14** Contraintes verticales à la base du mur

**Figure IX.15** Déplacements verticaux à la base de mur

**Figure IX.16** Maillage et conditions aux limites du cas analysé (Cas statistiquement homogène)

**Figure IX.17** Ligne de coupe derrière le mur.

**Figure V.18** Contraintes horizontales derrière le mur

**Figure IX.19** Evolution des écart-types des contraintes horizontales derrière le mur

**Figure IX.20** Déplacements horizontaux derrière le mur

**Figure IX.21** Evolution des écart-types des déplacements horizontaux derrière le mur

**Figure IX.22** Ligne de coupe base du mur.

**Figure IX.23** Contraintes verticales à la base du mur

- Figure IX.24** Evolution des écart-types des contraintes verticales à la base du mur
- Figure IX.25** Déplacements verticaux à la base du mur
- Figure IX.26** Evolution des écart-types des déplacements verticaux à la base du mur
- Figure IX.27** Maillage et conditions aux limites du cas analysé (E et  $\varphi$  variables aléatoirement d'une couche à une autre).
- Figure IX.28** Ligne de coupe derrière le mur.
- Figure IX.29** Contraintes horizontales derrière le mur
- Figure IX.30** Evolution des écart-types des contraintes horizontales derrière le mur
- Figure IX.31** Déplacements horizontaux derrière le mur
- Figure IX.32** Evolution des écart-types des déplacements horizontaux derrière le mur
- Figure IX.33** Ligne de coupe base du mur.
- Figure IX.34** Contraintes verticales à la base du mur
- Figure IX.35** Evolution des écart-types des contraintes verticales à la base du mur
- Figure IX.36** Déplacements verticaux à la base du mur
- Figure IX.37** Evolution des écart-types des déplacements verticaux à la base du mur
- Figure IX.38** Maillage et conditions aux limites du cas analysé (E et  $\varphi$  variables aléatoirement d'un bloc à un autre).
- Figure IX.39-a** Synthèse des valeurs générées de E
- Figure IX.39-b** Synthèse des valeurs générées de  $\varphi$
- Figure IX.40** Ligne de coupe derrière le mur.
- Figure IX.41** Contraintes horizontales derrière le mur
- Figure IX.42** Evolution des écart-types des contraintes horizontales derrière le mur
- Figure IX.43** Déplacements horizontaux derrière le mur
- Figure IX.44** Evolution des écart-types des déplacements horizontaux derrière le mur
- Figure IX.45** Ligne de coupe base du mur.
- Figure IX.46** Contraintes verticales à la base du mur
- Figure IX.47** Evolution des écart-types des contraintes verticales à la base du mur
- Figure IX.48** Déplacements verticaux à la base du mur

**Figure IX.49** Evolution des écart-types des déplacements verticaux à la base du mur

**Figure IX.50** Contraintes horizontales moyennes derrière le mur pour les différents calculs

**Figure IX.51** Contraintes horizontales max et min derrière le mur pour les différents calculs

**Figure IX.52** Evolution des écart-types des contraintes horizontales derrière le mur pour les différents calculs

**Figure IX.53** Déplacements horizontaux moyens derrière le mur pour les différents calculs

**Figure IX.54** Déplacements horizontaux max et min derrière le mur pour les différents calculs

**Figure IX.55** Evolution des écart-types des déplacements horizontaux derrière le mur pour les différents calculs

**Figure IX.56** Contraintes verticales moyennes à la base du mur pour les différents calculs

**Figure IX.57** Contraintes verticales max et min à la base du mur pour les différents calculs

**Figure IX.58** Evolution des écart-types des contraintes verticales à la base du mur pour les différents calculs

**Figure IX.59** Déplacements verticaux moyens à la base du mur pour les différents calculs

**Figure IX.60** Déplacements verticaux max et min derrière le mur pour les différents calculs

**Figure IX.61** Evolution des écart-types des contraintes verticales à la base du mur pour les différents calculs

## ***LISTE DES TABLEAUX***

**Tableau I.1** Fonctions d'autocorrélations, distances de corrélations et échelles de fluctuations données par différents Auteurs (Jaksa, 1995 et Houmadi, 2004)

**Tableau IV.1** Différents types de variables statistiques

**Tableau IV.2** Présentation des variables statistiques

**Tableau IV.3** Variables continues : amplitudes et fréquences

**Tableau IV.4** Distributions cumulées

**Tableau IV.5** Caractéristiques d'une distribution

**Tableau V.1** Valeurs aléatoires pour une distribution uniforme  $r_u$  (0,1) (moyenne 0,4992 ; écart type 0,2989)

**Tableau V.2** Valeurs aléatoires pour une distribution normale réduite  $R_u$  (0,1) (moyenne 0,1403 ; écart type 0,9047)

**Tableau IX.1** Hypothèse de calcul

**Tableau IX.2** Caractéristiques des matériaux pour la modélisation

**Tableau IX.3** Contraintes horizontales derrière le mur

**Tableau IX.4** Déplacements horizontaux derrière le mur

**Tableau IX.5** Contraintes verticales à la base du mur

**Tableau IX.6** Déplacements verticaux à la base de mur

**Tableau IX.7** Valeurs générées des paramètres variables  $E$  et  $\varphi$

**Tableau IX.8** Valeurs générées des paramètres variables  $E$  et  $\varphi$

**Tableau IX.9** Valeurs générées des paramètres variables  $E$  et  $\varphi$

## *Notations principales*

$\sigma_h$	: Contrainte latérale totale.
$\sigma_v$	: Contrainte verticale totale.
$K$	: Coefficient de la pression des terres.
$\sigma'_h$	: Contrainte latérale totale effective.
$\sigma'_v$	: Contrainte verticale totale effective.
$K_0$	: Coefficient des terres au repos.
$\varphi$	: Angle de frottement interne du sol.
$c$	: Cohésion totale du sol.
$\gamma$	: Poids volumique total du sol.
$c'$	: Cohésion effective du sol.
$\varphi'$	: Angle de frottement interne effectif du sol.
$E$	: Module d'Young.
$\nu$	: Coefficient de poisson.
$\psi$	: Angle de dilatance.
$K_a$	: Coefficient de la pression active.
$K_p$	: Coefficient de la pression passive.
$p_a$	: Pression active.
$p_p$	: Pression passive.
$F_a$	: Résultante de la pression active par mètre linéaire de largeur.
$F_p$	: Résultante de la pression passive par mètre linéaire de largeur.
$\delta$	: L'angle de frottement écran-sol.
$c_w$	: Adhérence sol-mur.
$W$	: Poids du mur.
$S$	: Sous-Pression.
$P_p$	: butée des terres.
$P_a$	: Poussée des terres.
$R$	: Réaction du sol de fondation.

---

$F_r$	: Coefficient de stabilité au renversement.
$F_g$	: Coefficient de sécurité au glissement.
$e$	: Excentrement de la composante normale de R.
$U(x)$	: Fonction approchée
$U_{ex}(x)$	: Fonction exacte.
$N_i(x)$	: Fonctions d'interpolation nodales ou fonctions de forme.
$\Omega$	: Domaine.
$\Omega^e$	: Sous domaines.
$[N]$	: Matrices des fonctions d'interpolation nodale.
$[B]$	: Matrice de déformation.
$[D]$	: Matrice qui contient les propriétés élastiques du matériau.
$[K]$	: Matrice de rigidité global.
$[k^e]$	: Matrice de rigidité de l'élément.
$\{U\}$	: Vecteur déplacement global.
$\{F\}$	: Vecteur des forces nodales.
$f_i$	: Fréquence.
$\bar{x}$	: Moyenne arithmétique.
$V(X)$	: Variance.
$\sigma(X)$	: Ecart-type.
$C_v(X)$	: Coefficient de variation.
$E(X)$	: Espérance mathématique.

## RESUME

Le présent travail fait partie d'une série de recherches consacrées à l'évaluation de l'effet de la variabilité spatiale sur le comportement des ouvrages. Il présente une étude en éléments finis de l'influence des variations dans l'espace des propriétés du sol sur le comportement des murs de soutènement.

Les propriétés de sol considérées comme variables aléatoires, sont le module d'élasticité isotrope  $E$  et l'angle de frottement interne  $\varphi$ . La loi de distribution normale est choisie pour représenter la répartition des valeurs de ces deux paramètres. L'étude probabiliste a été effectuée par la méthode de Monte Carlo.

Deux séries de cents (100) calculs et une série de vingt (20) calculs ont été effectuées. Elles représentent trois cas d'analyse. D'abord la variabilité des propriétés des sols est aléatoire dans tout le sol (cas statistiquement homogène). Ensuite, la variabilité des propriétés des sols est supposée unidimensionnelle (valeurs uniformes dans chaque plan horizontal) : le milieu est divisé en couches et les propriétés  $E$  et  $\varphi$  varient d'une couche à une autre et sont constants dans une même couche.

Enfin nous analyserons le cas d'une variation bidimensionnelle des propriétés  $E$  et  $\varphi$  du sol (cas hétérogène) : les paramètres de calcul varient d'un point (bloc) à un autre (ils varient verticalement et horizontalement).

Les résultats de ces trois séries de calculs ont été analysés en termes de variabilité des tassements et contraintes pour montrer l'influence de la structure de la variabilité du sol. La comparaison avec des solutions déterministes classiques a aussi été effectuée.

Mots Clés : variabilité, éléments finis, probabilité, murs de soutènement

## ABSTRACT

This work belongs to a series of research devoted to the evaluation of the effect of the space variability on the behavior of the works. It presents a study in finite elements of the influence of the variations in the space of the properties of the ground on the behavior of retaining wall.

The properties of soil, considered as random variables, are the isotropic modulus of elasticity  $E$  and the friction angle coefficient  $\varphi$ . The law of distribution normal is selected to

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

represent the distribution of the values of these two parameters.

The probabilistic study was carried out by the Monte Carlo method.

Two series of hundred (100) calculations and one serie of twenty (20) calculations were carried out. They represent three cases of analysis.

First, the variability of soil properties is random across the ground (statistically homogeneous case). Then, the variability of the properties of the grounds is supposed to be one-dimensional (uniform values in each horizontal plane) : the middle is divided into layers and properties  $E$  and  $\varphi$  vary from one layer to another and are constant in one same layer.

Finally, we will analyze the case of a two-dimensional variation of the properties  $E$  and  $\varphi$  of the ground (heterogeneous case): calculation parameters vary from point (block) to another (they vary vertically and horizontally).

The results of the three series of calculations of retaining wall were analyzed in terms of variability of compressings and stresses to show the influence of the structure of the variability of the ground.

The comparison with traditional deterministic solutions was also carried out.

*Key Words:* variability, finite element; probability, retaining walls

CHAPITRE 0

# *INTRODUCTION*

## **INTRODUCTION GENERALE**

La mécanique des sols classiques repose sur des hypothèses simplificatrices qui ignorent le caractère hétérogène des sols. La variation d'un point à l'autre des propriétés physiques et mécaniques du sol crée pourtant des incertitudes sur les valeurs représentatives des paramètres de calcul, ce qui se traduit par des incertitudes sur la prévision du comportement des ouvrages.

Les méthodes de calcul actuellement utilisées en géotechnique (dites méthodes déterministes) se basent sur des lois de comportement du sol ou des valeurs fixes sont attribuées aux paramètres figurant dans les équations du modèle mathématique adopté. Les facteurs de sécurité ainsi calculés sont comparés à des différentes sources d'incertitudes comme par exemple l'échantillonnage limité, les erreurs de mesure inévitables, l'imperfection des modèles mathématiques et la variabilité dans le temps et dans l'espace des principaux paramètres géotechniques. Il est évident que ces derniers ne peuvent jamais être évalués de manière entièrement déterministe.

C'est pourquoi les résultats finaux d'une analyse géotechnique deviennent à leur tour affectés par une certaine quantité d'incertitude.

La variabilité élevée des paramètres géotechniques, leur caractère évolutif dans le temps et l'espace et l'incertitude importante qui les affecte, rendent nécessaire leur prise en compte sous forme de champs aléatoires. Ces derniers sont définis comme des variables aléatoires auxquelles on associe une localisation dans l'espace.

Et c'est ainsi que depuis quelques décennies, on assiste à l'essor d'une nouvelle branche de la mécanique des sols qui s'est fixé pour objectif de traiter quantitativement la variabilité naturelle des sols et toutes les incertitudes affectant le dimensionnement des ouvrages afin de déterminer la précision ou la fiabilité des études géotechniques et des projets.

L'approche probabiliste, et c'est la méthode principale dans il s'agit, tient compte du caractère aléatoire des variables. Elle fournit un résultat exprimé en probabilité de rupture. Celle-ci constitue une mesure homogène de la fiabilité qui peut en outre s'intégrer dans une étude économique globale.

Trois facteurs ont concouru au développement des méthodes statistiques et probabilistes en mécanique des sols :

- Le besoin ressenti par les spécialistes de pouvoir quantifier la variabilité naturelle des propriétés des sols de façon à optimiser les reconnaissances géotechniques,
- Le désir des ingénieurs de calculer le risque de ruine de leurs projets,
- Le développement des techniques statistiques et probabilistes et le souci d'applications concrètes de leurs auteurs.

Il est encore trop tôt pour distinguer clairement les domaines d'application pratique des ces nouvelles méthodes mais il est certain qu'elles vont s'installer progressivement dans tous les secteurs de la géotechnique et que dans les prochaines années elles feront partie des connaissances obligatoires de tous les ingénieurs et spécialistes de la mécanique des sols et des autres branches de la géotechnique.

L'étude présentée dans ce rapport a pour objectif de tester l'influence des fonctions de variabilité spatiale sur le comportement d'un mur de soutènement.

Il comprend six chapitres.

Le chapitre I est consacré à une brève revue bibliographique : un ensemble de connaissances se rapportant au même domaine de recherche et dont il faut impérativement s'imprégner si l'on veut avoir une idée bien précise. Dans cette brève revue bibliographique, il était impossible de séparer les travaux d'auteurs ayant trait aux analyses des comportements d'ouvrages de géotechnique des travaux dont le centre d'intérêt est la variabilité et tous les outils qui permettent de la caractériser.

Et c'est l'objet du chapitre II. Il traite de la variabilité des paramètres géotechniques et des aléas qui en découlent dans leur caractérisation ou de leur influence sur les solutions de problèmes de géotechnique. Par ailleurs, il met en relief la nécessité d'utiliser des techniques d'analyse de cette variabilité.

Notre objet d'étude étant les murs de soutènement, le chapitre III se donne comme objectif de passer en revue un ensemble de connaissances classiques se rapportant à ce sujet. Un tour d'horizon quasiment complet : définitions, types de murs, stabilité, calculs...

Un des outils indispensables à l'analyse du problème que nous traitons est « les statistiques et probabilités ». Celles-ci sont une façon pénétrer l'inconnu qui découle de l'hétérogénéité des sols en termes de l'incertitude qui affecte l'estimation des paramètres de calculs.

Nous y donnons au chapitre IV quelques notions générales. Ces notions sont aujourd'hui assez bien vulgarisées et il n'y a aucune difficulté à accéder à ces connaissances.

Pour caractériser l'effet de cette variabilité des paramètres géotechniques sur le comportement des ouvrages, il est nécessaire d'utiliser une technique de simulation, dont la plus populaire et la plus performante est évoquée et détaillée au chapitre V: la technique de simulation de Monte Carlo.

Le chapitre VI se distingue du chapitre IV par son aspect original, que l'on doit à Matheron de l'Ecole des Mines et que l'on peut considérer comme une extension des notions développées dans ce chapitre IV. Ces outils, dits de géostatistique, permettent une description des variations des variables dites régionalisées.

Pour pouvoir prendre en compte le caractère hétérogène du sol au travers de ses propriétés physiques et mécaniques, et donc pouvoir décomposer le massif en éléments plus petits avec des valeurs des paramètres de calcul, nous utilisons presque toujours la méthode des éléments finis (chapitre VII), bien souvent au travers de logiciels comme le CESAR-LCPC (chapitre VIII). C'est la méthode la plus utilisée tant elle est performante.

Au dernier chapitre, soit le chapitre IX, on analyse les murs de soutènements par approche probabiliste. Trois cas d'étude y sont abordés : le cas statiquement homogène (100 calculs), un cas bidimensionnel à variabilité bidimensionnelle (100 calculs), le cas hétérogène (20 calculs). Des résultats relatifs aux contraintes et déformations, sous forme de courbes et de tableaux y sont donnés.

Malgré le développement d'outils de calculs (méthodes numériques) de plus en plus performants et une description de sol de plus en plus proche de la réalité, il existe toujours un écart entre les résultats de calcul et les valeurs des solutions réels à la fois en laboratoire et in situ.

C'est dans l'espoir de réduire ce biais existant, ou, tout au moins de progresser dans la compréhension de ces divergences, que les géotechniciens poussent leurs investigations dans l'application de diverses techniques dont les méthodes statistiques et probabilistes, avec comme objectif de prendre en compte l'effet de la variabilité des propriétés physiques et mécaniques de sol sur le comportement des ouvrages de génie civil.

Enfin ce travail réalisé dans le cadre de la préparation d'un mémoire de magister se termine par une conclusion. L'accent est ainsi mis sur l'importance de ces techniques et de leur développement éventuel. L'espoir est qu'un jour les ingénieurs accorderont plus d'importance à toutes ces méthodes dans leurs diverses applications.

*CHAPITRE I*

***REVUE BIBLIOGRAPHIQUE***

## CHAPITRE I

**Revue bibliographique****I.1. INTRODUCTION**

La description et l'analyse de l'incertain en géotechnique, avec pour champs d'application la sécurité des ouvrages et les risques, sont des questions à la mode en ce début du 21<sup>ème</sup> siècle. En témoigne l'existence de programmes nationaux de recherche, de colloques et de séminaires... qui s'affichent sous cette bannière.

Les recherches dans les domaines qui prennent en compte la variabilité des paramètres de sol et leur influence sur le comportement des ouvrages se multiplient de jour en jour. Une étude bibliographique entière, exhaustive est très difficile. Nous nous contenterons d'une brève revue bibliographique qui nous permettra de comprendre mieux ces nouvelles approches dont ce travail de thèse fait partie.

La plupart des études présentées par les auteurs sont basées sur les mêmes principes :

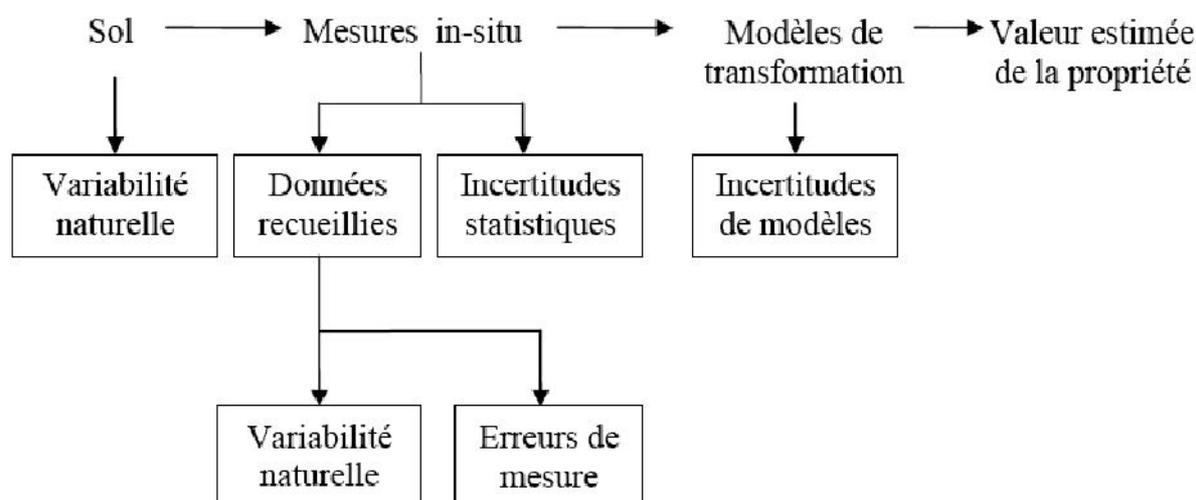
- on présente les incertitudes sur les grandeurs géotechniques, on les quantifie à partir d'essais de laboratoire ou in situ,
- on modélise mathématiquement ces incertitudes sous la forme de variables aléatoires ou de champs aléatoires,
- on décrit les méthodes d'étude de la propagation de ces incertitudes au travers du modèle déterministe et de calcul d'une probabilité de rupture.

**I.2. ORIGINES ET CARACTERISTIQUES DE LA VARIABILITE DES SOLS**

Une chose est certaine : le sol est un matériau hétérogène. Ses propriétés sont variables d'un point à un autre. L'incertitude dans la prévision des réponses mécanique ou hydraulique en géotechniques est un phénomène complexe résultant de plusieurs types de sources.

La variabilité dans les propriétés mesurées dans les couches de sol vient de différentes sources. Phoon et Kulhawy (1999a) ont quantifié la variabilité inhérente (intrinsèque), les erreurs de mesure et l'incertitude de transformation (corrélation entre propriétés, modèle rhéologique, ...etc.) en tant que sources primaires d'incertitude géotechnique, comme illustré sur la figure 1.1. L'origine de la variabilité spatiale inhérente est le processus de sédimentation géologiques qui a produit et modifie continuellement les couches de sol. Les erreurs de mesure, y compris ceux provoquées par l'appareillage, les procédures opératoires et

les effets des essais effectués hors norme, constituent la deuxième source d'erreur. En général, ces deux sources peuvent être classifiées comme des données dispersées. La troisième source d'incertitude est présentée quand des mesures de laboratoire sont transformées en propriétés de sol de conception en utilisant des modèles empiriques ou de corrélations.



**Figure I.1** Types des incertitudes des propriétés du sol (Kulhawy, 1992).

Selon les mêmes auteurs, la variabilité spatiale des propriétés de sol, peut être représentée sous la forme :

$$Y(X) = T(X) + \varepsilon(X) \quad (I.1)$$

$Y(X)$  est la propriété de sol au point  $X$ ;  $T(X)$  est la fonction déterministe donnant la propriété moyenne de sol à  $X$  (dénommé également la fonction de tendance) ; et  $\varepsilon(X)$  est le résiduel (composante de fluctuation) au point  $X$  et peut être défini comme action ou champ aléatoire homogène (Vanmarcke, 1983). Cette fonction peut être réécrite pour expliquer l'erreur aléatoire (DeGroot et Baecher, 1993),

$$Y(X) = T(X) + \varepsilon_r(X) + \varepsilon_n(X) \quad (I.2)$$

$\varepsilon_r(X)$  est le résiduel de la propriété de sol dû à la variabilité intrinsèque normale, et  $\varepsilon_n(X)$  le résiduel dû aux erreurs de mesure. La séparation des erreurs de mesure et de la variabilité intrinsèque des propriétés de sol est une procédure imprécise, comme discutée par Phoon et Kulhawy, (1999a ; 1999b). Une particularité de la variabilité intrinsèque des propriétés de sol est la structure de corrélation, autrement-dit, ces propriétés ne changent pas aléatoirement dans l'espace, mais montrent de la concordance (autocorrélation) d'un point à un autre dans l'espace. Par conséquent,  $\varepsilon_r(X)$  décrit un ensemble de variables aléatoires corrélées

entre elles. La procédure raisonnable pour mesurer la variabilité intrinsèque, est de modéliser  $\varepsilon_r(X)$  comme champ aléatoire homogène (VanMarcke, 1983).

Utilisant les résultats des enregistrements de la résistance de pointe in situ (figure I.2), Popescu, Prevost et Deodatis (1997) ont prouvé que les caractéristiques probabilistes de la variabilité spatiale intrinsèque du sol peuvent être représentées en utilisant les champs stochastiques avec les particularités suivantes :

- Les valeurs moyennes : celles-ci peuvent suivre une tendance (telle qu'une augmentation uniforme de résistance au cisaillement de sol avec la profondeur).

Ces tendances systématiques peuvent être identifiées et séparées.

- La variance : ceci représente le degré des fluctuations des valeurs moyennes.
- La structure de corrélation : ceci décrit la similitude entre les fluctuations enregistrées en deux points en fonction de la distance entre ces points. Suivant les indications de la figure 1.2, on peut observer un certain degré de concordance entre les fluctuations, avec cette concordance les points de mesure deviennent plus rapprochés. Cette concordance entre les valeurs de chaque propriété matérielle à différents endroits peut être décrite par des fonctions d'autocorrélation (VanMarcke, 1983) ; Le paramètre principal de la fonction d'autocorrélation s'appelle distance de corrélation (ou échelle de fluctuation), au delà de cette distance la corrélation est nulle ;

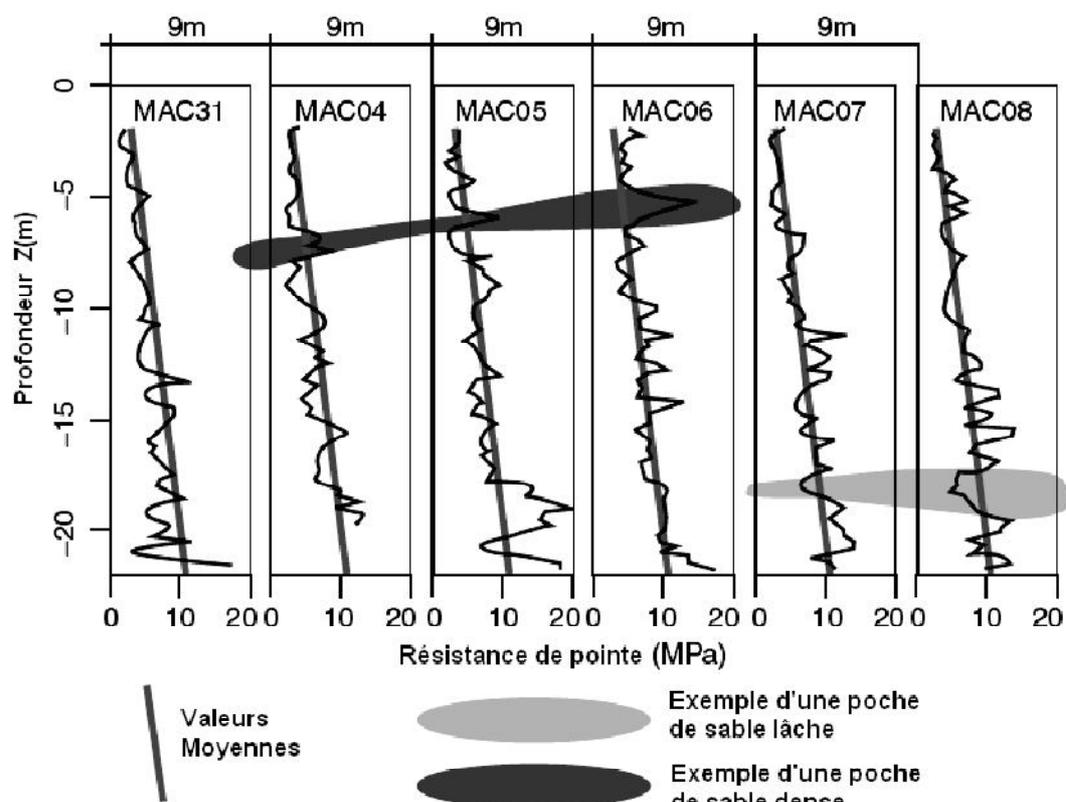


Figure I. 2 Résultats de la résistance de pointe in-situ (Popescu et al., 1997).

- La distribution de probabilité : Popescu et al (1998a) a conclu que : premièrement, la plupart des travaux effectués de propriétés de sol (Lumb, 1966 ; Shultze, 1971 ; Harr, 1977 ; Jefferies, 1989 ; Griffiths et Fenton, 1993) suivent des distributions non gaussiennes, et deuxièmement les propriétés de sol peuvent suivre différentes distributions de probabilité pour différents matériaux et emplacements. Par conséquent, en plus de la moyenne et de la variance, il est également nécessaire d'avoir plus d'informations sur des distributions de probabilité des propriétés de sol.

### I.3 MODELISATION DES INCERTITUDES

Si l'incertitude sur les propriétés de sol est correctement évaluée et quantifiée, il est souhaitable de déterminer comment cette incertitude se traduit sur l'ouvrage considéré au niveau d'un certain nombre de grandeurs d'intérêt pour l'ingénieur. Ces grandeurs peuvent caractériser le fonctionnement d'un ouvrage géotechnique ou sa sécurité. Dans cet objectif, il est nécessaire d'évaluer la propagation d'incertitude au travers d'un modèle déterministe du système géotechnique étudié. Par modèle déterministe, on entend toute méthode permettant d'obtenir une estimation quantitative de la grandeur d'intérêt (appelée variable de sortie ou output ou réponse), pour un certain nombre de données (appelées variables d'entrée ou input). Il peut s'agir d'une équation mathématique, d'un modèle analytique ou empirique, d'une simulation numérique, etc. L'étude de la propagation d'incertitude a pour objet de caractériser de manière probabiliste la variable de sortie à partir des caractéristiques probabilistes des variables d'entrée. Lorsque cette caractérisation est effectuée, la définition d'un ou plusieurs critères de rupture (défaillance) permet d'accéder à la donnée la plus intéressante pour l'ingénieur, à savoir la probabilité de rupture.

Pour la modélisation des variables d'entrée, l'ingénieur a deux solutions correspondant à deux niveaux de complexité successifs :

- Si l'on s'intéresse à des grandeurs n'ayant pas d'extension spatiale (c'est-à-dire n'étant pas susceptible de prendre une valeur différente selon le point de l'espace considéré), ou si l'on souhaite négliger la variabilité spatiale d'une variable, on peut modéliser l'aléa sous forme de variables aléatoires. Dans ce cas, les variables

aléatoires d'entrée du modèle déterministe ne sont caractérisées que par leur distribution statistique, et éventuellement par leurs coefficients de corrélation.

Une telle modélisation des paramètres mécaniques du sol ne saurait être qu'une approximation, puisqu'elle fait abstraction des variations spatiales apportées par l'histoire géologique souvent complexe des sites considérés.

- Dans le cas où la variabilité spatiale du sol est prise en compte, les variables aléatoires d'entrée peuvent être modélisées par l'intermédiaire de champs aléatoires, pour lesquels la valeur numérique de la variable dépend des coordonnées spatiales du point considéré. Dans ce cas, une variable d'entrée est caractérisée par sa distribution statistique et par ses éventuels coefficients de corrélation avec d'autres variables, mais également par une fonction d'autocorrélation. Celle-ci caractérise la corrélation entre deux points du système en fonction de leurs positions respectives.

#### **I.4 MODELISATION EN VARIABLES ALEATOIRES**

Pour l'estimation de la sécurité d'un système, la prise en compte des incertitudes sur ses variables repose sur les opérations préliminaires suivantes :

- choix d'un type d'indicateur de la sécurité du système : indice de fiabilité ou probabilité de rupture.
- modélisation de l'aléa sur les  $n$  variables aléatoires d'entrée (rangées dans un vecteur  $x$ ) : choix de lois statistiques pour représenter leurs distributions, et de coefficients de corrélations. Dans ces lois statistiques sont inclus les moments principaux (moyenne, écart-type, coefficient d'asymétrie, coefficient d'aplatissement, etc.) ainsi que le coefficient de variation de chaque variable (noté COV, et défini comme le rapport de l'écart-type à la moyenne).
- choix d'un modèle déterministe fiable, fournissant une ou plusieurs valeurs de sortie (rangées dans le vecteur  $U$ ), fixes pour un jeu de variables d'entrée données (ces variables comprenant les variables aléatoires du vecteur  $x$ , plus éventuellement un ensemble de variables déterministes dont l'aléa est négligé).
- choix d'un seuil sur chaque variable aléatoire de sortie (vecteur  $U$ ), tel que le système est considéré comme défaillant dès lors qu'il est franchi. En présence de

plusieurs variables aléatoires de sortie, la rupture est admise dès qu'au moins un des seuils est franchi.

Lorsque ces étapes ont été réalisées, il est nécessaire de définir une fonction dite "de performance", notée  $G(x)$ . Il y a autant de fonctions de performances que de variables de sorties pertinentes (c'est-à-dire de variables de sorties munies d'un seuil que l'on ne souhaite pas dépasser). Une fonction de performance  $G$  est une fonction des variables aléatoires d'entrée, et dépend du modèle déterministe et du seuil de la variable de sortie considérée. Elle doit satisfaire aux contraintes suivantes :

- si  $G(x) < 0$  : le système est défaillant (c'est-à-dire que le seuil fixé est dépassé)
- si  $G(x) > 0$  : le système est en sécurité
- si  $G(x) = 0$  : le système est au bord de la défaillance

L'indicateur de sécurité le plus souhaitable est la probabilité de rupture. Plusieurs méthodes de détermination de cette probabilité sont présentées dans la suite de cette section. La méthode de Monte-Carlo est la méthode la plus évidente et la plus fiable, mais son coût calculatoire est très élevé. La méthode des tirages d'importance permet, dans une certaine mesure, de réduire le nombre d'appels au modèle déterministe, mais est susceptible de se montrer moins fiable dans le cas d'une surface d'état limite tourmentée, et nécessite la connaissance du point de conception (défini comme le point de rupture le plus probable). On trouve aussi dans la littérature (Au et Beck, 2001), la méthode de simulation par Subset qui réduit énormément le nombre de simulation. Un autre type de méthodes permet de substituer au modèle déterministe un méta-modèle analytique. C'est le cas de la méthode de la surface de réponse stochastique par collocation CSRSM (Isukapalli et al. 1998, Isukapalli 1999, Phoon et Haung 2007, Huang et al. 2009, Li et al. 2010, Mollon et al. 2011). Le calage du méta-modèle s'effectue à partir d'un nombre réduit d'appels au modèle d'origine, et l'application de la méthode de Monte-Carlo peut ensuite s'effectuer sur le méta-modèle pour un coût calculatoire très faible. Des méthodes approchées de calcul de la probabilité sont également présentées. Ces méthodes sont fondées sur la détermination du point de conception et sur une approximation locale de la surface d'état limite autour de ce point.

## I.5 EFFETS DE LA VARIABILITE DES PARAMETRES DES SOL (MODELISATION DE L'ALEA EN CHAMPS ALEATOIRES)

### I.5.1 Modèles stochastiques

De diverses méthodes stochastiques peuvent être utilisées pour obtenir et représenter des caractéristiques stochastiques de sol. Fenton (1999a) a précisé les méthodes généralement utilisées et sont comme suit : la fonction de corrélation ou de covariance, le semi-variogramme, la fonction de variance, la fonction de variance du coefficient d'ondelette, et le periodogramme. En outre, une décision devrait être prise pour utiliser les modèles des échelles finis (également connu comme modèle à courte mémoire) ou un modèle de fractale (également connu en tant que modèle statistique autosimilaire, de longue mémoire) pour représenter la structure de corrélation des propriétés de sol.

Fenton (1999a ; 1999b) a comparé différents outils utilisés en identifiant les modèles stochastiques plus adaptés pour représenter des propriétés de sol.

Le modèle stochastique le plus commun actuellement utilisé dans la géotechnique est l'échelle finie (VanMarcke, 1983 ; Popescu, 1995, 1997 et 1998b ; DeGroot, 1996 ; Hegazy et al, 1996 ; Ural, 1996 ; Fenton et Griffiths, 2002). Cependant, le modèle stochastique à échelle finie a plusieurs inconvénients parce que l'échelle de fluctuation dépend de la taille du domaine d'analyse et de l'intervalle de prélèvement (DeGroot et Baecher, 1993 ; Fenton, 1999b).

De l'étude de la variation verticale des résistances de pointe ( $q_c$ , pour l'essai de pénétration statique, CPT), Fenton (1999a ; 1999b) a observé que les propriétés de sol semblent être fractales dans la nature. Fenton a démontré que quand le prélèvement d'un processus fractal, l'échelle de fluctuation dépend de la taille du domaine. Par conséquent, une échelle de fluctuation deviendra petite/grande quand le domaine diminue/augmente.

De même, les ingénieurs intéressés à caractériser un très petit/grand domaine devraient utiliser des petites/grandes échelles de fluctuation pour un site. Ce que si un chercheur obtient une échelle de fluctuation de 10m pour un domaine de 50 m de largeur, l'échelle peut être beaucoup plus grande si le domaine est 10 fois plus grand. Cependant, Fenton (1999b) a illustré cela en utilisant un modèle de fractale qui

n'écarte pas la dépendance sur la taille du domaine, mais permet un meilleur arrangement de variation stochastique. En conclusion, il y aurait peu de différence entre le modèle de l'échelle fini convenablement choisi et le vrai modèle de fractale sur le domaine fini.

On conclut que le modèle de l'échelle fini utilisant une fonction de corrélation est généralement de loin le modèle le plus utilisé (Popescu, 1995). Des modèles de fractale (long-mémoire), théoriquement plus appropriés pour des propriétés de sol, ils ont besoin d'être développés et examinés.

Des modèles stochastiques sont également utilisés dans d'autres secteurs scientifiques et d'ingénierie. Il est commode d'utiliser la théorie mathématique-statistique indépendante pour modéliser des processus physiques. Cependant, les modèles qui impliquent la dépendance statistique du temps ou de l'espace sont souvent plus réalistes. Entre autres, plusieurs travaux dans la littérature ont été effectués sur le développement des statistiques pour les données spatiales (Lebourgeois F. et Godfroy P., 2006, Pinkus et Klein, 2000, Moeys, 2007). Des modèles corrélés dans l'espace ont été développés dans plusieurs secteurs scientifiques, y compris la géologie, les sciences de la terre, la science atmosphérique, et l'océanographie. Simplement, des modèles corrélés dans l'espace sont employés dans chaque discipline qui implique des données rassemblées de différents endroits dans l'espace. Par exemple, Peters et Bonelli (1982) ont collecté des données météorologiques (espace-temps) pour étudier les effets de la pollution atmosphérique.

Soulie et al. (1990), Chiasson (1995) et Deutsch, (2002) utilisent le variogramme pour représenter la variabilité des gisements d'argile. Le modèle géostatistique utilisé dans ces études est semblable à celui utilisé dans l'étude citée au-dessus, mais dans cette thèse, la fonction de covariance a été utilisée, plutôt qu'au variogramme, pour exprimer la corrélation spatiale. Un variogramme est une mesure de la dissimilitude entre deux points dans l'espace séparé par une distance  $h$ , selon la relation suivante :

$$2\gamma(h) = \text{Var}[Z(x+h) - Z(x)]$$

Avec  $2\gamma(h)$  est la valeur de variogramme à une distance  $h$  de séparation ;  $Z(x)$  est la valeur de la variable aléatoire au point  $x$ . Dans cette étude, la fonction de covariance est choisie pour représenter la structure de corrélation (Cressie, 1991).

### ***1.5.2 Caractéristiques probabilistes de la variabilité spatiale des propriétés de sol***

Après une recherche étendue, Phoon et Kulhawy (1999a ; 1999b) ont produit quelques "directives approximatives" pour des types d'incertitude des propriétés géotechniques. Ils ont utilisé un champ aléatoire homogène pour représenter la variabilité intrinsèque du sol. Ils ont estimé des coefficients de variation (COV), dus à la variabilité intrinsèque, l'intervalle pour les échelles de fluctuation de la variabilité intrinsèque, et des COV dus à l'erreur de mesure.

D'autres auteurs traitant de la variabilité spatiale des paramètres géotechniques ont déterminé l'échelle de fluctuation horizontale et/ou verticale sur des sols bien définis.

Jaksa (1995) a rassemblé dans des tableaux une synthèse des fonctions d'autocorrélations, des distances de corrélations et des échelles de fluctuations données par différents auteurs (voir tableau I.1).

Tableau I.1 Fonctions d'autocorrélation, distances de corrélations et échelles de fluctuations données par différents Auteurs (Jaksa, 1995 et Houmadi, 2004)

Type de sol	Paramètres Géotechnique	Direction H : Horizontale V : Verticale	Type d'essai *	Fonction de Autocorrélation $\rho_r$	Distance de Corrélation $D_c$ (m)	Echelle de Fluctuation $\theta$ (m)	Intervalle de prélèvement $V_z$ (m)	Auteurs (Cités par Jaksa, 1995)
Schiste De Patte d'ours	Limite Liquidité, $w_L$	H	-	$0,605K_s(1,44)^z$	$\approx 0$	$\approx 0$	0.15	Lumb (1974)
	Index Propriétés	V	-	$e^{-1,2z}$	0.8	1.6	0.3	
Argile marine, Hong Kong	Cohésion non drainé $C_u$	V	TUC	$e^{-0,3z}$	3.0	6.0	0.3	Diaz Pachilla et Vanmarke (1974)
	Teneur en eau, $w$	V	-	$e^{-0,6z}$	1.5	3.0	1.5	
Argile molle organique limoneuse, California	Indice des vides, $e$	V	-	$e^{-0,6z}$	1.5	3.0	1.5	Wu (1974)
	Pression de consolidation, $\sigma'_p$	V	-	$e^{-0,3z}$	0.3	0.6	1.5	
Argile de Chicago	Cu	H	-	$e^{-0,6z}$	90	180	90	Lumb (1975)
Schiste De Patte d'ours	Limite Liquidité, $w_L$	V	-	$e^{-0,2z}$	4.3	8.6	?	Vannauke et Fuleihan (1975)
	Subgrade Modulus	H	PLT	$0,445zK_s(1,13)^z$	$\approx 0$	$\approx 0$	0.15	
Argile molle, Louisiana	Poids volumique humide $\gamma_h$	H	-	$e^{-0,1z}$	0.16	0.33	0.1	Alonso and Knized (1975)
	Poids volumique humide $\gamma_h$	V	-	?	1.2	?	?	
Sable propre, Florida	Résistance de Pointe $q_c$	V	CPT	$e^{-0,9z}$	1.1	2.22	0.2	Alonso and Knized (1975)
	Frottement latéral $f_s$	V	CPT	$e^{-1,6z}$	0.6	1.25	0.2	
Sol mol limoneux gras des cotes de la mer d'Ariake, Japan	Teneur en eau, $w$	V	CPT	$e^{-1,9z} \cos(2,62z)$	0.5	?	0.05	Alonso and Knized (1975)
	Limite Liquidité, $w_L$	?	-	$e^{-1,16z} \cos(0,3z)$	6.3	?	0.5	
	Indice des vides, $e$	?	-	$e^{-0,2z} \cos(0,31z)$	4.3	?	0.5	
	Poids volumique humide, $\gamma_h$	?	-	$e^{-1,19z} \cos(0,31z)$	5.2	?	0.5	
TUC : Essai de compression simple		?	-	$e^{-0,25z} \cos(0,41z)$	4.0	?	0.5	

CPT : Essai de pénétration de cône

PLT : Essai de chargement de plaque

TUC : Essai de compression simple

Tableau I.1 Fonctions d'autocorrélation, distances de corrélations et échelles de fluctuations données par différents Auteurs (Jaksa, 1995 et Houmadi, 2004) (suite)

Type de sol	Paramètres Géotechnique	Direction H : Horizontale V : Verticale	Type d'essai *	Fonction de Autocorrélation $\rho_s$	Distance de Corrélation $D_c$ (m)	Echelle de Fluctuation $\theta$ (m)	Intervalle de prélevement $V_z$ (m)	Auteurs (Cités par Jaksa, 1995)
Argile marine, Japan	Cohesion non drainé Cu	V	TUU	$e^{-ax}$ $a=0.75-1.6$	0.6- 1.3	1.3- 2.7	1.067.7	Mastuo (1976)
	Cu	V	VST	?	?	5	≈1.5	Vannarke (1977b) et Lacasse et Léclé (1973)
Nouvel argile de Liskard Varved, Canada	Cu	H	VST	?	?	46	≈25	
		V	-	$e^{-0.33z}$	3.0	6.1	1.5	
	H	-	$e^{-0.041z}$	24	49	61	Fardis (1979)	
	V	SPT	$e^{-0.047z}$	1.8	3.7	1.5		
Dépôt de sable	In(RD)	H	SPT	$e^{-0.032z}$	34	67	61	
Gisement De Fond de la mer du Nord	$q_c$	H	CPT	$e^{-0.038z}$	30	53	>20	Tang (1979)
Sable de Caostal	$q_c$	?	CPT	?	5	?	?	Beacher et al.(1980)
	$\gamma_d$	V	-	?	5	?	?	
Compacted Clay	$\gamma_d$	H	-	?	5	?	?	Smith (1981)
	SPT-N	?	SPT	?	20	?	?	
Sable Pléistocène De Quadra Vancouver, Canada	Conductivité hydraulique	H	-	?	?	≈3.5	1.52-3.0	Smith (1981)
		V	-	?	?	≈1.7	1.52-3.0	
	H	-	?	?	≈3.3	1.52-3.0		
	V	-	?	?	≈6.5	1.52-3.0		
VST : Essai de cisaillement rectiligne	Porosité $D_{90}$	V	-	?	?	≈0.9	1.52-3.0	
		V	-	?	?	?	?	

TUU : Essai de triaxial non consolidé non drainé

SPT : Essai de pénétration standard

SPT : Essai de pénétration standard

Tableau I.1 Fonctions d'autocorrélations, distances de corrélations et échelles de fluctuations données par différents Auteurs (Jaksa, 1995 et Houmadi, 2004) (suite)

Type de sol	Paramètres Géotechnique	Direction H : Horizontale V : Verticale	Type d'essai *	Fonction de Autocorrélation $\rho_s$	Distance de Corrélation $D_c$ (m)	Echelle de Fluctuation $\theta$ (m)	Intervalle de prélèvement $V_{2\theta}$ (m)	Auteurs (Cités par Jaksa, 1995)
Dépôt de sable	Densité relative des sables $L_n$ (RD)	V	SPT	$e^{-0.5\theta^2}$	1.8	3.7	1.5	Fardis et Veneziano (1981)
		H	SPT	$e^{-0.09\theta^2}$	34	67	61	
Argile molle New York	Cohesion non drainé $C_u$	V	VST	$e^{-0.02\theta^2}$	1.2	2.4	1.0- 3.3	Asaoka et A-Grivas (1982)
		V	VST	$e^{-0.32\theta^2}$	3.1	6.2	3.0- 4.8	
Dépôts Alluviaux, Spain	$1/q_c$	V	CPT	$e^{-a\theta}$ $a=0.78-23.1$	0.04- 1.3	0.09- 2.6	0.05	Ximenez de embun & Romana (1983)
		V	TUC	?	1.0	?	0.4	
Argile glaciaire molle, Mer du Nord	$C_u$	V	VST	?	1.0	?	0.4	Wu et El-Jandali (1985)
		V	CPT	?	14	?	0.2	
Sable fin limoneux Mer du Nord	$q_c$	V	CPT	?				
Sols Deltaïques, Canada	$q_c$	V	CPT	$e^{-1.1\theta^2} \cos(2.63\theta)$	0.85	0.13- 071	0.025	Camparella et al.(1987)
Argile limoneuse, California	$q_c$	V	CPT	$e^{-2.84\theta}$	0.34	0.68	0.1	Spry et al. (1988)
Divers, California	Permeability	H/V	-	?	-	$\theta_H/\theta_V \approx 40$	-	Fenton et Vannmarke (1991)
Argiles limoneuses, Bangkok	Tassement de remblai	V	-	$e^{-a\theta}$ $a=0.5- 2.0$	0.5- 2.0	1.0- 40	>1	Bergado et How (1991)
		V	CPT	$e^{-1\theta}$	0.1	0.2	0.020	
Argile limoneuse	$q_c$	V	CPT	?	?	0.24- 0.32	0.025	Li et lee (1991)
		V	CPT	?	?	0.35- 0.40	0.025	
Sols Deltaïques, Canada	$f_s$	V	CPT	?	?	0.14- 0.42	0.25	Wickremesinghe et Camparella (1993)
		V	CPT	?	?	0.14- 0.42	0.25	
	Pression interstitielle, $U_{br}$	V	CPT	?	?	0.14- 0.42	0.25	

### **1.5.3 Analyse stochastique en éléments finis**

Des approches en éléments finis utilisées pour des milieux aléatoires peuvent être classées par catégorie dans deux classes principales,

- La méthode des éléments finis stochastique (SFEM) : dans ces approches des propriétés statistiques des variables aléatoires sont établies dans les équations des éléments finis (Baecher et Ingra, 1981 ; Righetti et Harrop-Williams, 1988; Brenner, 1991 ; Yeh et Rahman, 1998).
- Les simulations de Monte Carlo en utilisant l'analyse en éléments finis déterministes avec données stochastiques.

La première approche, est mathématique et peut être programmée facilement, mais présente des inconvénients une fois appliqués aux problèmes de mécanique des sols.

Notamment, elle n'est pas utilisée pour l'analyse des problèmes fortement non-linéaires, ni ne peut prendre en compte des propriétés de sol avec une distribution non gaussienne et une variabilité élevée. Les propriétés de sol présentent souvent un degré élevé de nonlinéarité et suivent une distribution non gaussienne avec une variabilité importante ; de ce fait, l'application de ces approches dans la plupart des cas en géotechnique n'est pas recommandée. Elkateb et al. (2000) a récapitulé les limitations de la méthode SFEM comme suit :

- La forme de la distribution de probabilité pour des variables aléatoires d'entrée n'affecte pas les résultats d'analyse. Par conséquent, il ne peut pas capter les effets de la pente dans la distribution des propriétés de sol. En outre, une distribution doit être affectée à la réponse (output) pendant que la SFEM fournit seulement son écart type et sa moyenne.
- L'élément variance et la matrice de covariance sont des fonctions de forme et de géométrie d'un élément fini, et leur détermination devient tout à fait compliquée pour des formes irrégulières des éléments.
- Limité à une variabilité faible, due à l'erreur associée à la structure tronquée d'ordre supérieur dans le développement de Taylor, qui est utilisée pour déterminer les valeurs moyennes des variables de réponse.

- L'intégration du champ de variable aléatoire de chaque élément, peut entraîner un changement du rapport d'anisotropie de la structure de corrélation des propriétés de sol.

Yeh et Rahman (1998) ont entamé une étude comparative en utilisant quatre approches différentes de la SFEM pour la réponse sismique des sols. Ils ont conclu qu'une simulation directe de Monte Carlo est la méthode d'élément fini stochastique la plus fiable pour une analyse de réponse sismique des sols. Ils ont déclaré que les analyses des éléments finis stochastiques autres que Monte Carlo sont inadaptées lorsqu'il s'agit de l'évaluation de la non-linéarité dans les réponses d'un système.

La deuxième approche a été considérée la plus générale et la plus fiable. Elle a été employée couramment pour des problèmes géotechniques dans la dernière décennie (par exemple Griffiths et Fenton, 1993 ; Paice et al., 1994 ; Popescu, 1995 ; Fenton et Vanmarcke, 1998 ; Popescu et al., 1997 ; Rahman et Yeh, 1999 ; Nobahar et Popescu, 2001a ; Fenton et Griffith, 2002). Elle est capable de traiter les problèmes géotechniques strictement non linéaires. Son inconvénient bien connu est le coût élevé du temps de calculs. Cependant, le développement rapide dans l'industrie des ordinateurs a allégé ce problème à un certain degré.

Il y a d'autres techniques d'estimation efficaces telles que la simulation par Subset pour optimiser le nombre de simulations de Monte Carlo.

#### ***1.5.4 Effets de la variation des propriétés du sol sur le comportement géotechnique***

Il a été montré que la variabilité naturelle des propriétés de sol dans des couches homogènes et géologiquement différentes affecte le comportement du sol. Les travaux précédents dans ce domaine ont entamé ces effets sur :

- La consolidation (Badaoui et al., 2007 ; Huang et al., 2010 ; Huang et Griffiths, 2010)
- l'infiltration à travers les sols dans un champ aléatoire (par exemple Griffiths et Fenton, 1993 et Gelhar, 1993) ;
- Le tassement (Phoon et al., 1990 ; Paice et al., 1994 ; Brzakala et Pula, 1996 ; Fenton et Griffiths, 2002) ;

- le potentiel de liquéfaction (Popescu et al., 1997 ; Fenton et Vanmarcke, 1998),
- la réponse sismique des sols (Rahman et Yeh, 1999),
- la propagation des ondes sismiques à travers les sols hétérogènes (Assimaki et al., 2002),
- la stabilité des pentes (Griffiths et Fenton, 2000 ; Gui, 2000).

Il a été constaté que l'hétérogénéité de sol affecte les systèmes de réponse de deux manières : premièrement en induisant un certain degré de variabilité dans la réponse, et deuxièmement en induisant un changement dans la réponse moyenne, par rapport à la réponse obtenue des analyses déterministes (c à d. supposer que les propriétés de sol est homogènes). Dans la littérature plusieurs problèmes en géotechnique ont été traités, parmi ces problèmes on va détailler les suivants :

#### **I.5.4.1 Consolidation**

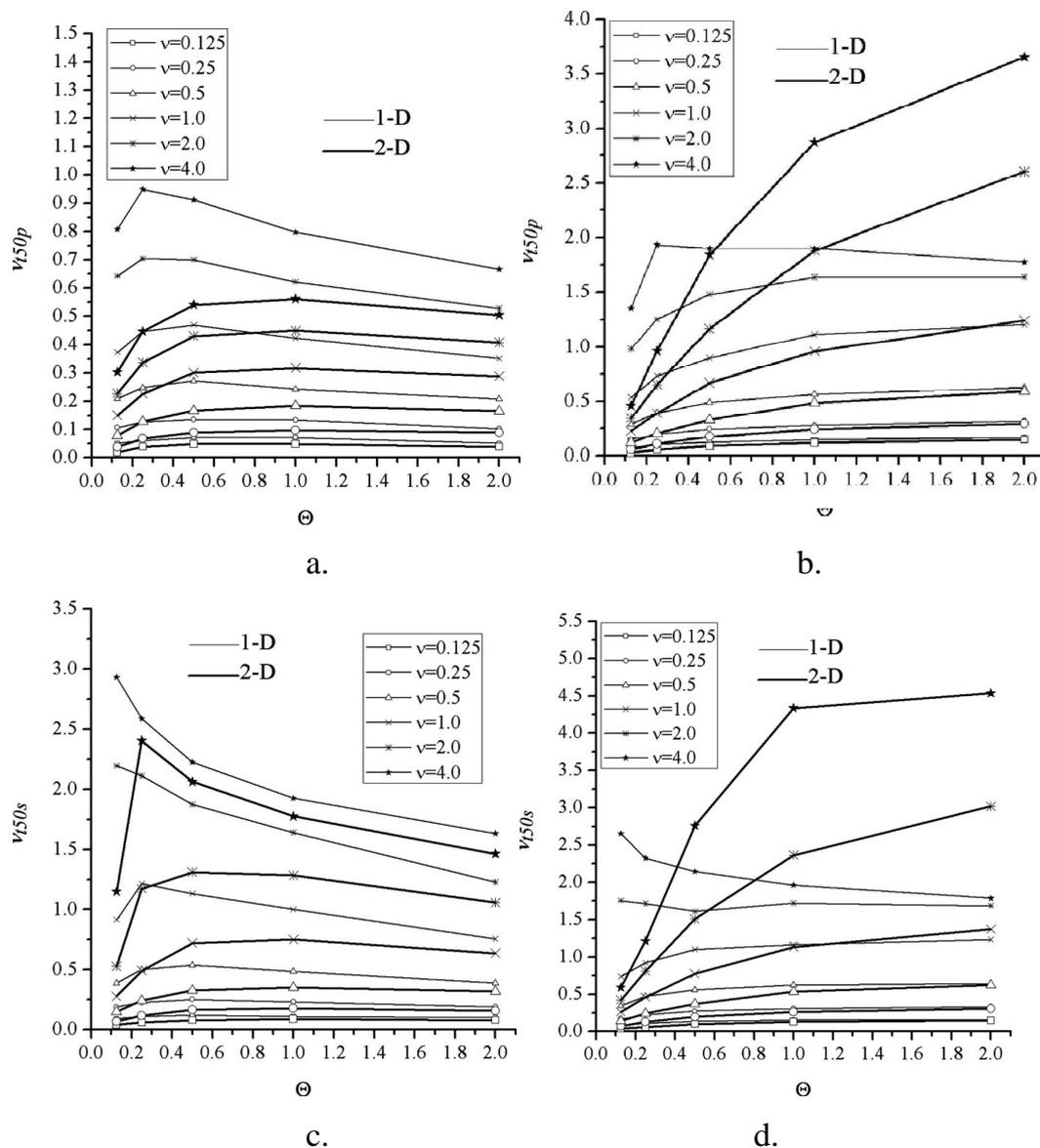
Il y a longtemps que Rowe (1972) a publié que la prédiction fiable des degrés de consolidation dans les sols est difficile en raison des propriétés variables et de la stratification du sol. Ces dernières décennies, de nombreuses études ont été faites pour quantifier la variabilité des sols et d'évaluer les incertitudes pour différentes applications. Il ya eu quelques études qui ont utilisé des méthodes stochastiques pour analyser les problèmes de consolidation et de tassement. Freeze (1977) a traité un problème de consolidation unidimensionnel (1D) en tenant compte de la corrélation entre le coefficient de compressibilité volumétrique  $v_m$  et la perméabilité du sol. Hwang et Witczak (1984) visait à déterminer l'effet tridimensionnel sur la consolidation du sol.

Chang (1985) a effectué une recherche sur l'influence du coefficient de consolidation  $v_c$  avec une distribution gamma sur les systèmes multicouches 1D. Hong (1992) a également étudié la consolidation 1D en traitant  $v_c$  comme une variable aléatoire. Darrag et Tawil (1993) a analysé un problème similaire de type Terzaghi et introduit une pression interstitielle initiale comme variable aléatoire. Hong et Shang (1998) a analysé la consolidation avec des drains verticaux préfabriqués pour le renforcement des sols. Il ya aussi les travaux connexes qui traitent des problèmes de fondation à l'aide d'approches probabilistes (Zeitoun et Baker, 1992; Brzakala et Pula

1996). Plus récemment, Badaoui et al. 2007 a effectué une étude de consolidation 1D par la méthode des couches minces, combinée avec la méthode des simulations de Monte Carlo. La consolidation 1D non linéaires des couches minces homogènes est bien décrite dans le cas des argiles saturées par Gibson et al. (1967). Dans l'étude de Badaoui et al. (2007), les statistiques concernant le tassement final et le temps correspondants sont étudiés en réalisant une étude paramétrique qui intègre l'influence du coefficient de variation des deux modules d'élasticité, la perméabilité du sol, et la longueur de corrélation verticale.

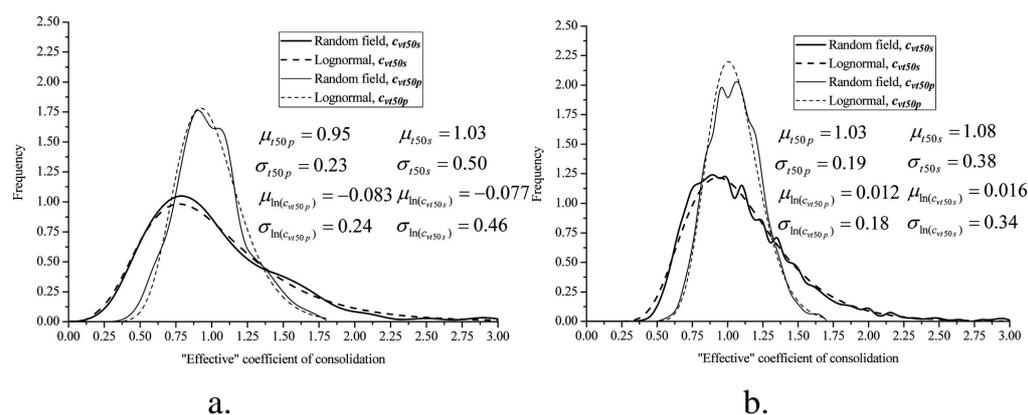
Bien que les travaux mentionnés précédemment ont porté sur la consolidation du sol probabiliste sur un large choix de situations, il n'ya pratiquement pas d'études couplées à deux dimensions (2D) et il n'y a eu aucune étude systématique du problème sur des intervalles de variations paramétriques. Huang et al (2010) et Huang et Griffiths (2010) ont effectué une étude approfondie sur les problèmes de consolidation couplée et non couplée en tenant compte la variabilité spatiale du coefficient de compressibilité volumétrique et de la perméabilité du sol. Tant le coefficient de compressibilité volumétrique  $\nu_m$  et de la perméabilité  $k$  du sol jouent un rôle important dans la consolidation des sols hétérogènes, mais ils ne peuvent pas être étudiés en un seul coefficient de consolidation  $\nu_c$ , (voir, Lee et al. 1992 ; Pyrah 1996). Huang et al (2010), a pris en compte les deux coefficients  $\nu_m$  et  $k$  comme des variables aléatoires et la théorie de la consolidation couplée de Biot (Biot 1941) a été appliquée. Le degré moyen de consolidation tel que défini par surpression interstitielle est différent de celle définie par le tassement en sol hétérogène (voir, Lee et al. 1992). Ces différences ont été d'une enquête approfondie dans un cadre probabiliste (Huang et al 2010). Ce dernier a souligné que l'utilisation du degré moyen de consolidation défini par la surpression interstitielle pour prédire les taux de tassement donnerait des résultats erronés. Le même auteur a pris en compte la corrélation spatiale des variables aléatoires de manière systématique en utilisant la théorie des champs aléatoires. Il a démontré qu'ils ont une influence considérable sur le comportement de consolidation du sol (figure I.3). Cette figure présente les coefficients de consolidation équivalents définies par la surpression interstitielle  $\nu_{t50p}$  en fonction de l'échelle de fluctuation  $\Theta$

pour différentes coefficient de variation de  $v_m$  et  $k$ , ainsi pour différentes valeurs de coefficient de corrélation  $\rho$  entre  $v_m$  et  $k$ . Ceci a fait l'objet de deux études 1D et 2D.



**Figure I. 3** Comparaison du coefficient de variation des coefficients de consolidation équivalents définies par (a) la surpression interstitielle  $v_{t50p}$  avec  $\rho=1.0$  et, (b) la surpression interstitielle  $v_{t50p}$  avec  $\rho=0.0$  (a) le tassement  $v_{t50s}$   $\rho=1.0$  (b) le tassement  $v_{t50s}$   $\rho=0.0$

Deux analyses 1D et 2D de consolidation ont été traité par Huang et al (2010). Il a trouvé que les valeurs moyennes équivalentes de consolidation 2D sont toujours plus élevées que les valeurs correspondantes en 1D (figure I.4).



**Figure 1.4** Histogrammes des cvt50p et cvt50s simulées (avec 2000 simulations) ainsi que la distribution log-normale lissée pour une analyse, (a) 1D et, (b) 2D

#### 1.5.4.2 Tassement des fondations superficielles et profondes

Paice et al. (1996) a utilisé la rigidité du sol spatialement corrélé comme champ aléatoire pour étudier les effets de l'hétérogénéité de sol sur le tassement total d'une semelle filante uniformément chargée sur un sol élastique. Une étude paramétrique a été effectuée pour un intervalle de coefficients de variation et des profondeurs d'une couche de sol spatialement variable. Les résultats d'étude ont indiqué des effets significatifs d'hétérogénéité de sol sur la variabilité de réponse. De toute manière, seulement une augmentation modeste du tassement moyen a été remarquée pour des intervalles de variabilité de rigidité de sol qui varie de 10% à 40%. Pour une rigidité de sol avec un coefficient de variation  $COV=42\%$  (valeur supérieure recommandée par Lee et al., 1983), il a observé un tassement (moyen) prévu pour être 12% plus grand, que la valeur déterministe calculée en utilisant un module de Young homogène avec une valeur moyenne. Les changements relativement petits des résultats étaient dus au fait que le tassement élastique est un phénomène linéaire; donc, les effets de la variabilité spatiale sur les tassements moyens résultants, étaient modestes. Fenton et al. (2002) a développé l'étude pour évaluer des tassements totaux et différentiels des fondations filantes dans un cadre probabiliste.

Phoon et al. (1990) a présenté une analyse de fiabilité de tassement des pieux en tenant compte, la variabilité spatiale des propriétés de sol. Ils ont utilisé la méthode des éléments finis stochastique (SFEM), dans laquelle des propriétés statistiques des

variables aléatoires ont été établies dans les équations des éléments finis. Ils ont modélisé le sol comme matériau linéaire élastique, et ont caractérisé le module de Young comme champ aléatoire homogène (Vanmarcke, 1977). La moyenne et le coefficient de variation (COV) du tassement de la tête du pieu (pour les pieux simples) ont été évalués en utilisant l'analyse du premier ordre deuxième moment (FOSM). Ensuite, des analyses fiabilistes ont été appliquées pour obtenir l'indice de fiabilité et la probabilité de rupture (Der Kiureghian et Ke, 1985 et 1988). Phoon et al. (1990) a étudié les effets de la variabilité du module de Young du sol, ses distances horizontales et verticales d'autocorrélation, les rigidités relatifs au sol/pieu, et le rapport de Slenderness de pieu. La variation du COV de tassement de la tête du pieu et l'indice de fiabilité (Hasofer et Lind, 1974) en fonction des paramètres mentionné auparavant ont été étudiés et des diagrammes de conception ont été fournis.

La combinaison de l'analyse stochastique des éléments finis avec l'analyse fiabiliste a fourni de bons moyens d'évaluer les effets de la variabilité de sol dans les problèmes géotechniques. L'étude a considéré un choix très large de distances d'autocorrélation. La facilité de la maille brute utilisée en capturant de petites distances de corrélation est incertaine. Aucune mention de diminution de tassement moyen de pieu n'a été rapportée comparée à l'analyse déterministe.

#### ***1.5.4.3 L'infiltration à travers les sols hétérogènes***

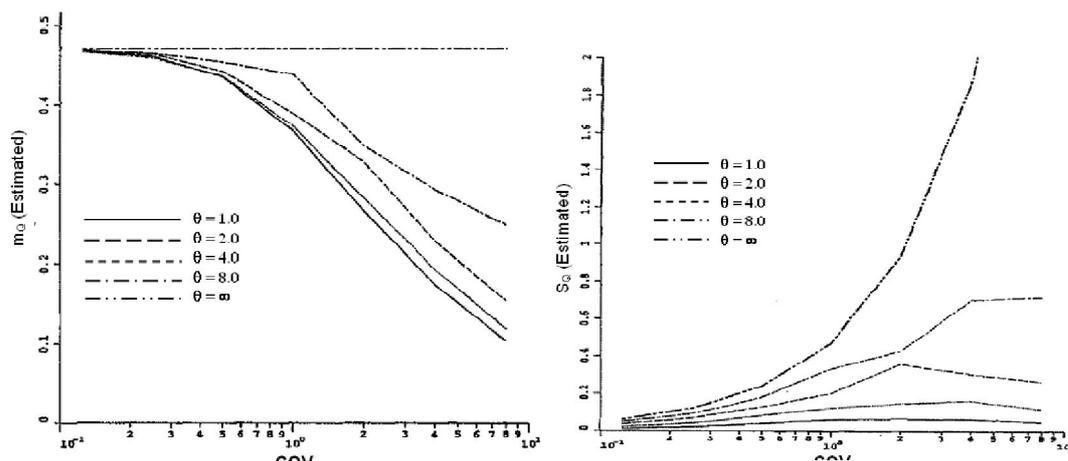
Fenton et Griffiths (1996) ont effectué une étude sur la surface de saturation traversant un barrage en terre stochastiquement hétérogène. Ils ont pris la perméabilité du sol comme champ aléatoire stationnaire avec une distribution lognormale et une structure de corrélation spatiale. Ils ont conclu que les prévisions stochastiques de la forme du barrage étudié et la variabilité de sol dépendaient du rapport de l'échelle de fluctuation à la longueur du domaine d'écoulement.

Griffiths et Fenton (1997) ont exécuté des analyses d'infiltration tridimensionnelles à travers les sols spatialement aléatoires en utilisant la simulation de Monte Carlo.

Semblable à l'étude mentionnée ci-dessus, un champ aléatoire à une distribution log normale généré par la méthode de subdivision en moyenne locale (LAS) a été

utilisé pour caractériser la perméabilité isotrope du sol. Ils ont étudié l'infiltration sous une palplanche en utilisant les modèles à 2D et à 3D. Ils ont conclu que pour les intervalles pratiques des distances d'autocorrélation, le débit moyen a chuté uniformément avec l'augmentation du coefficient de variation de la perméabilité du sol. Cependant, il devrait mentionner que selon les résultats des études analytiques par Gelhar (1993) ; le débit moyen augmente au fur et à mesure que la variance de la perméabilité du sol (conductivité hydraulique) augmente pour un système isotrope hétérogène tridimensionnel. Les résultats de l'analyse à trois dimensions ont été comparés aux résultats précédents de l'analyse 2D (Griffiths et Fenton, 1993). Il a été observé que la variabilité du débit prévu de l'analyse tridimensionnelle, était plus petite que ceux prévus de l'analyse à deux dimensions. En outre, les débits moyens prévus de l'analyse tridimensionnelle sont plus proches aux valeurs déterministes, que ceux prévus de l'analyse bidimensionnelle. En d'autres termes, l'effet de la tridimensionnalité s'est avéré une réduction de l'aspect aléatoire global du débit. Cependant, il a été conclu qu'il n'y avait pas une grande différence entre les résultats à deux dimensions et à trois dimensions. De ce fait, l'approche 2D est plus simple et moins coûteuse en temps de calcul et elle peut donner des résultats acceptables pour les cas considérés. Un des inconvénients de cette analyse est qu'elle utilise des distances d'autocorrélation égales pour les directions verticale et horizontale. Habituellement les distances de corrélation dans la direction horizontale sont beaucoup plus grandes que ceux dans la direction verticale.

Pour l'étude de Griffiths et de Fenton (1997), les changements du débit moyen étaient modestes. Par exemple, à  $COV = 50\%$ , pour une marge de distance d'autocorrélation de 1m à 8 m, le débit moyen prévu s'est diminué à moins de 8% (figure 1.5). C'était probablement dû aux linéarités du phénomène d'infiltration. Il devrait également mentionner que des méthodes en éléments finis stochastiques de premier ordre et seconde moment (Choot, 1980 et Hachich, 1981) sont considérées pour fournir des résultats raisonnables pour des problèmes linéaires et sont numériquement beaucoup moins coûteux.



**Figure I.5** Influence du coefficient de variation et la distances de corrélation de la perméabilité ( $\theta = \theta_b = \theta_b$ ) sur le débit moyen ( $m_Q$ ) et son écart type ( $S_Q$ ) (Griffiths et Fenton, 1997).

#### I.5.4.4 Effets de la variabilité de sol sur la portance des fondations superficielles

Nobahar et Popescu (2000) ont étudié les effets de la variabilité spatiale inhérente des propriétés de sol sur la portance des fondations superficielles soumis aux charges verticales, et supporté par un sol élastique parfaitement plastique. Le modèle numérique a simulé le comportement d'un sol argileux sur-consolidé sous des conditions non drainées.

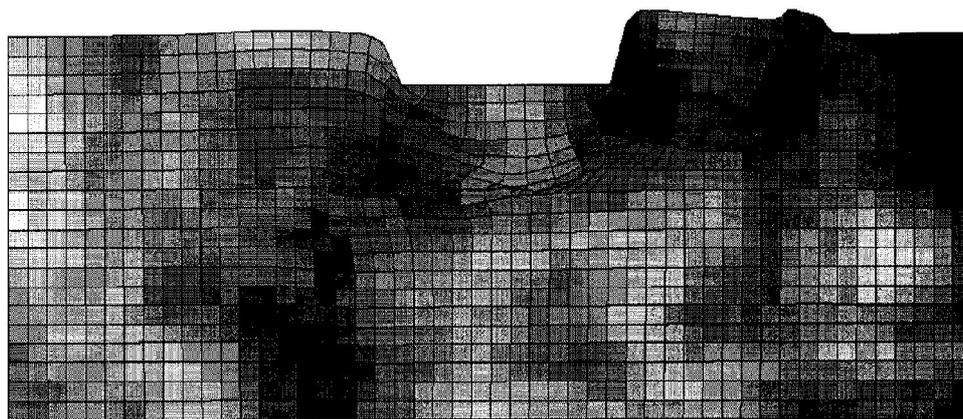
Une simulation de Monte Carlo, combinée à l'analyse des éléments finis déterministe avec la génération numérique des champs stochastiques a été utilisée. La résistance au cisaillement non drainée du sol a été modélisée comme champ aléatoire avec  $COV=40\%$  suivant une distribution bêta. Une fonction exponentielle descendante pour la structure de corrélation a été utilisée.

Des analyses bidimensionnelles en élément finis ont été exécutées pour des fondations filantes. La portance, les tassements, et les rotations de fondation sont prévu par les simulations de Monte Carlo qui ont tenu en compte la variabilité spatiale de la résistance de sol, ont été comparées aux résultats des analyse déterministes qui ont supposé des propriétés homogènes de sol. Les résultats ont prouvé que la portance des fondations superficielles est fortement affectée par la variabilité naturelle de la résistance de sol. Le mécanisme de rupture prévu était non symétrique et sensiblement différent pour un sol hétérogène comparé au sol homogène.

Nobahar et Popescu (2001a) a continué ses études de la portance des fondations peu profondes en regardant l'intervalle des coefficients de variation et deux distributions de probabilité. Les résultats ont prouvé que la forme de la queue gauche de la distribution a affecté la variabilité de la réponse prévue et les valeurs moyennes de portance.

Griffiths et Fenton (2001) ont effectué une étude sur la portance du sol dans un espace aléatoire d'une argile non drainée. La simulation de Monte Carlo combinée avec une analyse élastoplastique en éléments finis en utilisant des données stochastiques a été utilisée. Un champ aléatoire en utilisant une distribution lognormale, une distance isotrope de corrélation et une fonction spatiale markovienne de corrélation a représenté la résistance au cisaillement non drainé. Des analyses 2D en déformation plane en éléments finis ont été exécutées en utilisant des éléments quadrilatère à 8 noeuds. La loi de contrainte déformation, élastique parfaitement plastique avec un critère de rupture de Tresca a été employée pour modéliser le comportement non drainé du sol. Un processus en moyenne locale a été utilisé pour tracer les champs aléatoires sur les mailles des éléments finis. Les moyennes locales ont préservé la valeur moyenne, mais ont réduit l'écart type. Pour chaque cas, 1000 simulations ont été effectuées. Un profil de sol maillé déformée typique est montré sur la figure 1.6. Les fondations sur le sol hétérogène devraient montrer le comportement asymétrique.

Griffiths et Fenton (2001) ont étudié la variation de la capacité portante résultante et de son coefficient de variation sur le coefficient de variation de la résistance du sol et la distance de corrélation. Ils ont conclu qu'un facteur de sécurité très élevé (environ 3) est exigé pour réduire la probabilité de rupture de la fondation provoqué par la variabilité naturelle du sol avec l'intervalle de COV varie de 10% à 50%. C'est en accord avec la géotechnique pratique standard (Lambe et Whitman, 1969). L'auteur a expliqué, dans un contexte probabiliste, pourquoi les facteurs de sécurité utilisés dans les calculs de portance sont en général beaucoup plus hauts que ceux utilisés dans d'autres calculs d'état limite en géotechnique, telle que la stabilité des pentes et les pressions des terres.



**Figure 1.6** Maille déformée typique. Les régions plus foncées indiquent un sol plus faible (Griffiths et Fenton 2001).

Cependant en utilisant des facteurs de sécurité élevés, 2 ou 3, est commun pour les fondations superficielles, il y a d'autres sources principales d'incertitude (par exemple erreur de mesure et incertitude dans le modèle). Par conséquent, attribuer seulement ces facteurs de sécurité à l'incertitude provoquée par la variabilité naturelle ne semble pas raisonnable. Il y a des chercheurs qui croient que la variabilité naturelle du sol a des effets minimaux sur l'incertitude des systèmes géotechniques et que la plupart d'incertitude vient de l'incertitude dans les modèles ou la mesure (par exemple Li et Lam, 2001). Dans l'opinion de l'auteur, utilisé différents facteurs de sécurité en géotechnique peut également être attribué à différents niveaux de fiabilité cible dans chaque secteur.

Fenton et Griffiths (2003) ont prolongé leurs études pour la portance des fondations supportées par un sol frottent et cohérent. Ils ont utilisé un modèle bidimensionnel pour simuler des fondations filantes. Ils ont constaté que la moyenne géométrique de résistance au cisaillement de sol sous la fondation dans un domaine de déformations plastiques (prises pour avoir une profondeur de  $B$  et une longueur de  $5B$ , et  $B$  comme largeur de fondation) peut être utilisée comme valeur représentative de la résistance au cisaillement du sol. Ils ont constaté qu'une distance d'autocorrélation de  $\theta=B$  a comme conséquence les valeurs les plus faibles de la capacité portante de la fondation; donc, quand les données suffisantes ne sont pas disponibles, elle peut être utilisé comme valeur remplaçante dans les calculs.

La conception des fondations peu profondes sont généralement régis soit par le tassement, un état limite de service, ou par la capacité portante, un état limite ultime. Bien que les ingénieurs en géotechnique ont utilisé ces états limites pour plus de la moitié d'un siècle, ce n'est que récemment qu'ils ont commencé à converger vers des conceptions basées sur la fiabilité. Pour profiter du plein potentiel de la conception basée sur la fiabilité, il faut prendre en compte les incertitudes géotechniques de façon rationnelle. Fenton et al. (2008) a proposé une approche baptisée conception de facteur charge et résistance (LRFD) pour la conception de la capacité portante d'une semelle filante, en utilisant des facteurs de charge tel que spécifié par les codes de structure. Les facteurs de résistance nécessaire pour obtenir une probabilité de rupture acceptable sont estimés en fonction de la variabilité spatiale du sol et par le niveau de "compréhension" des propriétés du sol dans les environs de la fondation. Les résultats analytiques, validés par simulation, sont principalement destinés à l'aide dans le développement de la prochaine génération de la fiabilité des codes axés sur la conception géotechnique, mais peut aussi être utilisé pour évaluer la fiabilité des modèles actuels (Fenton et al. 2007).

## **1.6 CONCLUSION**

En géotechnique plusieurs auteurs ont effectué des recherches et des études sur les différents problèmes en mécanique des sols en modélisant les propriétés des sols soit en variable aléatoire soit en champ aléatoire (homogène ou hétérogène). Malgré ces études effectuées précédemment, on trouve que ce n'est pas suffisant relativement à ce qui se passe dans les autres sciences dont les propriétés sont moins entachées d'erreurs. Le chapitre suivant va entamer les sources d'incertitude en géotechnique et la modélisation des paramètres des sols.

*CHAPITRE II*

***VARIABILITE  
DES PARAMETRES  
GEOTECHNIQUES***

## CHAPITRE II

**VARIABILITE SPATIALE DES  
PARAMETRES GEOTECHNIQUES****II.1 INTRODUCTION**

Une reconnaissance géotechnique est la première phase d'étude d'un projet de génie civil. Cette reconnaissance permet de décrire les différentes couches de sols, leurs natures, leurs caractéristiques mécaniques et physiques, etc. Ces dernières sont déterminées par des mesures in situ, directes ou indirectes, ou par des mesures en laboratoire sur des échantillons remaniés ou non remaniés.

Le rapport de cette campagne comprend, outre les résultats bruts des observations, essais et mesures, une interprétation géologique et géotechnique et éventuellement des avis et des conseils. On notera que, de manière consciente ou non consciente, un certain nombre d'hypothèses sont introduites à ce stade. C'est ainsi que l'on va procéder à l'interpolation entre les différents sondages ou forages en supposant ainsi la continuité des couches géologiques, ce qui se fait souvent alors que ce n'est pas toujours justifié. De même, on introduira implicitement des conditions d'homogénéité de ces couches, ou du moins de faible variabilité.

L'ingénieur doit ensuite analyser ce rapport en collaboration, selon la complexité et l'importance du projet, avec des spécialistes d'autres disciplines : géologues, hydrogéologues, urbaniste, etc. Il pourra ainsi se forger sa propre idée des conditions de site, pour finalement utiliser ces résultats pour le dimensionnement de l'ouvrage dont il a la responsabilité.

L'examen des résultats d'une campagne d'essais géotechniques met en évidence que, même à l'intérieur d'une couche géologique considérée comme homogène en grand, les divers paramètres mesurés manifestent toujours une certaine variabilité, parfois très élevée.

Cette variabilité est quelques fois tellement importante que le choix de valeurs caractéristiques semble illusoire.

En effet, il se peut que la variation imprévisible soit d'une importance telle qu'une description déterministe s'avère insuffisante. Il est alors plus indiqué de faire usage de la théorie

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

des probabilités. Cette dernière permet de développer des modèles plus proches de la réalité. Ces modèles sont d'autant plus exploitables qu'il est possible de rassembler des caractéristiques du phénomène stochastique complexe en un minimum de paramètres physiques, expérimentalement accessibles.

Avant d'aborder la manière de prendre en compte cette variabilité des paramètres, on peut d'abord s'interroger sur ses causes profondes. L'examen critique et approfondi des variations entre les valeurs mesurées d'un même paramètres dans une couche de sol "homogène", montre qu'elles sont attribuables à plusieurs sources d'incertitude.

L'objectif de ce chapitre réside dans la description des sources de variations des paramètres de sol lesquelles présentent des caractères fortement aléatoires. A cet effet, une description probabiliste de ces paramètres sera établie ce qui va nous permettre de mettre en place une modélisation stochastique de la variabilité des propriétés du sol par simulation.

## **II.2 SOURCES D'INCERTITUDES SUR LES PARAMETRES DE SOL**

Les incertitudes sont présentées dans la plupart des problèmes de génie civil et plus spécifiquement dans le domaine de la géotechnique. Le mot "incertitude" y est utilisé et interprété de plusieurs façons selon les personnes et le domaine d'application. Dans la plupart des cas, il englobe les concepts d'ambiguïté et de variabilité ; il est aussi utilisé pour décrire l'état de ce qui ne peut être établi avec exactitude, qui laisse place au doute.

Certain auteurs (Denis, 1998 ; cité par Smith et al 2004) distinguent deux niveaux d'incertitude. Le premier niveau est celui où un individu perçoit qu'il ne peut résoudre un problème à cause d'une trop grande complexité ou d'un manque d'information. Le deuxième niveau est celui où plusieurs individus perçoivent différemment une même situation et proposent des solutions contradictoires.

Les incertitudes présentes dans les problèmes de géotechnique proviennent généralement de trois sources : la variabilité inhérente à certains processus naturelle, la caractérisation des sols et l'imperfection des modèles rhéologiques.

Partant des études du l'NRC, 2000 (cité par Smith, 2004), de Favre, (2000) et de Magnan, (2000), une synthèse a été élaborée représentant les différentes sources d'incertitude avec leurs composantes principales.

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

### **II.2.1 Incertitude liée à la variabilité naturelle des paramètres des sols**

Le désordre qui affecte les propriétés des sols n'est pas aléatoire. Il est lié à l'histoire de leur formation qui a ses lois très précises (tectonique, érosion, transport et sédimentation, etc.) et à la nature même de la matière. Mais la complexité de ces lois et des conditions de leur application et la complexité de la matière font qu'il est impossible de connaître parfaitement ces propriétés : on est donc devant un phénomène incertain au sens où on ne peut prévoir de façon certaine ses réalisations, c'est-à-dire les propriétés en un point d'un massif. La première démarche est de connaître l'essence des phénomènes et pour cela une bonne reconnaissance géologique est toujours indispensable ; elle réduit le caractère incertain de la prévision.

Cet incertain naturel peut avoir divers degrés et donc entraîner différents moyens d'investigation, de prise en compte et de modélisation (Favre et al 2000 et Favre et al 1995b) :

- On peut se trouver dans des terrains très erratiques, à fortes hétérogénéités avec des fractures, des zones de faiblesse ou au contraire des points "durs", des arrivées d'eau, etc. Géométrie et propriétés sont très tourmentées.
- On peut se trouver dans des terrains peu désordonnés présentant une stratification relativement régulière. Aussi, la reconnaissance géotechnique, guidée par le modèle géologique du terrain, prend ici toute son importance pour proposer un modèle mécanique de terrain.
- Les terrains peuvent avoir été fabriqués par l'homme, qu'il s'agisse de barrages en terres, de remblais, de terre armée, etc. Dans ces cas, il faut des contrôles de fabrication et des tests de réception.

### **II.2.2 Erreurs et incertitudes liées à la caractérisation des sols**

#### **1. Erreurs d'observation**

##### *a) Erreurs de mesure, $e_{ao}$*

Elles sont liées à l'appareil de mesure et à l'opérateur.

Avec le progrès de la métrologie et l'acquisition automatique, les erreurs d'imprécision et d'opérateur ont été considérablement réduites. Encore faut-il avoir fait un étalonnage et un tarage

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

corrects. Mais il reste les erreurs de reproductibilité liées au caractère destructif de la plupart des essais de géotechnique et les erreurs d'opérateur liées à la difficulté de certains essais (au triaxial, au pressiomètre, etc.).

Enfin, il est bien connu que chaque essai représentant le coup de main de l'opérateur, on constate des différences systématiques plus ou moins grandes d'un laboratoire à un autre.

Les problèmes organisationnels tel une mauvaise communication entre l'opérateur des essais (in situ et/ou laboratoire) et ses supérieurs, sont aussi une source potentielle d'incertitude humaine qui est souvent rencontrée en pratique. Ces incertitudes influence directement ou à un second degré tous les aspects d'un problème, de sa définition jusqu'au choix de la solution car le risque est toujours porté et géré par l'humain.

#### *b) Erreurs de représentativité, $e_{Rep}$*

Elles proviennent de la transformation de la mesure physique.

On ne mesure guère directement que des longueurs, des masses et des températures. La plupart des appareils d'essais géotechniques sont basés sur des mesures de déplacement. Il faut donc transformer la mesure. On procède alors à un étalonnage de l'appareil et à son tarage. Mais il y a des transformations plus importantes et plus incertaines : section d'un échantillon au triaxial pour la contrainte  $\sigma_1$  ? Pente initiale d'une courbe de chargement pour le module de Young ? Etc.

#### *c) Erreurs de l'instant, $e_{inst}$*

Elles proviennent de la variation de la propriété entre le moment de mesure et le moment où le sol est mis en oeuvre.

Le cas typique est celui des propriétés du béton. Pour les sols, le remaniement relève de ce type d'erreur, en particulier pour tous les essais mécaniques de laboratoire et pour l'essai pressiométrique.

## **2. Erreurs d'enquête**

### *a) Erreurs d'enquêtes proprement dites*

Ce sont les erreurs liées à une mauvaise conduite des reconnaissances. Les mesures effectuées ne sont pas représentatives du problème : l'exemple d'un remblais récent mal identifié

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

au droit de deux fondation superficielles qui les sollicite, un remblai ancien en biseau pouvant exister sous une des deux fondations ; un autre exemple illustre le problème d'une fondation superficielle reconnue au moins de 3 à 5 fois la largeur, ignorant ainsi une couche faible qui peut piloter les tassements.

#### *b) Erreurs d'échantillonnage*

Ce ne sont pas, à proprement parler, des erreurs. Imaginons que chaque mesure est parfaite mais que la propriété varie d'un point à un autre de l'espace. Cette variabilité naturelle sera modélisée comme une variable aléatoire dont il est à estimer les caractéristiques avec les mesures. Il y a ainsi un échantillon statistique de taille  $n$  pour estimer les caractéristiques d'une population infinie. Ces caractéristiques vont être estimées par un intervalle de confiance : la moyenne (ou l'écart type) de la propriété, qui est sûre mais inconnue à une probabilité de 95% par exemple d'être encadrée par deux valeurs dépendant des observations.

### **II.2.3 Incertitudes liées à l'imperfection des modèles rhéologiques**

Il est à noter que les résultats des calculs sont également affectés par de nombreuses incertitudes, parmi lesquelles, l'imperfection des lois de comportement (les modèles) et l'imprécision des calculs réalisés sur la base de ces modèles. Les propriétés des sols rentrent dans ces lois rhéologiques qui représentent plus ou moins bien la réalité de la relation contraintes-déformations. Ainsi le modèle élasto-plastique linéaire isotrope-plastique parfait ou fragile, alors que le sol est mieux représenté par un modèle élasto-plastique orthotrope (Favre, 2000). Quant au comportement réel du sol, personne ne le connaîtra ; on ne fait que l'approcher. On fait donc une erreur de modèle indépendamment de l'erreur que l'on fait sur la mesure des paramètres du modèle choisi.

En particulier, on ne peut pas nier que certaines sollicitations naturelles appliquées aux constructions présentent un caractère essentiellement aléatoire : les actions sismiques, le vent, les sollicitations des vagues sur les structures marines, les efforts de la température ou des gradients thermiques dans les chaussées ou les barrages en béton en sont des exemples typiques.

Les exemples sont innombrables, mêmes en se limitant au domaine des infrastructures, et une réflexion critique conduit rapidement à admettre que les actions connues avec une incertitude

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

pouvant être considérée comme négligeable constituent plutôt l'exception : poids propre des ouvrages, certaines surcharges permanentes, etc.

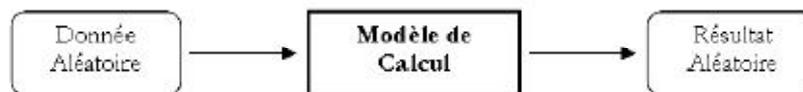
### **II.3 APPROCHE PROBABILISTE**

#### **II.3.1 Principe général**

L'approche probabiliste aborde les problèmes d'une manière toute différente, en postulant a priori le caractère aléatoire des grandeurs qui interviennent dans les phénomènes étudiés et dans les modèles de comportement utilisés pour décrire ces phénomènes.

Dans une telle approche, on quantifie toutes les incertitudes attachées au modèle, aux paramètres, aux facteurs humains, etc. On en déduit ensuite des résultats qui sont eux-mêmes affectés d'incertitudes. On obtient ainsi, quelle que soit la nature du problème étudié, des résultats exprimés sous une forme homogène, à savoir la probabilité de voir se produire certains événements.

Dans le modèle de calcul (figure II.1), les données et les résultats sont affectés d'incertitudes. Ce ne sont plus des grandeurs uniques bien définies, mais des variables aléatoires.



**Figure II.1** Schéma général de calcul par un modèle de type probabiliste

La nature exacte du modèle n'est pas précisée à ce stade, pas plus que les méthodes de calcul particulières qui devront être mises en oeuvre pour utiliser des quantités aléatoires.

#### **II.3.2 Principales étapes de l'approche probabiliste**

Le schéma général de calcul par un modèle de type probabiliste a déjà été présenté plus haut (figure II.1). On va maintenant examiner de plus près quelques-unes des nombreuses questions formulées et à résoudre :

- Comment obtenir les données du problème sous la forme de variables aléatoires de telle manière qu'elles soient une représentation assez fidèle de la réalité ?
- Comment choisir rationnellement un modèle de calcul utilisable dans le contexte probabiliste ?

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

- Comment transmettre, au travers du modèle de calcul, le caractère aléatoire (les variations) de ces données ?
- Comment enfin utiliser les résultats, eux aussi exprimés sous la forme de variable aléatoires, pour obtenir les réponses recherchées ?

### 1. Modélisation des données aléatoires

Dans le domaine de la mécanique des sols, la quantification des paramètres d'entrée (données) s'appuie souvent sur un traitement statistique de données expérimentales. En l'absence d'un nombre suffisant de mesures relatives au site étudié, on s'appuie sur des valeurs considérées comme vraisemblables sur la base de considérations plus générales, géologiques et autres. En réalité donc, les paramètres de type géotechnique seraient considérés à priori comme des variables aléatoires, c'est-à-dire affectés d'une incertitude, mais dont on pourra pour certains négliger la dispersion.

Notons dès à présent que le traitement statistique dont il est question est presque toujours un simple processus, qui traite les données comme des valeurs extraites au hasard d'une seule population d'éléments tous de nature identique.

Ce traitement peut aussi être un processus plus complexe, prenant en compte la position dans l'espace des valeurs mesurées. De telles grandeurs, sont ainsi définies à la fois par :

- La valeur du paramètre mesuré,
- La position dans l'espace où ce paramètre a été mesuré (ou la position dans l'espace où l'échantillon étudié en laboratoire a été prélevé),

Ces grandeurs forment un champ aléatoire.

Dans les traitements statistiques particuliers pour traiter les caractéristiques du sol, on insistera particulièrement sur la nécessité de toujours prendre en compte la variabilité spatiale de ces grandeurs, même si le nombre de données disponibles est très faible et peut sembler à première vue insuffisant.

### 2. Choix du modèle et incertitudes associées

La quantification des incertitudes liées aux paramètres est difficile à estimer à ce stade du travail, c'est le cas aussi des incertitudes liées aux modèles. Même si cet aspect n'est pas très

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

développé dans cette étude, il ne sera pas ignoré. Il en sera tenu compte à travers la variation des paramètres qui sont considérés comme des variables aléatoires. Il en sera de même pour les résultats des modèles.

Dans l'approche qui nous concerne, la prédominance est donnée à la variabilité spatiale des paramètres plutôt qu'aux incertitudes. Ceci est justifié par les problèmes qui nous préoccupent. On pourra ainsi considérer que leurs conséquences sont négligeables devant les causes liées à la variabilité spatiale des paramètres géotechniques. Pour cela, on adoptera, comme dans une approche classique, des modèles de calcul déterministes ayant fait leurs preuves. La principale différence consistera dans le type de données à introduire et le type de résultats obtenus, qui seront tous des variables aléatoires. Les calculs ainsi menés sont des calculs probabilistes.

### **3. Calculs probabilistes**

Une étape cruciale de la mise en oeuvre des méthodes de calcul probabiliste est celle qui consiste à transférer, à travers le modèle de calcul (déterministe) choisi, les incertitudes des différents paramètres. Ces derniers sont en effet des variables aléatoires, et les méthodes rigoureuses permettant de réaliser des calculs exacts sur de telles variables ne s'appliquent qu'à quelques cas extrêmement simples sans aucun intérêt pratique.

### **4. Exploitation des résultats**

Les résultats obtenus par les calculs probabilistes sont donc des variables aléatoires. Mais les problèmes posés aux ingénieurs ont besoin de réponses qui ne peuvent pas être facilement exprimés sous cette forme probabiliste. Ainsi, il est nécessaire de pouvoir formuler des réponses à des interrogations précises, qui pourraient être entre autre :

- La probabilité de voir se produire un évènement bien déterminé, comme la rupture ou la mise hors service d'un ouvrage ou d'une partie d'un ouvrage ;
- Les formes, dimensions et caractéristiques des matériaux de l'ouvrage ou de la partie de l'ouvrage conduisant à un niveau de probabilité de rupture ou de mise hors service choisi à priori (calcul de dimensionnement) ;

- Connaissant les coûts respectifs des opérations de constructions, d'entretiens et ceux entraînés par un éventuel accident, on peut optimiser le dimensionnement en terme économique en recherchant la solution conduisant au coût global minimum, etc

## **II.4 MODELISATION STOCHASTIQUE DE LA VARIABILITE SPATIALE**

La formation d'un sol dépend de nombreux facteurs variables dans le temps et dans l'espace. On peut utiliser des techniques très variées pour analyser la variabilité naturelle des sols. Les méthodes statistiques et probabilistes ont permis aux géotechniciens de s'intéresser à l'analyse de l'hétérogénéité des couches de sol. Cette analyse a deux objectifs :

- Caractériser la variabilité naturelle des propriétés physiques et mécaniques des sols pour en tenir compte dans les modèles de calcul ;
- Optimiser la reconnaissance géotechnique en jouant sur le nombre et position des sondages.

### **II.4.1 Différentes formes de variation des paramètres de sol**

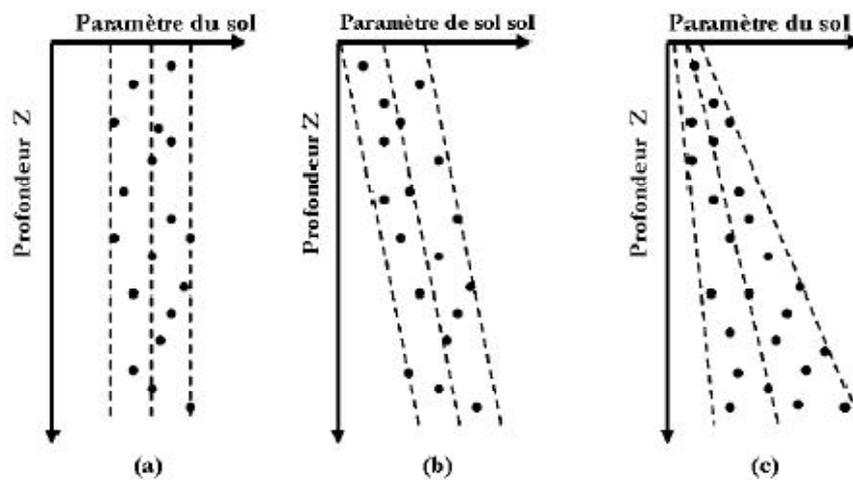
Le praticien de la mécanique des sols est appelé quotidiennement à choisir, à partir d'un ensemble de mesures expérimentales et d'informations diverses, les valeurs de calcul à utiliser dans les méthodes de calcul de stabilité, de tassement, etc. Ce choix est souvent simplement guidé par l'expérience et le bon sens. Il est rarement le résultat d'un processus totalement objectif.

Il est reconnu que les caractéristiques des sols sont souvent dispersées et qu'elles peuvent, même dans une couche considérée comme homogène en grand, varier fortement avec la profondeur et d'un endroit à un autre dans le plan. Ces variations ne sont prises éventuellement en compte que par une description déterministe, liant par exemple la valeur de la propriété étudiée à la profondeur par une fonction linéaire.

La distribution dans l'espace des valeurs des propriétés physiques et mécaniques des sols est une donnée extrêmement importante pour le dimensionnement des ouvrages. La figure.3.2 ci-dessous montre les trois cas rencontrés en pratique pour la variation des paramètres de sol en fonction de la profondeur :

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

- Le premier cas correspond à une distribution des paramètres de sol autour d'une moyenne constante.
- Le deuxième cas correspond à des paramètres de sol dont la moyenne dépend de la profondeur  $Z$ .
- Le troisième cas correspond à des paramètres de sol dont la variance dépend aussi de la profondeur.



**Figure II.2** Les différentes formes de variation des paramètres de sol en fonction de la profondeur (Jaksa, 1995).

La technique d'analyse la plus courante pour les variations spatiales des propriétés des sols consiste à décomposer les variations observées de chaque propriété en une fonction déterministe des coordonnées du point de mesure dans l'espace appelée dérive (ou tendance), et une composante aléatoire de moyenne nulle et de variance égale à une constante. Dans une telle décomposition, la dérive représente l'effet des phénomènes qui ont influencé la formation du sol pendant de longues périodes. La composante aléatoire traduit plutôt les effets des fluctuations des conditions de formation du sol de courte durée. Les variations de cette composante aléatoire peuvent être plus ou moins importantes suivant les sols et les sites. En général, les valeurs d'une propriété donnée ont plutôt tendance à être voisines en des points voisins. La vitesse de variation de ces valeurs quand on passe d'un point à un autre est aussi un paramètre très important pour la

description de la variabilité naturelle des propriétés physiques et mécaniques des sols. On la caractérise classiquement par la fonction d'autocorrélation.

### II.4.2 Dérive et autocorrélation des propriétés des sols

#### 1. Décomposition des variations spatiales des variables aléatoires

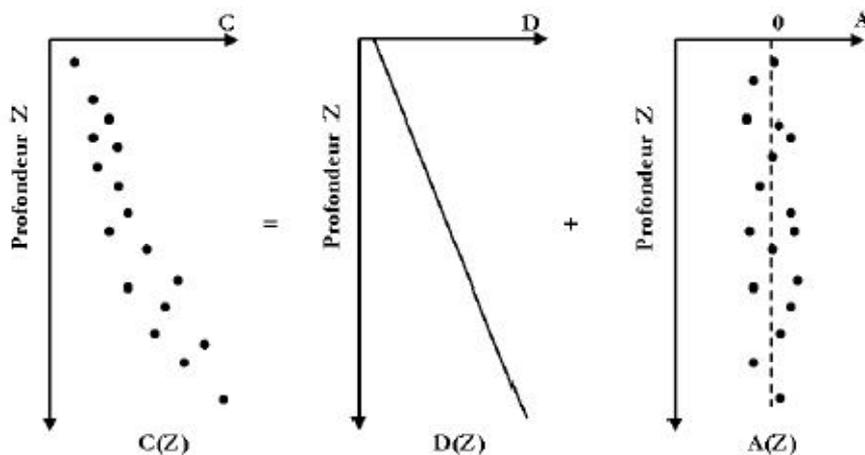
La décomposition d'une variable "C" en la somme d'une fonction déterministe "D(x,y,z)" qui décrit les variations de la valeur moyenne de "X" dans l'espace et une variable aléatoire A(x,y,z) de moyenne nulle en chaque point de l'espace comme le montre la formule suivante :

$$C(x, y, z) = D(x, y, z) + A(x, y, z) \quad (\text{II.1})$$

Cette opération est souvent pratiquée en mécanique des sols pour des observations effectuées en différents points du massif étudié. Une schématisation de cette décomposition en fonction seulement de la profondeur Z est illustrée sur la figure 3.3 ci-dessous.

Si la fonction D(x, y, z) est connue en tous points avec précision, indépendamment des valeurs observées dans le massif (ce qui habituellement pas le cas), la variabilité des paramètres du sol peut être étudiée sur la seule variable A(x, y, z) dont on connaît la valeur aux points de mesure.

Dans la pratique, on ne connaît pas de façon exacte la dérive D(x,y,z). Cette dernière est estimée à partir de l'échantillon, ce qui se traduit par des répercussions sur l'analyse de la composante aléatoire A(x, y, z) .



**Figure II.3** Modification des caractéristiques d'autocorrélation par séparation de la dérive (Magnan, 1982)

## 2. Etude de la dérive $D(x, y, z)$

A priori, la forme de la fonction  $D(x, y, z)$  peut être quelconque. Deux facteurs viennent toutefois limiter l'éventail des formes mathématiques des fonctions  $D(x, y, z)$  utilisées en pratique :

- Les techniques courantes d'estimation des relations entre la variable dépendante  $C(x,y,z)$  et les variables indépendante  $x, y$  et  $z$  ne sont adaptées qu'aux fonctions de forme polynomiale,
- Le nombre des points de mesures de la variable " $C$ " est souvent trop faible pour permettre la détermination de nombreux coefficients dans la fonction  $D(x, y, z)$ .

Suite à cela, la technique utilisée pour la détermination des paramètres de la fonction  $D(x,y,z)$  est identique à celle des régressions linéaires ou polynomiales entre paramètres (Baguelin, 2000). On se donne a priori la forme de la fonction  $D(x, y, z)$ , par exemple :

$$D(x, y, z) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \quad (\text{II.2})$$

ou :

$$D(x, y, z) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xz + \beta_4 x^2 + \beta_5 y^2$$

(II.3)

on détermine la matrice des coefficients  $\beta_i$  et le coefficient de corrélation multiple  $R$  qui donne une idée du niveau de représentativité de la relation obtenue à l'aide de tests statistiques.

Dans cette étude, c'est le logiciel StatGraphPlus qui a été utilisé pour déterminer les paramètres de la fonction  $D(x,y,z)$  et le coefficient de corrélation multiple  $R$ .

## 3. Etude de la composante aléatoire $A(x,y,z)$

La composante aléatoire s'obtient par soustraction de la dérive aux valeurs mesurées :

$$A(x, y, z) = C(x, y, z) - D(x, y, z) \quad (\text{II.4})$$

Une fois l'influence de la dérive supprimée, le résidu peut être considéré comme la réalisation d'une fonction aléatoire stationnaire au sens large. Nous pouvons alors calculer la fonction d'autocorrélation qui permettra d'étudier la variabilité spatiale du paramètre considéré.

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

#### 4. Génération du vecteur des variables aléatoires corrélées

Après la discrétisation du champ aléatoire du paramètre du sol étudié  $U(X)$  en éléments (zones), il est remplacé par un vecteur de variables aléatoires dont les valeurs sont générées pour effectuer la simulation de Monté Carlo. Cette dernière consiste à effectuer un grand nombre de réalisations du paramètre étudié en considérant les paramètres de la formule utilisée dans le calcul comme des variables aléatoires.

La génération des valeurs aléatoires doit être effectuée au moyen d'un algorithme approprié pour que leurs propriétés statistiques reflètent le plus fidèlement possible les propriétés statistiques des mesures, la moyenne, la variance, la matrice de covariance, la matrice de corrélation, etc.

L'algorithme utilisé a été proposé par Fenton (Fenton, 1994). Cet algorithme permet de générer un vecteur de valeurs aléatoires de distribution normale, de moyenne nulle et de variance égale à l'unité.

L'algorithme en question génère des valeurs positives et négatives, ces dernières sont inappropriés pour représenter les paramètres du sol. Pour contourner cette difficulté, l'algorithme a été adapté pour que les valeurs générées soient de distribution lognormale.

La méthodologie suivie dans cet algorithme est décrite ci-après.

Pour générer  $S$  réalisations (simulations) d'un vecteur  $\{V\}$  de  $N$  variables aléatoires  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) qui doivent vérifier les propriétés suivantes :

- Chaque variable  $v_i$  est de distribution normale.
- Les  $N$  variables  $v_i$  corrélées entre elles ont une matrice de covariance  $[COV]$  (de dimension  $N \times N$ ) et dont chaque élément  $COV_{ij}$  représente le coefficient de covariance entre les variables  $v_i$  et  $v_j$ .

Les étapes suivantes sont réalisées :

- Détermination de la matrice de covariance  $[COV]$  en utilisant le modèle de la fonction de variance qui correspond à la fonction de corrélation triangulaire. Pour déterminer cette matrice, une échelle de fluctuation est utilisée pour le cas unidimensionnel, alors que pour le cas bidimensionnel, deux échelles de fluctuation (verticale et horizontale) et une surface de corrélation (Vanmarcke, 1983) ont été utilisées.

- Décomposition de la matrice  $[\text{COV}]$  par la méthode de Cholesky en une matrice triangulaire inférieure  $[L]$  et sa matrice transposée  $[L]^T$  :

$$[\text{COV}] = [L][L]^T \quad (\text{II.6})$$

- Génération d'un vecteur  $\{G\}$  de N variables aléatoires  $G_i$  non corrélées entre elles et de distribution normale réduite.
- Calcul du vecteur  $\{V\}$  par l'expression suivante :

$$\{V\} = [L] \cdot \{G\} \quad (\text{II.7})$$

Pour obtenir à partir du vecteur  $\{V\}$  un vecteur  $\{U\}$  de N variables aléatoires  $U_i$  dont la distribution est lognormale de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ , la transformation suivante est appliquée à chaque variable  $U_i$  :

$$U_i = \exp\left(m_{\ln U} + \sigma_{\ln U}^2 \cdot V_i(x_i)\right) \quad (\text{II.8})$$

où  $m_{\ln U}$  et  $\sigma_{\ln U}^2$  sont respectivement la moyenne et la variance du logarithme de U. Ils s'expriment en fonction de  $m$  et  $\sigma^2$  par : avec  $x_i$  sont les coordonnées de la variable  $U_i(x_i)$ .

Par la suite, la technique de simulation de Monte Carlo sera utilisée pour générer les propriétés du sol et pour calculer le paramètre de dimensionnement concerné en plusieurs réalisations.

## II.5 CONCLUSION

Lors d'un examen de données géotechniques, il faut d'abord différencier les différentes zones au sens statistique, c'est-à-dire séparer les couches nettement distinctes les unes des autres. Ces couches doivent être de dimension significative pour le problème étudié. Il est peu utile de décrire finement une succession de couches quand le problème posé concerne des couches de dimensions importantes.

Les résultats d'essais géotechniques utilisés comportent une dispersion aléatoire propre aux méthodes et aux appareils de mesure eux-mêmes, voire aux facteurs humains ajoutés à l'imperfection des lois de comportement. Par conséquent, cette dispersion provoque une imprécision des calculs réalisés sur la base de ces modèles. Pour palier à cette lacune, il est recommandé d'utiliser les approches probabilistes qui prennent en compte la variabilité des paramètres géotechniques.

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

*CHAPITRE III*

***MURS DE SOUTÈNEMENT***

## CHAPITRE III

**MURS DE SOUTÈNEMENT****III.1 INTRODUCTION**

Le rôle des ouvrages de soutènement est de retenir les massifs de terre.

La pente que suppose la construction d'un talus occasionne généralement une perte d'espace, que le mur vertical permet de récupérer. Le mur peut également servir de butée pour des pentes naturelles instables.

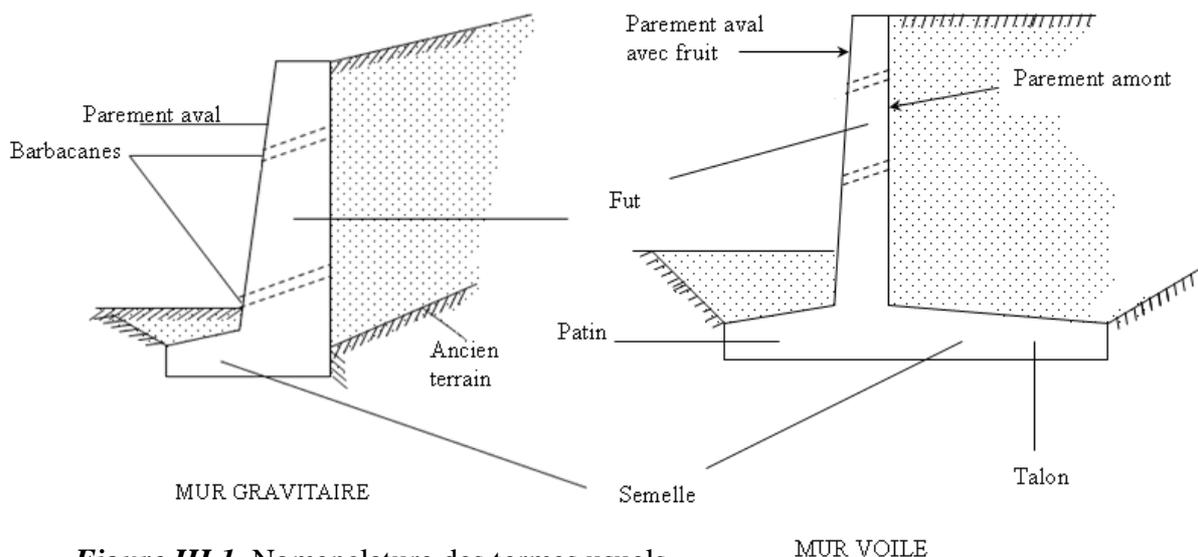
Il en existe une grande variété se caractérisant par des fonctionnements différents et conduisant à des études de stabilité interne spécifiques.

Tous ces ouvrages ont en commun la force de poussée exercée par le massif de sol retenu. Par contre, c'est principalement la manière dont est reprise cette force de poussée qui différencie les différents types d'ouvrages.

Après avoir donné une classification des divers ouvrages de soutènement, on indique pour chaque type les étapes principales de la méthode d'étude de dimensionnement.

**III.2 DEFINITION**

Un mur de soutènement est constitué de deux parties essentielles (figure III.1) : un fut, paroi résistante destinée à retenir les terres situées en arrière, et une semelle de fondation, dans laquelle s'encastre le fut, qui assure la stabilité de l'ouvrage.



### III.3 DIFFERENTS TYPES D'OUVRAGES DE SOUTÈNEMENT

On classe les murs de soutènement en deux grandes catégories :

- Les murs gravitaires ou murs-poids ;
- Les murs-voiles.

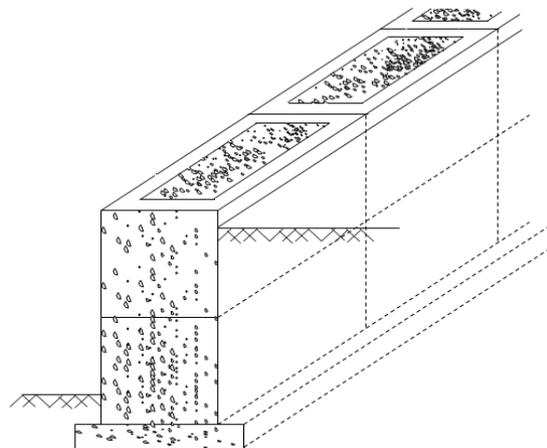
#### III.3.1 Murs gravitaires ou murs-poids

Ce sont des ouvrages résistants par leur poids propre à la majeure partie de la poussée des terres. Ces murs sont massifs et réalisés en béton non armé ou en maçonnerie épaisse de pierres ou de briques. Leur parement arrière peut présenter éventuellement des redans.

Quelques exemples sur des murs gravitaires.

##### a) Mur à caissons

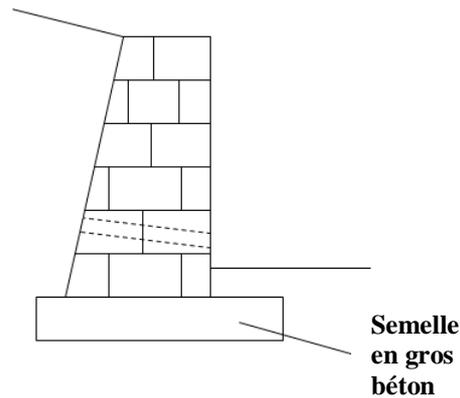
Le mur à caissons (figure III.2) est le plus résistant. Il est constitué d'un ensemble de boîtes alignées, superposées, ou encore alignées et superposées. Chaque boîte ou caisson est remplie de sol, de pierres ou d'un autre matériau de poids volumique élevé. La stabilité du mur est assurée par la largeur des caissons et le poids du matériau de remplissage.



*Figure III.2* Mur à caissons

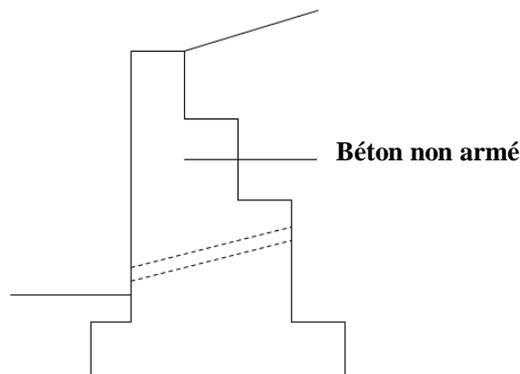
##### b) Mur gravitaire en maçonnerie

Ce sont des murs constitués de pierres, de moellons ou de briques jointoyés (figure III.3).



**Figure III.3** Mur gravitaire en maçonnerie

**c) Mur gravitaire à redans**



**Figure III.4** Mur à redans

**III.3.2 Murs-voiles**

Ils sont aussi appelés quelquefois murs-chaises ou mur cantilever : ce sont des ouvrages utilisant comme élément de stabilisation le poids des terres soutenues par l'intermédiaire de leur semelle de fondation. De tels murs sont réalisés en voiles minces de béton armé (d'où leur nom) et peuvent avoir des formes plus ou moins compliquées. Les semelles de tels murs comportent un patin ou bec et un talon avec parfois une bêche à l'arrière. Leur fut comporte parfois une chaise de lestage. On rencontre également des murs voiles à contreforts avec radier de lestage.

Quelques exemples sur des murs-voiles.

**a) Mur en «T renversé» classique**

Le mur en «T renversé» est la forme classique pour un mur en béton armé de treillis soudé. Il est économique sans contreforts, tant que sa hauteur n'excède pas 5 à 6 mètres, et

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

peut-être réalisé sur un sol de qualités mécaniques peu élevées. En effet, par rapport à un mur-poids de même hauteur, il engendre des contraintes sur le sol plus faibles pour une même largeur de semelle.

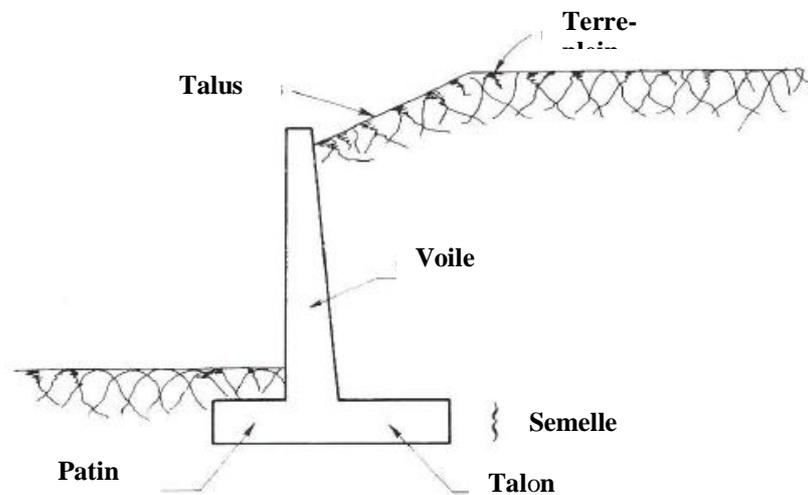


Figure III.5 Mur en «T renversé» classique

### b) Mur à contreforts

Lorsque la hauteur du mur devient importante ou que les coefficients de poussée sont élevés, le moment d'encastrement du voile sur la semelle devient grand. Une première solution consiste à disposer des contreforts dont le but est de raidir le voile.

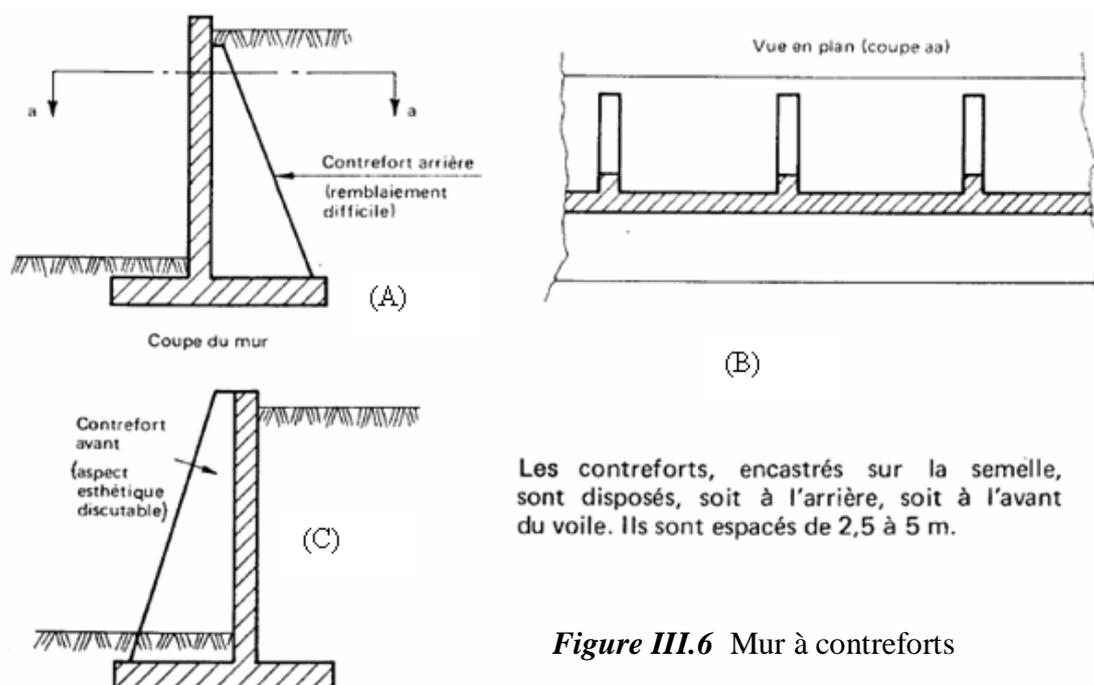


Figure III.6 Mur à contreforts

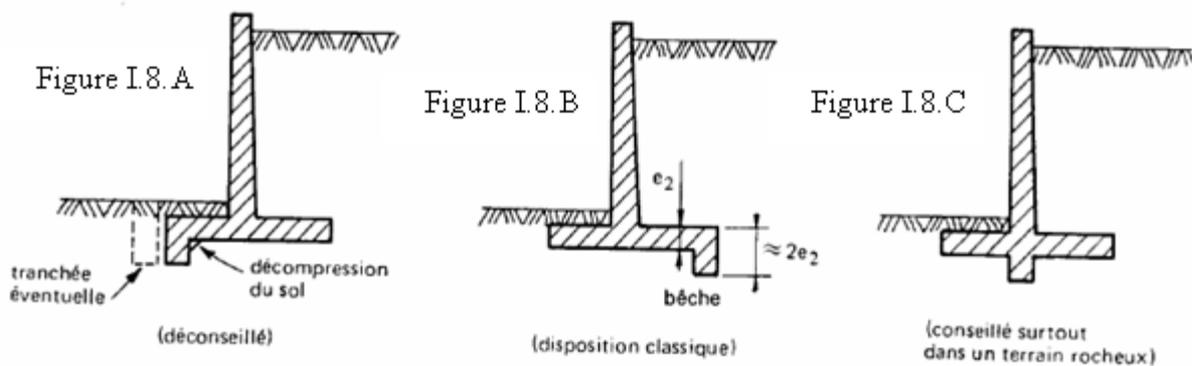
On peut encore adopter d'autres solutions pour limiter les poussées des terres sur le voile des murs, mais elles sont d'un emploi peu fréquent. Ces solutions, certes astucieuses et séduisantes, ont l'inconvénient d'être d'une exécution difficile et de grever le coût du mur, même si l'on économise par ailleurs sur la matière.

### c) Diverses dispositions de bêtes

Parfois, la stabilité au glissement du mur nécessite de disposer sous la semelle une «bête». Celle-ci peut être soit à l'avant, soit à l'arrière de la semelle, soit parfois encore en prolongement du voile.

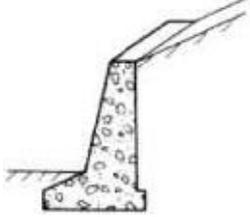
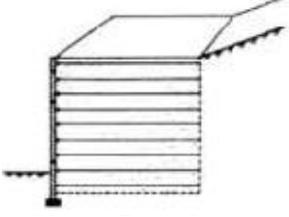
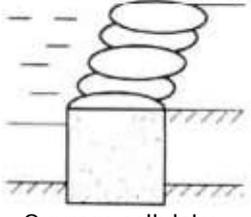
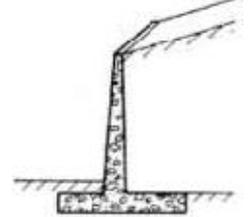
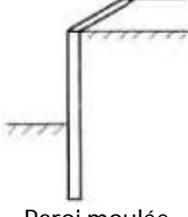
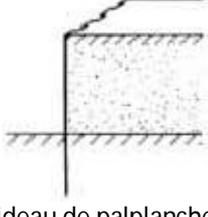
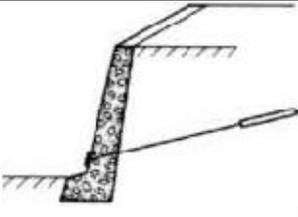
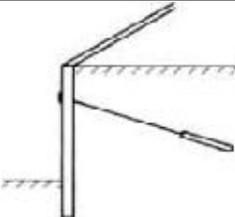
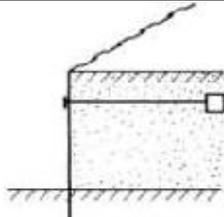
Cette bête est toujours coulée en «pleine fouille» sans coffrage. Le premier cas (figure III.8.A) peut paraître intéressant car il permet de mettre la semelle totalement hors gel. Mais à l'ouverture de la fouille de la bête, il y a un risque de décompression du sol dans la zone où il est le plus sollicité. De plus, il y a aussi un risque de voir, après la construction du mur, la butée devant la bête supprimée par des travaux de terrassement (ouverture d'une tranchée pour pose d'une canalisation par exemple).

Le troisième cas (figure III.8.C) est peu employé. Il est néanmoins très intéressant car il permet de réaliser facilement le ferrailage de l'encastrement du voile sur la semelle en prolongeant dans la bête les treillis soudés formant armatures en attente.



**Figure III.8** Diverses dispositions de bêtes

## d) Autres murs

Mode de reprise de la poussée	OUVRAGE DE SOUTÈNEMENT		
<i>Poids de l'ouvrage</i>	 <p>Mur poids en béton ou maçonnerie</p>	 <p>Mur en Terre Armée</p>	 <p>Ouvrage cellulaire</p>
<i>Encastrement</i>	 <p>Mur cantilever en béton armé</p>	 <p>Paroi moulée</p>	 <p>Rideau de palplanches</p>
<i>Ancrage</i>	 <p>Mur en béton, ancré</p>	 <p>Paroi moulée ancrée</p>	 <p>Rideau ancré</p>

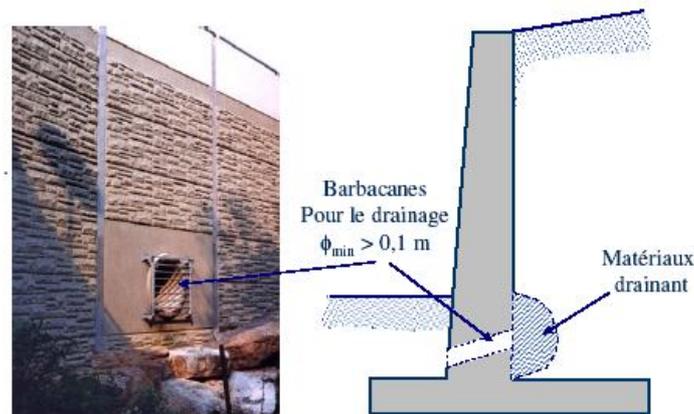
**Figure III.7** Classification des ouvrages de soutènement d'après le mode de reprise de la poussée

### III.4 PRECAUTIONS

#### III.4.1 Précautions-Drainage et gel

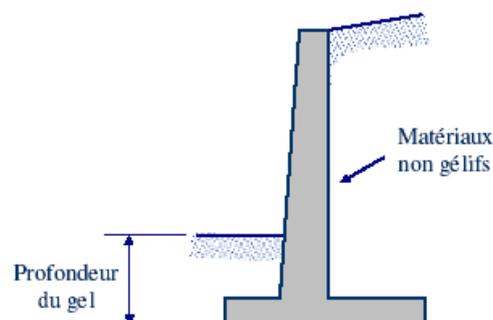
- Il est important qu'il n'y ait pas d'accumulation d'eau à l'arrière d'un mur de soutènement. Il faut donc aménager des drains le long du mur et à la base de celui-ci pour permettre l'évacuation de l'eau.

Les remblais constitués par des sables et graviers silteux et argileux (SC, SM, GC et GM) ou des silts et silts argileux (CL, MH, ML et OL) devraient être couverts d'une couche de sol imperméable en surface.



**Figure III.9** Précaution-drainage

- Si on est en présence de matériaux gélifs, il faut les tenir loin du mur afin que le gonflement dû au gel ne puisse pas induire des pressions supplémentaires. De plus, la base doit être placée à 1 m au moins sous la surface du sol devant le mur, et en dessous de la zone affectée par le gel, par les changements des volumes saisonniers ou par les risques d'affouillement. Il ne faut pas tenir compte de la résistance passive dans la zone du gel.
- Selon le système de classification unifié des sols, les sols classifiés GW, GP, SW et SP constituent d'excellents matériaux de remblai et on peut considérer les pressions théoriques comme valables pour les calculs.
- Les sols portant les symboles SC, SM, GC et GM constituent des matériaux de remblai convenables s'ils sont maintenus secs. Ils sont sensibles à l'action du gel s'ils sont humides. S'ils sont bien drainés, on peut considérer les pressions théoriques comme valables pour les calculs.
- Les sols dont les symboles sont CL, MH, ML et OL sont souvent très susceptibles au gel. Par conséquent, on ne peut utiliser les valeurs de poussée pour les calculs, même pour les murs qui peuvent se déplacer, car il en résulterait probablement un mouvement du mur excessif et continu. Il faut utiliser un coefficient de poussée de 1.



**Figure III.10** Précaution-gel

### III.4.2 Précautions-Compactage

- Dans le cas des remblais pulvérulents, la réduction des pressions aux valeurs de la poussée se produira pour une rotation du mur,  $Y/H$ , de seulement quelques dixièmes de un pourcent. Dans le cas des remblais cohérents, les mouvements nécessaires pour produire les valeurs de poussée peuvent être plus importants.
- Lorsqu'un mur rigide ne pas peut se déplacer, les pressions latérales dépendent en grande partie des procédés de compactage. En effet, le compactage du remblai à l'intérieur d'un prisme confiné derrière le mur tend à accroître les pressions horizontales (poussée).

▪

#### a) Sols pulvérulents

- ✓ Le compactage d'un sol pulvérulent derrière un mur rigide ne pouvant pas se déplacer peut engendrer, selon le degré de compactage, des pressions horizontales du double ou plus de la valeur de pression des terres au repos ( $K_0$  varie entre 0,4 et 0,8).
- ✓ Pour un compactage faible à moyen derrière un mur rigide non encastré, le calcul peut se faire en se basant sur les valeurs de poussée ( $K_a$ ).

#### b) Sols cohérents

- ✓ Les pressions résiduelles peuvent varier beaucoup. Lorsque le degré de compactage est faible à moyen, on peut supposer que les pressions correspondent aux pressions des terres au repos. Lorsque le degré de compactage est plus élevé (95% du proctor standard), le mur devrait être conçu pour des pressions au repos s'il est capable de se déplacer (mur). Sinon, le coefficient de poussée doit être évalué et il est de 1 ou plus.

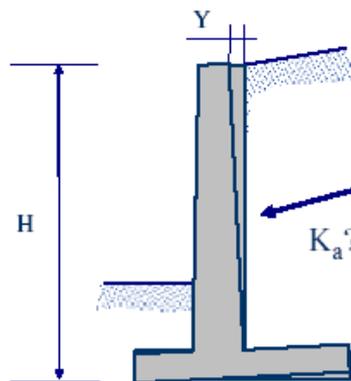


Figure III.11 Précaution-compactage

### III.5 PRESSION LATÉRALE DES TERRES

#### III.5.1 Introduction

L'analyse de la pression latérale des terres est d'un aspect très important en mécanique des sols. Les applications sont très diverses et s'étendent du dimensionnement des ouvrages de soutènement jusqu'à l'étude de la stabilité des pentes et des talus. Les hypothèses généralement admises sont un état de déformation plane et un comportement rigide-parfaitement plastique car l'écoulement par cisaillement se produit à contrainte constante.

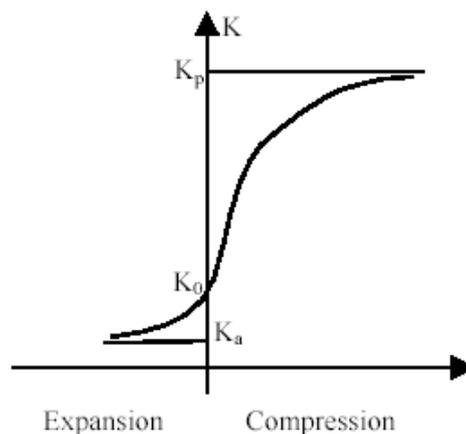
#### III.5.2 Pression des terres au repos et relation pression latérale-déformation latérale

L'état des contraintes dans le sol n'est pas hydrostatique: la contrainte horizontale ou latérale n'est pas égale à la contrainte verticale. En mécanique des sols, la contrainte latérale totale est définie en fonction de la contrainte verticale totale par la relation:

$$\sigma_h = K \sigma_v \quad (\text{III.1})$$

où  $K$  est dit coefficient de la pression des terres. Puisque les contraintes totales peuvent changer selon le degré de saturation du sol, le coefficient  $K$  n'est pas constant pour un sol donné. C'est pour cette raison que nous écrivons cette relation en terme de contraintes effectives:

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v \quad (\text{III.2})$$



**Figure III.12** Variation de  $K$  en fonction de la déformation

$K_0$  est le coefficient des terres au repos. Il est indépendant de l'état de saturation du massif. Il est constant pour une même couche de sol et une même masse volumique. De ce fait, ce coefficient est très important pour l'analyse de stabilité et la conception des différents

ouvrages. Lorsque le sol subit des déformations, on parle de coefficient de pression latérale tout court. La variation de ce coefficient en fonction des déformations latérales est montrée ci-dessus (figure III.12). On peut remarquer que la déformation latérale nécessaire à la mobilisation de la poussée passive est beaucoup plus grande (2 à 4 % pour les sables denses, de 10 à 15 % pour les sables lâches) que la déformation nécessaire à la mobilisation de la pression active (de l'ordre de 0,25 et 1 % respectivement). Le coefficient  $K_0$  peut être déterminé expérimentalement par un essai triaxial pendant lequel on empêche toute déformation latérale. D'autre part, on peut trouver des relations analytiques donnant  $K_0$  en fonction des propriétés du sol. A titre d'exemple, Jaky propose, pour les sables, la relation:

$$K_0 = 1 - \sin \varphi' \quad (\text{III.3})$$

Mayne et Kulhawy proposent l'expression suivante pour les sols surconsolidés en phase d'expansion seulement:

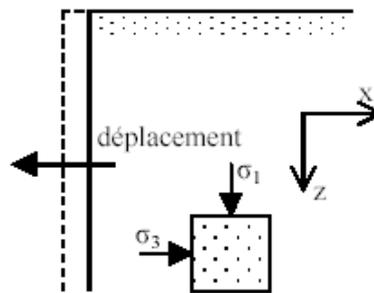
$$K_0 = (1 - \sin \varphi')(\text{rsc})^{\sin \varphi'} \quad (\text{III.4})$$

où rsc est le taux de surconsolidation. Dans la littérature on trouvera des études sur la corrélation entre  $K_0$  et diverses autres paramètres tels que indice de plasticité, degré de surconsolidation ...etc.

### **1.5.3 Essais sur la poussée des terres**

#### **a) Etat actif**

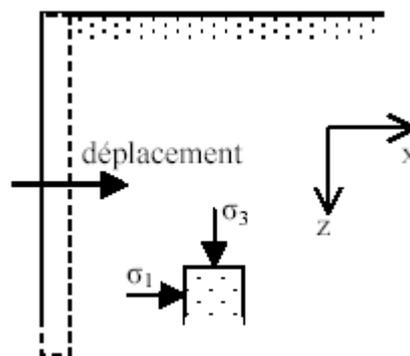
Soit un massif de sol semi infini avec une surface horizontale et un écran vertical lisse. Le sol est supposé homogène et isotrope. Dans ces conditions, les contraintes  $\sigma_z$  et  $\sigma_x$  sont des contraintes principales (figure III.13). Supposons que l'on effectue un déplacement de l'écran loin du massif. Ce déplacement est équivalent à une expansion du sol, ce qui induit une diminution de  $\sigma_x$  (cette diminution est fonction des déformations latérales dues au déplacement). Si le déplacement de l'écran est assez suffisant,  $\sigma_x$  atteint une valeur minimale correspondant à un état d'équilibre plastique dans lequel le cercle de Mohr touche l'enveloppe de rupture. Puisque  $\sigma_x$  diminue, elle représente donc la contrainte principale mineure  $\sigma_3$ . La contrainte verticale  $\sigma_z$  sera la contrainte principale majeure  $\sigma_1$ . La contrainte  $\sigma_3$  est dite pression active.



*Figure III.13* Etat actif

### b) Etat passif

Supposons que l'on déplace l'écran vers le massif de sol (figure III.14). La contrainte  $\sigma_x$  croît jusqu'à ce qu'un état d'équilibre plastique soit atteint. Dans ces conditions,  $\sigma_x$  devient la contrainte principale majeure et  $\sigma_z$  sera la contrainte principale mineure  $\sigma_3$ .  $\sigma_x$  maximum est atteinte lorsque le cercle de Mohr devient tangent à l'enveloppe de rupture. La contrainte horizontale est dite pression passive.



*Figure III.14* Etat passif

## III.5.4 Calcul pratique de la poussée et de la butée

### III.5.4.1 Théorie de Rankine (1857)

#### a) Introduction

Rankine considère l'état de l'équilibre plastique limite (tout juste avant la rupture). Cette théorie satisfait la solution de la borne inférieure de l'analyse limite. L'état de contrainte est alors représenté par le cercle de Mohr à la rupture (figure III.15). Les plans de rupture sont inclinés de

$$\theta = \pm(45^\circ + \varphi/2) \tag{III.5}$$

par rapport au plan principal majeure (figure III.16). Lorsqu'une masse de sol est caractérisée par une contrainte principale qui agit dans la même direction en tout point, il se forme un réseau de plans d'écoulement dit lignes de glissement, également inclinés par rapport aux plans principaux.

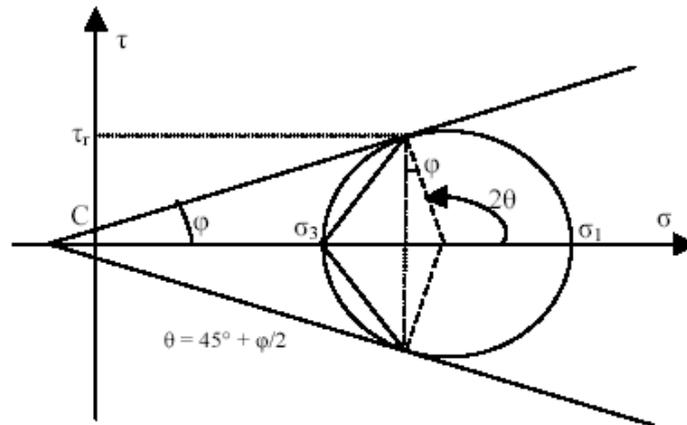


Figure III.15 Cercle de Mohr à l'équilibre limite

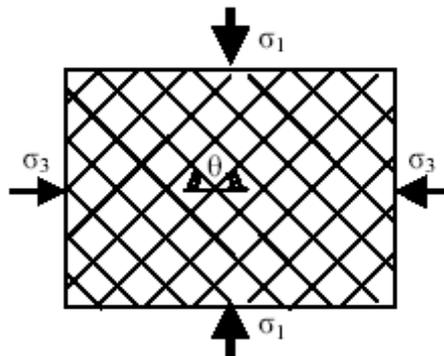


Figure III.16 Lignes de glissement

**b) Etat actif**

La contrainte  $\sigma_3$  dite pression active est calculée comme suit :

D'après le cercle de Mohr précédent, il vient :

$$\sin \varphi = \frac{r}{cctg\varphi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}} = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3 + 2cctg\varphi)} \tag{III.6}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_3 + 2cctg\varphi)\sin \varphi \tag{III.7}$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - 2c \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} \quad (\text{III.8})$$

Posons :

$$K_a = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (\text{III.9})$$

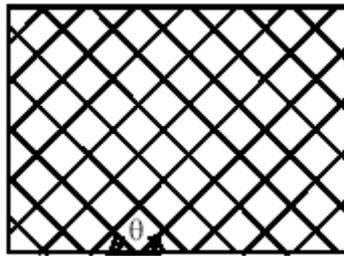
dit coefficient de la pression active.

Et puisque  $\sigma_1$  est due au poids des terres à la profondeur  $z$

$$\sigma_1 = \gamma z \quad (\text{III.10})$$

Il vient alors :

$$\sigma_3 = p_a = K_a \gamma z - 2c (K_a)^{1/2} \quad (\text{III.11})$$



*Figure III.17* actif de Rankine lignes de glissement

Pour un sol submergé, on utilise  $k_a(\varphi')$  et la cohésion effective  $c'$  au lieu de la cohésion totale  $c$ . Les lignes de glissement (figure III.17) font un angle

$$\theta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \quad (\text{III.12})$$

avec l'horizontale. La distribution de  $p_a$  le long de la profondeur est comme schématisé ci-dessous (figure III.18). Le diagramme de la zone  $[0 - z_0]$  est souvent négligé dans le calcul.

La résultante de la pression active par mètre linéaire de largeur est :

$$F_a = \int_{z_0}^H p_a(z) dz = \frac{1}{2} K_a \gamma (H - z_0)^2 \quad (\text{III.13})$$

Elle agit au deux tiers de  $(H - z_0)$  au dessous de la profondeur  $z_0$ .

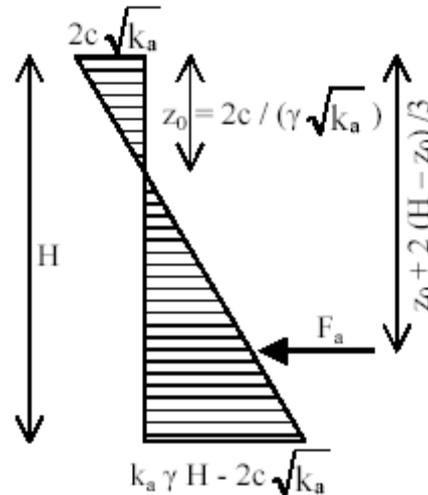


Figure III.18 Diagramme de la pression active

c) *Etat passif*

La contrainte horizontale dite pression passive sera calculée d'après l'expression III.7 par:

$$\sigma_1 = \sigma_3 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + 2c \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} \quad (III.14)$$

Posons

$$K_p = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \text{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (III.15)$$

dit coefficient de la pression passive. Et on écrit (I.14) sous la forme

$$\sigma_1 = p_p = K_p \gamma z + 2c (K_p)^{1/2} \quad (III.16)$$

dans laquelle on utilise  $k(\varphi')$  et la cohésion effective  $c'$  pour le sol submergé. Les lignes de glissement (figure III.19) font un angle

$$\theta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \quad (III.17)$$

avec la verticale. La distribution de la pression passive le long de la profondeur est comme montrer ci-dessous (figure III.20). La résultante par mètre linéaire de largeur est

$$\begin{aligned} F_p &= F_p' + F_p'' \\ F_p' &= \frac{1}{2} K_p \gamma H^2 \\ F_p'' &= 2c \sqrt{K_p} H \end{aligned} \quad (III.18)$$

$F'$  agit à la profondeur  $2H/3$ ,  $F''$  agit à la profondeur  $H/2$ .

dans laquelle on utilise  $k(\varphi')$  et la cohésion effective  $c'$  pour le sol submergé. Les lignes de glissement (figure III.19) font un angle

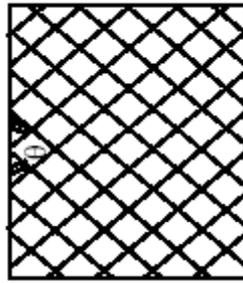


Figure III.19 Etat passif de Rankine lignes de glissement

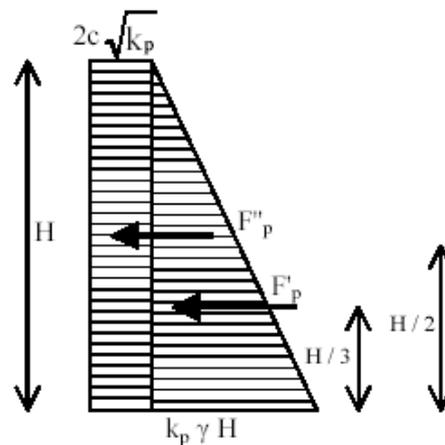


Figure III.20 Diagramme de la pression passive

**d) Poussée due à une surcharge uniforme**

On suppose que le massif est non pesant (figure III.21). La contrainte  $\sigma_z$  augmente de  $q$  quelque soit la profondeur  $z$ . Alors, la pression latérale augmente de :

$K_a q$  dans le cas actif

$K_p q$  dans le cas passif

quelque soit la profondeur. La distribution correspondante est comme montré ci-dessous (figure III.22).

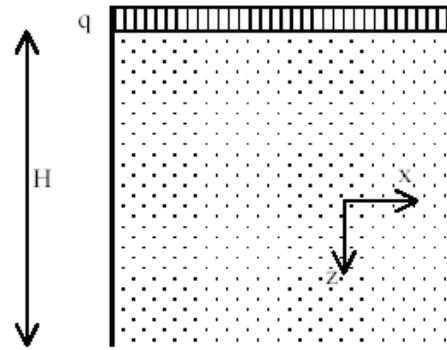


Figure III.21 Massif chargé uniformément

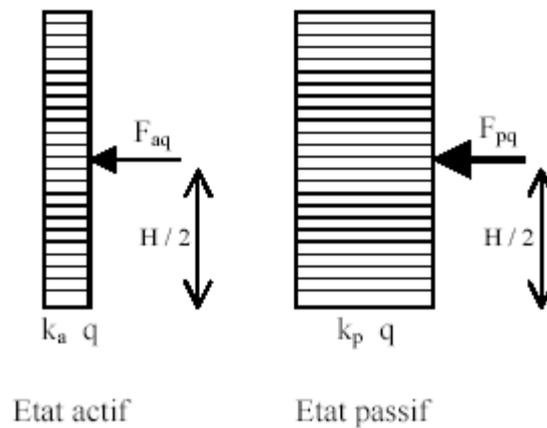


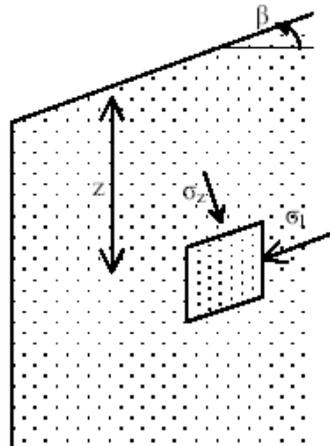
Figure III.22 Poussée due à une surcharge uniforme

### Remarque

- La théorie de Rankine ne tient pas compte de la rugosité de l'écran qui est supposé lisse.
- En présence d'eau, il faut tenir compte de la poussée hydrostatique de l'eau.

### e) Cas de massif à surface libre inclinée avec un angle $\beta$

On admet que les poussées active et passive agissent parallèlement à la surface libre (figure III.23). La contrainte normale à la facette latérale est



**Figure III.23** Massif à surface libre inclinée

$$\sigma_z = \sigma_v \cos \beta = \gamma z \cos \beta \quad (\text{III.19})$$

Le coefficient de poussée active est donné par :

$$K_a = \frac{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}}{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}} \quad (\text{III.20})$$

Pour un sol purement cohérent ( $c = 0$ ), la pression active sera

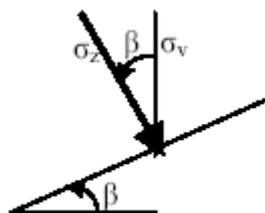
$$p_a = K_a \sigma_z = K_a \gamma z \cos \beta \quad (\text{III.21})$$

et agit parallèlement à la surface libre inclinée. De même, le coefficient de poussée passive est

$$K_p = \frac{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}}{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}} \quad (\text{III.22})$$

et la poussée passive s'écrit :

$$p_p = K_p \gamma z \cos \beta \quad (\text{III.23})$$



**Figure III.24** Etat de contrainte

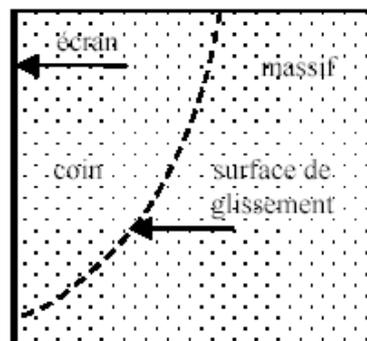
Elle agit parallèlement à la surface libre du massif incliné. Lorsque la cohésion est non nulle, on peut faire recours au procédé graphique basé sur le cercle de Mohr pour calculer les poussées active et passive.

**Remarque**

Lorsque  $\beta = \varphi$  le raisonnement précédent abouti à des résultats incompatibles avec la réalité.

**III.5.4.2 Théorie de Coulomb (1776)****a) Introduction**

La théorie de Coulomb est basée sur l'équilibre d'un coin de sol situé entre l'écran et une surface quelconque de glissement (figure III.25). Les forces agissant sur le sol sont évaluées à l'état de l'équilibre limite. Dans cette théorie, le frottement entre l'écran et le sol est pris en compte. L'angle de frottement écran-sol est noté  $\delta$ . Dans le cas d'un sol cohérent, une caractéristique d'adhésion écran-sol  $c_w$  peut être aussi prise en compte. Vu le phénomène de frottement, la ligne de glissement est courbe au voisinage de la base du mur, mais la théorie de Coulomb suppose des droites de glissement. Dans le cas de la poussée active, la courbure est faible ce qui fait que l'erreur de l'approximation est minimale. Ceci est aussi vrai dans le cas de la poussée passive lorsque  $\delta < \varphi/3$ . Lorsque  $\delta > \varphi/3$ , l'erreur devient plus grande. Lorsque  $\delta = 0$ , le sol est horizontal et l'écran est vertical les théories de Rankine et de Coulomb coïncident.



**Figure III.25** Coin de Coulomb

**b) Etat actif****b1) Sol pulvérulent ( $c = 0$ )**

Soit le coin de sol caractérisé par (figure III.26) :

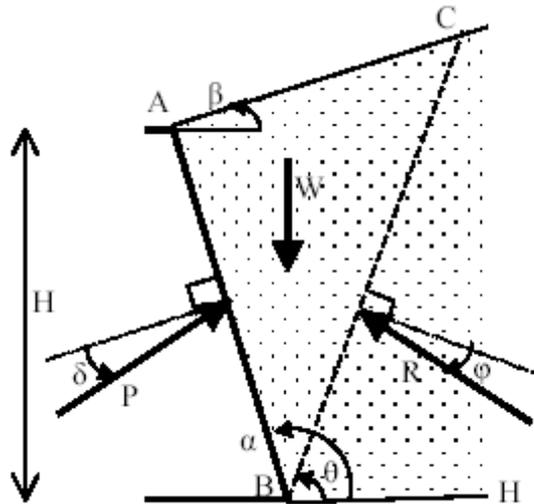
- Une surface extérieure inclinée de  $\beta$  par rapport à l'horizontale.
- L'écran fait l'angle  $\alpha$  avec l'horizontale.
- Le plan de glissement BC fait l'angle  $\theta$  avec l'horizontale.
- La rugosité du mur est l'angle de frottement mur-sol notée  $\delta$ .

Tout au début du glissement, le coin du sol était sous l'équilibre des forces suivantes :

W: poids propre du massif de sol.

P : résultante de la réaction de la poussée sur le mur.

R : résultante de la réaction sur le plan de glissement.



**Figure III.26** Théorie de Coulomb. Etat actif

Connaissant le poids propre W et les directions d'action des forces, on dresse le diagramme de l'équilibre limite (figure III.27), d'où on montre que:

$$\text{L'angle } (W, P) = \pi - \alpha - \delta$$

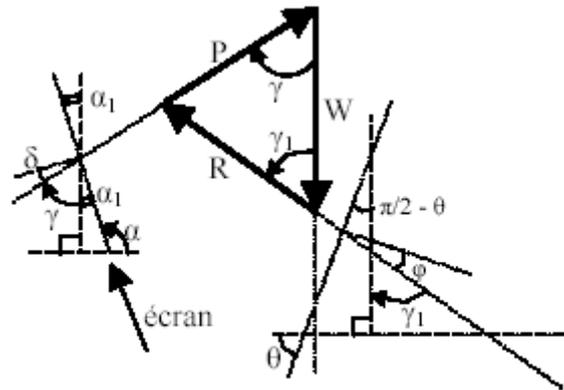
$$\text{L'angle } (W, R) = \theta - \varphi$$

ce qui permet de calculer la poussée P. La poussée active  $P_a$  est la valeur maximum de

$$P(W, \theta)$$

Elle correspond donc à (car  $W = W(\theta)$ )

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{III.24})$$



$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \pi - [ (\pi/2 - \theta) + (\pi/2 + \varphi) ] = \theta - \varphi \\ \alpha_1 &= \pi/2 - [ \pi - \alpha ] = \alpha - \pi/2 \\ \gamma &= \pi/2 - (\delta + \alpha_1) = \pi - \alpha - \delta \end{aligned}$$

Figure III.27 Diagramme de l'équilibre des forces

Ceci est équivalent à essayer plusieurs plans de glissement, d'évaluer à chaque fois P et ne garder pour  $P_a$  que la valeur maximale. Tout calcul fait on abouti à

$$P_a = \frac{1}{2} K_a \gamma H^2 \tag{III.25}$$

avec

$$K_a = \left[ \frac{\sin(\alpha - \varphi) / \sin \alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \delta)} + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\sin(\alpha - \varphi)}}} \right]^2 \tag{III.26}$$

Dans la théorie de Coulomb, on suppose que la résultante  $P_a$  agit à deux tiers de la profondeur de l'écran. Il existe des tableaux donnant  $K_a$  pour différentes valeurs de  $\varphi$  et  $\delta$ , et des valeurs particulières de  $\alpha$  et  $\beta$ .

**b2) Sol cohérent**

**b2.1) Cas général**

Dans ce cas, il faut tenir compte de la cohésion  $c$  et de l'adhérence sol-mur notée  $c_w$  (figure III.28). On admet l'existence d'une zone fissurée de profondeur  $z_0$ . Le long de cette zone, on néglige l'effet des cohésions  $c$  et  $c_w$ . Les forces agissantes sont :

W : le poids propre du coin de sol.

P : la résultante de la réaction du mur sur le sol

$C_w$  : résultante due à l'adhérence mur-sol :  $C_w = c_w \cdot EB$

R : la réaction sur le plan de glissement.

C : la résultante d'adhésion sur le plan de glissement :  $C = c \cdot BC$

Les directions d'action de ces forces sont tous connues, on construit comme précédemment le diagramme des forces. La poussée active correspond à la satisfaction de (III.24).

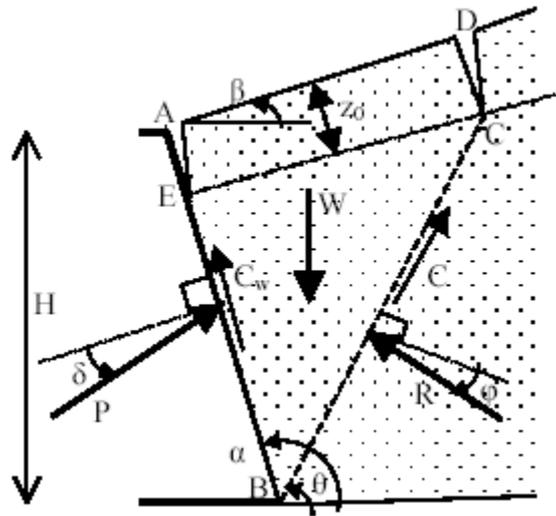


Figure III.28 Théorie de Coulomb. Etat actif. Sol cohérent

### b2.2) Cas d'un mur vertical et un sol horizontal

Dans le cas général d'un sol  $(c, \varphi)$ , la pression latérale à la profondeur  $z$  est donnée par :

$$p_a = K_a \gamma z - K_{ac} c \quad (\text{III.27})$$

avec  $K_a$  donné par (1.18) et

$$K_{ac} = 2 \sqrt{K_a \left( 1 + \frac{c_w}{c} \right)} \quad (\text{III.28})$$

la cohésion  $c$  est remplacée par  $c'$  pour un drainage complet et  $c_u$  dans le cas non drainé.

La profondeur des fissures  $z_0$  correspond à  $p_a = 0$ , d'où

$$z_0 = \frac{2c \sqrt{1 + c_w / c}}{\gamma \sqrt{k_a}} \leq H / 2 \quad (\text{III.29})$$

*c) Etat passif*

On suivra le même raisonnement précédent tout en tenant compte des remarques suivantes (figure III.29):

- . P fait un angle  $\delta$  au dessus de la normale à l'écran.
- . R fait un angle  $\varphi$  au dessus de la normale au plan de glissement.
- . On montre que

l'angle entre W et P est :  $\pi - \alpha + \delta$

l'angle entre W et R est :  $\theta + \varphi$

La résultante des pressions passives est le minimum de  $P(\theta)$  (eq. III.24). Elle est donnée par :

$$P_p = \frac{1}{2} K_p \gamma H^2 \quad (\text{III.30})$$

où

$$K_p = \left[ \frac{\sin(\alpha + \varphi) / \sin \alpha}{\sqrt{\sin(\alpha - \delta)} - \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \delta) \sin(\varphi + \beta)}{\sin(\alpha - \varphi)}}} \right]^2 \quad (\text{III.31})$$

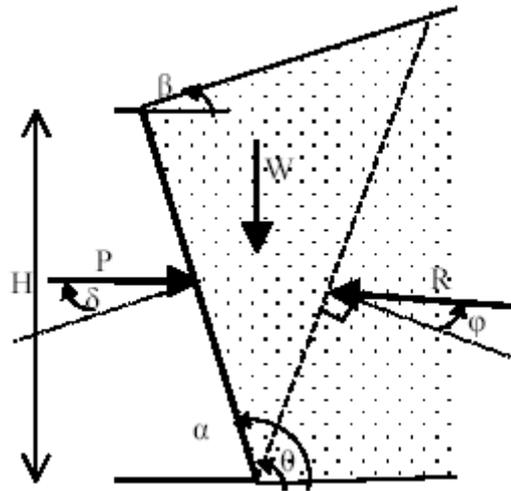
Pour des valeurs particulières de  $\alpha$  et  $\beta$ , il existe des tableaux donnant  $K_p$  pour différentes valeurs de  $\varphi$  et  $\delta$ .

Dans le cas général d'un sol ( $c, \varphi$ ), la pression latérale passive à la profondeur  $z$  est donnée par l'expression :

$$p_p = K_p \gamma z - K_{pc} c \quad (\text{III.32})$$

où  $K_p$  est donné par (1.23) et

$$K_{pc} = 2 \sqrt{K_p \left( 1 + \frac{c_w}{c} \right)} \quad (\text{III.33})$$



**Figure III.29** Théorie de Coulomb. Etat passif

### III.5.4.3 Théorie de Boussinesq (Tables de Caquot et Kérisel)

Rappelons que les théories précédentes introduisent une approximation sur la forme de la surface de glissement qui est prise plane. Dans l'état passif, cette simplification surestime la résistance du sol notamment pour les grandes valeurs de l'angle de frottement interne. Dans ce cas on recommande l'utilisation des tables de Caquot et Kérisel basées sur la théorie de Boussinesq. Les auteurs admettent des surfaces de glissement en forme de spirale logarithmique et dérivent la pression latérale active ou passive par intégration des équations différentielles de l'équilibre. Les résultats sont présentés sous forme de tables numériques.

### III.5.4.4 Construction de Culmann

#### a) Introduction

Elle a été développée par Karl Culmann (1875). Son but est la détermination du plan de glissement ainsi que l'intensité de la poussée active ou passive. Le massif peut être stratifié ou homogène mais l'angle de frottement interne doit être le même pour tout le massif. Nous présentons la construction pour le cas d'un sol pulvérulent, la méthode peut être étendue au cas général d'un sol cohérent chargé....

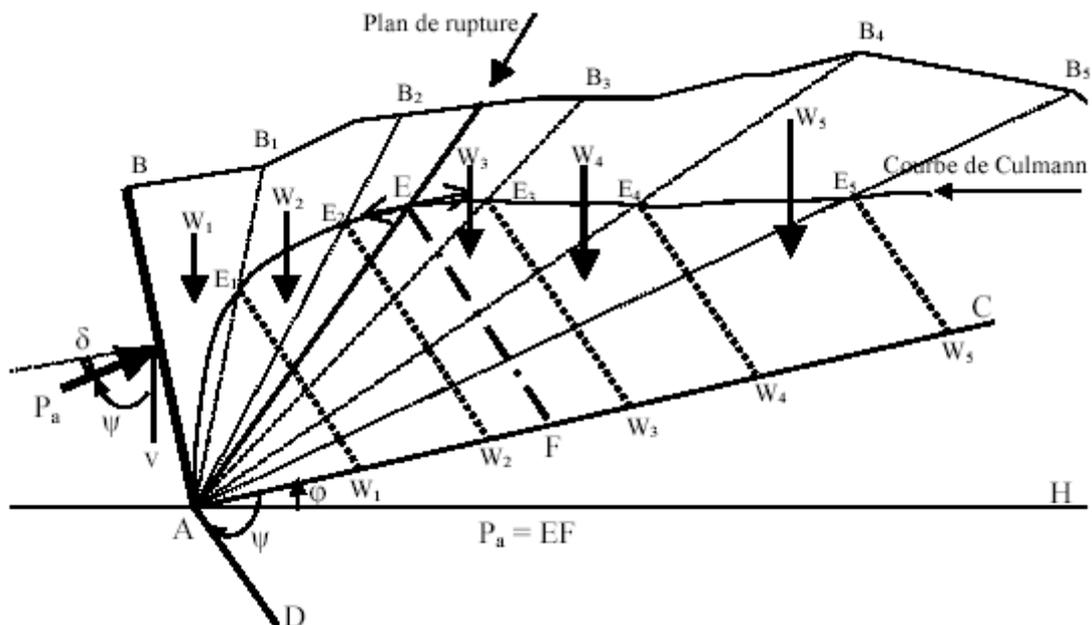
#### b) Sol pulvérulent non chargé

##### b1) Poussée active

1. On choisira une échelle appropriée pour schématiser le massif de sol et l'écran AB (figure III.30).
2. A partir du point A, tracer la droite AC faisant l'angle  $\varphi$  . au dessus de l'horizontale.

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

3. Tracer la droite de référence AD faisant l'angle  $\psi$  avec la droite AC.  $\psi$  est l'angle que fait la poussée active  $P_a$  avec la verticale.
4. Tracer plusieurs plans hypothétiques de glissement :  $AB_1, AB_2, \dots$
5. Déterminer le poids  $W_i$  de chaque tranche tenant compte des différents sols si le massif n'est pas homogène.
6. Choisir une échelle de forces, et reporter les poids sur la droite AC :  $W_1$  correspond à  $AW_1$ ,  $W_2$  correspond à  $W_1W_2$  et ainsi de suite.
7. A partir des points  $W_i$  sur AC, tracer les droites  $W_iE_i$  parallèles à la droite de référence AD. La droite  $W_iE_i$  coupe la ligne de glissement  $Ab_i$  au point  $E_i$ .
8. Joindre les points  $E_i$  par une courbe lisse dite courbe de Culmann.
9. Tracer la droite parallèle à la ligne AC et tangente à la courbe de Culmann. Le point de tangence sera noté E. (si la courbe de Culmann n'est pas régulière, il peut exister plusieurs droites tangentes à la courbe et parallèles à AC).
10. Tracer la droite EF parallèle à AD. Le plan de rupture sera AE, et coupe la surface libre en R. La longueur de EF donne l'intensité de la poussée active  $P_a$  selon l'échelle de forces choisie. (si plusieurs points  $E_i$  existent, celui qui sera retenu correspond au maximum de  $E_iF_i$ ).



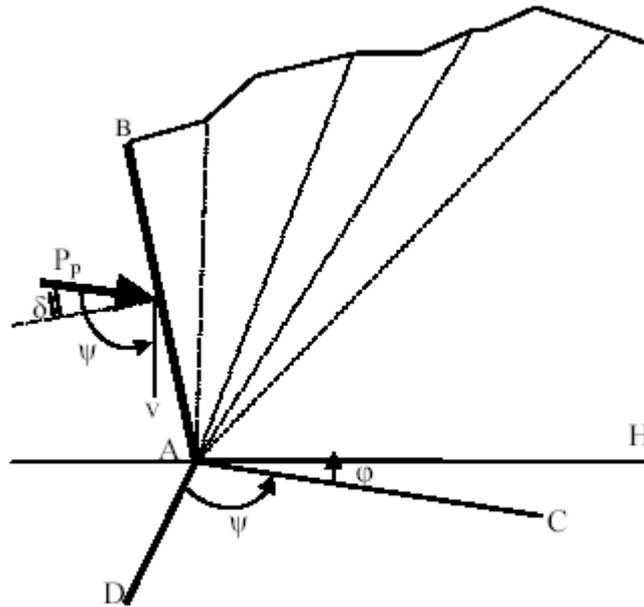
**Figure III.30** Construction de Culmann pour le calcul de la poussée active

## b2) Poussée passive

Le procédé reste le même, toutefois il faut que (figure III.31)

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

- La droite AC fait l'angle  $\phi$  au dessous de l'horizontale.
- L'angle  $\psi$  est mesuré comme indiquer sur la figure.



*Figure III.31* Construction de Culmann pour le calcul de la poussée passive

### III.6 VERIFICATION DE LA STABILITE DES MURS DE SOUTÈNEMENT

#### III.6.1 Prédimensionnement des murs de soutènement

Le calcul complet d'un mur de soutènement est une œuvre assez laborieuse, le dimensionnement de l'ouvrage et ses vérifications demandant une succession de calculs longs et itératifs.

Aussi pour arriver de la façon la plus rapide aux bons résultats, il est important de prédimensionner de la manière la plus juste possible les caractéristiques géométriques du mur.

On donnera sur figure III.32 et figure III.33 les proportions les plus usuelles d'un mur de soutènement gravitaire et en béton armé. Ces indications peuvent servir pour dégrossir un avant-projet.

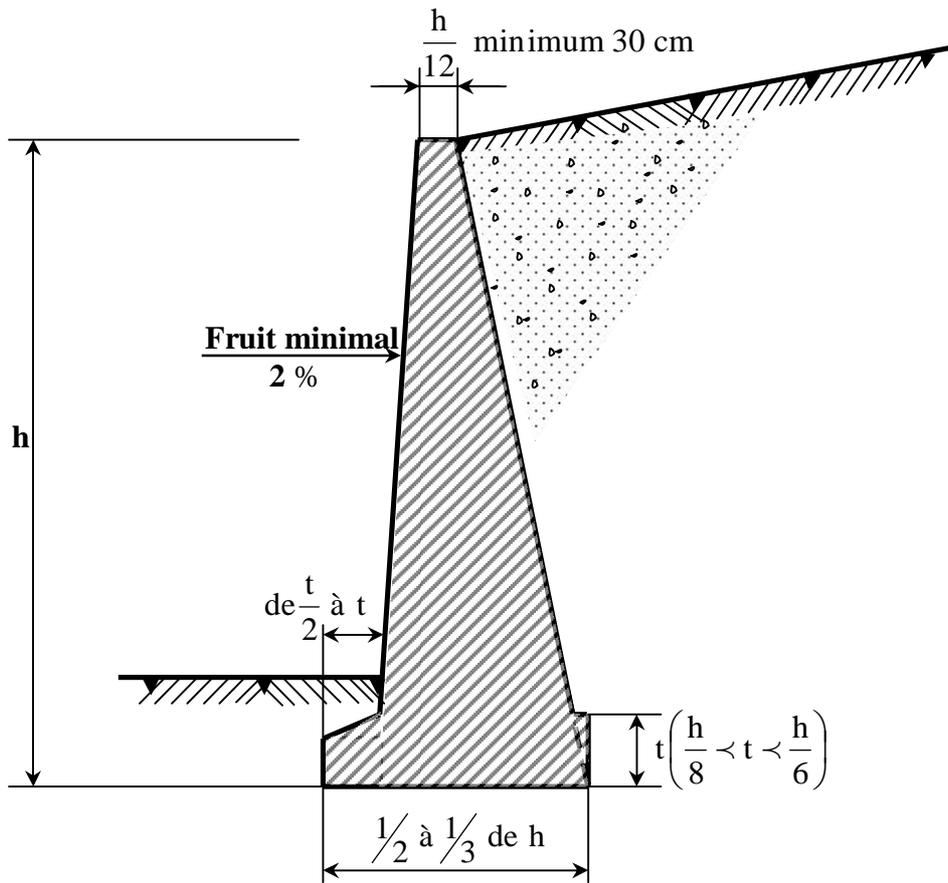


Figure III.32 Dimensions usuelles d'un mur-poids.

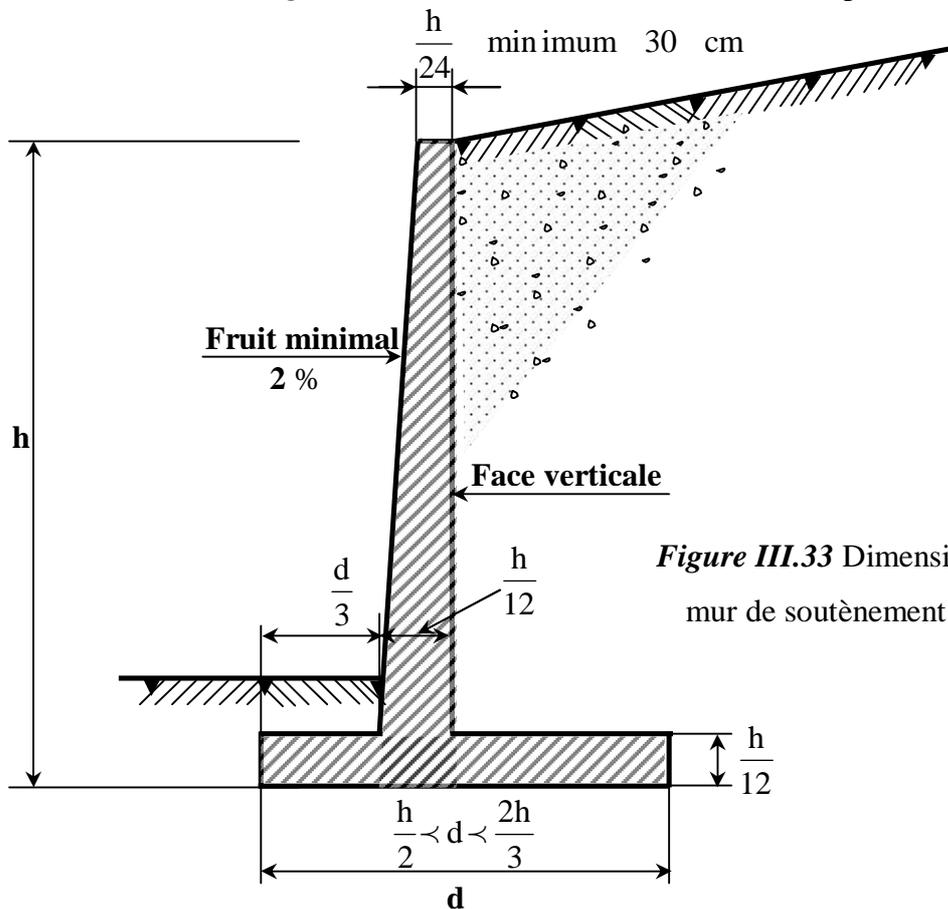


Figure III.33 Dimensions usuelles d'un mur de soutènement en béton armé.

### Remarque

Il est prudent de majorer de 15 % la largeur de semelle ainsi déterminée, car elle ne permet pas toujours de satisfaire les vérifications de la stabilité externe.

#### 1.6.2 Stabilité des murs-poids

Comme on l'a indiqué plus haut, cinq forces agissent sur le mur :

- Le poids du mur  $W$ ,
- La sous-pression  $S$  dont le calcul ne présente pas de particularité (tout au moins si l'eau est en équilibre),
- La butée  $P_p$  que l'on néglige en générale,
- La poussée des terres  $P_a$  dont on vient d'exposer les principes du calcul,
- Enfin la réaction  $R$  du sol de fondation (figure III.34).

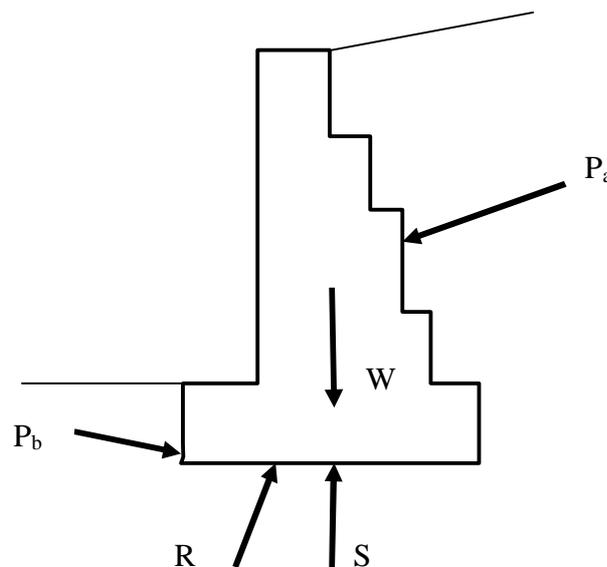


Figure III.34 mur-poids

Si le mur est en équilibre, l'ensemble de ces forces forme un système équivalent à zéro, cette condition permet de calculer la réaction  $R$ . bien entendu, cette réaction doit être dirigée de bas en haut et son point de passage dans le plans de fondation doit tomber à l'intérieur de la maçonnerie, dans le cas contraire on ne saurait en effet trouver une distribution des contraintes dans le massif sous la fondation qui soit compatible avec cette réaction calculée  $R$ .

Il faut alors vérifier la stabilité du mur à l'égard du renversement, à l'égard du glissement et s'assurer de la résistance du terrain de fondation. Il faut vérifier enfin que les efforts dans le fut du mur ne dépassent pas les valeurs permises.

#### a) Rotation ou renversement du mur

Pour vérifier la stabilité du mur au renversement, on localise arbitrairement l'axe de rotation du mur au droit de l'arête extérieure de la fondation et l'on compare les moments par rapport à cet axe ;

- D'une part des « forces stabilisantes » (verticales) ;
- D'autre part des « forces renversantes » (horizontales).

$$F_r = \frac{\sum M_{/0}^S}{\sum M_{/0}^R}$$

$F_r$  admissible  $\geq 1,5$ .

Le rapport de ces moments est le coefficient de stabilité au renversement qui ne doit pas descendre en dessous de 1,5. cette méthode simple, parfaitement logique en apparence, soulève toutefois des critiques justifiées concernant la localisation de l'axe de rotation et la discrimination entre les forces stabilisantes et les forces renversantes, critiques qui laissent planer un doute sur la signification du résultat obtenu.

La pratique montre d'ailleurs qu'il est inutile de vérifier cette stabilité au renversement si la résultante  $R$  du poids du mur et de la poussée des terres se trouve dans le tiers central de la base de la fondation. On précisera plus loin cette nouvelle condition.

#### b) Glissement du mur

Le déplacement du mur par glissement sur le plan de sa fondation est la deuxième éventualité à envisager (figure III.35).

Il faut comparer :

- La composante  $T$  de la résultante  $R$  dans le plan de fondation (en général la composante horizontale),
- La résistance que le terrain de fondation est capable d'opposer au glissement, à savoir  $aB + N \operatorname{tg} \delta$  ;

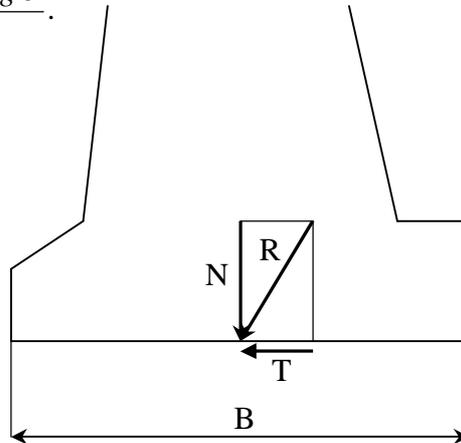
$B$  est la largeur de la fondation,

$N$  la composante de  $R$  normale au plan de cette fondation,

$a$  et  $\delta$  les caractéristiques d'adhérence et de frottement au contact du terrain de fondation et du mur.

Le coefficient de sécurité au glissement est alors égal à :

$$F_g = \frac{aB + N \operatorname{tg} \delta}{T}$$



**Figure III.35** Sécurité au glissement.

Ce coefficient doit être au moins égal à 1,5 si l'on néglige, comme on l'a indiqué plus haut, l'action des terres à la gauche du mur. Si l'on tient compte de la butée, il faut être plus sévère et exiger un coefficient au moins égal à 2.

Certains auteurs admettent que les caractéristiques d'adhérence et de frottement à prendre en compte sont simplement la cohésion et l'angle de frottement interne du terrain de fondation. Ils justifient cette attitude en faisant remarquer que lors de la rupture d'un mur par glissement, on constate fréquemment que la partie inférieure de la fondation entraîne avec elle une couche de terre et que par conséquent la rupture se produit au sein du massif et non dans le plan même de la base de la fondation.

Terzaghi et Peck sont plus circonspects ; ils conseillent d'abord de négliger l'adhérence. Dans ces conditions, le coefficient de sécurité est égal au rapport des tangentes de l'obliquité admissible et de l'obliquité de la résultante  $R$ . c'est donc l'obliquité de  $R$  qui permet de juger de la sécurité au glissement. Terzaghi et Peck suggèrent ensuite d'adopter les valeurs empiriques suivantes :

$\delta = 30^\circ$  pour un terrain de fondation à gros éléments sans limon ni argile,

$\delta = 25^\circ$  pour un terrain à gros éléments qui comprendrait du limon ou de l'argile,

$\delta = 20^\circ$  dans les autres cas.

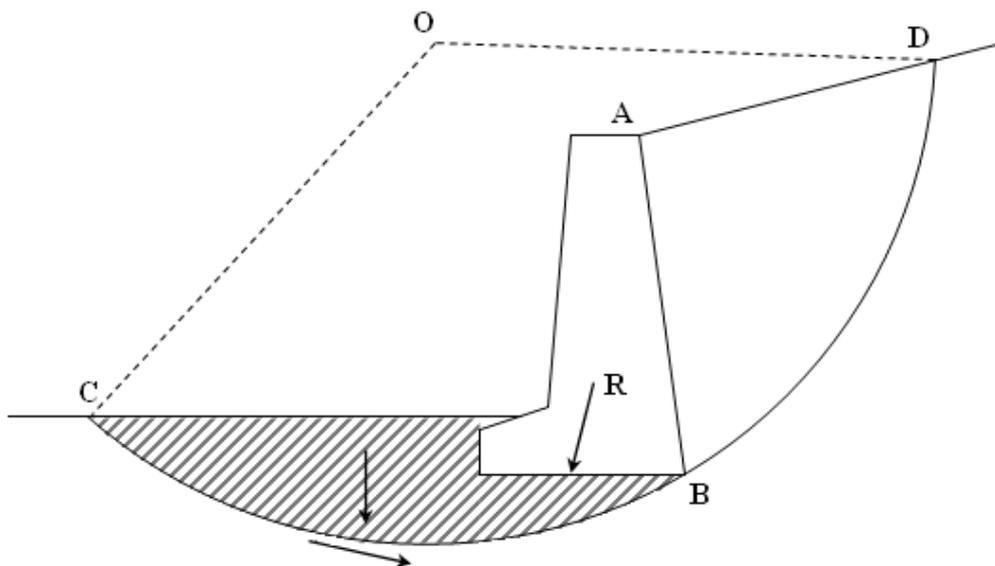
Il arrive quelquefois que pour satisfaire à cette règle de sécurité, on soit amené à alourdir notablement l'ouvrage initialement prévu ; on peut essayer alors de conserver les

*Effets de la variabilité des paramètres de calcul sur la stabilité des murs de soutènement*

dimensions primitives tout en orientant différemment la base de la fondation pour diminuer l'obliquité de  $R$ . On est toutefois limité dans cette voie, car il faut également vérifier la stabilité de terrain de fondation à l'égard d'une rupture superficielle (figure III.36), rupture tout à fait analogue à la rupture par glissement proprement dite.

D'ailleurs, pour un mur de soutènement de proportions normales reposant sur un bon terrain de fondation, c'est la rupture par glissement qui est déterminante. Il peut ne plus en être ainsi pour un mur de forme inhabituelle (avec par exemple, une fondation non horizontale) ou bien si le terrain de fondation gagne peu de résistance au cisaillement avec la profondeur. Pour vérifier la sécurité à l'égard d'une rupture superficielle, on utilise la même méthode que pour l'étude de la stabilité des talus

On admet que la rupture se produit le long d'une ligne de glissement circulaire de centre  $O$  et de rayon  $OB$  (figure III.36) passant par l'arête inférieure  $B$  du mur. On étudie l'équilibre de la masse de terre comprise entre la fondation du mur, la surface libre à gauche du mur et la ligne de glissement présumée  $BC$ .



*Figure III.36* Rupture superficielle.

On indiquera ici simplement que l'étude de cet équilibre permet de calculer moyennant certaines hypothèses, le coefficient de sécurité  $F$  correspondant à l'arc de cercle choisi.

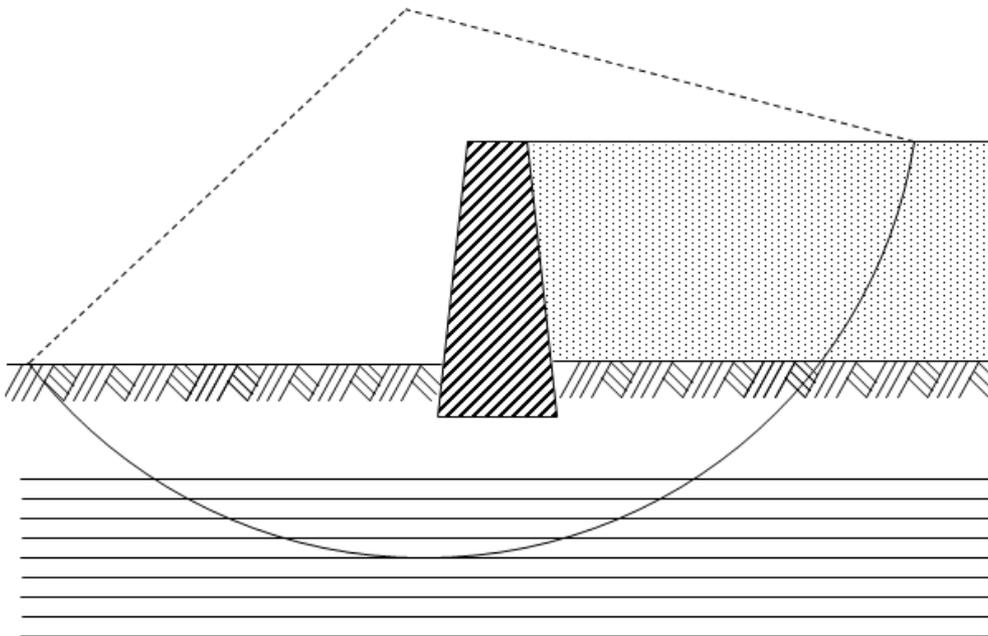
Un arc  $BC$  donne donc une valeur de coefficient de sécurité. Il faut en principe chercher l'arc qui conduit à la plus petite valeur de ce coefficient. En pratique, il n'est pas nécessaire de faire cette recherche et un seul essai suffit, car on a pu constater que si le centre

$O$  se déplace dans une assez large zone autour de la position critique, le coefficient de sécurité correspondant ne varie pas de façon appréciable. On exige en général un coefficient de sécurité minimal de 2 à l'égard des ruptures superficielles.

On a prétendu que ce procédé manquait de logique, car la rupture se développe sur tout l'arc  $CBD$  (figure III.36). Si le coefficient de sécurité est bien voisin de 2 le long de l'arc  $BC$ , il n'en va pas de même le long de l'arc  $BD$  où il doit être voisin de 1 puisque l'on admet que l'action du massif sur le parement  $AB$  est égale à la poussée des terres sans qu'il soit question de coefficient de sécurité. On a proposé par la suite d'apprécier la sécurité en utilisant tout l'arc  $CBD$ . La question peut être discutée, mais la méthode développée plus haut correspond actuellement à un usage très général.

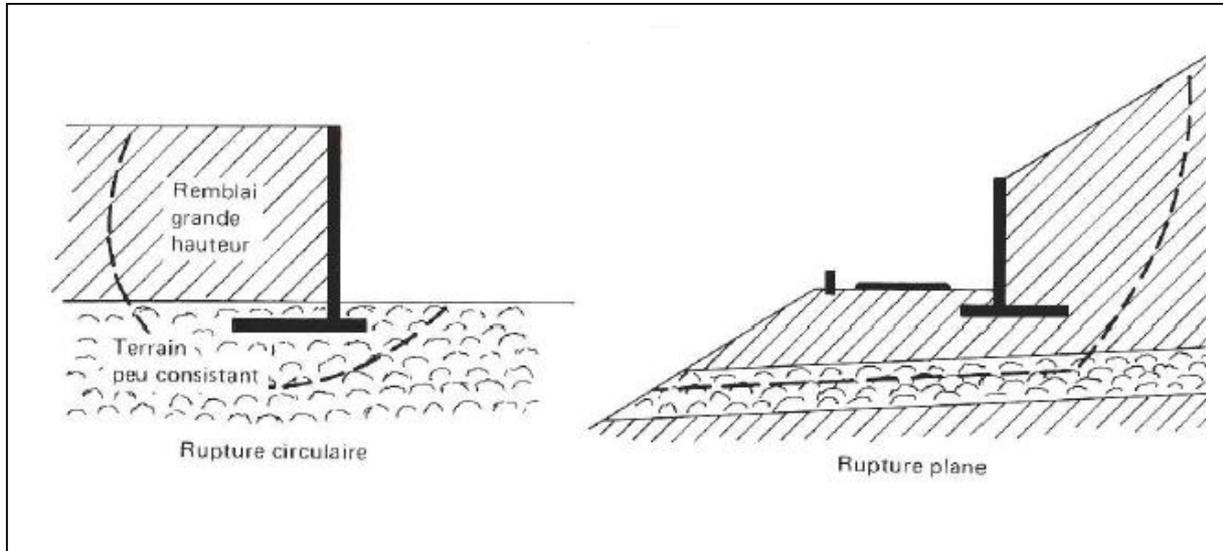
### c) Glissement profond

Si le terrain de fondation comporte en profondeur une couche importante de faible résistance, il peut arriver qu'une rupture profonde se produise (figure III.37) puisque l'augmentation du poids de la masse de terres intéressée par le glissement n'est pas équilibrée par une augmentation corrective de la résistance au cisaillement le long de la ligne de glissement



*Figure III.37* Rupture profonde.

Vis-à-vis de ce phénomène, les méthodes de calcul sont basées sur le fait que la rupture se produit selon une ligne de glissement assimilable à un arc de cercle ou à un arc de cercle prolongé par une droite (figure III.38).



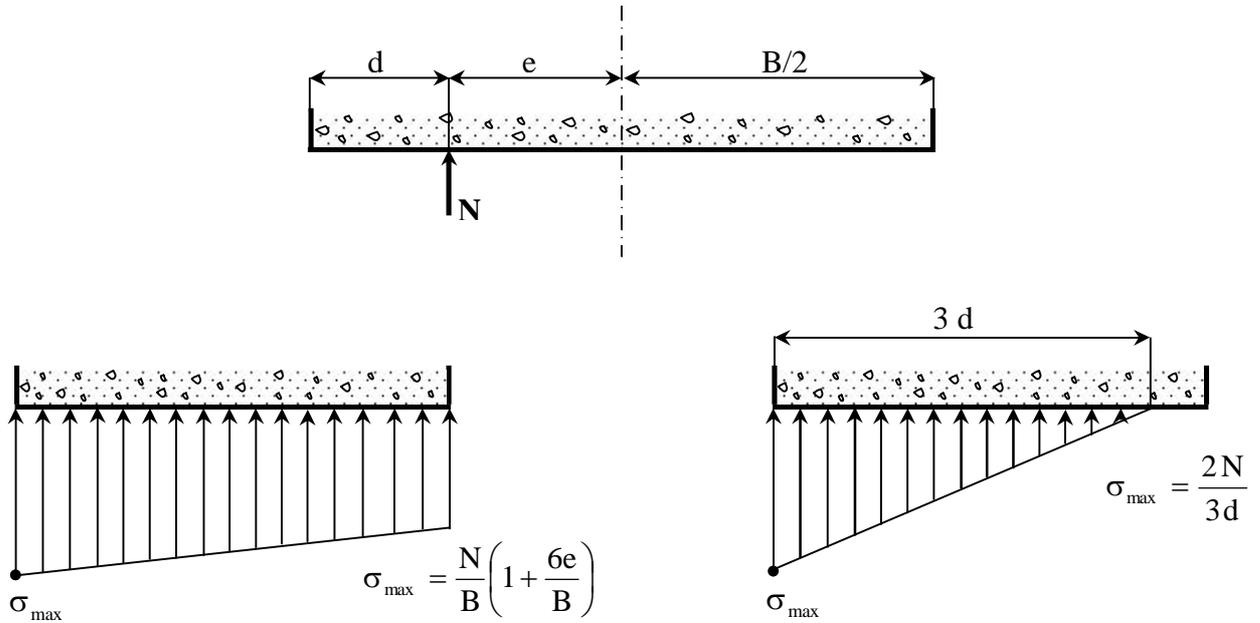
**Figure III.38** Lignes de glissement

Le lecteur intéressé par la vérification de cet équilibre général pourra se reporter aux ouvrages spécialisés. En bref, la sécurité au grand glissement consiste à vérifier que la résistance au cisaillement mobilisable est supérieure à l'effort de cisaillement le long de la surface de rupture en prenant un coefficient de sécurité de 1,5.

#### **d) Résistance du sol de fondation**

Après le renversement et le glissement, on étudiera maintenant la résistance du sol de fondation sous les efforts verticaux.

On utilise souvent une méthode de calcul qui fait appel à la notion de la pression admissible. Le calcul est le suivant : on admet la distribution des contraintes normales sous la fondation d'un mur de soutènement est linéaire, et l'on détermine cette distribution pour que sa résultante soit égale à la composante normale  $N$  de la réaction  $R$ . la figure III.39 indique les deux cas de figure possible, suivant que  $N$  tombe dans le tiers central ou non, et donne les formules qui permettent de calculer l'intensité de la contrainte maximale. On vérifie alors que cette intensité maximale est bien inférieure à la pression admissible définie a priori indépendamment des dimensions de la fondation, de l'inclinaison et de l'excentricité des charges.



(a)  $0 < e < \frac{B}{6}$

(b)  $\frac{B}{6} < e < \frac{B}{2}$

**Figure III.39** Répartition théorique des contraintes sur le sol de fondation.

On peut craindre des mouvements du mur si le tassement de l'arête intérieure est très différent du tassement de l'arête extérieure. Pour éviter ces tassements différentiels, il est de bonne pratique de fixer une limite à l'excentrement de  $N$ .

Si le mur repose sur un terrain de fondation normal, on demande que  $N$  soit situé dans le tiers central.

Si le mur est fondé sur du rocher, on est peut moins sévère :  $e \leq \frac{B}{4}$ .

Par contre, si le terrain de fondation est très compressible, il faut que la composante  $N$  tombe au voisinage immédiat du milieu de la base, c'est-à-dire que son excentrement soit négligeable. En effet, la pression augmente rapidement avec l'excentrement, or si la charge est excentrée, par suite de la forte compressibilité du terrain, l'arête extérieure la plus chargée tasse plus que l'arête intérieure et le mur bascule, ce qui augmente l'excentrement ; le phénomène se poursuit de lui-même, éventuellement jusqu'à la rupture complète.

### e) Stabilité interne du mur

On vient de vérifier la stabilité d'ensemble du mur, il reste à s'assurer que les contraintes dans la maçonnerie restent inférieures aux contraintes admissibles. C'est un problème simple de résistance des matériaux.

### III.6.3 Stabilité des murs en béton armé

#### ▪ Principe du calcul des murs en béton armé

La conception des murs de soutènement en béton armé diffère sensiblement de celle des murs gravitaires. Les terres sont retenues par un voile vertical dont l'équilibre est assuré par une semelle qui se prolonge sous le remblai (figure III.40). Cette semelle supporte le poids des terres dont le rôle stabilisateur est évident. La partie la plus délicate de l'ouvrage se situe à l'encastrement du voile dans la semelle, il se développe là des moments fléchissants notables. La forme du parement intérieur de ces murs diffère par trop de la ligne droite pour que l'on puisse utiliser telles quelles les méthodes développées précédemment pour le calcul de la poussée des terres. Il faut d'ailleurs bien voir que la partie du massif comprise entre le voile et la semelle ne peut pas passer à l'état plastique et reste à l'état élastique.

Considérons un mur en T en béton armé défini par le schéma ci-dessous (figure III.40) retenant un sol d'angle de frottement interne  $\phi$  limité par un talus infini, incliné de  $\beta$  sur l'horizontale.

Un déplacement dans le sens de l'expansion du remblai fait apparaître deux surfaces de glissement passant par l'arête du talon.

Pour simplifier, on peut admettre que ces surfaces de glissement sont des plans dont les traces sur le plan de la figure sont les deux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

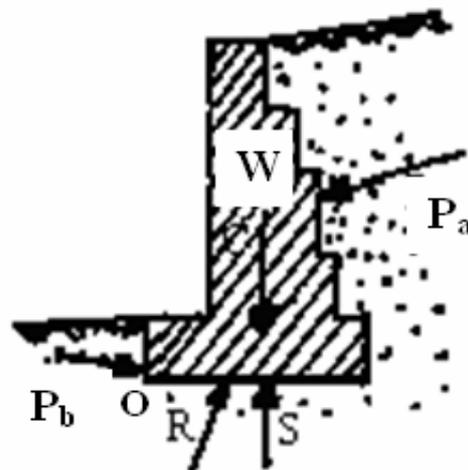


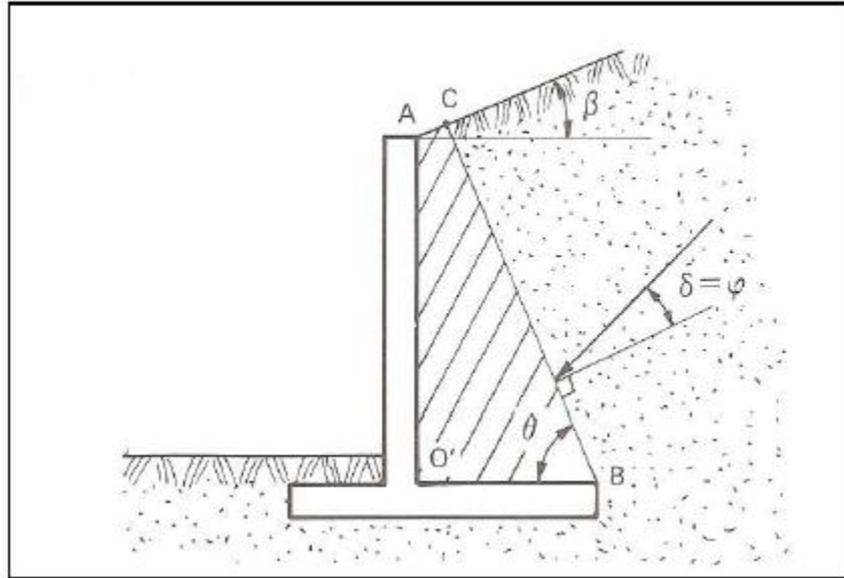
Figure III.40 Mur de soutènement en béton armé.

La théorie du cercle de Mohr montre que la droite  $\Delta$  est inclinée sur l'horizontale d'un angle  $\theta$  égal à :

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \left( \frac{i - \beta}{2} \right) \text{ avec } \sin i = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi}$$

Deux cas sont possibles :

- 1) La droite  $\Delta$  coupe le talus au point C (figure III.41). Dans ce cas, on considère que le massif AO'BC est solidaire du mur.

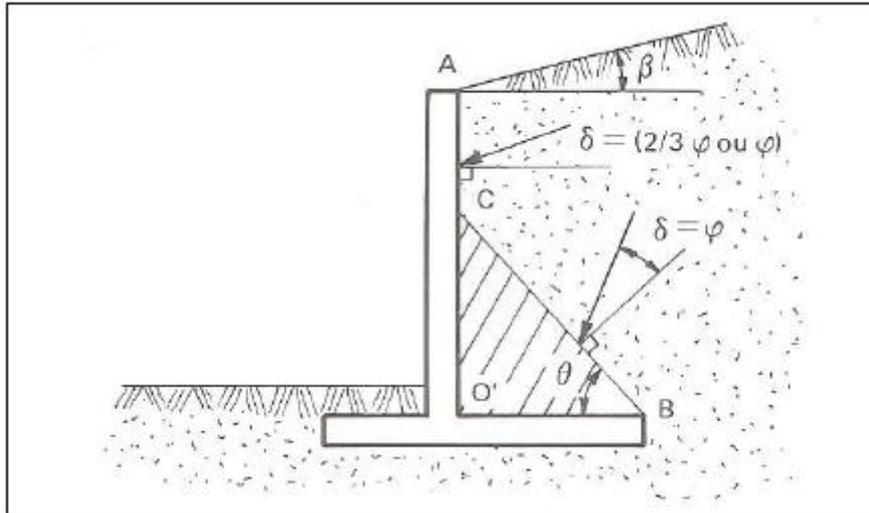


**Figure III.41** La ligne de glissement coupe le talus.

La méthode rigoureuse consiste à calculer la poussée sur l'écran fictif BC en prenant le coefficient de poussée donné par les tables de Caquot-Kérisel.

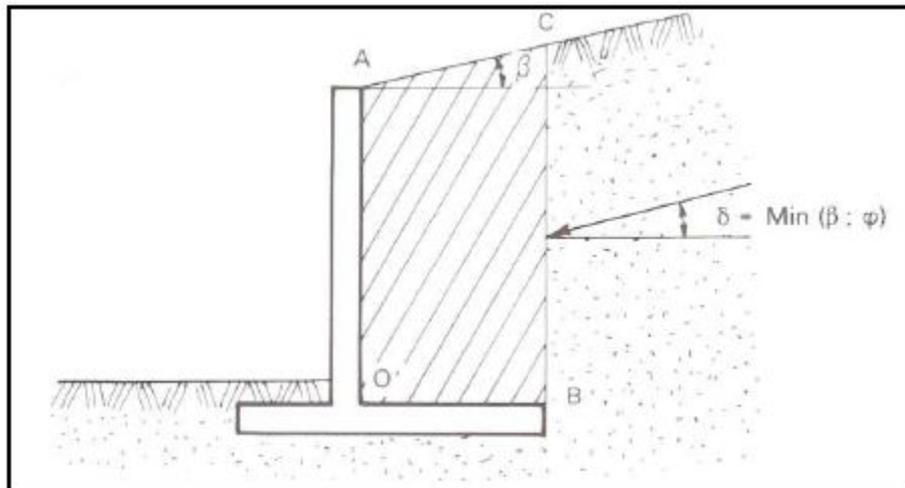
L'angle d'inclinaison  $\delta$  de la poussée par rapport à la normale à BC est égal à  $\varphi$  :  $\delta = \varphi$

- 2) La droite  $\Delta$  coupe la face interne du voile (figure III.42). Dans ce cas, la méthode consiste à calculer, à partir des tables de Caquot-Kérisel, la poussée :
  - d'une part, sur le segment AC avec une inclinaison sur la normale au voile  $\delta = 2/3\varphi$  ou  $\varphi$  selon l'état de rugosité du parement,
  - d'autre part, sur le segment CB avec un angle d'inclinaison sur la normale à ce plan égal à  $\varphi$ .



**Figure III.42** La ligne de glissement coupe la face interne du voile.

Dans les deux cas mentionnés ci-dessus, le calcul par les méthodes exposées est fastidieux. Aussi, est-il d'usage de simplifier ces schémas en considérant l'écran fictif vertical passant par l'arête du talon (figure III.43). La masse de terre AO'BC comprise entre le parement du voile et ce plan agit uniquement par son poids.



**Figure III.43** Ecran vertical fictif

### Remarque

On est donc fondé à admettre que sur le plan vertical BC règne la distribution de contraintes de l'équilibre de Rankine. Il est donc possible de calculer l'équilibre d'ensemble du mur, en utilisant les méthodes de l'article III.6.2.

*CHAPITRE IV*

***STATISTIQUES ET  
PROBABILITES***

## CHAPITRE IV

**ELEMENTS DE STATISTIQUES ET PROBABILITES****IV.1 GENERALITES****IV.1.1 Besoin de statistiques**

Du fait de la variabilité, on est dans le domaine de l'incertain. Cette science de l'incertain, c'est le défi qu'a relevé la statistique en s'appuyant sur le concept de probabilité. Plutôt qu'une seule valeur, la prise en compte de l'incertain permet de déterminer un intervalle à l'intérieur duquel on a une certaine probabilité de se situer et donc un risque de ne pas y être.

Dans ce chapitre nous présentons les notions essentielles de la statistique descriptive, indispensables dans l'analyse de la variabilité des sols et le calcul probabiliste des ouvrages. On apprend comment décrire de façon claire et concise l'information apportée par des observations nombreuses et variées sur un phénomène donné.

Il s'agit de trier ces données, les décrire, les résumer sous forme de tableaux, de graphiques, et sous forme d'un petit nombre de paramètres-clés (moyenne, médiane par exemple).

**IV.1.2 Statistique descriptive et statistique inférentielle**

De manière approximative, il est possible de classer les méthodes statistiques en deux groupes : celui des méthodes descriptives et celui des méthodes inférentielles.

- La statistique descriptive. On regroupe sous ce terme les méthodes dont l'objectif est la description des données étudiées ; cette description des données se fait à travers leur présentation (la plus synthétique possible), leur représentation graphique, et le calcul de résumés numériques. Dans cette optique, il n'est pas fait appel à des modèles probabilistes. On notera que les termes de statistique descriptive, statistique exploratoire et analyse des données sont quasiment synonymes.

- La statistique inférentielle. Ce terme regroupe les méthodes dont l'objectif principal est de préciser un phénomène sur une population globale, à partir de son observation sur une partie restreinte de cette population ; d'une certaine manière, il s'agit donc d'induire (ou encore d'inférer) du particulier au général. Le plus souvent, ce passage ne pourra se faire que

moyennant des hypothèses de type probabiliste. Les termes de statistique inférentielle, statistique mathématique, et statistique inductive sont eux aussi synonymes.

D’un point de vue méthodologique, la statistique descriptive précède en général la statistique inférentielle dans une démarche de traitement de données : les deux aspects se complètent bien plus qu’ils ne s’opposent.

**IV.2 DISTRIBUTIONS STATISTIQUES ET REPRESENTATIONS ASSOCIEES**

**IV.2.1 Définitions de base**

On appellera :

- **Individu**, l'unité d'observation (exemples : entreprise, chaîne de production)
- **Population**, l'ensemble des individus concernés par l'étude (exemples : ensemble des entreprises algériennes, ensemble des pièces sortant de la chaîne)
- **Échantillon**, un sous-ensemble de la population dont les individus feront l'objet de l'étude. Le choix de l'échantillon se fait en respectant certaines règles
- **Variable** ou caractère statistique, l'aspect de l'unité statistique que l'on va étudier (exemples : situation géographique de l'entreprise, diamètre de la pièce...). On dira que cette variable prend des valeurs (ou modalités).

**IV.2.2 Types de variables statistiques**

On peut définir quatre classes (ou types) dans lesquelles se répartissent les variables statistiques selon la nature de leurs valeurs. Les différents types de variables sont présentés dans le tableau II.1.

*Tableau IV.1* Différents types de variables statistiques

Différents types de variables statistiques			
Ensemble des valeurs prises par la variable	Type de variable	Exemples	Genre de variable
Amorphe (sans structure)	Catégorielle (ou nominale)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Sexe</li> <li>▪ Nationalité</li> <li>▪ Catégorie socioprofessionnelle</li> <li>▪ Contrôle Qualitatif d'une pièce</li> <li>▪ Situation</li> </ul>	<b>Qualitatives</b>

		de famille	
Ordonné	Ordinale	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Tout jugement qualitatif</li> <li>▪ Mention à un examen</li> </ul>	
Une partie de l'ensemble des entiers	Discrète	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Nombre d'enfants</li> <li>▪ Nombre de diplômés</li> </ul>	<b>Quantitatives</b>
Une partie de l'ensemble des réels	Continue	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Poids</li> <li>▪ Température</li> <li>▪ Fréquence d'un signal</li> <li>▪ Amplitude d'un bruit thermique</li> <li>▪ Valeur boursière</li> </ul>	

**IV.2.3 Distributions statistiques. Effectifs, fréquences**

Lorsque le recueil des données a été effectué, on dispose, pour chacun des individus de l'échantillon (ou de la population), de la valeur de la variable étudiée. Le premier traitement consiste alors à relever cette valeur pour chaque individu et ensuite à compter le nombre d'individus pour lesquels la variable prend une valeur donnée.

On associe, à chaque valeur prise par le caractère statistique étudié, son **effectif**.

**Notation :** les variables seront notées par des lettres majuscules  $X, Y, Z, \dots$  ; on note leurs modalités (valeurs) par des lettres minuscules  $x_i, y_j, z_l$  et les effectifs associés par  $n_i, n_j, n_l$ .

**Exemple :**  $X = \text{sexe}$ ,  $x_1 = \text{féminin}$ ,  $x_2 = \text{masculin}$ ,  $n_1 = \text{nombre de femmes}$ ,  $n_2 = \text{nombre d'hommes}$

Ce traitement n'est bien sûr directement possible que pour les variables qualitatives ou discrètes, qui n'ont qu'un nombre limité de valeurs possibles, discernables entre elles. Pour les variables continues, on commence par ranger les observations en classes, celles-ci étant des intervalles de la forme  $[a_{i-1}, a_i[$ . Ensuite, pour chaque classe, on compte le nombre d'individus dont le caractère appartient à la classe : ce nombre est l'effectif de la classe. On note  $k$  le nombre de modalités.

**Définition :** on appellera **distribution statistique des effectifs** de la variable  $X$  :

- L'ensemble des données  $(x_i, n_i), i = 1, \dots, k$ , si  $X$  est une variable qualitative ou discrète,
- L'ensemble des données  $([a_{i-1}, a_i[, n_i), i = 1, \dots, k$ , si  $X$  est une variable continue.

Les résultats sont généralement présentés dans un tableau du type du tableau IV.2.

**Tableau IV.2** Présentation des variables statistiques

Présentation des variables statistiques			
X est catégorielle, ordinale ou discrète		X est continue	
Classes	Effectifs	Classes	Effectifs
$x_1$	$n_1$	$[a_0, a_1[$	$n_1$
$x_2$	$n_2$	$[a_1, a_2[$	$n_2$
.	.	.	.
.	.	.	.
$x_k$	$n_k$	$[a_{k-1}, a_k[$	$n_k$
Total (1)	$N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$	Total	$N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$
(1) N est l'effectif total de l'échantillon			

**Remarque :** dans le cas des données individuelles (c'est-à-dire lorsque l'on ne regroupe pas les réponses), on a :  $n_1 = n_2 = \dots = n_k$ .

À la distribution d'effectifs définie ci-dessus, on préfère souvent la **distribution de fréquences** associée.

**Définition.** La **fréquence** (ou proportion) associée à la valeur du caractère (resp. à la classe  $[a_{i-1}, a_i[$ ) est la valeur  $f_i$  définie par :

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

La fréquence  $f_i$  représente donc la part de l'échantillon pour laquelle la valeur de la variable est  $x_i$  (ou appartient à  $[a_{i-1}, a_i[$ ). On peut par exemple l'exprimer sous forme de pourcentage (le pourcentage sera alors  $100 \times f_i$ ).

**Remarque.** Cette quantité est indépendante de la taille de l'échantillon, ce qui permet de comparer les résultats obtenus sur plusieurs échantillons.

Les fréquences vérifient les propriétés suivantes :

$$0 \leq f_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, k$$

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

### IV2.4 Représentations graphiques des distributions statistiques

Très souvent, on préfère des représentations graphiques à des tableaux. Les graphes apparaissent comme plus « parlants ». Ces représentations sont adaptées au type de variable étudiée : nominale, ordinale, discrète ou continue.

#### a. Variables nominales

On dispose pour ces variables de **diagrammes en bâtons**, ainsi que de **diagrammes circulaires** (ou **en secteurs**, ou en « **camembert** »).

- **Diagramme en bâtons** (figure IV.1a)

À chaque modalité  $x_i$ , on associe un « bâton » de longueur  $h_i$  proportionnelle à la fréquence  $f_i$  (ou, si l'on veut, à l'effectif  $n_i$ ). On a donc  $h_i = Cte \times f_i$ .

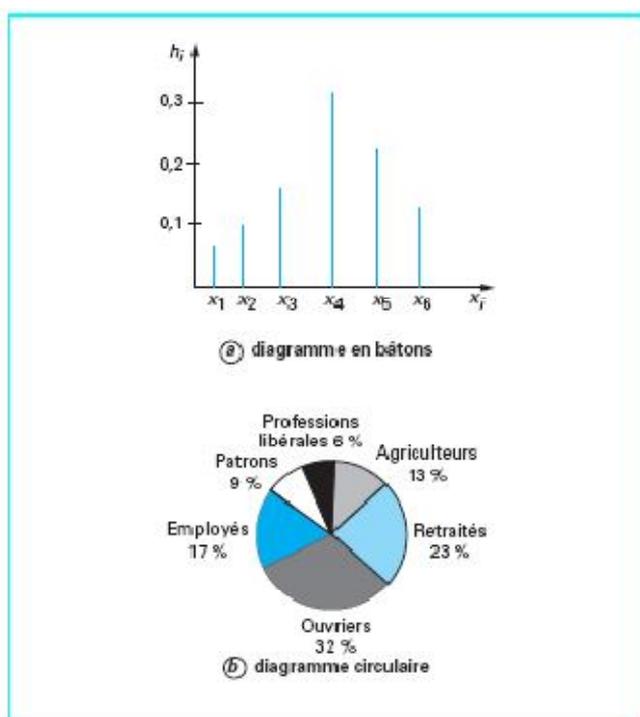
Pour une variable nominale, seules les hauteurs sont significatives ; l'ordre et l'écart des  $x_i$  ne sont pas significatifs.

- **Diagramme circulaire** (figure IV.1b)

L'angle de chaque secteur  $\alpha_i$  est proportionnel à la fréquence  $f_i$ .

En degrés, on a  $\alpha_i = 360 \times f_i$ .

C'est la représentation la plus utilisée pour les variables nominales. C'est la représentation la plus utilisée pour les variables nominales. De surcroît, elle est plus fidèle que la précédente.



**Figure IV.1** Représentations graphiques des variables nominales

### b. Variables ordinales et variables discrètes

#### ▪ Variables ordinales

On utilise les mêmes représentations que pour les variables nominales. Toutefois, il convient de noter que, pour le diagramme en bâtons, l'ordre des modalités à un sens concret, car il doit correspondre à l'ordre existant entre les valeurs.

#### ▪ Variables discrètes

Pour ce type de variables, on préfère le diagramme en bâtons car, dans ce cas, l'ordre et l'écart entre les bâtons sont significatifs.

### c. Variables continues : histogramme, polygone des fréquences, diagramme « branche et feuille »

On considère une variable statistique continue dont les valeurs ont été rangées en classes  $[a_{i-1}, a_i[$ . L'**amplitude** de la classe  $[a_{i-1}, a_i[$  est  $A_i = a_i - a_{i-1}$ .

▪ Pour représenter graphiquement la distribution statistique d'une telle variable, on a recours à un **histogramme**. Le principe est le suivant : à chaque classe, on fait correspondre un rectangle de base l'intervalle  $[a_{i-1}, a_i[$  (pour la classe  $i$ ) et de hauteur  $h_i$ , de sorte que la surface du rectangle soit proportionnelle à l'effectif. Ainsi, on calcule la hauteur  $h_i$  du rectangle au moyen de la formule suivante :

$$h_i = \frac{n_i}{a_i - a_{i-1}}$$

D'un point de vue pratique, on constituera un tableau du type du tableau IV.3.

**Tableau IV.3** Variables continues : amplitudes et fréquences

Variables continues : amplitudes et fréquences					
i	Classes	Effectifs $n_i$	Fréquences $f_i$	Amplitudes $A_i$	Hauteurs $h_i$
1	$[a_0, a_1[$	$n_1$	$f_1$	$a_1 - a_0$	$n_1 / (a_1 - a_0)$
2	$[a_1, a_2[$	$n_2$	$f_2$	$a_2 - a_1$	$n_2 / (a_2 - a_1)$
.	.	.	.	.	.
k	$[a_{k-1}, a_k[$	$n_k$	$f_k$	$a_k - a_{k-1}$	$n_k / (a_k - a_{k-1})$

On obtient ainsi le graphique de la figure IV.2a :

- en abscisse, on porte l'**ensemble des valeurs** prises par la variable, découpé en classes ;
- en ordonnée, on porte les **hauteurs** :

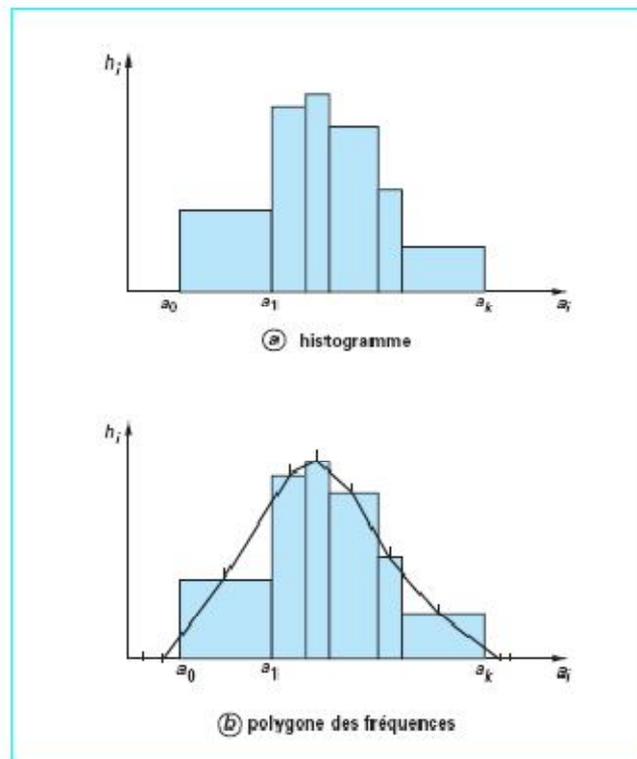
$$h_i = \frac{n_i}{a_i - a_{i-1}}$$

- on trace enfin des rectangles.

**Remarque.** Si les amplitudes sont toutes égales, on porte les **effectifs** en ordonnée.

La construction de l'histogramme s'opère de la façon suivante :

- On calcule la différence de la distribution, différence entre la valeur la plus élevée et la valeur la plus faible.
- On partage l'étendue de la distribution, en k classes d'amplitudes égales.
- On compte le nombre de valeurs comprises dans chacune des classes.
- Puis on reporte ces nombres  $N_i$  sur un graphique où l'on porte en abscisse les valeurs du paramètre étudié et en ordonnée les effectifs de chaque classe.



**Figure IV.2** Représentations graphiques des variables continues

▪ À partir de l'histogramme d'une variable statistique continue, on peut tracer le **polygone des fréquences** associé (figure IV.2b) en procédant de la manière suivante :

- on joint par des morceaux de droites les milieux des segments horizontaux supérieurs des rectangles de l'histogramme ;

- on ajoute à droite et à gauche de l'histogramme des classes fictives, toutes deux de même amplitude et d'effectif nul, ce qui donne alors lieu à deux nouveaux segments.

**Remarque.** On ne doit pas « lisser » la courbe.

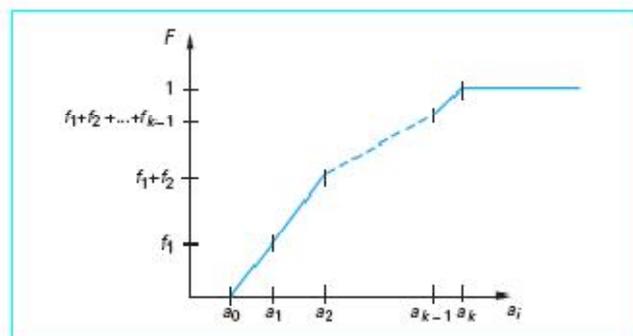
▪ En dernier lieu, lorsque l'on étudie un échantillon de faible taille ( $N < 100$ ) et que l'on dispose des données individuelles, on peut dresser, pour la variable étudiée, un diagramme dit **branche et feuille** (en anglais **stem and leaf**), qui a l'avantage de conserver l'information de la répartition à l'intérieur des classes.

**Principe.** Dans tout nombre, on peut distinguer deux parties : un chiffre de « plus haut poids » (branche) et un chiffre de « plus bas poids » (feuille).

### IV.3. FREQUENCES CUMULEES ET FONCTION DE REPARTITION

#### IV.3.1. Fréquences cumulées

Pour les variables qualitatives ordinales et pour les variables quantitatives, on peut exploiter la relation d'ordre existant entre les valeurs possibles de la variable. On définit ainsi les **distributions cumulées** (Figure IV.3 et tableau IV.4).



**Figure IV.3** Fonction de répartition

Tableau IV.4 Distributions cumulées

i	Valeurs	Effectifs	Fréquences	Effectifs cumulés	Fréquences cumulées
1	$x_1$	$n_1$	$f_1$	$n_1$	$f_1$
2	$x_2$	$n_2$	$f_2$	$n_1+n_2$	$f_1+f_2$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
k-1	$x_{k-1}$	$n_{k-1}$	$f_{k-1}$	$n_1+n_2+\dots+n_{k-1}$	$f_1+f_2+\dots+f_{k-1}$
k	$x_k$	$n_k$	$f_k$	$n_1+n_2+\dots+n_k=N$	$f_1+f_2+\dots+f_k=1$

### IV.3.2 Fonction de répartition

Cette notion ne concerne que les variables quantitatives.

**Définition.** La **fonction de répartition du caractère  $X$**  est la fonction  $F$ , allant de l'ensemble des réels vers  $[0,1]$ , définie par :  $F(x) =$  proportion d'individus de l'échantillon dont la valeur de  $X$  est  $< x$

Soit  $X$  une variable continue, dont les valeurs sont rangées en classes  $[a_0, a_1[$ , ...,  $[a_{k-1}, a_k[$  avec des fréquences  $f_1, \dots, f_k$ .

- On commence par calculer les valeurs de  $F$  aux points du découpage :

$$F(a_0) = 0, F(a_1) = f_1, \dots, F(a_{k-1}) = f_1 + f_2 + \dots + f_{k-1},$$

$$F(a_k) = f_1 + f_2 + \dots + f_k$$

- Ensuite, dans chaque classe  $[a_{i-1}, a_i[$ , on fait une interpolation linéaire (on relie les points extrêmes par un segment de droite).
- Puis on prolonge la courbe par 0 à gauche de  $a_0$  et par 1 à droite de  $a_k$  (figure III.3).

## IV.4 CARACTERISTIQUES D'UNE DISTRIBUTION. TENDANCE CENTRALE ET DISPERSION

### IV.4.1 Généralités

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés uniquement à la représentation des données statistiques. Cependant, s'il est vrai que les divers tableaux et graphes définis plus haut «résumant» la distribution, ils ne permettent aucune quantification. Le but de ce paragraphe est donc de définir, pour chaque type de distribution statistique, un certain nombre de **caractéristiques** (ou **indicateurs**), c'est-à-dire quelques nombres permettant de résumer de manière **quantitative** (et non plus qualitative) chaque distribution. Bien entendu, n'importe quelle quantité ne peut pas être un indicateur.

En 1950, le statisticien Yule a donné un certain nombre de propriétés de « bon sens » que doivent, a priori, vérifier les indicateurs statistiques.

Selon lui, ceux-ci doivent :

- être défini de manière objective (et donc être indépendant de l'observateur) ;
- utiliser toutes les observations ;
- avoir une signification concrète, afin d'être compris par les non-spécialistes ;
- être simple à calculer ;
- être peu sensibles aux fluctuations d'échantillonnage (notion introduite dans l'article suivant de ce traité) ;
- se prêter aisément aux opérations mathématiques simples.

Nous nous limiterons ici à 2 types de caractéristiques statistiques :

- celles dites de **tendance centrale**, qui donnent un « ordre de grandeur » de la variable étudiée en dégagant la modalité de la variable la plus représentative ;
- celles dites de **dispersion** qui, elles, fournissent des informations sur la façon dont les individus se répartissent (se « dispersent ») autour de la tendance centrale.

Le tableau II.5 donne les caractéristiques étudiées pour chaque type de variable.

*Tableau IV.5* Caractéristiques d'une distribution

<b>CARACTERISTIQUES D'UNE DISTRIBUTION</b>		
<b>Type de variable</b>	<b>Tendance centrale</b>	<b>Dispersion</b>
Nominale	Mode	
ordinaire	Mode, médiane, quantiles	Ecart interquartile
Quantitative	Mode, médiane, quantiles, moyenne	Ecart-type, écart interquartile

#### **IV.4.2 Caractéristiques de tendance centrale**

##### **a. Mode**

Il est défini pour tous les types de variables. On le définit comme suit.

- Si  $X$  est une variable statistique **nominale**, **ordinaire** ou **discrète**, le **mode** de la distribution associée est la modalité de  $X$  la plus représentée, c'est-à-dire celle pour laquelle l'**effectif** est le **plus grand** ;
- Si  $X$  est une variable **continue**, le **mode** (ou **classe modale**) de la distribution associée est la classe dont la **hauteur dans l'histogramme** est la **plus élevée**.

### b. Médiane et quantiles

Ces indicateurs sont définis pour toutes les variables sauf les variables nominales.

La médiane est la valeur de la variable telle que le nombre d'observations supérieures ou égales à cette valeur est égal au nombre d'observations strictement inférieures à cette valeur.

On voit que, par exemple, pour les variables continues, cela revient à chercher un  $x$  tel que  $F(x) = 0,5$ . En règle générale, cette valeur de  $x$  n'existe pas dans le tableau de données dont on dispose.

C'est pourquoi on adopte la définition suivante : la médiane de la distribution de  $X$  est donnée par :

- pour les variables ordinales ou discrètes :
  - Si la fréquence cumulée en  $x_{i-1}$  est  $< 0,5$  et celle en  $x_i$  est  $> 0,5$ , alors la médiane vaut  $x_i$ ,
  - Si la fréquence cumulée en  $x_{i-1}$  est égale à  $0,5$ , alors la médiane vaut  $x_i$ ;
- Pour les variables continues, réparties en classes  $[a_{i-1}, a_i[$  :
  - Si  $F(a_{i-1}) < 0,5$  et  $F(a_i) > 0,5$ , la **classe médiane** est  $[a_{i-1}, a_i[$  et on calcule la médiane par interpolation linéaire sur l'intervalle  $[a_{i-1}, a_i[$ :

$$M_{ed} = a_{i-1} + (a_i - a_{i-1}) \frac{0,5 - F(a_{i-1})}{F(a_i) - F(a_{i-1})}$$

avec  $F$  fonction de répartition de  $X$  (figure III.4),

- Si  $F(a_{i-1}) = 0,5$ , la médiane vaut  $a_{i-1}$ .

**Remarque.** La médiane est peu sensible aux valeurs extrêmes de la variable, donc aux erreurs de mesure qui, bien souvent, produisent des valeurs aberrantes. On dit que la médiane est robuste ou résistante.

Celle notion de médiane peut se généraliser à celle de quantile.

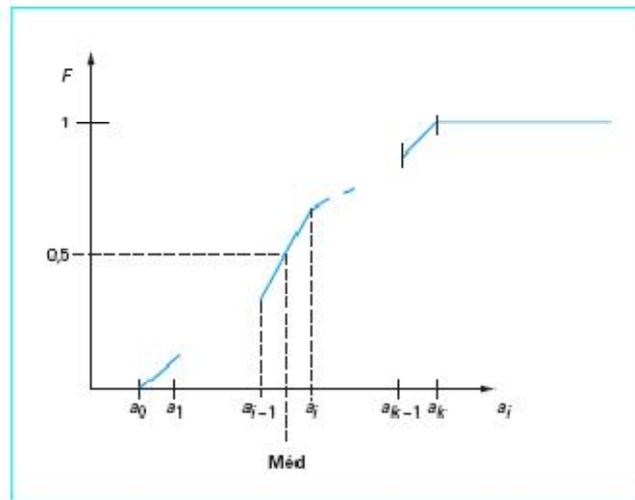
Soit  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Si  $F(a_{i-1}) < \alpha$  et  $F(a_i) > \alpha$ , on définit le nombre  $Q_\alpha$ , quantile d'ordre  $\alpha$ , par

$$Q_\alpha = a_{i-1} + (a_i - a_{i-1}) \frac{\alpha - F(a_{i-1})}{F(a_i) - F(a_{i-1})}$$

Les cas particuliers les plus cités sont :

- Les quartiles

- Les déciles
- Les centiles.



*Figure IV.4* Classe médiane

### c. Moyenne arithmétique

Elle n'est définie que pour les variables quantitatives et, pour celles-ci, c'est la caractéristique de tendance centrale la plus « naturelle » et la plus utilisée.

La moyenne (arithmétique) d'une variable  $X$  sera notée  $\bar{x}$  et  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

On définit la moyenne arithmétique de la manière suivante.

- Si  $X$  est une variable quantitative **discrète**, donnée par sa distribution d'effectifs  $(x_i, n_i), i = 1, \dots, k$ , , alors la **moyenne** de  $X$  est donnée par

$$\bar{x} = \frac{1}{N} (n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k)$$

- Si  $X$  est une variable **continue rangée en classes**  $[a_{i-1}, a_i[$ , la **moyenne** de  $X$  est

$$\bar{x} = \frac{1}{N} (n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k)$$

Où, pour tout  $i, c_i$  est le centre de la classe  $[a_{i-1}, a_i[$ , soit

$$c_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$$

On dira qu'une variable est **centrée** si sa moyenne est **nulle**.

Il faut noter les remarques suivantes :

- la moyenne peut être définie à l'aide des fréquences  $\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k$  : pour les variables discrètes et  $\bar{x} = f_1 c_1 + f_2 c_2 + \dots + f_k c_k$  pour les variables continues ;

- il existe d'autres sortes de moyennes (géométrique, harmonique...) dont nous ne parlerons pas ici ;
- la moyenne, prenant en compte toutes les valeurs observées, est très sensible aux observations aberrantes ;
- chaque fois que la répartition est assez symétrique (ce qui se traduit par un histogramme proche d'une courbe « en cloche »), la moyenne, la médiane et le mode sont proches. La moyenne est plus élevée que le mode ou la médiane si la répartition est dissymétrique, avec un accent vers les valeurs élevées ; si l'accent est, par contre, sur les valeurs faibles, la moyenne est plus petite que le mode ou la médiane.

#### IV.4.3 Caractéristiques de dispersion

Les caractéristiques de tendance centrale donnent un ordre de grandeur du caractère statistique observé. Il est intéressant d'obtenir des informations sur la **variabilité** des observations et de leur **dispersion** autour de la tendance centrale. Intuitivement, une « bonne » caractéristique de dispersion doit être telle que, plus la variabilité est grande autour de la tendance centrale correspondante, plus cette caractéristique doit être grande, et inversement lorsqu'il y a peu de dispersion, la caractéristique doit être voisine de 0. De plus, une caractéristique de dispersion doit toujours être positive.

### 5. Écart interquartile

Il est défini pour toutes les variables, excepté les variables nominales.

**Définition.** L'**écart interquartile** est la distance entre le 1er et le

3e quartile. Il vaut donc  $Q_{0.75} - Q_{0.25}$ . Il représente les valeurs extrêmes d'une dispersion de 50 % des effectifs autour de la médiane.

### 6. Écart-type. Variance

Ils ne sont définis que pour les variables quantitatives.

**Définition.** La **variance** est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne, c'est-à-dire :

- pour une variable discrète :

$$V(X) = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^{i=k} n_i (x_i - \bar{x})^2 \right) = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

- pour une variable continue rangée en classes  $[a_{i-1}, a_i[$ , de centres  $c_i$

$$V(X) = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^{i=k} n_i (c_i - \bar{x})^2 \right) = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=k} n_i c_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

Dans chaque cas, c'est la seconde expression qui sera le plus souvent utilisée pour effectuer les calculs.

L'**écart-type** est alors la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

### 7. Coefficient de variation $C_v(X)$

Si l'écart type mesure l'erreur absolue dans l'estimation de la moyenne  $\bar{x}$ , alors le coefficient de variation, noté  $C_v(X)$  est :

$$C_v(X) = \frac{\sigma(X)}{\bar{x}}$$

$C_v(X)$  est un facteur adimensionnel utile. Il caractérise la dispersion intrinsèque de la variable.

## IV.4.4 Moments et caractéristique de forme

### 1. Moments empiriques

Si l'on dispose d'un échantillon de  $n$  valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , on peut d'abord calculer les moments empiriques  $m'_r$  de cet échantillon.

- Moments empiriques d'ordre 1 (moyenne arithmétique empirique) :

$$m'_1 = m' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

- Moment empirique d'ordre  $r$  :

$$m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r$$

Toutefois les moments empiriques ne constituent pas des estimateurs sans biais des moments correspondants. En effet un estimateur n'est en général pas égal à la grandeur à estimer et l'on appelle biais d'un estimateur la différence entre sa valeur et celle de la grandeur considérée.

On utilise en pratique les estimateurs sans biais suivants pour les moments centrés d'ordre  $r$ .

- Estimateur de moments centré d'ordre 1.

$$\mu'_1 = 0$$

- Estimateur du moment centré d'ordre 2.

$$\mu'_2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m')^2$$

- Estimateur du moment centré d'ordre 3.

$$\mu'_3 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (x_i - m')^3$$

- Estimateur du moment centré d'ordre 4.

$$\mu'_4 = \frac{n}{(n-1)(n-2)(n-3)} \left\{ (n+1) \sum_{i=1}^n (x_i - m')^4 - \frac{3(n-1)}{n} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - m')^2 \right]^2 \right\} + 3s^4$$

**2. Caractéristique de forme**

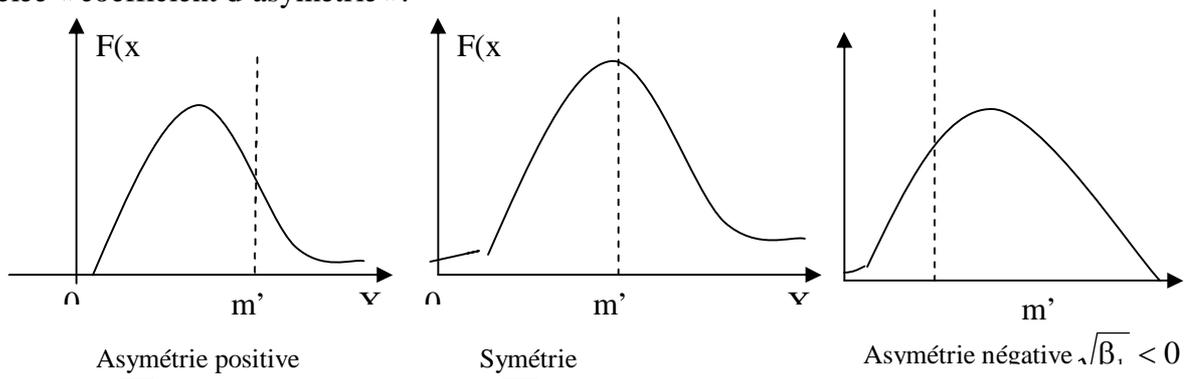
Les moments centrés d'ordre 3 et 4 donnent les informations sur la forme de la densité de probabilité. Ils sont souvent présentés sous forme adimensionnelle :

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu'_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - m')^3 = E[T_3]$$

$$\beta_1 = E[T_4] = \frac{\mu'_4}{\sigma^4}$$

Si la distribution est symétrique par rapport à la moyenne arithmétique  $m'$ , on a  $\sqrt{\beta_1} = 0$

Pour une distribution asymétrique,  $\sqrt{\beta_1}$  peut être positif ou négatif suivant le signe de  $\mu'_3$ . Il mesure alors « l'asymétrie » de la distribution (figure ci-dessous)  $\sqrt{\beta_1}$  est pour cette raison appelée « coefficient d'asymétrie ».



**Figure IV.5** Coefficients d'asymétrie

$\sqrt{\beta_1} = 0$  : la distribution des fréquences est symétrique par rapport à  $m'$ .

$\sqrt{\beta_1} > 0$  : la distribution est plus étalée à droite de  $m'$  qu'à sa gauche.

$\sqrt{\beta_1} < 0$  : la distribution est plus étalée à gauche.

Le coefficient  $\beta_2$  donne une indication sur la façon dont la distribution est concentrée autour de la moyenne ; de faibles valeurs de  $\beta_2$  impliquent une courbe plus plate pour la densité de probabilité ;  $\beta_2$  est appelé « coefficient d'aplatissement ».

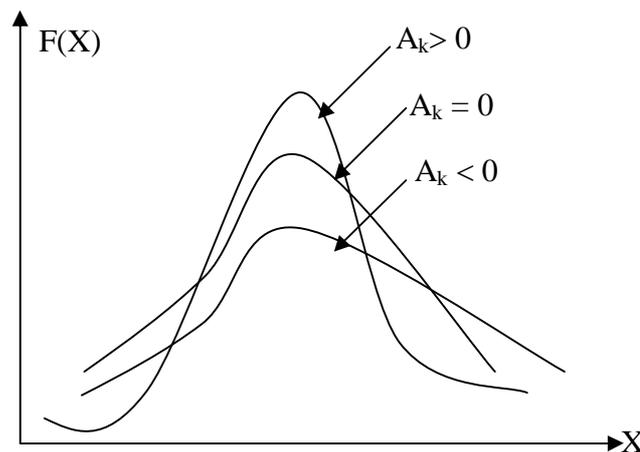
En vue de comparer toute distribution à la distribution normale, on forme

$$A_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - m')^4 - 3$$

Le rapport  $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$  pour une distribution normale (gaussienne) est égal à 3.

Ainsi :

- pour une distribution gaussienne  $A_k = 0$ ,
- pour une distribution pointue que la distribution gaussienne  $A_k > 0$ ,
- pour une distribution moins pointue que la distribution gaussienne:  $A_k < 0$ .



### Remarque

$T = \frac{X - m}{\sigma}$  est dite variable réduite. Elle est écrite sous forme adimensionnelle. Elle est de moyenne nulle et a pour variance 1.

## IV.5 MODELE THEORIQUE DE DISTRIBUTION. VARIABLES ALEATOIRES D'ECHANTILLONNAGE

La loi de distribution des valeurs d'un paramètre physique ou mécanique dans un massif de sol ne peut naturellement pas être parfaitement connue, puisqu'il est impossible de mesurer ce paramètre en tous points. On ne dispose donc en pratique que de l'histogramme

des valeurs mesurées et des moments empiriques de l'échantillon statistique fourni par les essais.

On conçoit pourtant aisément que l'utilisation des lois de distribution expérimentales n'est pas très pratique : on essaie toujours pour cette raison de modéliser la loi observée par l'une des lois de distribution théoriques développées par les spécialistes des statistiques.

Il est donc intéressant de rappeler quelques notions générales concernant les lois de distribution des variables aléatoires.

### IV.5.1 Variables aléatoires

On appelle variable aléatoire toute grandeur non déterminée à priori dont on sait avec quelle probabilité elle peut prendre telle ou telle valeur parmi une population (ensemble de valeurs).

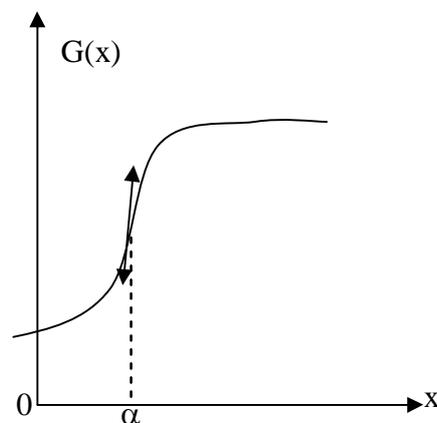
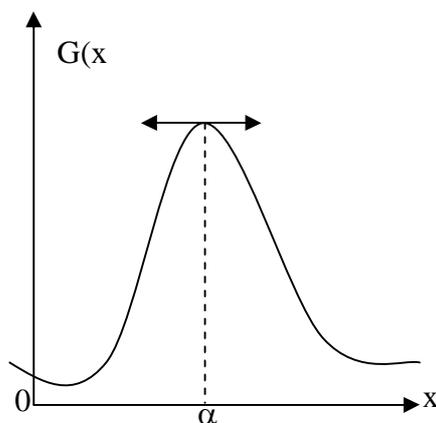
Par exemple, la teneur en eau dans une couche de sol, qui prend des valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  avec des probabilités  $p_1, p_2, \dots, p_n$  respectivement. La variable aléatoire peut être caractérisée par une densité de probabilité  $f(x)$  (modèle mathématique d'un diagramme de distribution) défini de la façon suivante :

$$f(x) = \text{prob}\{x < X < x + dx\}$$

Elle peut être aussi définie par sa fonction de répartition  $F(x)$  (modèle mathématique du diagramme de répartition) qui est la fonction définie en tout point  $x$  comme la probabilité que la variable aléatoire  $X$  soit inférieure ou égale à  $x$ .

$$F(x) = \text{prob}\{X \leq x\}$$

$$G(x) = \text{prob}\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x g(x) d(x) = \int_{-\infty}^x \alpha p(x)$$



La variable aléatoire  $X$  peut être indifféremment définie par sa densité de probabilité  $g(x)$  ou sa fonction de répartition  $G(x)$ .

#### IV.5.2 Espérance et moments

Nous avons vu qu'à la variable statistique  $X$ , nous avons par analogie fait correspondre la variable aléatoire  $X$  de même nous avons caractérisé une distribution observée grâce à deux sorte de paramètres.

- Paramètre de position, situant la valeur centrale des observations, pour cela nous avons retenu pour valeur centrale, la moyenne arithmétique  $\bar{x}$  ou  $m$  ou Moy ( $x$ ),

- Paramètres de dispersion, précisant la répartition des écarts entre les diverses valeurs observées et la moyenne, nous avons principalement retenu la variable  $\text{Var}(X)$  et l'écart type  $s$  ou  $\sigma(x)$ , racine carrée de la précédente.

En nous donnant une loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$ , nous décrirons simplement une distribution théorique des différentes valeurs de cette variable aléatoire.

Il est donc tout à fait normal que nous définissons des paramètres de position et de dispersion : ils portent la dénomination générale de moments.

1. Espérance mathématique  $E(X)$  qui correspond à la moyenne Moy( $X$ ).

C'est un paramètre de position. L'espérance mathématique d'une variable aléatoire  $X$  de densité  $g(x)$  est sa valeur moyenne définie par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot g(x) dx = \int_0^1 x \cdot dp(x)$$

2. Le moment d'ordre  $r$  de la variable aléatoire  $X$  est égale à :

$$E(X^r) = m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r g(x) dx.$$

On note que l'espérance mathématique est égal au moment d'ordre 1 de  $X$ , noté  $m_1$  ou plus généralement  $m$ .

Les moments centrés calculés par rapport à l'espérance mathématique et d'usage plus fréquent que les moments calculés par rapport à l'origine ( $[X^r]$ )

$$E[(X - E[X])^r] = \mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^r g(x) dx$$

Le premier moment centré est nul et le second est égal à la variance qui est un paramètre de dispersion

$$V(x) = \sigma^2 = \mu^2 = E[(x - E(x))^2]$$

où  $\sigma$  est l'écart type.

### IV.5.3 Lois de distribution théorique

#### 1. Introduction

En pratique, on ne dispose que de l'histogramme des valeurs mesurées et des moments empiriques (moyenne arithmétique, variance,...) de l'échantillon statistique fourni par les essais.

On essaye alors de modéliser la loi de distribution observée par l'une des lois de distributions développées par les spécialistes des statistiques.

La loi la plus connue est la « loi de Gauss » qui a été la plus employée pour représenter les variations des propriétés des sols à l'intérieur d'une couche homogène. Cette loi n'est pourtant pas toujours la mieux adaptée aux problèmes de mécanique des sols.

#### 2. Fonction de distribution

Toute fonction  $g(x)$  vérifiant la condition  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$  peut servir de densité de probabilité pour une variable aléatoire. Il existe toutefois un certain nombre de fonctions employées de façon classique et qui ont de ce fait une importance pratique beaucoup plus grandes que les autres.

La plus part des densités de probabilité  $g(x)$  classiques peuvent être générées à partir de l'équation différentielle

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{(a_0 + b)g(x)}{b_0 + b_1x + b_2x^2} \quad (*)$$

Avec :  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  constantes.

Les distributions correspondantes sont regroupées sous le nom de « systèmes de Pearson ».

Pearson a défini trois principaux types de courbes d'après les valeurs de  $K$ , appelé « Critère » qui s'exprime en fonction des quatre premiers moments de  $g(x)$  (Harr, 1977)

$$K = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)}{4(2\beta_2 + 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)}$$

$\sqrt{\beta_1}$  et  $\beta_2$  étant respectivement les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement.

Les trois types de courbes sont :

Type I :  $K < 0 \rightarrow$  Distribution bêta

Type IV :  $0 < K < 1 \rightarrow$  Courbes non bornées et asymétriques

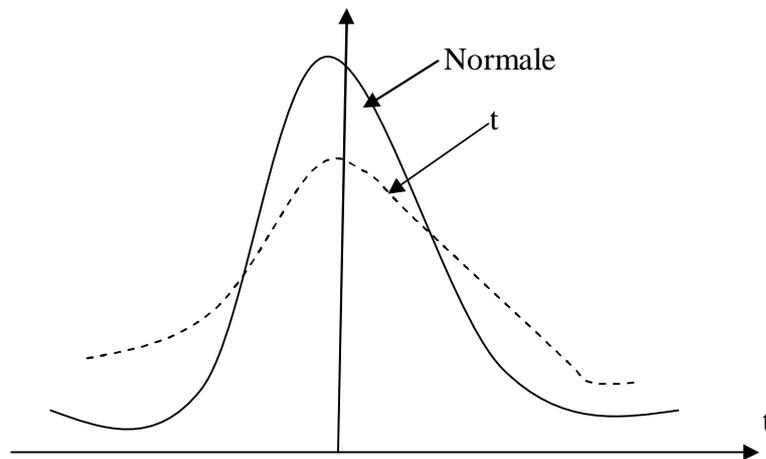
Types VI :  $1 < K \rightarrow$  Borné d'un côté.

Ces trois types de courbes de distribution couvrent l'ensemble des cas possibles.

Il existe toutefois des distributions de transition entre les différents types.

Par exemple, si  $\beta_1 = 0$  et  $\beta_2 = 3 \Rightarrow K = 0$  (dans l'équation \* on a  $b_1 = b_2 = 0$ ) : distribution normale. C'est une distribution de transition entre les types I et IV.

Toujours pour  $K=0$ , mais  $\beta_2 \neq 3$ , Pearson a défini deux types de courbes symétriques : le type II ( $\beta_2 < 3$ ) et le type VII ( $\beta_2 > 3$ ). La distribution de Student est un exemple de distribution de type VII.



**Figure IV.6** Distribution t de student (type VII de Pearson)

La distribution de type III de Pearson correspond à une valeur infinie de  $K$  ( $K = \pm\infty$ ). C'est la généralisation d'une distribution appelée « Gamma ».

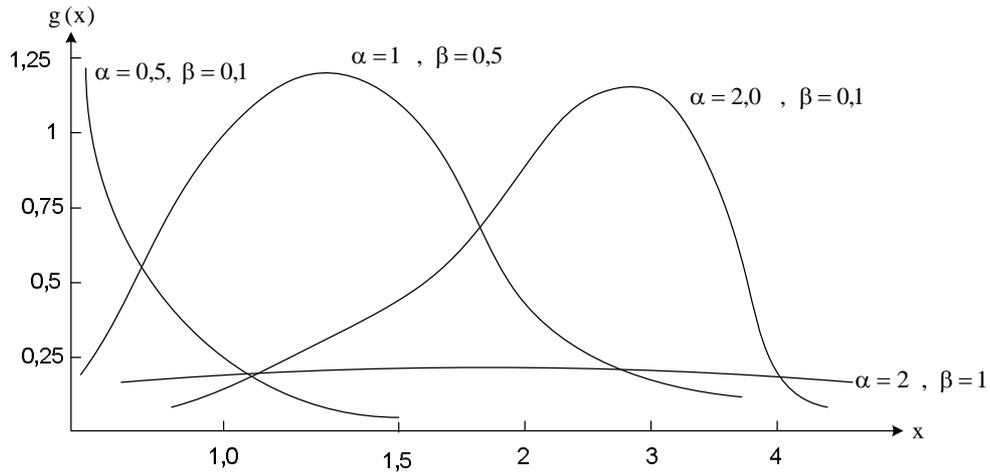


Figure IV.7 Exemples de distribution gamma.

Les distributions  $X^2$  et exponentielle sont deux exemples de distributions de type III.  
 Pour  $K=1 \longrightarrow$  type V (par exemple, la loi lognormale).  
 La figure IV.8 ci-dessous présente une classification schématique des types de distribution de Pearson en fonction des variations du critère K.

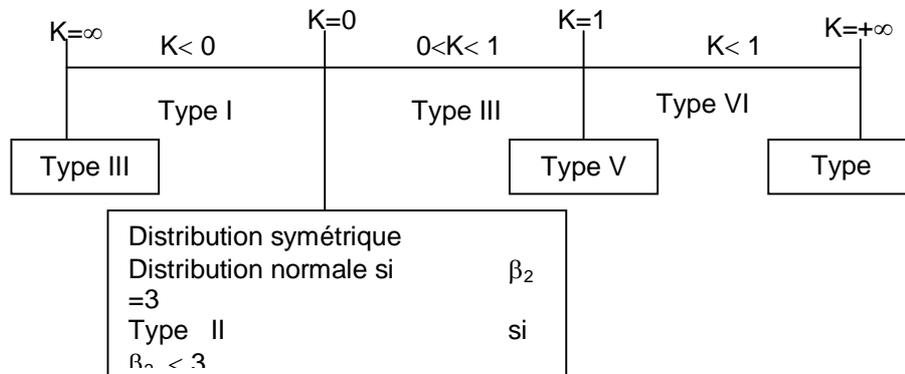


Figure IV.8 Classification des distributions selon la valeur de K

**IV.5.4 Définition générale d'une variable Gaussienne**

On dit très généralement qu'une variable aléatoire (continue ou assimilable à une variable probabiliste de l'événement  $\{X(x)\}$ ) s'exprime par la fonction de répartition

$$F(x) = \frac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - E(x)}{\sigma(x)}\right)^2\right] dx$$

Expression dans laquelle  $E(x)$  est l'espérance mathématique et  $\sigma(x)$  l'écart type de la variable aléatoire  $x$  considérée.

Si l'on substitue à la variable aléatoire  $X$  la variable centrée réduite  $T = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ ,

On obtient une expression plus simplifiée :

$$\text{prob} \left\{ \frac{x - E(X)}{\sigma(X)} \in t \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

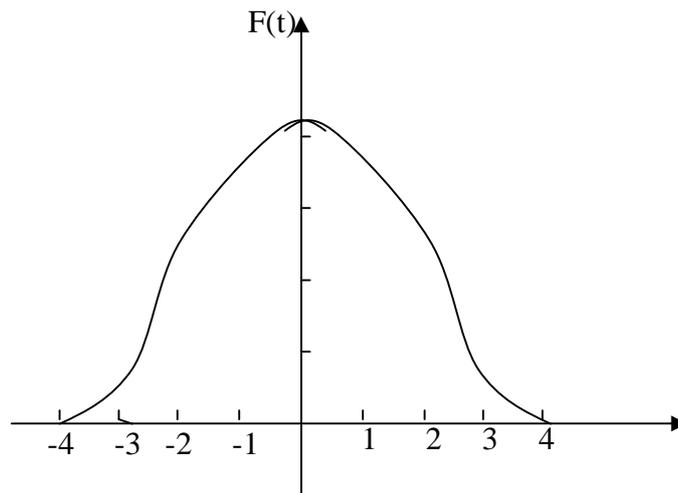
Et la fonction de densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(n)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n - e(n)}{\sigma(n)}\right)^2\right]$$

Ou :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2C}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

La courbe représentative des variations de  $f(t)$  est la très fameuse courbe en cloche.



**Figure IV.9** La courbe en cloche

*CHAPITRE V*

***SIMULATION DE  
VARIABLES ALEATOIRES***

## CHAPITRE V

**SIMULATION ET GÉNÉRATION DE  
VARIABLES ALÉATOIRES****V.1 SIMULATION****V.1.1 GÉNÉRALITES**

Simuler, dit le dictionnaire, "*c'est donner pour réel ce qui ne l'est pas, en imitant l'apparence de la chose réelle à laquelle on veut faire croire*". La simulation, dans le langage courant, a souvent un sens négatif : elle a à voir avec la feinte, le déguisement, la ruse, la comédie. On la distingue du mime en ce qu'elle n'est ni une pure copie, ni une simple reproduction. En général, elle consiste en une imitation d'un original par rapport auquel elle introduit toujours des variations. De là vient que la simulation est toujours double, à la fois jeu et exercice, tromperie et prouesse, faux-semblant et art, dissimulation et apprentissage. Sur une face, elle apparaît comme faiseuse d'illusions. Sur l'autre, elle est gage de perfectionnement et de conquête.

Certains de ces aspects se retrouvent dans l'usage que les sciences font de la simulation. Celle-ci y renvoie, là encore, à l'idée d'imitation. Elle consiste même en une imitation "au carré" de la nature au sens où ce n'est pas la nature elle-même qu'elle reproduit, mais le modèle par lequel nous avons préalablement choisi de la représenter. Elle exhibe ainsi un "surcroît de réalité" en rendant explicite ce qui, dans une théorie ou un modèle, n'est qu'implicite ou camouflé. Une bonne simulation procède de la révélation.

Mais il arrive aussi que, mal conduite ou mal interprétée, elle ne montre au contraire qu'une infra-réalité illusoire ou qu'elle caricature à l'excès l'image de ce qu'elle est censée illustrer. Elle peut par exemple dépasser les bornes d'un modèle, sortir de son domaine de validité, oublier un phénomène essentiel, et cela sans qu'aucun signal d'alerte ne soit aussitôt émis. Une mauvaise simulation procède du simulacre.

Puisque le modèle qui lui sert de support est toujours incomplet, une modélisation ne peut jamais elle-même prétendre à la complétude.

Au mépris du sens des mots, la simulation a donc toujours partie liée avec la dissimulation. Est-ce grave ?

Non, car rien n'est perdu dès lors que ce qu'elle cache ou néglige n'est pas pertinent dans le cadre du problème qu'on se pose.

D'ailleurs, qu'est-ce qu'un bon modèle, sinon celui qui contient le minimum d'ingrédients nécessaires pour exhiber de l'universalité à propos de ce que l'on veut décrire ou comprendre ?

D'une façon générale, pour un scientifique, simuler, c'est faire des "expérimentations sur un modèle" : il réalise une reproduction artificielle du phénomène qu'il désire étudier, puis observe le comportement de cette reproduction lorsqu'il fait varier les actions que l'on peut exercer sur celle-ci, et en induit ce qui se passerait dans la réalité sous l'influence d'actions analogues. Dans la pratique, cette méthodologie se décline en plusieurs variantes qui offrent diverses vertus.

Bien simuler, c'est au bout du compte se donner les moyens de mieux comprendre, de mieux concevoir, et surtout de mieux agir.

La simulation est également déterminante dans les cas où l'on ne dispose pas de bases théoriques solides, et où l'on cherche précisément à élaborer une théorie rendant compte des données d'observation. On peut alors définir avec précision les conséquences concrètes des différents modèles théoriques possibles, déterminer lequel fournit l'approximation la plus fiable, et ensuite comprendre, voire optimiser, certains processus.

Une bonne simulation peut apporter plus d'informations qu'une expérience globale insuffisamment préparée ou difficilement reproductible, ne serait-ce qu'en raison de son coût.

Entre théorie et expérience

Comme on voit, la simulation présente de multiples facettes. Mais quel est son statut épistémologique ? Ni celui de la théorie, ni celui de l'expérience. La simulation a en effet introduit, sans conteste possible, un nouveau rapport vis-à-vis de notre représentation du monde. Jusque dans les années 1950, théorie et expérience étaient présentées comme des activités dialectiquement corrélées (Gaston Bachelard, Karl Popper).

L'idée était que la science naissait d'un incessant va-et-vient entre l'une et l'autre. Cette donne a changé avec l'arrivée massive des ordinateurs et du calcul numérique, au point que de nouvelles questions sont aujourd'hui posées : les simulations pourraient-elles avoir le même statut que les expériences ? Deviendront-elles capables, à l'occasion, de falsifier une théorie ? Permettent-elles toujours de mieux comprendre les modèles qu'elles illustrent ? Quant à l'effet positif de la simulation, qui tient à l'économie de temps et d'argent, voire à l'accès à des réalités hostiles ou dangereuses par l'apport des réalités virtuelles, ne doit-il pas être contrebalancé par le risque de fuite devant le réel et devant l'expérimentation concrète ?

### **V.1.2 METHODOLOGIE DE LA SIMULATION**

Une des façons de faire progresser la connaissance scientifique est de proposer des explications rationnelles à des phénomènes naturels par l'élaboration de modèles. Ces schémas mentaux simplifiés par rapport à la réalité sont suggérés par des observations expérimentales et suscitent eux-mêmes des expériences. Un modèle est donc une abstraction de la réalité qui, au fur et à mesure de la maturation des idées, peut être progressivement affiné (de la théorie de la chute des corps de Newton à la relativité générale d'Einstein, par exemple). Il s'exprime au travers d'équations mathématiques. Dans les cas les plus simples, les équations peuvent se résoudre à l'aide de solutions analytiques. En général, ce n'est pas possible. Pour démontrer le degré de pertinence d'un modèle par rapport aux données expérimentales, il faut souvent en résoudre les équations sur ordinateur.

Il y a ainsi irruption de la simulation numérique dans la dialectique théorie/expérience qui est au cœur de la démarche scientifique

### **V.1.3 UN TRIPTYQUE NON ORDONNE**

Le cycle de la recherche scientifique devient alors le suivant : théorie et modélisation, simulation numérique et vérification expérimentale. C'est ce que nous appelons ici la méthodologie de la simulation. Concrètement, la connaissance du processus physique ou de l'ensemble de processus étudiés est rassemblée dans un logiciel permettant de résoudre les équations des modèles préalablement établis. Comment valide-t-on ce logiciel ? En simulant, justement, le processus dont on pense qu'il a donné lieu au phénomène observé. Si les résultats numériques et expérimentaux sont proches, le modèle traduit en logiciel est déclaré valide, avec le degré d'approximation choisi. Cette validation est souvent complexe, car de nombreux processus sont impliqués. Il faut alors procéder pas à pas, en vérifiant que chaque modèle élémentaire de la description globale est satisfaisant. C'est une validation *par parties*. Il faut ensuite valider l'ensemble, ce qui implique de prendre en compte les interactions entre les modèles élémentaires. C'est la validation *globale*.

### **V.1.4 QU'EST-CE QU'UNE SIMULATION NUMÉRIQUE**

La simulation numérique consiste à reproduire par le calcul le fonctionnement d'un système, préalablement décrit par un ensemble de modèles. Elle s'appuie sur des méthodes mathématiques et informatiques spécifiques. Les principales étapes de la réalisation d'une étude par simulation numérique sont communes à de nombreux

secteurs de la recherche et de l'industrie, en particulier le nucléaire, l'aérospatial ou l'automobile

En chaque point de l'"objet" considéré, plusieurs grandeurs physiques (vitesse, température ...) décrivent l'état et l'évolution du système étudié. Celles-ci ne sont pas indépendantes, mais reliées et régies par des équations, généralement aux dérivées partielles. Ces équations constituent la traduction mathématique des lois de la physique qui modélisent le comportement de l'objet. Simuler l'état de ce dernier, c'est déterminer - idéalement en tout point - les valeurs numériques de ses paramètres. Comme il y a un nombre infini de points, donc une infinité de valeurs à calculer, cet objectif est inaccessible (sauf dans des cas bien particuliers où l'on peut résoudre les équations de départ à l'aide de formules analytiques). Une approximation naturelle consiste donc à ne considérer qu'un nombre fini de points. Les valeurs des paramètres à calculer sont ainsi en nombre fini et les opérations nécessaires deviennent abordables grâce à l'ordinateur. Le nombre effectif de points traités dépendra bien sûr de la puissance de celui-ci : plus il sera élevé, meilleure sera finalement la description de l'objet. A la base du calcul des paramètres comme à la base de la simulation numérique, il y a donc la réduction de l'infini au fini, la discrétisation.

Comment opère-t-on précisément à partir des équations mathématiques du modèle? Deux méthodes sont très souvent utilisées, respectivement représentatives des méthodes de calcul déterministe, qui résolvent les équations régissant les phénomènes étudiés après avoir **discretisé** les variables, et des méthodes de calcul statistique ou probabiliste.

Le principe de la première, connue sous le nom de méthode des volumes finis, est antérieur à l'usage des ordinateurs. Chacun des points de l'objet est assimilé simplement à un petit volume élémentaire (un cube par exemple), d'où le nom de *volume fini*. Un plasma, par exemple, est ainsi vu comme un ensemble ou un réseau de volumes contigus qui, par analogie avec la trame d'un tissu, sera dénommé maillage. Les paramètres de l'état de l'objet sont maintenant définis dans chaque maille du maillage. Pour chacune d'elles, en reformulant les équations mathématiques du modèle par des moyennes volumiques, il sera alors possible de construire des *relations algébriques* entre les paramètres de la maille et ceux de ses voisines. Au total, il y aura autant de relations que de paramètres inconnus et ce sera à l'ordinateur de résoudre le *système* de relations obtenu. Il faudra pour cela recourir aux techniques de l'analyse numérique et

programmer des algorithmes spécifiques. L'accroissement de la puissance des ordinateurs a permis d'augmenter la finesse de discrétisation, permettant de passer de quelques dizaines de mailles dans les années soixante à plusieurs dizaines de milliers dans les années quatre-vingt, à des millions dans les années quatre-vingt-dix et jusqu'à la dizaine de milliards de mailles aujourd'hui, chiffre qui devrait décupler à la fin de la décennie.

Un raffinement du maillage, le remaillage adaptatif, consiste à ajuster la taille des mailles en fonction des circonstances, par exemple en les rendant plus petites et plus serrées aux interfaces entre deux milieux, là où les phénomènes physiques sont les plus complexes, où les variations sont les plus importantes.

La méthode des volumes finis s'applique dans des contextes physiques et mathématiques très variés. Elle autorise toute forme de maille (cube, hexaèdre, tétraèdre ...) et le maillage peut être modifié durant le calcul, en fonction de critères géométriques ou physiques. Enfin, elle est aisée à mettre en œuvre dans le contexte des ordinateurs parallèles (en cadre B, *Les moyens informatiques de la simulation numérique hautes performances*), le maillage pouvant en effet faire l'objet d'un découpage pour des calculs sur ce type de machines.

Appartiennent à la même famille la méthode des différences finies, cas particulier de la méthode des volumes finis où les cotes des mailles sont orthogonales, et la méthode aux éléments finis, qui peut juxtaposer divers types de mailles. La deuxième grande méthode, dite de Monte-Carlo.

L'efficacité de cette méthode, mise en œuvre à Los Alamos dès les années 1940, dépend bien sûr de la qualité statistique des tirages au hasard.

Il existe pour cela des méthodes de nombres aléatoires, bien adaptées au traitement par un ordinateur.

Les méthodes des volumes finis et de Monte-Carlo ont suscité et suscitent de nombreuses études mathématiques. Ces études s'attachent notamment à préciser la convergence de ces méthodes, c'est-à-dire comment la précision de l'approximation varie avec le nombre de mailles ou de particules. Cette question est naturelle lors de la confrontation des résultats de la simulation numérique à ceux de l'expérience.

### **V.1.5 COMMENT SE DÉROULE UNE SIMULATION NUMÉRIQUE**

Il est souvent question *d'expérience numérique* pour souligner l'analogie entre la

pratique d'une simulation numérique et la conduite d'une expérience de physique.

Brièvement, cette dernière utilise un dispositif expérimental, configure selon des conditions initiales (de température, de pression ...) et des paramètres de contrôle (durée de l'expérience, des mesures ...). Durant l'expérience, le dispositif produit des points de mesures qui sont enregistrés. Ces enregistrements sont ensuite analysés et interprétés.

Dans une simulation numérique, le dispositif expérimental consiste en un ensemble de programmes informatiques exécutés sur des ordinateurs. Les codes ou logiciels de calcul sont la traduction, à travers des algorithmes numériques, des formulations mathématiques des modèles physiques étudiés. En amont et en aval du calcul, les *logiciels d'environnement* effectuent la gestion de plusieurs opérations complexes de préparation des calculs et de leur dépouillement,

Les données initiales de la simulation comporteront d'abord la délimitation du domaine de calcul à partir d'une représentation approchée des formes géométriques (produite par le dessin et la CAO, conception assistée par ordinateur), suivie de la discrétisation de ce domaine de calcul sur un maillage, ainsi que les valeurs des paramètres physiques sur ce maillage et les paramètres de contrôle du bon déroulement des programmes... Toutes ces données (produites et gérées par les logiciels d'environnement) seront saisies et vérifiées par les codes. Les résultats des calculs proprement dits, c'est-à-dire les valeurs numériques des paramètres physiques, seront sauvegardés au fur et à mesure. En fait, un protocole spécifique structurera les informations produites par l'ordinateur afin de constituer une base de données numériques,

À l'issue des calculs (résolution numérique des équations décrivant les phénomènes physiques qui se déroulent dans chaque maille), l'analyse des résultats par des spécialistes reposera sur l'exploitation de la base de données numériques. Elle comportera plusieurs étapes : extraction sélective des données (selon le paramètre physique recherché) et visualisation, extraction et transfert des données pour calculer et visualiser des diagnostics.

Le parallèle entre la conduite d'un cas de calcul, d'une expérience numérique et la conduite d'une expérience physique ne s'arrête pas là : les résultats numériques seront comparés aux résultats expérimentaux. Cette analyse comparative, effectuée sur la base de critères quantitatifs standardisés, fera appel à l'expérience et à l'art de l'ingénieur, du physicien, du mathématicien. Elle débouchera sur de nouvelles améliorations des

modèles physiques et des programmes informatiques de simulation.

## **V.2 GÉNÉRATION DE VARIABLES ET VECTEURS ALÉATOIRES**

### **V.2.1 INTRODUCTION**

Un des aspects importants de la méthode de Monte-Carlo et qu'elle nécessite la génération de séries de valeurs aléatoires de chacun des paramètres des modèles de calcul, conformément à la loi de distribution observée.

### **V.2.2 SIMULATION D'UNE VARIABLE ALEATOIRE**

Soit  $X$  une variable aléatoire ayant pour fonction de répartition  $F_x$ . comment peut-on réaliser dans la pratique un ensemble d'épreuves tel que la fréquence avec laquelle « soit » l'intégrale  $X \langle x$  soit une bonne approximation de  $F_x(x)$  ?

Du point de vue pratique, simuler une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F_x$  donnée, revient à construire une suite  $\{x_k\}_{k=1, \dots, m}$  de réalisations de la variable  $X$ . ceci nécessite les deux opérations suivantes :

- a. Construction d'une suite de nombres pseudo- aléatoires  $\{r_k\}_{k=1, \dots, m}$  équirépartie sur l'intervalle  $[0,1]$ . Notons ici qu'en vertu des propriétés des suites équiréparties, cette suite est tel que :
  - Chaque nombre  $r_k$  est une réalisation d'une variable aléatoire uniformément distribué sur  $[0,1]$
  - Les  $m$  valeurs de  $r_k$  sont indépendantes dans leurs ensembles.
- b. A partir de cette suite, construction de la suite  $\{x_k\}_{k=1, \dots, m}$  des réalisations de la variable aléatoire  $X$ .

Si  $F_x^{-1}(r)$  peut être exprimée algébriquement, chaque terme  $x_k$  est calculé par

$$x_k = F_x^{-1}(r).$$

Sinon une technique numérique appropriée doit être recherchée.

### III.2.3 SUITES EQUIREPARTIES

Comme il a été montré précédemment, toute variable aléatoire peut se ramener à une variable uniformément distribuée sur  $[0,1]$ . Le problème se pose alors de construire une suite de nombres compris entre 0 et 1 qui puissent représenter des réalisations d'une variable aléatoire  $R$  uniforme sur  $[0,1]$ .

Les méthodes proposées pour créer des nombres aléatoires reposent sur des calculs de nature arithmétique dans lesquelles le hasard ne joue aucun rôle. Les nombres aléatoires sont entièrement reproductibles et se calculent par des procédés compatibles avec les techniques habituelles de programmation des machines à calculer.

Dans ce cas, la suite  $\{\Gamma_k\}$  de nombres pseudo- aléatoires générés est définie par une suite de récurrence :

$$r_{k+1} = f(r_k, r_{k-1}, \dots, r_{k-m}) \quad ; m \geq 0$$

Où  $(r_0, r_1, \dots, r_m)$  est le vecteur de nombres aléatoires.

A titre d'exemple nous citerons la méthode du milieu du carré et la méthode de Lehmer .

#### 1. Méthode du milieu du carré (VON NEWMAN, 1951)

La relation de récurrence est définie comme suit :

$$Y_{k+2} = (Y_k / \alpha^m) - \left( \frac{Y_k^2}{\alpha^{3m}} \right) \cdot 10^{2m}$$

$Y_0$  est un nombre de  $2m$  chiffres dans une base quel conque. En base 10, il devient

$$Y_{k+2} = \left( \frac{Y_k}{10^m} \right) - \left( \frac{Y_k^2}{10^{3m}} \right) \cdot 10^{2m}$$

Cependant, la suite de nombres engendrés dégénère en un cycle souvent très petit et la méthode ne permet donc pas d'obtenir une longue suite de nombre avant de trouver une périodicité qui dépend de la base de  $m$  et du nombre  $Y_0$  de départ.

#### 2. Méthode de LEHMER (1951) généralisée

La méthode de LEHMER est une méthode de congruence multiplicative définie par :

$$\lambda_{k+1} = \lambda y_k \pmod{P}$$

Où  $\lambda$  est un entier arbitrairement fixé et  $P$  une constante (on pourra se ramener à une suite dans  $[0,1]$  en divisant par  $P$ ).

Une condition qui maximise la période du cycle obtenu est que  $Y_0$  et  $P$  soient premiers entre eux, par exemple si  $P=2^m$  et  $Y_0$  impair la période de la suite est  $2^{m-2}$

La méthode de Lehmer peut être généralisée par :  $\lambda_{k+1} = \lambda_{y_k} + \mu \pmod{P}$ .

En choisissant  $\lambda$  et  $\mu$  correctement, la longueur maximale de la période peut être portée à  $P$ .

Une fois la suite construite, il est nécessaire de vérifier que les propriétés espérées sont réalisées (indépendance equirepartition). Pour cela, un ensemble de tests statistiques a été mis au point. Parmi ceux-ci le plus connu est le test de fréquence.

### 3. Méthodes relatives à la loi normale

A partir des suites numériques représentant des réalisations d'une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $[0,1]$  (si les nombres générés appartiennent à l'intervalle  $[0,P]$ , il suffit de les diviser par  $P$ ) déterminées par des procédés décrits ci-dessous, il est possible d'obtenir des représentations de variables aléatoires ayant une loi donnée.

En effet, comme on l'a déjà rappelé ; si  $R$  est une variable aléatoire uniforme sur  $[0,1]$ , alors  $F_x^{-1}(R)$  a pour fonction de répartition  $F_x$ . cette inversion se fera soit directement (si cela est impossible), soit par construction intermédiaire.

Il existe pour cela plusieurs méthodes, mais pour la loi normale, des techniques très performantes ont été mises au point. Nous citerons entre autre la méthode directe et la méthode logarithmique trigonométrique.

#### ▪ Méthode directe

La densité de probabilité d'une variable aléatoire normale a pour expression

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Ou sous la forme réduite (moyenne  $m=0$  et écart type  $\sigma=1$ )

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

On calcule  $x_k = F_x^{-1}(r_k)$  en approchant la fonction de répartition par des approximations rationnelles ou des polynômes différents dans des intervalles successifs  $[0,1]$ .

Ainsi, à  $\pm 22 \cdot 10^{-5}$  après sur  $]-\infty, +\infty[$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} = \frac{1}{b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 + b_6x^6 + b_8x^8 + b_{10}x^{10}}$$

Avec :

$$b_0 = 2,5052367$$

$$b_2 = 1,283104$$

$$b_4 = 0,2264718$$

$$b_6 = 0,1306469$$

$$b_8 = 0,0202490$$

$$b_{10} = 0,0039132$$

#### ▪ Méthodes logarithmique- trigonométrique

Cette méthode de simulation très performante repose sur le théorème suivant :

« Soient  $R$  et  $\theta$  deux variables aléatoires respectivement uniforme sur  $[0,1]$  et  $[0,2\pi]$ . La variable aléatoire  $G$  définie par  $G = \sqrt{-2 \lg R} \cdot \cos \theta$  est gaussienne centrée normée. »

Toute variable aléatoire  $X$  normale, de moyenne  $m$  et d'écart type  $\theta$  peut alors s'écrire :

$$X = m + \theta \cdot G$$

#### ▪ Description de la méthode

Considérons une suite de nombres pseudo aléatoires  $\{r_k\}$  équirépartie sur  $[0,1]$ , soit  $(r_1^{(j)})$  et  $r_2^{(j)}$  le  $j^{\text{ème}}$  couple tiré à partir de  $\{r_k\}$  et représentant la  $j^{\text{ème}}$  réalisation des vecteurs  $\vec{R} = (R_1, R_2)$  à composants indépendants et uniformes sur  $[0 ; 1]$

Dans ces conditions la  $j^{\text{ème}}$  réalisation de la variable aléatoire  $G$  s'écrit :

$$g^{(j)} = \sqrt{-2 \lg r^{(j)} \cdot \cos 2\pi r_2^{(j)}}$$

On déduit alors la  $j^{\text{ème}}$  réalisation de la variable aléatoire  $X$   $x^{(j)} = m + \sigma g^{(j)}$

### V.2.4 SIMULATION D'UN VECTEUR ALÉATOIRE

Soit  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un vecteur aléatoire  $R^n$  ; que nous supposons dans un premier temps à composantes indépendantes et notons  $F_{x_i}$  la fonction de répartition de la composante  $X_i$ . Associons d'autre part à chaque argument aléatoire  $X_i$  une variable aléatoire  $R_i$  uniformément distribué sur  $[0,1]$ . Dans l'hypothèse où les variables  $R_i$  sont indépendantes nous pouvons poser  $\vec{X} = (X_1 = F_{x_1}^{-1}(R_1), X_2 = F_{x_2}^{-1}(R_2), \dots, X_n = F_{x_n}^{-1}(R_n))$ ,

La variable  $R_i$  étant uniforme sur  $[0, 1]$ , le vecteur  $\vec{X}$  est distribué suivant la loi donnée qui a pour fonction de répartition  $F_x(x) = \prod_{i=1}^{i=n} F_{x_i}(X_i)$ .

Pratiquement, simuler un vecteur aléatoire  $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$  de loi normale revient à construire une suite  $\{x^{(j)}\}_{j=1, \dots, m}$  de réalisation de ce vecteur. Comme une variable aléatoire, cette opération se fait en 2 étapes :

- Construire d'une suite vectorielle  $\left\{ \vec{R}^{(j)} \right\}_{j=1, \dots, m}$  équirépartie dans l'hyper cube unitaire  $[0,1]^n$ . en vertu des propriétés des suites vectorielles équiréparties, cette suite est telle que tout vecteur  $\vec{R}^{(j)} = (r_1^{(j)}, r_2^{(j)}, \dots, r_n^{(j)})$  est une réalisation du vecteur aléatoire  $\vec{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$  uniformément distribué sur  $[0,1]^n$  et à composantes indépendantes.
- Construction à partir de cette suite de la suite vectorielle  $\left\{ \vec{X}^{(j)} \right\}_{j=1, \dots, m}$  de du vecteur réalisation du vecteur aléatoire  $\vec{X}$ .

Si le vecteur  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  est à composantes indépendantes et si chaque fonction  $F_{x_i}^{-1}(r_i)$  peut être exprimée algébriquement, la suite des réalisations de e vecteur est engendrée comme suit :

$$\vec{X}^{(j)} = (x_1^{(j)} = F_{x_1}^{-1}(r_1^{(j)}); x_2^{(j)} = F_{x_2}^{-1}(r_2^{(j)}); \dots, x_n^{(j)} = F_{x_n}^{-1}(r_n^{(j)})$$

Avec  $j = 1, \dots, m$ .

Si une fonction  $F_{x_i}^{-1}(r_i)$ , au moins, n'est pas algébriquement formulable ou ni le vecteur est à composantes intercorrélées, le recours à des procédés numériques appropriés est nécessaire.

**V.2.5 GÉNÉRATION DE VARIABLES CORRÉLÉES (NGUYEN ET CHOWDHURY 1985)**

Dans les procédures de génération de système de variables aléatoires généralement disponibles, la corrélation entre les variables stochastiques n'est pas prise en compte. Pour créer une méthode qui permet de générer des variables aléatoires corrélées, une hypothèse relative à la distribution des systèmes à deux variables, doit être faite. Si chacune des variables est supposée de distribution normale, il est alors logique de supposer une distribution normale jointe ou une distribution normale bi variable pour les deux variables corrélées.

En effet, pour une distribution normale impliquant deux variables aléatoires corrélées X et Y, la fonction de densité jointe gaussienne est donnée par :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y (1 - \rho^2)^{1/2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (x^2 - 2\rho xy + y^2) \right\}$$

Où  $\sigma_x^2$  et  $\sigma_y^2$  sont les variances des distributions X et Y respectivement et  $\rho$  le coefficient de corrélation entre X et Y défini par

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{E\{(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

avec  $\sigma_{X,Y}$  : espérance mathématique du produit  $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$  (ou covariance de X et Y)

Il faut noter que :

$$x = (X - \mu_x) / \sigma_x \quad \text{et} \quad y = (Y - \mu_y) / \sigma_y$$

x et y sont appels variables réduites ou variables standardisées et  $\mu_x$  et  $\mu_y$  sont les moyennes des distributions X et Y respectivement.

Dans le cas d'un système à n variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de distribution gaussienne multi variable , la matrice de covariance  $\Lambda$  est de la forme :

$$\Lambda = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdot & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

L'élément  $\sigma_{X,Y}$  est la covariance des variables aléatoires  $X_j$  et  $Y_k$ .

$$\sigma_{jk} = \text{cov}(X_j, X_k) = E\{(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)\}$$

Les termes de la diagonale principale sont les variances et si toutes les variables sont indépendantes et non corrélées, tous les termes de la matrice excepté ceux de la diagonale principale sont nuls.

En notation matricielle :

$$\Lambda = E\{(X - M)(X - M)^T\} \tag{V.1}$$

Or il est connu en statistique et probabilités, que certaines transformations permettent de passer d'un ensemble de variables aléatoires normales non corrélées de matrice de covariance diagonale à un ensemble de variables aléatoires de matrice de covariance définie positive

Soit donc la transformation linéaire

$$X = AY + B$$

Où A est une matrice  $n \times n$  dont les éléments  $a_{ij}$  sont constants et B un vecteur colonne d'éléments  $b_i$  constants ainsi dans le cas d'une variable unique :

$$X = \sigma \cdot Y + m$$

X est un variable aléatoire normale  $(m, \sigma^2)$  et Y une variable aléatoire normale unité [0,1]

Dans le cas d'un système à 2 variables, il vient :

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1 \\ X_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2 \end{aligned}$$

Cela implique que :  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Si Y est le vecteur, colonne de variables aléatoires de distribution normale unité (0,1), alors

$$E(X) = E(AY) + E(B) = A E(Y) + B = B$$

(V.2)

C'est-à-dire que B est le vecteur colonne des moyennes des éléments du vecteur X

$$B=M$$

de même,  $E(Y Y^T) = I$  (V.4)

Où I est la matrice unité, car les éléments du vecteur Y colonne sont non corrélés et ont des distributions unités

En combinant les équations (V.1) et (V.2), il vient :

$$\begin{aligned} \Lambda &= E[(AY)(AY)^T] \\ \Lambda &= E[AY Y^T A] = A E[Y Y^T] A^T \end{aligned} \quad (V.5)$$

Des équations (V.4) et (V.5), on déduit une nouvelle expression de la matrice de covariance du vecteur colonne variable transformée :

$$\Lambda = A A^T \quad (V.6)$$

En conséquence de la transformation linéaire d'un ensemble de variables normales unités Y en un autre ensemble de variables normales corrélées X, de matrice de covariance spécifiques  $\Lambda$ , est possible si une matrice constante A satisfaisant l'équation (V.6) peut être trouvée.

Dans le cas bivariable, on a :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  Sont les variables de  $X_1$  et  $X_2$  (respectivement et  $\rho$  le coefficient de corrélation entre  $X_1$  et  $X_2$  en élevant au carré la matrice A, on obtient :

$$A A^T = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11} \cdot a_{21} + a_{12} \cdot a_{22} \\ a_{21} \cdot a_{11} + a_{22} \cdot a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

En égalant les éléments de  $AA^T$  et  $\Lambda$  on a alors l'ensemble des équations simultanées suivantes :

$$a_{21}^2 + a_{12}^2 = \sigma_1^2 \tag{V.7}$$

$$a_{21} \cdot a_{11} + a_{22} \cdot a_{12} = \rho \sigma_1 \sigma_2 \tag{V.8}$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = \sigma_2^2 \tag{V.9}$$

$$a_{11} \cdot a_{21} + a_{12} \cdot a_{22} = \rho \sigma_1 \sigma_2 \tag{V.10}$$

Il y a trois équations indépendantes pour quatre inconnus. On égale alors à 0 un des termes  $a_{ij}$  par exemple  $a_{12} = 0$

Il vient alors finalement :

$$X_1 = \sigma_1 Y_1 + m_1$$

$$\tag{V.11}$$

$$X_2 = \rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 (1 - \rho^2)^{1/2} \cdot Y_2 + m_2 \tag{V.12}$$

Seule l'équation (V.11) est nécessaire si toutes les variables sont indépendantes. Des procédures de transformation similaires peuvent être trouvées pour des cas généraux impliquant n variables.

Ainsi, pour le cas d'un système à trois variables  $z_1, z_2,$  et  $z_3$  corrélées, Freeze (1975) cite des travaux de Mood et Gray Bill (1963) qui indiquent que la fonction de distribution multi variable est dans ce cas de forme :

$$f(Z) = \frac{1}{|V|^{1/2} (2\pi)^{p/2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z - \mu)^T V^{-1} (Z - \mu) \right\}$$

Avec :

$$\rho = 3; \quad Z = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix} \quad \mu = \begin{vmatrix} \mu_{z_1} \\ \mu_{z_2} \\ \mu_{z_3} \end{vmatrix} \quad v = \begin{vmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 \\ \sigma_{31}^2 & \sigma_{32}^2 & \sigma_{33}^2 \end{vmatrix}$$

$Z_1, Z_2, Z_3,$  : variables aléatoires de moyennes  $\mu_{z_1}, \mu_{z_2}, \mu_{z_3}$

$\sigma_{ii}^2$  : Variance de  $Z_{ii}$

$\sigma_{ij}^2$  : Covariance de  $Z_i$  et  $Z_j$

Les valeurs de  $Z_3, Z_2, Z_1$  sont générées de façon séquentielle en utilisant l'expression de générateur normal pour une variable indépendante (équation (V.11) et les distributions suivantes :

$$\begin{aligned} Z_3 &= N[\mu_3, \sigma_{33}] \\ Z_2 &= N[\mu_2 + a, b \cdot \sigma_{22}] \\ Z_1 &= N[\mu_1 + c, b \cdot \sigma_{11}] \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} a &= \rho_{23} \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{33}} \cdot (Z_3 - \mu_3) \\ b &= \rho_{23} \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{33}} \cdot (Z_3 - \mu_3) \\ c &= \frac{(\rho_{12} - \rho_{13} \cdot \rho_{23})}{1 - \rho_{23}^2} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}} \cdot (Z_2 - \mu_2) + \frac{(\rho_{13} - \rho_{12} \rho_{23})}{(1 - \rho_{23}^2)} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{33}} \cdot (Z_3 - \mu_3) \\ d &= \sqrt{1 - \rho_{13}^2 - \frac{(\rho_{12} - \rho_{13} \rho_{23})^2}{(1 - \rho_{23}^2)}} \end{aligned}$$

### V.2.6 Génération de variables corrélées et présentant une dérive

Toujours d'après Freeze (1975) qui cite Mood et Gray Bill (1963) les valeurs générées des variables  $Z_i$  s'obtiennent en utilisant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} Z_{1j} &= Z'_{1j} + B_1(X_j - 1/2) \\ Z_{2j} &= Z'_{2j} + B_2(X_j - 1/2) \\ Z_{3j} &= Z'_{3j} + B_3(X_j - 1/2) \end{aligned}$$

Les valeurs des  $Z'_i$  sont générées de façon séquentielle à l'aide d'un générateur normal à une variable et d'un algorithme de récurrence comme décrit ci-dessus

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$  sont les pentes des droites de régression linéaire de  $Z_i/X_i$ .

## V.3 SIMULATION DE MONTE CARLO

Il est toujours possible de déterminer empiriquement la densité de probabilité d'une variable  $Y = f(X_d)$  en calculant les valeurs de  $y$  correspondant à des ensembles de valeurs des  $x_i$  générés de façon aléatoire conformément aux densités de probabilité de chacune des variables aléatoires  $X_i$  et en déterminant la densité de probabilité de  $Y$  d'après la distribution des fréquences des  $y$  obtenus. La précision de cette simulation augmente avec la racine carrée de la taille de l'échantillon et de ce fait il faut disposer d'un échantillon très important pour obtenir des résultats utiles. Ceci nécessite en pratique l'utilisation d'un ordinateur. Lamb (1974), Benjamin et Corneille (1970) et Harry (1977), par exemple, donnent des indications sur l'emploi de cette méthode.

Un des aspects importants de la méthode de Monte-Carlo est qu'elle nécessite la génération de séries de valeurs aléatoires de chacun des paramètres des modèles de calcul. Il existe dans les bibliothèques de sous-programmes statistiques des programmes capables de générer des suites de nombres aléatoires en suivant des lois de distribution simples (densité uniforme sur un intervalle donne, loi normale, loi logomachique, etc.).

Pour les lois de distribution uniformes, les programmes de calcul utilisent des algorithmes tels que :

$$x_{n+1} = (Ax_n) \text{ mod } M \tag{V.13}$$

ou

$$x_{n+1} = (Ax_n + B) \text{ mod } M \tag{V.14}$$

qui permettent de calculer une série de nombres Xu a partir d'une valeur initiale x., quelconque.

La notation  $X = (y) \text{ mode } M$  indique que x est le reste de la division du nombre entier y par le nombre entier M. Le nombre M est la période de la séquence aléatoire generis. On le choisit très grand. Le nombre A est compris entre 0 et M -1, ainsi que le nombre B. Les nombres génères sont uniformément repartis entre 0 et M -1. On ajuste la série  $\{x_n\}$  la l'intervalle [a, b] désiré en utilisant la formule.

$$x'_n = \frac{b-a}{M} x_n + a$$

Le tableau V.1 contient une série de 100 nombres aléatoires uniformément repartis sur l'intervalle [0,1], obtenus à l'aide de la relation

$$x'_n = \frac{x_n}{199017} = \frac{1}{199017} (24298x_{n-1} + 99991) \text{ mod } 199017$$

Avec  $x_0 = 3157$

**Tableau V.1** Valeurs aléatoires pour one distribution uniforme  $r_u(0,1)$  (moyenne 0,4992 ; écart type 0,2989)

0,94078	0,21584	0,84210	0,61357	0,02350	0,91285	0,71604	0,65892	0,57355	0,3798
0,67091	0,07410	0,97724	0,21177	0,70248	0,09452	0,89312	0,99525	0,72393	0,0158
0,43931	0,10304	0,64419	0,21744	0,39051	0,17125	0,70640	0,20549	0,57834	0,3864
0,01838	0,20799	0,24438	0,075%	0,23613	0,59846	0,63295	0,70570	0,21014	0,3467
0,24788	0,45595	0,46758	0,34120	0,16860	0,97289	0,93245	0,75541	0,64645	0,8490
0,54450	0,29001	0,97433	0,00728	0,27009	0,94595	0,735	0,54936	0,06715	0,8061
0,91757	0,32528	0,85926	0,84568	0,19368	0,31652	0,51090	0,01134	0,26668	0,1181
0,63820	0,28335	0,92873	0,86820	0,67134	0,50875	0,45717	0,09495	0,48185	0,1468
0,6%44	0,48675	0,02402	0,19270	0,78788	0,32044	0,84654	0,76848	0,73332	0,14788
0,72449	0,68472	0,34764	0,93623	0,49643	0,60870	0,75928	0,09536	0,88138	0,84515

Pour obtenir des valeurs aléatoires suivant une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ , on utilise les valeurs générées sur l'intervalle  $[0,1]$  pour une distribution uniforme, soit  $R_N(0,1)$  : on calcule d'abord la valeur d'un nombre  $R_N(0,1)$  suivant une loi normale réduite (moyenne 0 et écart type 1) à l'aide de l'expression

$$R_N(0,1) = \sqrt{-2 \ln u_1} \cos(2\pi u_2) \tag{V.15}$$

qui fait intervenir deux nombres  $u_1$  et  $u_2$  générés dans l'intervalle  $[0,1]$  comme indique ci-dessus. Puis on ajuste la loi normale à sa moyenne et à son écart type à l'aide de l'expression :

$$R_N(\mu, \sigma) = \sigma R_N(0,1) + \mu \tag{III.16}$$

Le tableau V.2 contient une série de 100 nombres aléatoires suivant une loi normale réduite  $R_N(0,1)$ .

**TABLEAU V.2** Valeurs aléatoires pour une distribution normale réduite  $R_N(0,1)$  (moyenne 0,1403 ; écart type 0,9047)

-0,16658	0,58029	-0,80567	0,63986	-0,17195	-0,10918	1,52516	-0,53041	1,04284	-0,32753
1,27407	0,03311	0,11936	-0,55938	0,25937	0,37464	-0,09567	-0,58433	-1,70448	0,41919
-1,60535	1,21703	-0,23755	-0,26834	0,85217	-0,98083	-0,25826	0,86542	-0,06157	0,12251
-0,26800	0,49648	-0,85951	-1,11724	-1,61530	-0,11159	0,53155	-0,14963	0,65953	-0,24840
-0,13576	-1,57224	-0,69035	0,03364	0,57880	1,78357	-0,64373	0,66009	-0,26376	1,68138
1,56473	0,23514	0,35392	-0,91300	1,38452	0,05203	-0,64234	1,62489	0,62041	-0,52594
0,55623	-1,55169	-1,53046	-0,48880	-0,78719	1,74257	-1,01330	-0,05342	0,09909	0,94039
-0,31176	1,31568	-0,22106	-0,71326	0,19764	-0,25877	0,43608	0,70446	-0,20704	0,50900
-0,31175	0,39155	-1,51453	2,47609	1,24760	0,42002	-0,15974	2,29259	-0,52884	-1,35866
-0,47852	1,67100	-1,17028	0,59931	1,10049	-1,19535	-0,51306	-0,29220	0,22532	0,64171

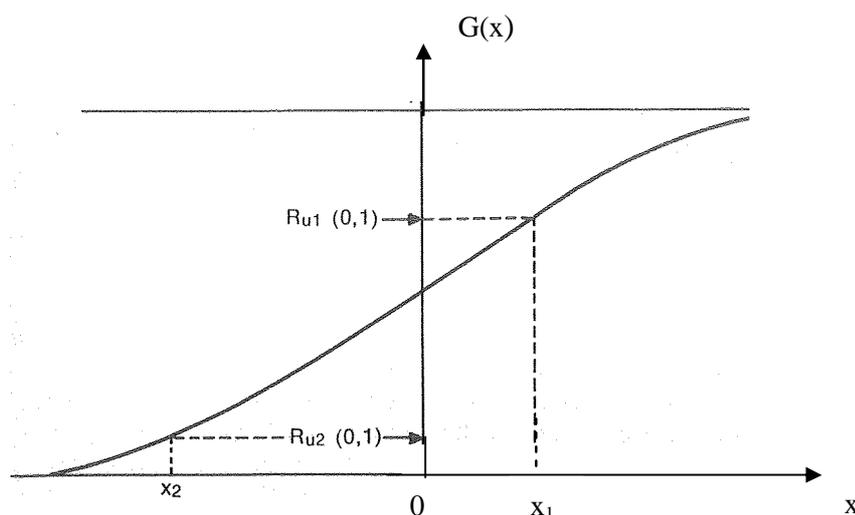
Pour les valeurs entières des paramètres des lois bêta, on peut utiliser l'expression suivante, due à

Hahn et Shapiro :

$$R_B(0,1) = \frac{\sum_{i=1}^{2\alpha+2} R_{Ni}^2(0,1)}{\sum_{i=1}^{2(\alpha+\beta+2)} R_{Ni}^2(0,1)} \tag{V.17}$$

qui utilise  $2(\alpha + \beta + 2)$  valeurs aléatoires normales réduites  $R_N(0,1)$ . Pour les autres valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  il faut procéder par interpolation.

Il faut pour terminer indiquer que l'on peut «facilement générer des valeurs aléatoires de toute variable dont on connaît la fonction de répartition  $G(x)$  en utilisant l'algorithme suivant, qui repose sur le fait que les valeurs de  $G(x)$  sont uniformément réparties sur l'intervalle  $[0,1]$  : on génère des valeurs aléatoires de  $R_u(0,1)$  et l'on retient les valeurs  $X_i$  de la variable qui sont telles que  $G(x_i) = R_{ui}(0,1)$ . La figure 36 illustre la procédure adoptée.



**Figure V.1** Procédure de génération de valeurs aléatoires d'une variable  $X$  dont la fonction de répartition  $G(x)$  est connue.

Les techniques de génération de valeurs aléatoires qui viennent d'être décrites s'appliquent à des variables isolées indépendantes. Dans le cas de plusieurs variables dépendantes, la génération d'ensembles de données est plus difficile. Il existe néanmoins différentes techniques utilisables. Nous citerons seulement celle qui consiste, dans le cas de deux variables  $X_1$  et  $X_2$  dont on connaît la densité de probabilité jointe  $h(X_1, X_2)$ , à tirer d'abord une valeur aléatoire de  $X_1$  pour pouvoir définir la densité de probabilité  $g(X_2 | x_1)$  et générer ensuite la valeur de  $X_2$ .

Par exemple, dans le cas d'une distribution bi-normale, on obtient

$$x_1 = \mu_1 + R_{N_1}(0,1) \cdot \sigma_1$$

$$x_2 = \mu_2 + \left\{ \rho R_{N_1}(0,1) + \sqrt{1 - \rho^2} R_{N_2} \right\} \sigma_2$$

*CHAPITRE VI*

***TECHNIQUES DE  
GEOSTATISTIQUE***

## Chapitre VI

**LES TECHNIQUES DE GEOSTATIQUE****VI.1 INTRODUCTION**

Les paramètres de variations spatiales montrent deux caractéristiques : une fluctuation locale aléatoire et un comportement global systématique. Ce comportement global possède une certaine structure, qui est naturellement différente d'un paramètre à l'autre et d'un site à l'autre. Les études statistiques classiques s'intéressent seulement à l'aspect aléatoire des valeurs du paramètre et ne peuvent prendre en compte la corrélation éventuelle entre les valeurs du paramètre.

En même temps, les traits structuraux présentent une irrégularité et une variabilité locale telles qu'ils échappent à toute représentation fonctionnelle simple. Cet aspect chaotique suggère une interprétation probabiliste.

Ce choix méthodologique donne alors l'idée de considérer la distribution spatiale d'une variable de sol comme une réalisation unique d'une fonction aléatoire.

Une telle variable en géostatistique est dite « variable régionalisée » (Matheron, 1971). C'est une fonction du point.

A ce propos MATHERON écrit : « un phénomène est régionalisé s'il se déploie dans l'espace et y montre une certaine structure ».

L'idée principale est donc d'associer à l'ensemble des points  $x_i$  de l'espace, un ensemble de variables aléatoires ou autrement dit une fonction aléatoire. Mais en pratique, la valeur  $z(x)$  du paramètre du sol n'est connue qu'en certains points  $x_i$  ( $i=1, \dots, N$ ), à partir de sondages ou prélèvements.

A chaque point  $x_k$  de l'espace  $R^n$  est associée une valeur  $z(x_k)$  du paramètre, qui est considérée comme une réalisation particulière de la variable aléatoire  $z(x_k)$

Plus généralement, on associe à l'ensemble fini de points  $x_i$  de l'espace un ensemble de variables aléatoires ou autrement dit une fonction aléatoire  $Z(x_i)$ .

Mais en chaque point  $x_k$ , on ne dispose qu'une d'une seule réalisation  $z(x_k)$  et l'ensemble fini des points de mesure  $x_i$  est donc considéré comme une réalisation particulière de la fonction aléatoire  $Z(x_i)$ . Si par exemple, on avait effectué le même nombre d'essais en des points localisés différemment, on aurait trouvé des valeurs différentes.

Le modèle utilisé pour représenter les ensembles de valeurs va consister à trouver ce qu'il peut y avoir de commun entre ces ensembles. Le problème de l'étude de la fonction  $Z(x)$ , vu sous l'angle probabiliste, se ramènera à ajuster une loi de probabilité sur les données de manière qu'elle rende compte de l'échantillonnage.

Dans notre cas, il faut définir les caractéristiques de la fonction  $Z(x)$  dont la distribution spatiale est :

$$F_{x_1 \ x_2 \dots \ x_k}(z_1, z_2, \dots, z_k) = P[Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_k) < z_k]$$

ou de l'ensemble de toutes les lois de distribution, pour tout entier positif  $k$  et pour tous les choix possibles de  $k$  points d'appui dans l'espace.

Caractériser ce modèle à partir d'une réalisation unique est impossible. On se heurte donc, au problème de l'inférence statistique qui n'est possible qu'à la condition d'introduire des hypothèses limitatives ayant pour but de réduire le nombre de paramètres de la fonction aléatoire pour reconstituer en partie la loi de la fonction aléatoire dont l'information fragmentaire du site est une réalisation.

On est donc conduit à formuler des hypothèses limitatives d'homogénéité spatiale du point de vue statistique.

L'hypothèse la plus courante est l'hypothèse de stationnarité du second ordre de la fonction aléatoire que l'on veut analyser.

Soit  $Z(x)$  la variabilité régionalisée étudiée. Si les valeurs de  $Z(x)$  en deux points quelconques du champ de réalisation sont indépendantes, le phénomène n'est pas structuré et l'on est en présence d'un modèle aléatoire.

Toutefois ceci est rare dans la nature et la valeur  $Z(x)$  en un point est liée en général à celle des points situés au voisinage. Le champ de régionalisation est plus au moins organisé et l'on distingue plusieurs degrés dans stationnarité.

## **VI.2 BASES DE LA GEOSTATISTIQUE**

### **VI.2.1 Hypothèse de stationnarité**

#### **a) Stationnarité au sens strict**

Une fonction aléatoire est stationnaire, au sens strict si la loi spatiale est invariante par translation. Dans ce cas les deux variables aléatoires vectorielles à  $k$  composants  $\{Z(x_1), \dots, Z(x_k)\}$  et  $\{Z(x_1 + h), \dots, Z(x_k + h)\}$  présentent la même loi de distribution à  $k$  variables, quel que soit le vecteur translation  $h$ .

Cette hypothèse permet de résoudre le problème posé par l'inférence statistique, car à partir d'une réalisation on peut obtenir plusieurs.

En effet, une réalisation de la variable aléatoire vectorielle  $[T(x_1), \dots, T(x_n)]$  est fournie par les valeurs du paramètre données par les sondages réalisés en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Mais les valeurs données par les sondages implantés aux points :

$$x_1 + \vec{h}, \quad x_2 + \vec{h}, \dots, x_n + \vec{h}$$

constituent également une réalisation de la variable vectorielle et ceci pour toute valeur de  $\vec{h}$

Mais ceci est rare en mécanique des sols. En pratique les lois de variation des paramètres changent fréquemment d'un point à un autre.

C'est une hypothèse forte.

**b) Stationnarité au sens large (d'ordre 2)**

C'est l'hypothèse la plus courante. Elle implique que la moyenne est constante

$$E\{Z(x)\} = m = \text{Constante}$$

et que pour toute coupe  $\{Z(x), Z(x+h)\}$ , la covariance existe et ne dépend que de la distance h.

$$C(h) = E\{Z(x+h) \cdot Z(x)\} - m^2, \quad \forall x$$

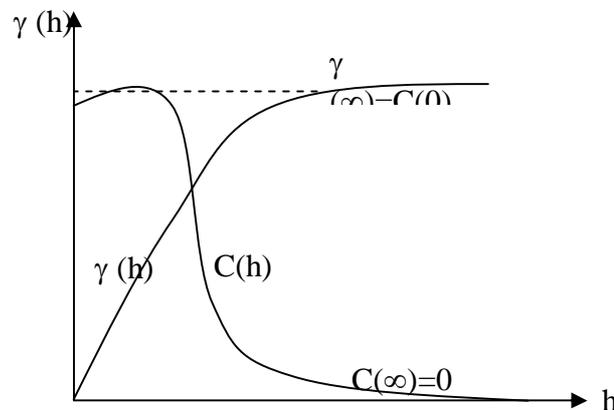
L'existence et la stationnarité de la covariance impliquent l'existence et la stationnarité de la variance. En effet :  $Var \{Z(x)\} = E\{Z(x) - m\}^2 = C(0), \quad \forall x$

Lorsque la variance à priori est finie C(0) existe et l'on a :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\} = C(0) - C(h); \quad \forall x$$

$\gamma(h)$  est appelé **variogramme**

La covariance et le variogramme sont deux outils équivalents pour caractériser la variabilité de la variable Z(x).



Mais certains phénomènes physiques présentent une capacité de dispersion illimitée, c'est-à-dire qu'ils ne présentent ni covariance ni variance à priori finie. Pour les traiter, il convient de considérer leur accroissement ce qui conduit à l'hypothèse intrinsèque qui ne suppose que l'existence du variogramme.

**c. l'hypothèse intrinsèque**

Une fonction aléatoire  $Z(x)$  est dite intrinsèque si

- L'espérance mathématique existe et ne dépend que du point d'implantation  $x$  :

$$E\{Z(x)\} = m, \quad \forall x.$$

- Pour tout vecteur  $h$ , l'accroissement  $[Z(x+h) - Z(x)]$  aura une variance finie qui ne dépend pas de  $x$  :

$$\text{Var} \{Z(x+h) - Z(x)\} = E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\} = 2\lambda(h), \quad \forall x$$

En pratique la fonction structurale (covariance ou variogramme) n'est utilisée que pour des distances limitées  $h < b$ . la limite  $b$  représente la distance du voisinage d'estimation ; pour estimer la valeur inconnue  $Z(x_0)$ , seules les données situées dans un rayon  $b$  sont pris se compte.

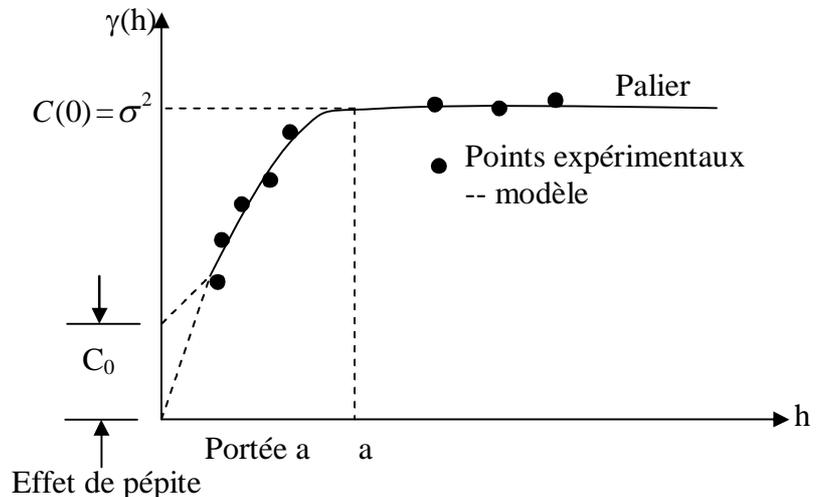
**VI.3 PROPRIETES DU VARIOGRAMME**

Dans le cas de l'hypothèse intrinsèque, la fonction semi- variogramme  $\gamma(h)$  est définie par la relation :  $\gamma(h) = E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\}$

$Z(x)$  étant la fonction aléatoire représentant la variable étudiée.

L'étude de la structure par le variogramme consiste à suivre l'évolution de « variation quadratique moyenne » de l'accroissement de la fonction  $Z(x)$  en fonction de  $h$  d'amplitudes, croissante. On obtient ainsi le variogramme dans une direction donnée.

La figure ci-dessous représente une courbe de la variation typique du variogramme en fonction de la distance  $h$ .



**Figure VI.1** Exemple de variogramme

Le variogramme croît avec  $h$ . ceci provient du fait que plus les points sont éloignés, plus les valeurs des paramètres en ces points ont des chances d'être différentes.

En absence de dérive et lorsque la capacité de dispersion du milieu est finie, le variogramme se stabilise autour d'une valeur limite  $\gamma(\infty)$  pour des distances  $h$  supérieures à une certaine limite à appeler portée.

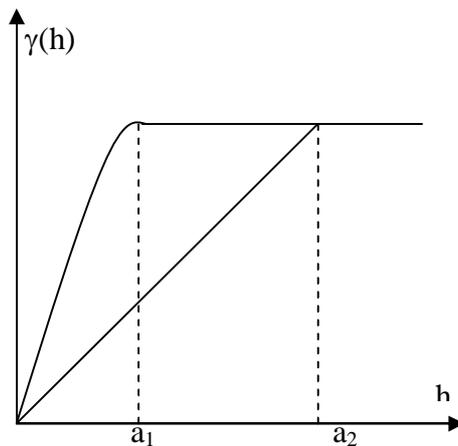
$\gamma(\infty)$  n'est d'autre que la variance à priori de la fonction aléatoire, soit :

$$\gamma(\infty) = \text{Var}\{Z(x)\} = C(\theta).$$

Il peut arriver que le variogramme présente une discontinuité à l'origine, c'est-à-dire que  $\gamma(0^+) = C_0 > 0$

C'est l'effet de pépite qui traduit la variabilité due aux erreurs de mesure et /ou la variabilité à petite échelle.

L'étude des variations de  $[\gamma(x, h)]$  pour différentes directions met en évidence l'éventuelle anisotropie de la variable  $Z(x)$ . À titre d'exemple, la portée du variogramme dans la direction verticale est en général différente de celle obtenue dans la direction horizontale.



**Figure VI.2** Ajustement du variogramme- Modèle théorique.

En principe, pour estimer le variogramme expérimental  $\gamma(h)$  à partir des données disponibles, on utilise la formule suivante :

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2$$

Dans laquelle  $N$  représente le nombre de couples de valeurs de  $Z(x)$  mesurées en des points distincts de  $h$ .

Le variogramme expérimental étant obtenu, on détermine le variogramme théorique qui s'ajuste le mieux aux points du variogramme expérimental.

Différents modèles théoriques ont été élaborés pour tenir compte des traits caractéristiques du comportement du variogramme. On distingue les modèles sans paliers et modèles avec palier. Pour ces derniers citons :

- Le modèle sphérique, d'équation :

$$\gamma(h) = C(0) \cdot \left[ \frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3} \right] \quad h < a$$

$$\gamma(h) = C(0), \quad h \geq a$$

a est la portée et C(0) le palier.

- Le modèle exponentiel d'équation

$$\gamma(h) = C(0) \cdot (1 - e^{-h/a})$$

Ce palier C (0) est atteint théoriquement quand  $h \rightarrow \infty$  mais en pratique, on prendra la portée égale à 3a.

La figure ci-dessous donne l'allure des modèles de variogramme théoriques sphérique et exponentiel.

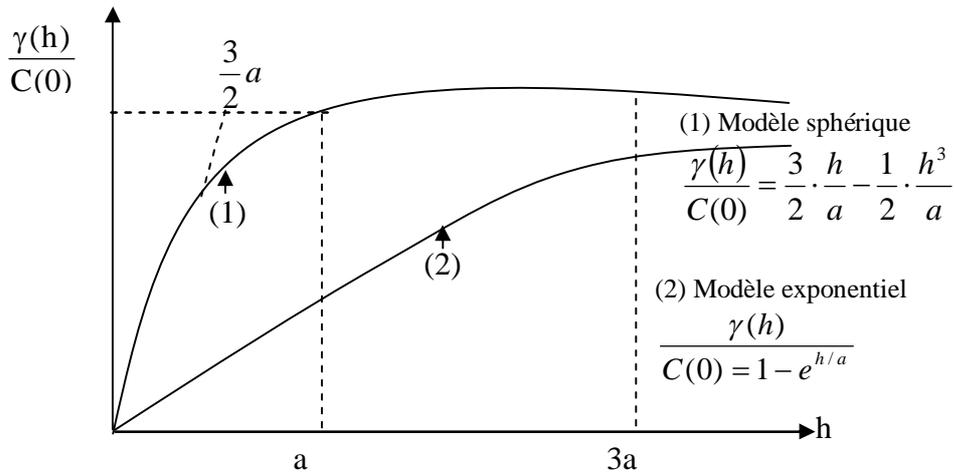


Figure VI.3 Modèles de variogramme

Le variogramme théorique sert d'une part à l'analyse structurale du phénomène étudié (effet de pépite, portée, existence de palier,...) et d'autre part à aborder certains problèmes de variabilité spatiale et d'estimation.

#### VI.4 VARIATION D'ESTIMATION ET VARIANCE DE DISPERSION

En fait la vraie valeur de la variable  $Z$  n'est connue qu'en certains points où l'on dispose de mesures ponctuelles par des sondages. Pour connaître la vraie valeur de  $Z$  en tout autre point, on doit procéder à une estimation à partir des données disponibles.

Il convient alors de connaître l'erreur commise lorsqu'on utilise la valeur estimée  $Z^*$  en un point au lieu de la vraie valeur  $Z$  inconnue. Pour caractériser cette erreur, on fait appel aux notions de variance de dispersion et de variance d'estimation.

Considérons un sous domaine  $v$  de l'espace  $V$ .

Par exemple,  $V$  est un dépôt d'argile et  $v$  l'ensemble fini des points de mesure.

$$v = \{x_i / i = 1, 2, \dots, N\}$$

où  $N$  est le nombre de points de mesure. Par suite, la moyenne des valeurs mesurées est :

$$Z^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z(x_i)$$

Lorsqu'on estime la vraie valeur de la moyenne  $z$  par  $z^*$  on commit une erreur d'estimation

$$\bar{V} = z_v - z_v^*$$

Quand on adapte comme valeur moyenne de la variable dans un domaine  $V$  celle du domaine  $v$ , on fait une erreur d'estimation dont la variance (d'estimation) est :

$$\sigma_e^2(v, V) = \text{Var}(Z_v - Z^*) = 2\bar{\gamma}(v, V) - \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v)$$

$\bar{\gamma}(v, V)$ ,  $\bar{\gamma}(V, V)$  et  $\bar{\gamma}(v, v)$  sont des valeurs moyennes de variogramme.

$\bar{\gamma}(x_i - x)$ ,  $\bar{\gamma}(x - y)$  et  $\bar{\gamma}(x_i, x_j)$  respectivement, quand  $x_i, x_j$  décrivent indépendamment le domaine  $v$  et  $x$  et  $y$  décrivent le domaine  $V$ .

Exemple :

$$\bar{\gamma}(v, V) = \frac{1}{v \cdot V} \int_v dx_i \int_V \gamma(x_i - x) dx$$

$$\bar{\gamma}(V, V) = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x - y) dy$$

$$\bar{\gamma}(v, v) = \frac{1}{V^2} \int_v dx_i \int_v \gamma(x_i - x_j) dx_j$$

La variance d'estimation dépend de la forme et de la taille de  $v$  et  $V$ , ainsi que de la position relative de  $v$  par rapport à  $V$ .

De même, la variance de la valeur moyenne  $Z_v^*$  des  $z(x_i)$  lorsque  $v$  occupe toutes les positions possibles dans un domaine peu vaste  $V$  a une valeur moyenne appelée variance de dispersion de  $v$  dans  $V$  et est désignée par :  $\sigma_D^2(v/V)$ . On démontre que :

$$\sigma_D^2(v/V) = \gamma(V, V) - \gamma(v, v)$$

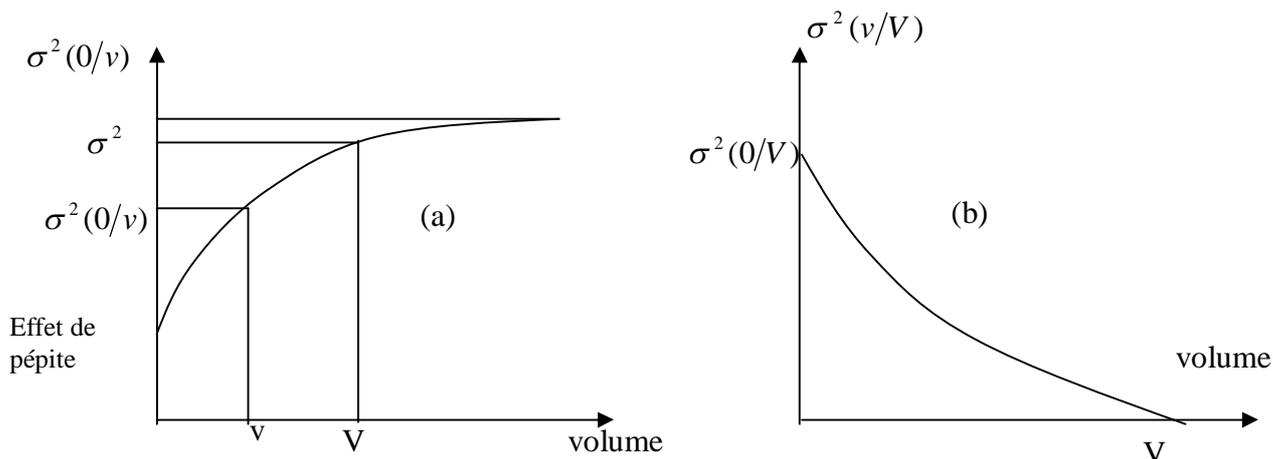


Figure VI.4 Variance d'estimation (a) et variance de dispersion (b)

## VI.5 LE KRIGEAGE

Comme on l'a laissé entendre précédemment le variogramme permet d'aborder deux classes de problèmes : les problèmes d'estimation (théorie du krigeage) et les problèmes de fluctuation (thème des simulations).

Les observations sont généralement faites de manière discontinue et irrégulière, à une ou plusieurs dimensions.

Il est donc souvent nécessaire de procéder à des interpolations pour connaître la valeur la plus probable de la variable en dehors des points de mesure souvent disparates et en nombre limité.

Deux types d'interpolation sont généralement employés : d'une part les méthodes d'interpolation par ajustement global, qui consistent à « ajuster » une fonction (polynôme simple ou trigonométrique) à l'ensemble des valeurs expérimentales, et d'autre part les méthodes d'interpolation par ajustement local comprenant les procédés classiques basés sur la méthode des moindres carrés et la technique de krigeage. Mais ces procédés, excepté la technique du krigeage, ont un inconvénient majeur : l'ajustement conduit en quelque sorte à « forcer » les

données à entrer dans le cadre rigide d'une fonction analytique et la continuité de la variable est parfois surestimée. En plus, pour ce qui est des méthodes classiques, l'isotropie est souvent admise et la condition d'optimalité n'est pas respectée.

Seule la méthode d'interpolation par krigeage repose sur une méthode statistique satisfaisante et permet d'obtenir la vraie variance d'estimation.

Brièvement, car nous ne pouvons le faire dans ce cadre de travail, nous dirons que le krigeage est une méthode d'estimation de la dérive spatiale d'une variable aléatoire qui opère par combinaisons linéaires des différents échantillons disponibles en minimisant l'erreur moyenne.

Cette méthode est particulièrement bien adaptée pour tenir compte des différents facteurs qui influent la précision de l'estimation :

- nombre de points de mesure de la propriété et qualités des mesures,
- position de ces points dans le domaine étudié et distance entre eux et la zone intéressante,
- continuité spatiale des variables interpolées.

Le problème se pose ainsi : on dispose des valeurs expérimentales  $\{z(x_\alpha), \alpha = 1, 2, \dots, N\}$ , mesurées aux points  $x_\alpha$  du sous ensemble  $v$  du domaine  $V$ .

On connaît le variogramme  $\gamma(h)$  de  $z(x)$ , on veut déterminer au point  $x_0 \in V$  le meilleur estimateur linéaire non biaisé  $z^*(x_0)$ .

L'estimateur de la fonction aléatoire  $z(x)$  de moyenne  $m$  inconnue et dont les  $z(x_\alpha)$  sont une réalisation particulière, au point  $x_0$ , est de la forme :

$$z^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha Z(x)$$

L'estimateur  $z^*(x_0)$  est une combinaison linéaire des  $n$  valeurs connues ; les coefficients  $\lambda_\alpha$ , dits pondérateurs, sont à déterminer de telle façon que :

- L'estimateur soit non biaisé (condition d'universalité)
 
$$E\{Z(x_0) - Z^*(x_0)\} = 0$$
- La variance d'estimation soit minimale (condition d'optimalité)
 
$$E\left\{[Z(x_0) - Z^*(x_0)]^2\right\} \text{ minimale}$$

### VI.5.1 Absence de dérive (krigeage ponctuel simple)

Dans ce cas, la moyenne  $m$  est constante, soit :

$$E\{Z(x_\alpha)\} = m \text{ et } E\{Z(x_0)\} = m$$

- La condition de non biais entraîne que :

$$E\left\{\sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha (x_\alpha) - Z(x_0)\right\} = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha m - m = m \left(\sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha - 1\right)$$

Cette condition est vérifiée pourvu que :

$$\sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha = 1$$

- La condition de variance d'erreur minimale s'exprime en fonction de la fonction de covariance :

$$E\left\{[Z(x_0) - Z^*(x_0)]^2\right\} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \lambda_\alpha \lambda_\beta \cdot C(x_\alpha, x_\beta) + C(0) - 2 \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \cdot C(x_\alpha, x_0)$$

ou en termes de variogramme :

$$E\left\{[Z(x_0) - Z^*(x_0)]^2\right\} = - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \lambda_\alpha \lambda_\beta \cdot \gamma(x_\alpha, x_\beta) + 2 \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \cdot \gamma(x_\alpha, x_0)$$

La variance d'estimation apparaît ainsi comme une forme quadratique en  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$  qu'il faut minimiser sous la contrainte de non biais :

$$\sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha = 1$$

Pour cela, on introduit le multiplicateur de Lagrange  $\mu$  et on cherche le minimum de l'expression :

$$\varphi = \text{Var}\{Z(x_0) - Z^*(x_0)\} - 2\mu \left(\sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha - 1\right)$$

En annulant les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, N \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$$

On obtient le système de (N+1) équations à (N+1) inconnues (les pondérateurs  $\lambda_\alpha$  et le paramètre de Lagrange  $\mu$ ), dit « système de krigeage » :

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\beta} \cdot \gamma(x_{\alpha}, x_{\beta}) + \mu = \gamma(x_{\alpha}, x_0), \alpha = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} = 1 \end{cases}$$

La variance de krigeage est donnée par l'expression :

$$\sigma_k^2 = \text{Var}\{Z(x_0) - Z^*(x_0)\} = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \gamma(x_0 - x_{\alpha}) + \mu$$

Pour chaque point à kriger, il existe donc un ensemble d'équations du type :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_1 \gamma(x_1 - x_{\beta}) = \gamma(x_1 - x_0) - \mu \\ \sum_{\alpha=1}^N \lambda_2 \gamma(x_2 - x_{\beta}) = \gamma(x_2 - x_0) - \mu \\ \dots \\ \sum_{\alpha=1}^N \lambda_N \gamma(x_N - x_{\beta}) = \gamma(x_N - x_0) - \mu \\ \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\beta} = 1 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, ces équations s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma(x_1 - x_2) & \dots & \gamma(x_1 - x_N) & 1 \\ \gamma(x_2 - x_1) & 0 & \dots & \gamma(x_2 - x_N) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(x_N - x_1) & \gamma(x_N - x_2) & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_N \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(x_1 - x_0) \\ \gamma(x_2 - x_0) \\ \dots \\ \gamma(x_N - x_0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou sous une forme plus compacte :

$$\begin{bmatrix} \gamma(x_{\alpha} - x_{\beta}) & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{\alpha} \\ \dots \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(x_{\alpha} - x_0) \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] \cdot \{\Lambda\} = \{M\}$$

[K] est la matrice de krigeage, carrée et symétrique

[K] et {M} étant connues, le vecteur des poids  $\lambda_{\alpha}$  peut donc être calculée après inversion de [K].

$Z^*(x_0)$  est alors obtenue à partir de la relation classique :

$$Z^*(x_0) = \lambda_1 \cdot Z(x_1) + \lambda_2 \cdot Z(x_2) + \dots + \lambda_N \cdot Z(x_N)$$

La confiance à accorder à la valeur estimée au point  $x_0$  est d'autant plus faible que la variance d'estimation est grande pour ce point. Si la moyenne  $m$  est connue, l'estimateur s'écrit sous la forme :

$$z_{CK}^*(x_0) = m + \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \cdot \{Z(x_{\alpha}) - m\}$$

Les pondérateurs  $\lambda_{\alpha}$  sont les racines du système d'équations :

$$\sum_{\beta=1}^N \lambda_{\beta} \{C(0) - \gamma(x_{\alpha} - x_{\beta})\} = C(0) - \gamma(x - x_{\alpha}), \alpha = 1, 2, \dots, N$$

La variance d'estimation est dans ce cas :

$$\sigma_{CK}^2 = \left(1 - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}\right) \cdot C(0) + \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \cdot \gamma(x_0 - x_{\alpha})$$

### VI.5.2 Prise en compte d'une dérive (krigeage universel)

Quand il existe une dérive, le variogramme expérimental ne tend généralement pas vers une limite : les valeurs de  $z(x)$  sont interdépendantes dans tout le champ d'étude.

Dans le cas général, la variable étudiée peut être considérée comme la réalisation  $Z(x)$  d'une fonction aléatoire, non stationnaire en général. Elle peut être décomposée en la somme d'un terme de dérive et d'un terme résiduel  $y(x) = Z(x) - m(x)$ , d'espérance nulle :

$$Z(x) = m(x) + y(x), \text{ avec } E\{Z(x)\} = 0$$

On suppose connue la forme de la dérive  $m(x)$ . Par exemple  $m(x)$  peut être une combinaison linéaire de  $k$  fonctions quelconques mais connues ( $f_1(x), 1 = 1 \text{ à } k$ ), les coefficients  $a_1$  restant bien sûr inconnus, de sorte que la dérive  $m(x)$  reste inconnue :

$$m(x) = \sum_{i=1}^k a_i \cdot f_i(x)$$

On peut ainsi adopter les premiers termes du développement de Taylor, soit :

$$m(x) = a_1 + a_2 x \text{ pour une dérive dite « linéaire »},$$

$$m(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \text{ pour une dérive dite « quadratique »}.$$

Dans un espace à deux dimensions, la dérive quadratique prendrait la forme :

$$m(u, v) = a_1 + a_2 u + a_3 v + a_4 u^2 + a_5 v^2 + a_6 uv$$

L'estimateur  $Z^*(x_0)$  de la variable à interpoler au point  $x_0$  est donné par la même expression que précédemment :

$$Z^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} Z_{\alpha}$$

Les conditions à respecter sont aussi les mêmes :

- Condition de non biais

$$\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \sum_{l=0}^k a_l f_l(x_{\alpha}) - \sum_{l=0}^k a_l f_l(x_0) = 0$$

Donc :

$$\sum_{l=0}^k a_l \left( \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \cdot f_l(x_{\alpha}) - f_l(x_0) \right) = 0$$

Les coefficients  $a_l$  étant inconnus, on doit aussi vérifier que :

$$\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \cdot f_l(x_{\alpha}) = f_l(x_0), \text{ quel que soit } l.$$

$l$  variant de 0 à  $k$ , ce qui impose  $(k+1)$  conditions supplémentaires.

- Variance d'estimation minimale

Compte tenu des conditions de non biais précédentes, les termes faisant intervenir la dérive inconnue  $m(x)$  s'éliminent du développement de la variance d'estimation :

$$E\left\{ [Z(x_0) - Z^*(x_0)]^2 \right\},$$

Et il reste :

$$E\left\{ [Z(x_0) - Z^*(x_0)]^2 \right\} = 2 \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \cdot \gamma(x_{\alpha}, x_0) - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \cdot \gamma(x_{\alpha}, x_{\beta})$$

La variance d'estimation sera donc minimale si les  $\lambda_{\alpha}$  vérifient :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \cdot \gamma(x_{\alpha} - x_{\beta}) = \gamma(x_{\alpha} - x_0) - \sum_{l=0}^k \mu_l \cdot f_l(x_{\alpha}), \forall \alpha = 1 \text{ à } N \\ \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \cdot f_l(x) = f_l(x_0), l = 0 \text{ à } k \end{cases}$$

Il y a donc  $k$  multiplicateurs de Lagrange associés à la condition de non biais. Il en existe autant que de termes dans l'expression de la dérive.

Notons que :

$\gamma(x_\alpha - x_\beta)$  est la valeur de la demi variance correspondant à la distance entre deux points connus  $x_\alpha$  et  $x_\beta$  dans l'espace de régionalisation et  $\gamma(x_\alpha - x_0)$  est la valeur de la demi-variance correspondant à la distance entre le point  $x_\alpha$  et le point à interpoler  $x_0$ .

Les valeurs  $\gamma(x_\alpha - x_\beta)$  et  $\gamma(x_\alpha - x_0)$  sont calculées à l'aide de l'expression correspondant au modèle de variogramme sous-jacent choisi. La variance d'estimation est :

$$\sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \cdot \gamma(x_\alpha - x_0) + \sum_{l=0}^k \mu_l \cdot f_l(x_0)$$

### VI.5.3 Krigeage étendu (estimation des valeurs moyennes)

C'est la généralisation du krigeage ponctuel. Le support est ici un segment, une surface ou un volume. Le krigeage est évidemment effectué là aussi qu'il existe ou non une dérive (krigeage étendu simple ou krigeage étendu universel). La valeur moyenne peut être calculée de deux manières : ou bien les observations faites dans l'élément étudié servent seules au calcul (krigeage étendu local), ou bien celles faites en des points du voisinage sont elles aussi prises en compte (krigeage étendu global).

Considérons l'estimation de la valeur moyenne :

$$Z_v(x_0) = \frac{1}{V} \int_V z(x) dx$$

définie sur le segment  $V$  centré au point  $x_0$ , à partir de  $N$  informations  $z(x_\alpha)$  définies sur les supports  $V_\alpha$ .

La technique de calcul est identique à celle du krigeage ponctuel.

Ainsi, l'estimateur est de la forme :

$$Z_v(x_0) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \cdot z(x_\alpha)$$

$N$  désigne le nombre de points de mesure, et les coefficients  $\lambda_\alpha$  sont choisis tels que :

- $E\{Z_v(x_0) - Z_v^*(x_0)\} = 0$  (estimateur sans biais)
- $E\{Z_v(x_0) - Z_v^*(x_0)\}^2$  minimale.

Dans le cas du krigeage local universel, par exemple, la dérive inconnue est une fonction polynomiale de forme générale :

$$m(x) = \sum_{i=1}^k a_i f_i(x)$$

Le formalisme classique de Lagrange, à l'aide duquel la variance de l'erreur  $(Z_V - Z_V^*)$  est minimisée sous la contrainte de non biais,

$$\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} = 1$$

Conduit à un système de  $(N+k)$  équations linéaires à  $(N+k)$  inconnues (les  $N$  pondérateurs  $\lambda_{\alpha}$  et les  $k$  paramètres de Lagrange  $\mu_l$ ) appelé « système de krigeage sans biais d'ordre  $k$  » ou encore système de krigeage universel :

$$\sum_{\beta=1}^N \lambda_{\beta} \cdot \gamma(x_{\alpha} - x_{\beta}) + \sum_{l=0}^k \mu_l \cdot b_{v_{\alpha}}^l = \bar{\gamma}(v_{\alpha}, V) \\ \forall \alpha = 1 \text{ à } N$$

$$\sum_{\beta=0}^N \lambda_{\beta} \cdot b_{v_{\beta}}^l = b_v^l, \quad \forall l = 1 \text{ à } k$$

Avec :

$$b_v^l = \frac{1}{V} \int_V f_l(x) dx$$

$$b_{v_{\alpha}}^l = \frac{1}{V_{v_{\alpha}}} \int_{V_{v_{\alpha}}} f_l(x_{\alpha}) dx$$

Les  $f_l(x)$  sont les  $(k+1)$  fonctions d'estimation connues de la dérivée  $m(x)$ .

La variance de krigeage est :

$$\sigma_{ke}^2 = \sum \lambda_{\beta} \cdot \bar{\gamma}(v_{\alpha}, V) + \sum_{l=0}^k \mu_l \cdot b_v^l - \bar{\gamma}(v, v)$$

Toutefois les supports sélectionnés, à l'intérieur desquels sont recueillis les échantillons, sont souvent des supports riches en ce sens que la caractéristique étudiée y a souvent des valeurs élevées ; le krigeage local conduit pour cette raison souvent à surestimer les estimations et cela d'autant plus que les échantillons extérieurs sont considérés comme d'influence nulle. Il faut donc dans ce cas faire des estimations en tenant compte aussi des échantillons recueillis au voisinage. C'est le krigeage étendu global.

Dans le krigeage étendu global, le principe de calcul de l'estimation de la valeur moyenne d'un paramètre sur un support  $V$  est le même que celui utilisé pour le krigeage local, à une

différence près : les N points pris en compte dans le système de krigeage sont ceux contenus dans le support V, pour lequel la moyenne est calculée, et ceux se trouvant au voisinage de V.

### **VI.6 COKRIGEAGE**

Dans la plupart des situations pratiques, une des variables régionalisées peut ne pas avoir été suffisamment échantillonnée (difficultés expérimentales, coût élevé...).

La technique de cokrigeage, tout à fait analogue à celle du krigeage, permet d'estimer cette variable, non seulement à partir de données disponibles sur cette variable mais aussi sur d'autres variables qui lui sont corrélées.

*CHAPITRE VII*

***METHODE DES  
ELEMENTS FINIS***

## CHAPITRE VII

**METHODE DES ELEMENTS FINIS****VII.1 INTRODUCTION**

Les sciences de l'ingénieur permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre ces équations. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux, ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes et aux domaines de formes complexes souvent rencontrés dans la pratique.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle consiste donc à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent. La discrétisation se fait sur deux fronts. D'une part, le domaine géométrique est subdivisé en sous-domaines de géométrie simple, appelés éléments, sur lesquels l'étude de problème peut se faire en une seule opération, et d'autre part, les équations aux dérivées partielles sont remplacées par des équations algébriques à l'aide de calcul variationnel ou des méthodes de minimisation de l'erreur comme les méthodes des résidus pondérés. La solution finale s'obtient en résolvant un système d'équations global formé en assemblant les équations algébriques obtenues sur tous les éléments constituant le domaine.

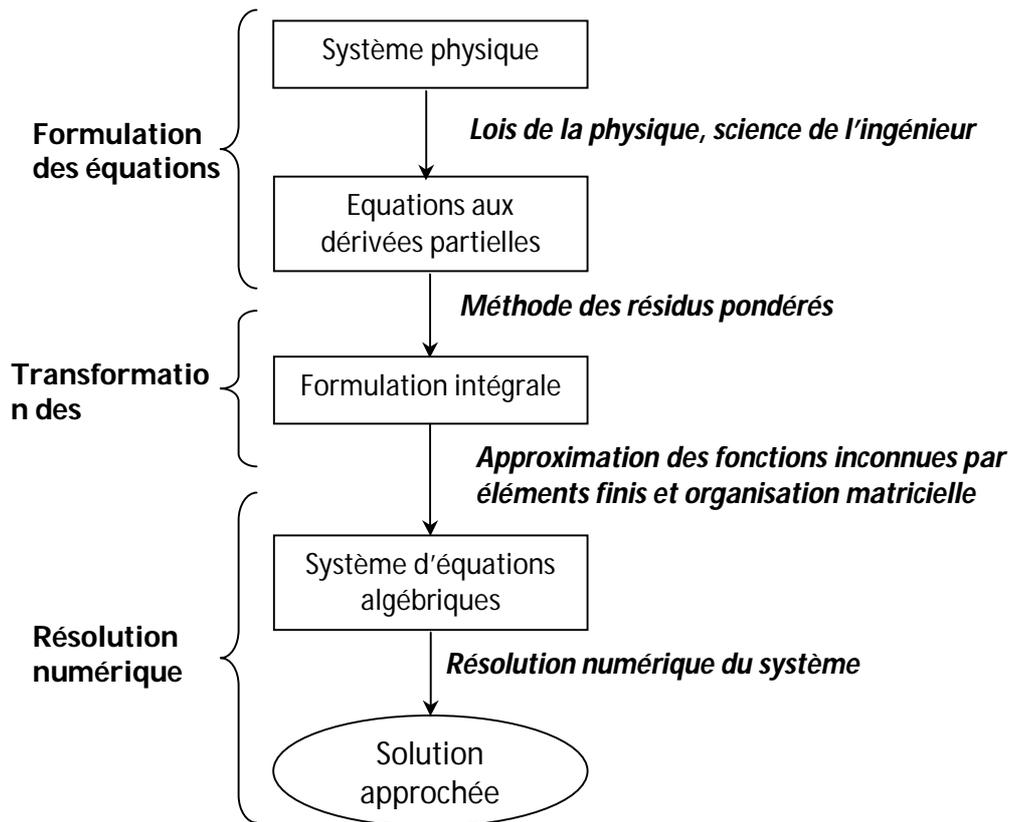


Figure VII.1 Transformation des équations d'un système physique.

## VII.2 MODELISATION, SYSTEMES DISCRETS ET SYSTEMES CONTINUS

### VII.2.1 Modélisation numérique

La modélisation numérique est la simulation numérique du comportement d'un système physique, en utilisant l'outil informatique. La démarche est la suivante.

- **Modèle physique** : c'est la description en langage d'ingénieur d'un système physique.
- **Modèle mathématique** : c'est la traduction du problème physique en écriture mathématique.
- **Modèle numérique** : c'est un modèle associé au modèle mathématique, obtenu en utilisant une méthode de discrétisation tel que la méthode des éléments finis.
- **Modèle informatique** : c'est l'écriture d'un logiciel simulant le comportement du système physique.

### VII.2.2 Systèmes discrets et systèmes continus

Un système est discret s'il possède un nombre de degré de liberté fini. Un système est continu s'il possède un nombre de degrés de liberté infini.

Le comportement d'un système discret est représenté par un système d'équations algébriques. Celui d'un système continu est le plus souvent représenté par un système d'équations aux dérivées partielles ou intégral-différentielles associés à des conditions aux limites.

### VII.3 FORMULATION INTEGRALE

#### VII.3.1 Introduction

La résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles régissant le comportement des systèmes physiques continus n'est pas toujours possible analytiquement. Pour cela, nous remplaçons ce système continu par un système discret régi par des équations algébriques faciles à résoudre.

#### VII.3.2 Méthodes des résidus pondérés

Les méthodes des résidus pondérés sont des méthodes numériques qui permettent la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles en approximant la solution exacte  $u_{ex}$ , par une solution approchée  $u$ .

Soit un système d'équations différentielles suivant :

$$L(u_{ex}) = f_v \quad \text{sur } \Omega \quad (\text{VII.1})$$

Avec des conditions aux limites sur  $u_{ex}$

Nous choisissons une fonction approchée,  $u$ , pour  $u_{ex}$  généralement :

$$u = \sum_{i=1}^n a_i P_i(x) \quad (\text{VII.2})$$

$a_i = 1, \dots, n$  : paramètres de l'approximation.

$P_i(x)$  : fonctions polynomiales ou trigonométriques linéairement indépendantes continues.

$u$  : satisfait les conditions aux limites imposées sur  $u_{ex}$ .

En remplaçant  $u_{ex}$  par  $u$  dans (II.1) nous commettons une erreur appelé résidu,  $R$  :

$$R = L(u) - f_v \neq 0 \quad (\text{VII.3})$$

$R = 0$  en tout point de  $\Omega$ , si  $u = u_{ex}$ .

A l'aide des fonctions de pondération  $\Psi_i$  bien choisies, nous imposons à l'intégration du résidu de s'annuler en  $n$  point de  $\Omega$  :

$$W_i = \int_{\Omega} \Psi_i R \, d\Omega = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (\text{VII.4})$$

Les fonctions de pondération  $\psi_i$  sont indépendantes et leur nombre doit être égal au nombre de paramètres de l'approximation.

Le choix de ces fonctions de pondération conduit à plusieurs méthodes

- Méthode de collocation par points
- Méthode de collocation par sous domaines
- Méthode des moments
- **Méthode de Galerkin**
- Méthode des moindres carrés.

### VII.3.2.1 Méthode de collocation par points

La méthode de collocation utilise les fonctions de Dirac, définies comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta(\{x\}) &= 0 & \text{si } \{x\} \neq \{x\}_i \\ \Delta(\{x\}) &= 1 & \text{si } \{x\} = \{x\}_i \end{aligned} \quad (\text{VII.5})$$

Comme fonctions de pondération pour le système d'équations différentielles en  $n$  points du domaine  $\Omega$ . Les  $n$  points sont généralement, mais pas nécessairement, régulièrement repartis sur le domaine  $\Omega$ .

L'équation VII.4 devient alors :

$$W_i = \int_{\Omega} R \Delta_i d\Omega = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

### VII.3.2.2 Méthode de collocation par sous domaines

Cette méthode est similaire à la méthode de collocation par points. La seule différence c'est qu'au lieu que l'intégrale du résidu s'annule en certains points du domaine, il est exigé qu'elle s'annule sur des sous domaines  $\Omega_i$  de  $\Omega$  :

$$W_i = \int_{\Omega_i} R d\Omega = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (\text{VII.6})$$

### VII.3.2.3 Méthode des moments

Cette méthode utilise comme fonctions de pondération l'ensemble des fonctions indépendantes suivantes :

$$\Psi_i = x^i \quad i = 0, \dots, n.$$

L'intégration du résidu s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \Psi_i R d\Omega = \int_{\Omega} \Psi_i (L(u) - f_v) d\Omega = 0$$

Avec,

$$u = \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i(x)$$

### VII.3.2.4 Méthode de Galerkin

Cette méthode est un cas particulier de la méthode des résidus pondérés. Elle utilise comme fonctions de pondération l'ensemble des variations  $\delta u$  des fonctions approchées  $u$  :

$$\Psi = \delta u = \sum_{k=1}^n \alpha_k P_k(\{x\}) \quad (\text{VII.7})$$

L'équation (4) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^n \delta \alpha_k P_k(\{x\}) \right) \left( L \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k P_k(\{x\}) \right) + f_v \right) d\Omega = 0 \\ &= \langle \delta \alpha_k \rangle \int_{\Omega} \{ P_k(\{x\}) \} \left( L \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k P_k(\{x\}) \right) + f_v \right) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Comme la relation précédente doit s'annuler pour tout  $\{\delta \alpha\}$ , alors nous l'écrivons tout simplement comme :

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{\Omega} P_1(\{x\}) \left( L \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k P_k(\{x\}) \right) + f_v \right) d\Omega = 0 \\ W_2 &= \int_{\Omega} P_2(\{x\}) \left( L \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k P_k(\{x\}) \right) + f_v \right) d\Omega = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ W_n &= \int_{\Omega} P_n(\{x\}) \left( L \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k P_k(\{x\}) \right) + f_v \right) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Ce système est symétrique si l'opérateur  $L$  est auto adjoint.

### VII.3.2.5 Forme intégrale faible

La fonction approchée,  $u$ , devait satisfaire les conditions aux limites imposées sur elle ainsi que les conditions de dérivabilité imposées par l'opérateur. L'intégration par parties fournit des formes intégrales dites faibles qui réduisent l'ordre des dérivées de  $u$ , et engendrent deux types de conditions aux limites. Ces propriétés peuvent être utilisées avec profit par la méthode des résidus pondérés. Elles permettent d'alléger, d'un part, les conditions des dérivabilités de la fonction approchée, et d'autre part, les conditions aux limites imposées sur elle.

**VII.4 APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS**

**VII.4.1 Démarche fondamentale**

Dans la démarche fondamentale de la MEF, il faut distinguer trois aspects que nous allons détailler dans le cas du modèle déplacement :

- La géométrie est décomposée en domaines de forme géométrique simple (les éléments) reliés entre eux en des points appelés nœuds (maillage ou discrétisation de la structure). L'élément utilisé peut être par exemple le triangle, le tétraèdre.
- Le choix d'une approximation pour chaque élément : le champ de déplacement dans chaque élément est défini en fonction des déplacements des nœuds de l'élément.
- Discrétisation de la formulation variationnelle : on écrit que l'énergie potentielle de la structure est minimale pour l'état d'équilibre de la structure. Appliquée d'abord à un élément puis à la structure complète, l'expression obtenue permet d'obtenir la matrice de rigidité globale, construite à partir des matrices de rigidité élémentaires.

Après mise en place des conditions aux limites et des charges, on calcule les déplacements inconnus puis, dans chaque élément, les déformations et les contraintes.

**VII.4.2 Définition de la géométrie des éléments**

*d) Nœuds géométriques*

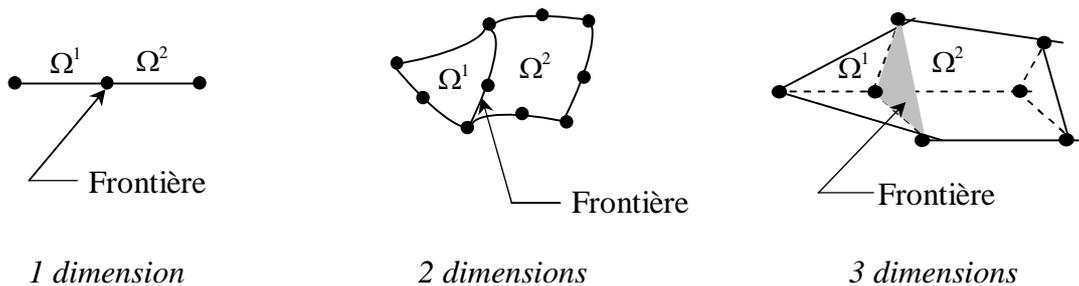
Nous choisissons un ensemble de  $n$  points, sur le domaine  $\Omega$ , qui servira à définir la géométrie et l'ordre de grandeur des  $k$  éléments interconnectés à des nœuds géométriques. Ces points nodaux, peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation.

*e) Règles de répartition du domaine en éléments*

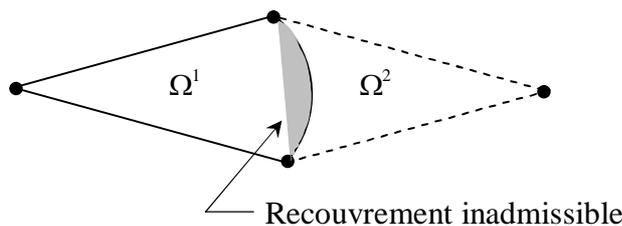
La discrétisation du domaine  $\Omega$  en éléments  $\Omega^e$  doit respecter les deux règles suivantes :

**b.1)** Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments.

Les frontières entre éléments peuvent être des points, des courbes ou des surfaces :



**Figure VII.2** Les divers types de frontières entre les éléments.



b.2) l'ensemble de tous les éléments  $\Omega^e$  doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine réel donné  $\Omega$ . Nous excluons en particulier les « trous » entre éléments :

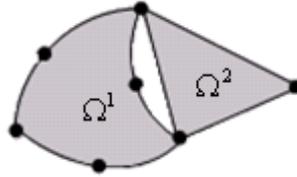


Figure VII.3 Trou inadmissible entre les éléments.

Lorsque la frontière du domaine  $\Omega$  est constituée par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur est inévitable. Cette erreur est appelée erreur de discrétisation géométrique. Elle peut être réduite en diminuant la taille des éléments, ou en utilisant des éléments à frontières plus complexes :

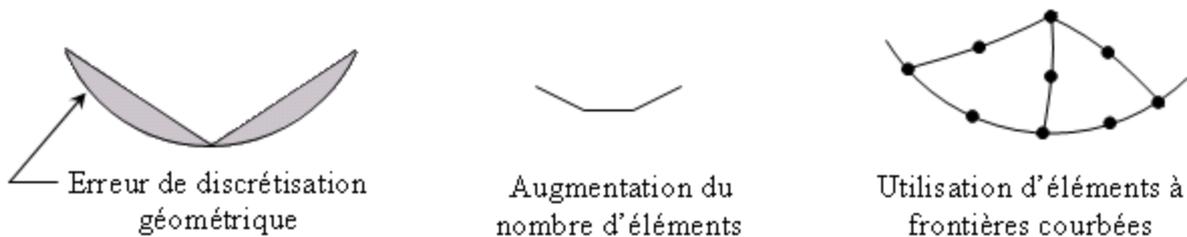


Figure VII.4 Minimisation de l'erreur de discrétisation géométrique.

f) *Formes d'éléments classiques*

Nous présentons les formes de quelques éléments classiques correspondant à des domaines à une, deux ou trois dimensions.

Chaque élément est identifié par un nom précisant sa forme ainsi que par le type de frontière. De plus, nous donnons le nombre de nœuds géométriques nécessaires pour le définir. Il faut que le nombre de nœuds géométriques sur chaque frontière soit compatible avec la forme de la courbe qui constitue la dite frontière.

c.1) **Éléments à une dimension**

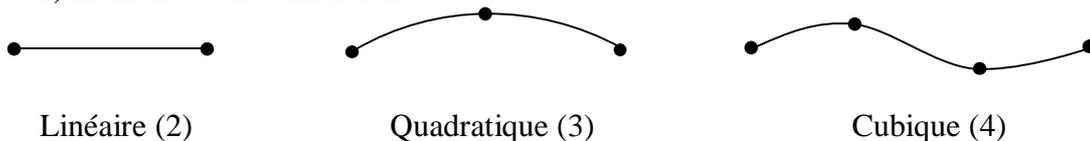
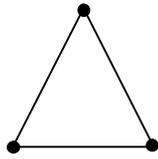


Figure VII.5 Éléments à une dimension.

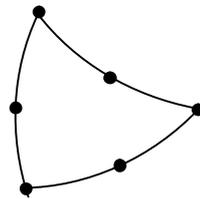
**c.2) Éléments à deux dimensions**

Ce sont des triangles ou quadrilatères dont les cotés sont des courbes polynomiales du 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> degré.

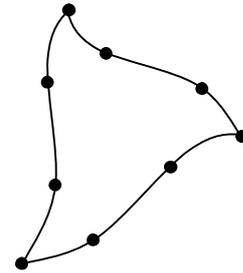
*Éléments triangulaires*



Linéaire (3)



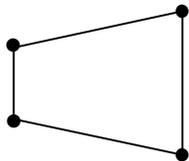
Quadratique (6)



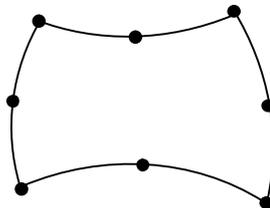
Cubique (9)

**Figure VII.6** Éléments triangulaires.

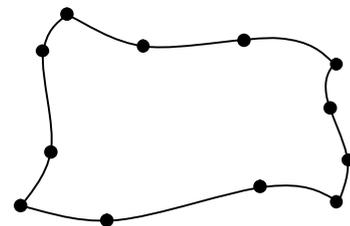
*Éléments quadrilatéraux*



Linéaire (4)



Quadratique (8)



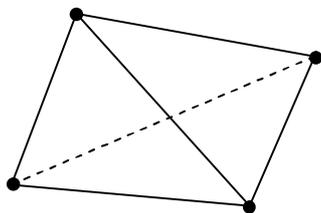
Cubique (12)

**Figure VII.7** Éléments quadrilatéraux.

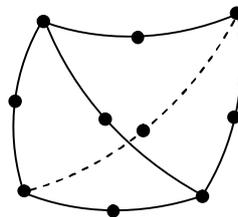
**c.3) Éléments à trois dimensions**

Ce sont des tétraèdres, hexaèdres ou prismes dont les faces sont des surfaces polynomiales du 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> degré.

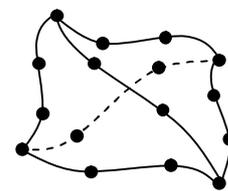
*Éléments tétraédriques*



Linéaire (4)



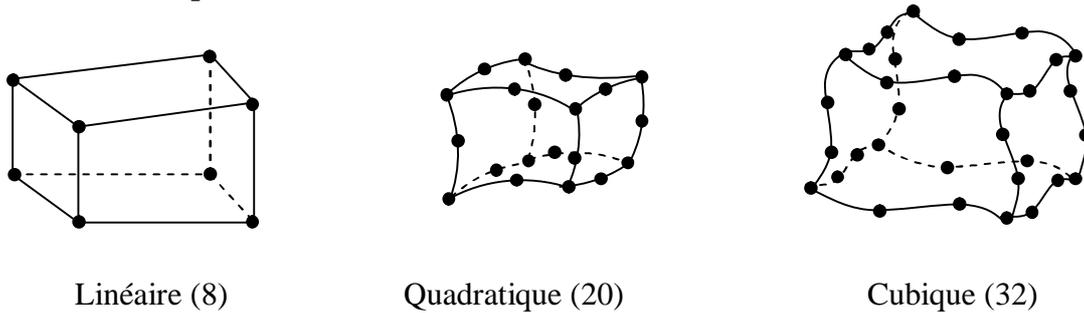
Quadratique (10)



Cubique (16)

**Figure VII.8** Éléments tétraédriques.

*Eléments hexaédriques*



**Figure VII.9** Eléments hexaédriques

**VII.4.3 Approximation nodale**

Nous avons vu précédemment qu'on pouvait approximer une fonction inconnue,  $u_{ex}$ , par une fonction approchée  $u$ , construite sur la base de fonctions polynomiales ou trigonométriques linéairement indépendantes tel que :  $e(x) = u(x) - u_{ex}(x)$  soit assez petite pour l'objectif visé.

La fonction approchée  $U$  est plus souvent linéaire en  $a_i$  :

$$u(x) = P_1(x)a_1 + P_2(x)a_2 + \dots + P_n(x)a_n$$

Sous forme matricielle :

$$u(x) = \langle P_1(x) \quad P_2(x) \dots P_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle P \rangle \{a\} \tag{VII.8}$$

Où :

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  sont des fonctions linéairement indépendantes, elles s'appellent les fonctions de base ou la base fonctionnelle.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  sont les paramètres de l'approximation, appelés coordonnées généralisées ou paramètres généraux de l'approximation. Ils n'ont pas en général de sens physique. Cependant, nous pouvons leur en donner un.

Pour cela, faisons coïncider en  $n$  points  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , appelés nœuds, la valeur de la fonction approchée  $u(x)$  avec la fonction exacte  $u_{ex}(x)$ .

De la relation (8), nous pouvons écrire alors :

$$\begin{aligned}
 u(x_1) &= P_1(x_1)a_1 + P_2(x_1)a_2 + \dots + P_n(x_1)a_n = u_{ex}(x_1) = u_1 \\
 u(x_2) &= P_1(x_2)a_1 + P_2(x_2)a_2 + \dots + P_n(x_2)a_n = u_{ex}(x_2) = u_2 \\
 &\dots \\
 u(x_n) &= P_1(x_n)a_1 + P_2(x_n)a_2 + \dots + P_n(x_n)a_n = u_{ex}(x_n) = u_n
 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(x_1) & P_2(x_1) & \dots & P_n(x_1) \\ P_1(x_2) & P_2(x_2) & \dots & P_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1(x_n) & P_2(x_n) & \dots & P_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

De façon plus compacte :

$$\{u_n\} = [P_n] \{a\} \tag{VII.9}$$

Soit, en inversant la matrice nodale  $[P_n]$  d'ordre n, si elle n'est pas singulière :

$$\{a\} = [P_n]^{-1} \{u_n\} \tag{VII.10}$$

En remplaçons (II.10) dans (II.8) :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \langle P(x) \rangle [P_n]^{-1} \{u_n\} \\
 u(x) &= \langle N(x) \rangle \{u_n\}
 \end{aligned} \tag{VII.11}$$

avec :

$$\langle N(x) \rangle = \langle P(x) \rangle [P_n]^{-1} \tag{VII.12}$$

Et : Alors :  $\underline{u(x) = \langle N(x) \rangle \{u_n\}}$  (IV.13)

On appelle ce type d'approximation : approximation nodale. Les paramètres  $u_i$  sont les variables nodales et les fonctions  $N_i(x)$  sont les fonctions d'interpolation nodales ou fonctions de forme.

La relation (IV.13) définit une relation nodale. Elle nous donne une forme approchée de  $u_{ex}(x)$  en fonction de valeurs discrètes de cette dernière :

$$u_{ex}(x) = \langle N(x) \rangle \{u_n\}$$

**Remarque**

- Comme  $u(x_i) = u_{ex}(x_i) = u_i$ , les fonctions :

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- L'erreur d'approximation s'annule en tous les points  $x_i$  :  $e(x_i) = 0$ .

### VII.5 Analyse globale : assemblage

La matrice de rigidité élémentaire est :

$$[k] = \int_v [B]^T [D] [B] dv \quad (\text{VII.14})$$

Etant donné la matrice de rigidité élémentaire (VII.14), l'assemblage comporte alors deux étapes :

- Construction de la matrice étendue  $[K^e]$  et du vecteur étendu  $[F^e]$  de chaque élément,
- Addition des matrices et des vecteurs étendus.

Ces deux étapes sont en pratique effectuées simultanément pour éviter de construire explicitement  $[K^e]$  et  $[F^e]$ .

Les règles d'assemblages peuvent être consultées dans tous les livres qui se rapportent à la méthode des éléments finis et ils sont de nos jours, nombreux.

*CHAPITRE VIII*

***PRESENTATION DU CODE  
DE CALCUL CESAR-LCPC***

## CHAPITRE VIII

## PRESENTATION DU CODE DE CALCUL CESAR-LCPC

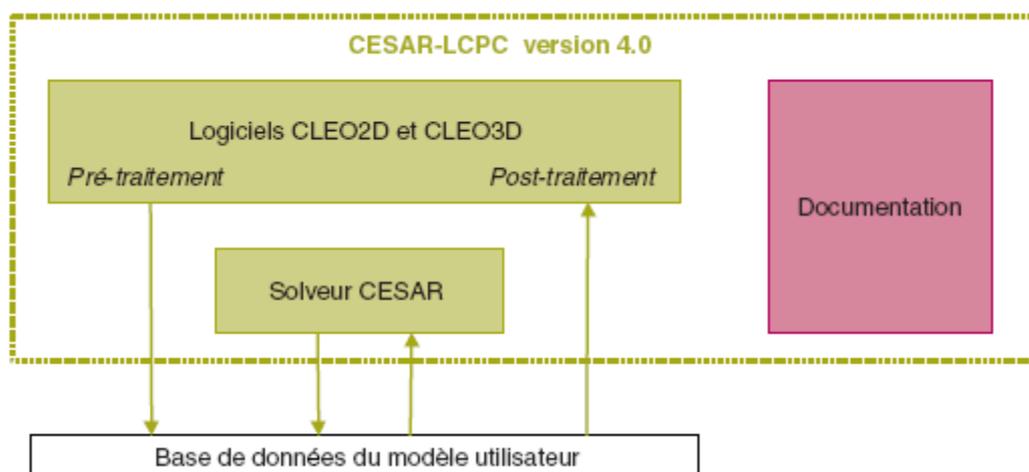
### VIII.1 INTRODUCTION

CESAR-LCPC est un progiciel général de calcul, principalement fondé sur la méthode des éléments finis, et disposant de ses propres fonctionnalités de pré- et de post-traitement. Ce progiciel est particulièrement adapté à la résolution des problèmes du génie civil et de l'environnement : calcul des structures, mécanique des sols et des roches, thermique, hydrogéologie, etc.

### VIII.2 PRESENTATION GENERALE DE CESAR-LCPC

#### VIII.2.1 Les composants de la version actuelle

CESAR-LCPC désigne l'ensemble formé par les logiciels de pré- et de post-traitement **CLEO2D** et **CLEO3D** (respectivement pour les modélisations bi- ou tridimensionnelles), par le solveur fondé sur la méthode des éléments finis **CESAR**, et par la documentation (figure VIII.1). Les différents programmes communiquent entre eux par l'intermédiaire d'une base de données propre à chaque modélisation réalisée par l'utilisateur.



**Figure VIII.1** Les composants de CESAR-LCPC version 4.0

Réaliser une modélisation avec CESAR–LCPC se traduit en général par l'enchaînement des étapes suivantes :

- a) Utilisation des fonctionnalités de pré-traitement des logiciels CLEO2D ou CLEO3D pour la génération des données du solveur CESAR (maillage et jeu de données) ;
- b) Lancement du solveur par éléments finis CESAR pour effectuer la résolution numérique du problème étudié ;
- c) Utilisation des fonctionnalités de post-traitement des logiciels CLEO2D ou CLEO3D pour l'interprétation des résultats fournis par le solveur CESAR.

### ***VIII.2.2 Grands domaines d'application et types d'ouvrages traités***

Si son caractère de code de calcul généraliste permet d'utiliser CESAR-LCPC dans un grand nombre de problèmes physiques (mécanique, diffusion, problèmes couplés), ses principaux domaines d'application sont toutefois liés au génie civil et à l'environnement. Outil de dimensionnement et de contrôles, CESAR-LCPC est également mis en œuvre pour des expertises, et en particulier pour expliquer des désordres et simuler différents modes de réparation. Les types d'ouvrages les plus concernés sont présentés ci-dessous par domaine.

#### ***Mécanique des sols et des roches***

- Tunnels et cavités souterraines, avec phasage complexe et présence d'eau éventuelle.
- Soutènement (parois, murs, rideaux de palplanches)
- Fondations complexes (risque de tassements différentiels)
- Interaction sol-structure
- Interactions entre ouvrages (par exemple tunnels)
- Barrages, remblais sur sols mous (dissipation de surpressions interstitielles)

#### ***Structures et ouvrages d'art***

- Ponts de tous types (calculs statiques et dynamiques, effet du vent)
- Pylônes, bâtiments (dont monuments anciens)
- Simulation de dispositifs expérimentaux
- Durabilité (effet de la réaction alcali-granulat).

### *Mécanique des chaussées*

Si l'ouvrage est une structure de chaussée souple ou rigide, les problèmes abordés sont variés :

- Effet d'une charge fixe ou roulante
- Effet d'un gradient thermique
- Décollement de dalles
- Influence de la présence de goujons
- Simulation de l'orniérage

### *Milieu urbain et environnement*

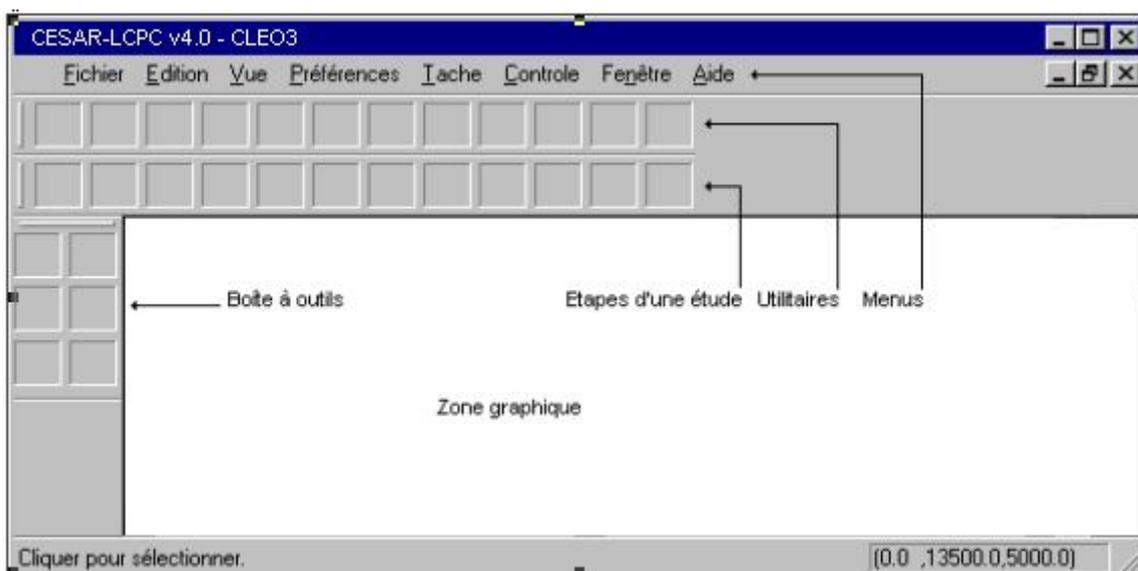
- Effet mécanique de travaux sur le bâti existant (vibration, tassements)
- Propagation d'ondes sismiques ou sonores
- Influence d'un ouvrage sur un aquifère
- Transport d'un soluté par un aquifère
- Stockage de déchets avec dissipation de chaleur et présence d'eau (couplage thermo-hydro-mécanique).

## **VIII.3 PRINCIPES ET ORGANISATION D'UNE ETUDE CESAR-LCPC**

### **VIII.3.1 L'interface**

L'interface se partage comme suit :

- Les menus : Ils regroupent l'ensemble des fonctionnalités du logiciel
- Les utilitaires : Il s'agit des icônes permettant d'effectuer les actions courantes comme sauvegarder, imprimer, manipuler, sélectionner, configurer...
- Les étapes d'une étude : Il s'agit des icônes qui permettent de basculer d'une étape de l'étude à une autre
- La boîte à outils : Il s'agit des outils nécessaires à l'étape de l'étude dans laquelle vous vous situez. Cette boîte adapte son contenu automatiquement
- La zone graphique : Il s'agit de la zone dans laquelle s'affiche la structure



La partie "clé" de l'interface est la barre des étapes d'une étude.

Chaque bouton correspond à une étape du déroulement d'une étude. De gauche à droite nous avons : construction du modèle, initialisation du modèle, initialisation des conditions aux limites, édition des cas de chargement, lancement des calculs, exploitation des résultats.



Début —————> Arrivée

**Nota :** par la suite, les boîtes à outils présentées sont celle de CLEO3, plus complètes que celles de CLEO2.

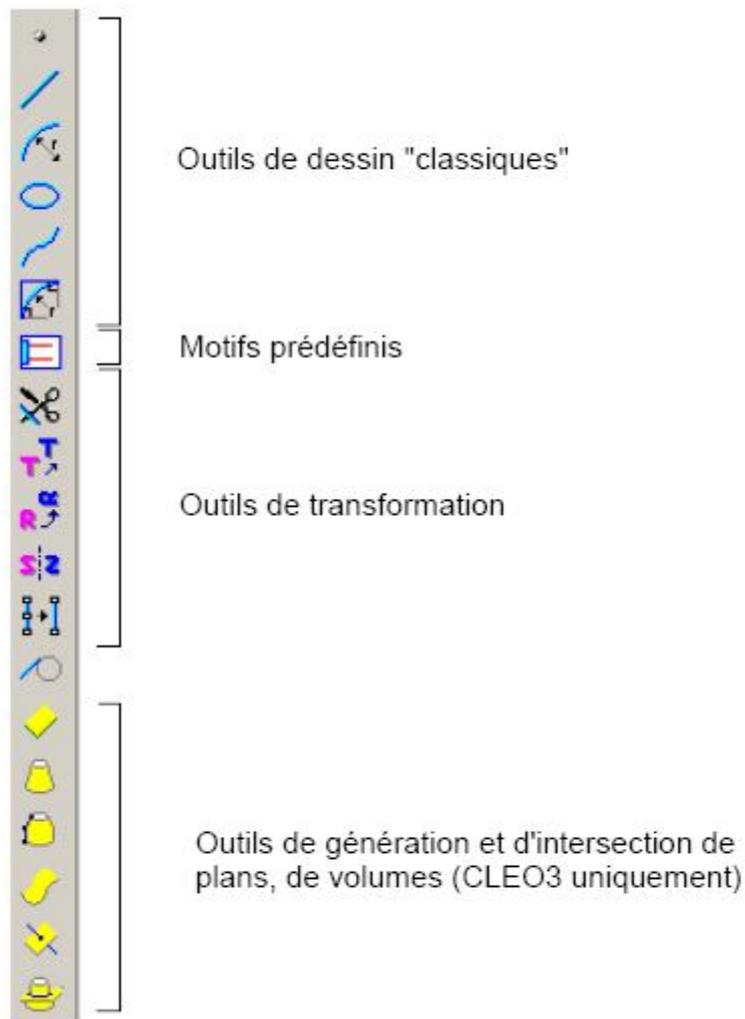
Les étapes d'une étude CESAR-LCPC v4.0

### a) Etape 1 : Création du maillage : de la géométrie au maillage



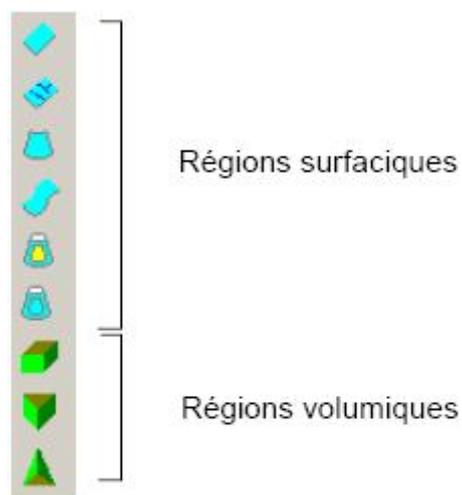
## Géométrie

Dans cette étape, la boîte à outils ci dessous vous est automatiquement proposée :



### Régions

Dans cette étape, la boîte à outils ci-dessous vous est automatiquement proposée :



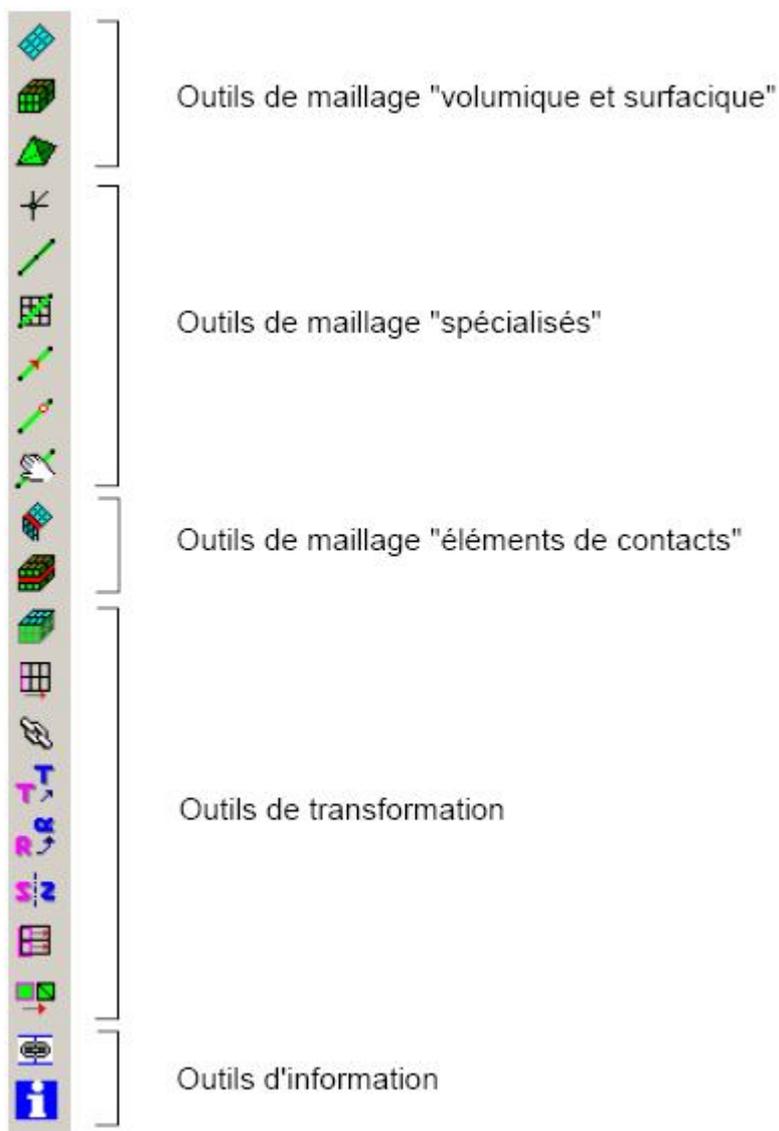
### Découpage

Dans cette étape, la boîte à outils ci dessous vous est automatiquement proposée :



### Maillage

Dans cette étape, la boîte à outils ci dessous vous est automatiquement proposée :



### b) Etape 2 : Initialisation du modèle et propriétés



Etape 2

Dans cette étape, vous devrez initialiser le modèle dit actif ou courant. A cette fin, vous avez à disposition un menu déroulant contenant l'ensemble des modèles préalablement créés.

Ce choix est nécessaire afin d'identifier le cas de calcul défini dans les étapes 3 à 6 ou celui pour lequel on exploite les résultats dans l'étape " Exploitation des résultats".

Les étapes « précédentes » nous ont permis de définir ce que nous avons convenu d'appeler un maillage « neutre ». Sur la base d'un même maillage neutre, il est possible de définir plusieurs « modèles ». A titre d'exemple, il sera ainsi possible de créer un premier modèle permettant la résolution d'un problème de diffusion thermique puis un autre modèle permettant l'analyse d'un comportement mécanique.

Le bouton "Propriétés" active un module de définition des propriétés (matériau, géométrie...) pour l'ensemble des éléments finis créés dans le maillage et en fonction du modèle choisi.

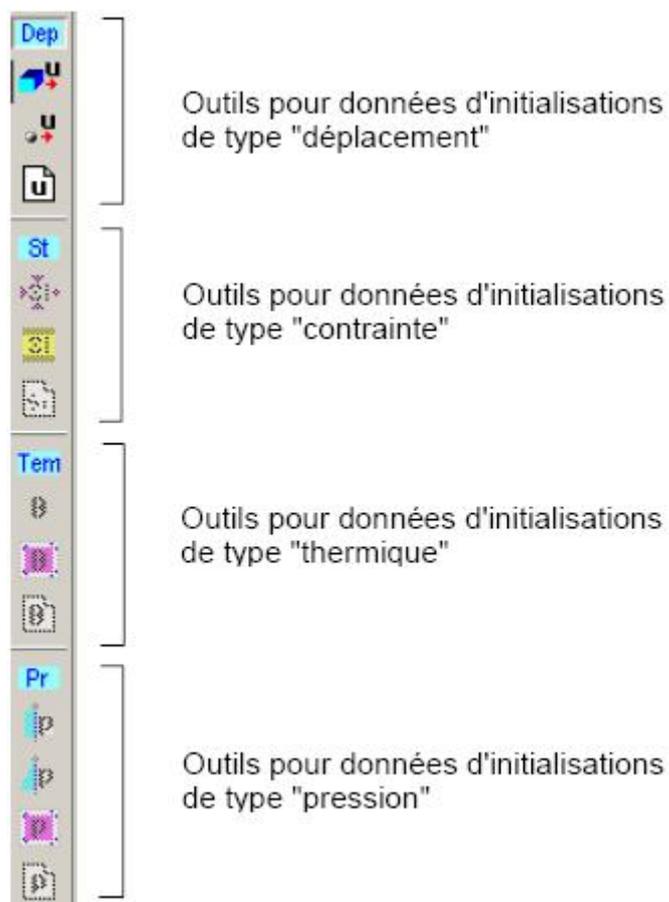
### c) Etape 3 : Données d'initialisation



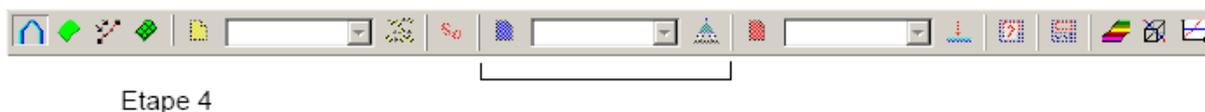
Etape 3

Le fonctionnement de certains modules de calcul réclame la définition de « valeurs initiales ». Dans le cas d'un module de calcul permettant par exemple la résolution d'un problème dynamique, il conviendra ainsi de définir au minimum les déplacements et vitesses initiaux associés à chacun des noeuds du modèle.

Exemple de boîte à outils pour les données d'initialisations d'un problème couplé



#### d) Etape 4 : "Conditions aux limites"



L'activation de cette option entraîne l'activation d'un module permettant de définir les caractéristiques de l'ensemble de conditions aux limites courant (nouveau ou non) puis l'affichage d'une boîte à outils permettant la définition des conditions de charge pour le cas courant.

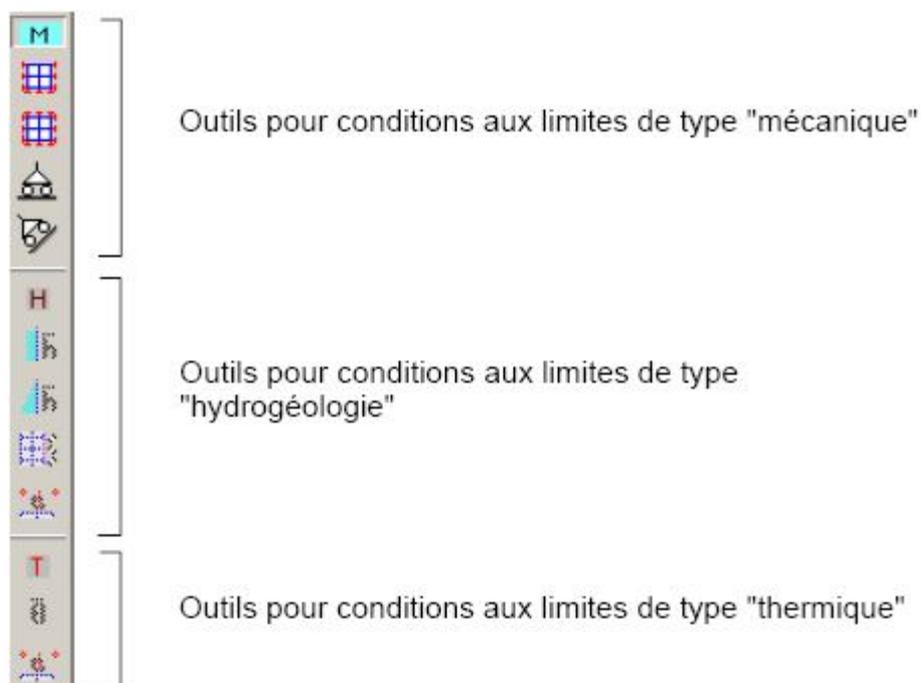
Dans le cas particulier où le domaine d'application associé au modèle considéré est de type « Problèmes couplés », il convient de définir des conditions sur plusieurs types de paramètres correspondant chacun à un « problème physique élémentaire ».

A titre d'exemple, la résolution d'un problème de consolidation (Module CSLI) suppose la prise en compte des deux problèmes physiques élémentaires « Mécanique » et «

Hydrogéologie ». Il nous faudra ainsi imposer des conditions aux limites sur les paramètres « Déplacements » et « Charges ».

Dans ce cas là, la barre d'outils "Conditions aux limites" s'adapte automatiquement au problème traité.

Exemple de boîte à outils pour les conditions aux limites d'un problème couplé



#### e) Etape 5 : Cas de charges



Etape 5

L'activation de cette option entraîne l'ouverture d'une boîte de dialogue pour définir le cas de charge courant (nouveau ou non) puis l'affichage d'une boîte à outils permettant la définition des conditions de charge pour le cas courant.

Dans le cas particulier où le domaine d'application associé au modèle considéré est de type « Problèmes couplés », il convient de définir des conditions de charge correspondant chacune à un « problème physique élémentaire ». A titre d'exemple, la résolution d'un problème de consolidation (Module CSLI) suppose la prise en compte des deux problèmes physiques élémentaires « Mécanique » et « Hydrogéologie ».



### g) Etape 7 : Exploitation des résultats



Etape 7

Cette étape lance le calcul. Avant début du calcul même, le programme "renumérote" le maillage et crée un fichier de données entièrement formaté.

### h) Etape 8 : Exploitation des résultats



Etape 8

Dans cette étape, vous exploitez les résultats obtenus pour le cas de calcul actif. La boîte à outils mise à votre disposition dépendra donc de son type.

*CHAPITRE IX*

***CALCUL PAR APPROCHE  
PROBABILISTE***

## CHAPITRE IX

## **ANALYSE PROBABILISTE DU COMPORTEMENT DES MURS DE SOUTÈNEMENT**

### **IX.1 INTRODUCTION**

Les modèles numériques disponibles pour l'étude classique de la stabilité des murs de soutènement utilisent comme données les distributions supposées exactes des propriétés des sols. Malheureusement, les techniques d'exploration courantes ne peuvent fournir ce type d'information déterministe. L'interprétation la plus réaliste que l'on peut faire des résultats du programme d'exploration d'un site est en terme de densité de probabilité pour chacune des propriétés de sol, et de structure de corrélation spatiale, de dérive spatiale, et de structure d'autocorrection, si elles existent, pour les différentes propriétés du sol.

Dans la présente étude, le problème est posé en termes probabilistes et un modèle numérique fondé sur les techniques de simulation de Monte Carlo est proposé pour sa résolution. Par la même occasion, nous montrons l'intérêt que peut présenter l'approche de Monte Carlo en tant qu'outil de résolution de certains problèmes où n'interviennent qu'un nombre fini de variables aléatoires.

Les variables aléatoires retenues comme paramètres de calcul sont, dans notre cas, la déformabilité  $E$  et l'angle de frottement interne  $\varphi$ , et la méthode numérique est celle du programme de calcul par éléments finis, CESAR-LCPC.

### **IX.2 METHODOLOGIE**

#### ***IX.2.1 Introduction***

Toute approche probabiliste nécessite une méthode numérique et une méthode statistique :

- La méthode numérique est ici la méthode des éléments finis ; nous avons utilisé le logiciel CESAR-LCPC ;
- La méthode statistique est la technique de simulation de Monte Carlo.

### **IX.2.2 Programme de calcul en éléments finis**

Cette étude a été effectuée en utilisant le progiciel CESAR-LCPC, destiné à la résolution des problèmes du génie civil et de l'environnement par la méthode des éléments finis.

Ce programme de calcul, dont les modalités d'application sont développées dans le chapitre VIII, permet le calcul du comportement des murs de soutènement (calcul des déplacements et contraintes).

### **IX.2.3 Procédure de calcul répétitif et d'analyse statistique des résultats**

#### **IX.2.3.1 Généralités**

L'analyse probabiliste de la stabilité des murs de soutènement par la méthode de Monte Carlo développée dans cette étude a comporté les étapes suivantes :

- 1) Choix des paramètres de calcul
- 2) Analyse statistique de ces paramètres de calcul à partir d'essais de laboratoire et d'essais en place (moyenne, variance, histogramme, fonction de distribution)
- 3) Choix des paramètres et du plan de charge
- 4) Discrétisation du sol en éléments
- 5) Génération des valeurs aléatoires des paramètres de base et attribution d'une valeur aléatoire à chaque zone d'éléments
- 6) Détermination de la solution du problème (contraintes et déplacements) en chaque point des lignes de calcul déterminées (derrière le mur et à la base du mur)
- 7) Répétition des étapes (5) et (6) pour obtenir plusieurs solutions
- 8) Analyse statistique des solutions obtenues : moyenne, variance, histogramme, fonction de distribution

Le schéma de la figure IX.1 résume les différentes étapes.

#### **IX.2.3.2 Choix des paramètres de calcul**

Les propriétés de calcul de la stabilité des murs de soutènement retenues comme paramètres de calcul sont la déformabilité  $E$  et l'angle de frottement interne  $\varphi$ .

Ce choix est dicté par la variabilité importante de ces deux paramètres, et leur influence, soulignée par de nombreux auteurs, sur la solution déterministe.

### IX.2.3.3 Analyse statistique des paramètres E et $\varphi$

L'analyse statistique des valeurs retenues pour chacun des paramètres a donné les résultats suivants :

- Module d'élasticité E :
  - Moyenne  $m_E$  : 90 MPa
  - Coefficient de variation  $CV(E)=10\%$
- Angle de frottement interne  $\varphi$  :
  - Moyenne  $m_\varphi$  :  $30^\circ$
  - Coefficient de variation  $CV(\varphi)=10\%$

Pour chaque propriété du sol retenue comme paramètre de calcul, la loi de distribution normale semble être la plus représentative. Ce choix fait l'unanimité auprès de nombreux auteurs.

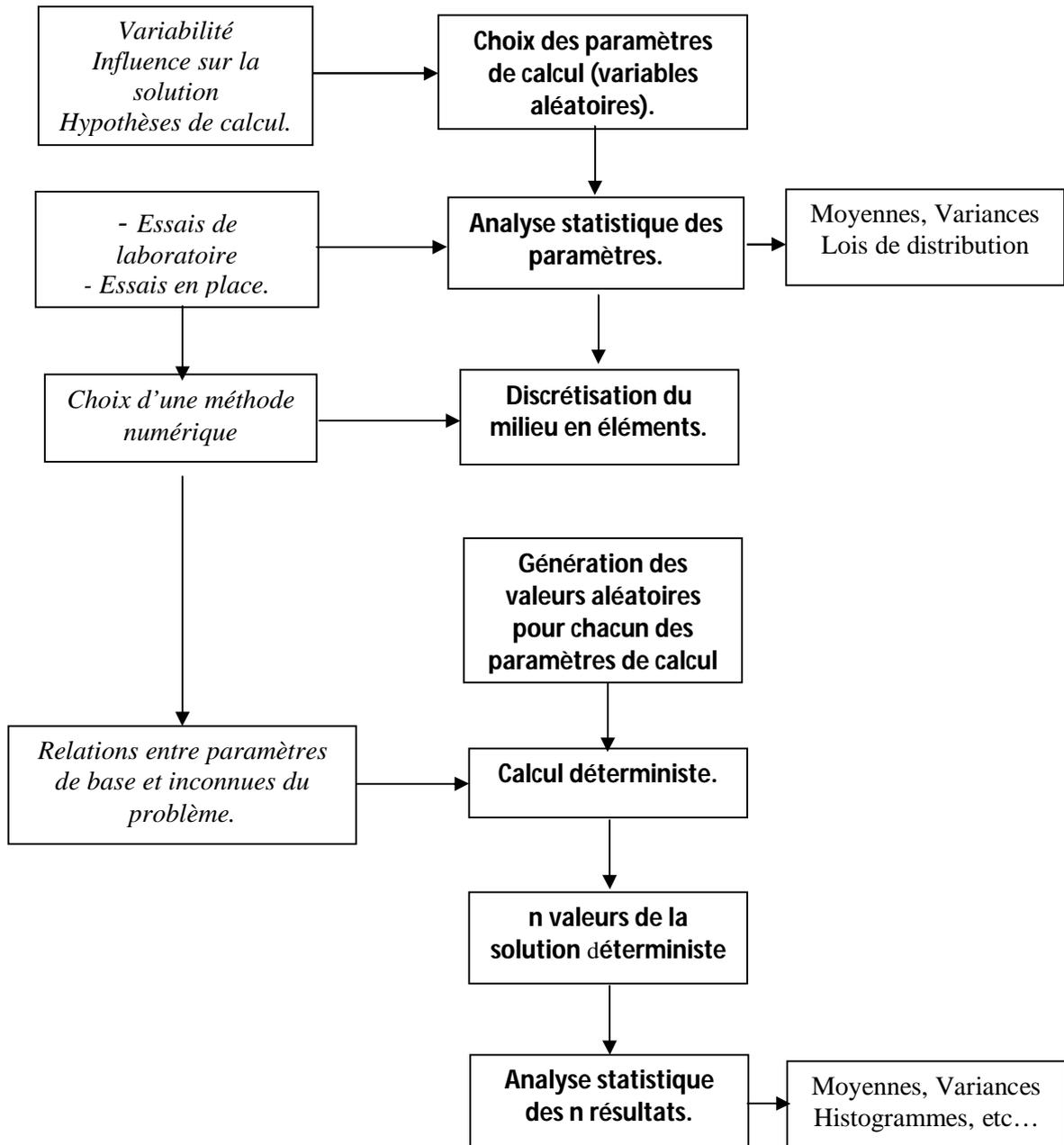
### IX.2.4 Déroulement de la procédure de calcul statistique

La procédure développée dans cette étude pour l'analyse statistique du problème de la stabilité des murs de soutènement a trois objectifs :

- Tenir compte de la variabilité naturelle des paramètres de calcul dans le sol,
- Effectuer les calculs de stabilité des murs de soutènement de façon automatique,
- Faciliter l'analyse des résultats.

Le déroulement de cette procédure de calcul comporte trois parties bien distinctes :

- 1) Génération des valeurs aléatoires des paramètres E et  $\varphi$  (excel) ;
- 2) Réalisation de n (100) calculs nécessaires pour une bonne estimation de la solution du problème ;
- 3) Exploitation des résultats.



**Figure IX.1** Schéma montrant les différentes étapes nécessaires à la détermination de la solution probabiliste

### IX.3 SIMULATION NUMERIQUE

#### IX.3.1 Présentation du cas étudié

On considère un mur de soutènement poids, de hauteur  $h = 6\text{ m}$ , large de  $0,5\text{ m}$  en tête et de  $2\text{ m}$  à sa base (figure IX.2), reposant directement sur un sol. Le remblai est soumis à une charge verticale. Dans notre étude on s'intéresse à l'analyse de l'effet de la variabilité des paramètres de sol sur la stabilité des murs de soutènement.

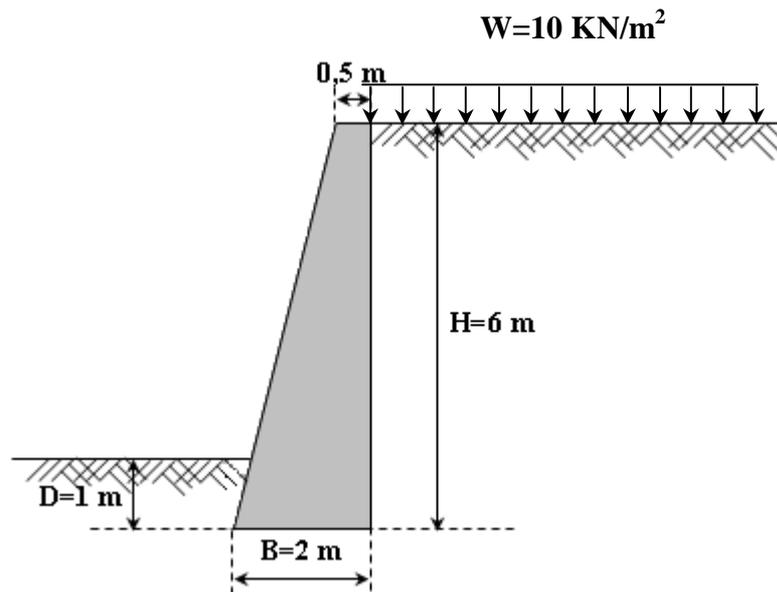


Figure IX.2 Présentation du mur de soutènement poids étudié.

#### IX.4 HYPOTHESES DE CALCULS

Le modèle numérique de l'ouvrage est une représentation simplifiée de la réalité. Les simplifications nécessaires concernent :

- Les diverses interactions sol-structures et sol - sol
- La description du comportement des matériaux (milieu continu en élasticité parfaite).

Le tableau IX.1 regroupe l'ensemble des aspects à prendre en compte pour le calcul en éléments finis et les options de modélisation retenues.

Tableau IX.1 Hypothèse de calcul

<b>Réalité (ouvrage, environnement)</b>	<b>Modèle mécanique et numérique (hypothèses de calcul)</b>
<b>Géométrie de l'ouvrage :</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tridimensionnelle</li> <li>• Stratification.</li> </ul>	Le mur est suffisamment long pour que le calcul soit réalisé en déformation plane.
<b>Matériaux :</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sol</li> <li>• Maçonnerie</li> </ul>	A l'échelle du modèle, la maçonnerie est assimilée à un milieu continu, homogène et isotrope. La résistance de la maçonnerie est bien supérieure à celle du sol, son comportement est supposé élastique linéaire et isotrope. En revanche le sol a un comportement élastoplastique parfait

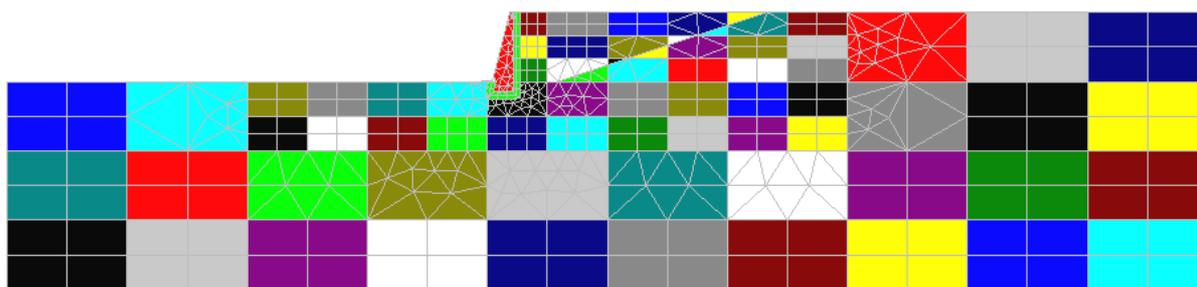
	(critère de Mohr-Coulomb). Le sol et le mur en maçonnerie sont décrits par des éléments finis de massif bidimensionnel (triangle et quadrilatères).
<i>Interactions : sol-structure</i>	Les interactions sol-structure sont décrites par un critère de frottement de Coulomb et une résistance à la traction nulle. Le modèle numérique comprend des éléments de contact.
<i>Etat initial</i>	Les contraintes effectives sont initialisées par un calcul de type poids volumique.
<i>Conditions aux limites</i>	Les déplacements horizontaux sur les frontières latérales sont nuls. Les déplacements verticaux à la base du modèle sont également nuls. Les limites sont placées suffisamment loin pour ne pas interférer avec les zones excavées.

## IX.5 MAILLAGE D'ÉLÉMENTS FINIS

Le maillage d'éléments finis réalisé est constitué de 1287 nœuds, de 502 éléments finis (489 éléments surfaciques et 13 éléments d'interface à 6 nœuds). Pour les besoins de calculs probabilistes, nous avons fait varier les paramètres de sol (variables aléatoires) dans 74 groupes d'éléments (figure IX.3). Ce maillage comprend toutes les zones de matériaux.

L'excavation est simulée par une technique numérique qui transforme la frontière de la zone à excaver en un bord libre par application de forces nodales équivalentes déterminées à partir de l'état des contraintes existant à la fin de l'étape précédente. Le calcul est réalisé avec le progiciel CESAR –LCPC (module TCNL : résolution des problèmes de contact entre solides élastoplastiques).

L'origine des coordonnées est prise en tête du mur (coté aval), l'axe vertical est orienté vers le haut et l'axe horizontal vers l'amont. La largeur totale du modèle a été fixée à 86 m (soit 36 m vers l'aval du mur et 50 m vers l'amont) et la hauteur totale à 20 m. Ces limites ont été choisies pour que les frontières extérieures du maillage n'aient pas d'influence sur les champs de déplacements et de contraintes à proximité de l'ouvrage. Les conditions aux limites sont les suivantes : le déplacement horizontal est nul sur les frontières latérales ( $x = -36 \text{ m}$  et  $x = + 50 \text{ m}$ ), ainsi que les déplacements horizontal et vertical sur la frontière inférieure ( $y = -20 \text{ m}$ ).



**Figure IX.3** Maillage réalisé pour l'étude du mur de soutènement poids  
(les 74 groupes d'éléments sont en couleur)

## IX.6 COMPORTEMENT DES MATERIAUX ET DES INTERFACES

Le sol est un matériau homogène, cohérent et frottant dont le comportement peut être représenté par un critère de Mohr-Coulomb, un potentiel plastique et une élasticité linéaire et isotrope. Les valeurs du module d'Young ( $E$ ), du coefficient de poisson ( $\nu$ ), de l'angle de frottement interne ( $\varphi$ ), de la cohésion ( $c$ ) et de l'angle de dilatance ( $\psi$ ) sont indiquées dans le tableau IX.2.

Les Variables aléatoires sont  $E$  et  $\varphi$  et leurs moyennes et coefficients de variations sont donnés dans le tableau IX.2.

**Tableau IX.2** Caractéristiques des matériaux pour la modélisation

Matériau	$\gamma$ kN / m <sup>3</sup>	E (MPa)	$\nu$	c (kPa)	$\varphi$ (°)	$\psi$ (°)
Sol	20	90 CV(E)=10%	0,3	30	30 CV( $\varphi$ )=10%	20
Maçonnerie	24	20000	0,2	/--	/--	/--

La valeur du coefficient de pression des terres au repos  $K_0$  est prise égale à 0,4286. Cette valeur correspond à l'initialisation des contraintes effectives par l'application du poids

volumique des terrains : en élasticité, la valeur de  $K_0$  est reliée à celle du coefficient de poisson  $\left( K_0 = \frac{\nu'}{1-\nu'} \right)$ .

Le mur de soutènement a été construit en maçonnerie. Par rapport au sol, son comportement peut être supposé élastique linéaire isotrope.

## IX.7 CAS DETERMINISTE

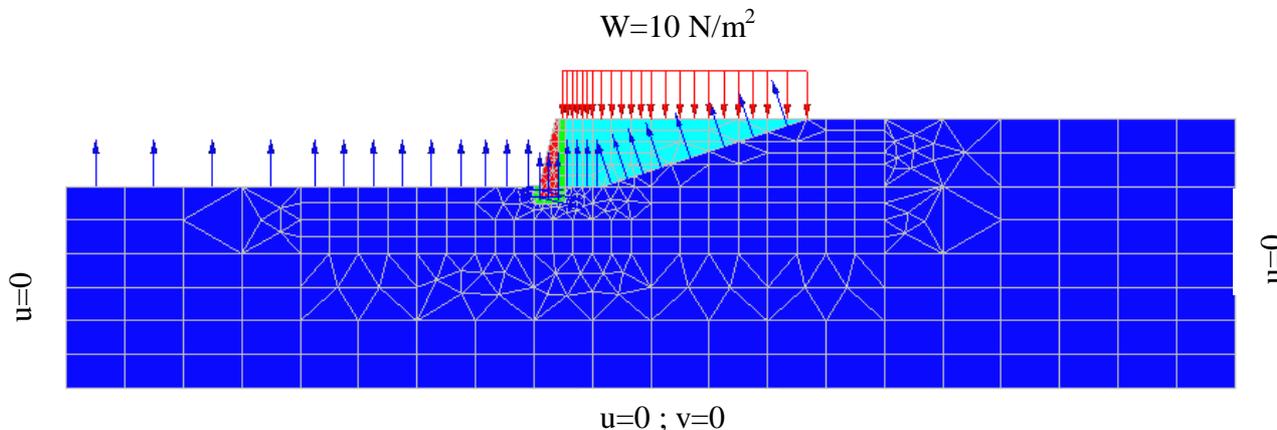
### IX.7.1 Présentation du cas étudié

Ce cas d'étude (déterministe) est utile et nécessaire pour estimer les résultats d'analyse probabiliste qui seront effectuées plus loin.

Nous nous proposons de calculer les déplacements et les contraintes horizontales derrière le mur ainsi que les déplacements et les contraintes verticales à la base du mur.

Le maillage est constitué de de 1287 nœuds et de 502 éléments finis (489 éléments surfaciques et 13 éléments d'interface à 6 nœuds).

Le maillage de ce cas déterministe est illustré par la figure ci-dessous (figure IX.4).



**Figure IX.4** Maillage et conditions aux limites.

### IX.7.2 Présentation des résultats

Nous avons choisi, dans ce cas d'étude, de déterminer les valeurs des déplacements ( $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ ) et des contraintes ( $\mathbf{snn}$ ), horizontales et verticales derrière et à la base du mur.

Les résultats sont donnés sous forme de courbes (figures de IX.5 à IX.15).

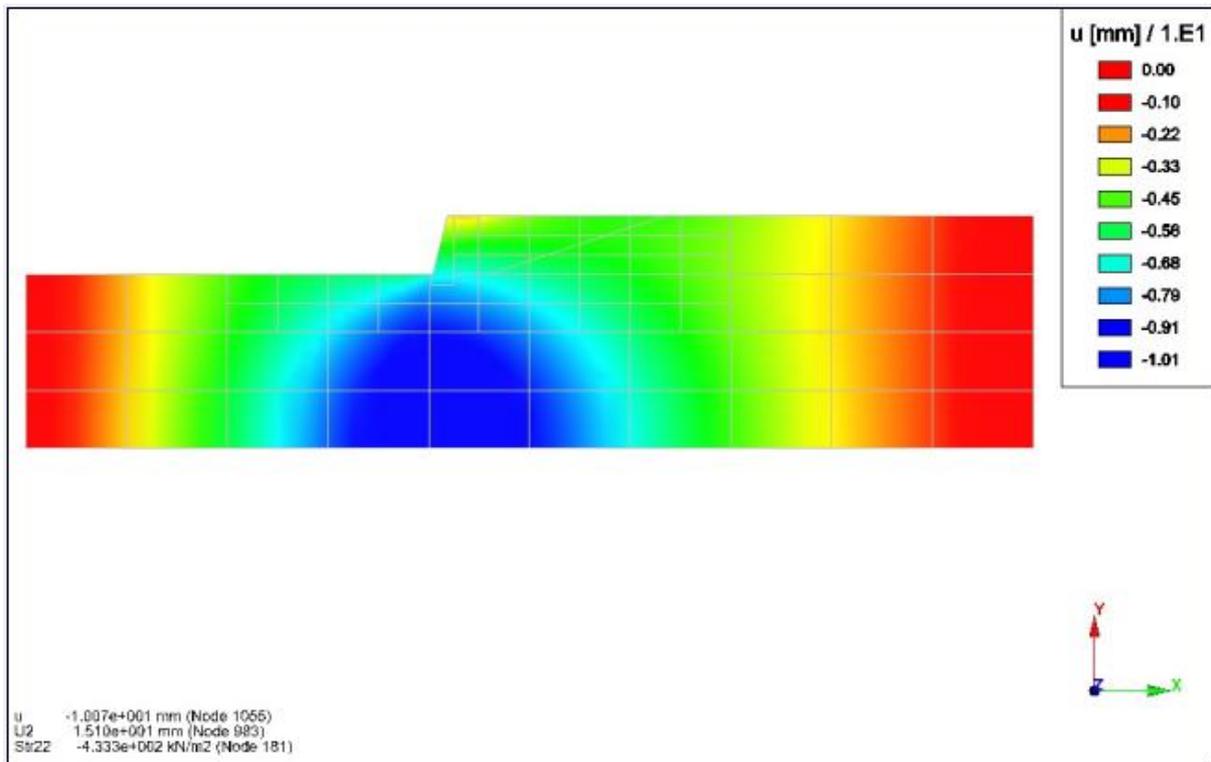


Figure IX.5 Isovaleurs des déplacements horizontaux «u »

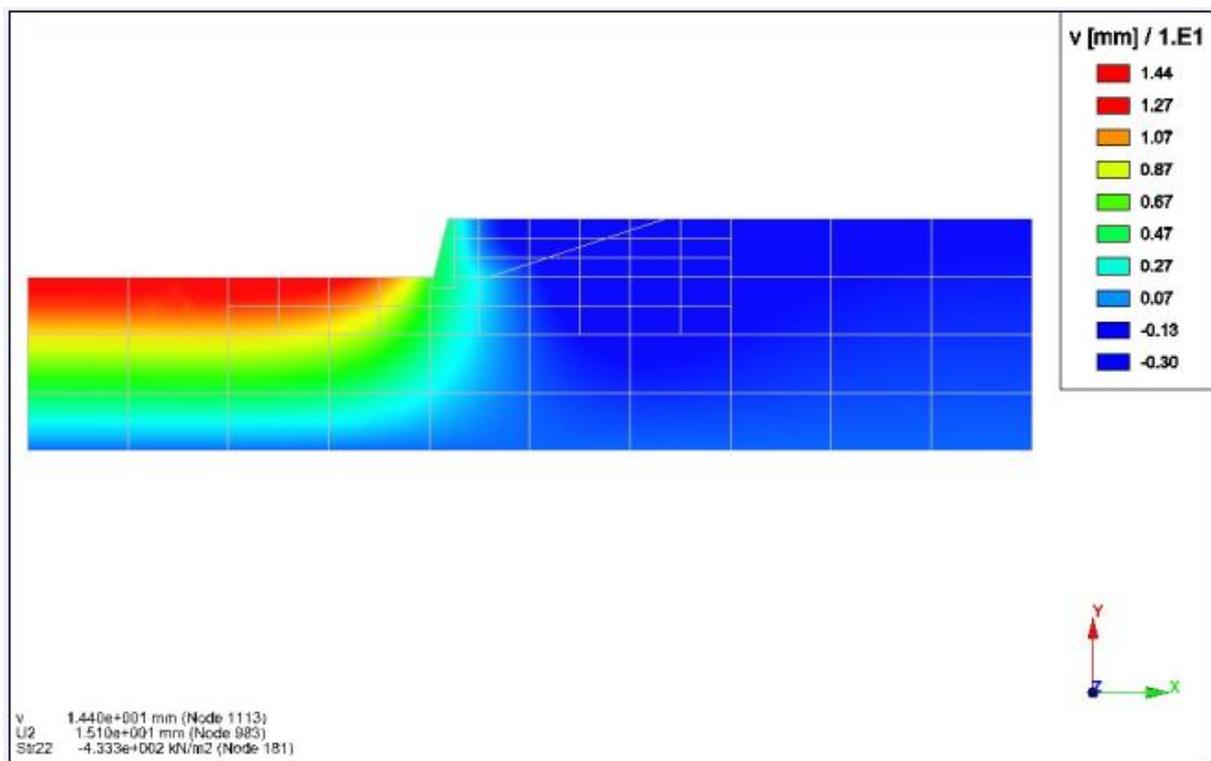


Figure IX.6 Isovaleurs des déplacements verticaux «v »

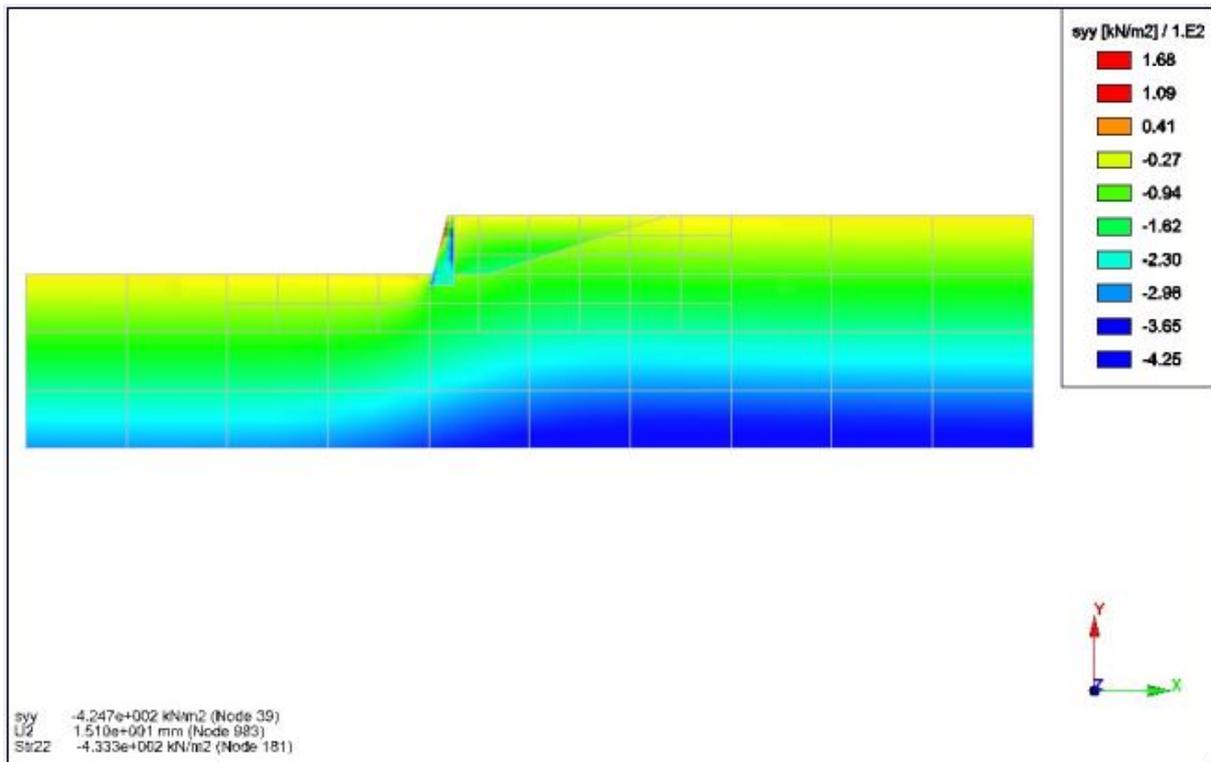


Figure IX.7 Isovaleurs des contraintes verticales «Syy »

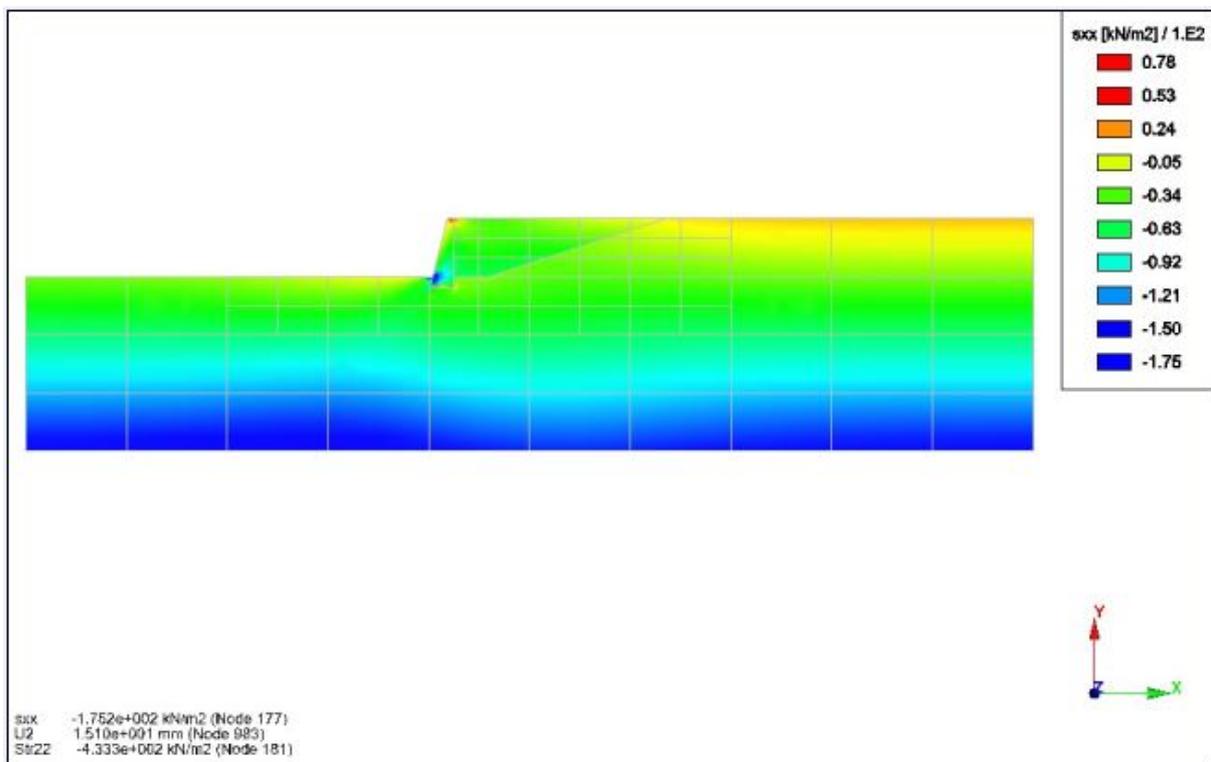
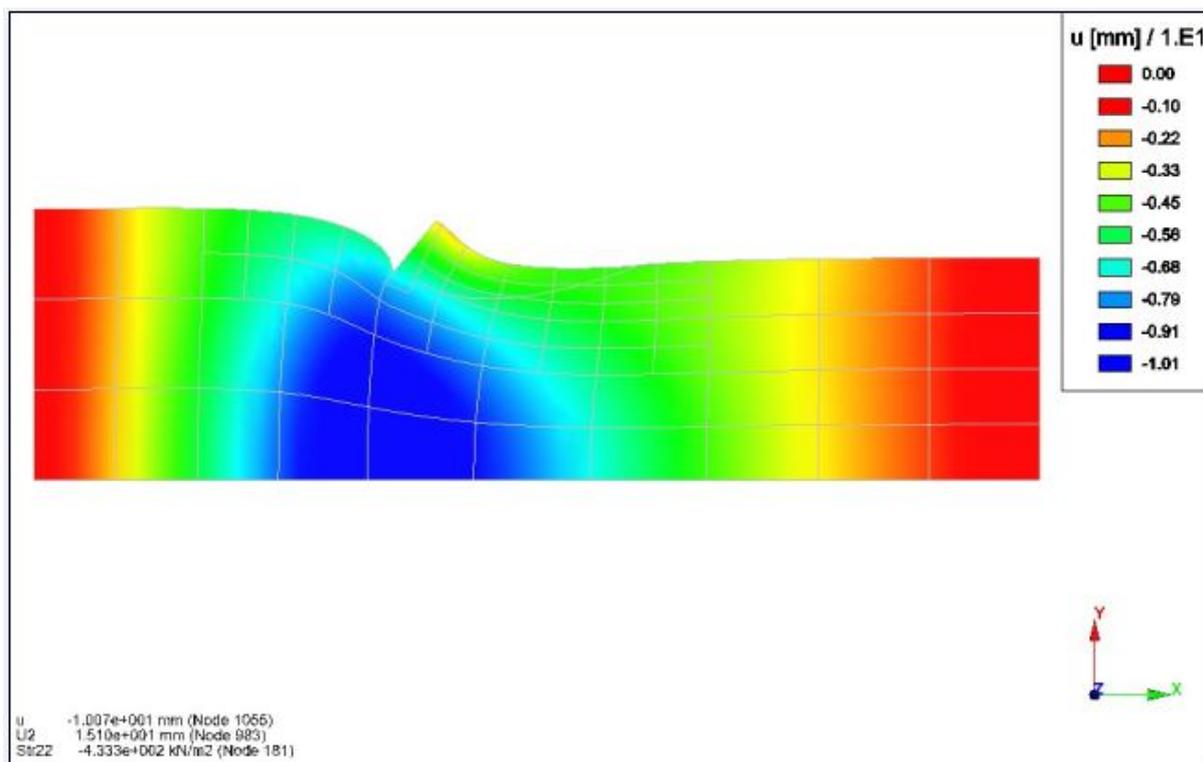


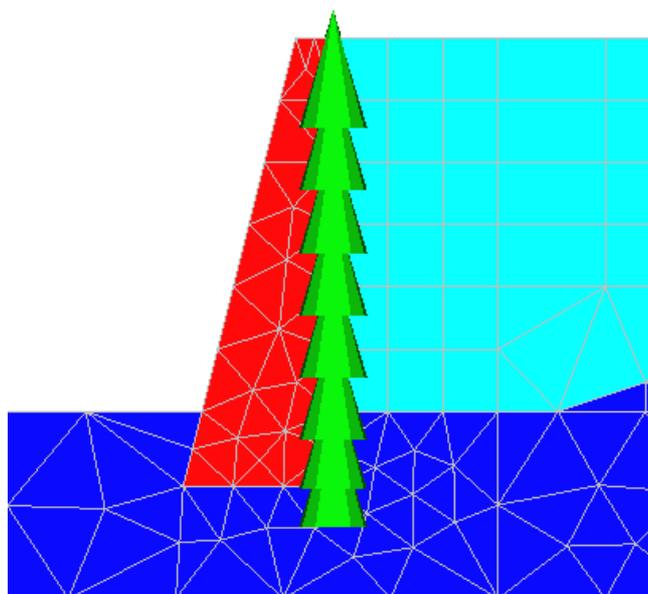
Figure IX.8 Isovaleurs des contraintes horizontales «Sxx »



**Figure IX.9** Déformé du modèle étudié

**a) Contraintes horizontales derrière le mur**

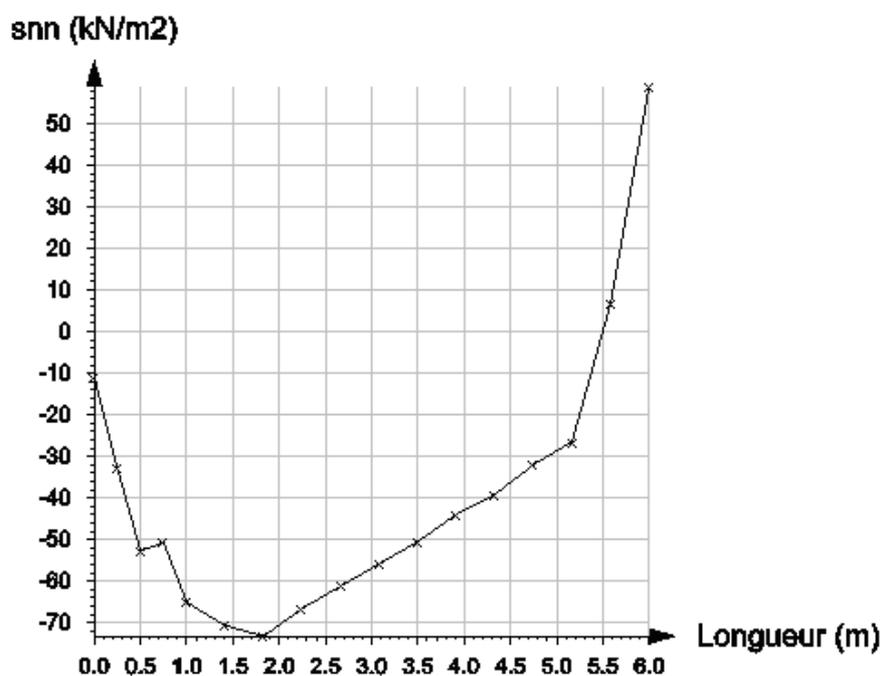
Les contraintes et les déplacements horizontaux derrière le mur sont calculés suivant une ligne de coupe longeant la face arrière du mur de bas jusqu'à la surface du terrain, comme montré sur la figure IX. 10



**Figure IX.10** Ligne de coupe derrière le mur.

**Tableau IX.3** Contraintes horizontales derrière le mur

Longueur (m)	0.000	0.250	0.500	0.750	1.000	1.417	1.833	2.250	2.667
<b>snn</b> (kN/m <sup>2</sup> )	-10.892	-32.851	-52.719	-50.724	-65.114	-70.724	-73.250	-66.541	-61.189
Longueur (m)	3.083	3.500	3.917	4.333	4.750	5.167	5.583	6.000	
<b>snn</b> (kN/m <sup>2</sup> )	-55.852	-50.448	-43.960	-39.128	-32.010	-26.475	6.811	59.134	

**Figure IX.11** Contraintes horizontales derrière le mur

b)

c) **Déplacements horizontaux derrière le mur****Tableau V.4** Déplacements horizontaux derrière le mur

Longueur (m)	6.000	5.583	5.167	4.750	4.333	3.917	3.500	3.083	2.667
<b>u</b> (mm)	-2.745	-3.111	-3.474	-3.830	-4.181	-4.526	-4.865	-5.201	-5.533
Longueur (m)	2.250	1.833	1.417	1.000	0.750	0.500	0.250	0.000	
<b>u</b> (mm)	-5.863	-6.191	-6.518	-6.845	-7.041	-7.237	-7.433	-7.628	

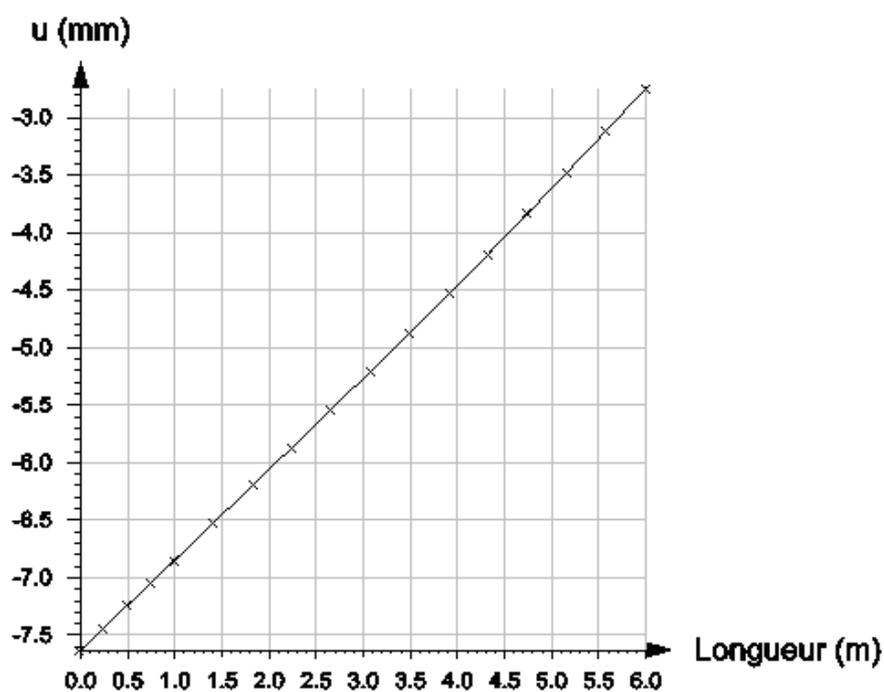


Figure IX.12 Déplacements horizontaux derrière le mur

#### d) Contraintes verticales à la base du mur

Les contraintes et les déplacements verticaux à la base du mur sont calculés suivant une ligne de coupe longeant la face base du mur de gauche à droite, comme montré sur la figure IX. 13.

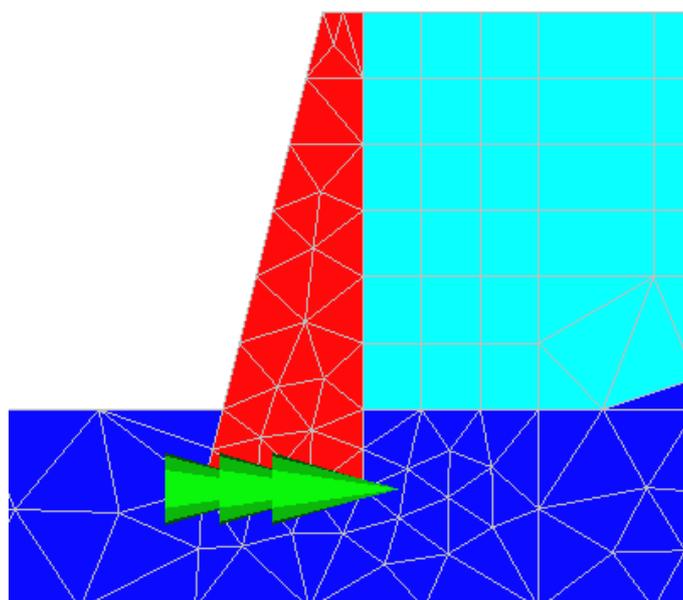
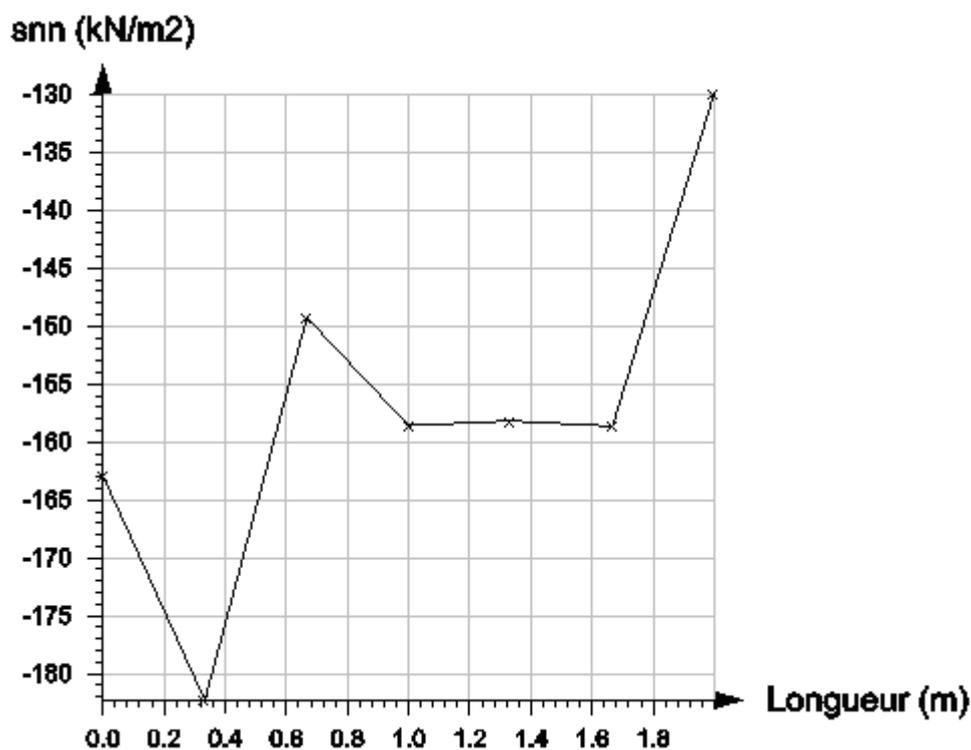


Figure IX.13 Ligne de coupe à la base du mur.

**Tableau IX.5** Contraintes verticales à la base du mur

Longueur (m)	0.000	0.333	0.667	1.000	1.333	1.667	2.000
snn (kN/m <sup>2</sup> )	-162.918	-182.274	-149.264	-158.593	-158.179	-158.645	-129.869

**Figure IX.14** Contraintes verticales à la base du mur

## e) Déplacements verticaux à la base du mur

**Tableau IX.6** Déplacements verticaux à la base de mur

Longueur (m)	2.000	1.667	1.333	1.000	0.667	0.333	0.000
v (mm)	3.553	3.813	4.076	4.339	4.604	4.872	5.145

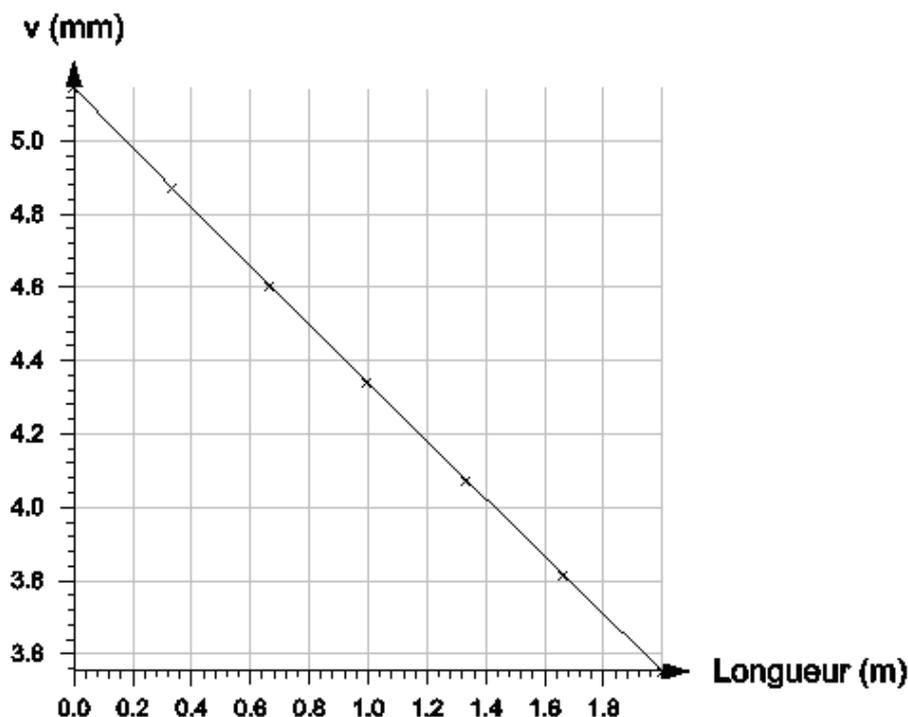


Figure IX.15 Déplacements verticaux à la base de mur

### IX.7.3 Interprétation des résultats

Sous l'effet des forces d'excavation, le massif de sol se déplace dans les directions horizontale (déplacement vers l'aval) et verticale (soulèvement). La figure IX.9 illustre bien ce phénomène.

Sous l'effet de son poids, le remblai se tasse et entraîne en partie le mur à cause de la cohésion d'interface (égale à la cohésion du sol) prise en compte dans la modélisation du contact sol-parement. Le mur est donc tiré vers l'amont (figure IX.9).

#### - Contraintes horizontales derrière le mur

La courbe suit une forme régulière non linéaire (figure IX.11), avec une valeur maximale proche de la base. Les contraintes positives en tête du mur sont dues essentiellement à la cohésion du sol et au déplacement du mur.

#### - Déplacements horizontaux derrière le mur

La courbe est une droite (figure IX.12), ce qui est logique vu la rigidité du mur. Les déplacements horizontaux maximums sont obtenus au niveau de la base du mur, ce qui est conforme avec la déformée.

#### - Contraintes verticales à la base du mur

La courbe suit une forme linéaire sur des tronçons de la base du mur (figure IX.14).

### - Déplacements verticaux à la base du mur

L'allure de la courbe suit la forme d'une droite sur toute la largeur de la base (figure IX.15). Cette linéarité est due à la rigidité de la base du mur, avec un maximum du côté aval. Les valeurs sont positives ce qui nous ramène à déduire que le déplacement est un soulèvement comme le montre la déformée (figure IX.9).

## IX.8 CAS STATISTIQUEMENT HOMOGENE

### IX.8.1 Présentation

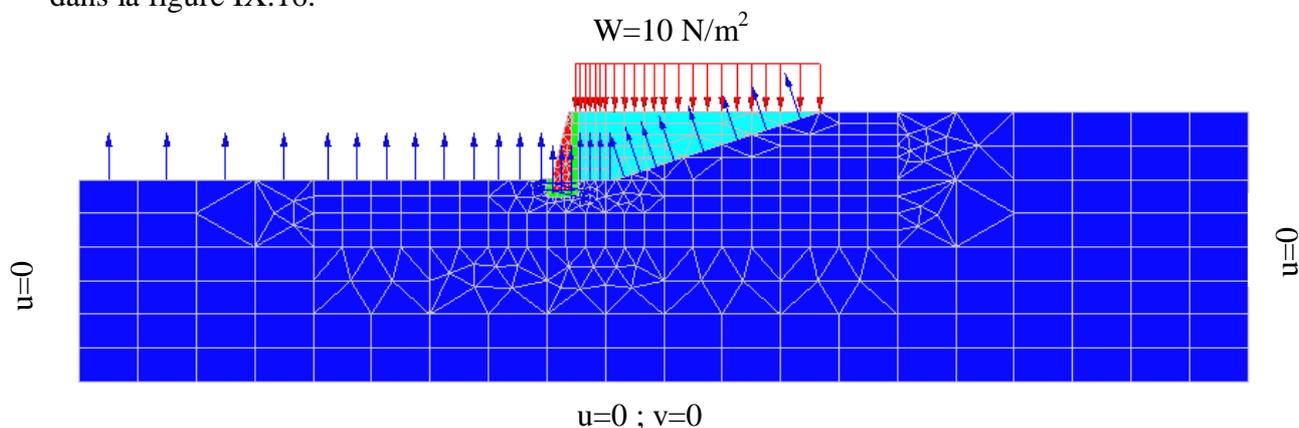
Dans ce cas d'analyse, les propriétés  $E$  et  $\varphi$  varient aléatoirement dans tout le sol : nous avons effectué 100 calcul, les 100 valeurs de  $E$  et  $\varphi$  sont tirées aléatoirement conformément à une loi normale. Pour chacun des calculs,  $E$  et  $\varphi$  sont constants dans tout le massif.

Le maillage et les conditions aux limites (déplacements sur les bords et la charge  $W$ ) sont identiques à ceux pris dans le cas déterministe :

- Les déplacements horizontaux sont nuls sur les bords latéraux et à la base du mur,
- Les déplacements verticaux sont nuls à la base du mur,
- La charge est uniformément répartie sur la surface du remblai, sur une distance de 18 m.

Nous noterons que la génération des valeurs aléatoires de  $E$  et de  $\varphi$  a été possible grâce à Microsoft Office Excel, en se basant sur les moyennes et les écarts types de ces deux paramètres portés dans le tableau IX.2. Le tableau IX.7 montre quelques valeurs obtenues après génération de  $E$  et de  $\varphi$ .

Le maillage et les conditions aux limites en forces et en déplacements sont montrés dans la figure IX.16.



**Figure IX.16** Maillage et conditions aux limites du cas analysé.

**Tableau IX.7** Quelques valeurs générées des paramètres variables E et  $\varphi$ 

Module de Young E (KN/m <sup>2</sup> )			Angle de frottement interne $\varphi$ (°)		
Moy de E	écart type de E	Loi normale	Moy de $\varphi$	écart type de $\varphi$	Loi normale
90000	9000	80790.578	30	3	26.930
		99901.747			33.301
		98893.789			32.965
		95720.927			31.907
		113385.819			37.795
		82572.348			27.524
		95456.543			31.819
		88292.096			29.431
		83268.530			27.756
		95715.053			31.905
		78531.181			26.177
		103157.870			34.386
		80973.080			26.991
		90317.904			30.106
		101432.462			33.811
		85751.265			28.584
		91762.984			30.588
		90091.372			30.030
		83397.369			27.799
		80589.436			26.863

### IX.8.2 Présentation des résultats

Chaque calcul permet de déterminer les valeurs des contraintes horizontales et déplacements horizontaux derrière le mur, ainsi que les contraintes verticales et déplacements verticaux à la base du mur, choisis pour l'étude du comportement des murs de soutènement (figure IX.16). Une fois la série des cent (100) calculs terminée, il est alors possible de calculer la moyenne, pour chaque paramètre recherché et en chacun des nœuds situés sur la ligne de calcul choisie, à l'aide du programme Excel, ainsi que les paramètres statistique, tels l'écart-type, le coefficient de variation ou la loi de distribution des valeurs de la solution, afin d'apprécier l'influence de la variabilité des paramètres de sol sur la solution.

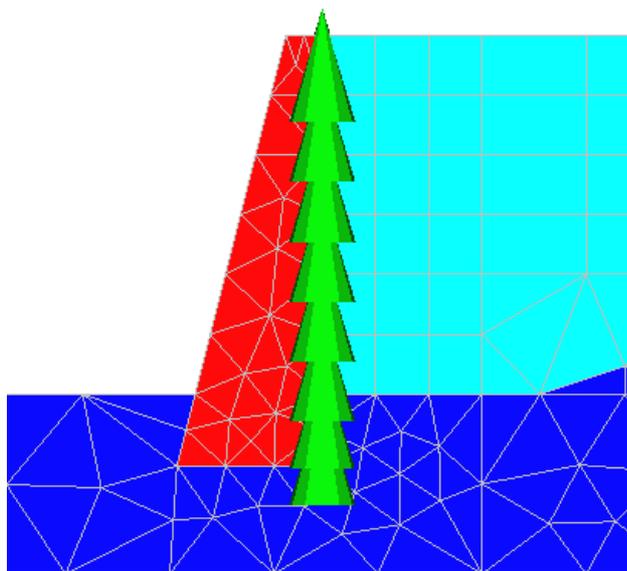
Les résultats obtenus sont résumés sous forme des courbes sur les figures IX.18 à IX.26, qui représentent l'une ou l'autre des relations suivantes :

- Evolution de la solution probabiliste (valeur moyenne, maximum et minimum des contraintes, des déplacements) le long de la ligne de calcul choisie
- Evolution de l'écart-type (ou du coefficient de variation) de la solution le long de ligne de calcul choisie.

Pour toutes les courbes obtenues, nous notons une allure graphique régulière, semblable à celles obtenues dans le calcul déterministe.

#### a) Contraintes horizontales derrière le mur

Les contraintes et les déplacements horizontaux derrière le mur sont calculés suivant une ligne de coupe longeant la face arrière du mur de bas jusqu'à la surface du terrain, comme cela est montré sur la figure IX. 17



*Figure IX.17* Ligne de coupe derrière le mur.

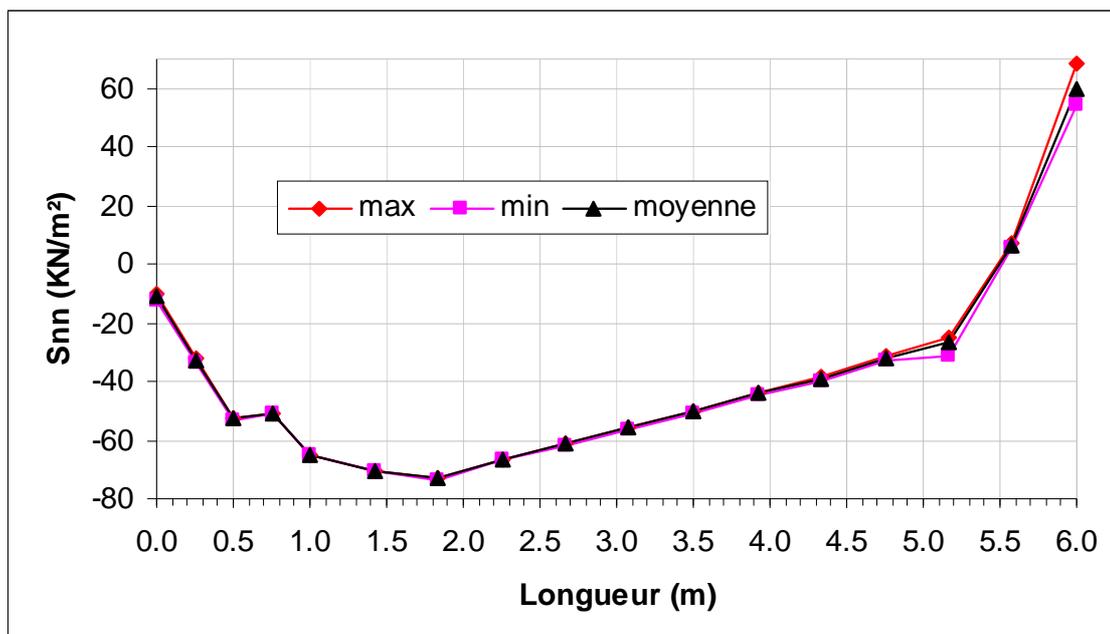


Figure IX.18 Contraintes horizontales derrière le mur

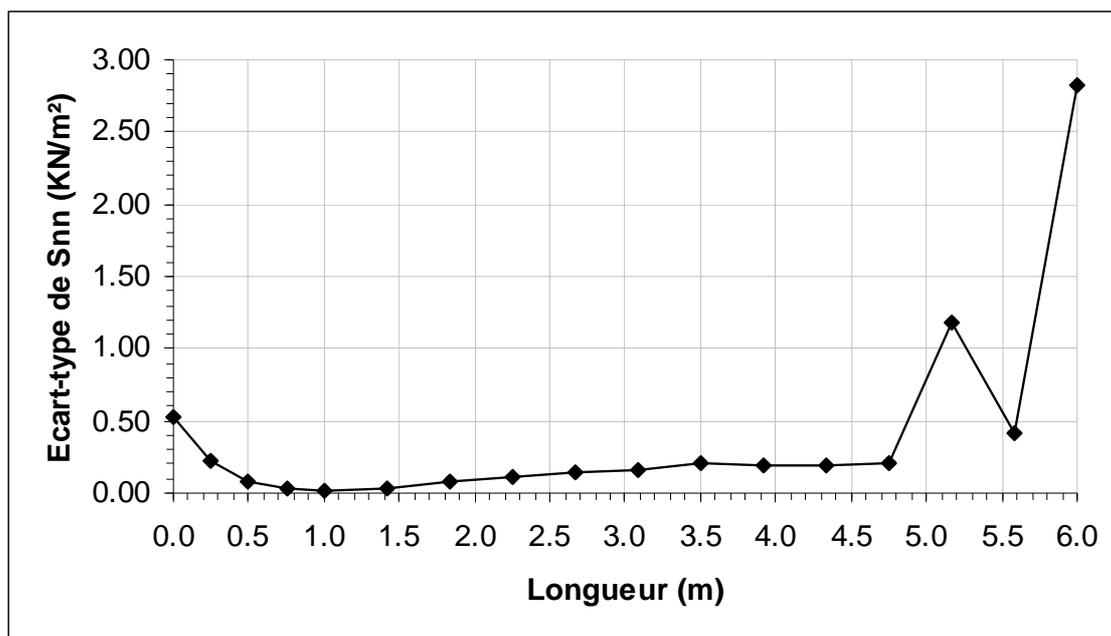


Figure IX.19 Evolution des écart-types des contraintes horizontales derrière le mur

b) Déplacements horizontaux derrière le mur

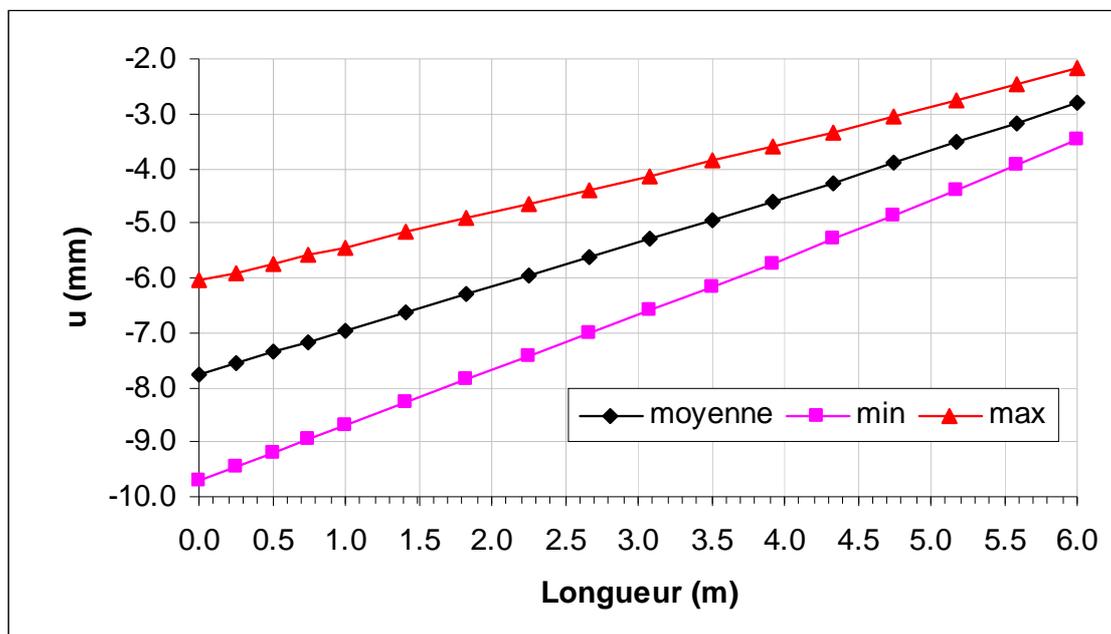


Figure IX.20 Déplacements horizontaux derrière le mur

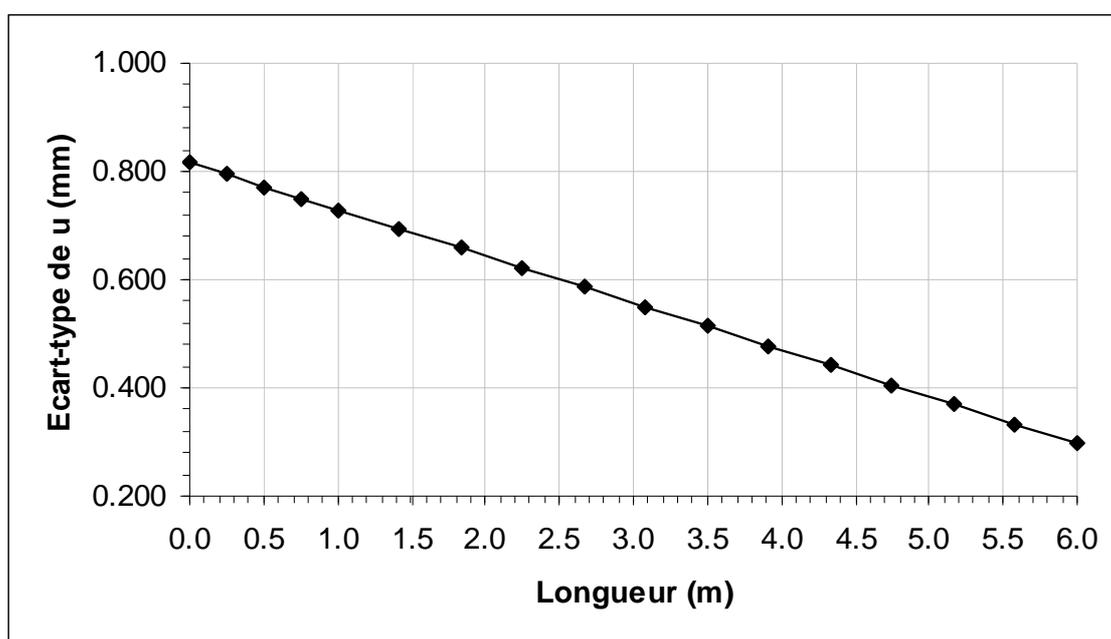
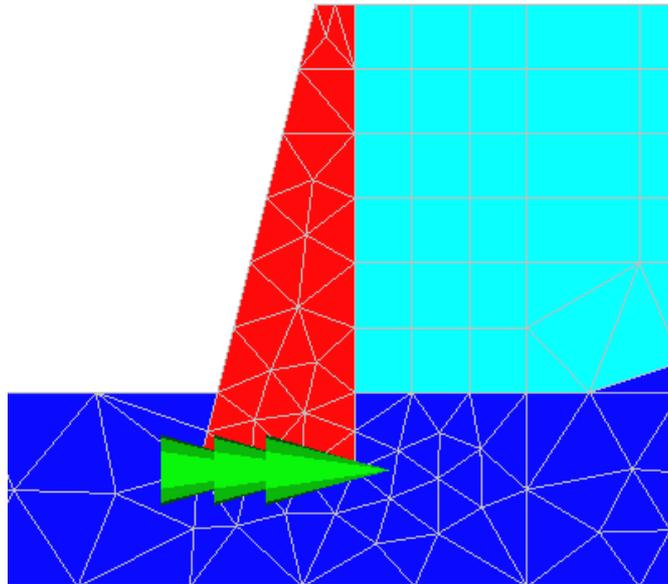


Figure IX.21 Evolution des écart-types des déplacements horizontaux derrière le mur

c) **Contraintes verticales à la base du mur**

Les contraintes et les déplacements verticaux à la base du mur sont calculés suivant une ligne de coupe longeant la face base du mur de gauche à droite, comme montré sur la figure IX. 22



*Figure IX.22* Ligne de coupe base du mur.

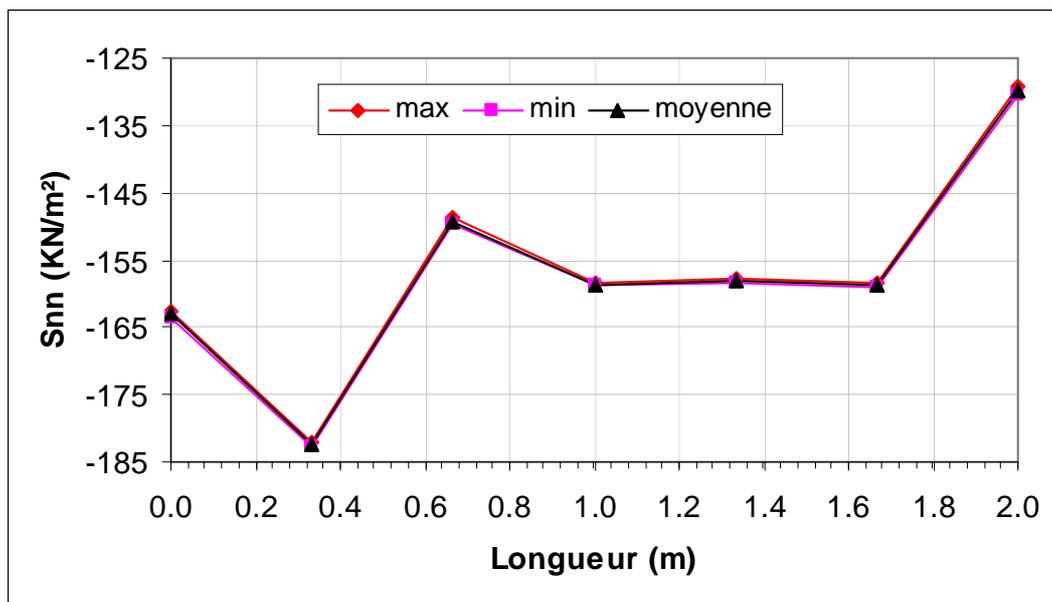


Figure IX.23 Contraintes verticales à la base du mur

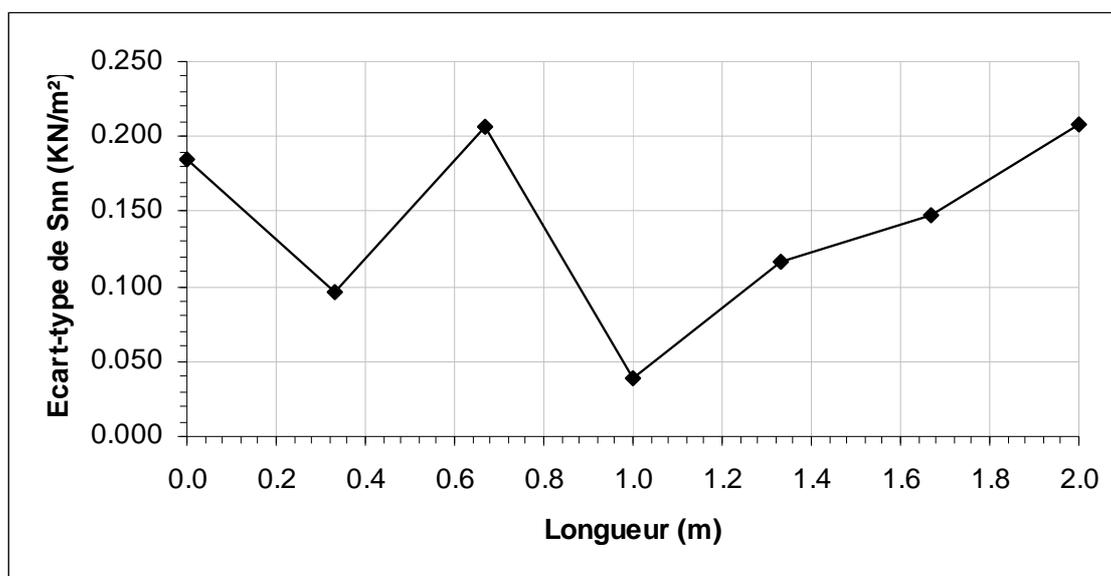


Figure IX.24 Evolution des écart-types des contraintes verticales à la base du mur

d) Déplacements verticaux à la base du mur

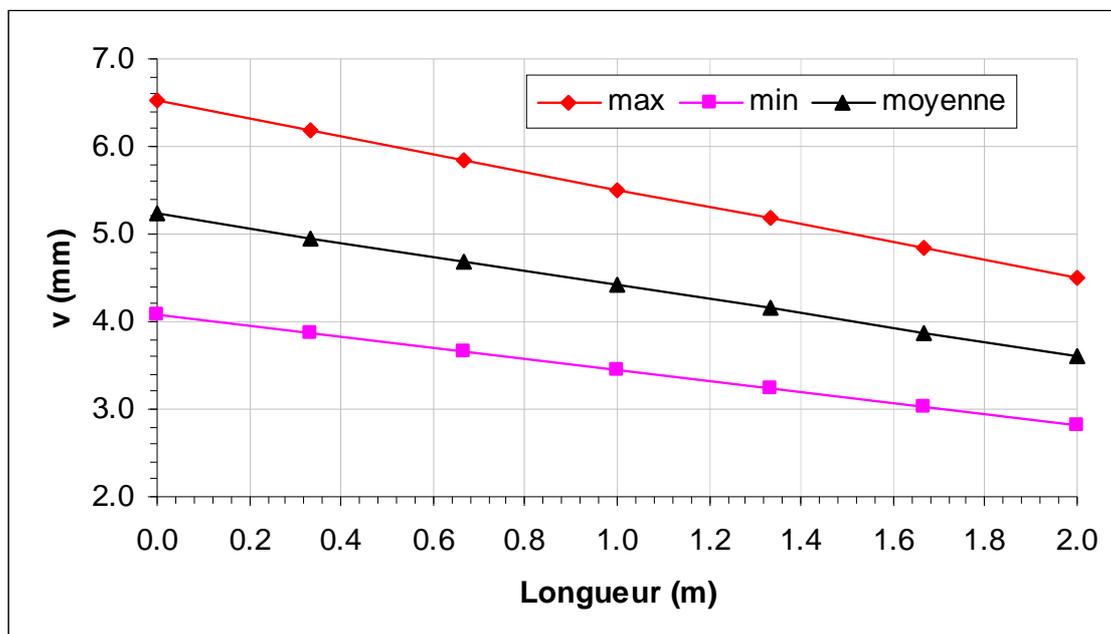


Figure IX.25 Déplacements verticaux à la base du mur

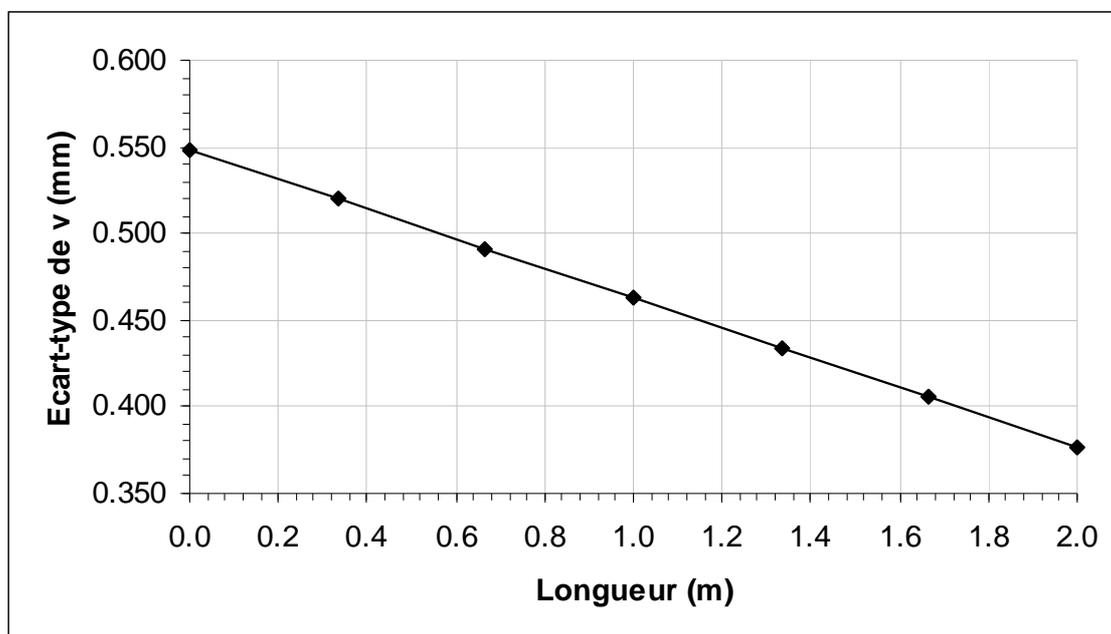


Figure IX.26 Evolution des écart-types des déplacements verticaux à la base du mur

### **IX.8.3 Interprétation des résultats**

#### **a) Contraintes horizontales derrière le mur**

L'examen de l'évolution des contraintes horizontales derrière le mur (figure IX.18), appelle les observations suivantes :

- Les courbes suivent la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale moyenne en valeur absolue est de (73,293 KN/m<sup>2</sup>), proche de celle obtenue par le calcul déterministe (73,250 KN/m<sup>2</sup>),
- La valeur de la contrainte horizontale moyenne en tête de mur est de (59,524 KN/m<sup>2</sup>), aussi proche de celle trouver par le calcul déterministe (59,134 KN/m<sup>2</sup>),
- L'incertitude sur les contraintes horizontales symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne de calcul « derrière le mur » (figure IX.19), atteint sa valeur la plus grande au voisinage du point au on a enregistré la plus grande contrainte horizontale derrière le mur,
- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums,
- On remarque sur la figure IX.18 que l'évolution des contraintes horizontales derrière le mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min presque identiques), est pas vraiment significative, c'est du essentiellement au cas statistiquement homogène, au chargement et à la variabilité prise dans les calculs.

#### **b) Déplacements horizontaux derrière le mur**

L'examen de l'évolution des déplacements horizontaux derrière le mur (figure IX.20), appelle les observations suivantes :

- La courbe suit la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale moyenne en valeur absolue est de (7,761 mm), proche de celle obtenue par le calcul déterministe (7,628 mm),
- Les courbes des déplacements horizontaux derrière le mur suivent une courbe linière avec des maximum à la base du mur,
- L'incertitude sur les déplacements horizontaux symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne de calcul « derrière le mur » (figure IX.21), atteint sa valeur la plus grande à la base du mur, ensuite elle décroît,

- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums, c'est-à-dire au point le plus bas derrière le mur et cela s'explique par le fait que c'est le point qui supporte le plus de charge,
- On remarque sur la figure IX.20 que l'évolution des déplacements horizontaux derrière le mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques), est significative, contrairement aux contraintes horizontales, donc une légère variation de contrainte implique des déplacements significatifs.

### c) Contraintes verticales à la base du mur

L'examen de l'évolution des contraintes verticales à la base du mur (figure IX.23), appelle les observations suivantes :

- La courbe suit la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe.
- La valeur maximale moyenne en valeur absolue est de  $(182,334 \text{ KN/m}^2)$ , proche de celle obtenue par le calcul déterministe  $(182,274 \text{ KN/m}^2)$ .
- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums.
- On remarque sur la figure IX.23 que l'évolution des contraintes verticales à la base du mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min presque identiques), est pas vraiment significative, c'est du essentiellement au cas statistiquement homogène, au chargement et à la variabilité prise dans les calculs.

### d) Déplacements verticaux à la base du mur

L'examen de l'évolution des déplacements verticaux à la base du mur (figure IX.25), appelle les observations suivantes :

- La courbe suit la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe.
- La valeur maximale est de  $(5,233 \text{ mm})$ , proche de celle obtenue par le calcul déterministe  $(5,145 \text{ mm})$ .
- Les courbes des déplacements verticaux à la base du mur suivent une courbe linière avec des maximums à l'arête aval de la base.
- L'incertitude sur les déplacements verticaux symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne de calcul « base du mur » (figure IX.26), suit la même allure que la courbe des déplacements verticaux à la base du mur et atteint sa valeur la plus grande au point au on a enregistré le plus grand déplacement verticales derrière le mur.

- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums, c'est-à-dire au point coïncidant avec l'arête aval du mur.
- On remarque sur la figure IX.25 que l'évolution des déplacements verticaux à la base du mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques), est significative, contrairement aux contraintes verticales, donc une légère variation de contrainte implique des déplacements significatifs.

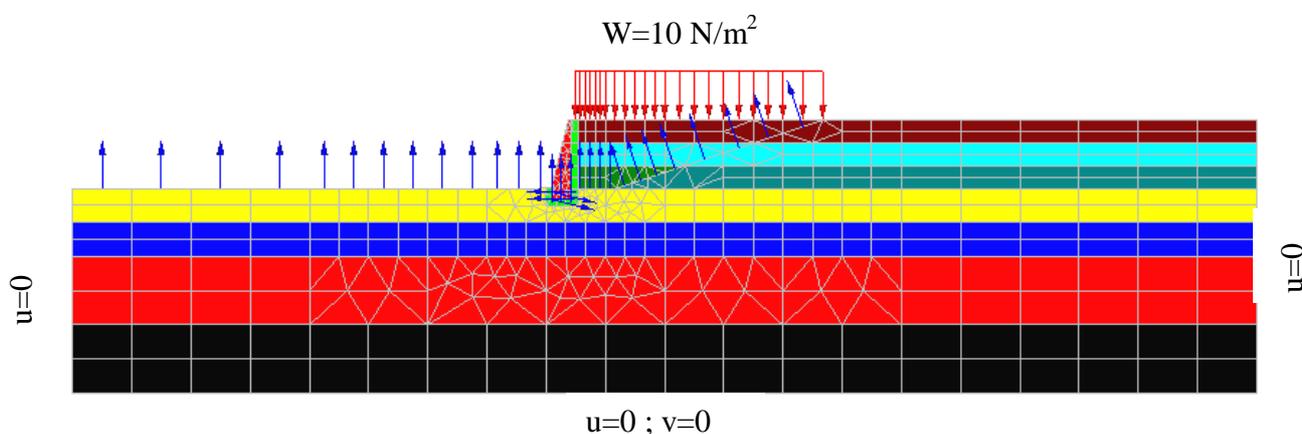
## IX.9 CAS D'ANALYSE D'UN MULTICOUCHE

### IX.9.1 Présentation

Dans ce cas d'analyse, nous noterons les mêmes conditions initiales et le même maillage (même nombre de nœuds et d'éléments) que ceux présentés précédemment.

Les valeurs attribuées aux paramètres de calcul ( $E$  et  $\varphi$ ) sont générées conformément à une distribution normale à l'aide du logiciel Microsoft Office Excel, en utilisant les moyennes et les écarts types du tableau IX.2. Le tableau IX.8 montre quelques valeurs obtenues après génération de  $E$  et de  $\varphi$ .

Le maillage et les conditions aux limites du cas analysé sont illustrés dans la figure IX.27.



**Figure IX.27** Maillage et conditions aux limites du cas analysé ( $E$  et  $\varphi$  variables aléatoirement d'une couche à une autre).

**Tableau IX.8** Valeurs générées des paramètres variables E et  $\varphi$ 

Module de Young E (KN/m <sup>2</sup> )			Angle de frottement interne $\varphi$ (°)		
Moy de E	écart type de E	Loi normale	Moy de $\varphi$	écart type de $\varphi$	Loi normale
90000	9000	84335.853	30	3	28.112
90000		89313.089			29.771
90000		88468.482			29.489
90000		85945.423			28.648
90000		86594.161			28.865
90000		94691.509			31.564
90000		87293.004			29.098
90000		89150.609			29.717
90000		117219.833			39.073
90000		95346.813			31.782

### IX.9.2 Présentation des résultats

Chaque calcul permet de déterminer les valeurs des contraintes horizontales et déplacements horizontaux derrière le mur, ainsi que les contraintes verticales et déplacements verticaux à la base du mur, choisis pour l'étude du comportement des murs de soutènement (figure IX.27). Une fois la série des cent (100) calculs terminée, il est alors possible de calculer la moyenne, pour chaque résultat cherché et en chacun des nœuds situés sur la ligne de calcul choisie, à l'aide du programme Excel, ainsi que les paramètres statistiques, tels l'écart-type, le coefficient de variation ou la loi de distribution des valeurs de la solution, afin d'apprécier l'influence de la variabilité des paramètres de sol sur la solution.

Les résultats obtenus sont résumés sous forme des courbes (figure IX.29 à IX.37), qui représentent l'une ou l'autre des relation suivantes :

- Evolution de la solution probabiliste (valeur moyenne, maximum et minimum des contraintes, des déplacements) le long de la ligne de calcul choisie,
- Evolution de l'écart-type (ou du coefficient de variation) de la solution le long de ligne de calcul choisie.

Pour toutes les courbes obtenues, nous notons une allure graphique régulière, semblable à celles obtenues dans le calcul déterministe.

a) **Contraintes horizontales derrière le mur**

Les contraintes et les déplacements horizontaux derrière le mur sont calculés suivant une ligne de coupe longeant la face arrière du mur de bas jusqu'à la surface du terrain, comme montré sur la figure IX. 28

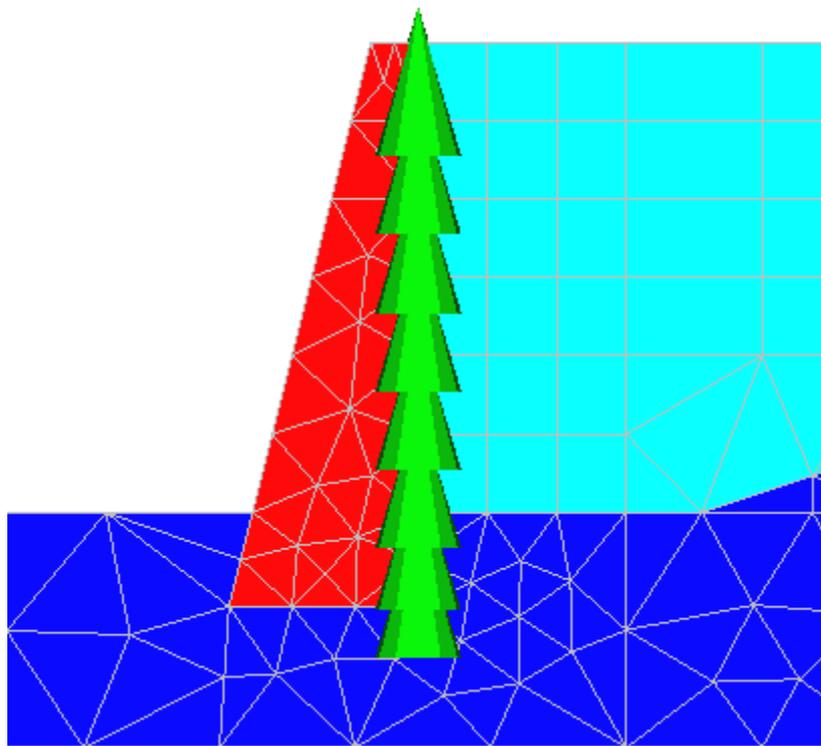


Figure IX.28 Ligne de coupe derrière le mur.

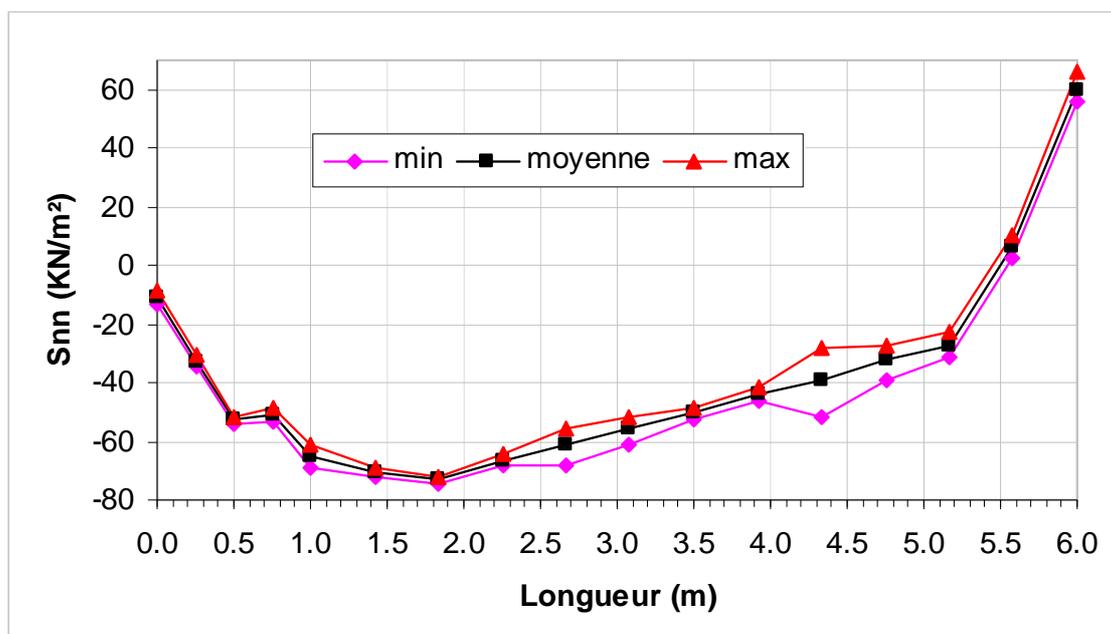


Figure IX.29 Contraintes horizontales derrière le mur

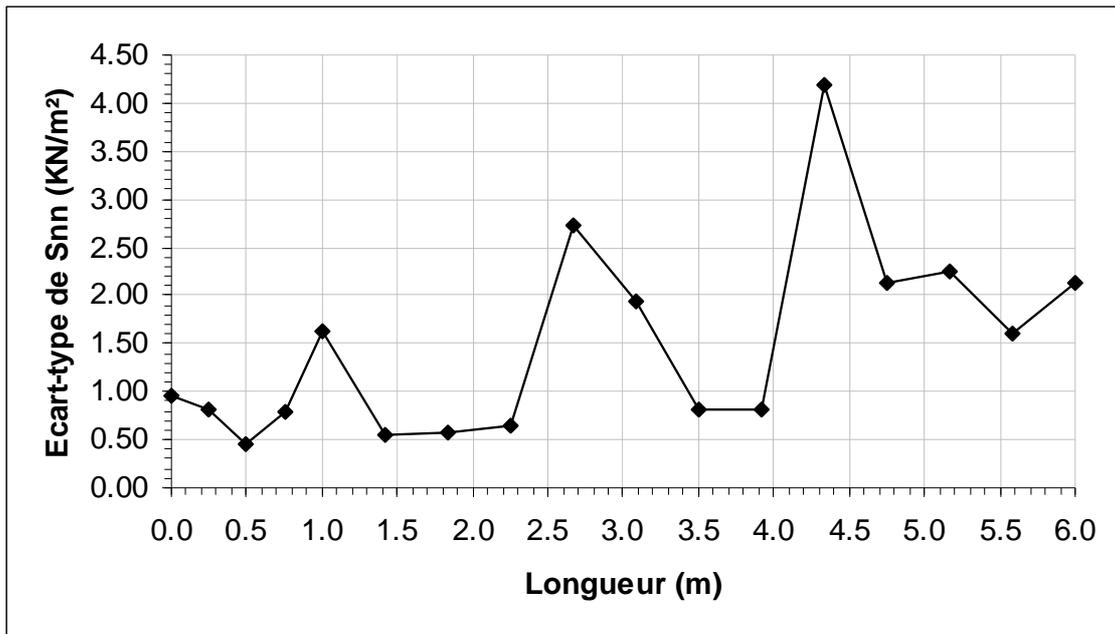


Figure IX.30 Evolution des écart-types des contraintes horizontales derrière le mur

b) Déplacements horizontaux derrière le mur

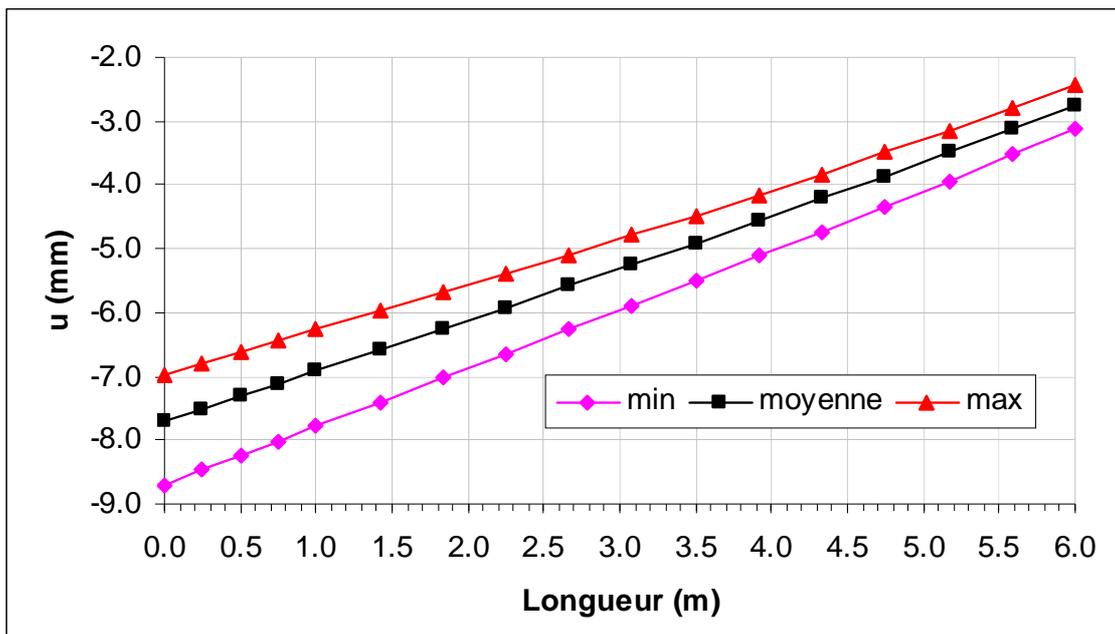
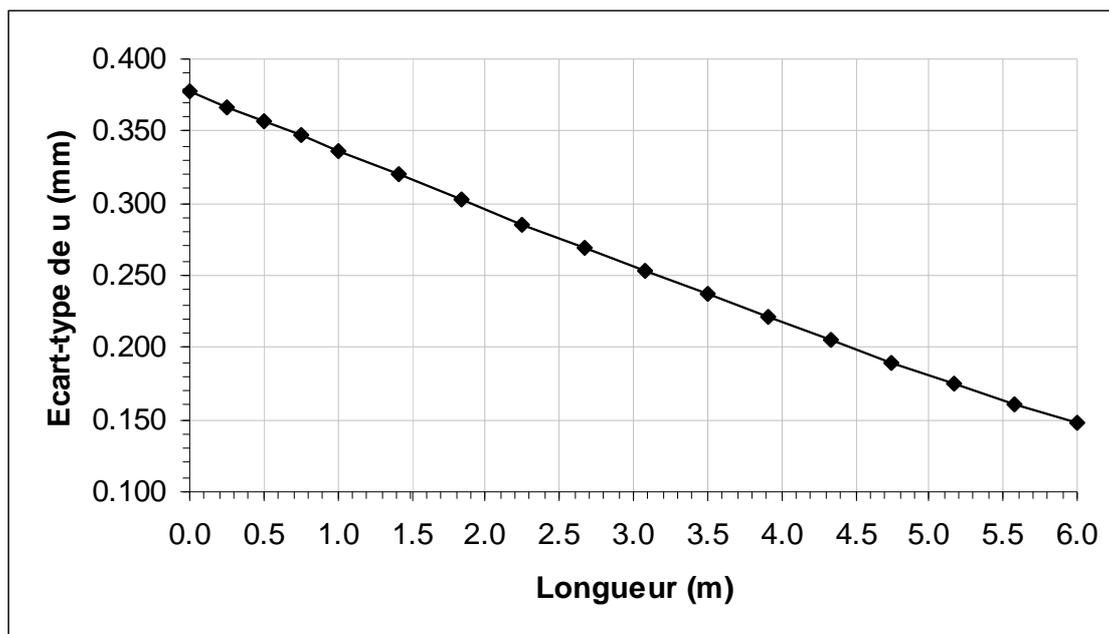


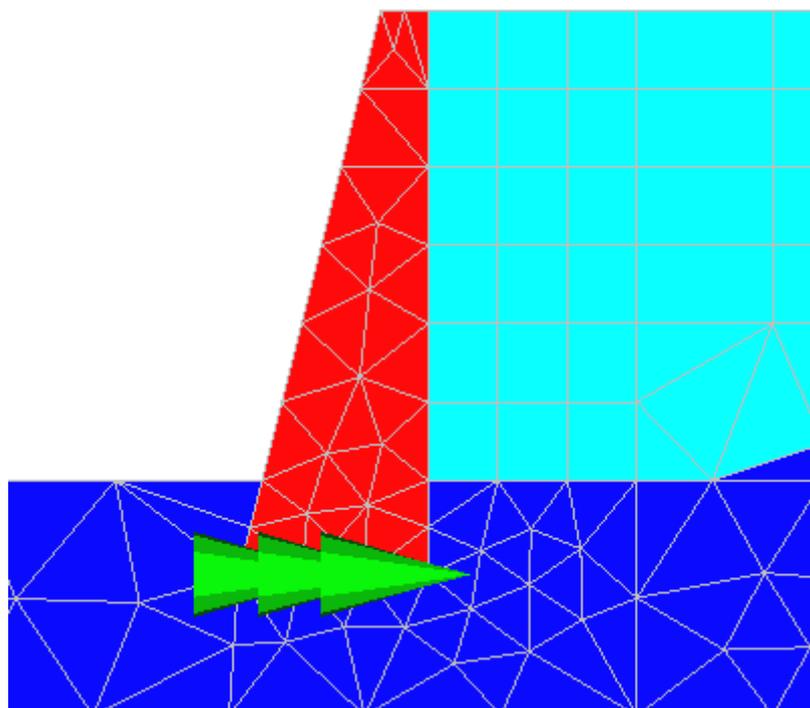
Figure IX.31 Déplacements horizontaux derrière le mur



*Figure IX.32* Evolution des écart-types des déplacements horizontaux derrière le mur

### c) Contraintes verticales à la base du mur

Les contraintes et les déplacements verticaux à la base du mur sont calculés suivant une ligne de coupe longeant la face base du mur de gauche à droite, comme montré sur la figure IX. 33



**Figure IX.33** Ligne de coupe base du mur.

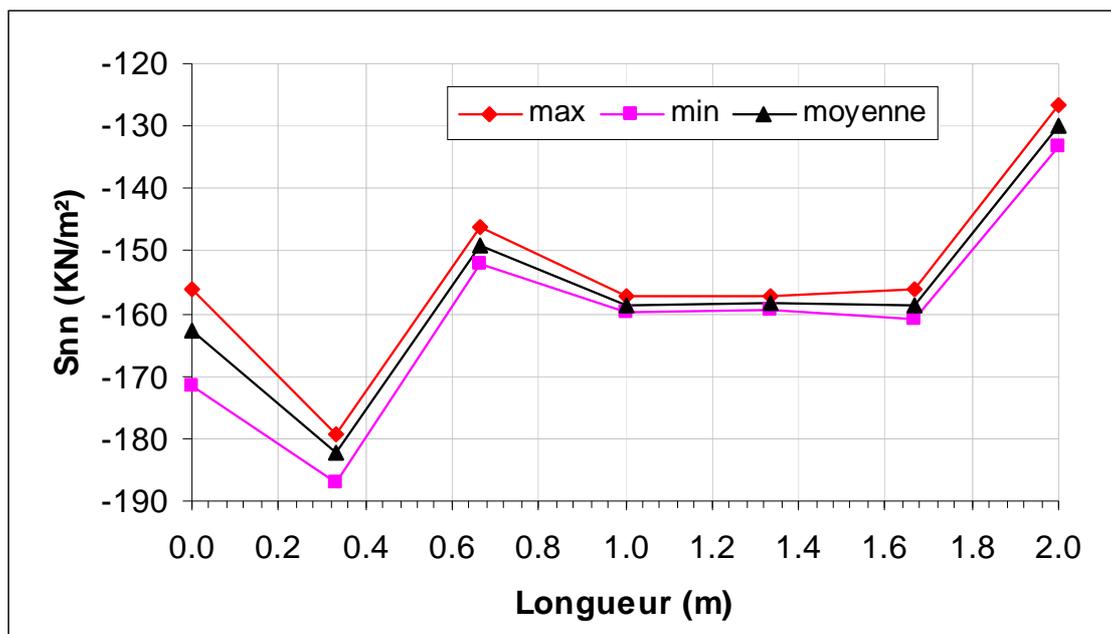


Figure IX.34 Contraintes verticales à la base du mur

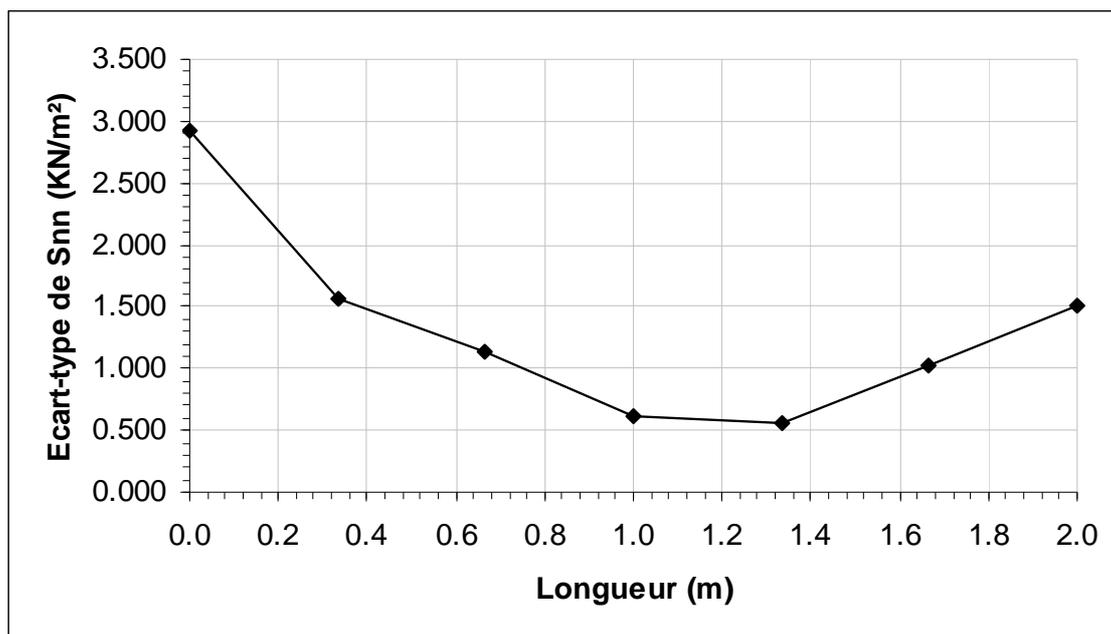


Figure IX.35 Evolution des écart-types des contraintes verticales à la base du mur

d) Déplacements verticaux à la base du mur

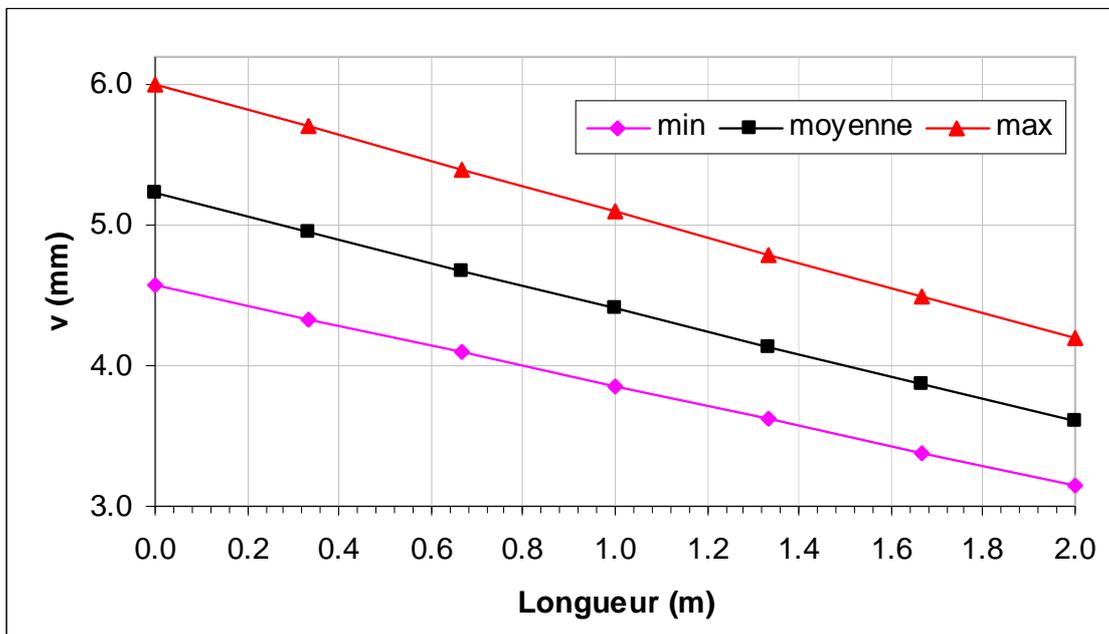


Figure IX.36 Déplacements verticaux à la base du mur

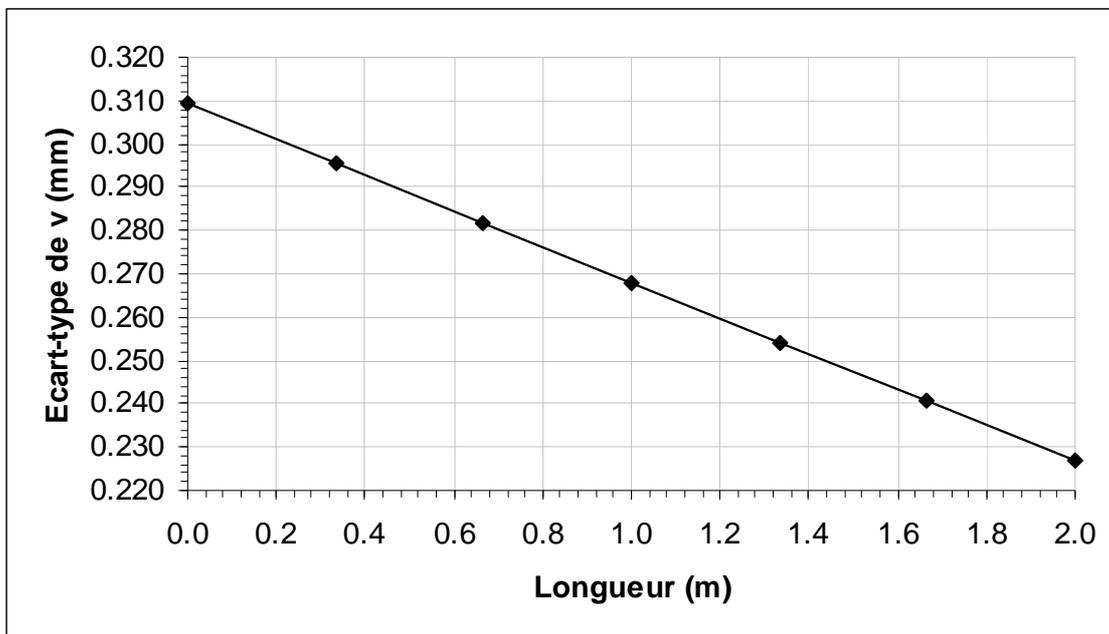


Figure IX.37 Evolution des écart-types des déplacements verticaux à la base du mur

### **IX.9.3 Interprétation des résultats**

#### **a) Contraintes horizontales derrière le mur**

L'examen de l'évolution des contraintes horizontales derrière le mur (figure IX.29), appelle les observations suivantes :

- Les courbes suivent la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale moyenne en valeur absolue est de  $(73,246 \text{ KN/m}^2)$ , proche de celle obtenue par le calcul déterministe  $(73,250 \text{ KN/m}^2)$ ,
- La valeur de la contrainte horizontale moyenne en tête de mur est de  $(60,057 \text{ KN/m}^2)$ , aussi proche de celle trouver par le calcul déterministe  $(59,134 \text{ KN/m}^2)$ ,
- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums,
- On remarque sur la figure IX.29 que l'évolution des contraintes horizontales derrière le mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques), est significative par rapport au calcul statistiquement homogène.

#### **b) Déplacements horizontaux derrière le mur**

Les résultats en termes d'évolution des déplacements horizontaux derrière le mur sont montrés dans la figure IX.31. Nous notons ce qui suit :

- La courbe suit la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale moyenne en valeur absolue est de  $(7,719 \text{ mm})$ , proche de celle obtenue par le calcul déterministe  $(7,628 \text{ mm})$ ,
- Les courbes des déplacements horizontaux derrière le mur suivent une courbe linière avec des maximums à la base du mur,
- L'incertitude sur les déplacements horizontaux symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne de calcul « derrière le mur » (figure IX.32), atteint sa valeur la plus grande à la base du mur, ensuite elle décroît,
- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums, c'est-à-dire au point le plus bas derrière le mur et ça s'explique par le fait que c'est le point qui supporte le plus de charge.
- On remarque sur la figure IX.31 que l'évolution des déplacements horizontaux derrière le mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques), est significative par rapport au calcul statistiquement homogène, donc une légère variation de contrainte implique des déplacements significatifs.

**c) Contraintes verticales à la base du mur**

L'examen de l'évolution des contraintes verticales à la base du mur (figure IX.34), appelle les observations suivantes :

- La courbe suit la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale moyenne en valeur absolue est de (182,187 KN/m<sup>2</sup>), proche de celle obtenue par le calcul déterministe (182,274 KN/m<sup>2</sup>),
- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums,
- On remarque sur la figure IX.34 que l'évolution des contraintes verticales à la base du mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques), est significative par rapport au calcul statistiquement homogène.

**d) Déplacements verticaux à la base du mur**

L'examen de l'évolution des déplacements verticaux à la base du mur (figure IX.36), appelle les observations suivantes :

- La courbe suit la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale est de (5,226 mm), proche de celle obtenue par le calcul déterministe (5,145 mm),
- Les courbes des déplacements verticaux à la base du mur suivent une courbe linière avec des maximums à l'arête aval de la base,
- L'incertitude sur les déplacements verticaux symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne de calcul « base du mur » (figure IX.37), suit la même allure que la courbe des déplacements verticaux à la base du mur et atteint sa valeur la plus grande au point au on a enregistré le plus grand déplacement verticales derrière le mur,
- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums, c'est-à-dire au point coïncidant avec l'arête aval du mur le mur,
- On remarque sur la figure IX.36 que l'évolution des déplacements verticaux à la base du mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques), est significative par rapport au calcul statistiquement homogène, donc une légère variation de contrainte implique des déplacements significatifs.

## IX.10 CAS HETEROGENE

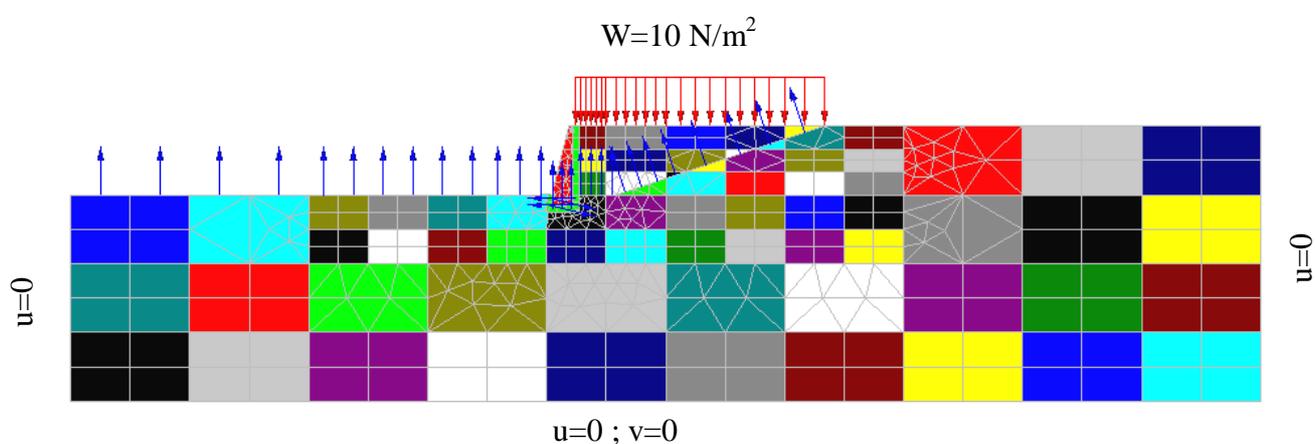
### IX.10.1 Présentation

Ce cas d'étude est défini comme suit : les valeurs des deux paramètres  $E$  (module de Young) et  $\varphi$  (angle de frottement interne), générées aléatoirement selon une loi normale, varient horizontalement et verticalement, d'un bloc à un autre. Notons qu'un bloc est la somme de plusieurs éléments.

Le maillage et les conditions aux limites sont identiques à ceux présentés dans les autres cas étudiés précédemment.

Le tableau IX.9 montre quelques valeurs générées selon la loi normale..

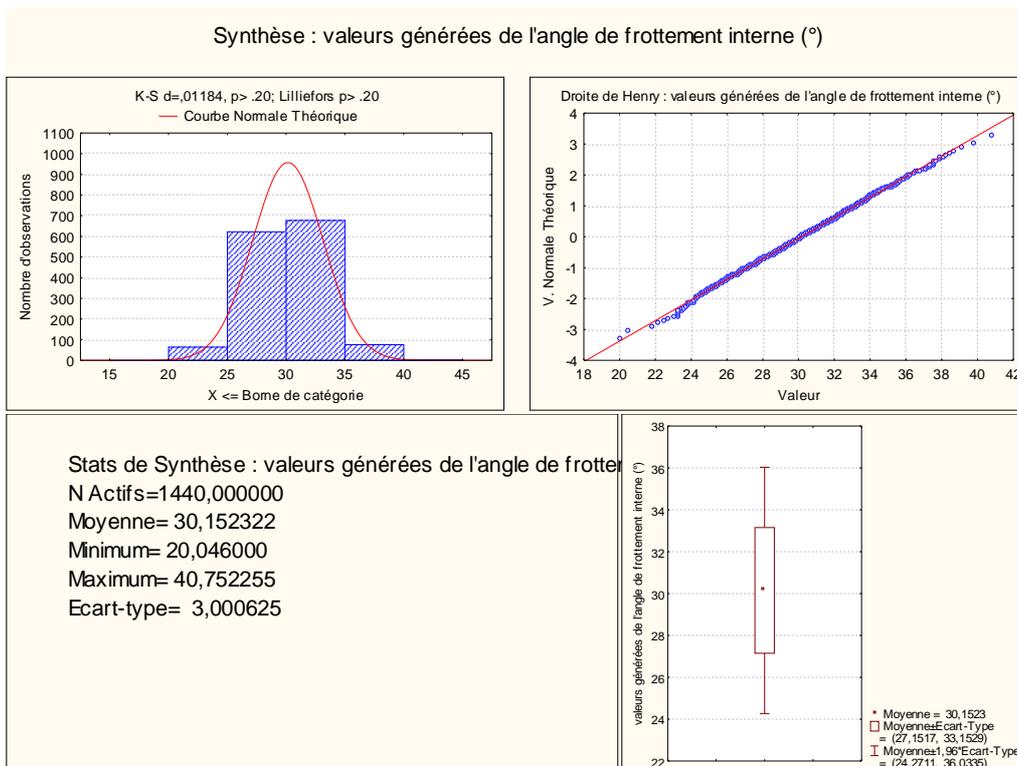
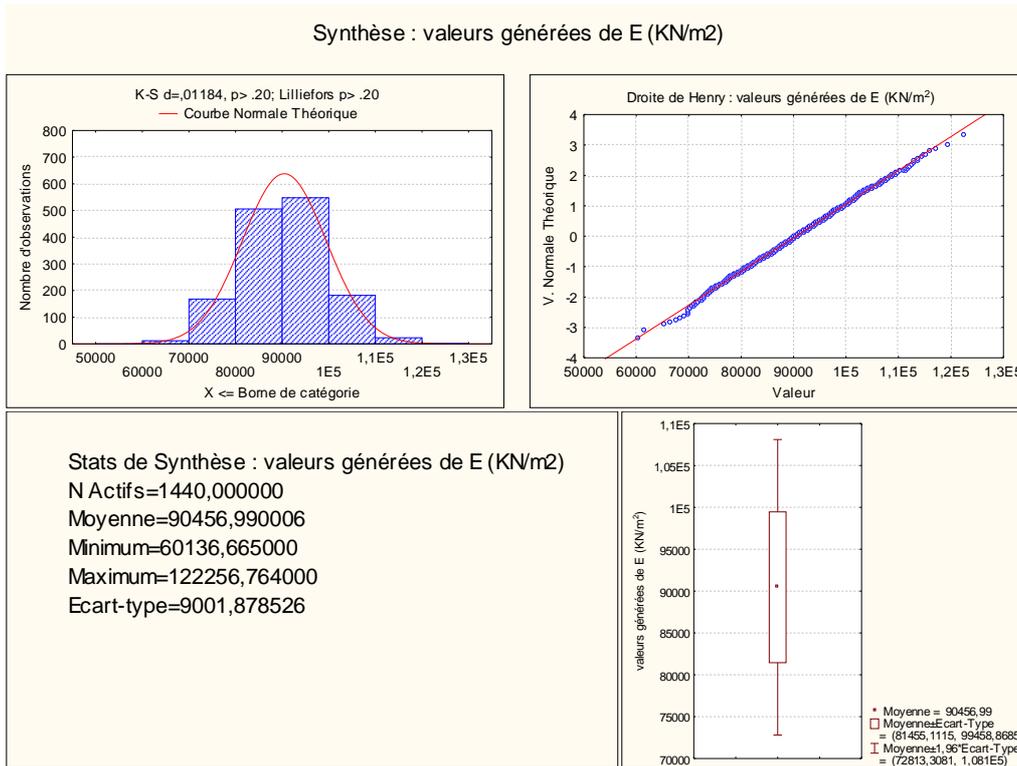
Le maillage et le chargement des cas hétérogènes sont illustrés dans la figure IX.38.



**Figure IX.38** Maillage et conditions aux limites du cas analysé ( $E$  et  $\varphi$  variables aléatoirement d'un bloc à un autre).

Tableau IX.9 Valeurs générées des paramètres variables E et  $\varphi$ 

Module de Young E (KN/m <sup>2</sup> )			Angle de frottement interne $\varphi$ (°)		
Moy de E	écart type de E	Loi normale	Moy de $\varphi$	écart type de $\varphi$	Loi normale
90000	9000	94717,275	30	3	31,572
		80498,199			26,833
		73839,858			24,613
		87392,137			29,131
		85036,473			28,345
		91189,036			30,396
		74932,583			24,978
		80232,041			26,744
		86252,348			28,751
		91095,858			30,365
		93572,587			31,191
		117172,259			39,057
		69695,566			23,232
		99306,119			33,102
		91907,256			30,636
		93507,579			31,169
		112659,970			37,553
		94517,118			31,506
		94136,195			31,379
		90362,766			30,121
		101568,503			33,856
		97869,542			32,623
		89763,943			29,921
		80533,262			26,844
		102171,317			34,057
		69836,207			23,279
		95293,314			31,764
		86817,214			28,939
87062,654	29,021				
87249,786	29,083				
103681,900	34,561				
96249,496	32,083				
88277,052	29,426				



### IX.8.2 Présentation des résultats

Chaque calcul permet de déterminer les valeurs des contraintes horizontales et déplacements horizontaux derrière le mur, ainsi que les contraintes verticales et déplacements verticaux à la base du mur, choisis pour l'étude du comportement des murs de soutènement (figure IX.38). Une fois la série des vingt calculs terminée, il est alors possible de calculer la moyenne, pour chaque paramètre recherché et en chacun des nœuds situés sur ligne de calcul choisie, à l'aide du programme Excel, ainsi que les paramètres statistique, tels l'écart-type, le coefficient de variation ou la loi de distribution des valeurs de la solution, afin d'apprécier l'influence de la variabilité des paramètres de sol sur la solution.

Les résultats obtenus sont résumés sous forme des courbes figure IX.41 à IX.49, qui représentent l'une ou l'autre des relations suivantes :

- Evolution de la solution probabiliste (valeur moyenne des contraintes, des déplacements) le long de la ligne de calcul choisie,
- Evolution de l'écart-type (ou du coefficient de variation) de la solution le long de ligne de calcul choisie.

Pour toutes les courbes obtenues, nous notons une allure graphique régulière, semblable à celles obtenues dans le calcul déterministe.

#### a) Contraintes horizontales derrière le mur

Les contraintes et les déplacements horizontaux derrière le mur sont calculés suivant une ligne de coupe longeant la face arrière du mur de bas jusqu'à la surface du terrain, comme montré sur la figure IX.40.

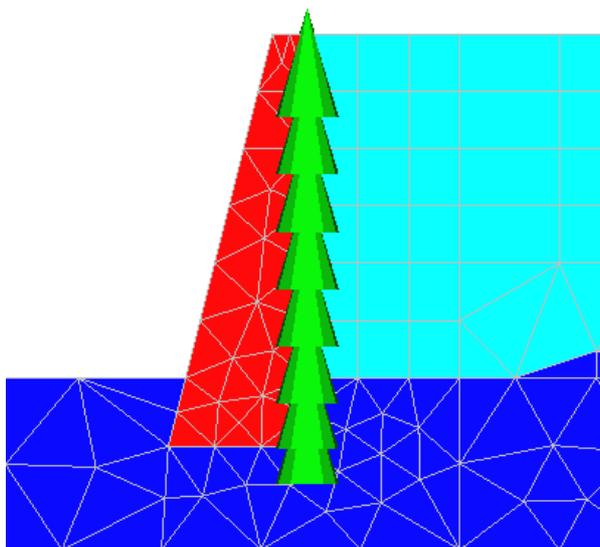


Figure IX.40 Ligne de coupe derrière le mur.

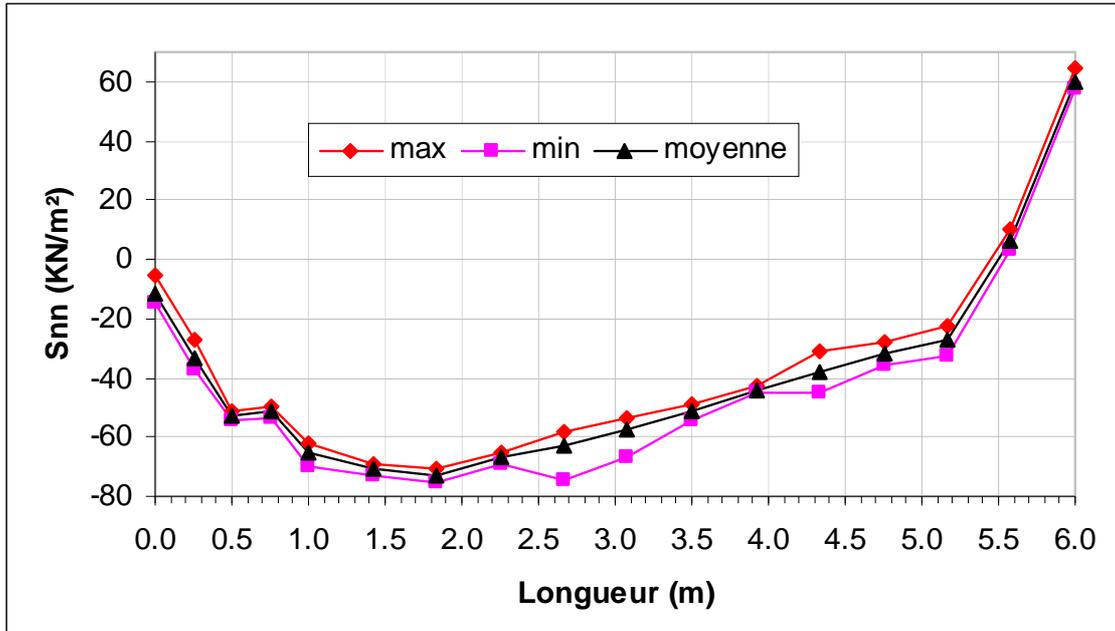


Figure IX.41 Contraintes horizontales derrière le mur

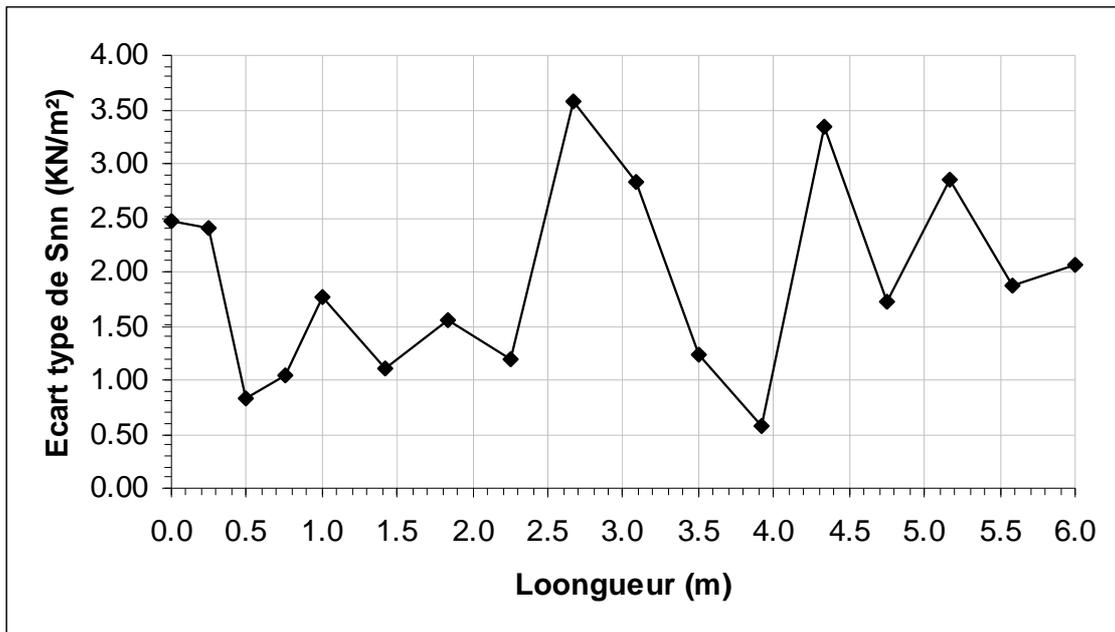


Figure IX.42 Evolution des écart-types des contraintes horizontales derrière le mur

b) Déplacements horizontaux derrière le mur

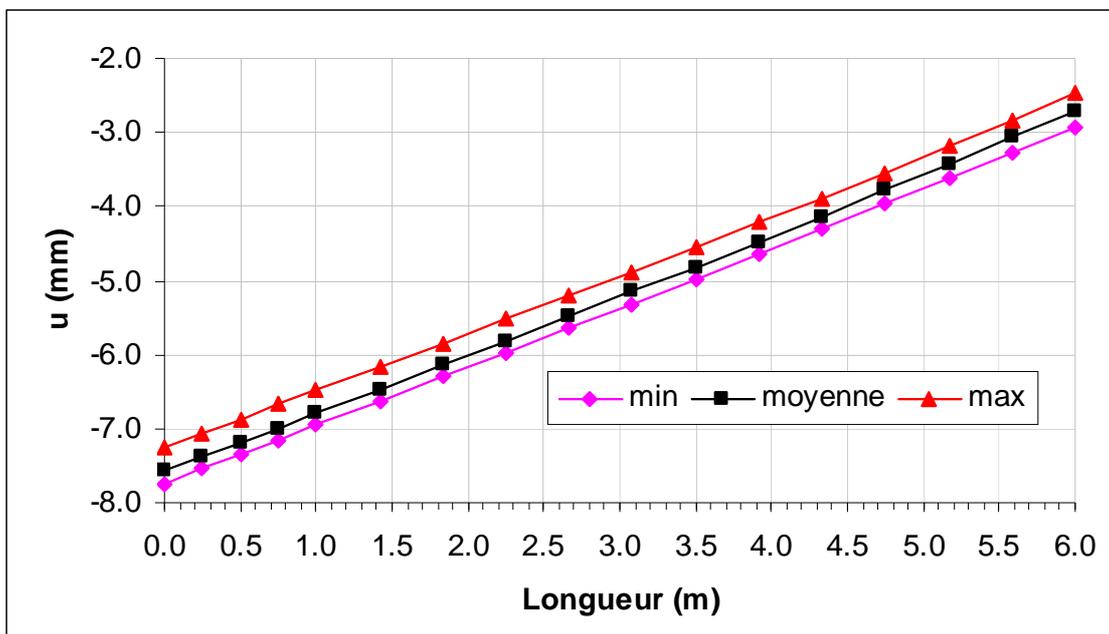


Figure IX.43 Déplacements horizontaux derrière le mur

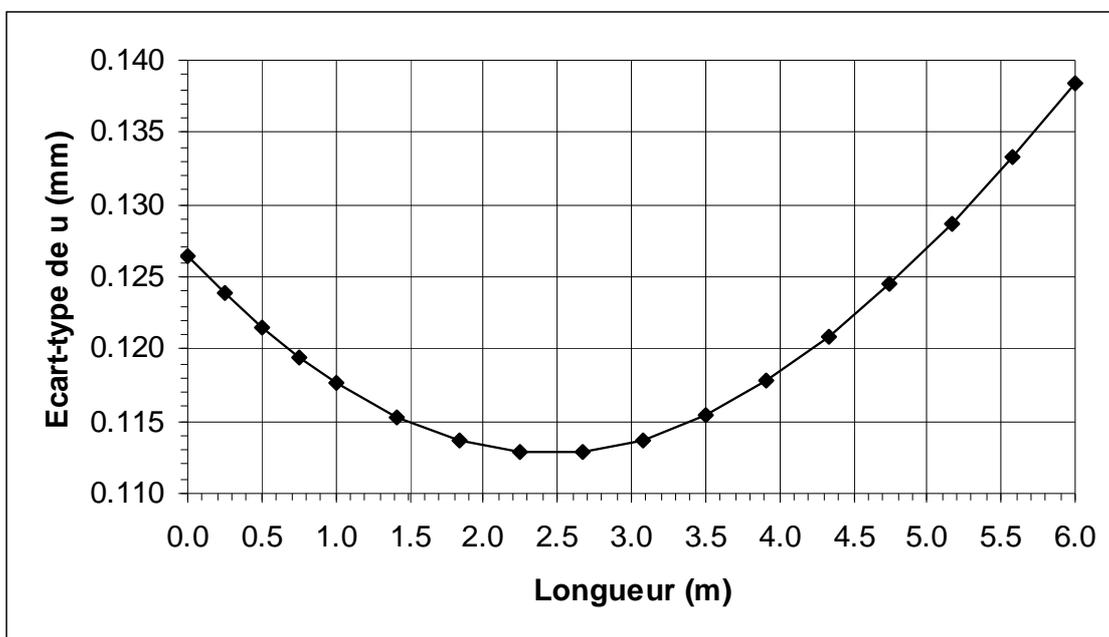
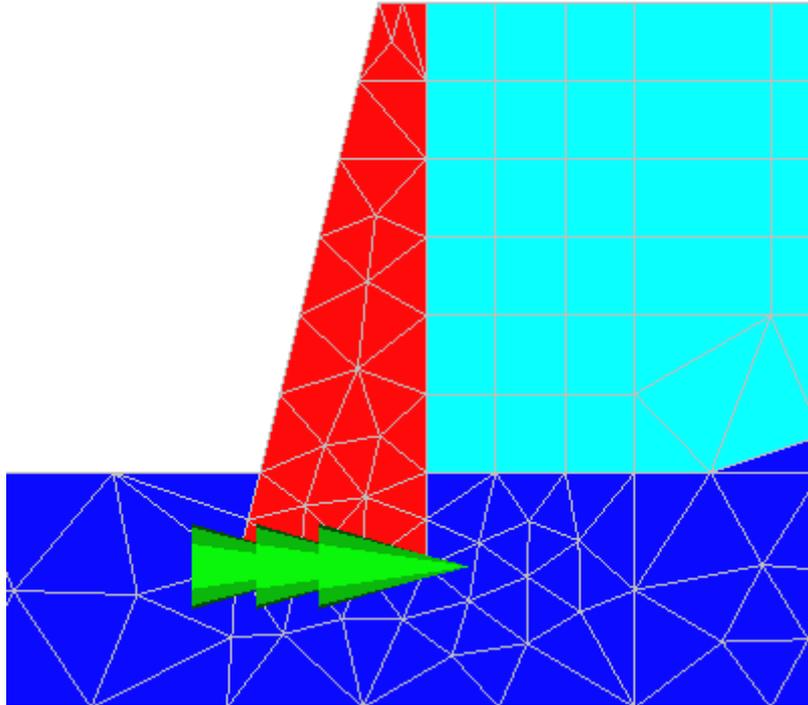


Figure IX.44 Evolution des écart-types des déplacements horizontaux derrière le mur

**c) Contraintes verticales à la base du mur**

Les contraintes et les déplacements verticaux à la base du mur sont calculés suivant une ligne de coupe longeant la face base du mur de gauche à droite, comme montré sur la figure IX.45.



*Figure IX.45* Ligne de coupe base du mur.

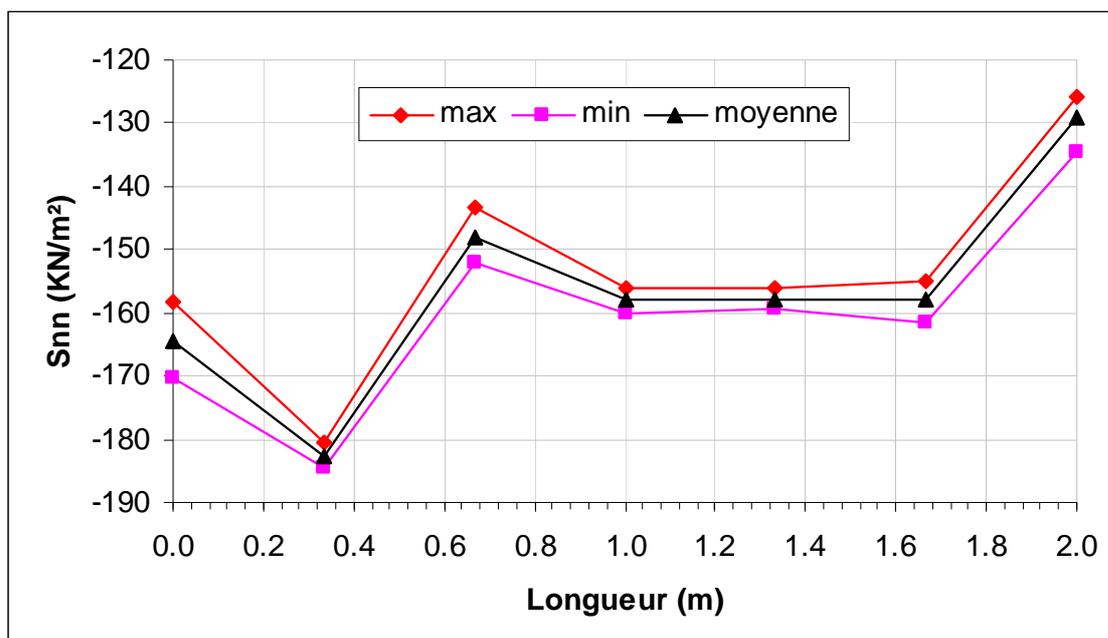


Figure IX.46 Contraintes verticales à la base du mur

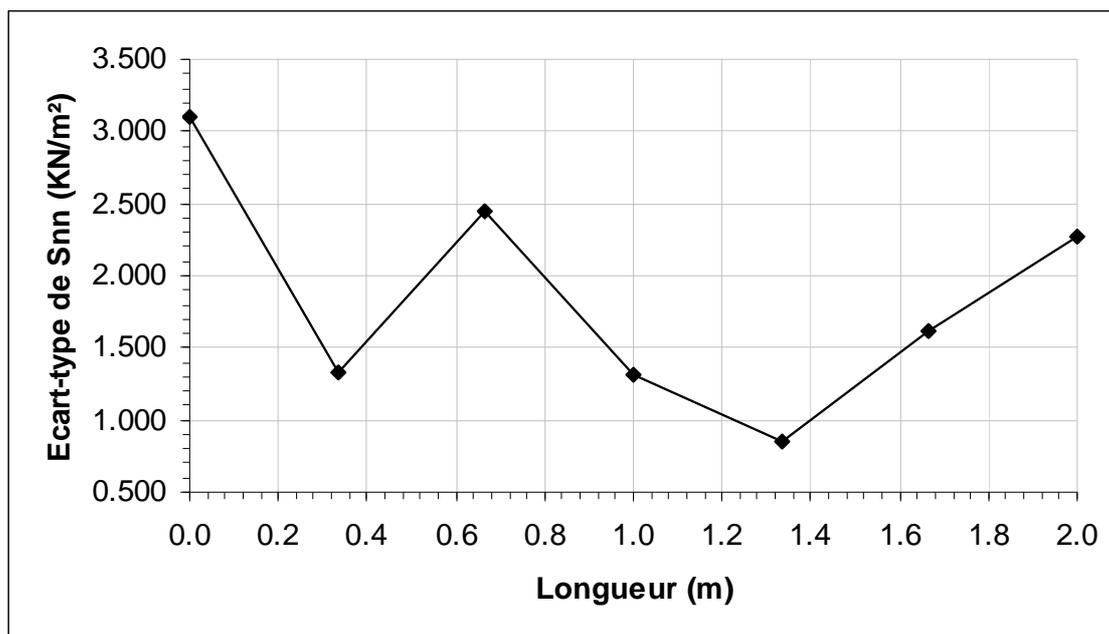


Figure IX.47 Evolution des écart-types des contraintes verticales à la base du mur

d) Déplacements verticaux à la base du mur

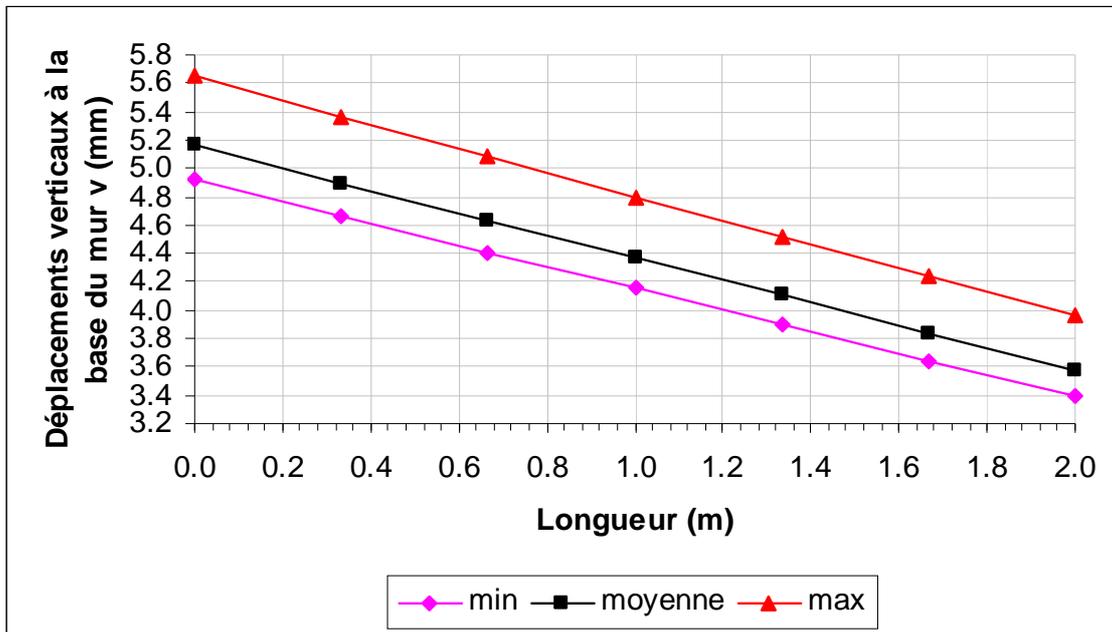


Figure IX.48 Déplacements verticaux à la base du mur

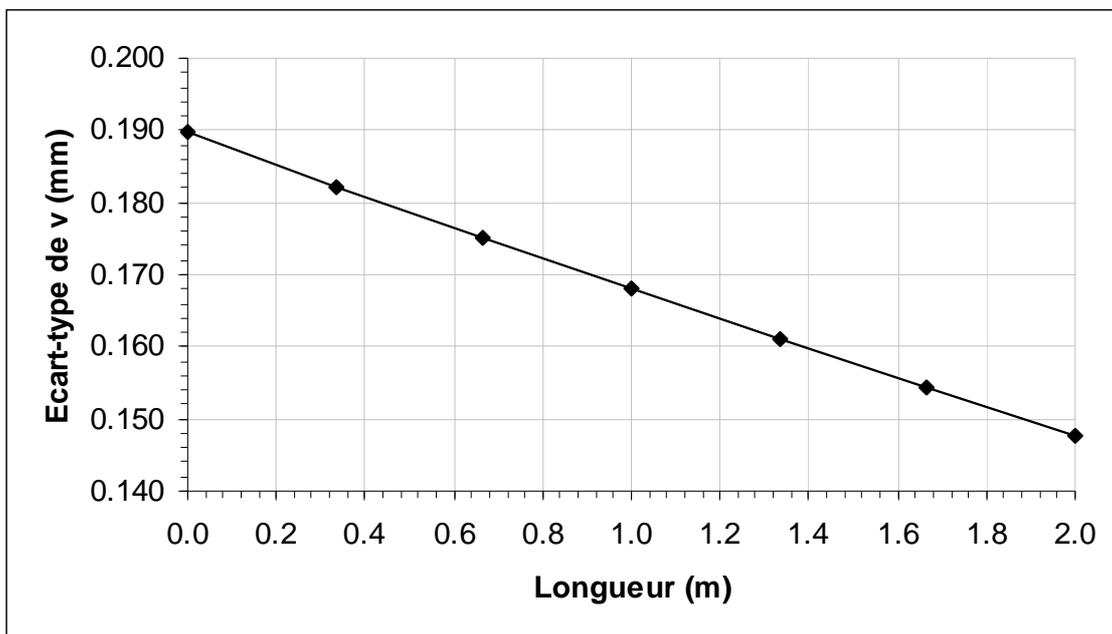


Figure IX.49 Evolution des écart-types des déplacements verticaux à la base du mur

### IX.10.3 Interprétation des résultats

#### a) Contraintes horizontales derrière le mur

L'examen de l'évolution des contraintes horizontales derrière le mur (figure IX.41), appelle les observations suivantes :

- La courbe suit la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale en valeur absolue est de  $(73,382 \text{ KN/m}^2)$ , proche de celle obtenue par le calcul déterministe  $(73,250 \text{ KN/m}^2)$ ,
- La valeur de la contrainte horizontale en tête de mur est de  $(59,647 \text{ KN/m}^2)$ , aussi proche de celle trouver par le calcul déterministe  $(59,134 \text{ KN/m}^2)$ ,
- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums,
- On remarque sur la figure IX.41 que l'évolution des contraintes horizontales derrière le mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques) est significative par rapport au calcul avec couches homogène.

#### b) Déplacements horizontaux derrière le mur

L'examen de l'évolution des déplacements horizontaux derrière le mur (figure IX.43), appelle les observations suivantes :

- La courbe suit la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale en valeur absolue est de  $(7,578 \text{ mm})$ , proche de celle obtenue par le calcul déterministe  $(7,628 \text{ mm})$ ,
- Les courbes des déplacements horizontaux derrière le mur suivent une courbe linière avec des maximums à la base du mur,
- On remarque sur la figure IX.43 que l'évolution des déplacements horizontaux derrière le mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques) est significative par rapport au calcul avec couches homogène, donc une légère variation de contrainte implique des déplacements significatifs.

#### c) Contraintes verticales à la base du mur

L'examen de l'évolution des contraintes verticales à la base du mur (figure IX.46), appelle les observations suivantes :

- La courbe suit la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale en valeur absolue est de  $(182,597 \text{ KN/m}^2)$ , proche de celle obtenue par le calcul déterministe  $(182,274 \text{ KN/m}^2)$ ,

- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums,
- On remarque sur la figure IX.46 que l'évolution des contraintes verticales à la base du mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques) est significative par rapport au calcul avec couches homogènes.

#### **d) Déplacements verticaux à la base du mur**

L'examen de l'évolution des déplacements verticaux à la base du mur (figure IX.48), appelle les observations suivantes :

- La courbe suit la même allure que celle obtenue dans le calcul déterministe,
- La valeur maximale est de (5,171 mm), proche de celle obtenue par le calcul déterministe (5,145 mm),
- Les courbes des déplacements verticaux à la base du mur suivent une courbe linéaire avec des maximums à l'arête aval de la base,
- L'incertitude sur les déplacements verticaux symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne de calcul « base du mur » (figure IX.49), suit la même allure que la courbe des déplacements verticaux à la base du mur et atteint sa valeur la plus grande au point où on a enregistré le plus grand déplacement verticales à la base du mur,
- Le plus grand écart-type se trouve au point où on observe le plus grand écart entre la courbe des maximums et celle des minimums, c'est-à-dire au point coïncidant avec l'arête aval du mur le mur,
- On remarque sur la figure IX.48 que l'évolution des déplacements verticaux à la base du mur en fonction des différents calculs (courbes moyenne, max et min pas identiques), est significative par rapport au calcul avec couches homogènes, donc une légère variation de contrainte implique des déplacements significatifs.

## **IX.11 COMPARAISON DES DIFFÉRENTES ANALYSES EFFECTUÉES**

### **IX.11.1 Introduction**

La solution probabiliste du problème de la stabilité des murs de soutènements est elle influencé par la variabilité des paramètres de sol ? L'incertitude augmente-t-elle en fonction de la dimension de l'analyse ? Donc il est intéressant d'examiner l'effet de la dimension de la variabilité spatiale dans le cas d'une analyse probabiliste.

### **IX.11.2 Résultats des calculs**

Les résultats des vingt premiers calculs des quatre séries de calcul sont comparés sur les figures IX.50 à IX.61.

Les résultats de tous les cas étudiés sont montrés dans les figures numérotés 50 à 61. On montre l'évolution de la moyenne arithmétique des déplacements et des contraintes à la base du mur et derrière le mur (figures IX.50, IX.53, IX.56 et IX.59).

De même nous avons montrés dans les figures qui suivent (figures IX.51, IX.54, IX.57 et IX.60) l'évolution des maximums et des minimums des contraintes et des déplacements de tous les cas analysés.

Les différents écart-types obtenues dans les différents calculs sont représentés et comparés dans les figures IX.52, IX.55, IX.58 et IX.61.

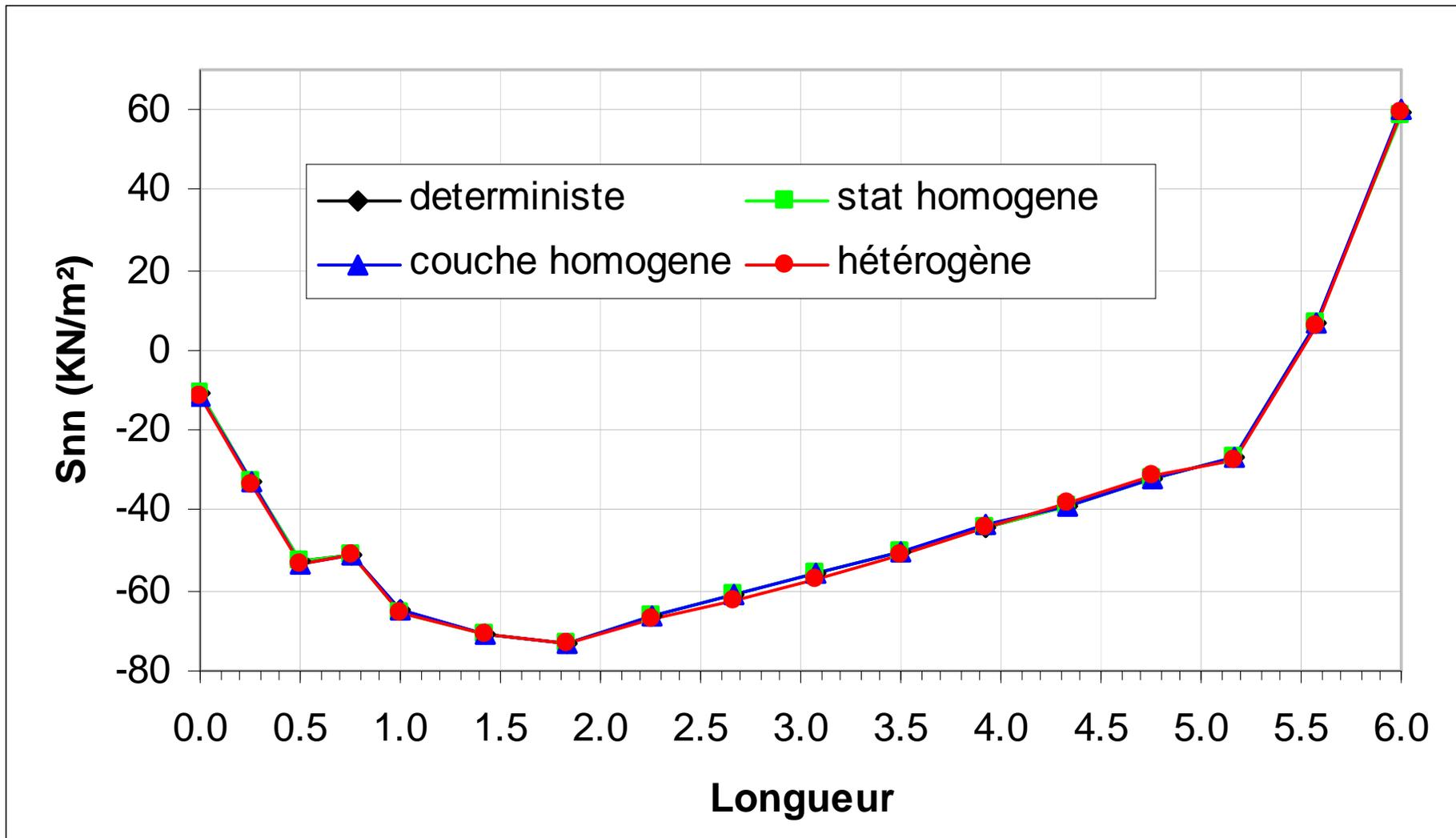


Figure IX.50 Contraintes horizontales moyennes derrière le mur pour les différents calculs

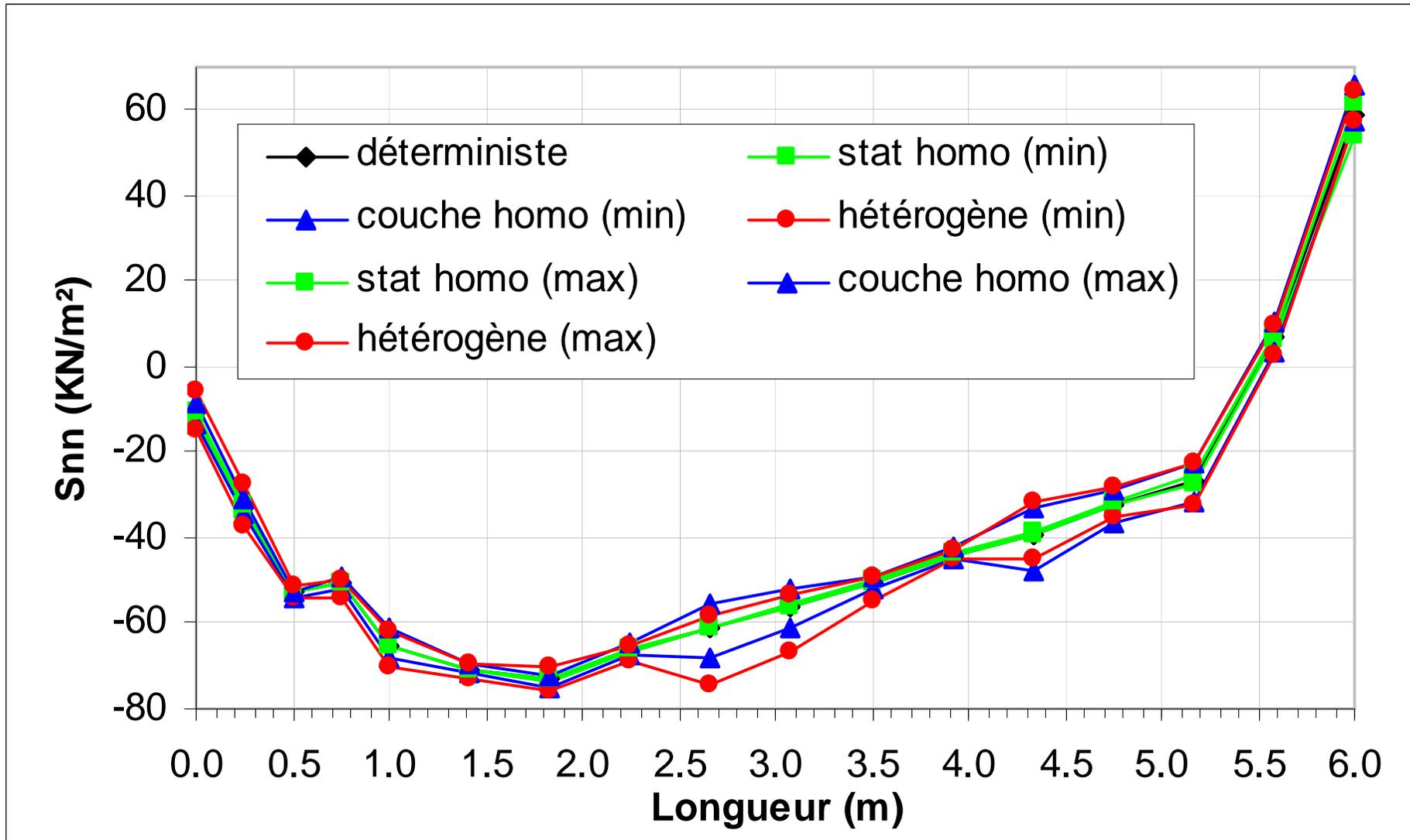


Figure IX.51 Contraintes horizontales max et min derrière le mur pour les différents calculs

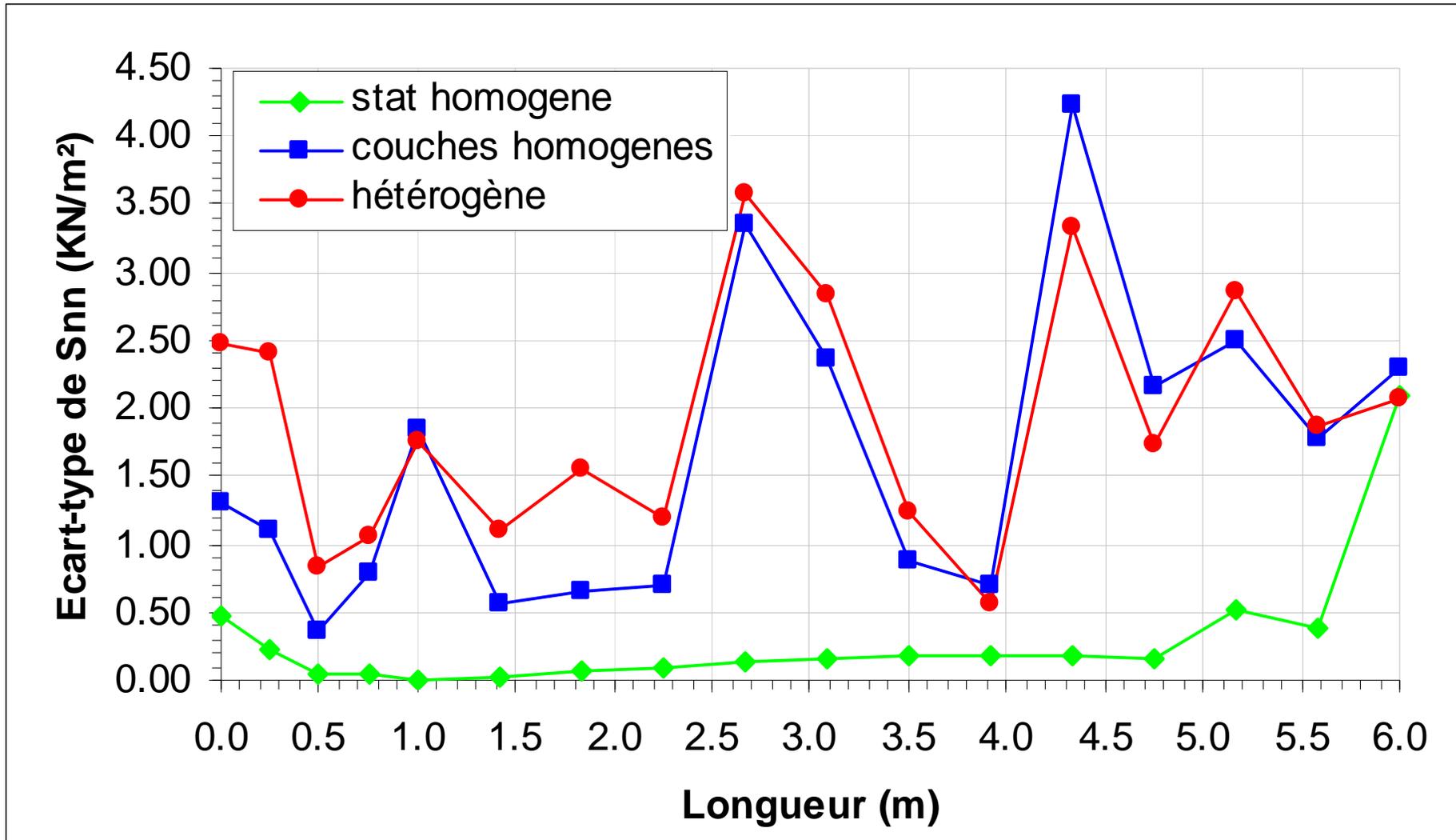


Figure IX.52 Evolution des écart-types des contraintes horizontales derrière le mur pour les différents calculs

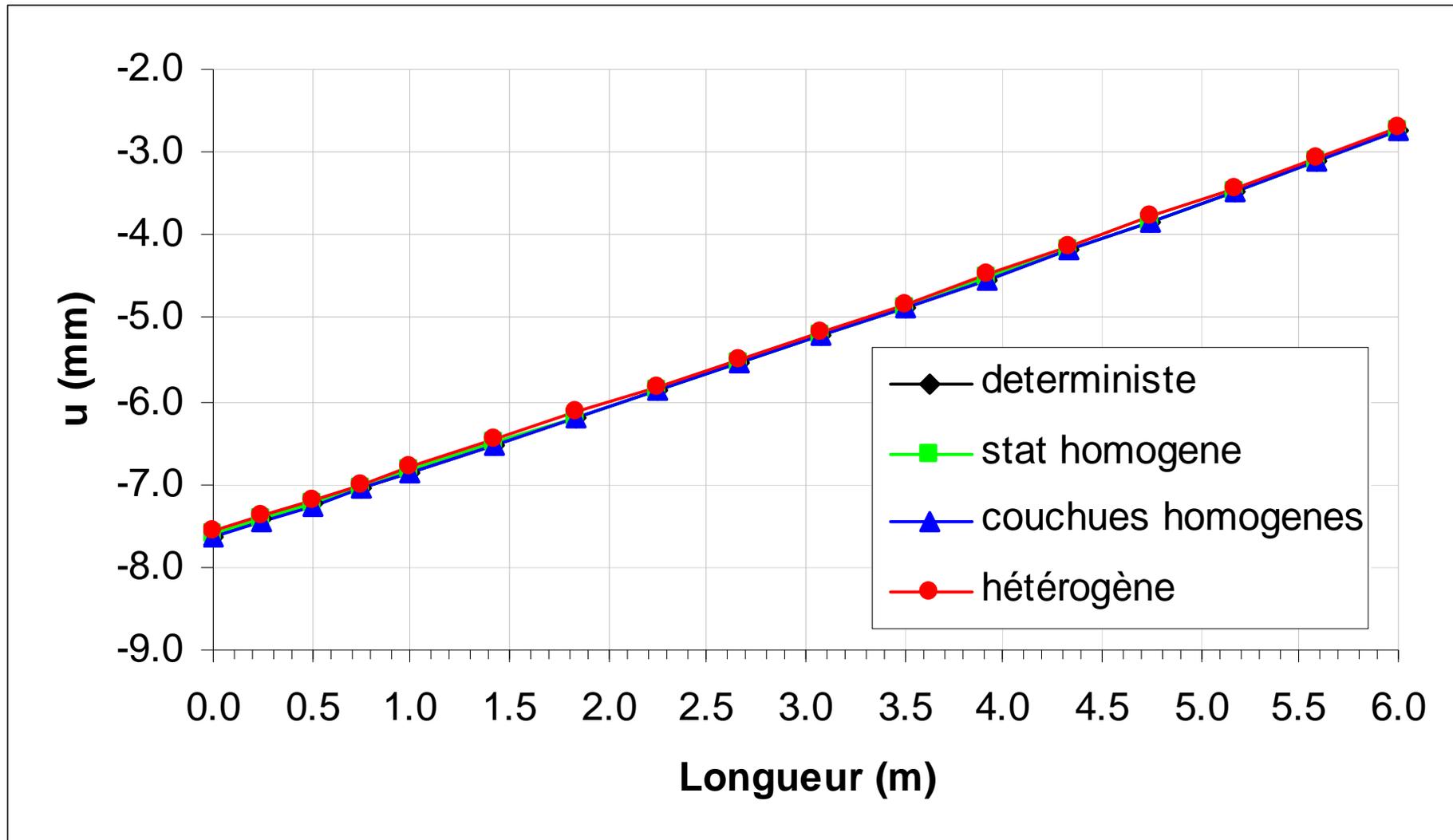


Figure IX.53 Déplacements horizontaux moyens derrière le mur pour les différents calculs

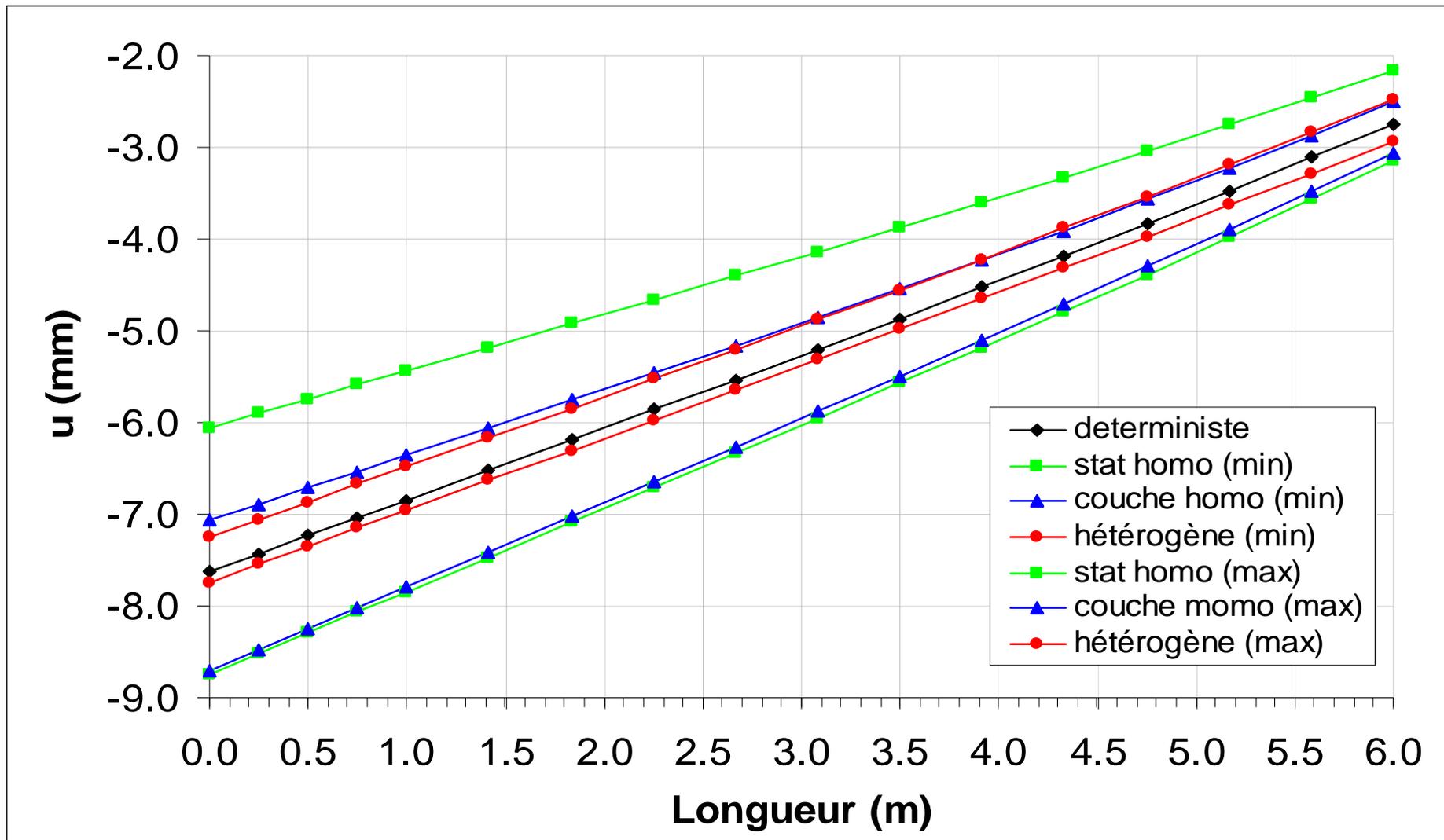


Figure IX.54 Déplacements horizontaux max et min derrière le mur pour les différents calculs

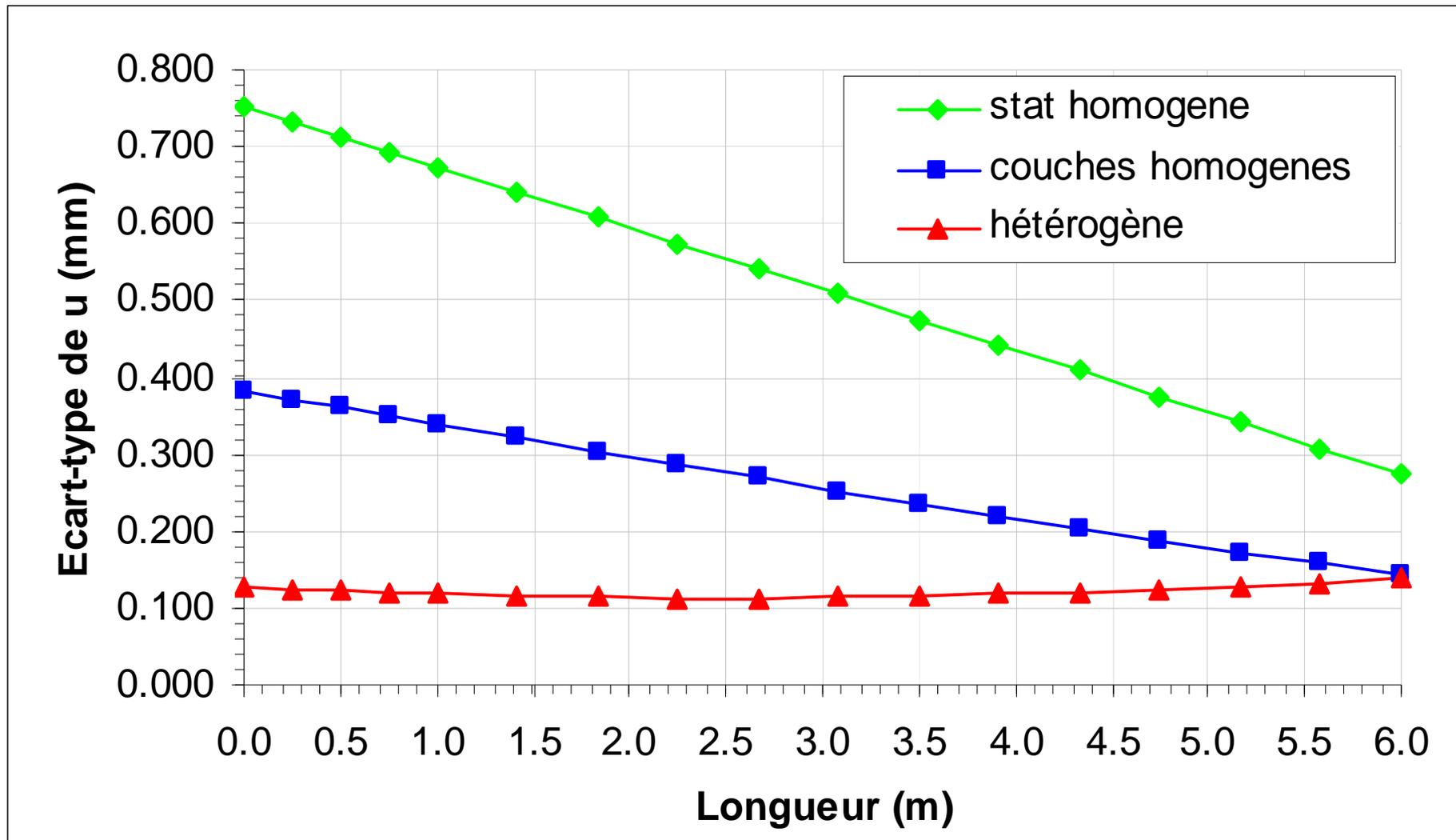


Figure IX.55 Evolution des écart-types des déplacements horizontaux derrière le mur pour les différents calculs

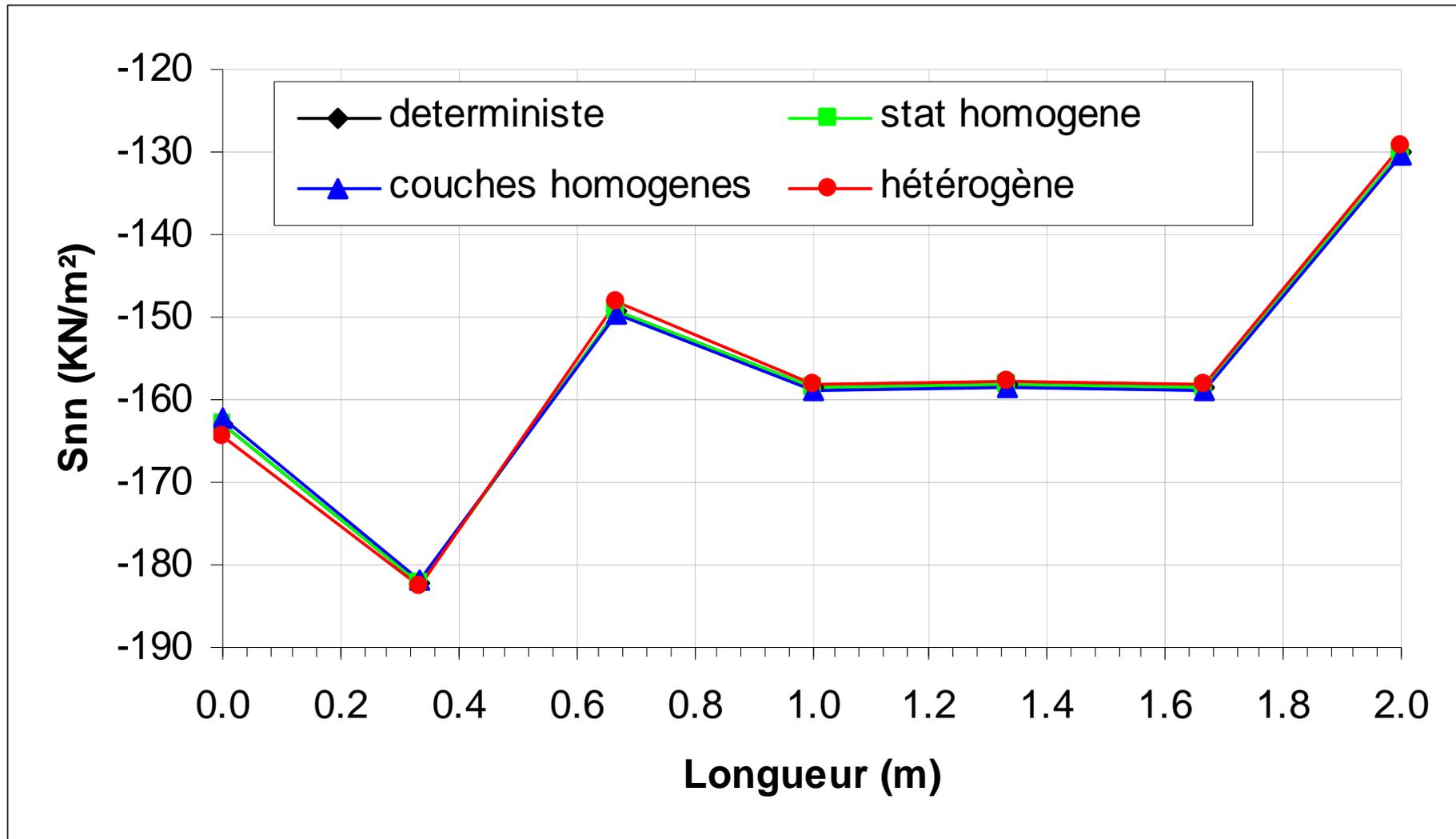


Figure IX.56 Contraintes verticales moyennes à la base du mur pour les différents calculs

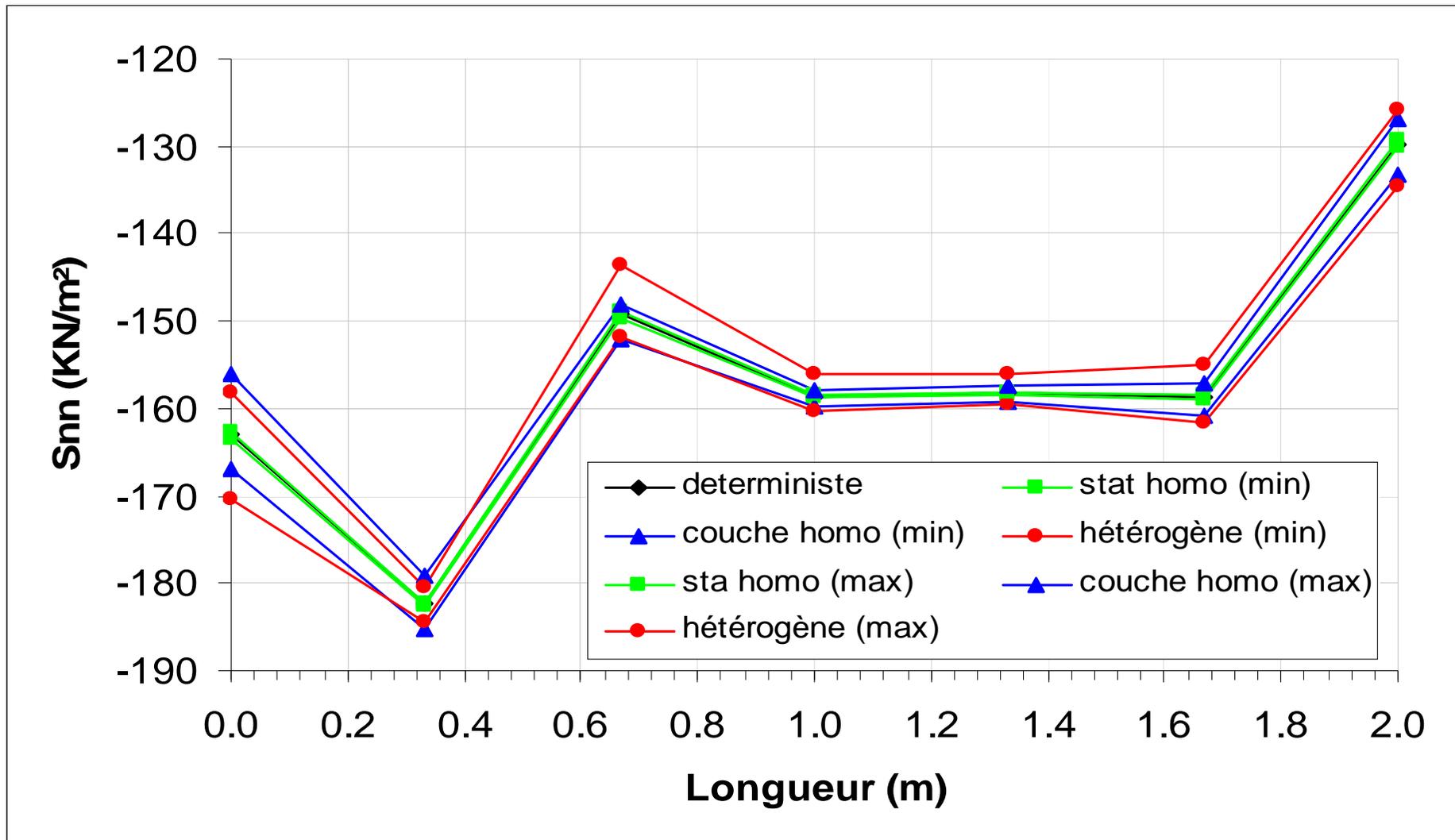


Figure IX.57 Contraintes verticales max et min à la base du mur pour les différents calculs

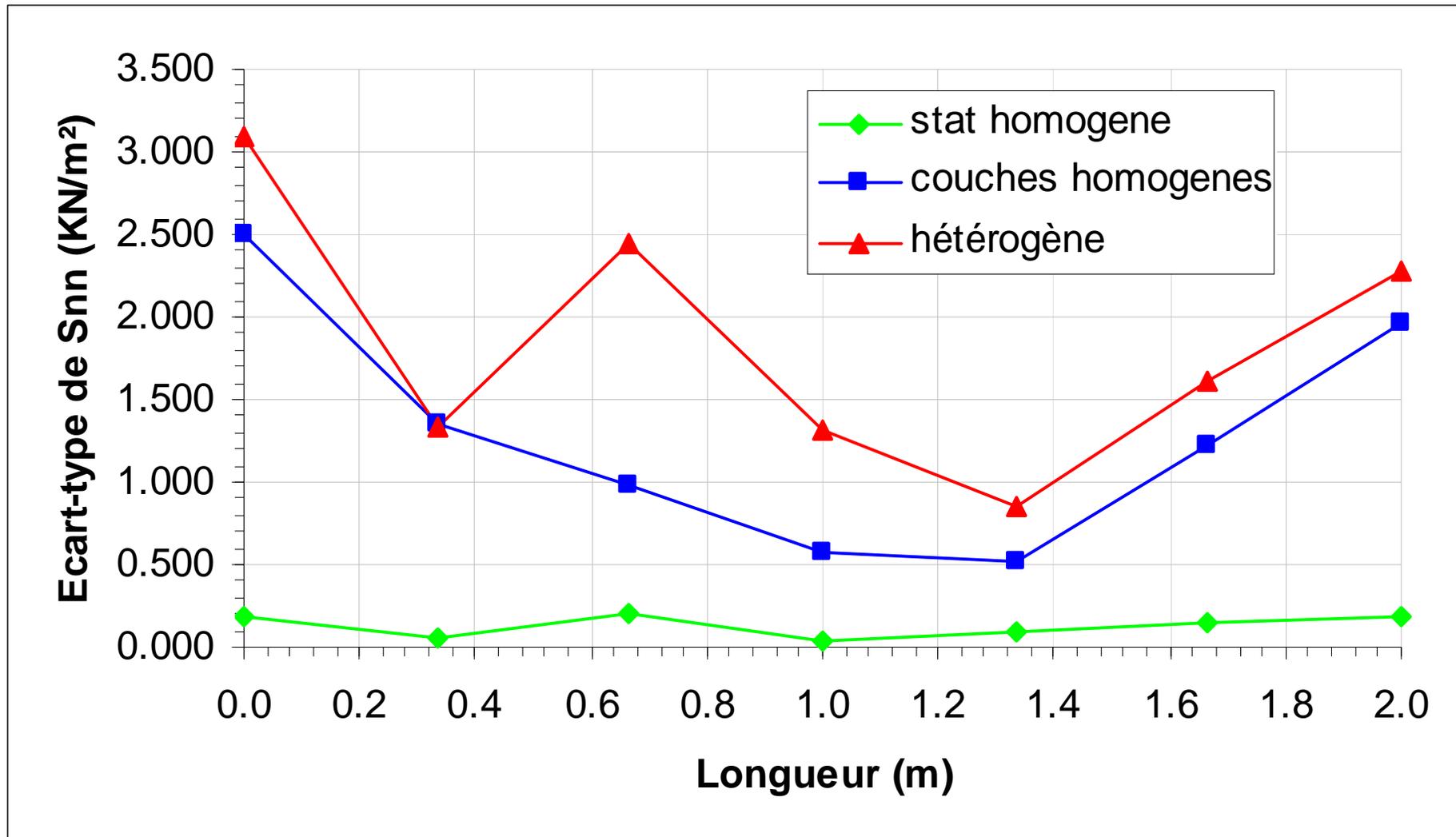


Figure IX.58 Evolution des écart-types des contraintes verticales à la base du mur pour les différents calculs

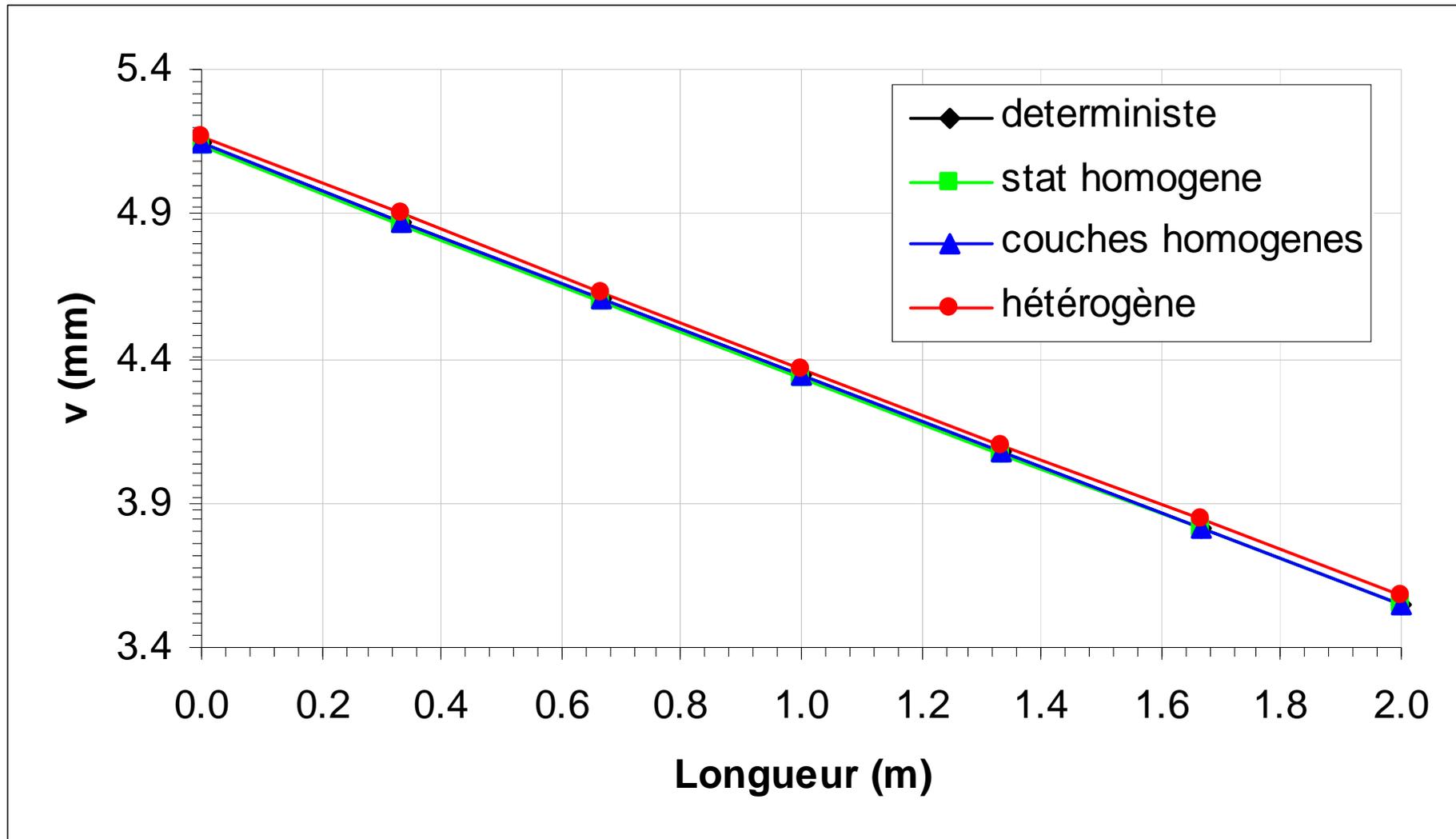


Figure IX.59 Déplacements verticaux moyens à la base du mur pour les différents calculs

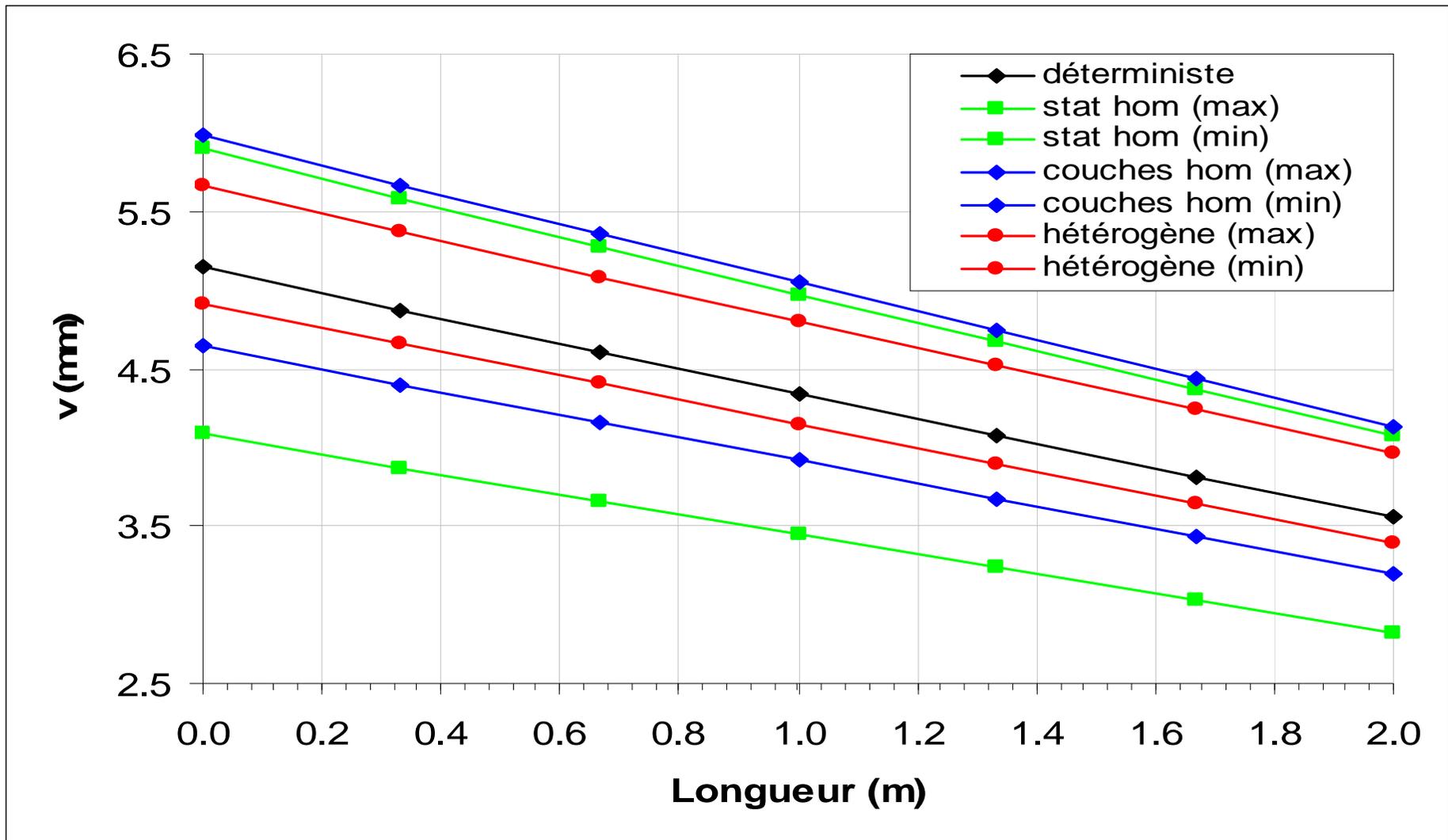


Figure IX.60 Déplacements verticaux max et min derrière le mur pour les différents calculs

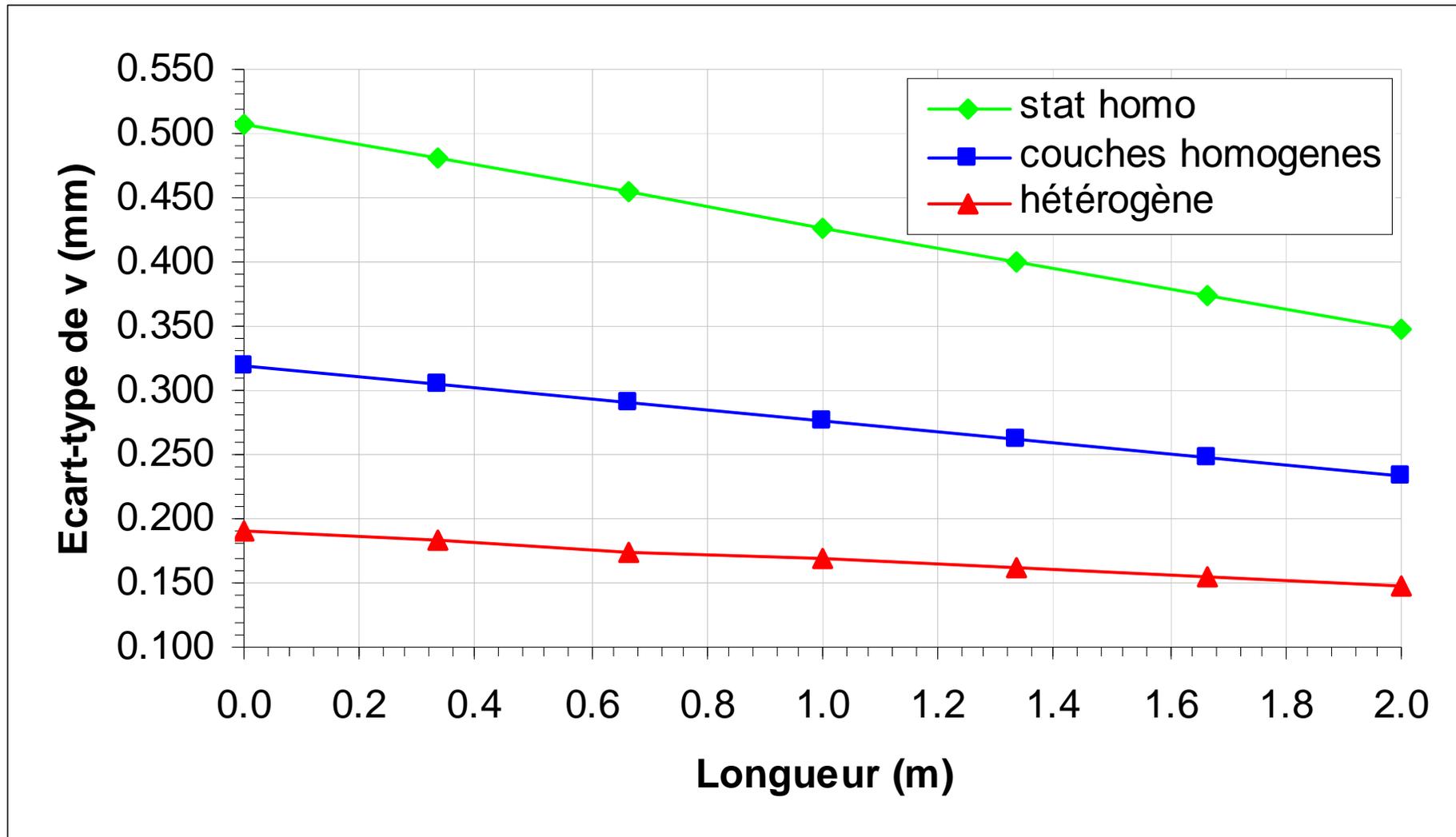


Figure IX.61 Evolution des écart-types des contraintes verticales à la base du mur pour les différents calculs

### **IX.11.3 Comparaison des résultats obtenus**

Il apparaît clairement que, quelles que soient les caractéristiques imposées à la variabilité du sol, les valeurs moyennes des contraintes et des déplacements sont proches du cas déterministe.

#### **a) Contraintes horizontales derrière le mur**

Après observation des résultats illustrés dans les figures IX.50 à IX.52, on note que :

- Les valeurs des contraintes horizontales moyennes derrière le mur pour les différents cas de calcul sont presque identiques à celles obtenues par le calcul déterministe
- La figure IX.52 compare les incertitudes sur les contraintes horizontales derrière le mur obtenues dans les différents calculs étudiés auparavant
- L'aspect hétérogénéité des caractéristiques de sol a plus d'effet sur l'incertitude. De manière générale un calcul hétérogène surestime l'incertitude sur le calcul des contraintes horizontales derrière le mur
- L'incertitude sur les contraintes horizontales derrière le mur est plus faible dans le cas du calcul statistiquement homogène.

#### **b) Déplacements horizontaux derrière le mur**

De même, un examen des résultats illustrés dans les figures IX.53 à IX.55, nous amène à remarquer que :

- Les valeurs des déplacements horizontaux moyens derrière le mur pour les différents cas de calcul sont presque identiques à celles obtenues par le calcul déterministe.
- La figure IX.55 compare les incertitudes sur les déplacements horizontaux derrière le mur obtenues dans les différents calculs étudiés auparavant.
- L'aspect statistiquement homogène des caractéristiques de sol a plus d'effet sur l'incertitude. De manière générale un calcul statistiquement homogène surestime l'incertitude sur le calcul des déplacements horizontaux derrière le mur.
- L'incertitude sur les déplacements horizontaux derrière le mur est plus faible dans le cas du calcul hétérogène.

#### **c) Contraintes verticales à la base du mur**

L'évolution des contraintes verticales à la base du mur illustrées sous formes de courbes dans les figures IX.56 à IX.58 appellent les remarques suivantes :

- Les valeurs des contraintes verticales moyennes à la base du mur pour les différents cas de calcul sont presque identiques à celles obtenues par le calcul déterministe,
- La figure IX.58 compare les incertitudes sur les contraintes verticales à la base du mur obtenues dans les différents calculs étudiés auparavant,
- L'aspect hétérogénéité des caractéristiques de sol a plus d'effet sur l'incertitude. De manière générale un calcul hétérogène surestime l'incertitude sur le calcul des contraintes verticales à la base du mur,
- L'incertitude sur les contraintes verticales à la base du mur est plus faible dans le cas du calcul statistiquement homogène.

#### **d) Déplacements verticaux à la base du mur**

Les figures IX.59 à IX.61 appellent les remarques suivantes :

- Les valeurs des déplacements verticaux moyens à la base du mur pour les différents cas de calcul sont presque identiques à celles obtenues par le calcul déterministe,
- La figure IX.61 compare les incertitudes sur les déplacements verticaux à la base du mur obtenues dans les différents calculs étudiés auparavant,
- L'aspect statistiquement homogène des caractéristiques de sol a plus d'effet sur l'incertitude. De manière générale un calcul statistiquement homogène surestime l'incertitude sur le calcul des déplacements verticaux à la base du mur,
- L'incertitude sur les déplacements verticaux à la base du mur est plus faible dans le cas du calcul hétérogène.

Les incertitudes relatives aux contraintes, caractérisées par les écart-types, sont petites dans le cas d'analyse statistiquement homogène, grandes dans le cas avec couches homogènes. Elles sont les plus élevées dans le cas hétérogène (dernier cas analysé).

Les incertitudes sur les déplacements augmentent du cas statistiquement homogène au calcul hétérogène en passant par le calcul avec couches homogènes. Donc l'incertitude sur les déplacements diminue avec l'augmentation de la variabilité.

# *CONCLUSION*

## CONCLUSION GENERALE

Le présent travail fait partie d'une série de recherches consacrées à l'évaluation de l'effet de la variabilité spatiale sur le comportement des ouvrages.

Lors des premières applications des statistiques et probabilités aux domaines hétérogènes, où la variation des paramètres ne peut avoir de représentation fonctionnelle (mathématique), on a cru pouvoir révolutionner les schémas de calculs classiques basés sur des hypothèses approximatives, ces dernières étant alors nécessaires pour passer outre les difficultés posées par la variabilité du matériau.

C'est tout à fait logiquement que la plupart des auteurs se consacrent d'abord et surtout à la caractérisation de la variabilité des propriétés physiques et mécaniques du matériau (sol, béton, ...). L'objectif de ces auteurs était l'étude de la variabilité des propriétés des sol, d'abord par les méthodes classiques (loi de distribution, paramètres statistiques, ...), ensuite, plus tard, en tenant compte d'une variation spatiale éventuelle des paramètres, par les fonctions d'autocorrection et les notions de krigeage (analyse structurale).

Ensuite, progressivement, on a remis en cause les divers schémas classiques, basés sur des hypothèses approximatives. Tel fut le cas du coefficient de sécurité et de la consolidation des sols de massifs argileux.

Les éléments de calculs, dans l'approche probabiliste (choix des paramètres de base, lois de distribution attribuées à ces paramètres, relations éventuelles entre ces paramètres, méthodes numériques, autres sources d'incertitudes telle que l'incertitude statistique,...), sont souvent différents, d'un auteur à l'autre. Seule la technique de simulation de Monte Carlo et la méthode numériques par éléments fins semblent faire l'unanimité, depuis l'apparition des moyens de calcul puissants (ordinateur).

Dans notre cas, c'est aussi la technique de simulation de Monte Carlo et la méthode de calcul numérique par éléments finis, le programme CESAR-LCPC, qui ont été utilisés pour analyser, d'un point de vue stochastique, la stabilité des murs de soutènement.

Les propriétés de sol, considérées comme variables aléatoires, sont la déformabilité et l'angle de frottement. La loi de distribution normale est choisie pour représenter la répartition des valeurs de ces deux paramètres.

Les résultats essentiels des trois séries de calculs (deux séries de 100 calculs et une série de 20 calculs) peuvent être résumés comme suit :

- L'incertitude sur les contraintes horizontales symbolisée par l'écart-type, le long de la ligne de calcul (derrière le mur) atteint sa valeur la plus grande au voisinage du point au on a enregistré la plus grande contrainte horizontale derrière le mur.
- L'incertitude sur les déplacements horizontaux le long de la ligne de calcul (derrière le mur), atteint sa valeur la plus grande à la tête du mur, ensuite elle décroît jusqu'à 2,25 m pour remonter ensuite jusqu'au pied du mur.
- L'incertitude sur les contraintes verticales le long de la ligne de calcul (base du mur), suit une allure semblable à celle des contraintes verticales à la base du mur et atteint sa

valeur la plus grande au voisinage du point au on a enregistré la plus grande contrainte verticale derrière le mur.

- L'incertitude sur les déplacements verticaux, le long de la ligne de calcul (base du mur), suit la même allure que la courbe des déplacements verticaux à la base du mur et atteint sa valeur la plus grande au point au on a enregistré le plus grand déplacement verticales derrière le mur.

Le travail décrit dans le présent rapport n'a pas pris en compte tous les facteurs d'incertitudes. C'est le cas, par exemple, de l'anisotropie, dont la variabilité dans le sol est évidente, ou de l'incertitude statistique, liée au nombre d'essais réalisés et à l'implantation des sondages. Ces sources d'incertitudes mériteraient des recherches complémentaires.

Par contre, il est d'autres facteurs ou concepts que certains auteurs introduisent dans leurs études mais qui peuvent n'avoir, en réalité, aucun impact sur la solution, ou ne doivent pas être pris en compte. C'est le cas, par exemple, des corrélations entre certains paramètres, admises par les uns et refusées par les autres.

Si l'on exclut les incertitudes résultant de la méthode numérique, la technique de simulation de Monte Carlo est bien appropriée pour donner les écarts de la solution du problème de la stabilité des murs de soutènement, à condition que l'outil permettant de décrire la variabilité des paramètres soit fidèle et de recenser tous les facteurs qui influent sur la solution.

## ***REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES***

1. Jean Costet, Guy Sanglerat, (1983), « Cours pratiques de mécanique des sols, 2. Calcul des ouvrages » Editions Dunod, Paris.
2. M. Cave, M. Leveillard, M. Sandrolini, M. Jalil, M. Crepet, M. Perchat, Jean perchat, (1995), « Le treillis soude, calcul et utilisation conformément aux regles bael 91 modifiées 99 et textes associés, chapitre 5 : les murs de soutènement » adets.
3. Mourad Karry, (2009), « GCI- Mécanique des sols II » Universiré de sherbrooke.
4. Berga Abdelmadjid, (2003 – 2004), « Eléments de mécanique des sol » Centre Universitaire de Béchar, PP, 176-208.
5. Gouri Dhatt, Gilbert Touzot, Emmanuel Lefrançois, (2005), « Méthode des éléments finis » Editions LAVOISIER, Paris.
6. Yves Debard, (2009), « Méthode des éléments finis : élasticité plane » Institut Universitaire de Technologie du Mans.
7. Ali Bouheraoua, (1989), « Influence de la variabilité des propriétés du sol sur la consolidation des massifs de sols argileux », Thèse de doctorat de l'université paris 6.
8. Rahmani Naima, (2010), « Méthodes stochastiques de calcul de stabilité des pentes » Université Mouloud Mammeri - Tizi Ouzou.
9. Bouakiz Laura, (2009), « Etat de l'art des techniques d'analyse des massifs de sols hétérogènes » Université Mouloud Mammeri - Tizi Ouzou.
10. Pierre HUMBERT, Alain DUBOUCHET (LCPC), Gérard FEZANS, David REMAUD (Itech), (2005), « CESAR-LCPC, un progiciel de calcul dédié au genie civil », Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées – 256 - 257, Juillet - Août-septembre 2005- Réf. 4573 – PP.7-73.
11. Didacticiel CESAR-LCPC version 4.0, (2004), Editions itech.
12. CESAR-LCPC, Version 4.0, Manuel de référence CLEO2D, (2002), LCPC-Itech.
13. Philippe MESTAT, Pierre HUMBERT, Alain DUBOUCHET, (2000), « Recommandations pour la vérification de modèles d'éléments finis en géotechnique », Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées -229- Novembre - Décembre 2000 - Réf. 4347 - PP.33-51.

14. Philippe MESTAT, (1997), « Maillages d'éléments finis pour les ouvrages de géotechnique conseils et recommandations », Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées -212- Novembre – Décembre 1997 – Réf. 4161 – PP.39-64.
15. Ramdane BAHAR, (2006), « Sols et Fondations », GECOTEC, Groupement des CTC, Formation continue, programme 2006, Tec 101, Alger 25-26-27 Juin 2006.
16. Jean-Pierre MAGNAN, (1982), « Les méthodes statistiques et probabilistes en mécanique des sols » Presse de l'ENPC France.