

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la A Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

Mémoire de Fin d'Etude de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et technologie

Filière : Génie électrique

Spécialité : ENTRAINEMENT ELECTRIQUE

Présenté par :
NAIT SAID Aghiles

Thème
**Modélisation d'une torche à plasma
d'induction**

Mémoire soutenu publiquement le 29 septembre 2014 devant le jury composé de :

<i>Mr HOCINI Farid</i>	<i>Maitre de conférence classe B</i>	<i>UMMTO</i>	<i>Président</i>
<i>Mr MOHELLEBI Hassane</i>	<i>Professeur</i>	<i>UMMTO</i>	<i>Promoteur</i>
<i>Mr NAIT OUSLIMANE Ahmed</i>	<i>Maitre assistant Classe B</i>	<i>UMMTO</i>	<i>Co-promoteur</i>
<i>Mme BOUALI Ferroudja</i>	<i>Maitre assistante classe A</i>	<i>UMMTO</i>	<i>Examinatrice</i>
<i>Mme YOUSFI Ghania</i>	<i>Doctorante</i>	<i>UMMTO</i>	<i>Examinatrice</i>

Promotion:2013/2014

Remerciements

Louange a celui qui sans lui rien ne sera fait, merci à celui qui est le plus parfait.

Je tiens en premier lieu à remercier Monsieur Hassane MOHELLEBI Professeur à L'UMMTO mon promoteur de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire pour réaliser mon projet. Je le remercie de m'avoir permis d'effectuer ce travail dans les meilleures conditions et de m'avoir permis de découvrir le monde de la recherche scientifique. Je le remercie également de m'avoir soutenu tout au long de ce travail et consacré le temps nécessaire.

Je remercie vivement Monsieur Ahmed NAIT OUSLIMANE Maitre assistant Classe B Co-promoteur pour l'énorme aide qu'il m'a apporté, pour sa présence et son soutien durant toute la période du projet.

Je remercie Monsieur Farid HOCINI Maitre de conférence classe B pour son aide précieuse et de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Je remercie Mme BOUALI Ferroudja Maitre assistante classe A et Mme YOUSFI Ghania Doctorante d'avoir accepté de participer au jury en tant qu'examinatrices.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

DÉDICACES

JE DÉDIE CE TRAVAIL

À MA MÈRE ET MON PÈRE

À MA SŒUR ET MES FRÈRES

ET À TOUS CEUX QUI ME SONT CHERS

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I Chauffage par induction des plasmas

Introduction.....	01
I.1.Chauffage par induction électromagnétique	01
I.1.1.Catégories de chauffage électrique (électrothermie)	01
I.1.2.Principes du chauffage par l'induction électromagnétique	02
I.1.3.Chauffage par plasma	03
I.1.3.a. Définition du Plasma.....	03
I.1.3.b. Génération d'un Plasma	04
1. Principe	04
2. Fréquences dans un plasma	05
I.1.3.c. Grandeurs Caractéristiques des Plasmas.....	06
1. Température des espèces	06
2. Taux d'ionisation	07
3. Longueur de Debye λ_D	08
3. Pression	08
I.1.3.d. Classification des Plasma	09
a. Les Plasmas chauds (étoiles, plasma de fusion)	10
b. Les Plasmas thermiques (ETL).....	10
c. Les Plasmas froids (hors ETL).....	11
I.1.3.e. Technologie par Plasma	11
1. Les Plasmas Thermiques	11

2. Plasma à Couplage Direct (DCP).....	12
3. Plasma à Couplage Inductif (ICP)	12
I.1.4.f. Les Torches ICP	13
1. Définition	13
2. Construction des torches ICP	13
3. Amorçage d'une torche ICP et Aspects électromagnétiques	15
a. Amorçage et puissance de maintien.....	15
b. Champ EM et épaisseur de peau	16
c. Couplage inducteur – induit	17
4. Les Installations des Torches ICP	19
a. Applications des Torches ICP	20
Conclusion	22
CHAPITRE II Modélisation mathématique de la torche ICP	
Introduction.....	23
II.1.phénomène électromagnétique.....	23
II.1.1.Equations de Maxwell	23
II.1.2.Relations constitutives du milieu.....	24
II.1.3.Loi d'OHM.....	24
II.1.2.Formulation magnétodynamique.....	25
II.2.1.Modèle magnétodynamique	26
II.2.Formulation en coordonnées cylindriques axisymétriques	27
II.3.Modèle thermique	30
II.3.1.Transfert de chaleur	30

a. Les modes de transfert de chaleur	30
b. Formulation vectorielle.....	31
b.1. Formulation en coordonnées cylindriques	32
II.4. Termes de couplage.....	33
II.4.1. Les termes sources.....	33
a. Les propriétés physiques variant avec la température T.....	33
Conclusion.....	37
 CHAPITRE III Modélisation numérique et résolution du phénomène magnétothermique	
Introduction.....	38
III-1. Méthode des différences finis	38
III-2. Méthode d'intégrale de frontières	38
III-3. Méthode des éléments finis	39
III.3.1. Principe de la méthode.....	40
III.3.2. Discrétisation du domaine d'étude.....	41
a) Eléments de référence.....	41
b) Fonction d'interpolation.....	42
III-3-3. Formulation variationnelle	43
III-3-4. Formulation résidus pondérés	44
III-3-5. Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis	45
a. Les avantages	45
b. Les inconvénients	45
III-4. Les méthodes mixtes	45
III-4-1. Eléments finis / éléments frontières.....	45
III-4-2. Eléments finis / Equations intégrales.....	46

III-5. Formulations éléments finis des modèles d'équations électromagnétiques et thermiques	47
III-5-1. Les étapes de déroulement de la méthode des éléments finis	47
III-5-1-1. L'équation aux dérivées partielles	47
III-5-1-2. D'une équation aux dérivées partielles a une intégrale	47
III-5-1-3. Discrétisation du domaine	47
III-5-1-4. Ecriture matricielle	48
III-5-1-5. Résolution du système matriciel	48
III-5-1-6. Utilisation du vecteur solution [A].....	48
III-5-2. Implémentation informatique de la méthode des éléments finis....	48
III-5-3. Formulation éléments finis de l'équation magnétodynamique en terme de potentiel vecteur A en coordonnées cartésiennes 2D	49
III-5-3-1. Hypothèse simplificatrice.....	49
III-5-3-2. Conditions aux limites	49
a-Condition de <i>Dirichlet</i>	49
b-Condition de <i>Newman</i>	49
c-Condition mixte <i>Dirichlet-Newman</i>	49
III-5-4. Formulation éléments finis de l'équation de conduction de chaleur en coordonnées cartésiennes 2D	52
a .Régime transitoire	52
III-5-5. Formulation éléments finis de l'équation du couplage magnétothermique.....	52
III-5-6. Méthode de résolution des systèmes matriciels	54
Conclusion.....	56
CHAPITRE IV Applications et résultats	
Introduction.....	57
IV.1. Géométrie du dispositif.....	57
IV.2. Les régions du système	58
IV.3. Maillage éléments finis.....	58
IV.4. caractéristiques physiques.....	59

IV.4.1.La conductivité électrique	59
IV.4.2.Conductivité thermique.....	59
IV.4.3.Chaleur spécifique.....	60
IV.4.4.La masse volumique.....	60
IV.4.5.Densité de puissance	60
IV.5.Potentiel vecteur magnétique.....	60
IV.6.Température	61

Conclusion

CONCLUSION GENERALE

Introduction Générale

Introduction générale

L'avancement de la technologie et le développement technique dans les domaines de la physique, notamment dans la physique appliquée ; l'électronique de puissance, l'élaboration de nouveaux matériaux tels que les composites ...etc., ont permis l'apparition de nouveaux dispositifs répondant aux besoins de la recherche et de l'industrie.

Les torches à plasma constituent un exemple de développement d'importance et on peut citer pour preuve de l'avancement sur tous les plans, la conception de dispositifs de torches à plasma de forme et de comportement complexes. Ils sont le siège de plusieurs phénomènes couplés et complexe. Ce qui explique la complexité de leurs études et par conséquent le recours à des méthodes numériques de simulation devient inéluctable.

Notre étude se base sur la modélisation d'une torche à plasma d'induction en vue de mettre en évidence l'influence et l'interdépendance des phénomènes mis en jeu particulièrement ceux relatifs à la magnétothermique. Le couplage entre les phénomènes électromagnétiques et thermiques a été considéré dans le cadre de cette étude et la variation de certains paramètres dans le temps et en fonction de la température on fait l'objet d'investigations.

La plan de travail suivi concerne des généralités sur l'échauffement par phénomènes induits avec une introduction aux plasmas et particulièrement les plasmas thermiques. Le premier chapitre se termine par la présentation d'applications dédiées aux torches à plasma.

Au deuxième chapitre est présentée la modélisation mathématique qui découle des développements liée à la modélisation électromagnétique et thermique des phénomènes intervenant dans les torches à plasma. Les formulations vectorielles puis, celles associées aux cordonnées cylindriques sont alors déduites.

Pour le troisièmes chapitre, il débute par une présentation des méthodes numériques de calcul en se basant sur la méthode des éléments finis. Cette dernière est utilisée pour fournir une solution numérique approchée du problème à équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites associées.

Au quatrième chapitre, le modèle couplé magnéto-thermique développé est mis en œuvre sous environnement Matlab puis appliqué à la modélisation des phénomènes magnéto-thermiques mis en jeu.

Les résultats obtenus à partir de la modélisation par éléments finis seront fournis.

L'étude se termine par une conclusion générale

.....

Chapitre I

**Chauffage par induction des
plasmas**

.....

INTRODUCTION

Les travaux de Hittorf[1], G.I.Babat[2] et T.B.Reed [3] ont été les principales bases des torches à plasma inductif, ils ont beaucoup fait évoluer cette branche de la science qui est la physique des plasmas, confondue au départ avec la physique des décharges dans les gaz et décrite par des lois qualitative que quantitative.

De nos jours, les recherches sont très développées dans cette branche qui touche à plusieurs domaines (Electrothermie, Electromagnétisme, Thermodynamique, Mécanique des fluide...) cependant notre compréhension de ses phénomènes est plus avancée ainsi que la maîtrise des paramètres de leurs fonctionnement.

Dans ce chapitre, le lecteur va se familiariser avec les phénomènes d'induction électromagnétique, les plasmas leurs différents types et classes, et essentiellement les plasmas thermiques d'induction, les dispositifs qui leurs sont associés et enfin, quelques applications des torches à plasma inductif.

I.1.Chauffage par induction électromagnétique

I.1.1.Catégories de chauffage électrique (électrothermie)

Une des propriétés les plus remarquables de l'électricité comme source d'énergie thermique est son caractère protéiforme : elle est, en effet, mobilisable sous des formes très diverses en fonction du mode de transmission de l'énergie électrique. Les **procédés électrothermiques** peuvent être divisés en deux grandes catégories :

— le chauffage **indirect** où la transmission d'énergie de la source vers le récepteur (corps à chauffer) obéit aux lois usuelles de la thermique ;

— le chauffage **direct** où le récepteur, parcouru par un courant électrique, est lui-même le siège du dégagement de chaleur, les échanges ultérieurs de chaleur s'effectuant selon les lois de la thermique classique.

Le tableau 1 dresse la liste des différentes **technologies** électrothermiques se répartissant entre ces deux familles.

Chauffage direct	Chauffage indirect
Chauffage direct par résistance : conduction, chauffage ohmique	Chauffage indirect par résistances
Chauffage par induction	Chauffage par rayonnement infrarouge
Chauffage diélectrique :	Chauffage indirect par arc électrique
- Haute fréquence	Chauffage par plasma
- Hyperfréquence (micro-ondes)	
Chauffage par bombardement électronique	
Chauffage par laser	
Chauffage direct par arc électrique	

Tableau I.1 : Les différentes technologies électrothermiques directes et indirectes.

I.1.2.Principes du chauffage par l'induction électromagnétique

Le chauffage par induction électromagnétique fait partie des techniques électrothermiques qui permettent de chauffer un matériau sans contact direct avec une source d'énergie électrique. Il consiste à plonger le corps à chauffer dans un champ électromagnétique variable dans le temps, et à dissiper sous forme de chaleur l'énergie entrant dans le corps. Il se distingue cependant nettement des autres techniques (infrarouge et micro-ondes) par la nature des matériaux chauffés et par la bande de fréquence électrique utilisée, c'est-à-dire par la profondeur de pénétration et par les densités de puissance de chauffage obtenues. En effet, de par son principe, il ne s'applique qu'aux matériaux conducteurs de l'électricité, c'est-à-dire aux matériaux de résistivité électrique comprise entre $10^{-8} \Omega.m$ (cuivre) et $10^{-1} \Omega.m$ (verres fondus). La bande de fréquence employée est comprise entre la fréquence industrielle de 50 Hz et quelques mégahertz, si bien que les profondeurs de pénétration s'étagent entre quelques micromètres et quelques centimètres. Les densités de puissance surfacique peuvent atteindre 10^5 kW/m^2 .

On peut caractériser les performances de cette technique de chauffage par le produit fréquence-puissance et en suivre ainsi l'évolution. Depuis l'époque où le chauffage par induction faisait appel aux groupes tournants, ce produit a notablement augmenté. En effet, ces premiers générateurs ont été peu à peu remplacés par des convertisseurs statiques et, jusqu'à ces dernières années, le produit fréquence-puissance était classiquement de 100 à 1 000 kHz.kW. Actuellement, la tendance forte est d'augmenter la fréquence et la puissance des installations. On peut arriver ainsi à des valeurs fréquence-puissance de l'ordre de 250 000 kHz.kW !! (comme c'est le cas, pour le soudage au défilé des tubes d'acier ou des torches à plasma inductif de forte puissance).

Tout cela suppose un développement parallèle des matériels électrotechniques nécessaires tels que les condensateurs, les transformateurs, les inducteurs refroidis par l'eau,

le câblage anti-inductif dit couramment « aselfique », etc., qui constituent la technologie moderne du chauffage par induction.

Comme dans tout problème de chauffage, la puissance nécessaire au type de traitement thermique recherché est imposée par la masse à chauffer, la température à atteindre et le temps de chauffe. Pour concevoir ou conduire un procédé de chauffage par induction, les questions à résoudre sont d'ordre électromagnétique pour optimiser le transfert de puissance entre la source et le matériau, puis d'ordre thermique pour connaître le champ de température et son évolution dans le temps.

Une fois définie la puissance nécessaire, trois étapes sont en général à franchir :

En premier lieu, se pose la question du choix de la **fréquence de travail**. En effet, ce choix conditionne la profondeur de pénétration et permet donc de localiser la source thermique plus ou moins au voisinage de la surface du matériau. De ce choix dépend la nature du générateur à utiliser.

En second lieu, il faut assurer la **maîtrise du transfert** entre l'inducteur et le matériau de façon à obtenir la puissance injectée nécessaire au traitement recherché. Cette étape permet de définir la forme et la constitution de l'inducteur, puis l'adaptation correcte de l'inducteur au générateur.

Enfin, il faut s'assurer que l'**évolution des températures et leurs répartitions** dans le matériau correspondent bien au but recherché. Bien que cette dernière étape relève plus de considérations thermiques qu'électromagnétiques, elle ne doit pas être négligée. La réussite de l'opération de chauffage en dépend [4]

Dans notre cas le matériau considéré est un gaz fortement ionisé (plasma) et le chauffage est du type indirect, le chauffage par plasma qui sera le sujet du point suivant.

I.1.3. Chauffage par plasma

I.1.3.a. Définition du Plasma

Dans les conditions usuelles, un milieu gazeux ne permet pas la conduction de l'électricité. Un gaz pur est considéré comme un isolant parfait, car il ne contient aucune particule libre chargée (électrons ou ions positifs). Les électrons libres et les ions positifs peuvent apparaître selon plusieurs conditions : si on soumet le gaz à un champ électrique de forte intensité ou à des températures suffisamment élevées, si on le bombarde de particules, ou s'il est soumis à un champ électromagnétique très intense.

A l'origine, un plasma désignait un gaz ionisé globalement neutre, puis cette définition a été étendue aux gaz partiellement ionisés dont le comportement diffère de celui d'un gaz neutre. Aujourd'hui, on parle de plasma lorsque la matière que l'on observe contient un grand

nombre de particules de natures différentes qui peuvent interagir entre elles et avec l'environnement : c'est une soupe d'électrons, cations, anions, atomes neutres, ... etc.

Pour caractériser un plasma, il faut tenir compte du nombre d'espèces présentes et de leurs différents états de charge, puis étudier l'évolution de la densité, de la température et de la fonction de distribution dans l'espace et le temps, cela pour toutes les réactions susceptibles de se produire, qu'elles soient chimiques ou nucléaires, sans oublier les processus qui peuvent avoir lieu tels que le cas où si le processus de recombinaison entre électrons et ions n'équilibrent pas le processus d'ionisation, le plasma est dit hors d'équilibre thermodynamique. L'étude complète de tous les phénomènes apparaissant dans un plasma est à ce jour impossible, il en résulte une simplification initiale nécessaire à la distinction et au classement des plasmas.

I.1.3.b. Génération d'un Plasma

1. Principe

L'énergie nécessaire à la formation d'un plasma peut avoir différentes sources. On trouve des plasmas dans la nature, par exemple sur le soleil aussi bien que dans des éclairs et des flammes mais aussi dans des phénomènes atmosphériques tel que les "aurores boréales". La génération d'un plasma par l'homme fait appel à trois éléments principaux :

- 1- Une source de puissance électrique,
- 2- Un couplage assurant le passage de la puissance électrique à la décharge,
- 3- Une décharge ionisant le gaz.

Le gaz à ioniser est injecté dans une enceinte confinée sous vide partiel ou à pression atmosphérique. Le plasma est ensuite généré par l'action d'une décharge électrique dans le gaz, qui a pour rôle de transférer de l'énergie à ce gaz pour l'exciter et l'ioniser. En effet, dû à leur faible masse, les électrons libres récupèrent l'essentiel de cette énergie et provoquent, par collisions avec les particules lourdes du gaz, leur excitation et ionisation est donc l'entretien du plasma. Le comportement des ions et des électrons dans un plasma dépend de la fréquence excitatrice appliquée par le générateur. On définit une fréquence d'oscillation plasma électronique f_{pe} ou ionique f_{pi} comme la fréquence à laquelle oscille un électron (respectivement un ion) autour de sa position d'équilibre lorsqu'il est soumis à une perturbation (un champ électrique ou magnétique).

2. Fréquences dans un plasma

On distingue plusieurs types des décharges électriques selon les techniques de leur génération, les plasmas les plus répandus sont ceux des radiations incidentes de champ électrique. Selon la fréquence du courant appliquée continue ou alternative (50 Hz, à audio (kHz), à radiofréquence (MHz) et micro-onde (GHz)), on fait la différence entre les décharges dans le plasma :

- Les décharges électriques en courant continu (DC) qui consistent à appliquer un champ électrique intense entre deux électrodes placées dans l'enceinte. La décharge est un arc électrique pour lequel le couplage est résistif. Il est assuré par le gaz lui-même en contact avec les deux électrodes [5],
- Les décharges sans électrodes produites par un champ électromagnétique variable de type basse fréquence où haute fréquence. L'étude des décharges HF, radiofréquences (ex. torches) ou micro-ondes (ex. réacteur PECVD)[6],

Si la décharge alimentée en continu ou bien en radiofréquences est accompagnée d'un champ magnétique, on a une décharge de type magnétron [7]. La présence d'un champ magnétique intense dans un champ électromagnétique micro-onde conduit à un processus d'excitation du plasma à la résonance cyclotronique électronique (ECR). Le type de décharge est choisi en fonction du type d'application ou d'étude qu'on veut réaliser [8].

Le fonctionnement des décharges en mode alternatif ne se résume pas simplement à la succession de décharges continues instantanées. Tout dépend de la valeur de la fréquence f , ou pulsation ($\omega=2\pi f$), par rapport aux deux pulsations propres du plasma (Tab I.1), ($\omega_{pi}=2\pi f_{pi}$) dont l'inverse donne le temps caractéristique de réponse des ions, et ($\omega_{pe}=2\pi f_{pe}$), dont l'inverse donne le temps caractéristique de réponse des électrons données par :

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2}, \quad \omega_{pi} = \left(\frac{n_i e^2}{m_i \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad \text{I.1}$$

Où n_e , n_i sont les nombres de particules électron et ions par unité de volume respectivement, m_e et m_i la masse d'électron et d'ion successivement.

décharge continues ou DC	$f = 0$
décharge basse fréquence (BF)	$\omega < \omega_{pi} < \omega_{pe}, f < 100\text{kHz}$
décharge haute fréquence (HF) décharge radiofréquence (RF)	$\omega_{pi} < \omega < \omega_{pe}, 1\text{ MHz} < f < 100\text{MHz}$ typiquement $f = 3\text{MHz}$ (13.56MHz)
décharge très haute fréquence (VHF) Décharge micro-onde	$\omega \leq \omega_{pe}, f > 100\text{MHz}$ typiquement $f = 2.45\text{ GHz}$

Tableau I.2: Classification des plasmas en fonction de la fréquence d'excitation

Ces décharges en mode alternatif sont actuellement très largement utilisées dans l'industrie car elles peuvent être amorcées plus aisément que les décharges continues et permettent de traiter des matériaux isolants. Parmi elles, les décharges RF sont particulièrement importantes dans les industries de haute technologie, pour l'élaboration de micro et de nano-structures.

I.1.3.c. Grandeurs Caractéristiques des Plasmas

Outre de la fréquence de fonctionnement, il existe encore plusieurs paramètres caractérisant le plasma notamment : la température des espèces, taux d'ionisation, la pression et la concentration.

1. Température des espèces

On distingue deux températures T_e et T_i différentes qui caractérisent le plasma [9, 10], la première est celle des électrons et la deuxième celle des espèces lourdes (ions). Les électrons, particules très légères par rapport aux ions et aux neutres, sont fortement accélérés par les champs électriques et/ou magnétiques et jouent un rôle tout particulier. Il est donc plus facile de donner de l'énergie aux électrons qu'aux espèces plus lourdes (ont moins d'inertie). ce qui mène à différencier alors les plasmas selon leur température en :

- Plasmas bitempérature, la température (l'énergie cinétique) des électrons est très supérieure à celle des ions $T_e \gg T_i$ (hors équilibre thermodynamique). Les ions sont considérés comme froids, non réactif (plasma froid), et seulement les électrons ont acquis assez d'énergie pour effectuer des réactions essentiellement chimiques.
- Plasmas chauds les ions également énergétiques (chauds et réactifs) pour influencer le comportement du plasma. Les deux plus importantes caractéristiques de ce plasma sont l'égalité entre la température des particules légères (électron) et celle des particules lourdes ($T_e = T_i$) d'une part et l'existence d'un équilibre chimique d'autre part, on dit que le plasma est en équilibre thermodynamique local (ETL).

Dans les plasmas, on mesure l'énergie cinétique des électrons (ou des ions) par leur température exprimée souvent en eV ($1 eV=11600K$). En physique statistique :

$E_c \sim k_B T$, cette dénomination faite référence à l'énergie des ions. Pour des systèmes à l'équilibre, elle est reliée à l'énergie cinétique moyenne de toutes les particules par la relation :

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad 1.2$$

Où k_B est la constante de Boltzmann et v la vitesse moyenne des électrons.

Ce n'est plus le cas des plasmas froids où l'essentiel de la température est due au mouvement des électrons. Toutefois, à la pression, il a été montré que l'hypothèse de l'ETL pouvait être maintenue.

2. Taux d'ionisation

Un corps à l'état gazeux peut être transformé par l'énergie en un mélange d'ions positifs A^+ , d'électrons e^- et de particules résiduelles non ionisées. Un plasma est donc un ensemble de particules chargées et de particules neutres, qui bougent aléatoirement dans toutes les directions, qui est globalement neutre (voir, longueur de Debye). On dit parfois qu'un plasma est un gaz ionisé et l'on définit alors le taux d'ionisation du plasma « α » par la relation :

$$\alpha = \frac{n_e}{(n_e + n_0)} \quad 1.3$$

Où n_e et n_0 : sont les densités électronique et de neutre par unité de volume.

Si $1 \ll \alpha$ alors le plasma sera dit « faiblement » ionisé et si $\alpha \approx 1$ alors il est dit « fortement » ionisé.

Le degré d'ionisation peut varier de 10^{-7} - 10^{-4} pour les milieux faiblement ionisés, à 10^{-1} - 10^0 pour les plasmas fortement ionisés. Pour les plasmas de décharge, il est compris entre 10^{-4} et 10^{-2} . Si on rapproche le degré d'ionisation des interactions particulières on pourra aussi classer selon les mêmes catégories :

Un gaz faiblement ionisé a des fréquences de collision électron-neutre (ν_{e0}) supérieures aux fréquences de collision électron-ion (ν_{ei}) ou électron-électron (ν_{ee}) :

$$\nu_{e0} \gg \nu_{ee}, \nu_{ei}$$

Et dans le cas où le gaz est fortement ionisé on aura alors :

$$v_{e0} < v_{ee}, v_{ei}$$

3. Longueur de Debye λ_D

On appelle longueur de Debye λ_D , la longueur sur laquelle les charges électriques (par exemple les électrons) écrantent le champ électrostatique dans un plasma ou un autre conducteur. Autrement dit, λ_D est la distance en dessous de laquelle une séparation significative des charges peut avoir lieu, il en résulte que la neutralité du plasma n'existe qu'à une échelle d'observation supérieure à λ_D . Afin d'assurer la quasi neutralité du plasma cette notion est importante pour concevoir leur dispositif (torche et réacteur).

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \cdot k_B \cdot T_e}{n_e e^2}} \quad 1.4$$

Le paramètre λ_D peut varier de quelques microns dans les plasmas de décharges (ou plasma denses) et plusieurs mètres dans les plasmas spatiaux.

4. Pression

La description des plasmas s'inspire de la physique des gaz et de la mécanique des fluides, et utilise des grandeurs macroscopiques. La figure suivante représente l'effet de la pression sur un type de plasma [11].

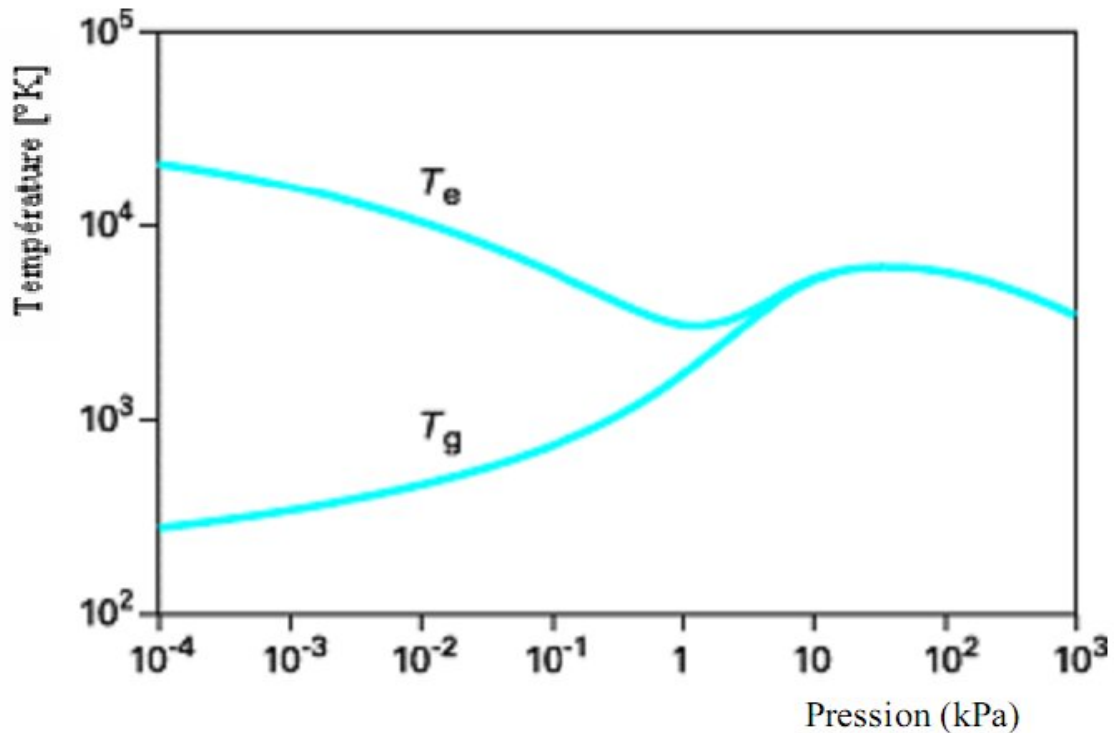


Figure I.1: Évolution des températures des électrons T_e et des particules lourdes T_g avec la pression dans un plasma thermique d'arc

On remarque, à basses pressions le plasma est caractérisé par deux températures cinétiques, celle des électrons T_e et celle du gaz T_g (particules lourdes), c'est le cas des plasmas froids (hors ETL). Cette absence d'équilibre permet d'obtenir un plasma dans lequel la température du gaz peut être voisine de l'ambiante alors que les électrons sont suffisamment énergétiques pour entraîner la rupture des liaisons moléculaires. Cette propriété rend ce type de décharge parfaitement adaptée aux réactions chimiques entre matériaux très sensibles aux effets de température (les composés organiques par exemple).

A haute pression le plasma (voisine ou supérieure à la pression atmosphérique) présente une température de l'espèce lourde (ions, atomes, molécules) voisine de la température des électrons ($T_e = T_g$).

D'une manière générale, le niveau de déséquilibre dépend fortement non seulement de la pression mais aussi de l'énergie transférée au plasma et de la densité volumique des espèces.

I.1.3.d. Classification des Plasma

La figure 2, représente une classification des différentes variétés de plasmas selon le type et la quantité d'énergie transférée au plasma. Ces propriétés varient en fonction de densité et de la température (ou énergie). Elle est suivie d'un tableau récapitulatif de cette classification.

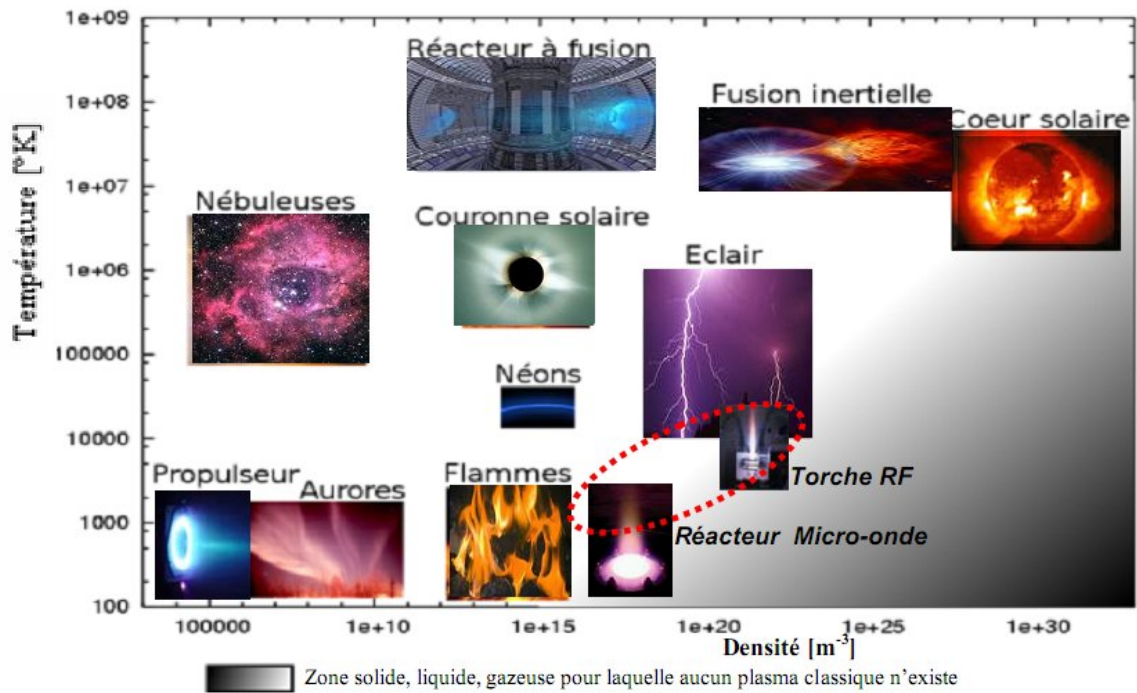


Figure I.2: Classification des plasmas (température de particule en fonction de la densité volumique)

<p>Plasmas chauds : <i>Réactions thermonucléaires (ET)</i> : étoiles, soleil, tokamaks, ...</p>	$T_e = T_i \approx 20 \times 10^6 \text{ K (20 keV)}$
<p>Plasmas froids : <i>Plasmas thermiques (ETL)</i> : plasmas très collisionnels (torches inductifs,..) <i>Plasmas froids (hors ETL)</i> : plasmas peu collisionnels (PECVD, ..)</p>	$T_e \approx T_i = T_g \approx >10\ 000 \text{ K (1 eV)}$ $T_e \approx 30\ 000 \text{ K } (\approx 3\text{eV}) \gg T_i = T_g = 300 \text{ K}$

Tableau I.3: Récapitulatif de quelques genres de plasmas

On déduit donc :

- a) **Les Plasmas chauds (étoiles, plasma de fusion)** : Dans ce cas la température des ions et des électrons est supérieure à 10 millions degrés. Le gaz est complètement ionisé en équilibre thermodynamique total (ET).
- b) **Les Plasmas thermiques (ETL)** : Les électrons, les ions et les neutres ont une température entre $6 \cdot 10^3$ et $25 \cdot 10^3$ °K. Ils correspondent à des densités d'électrons comprises entre 10^{20} et 10^{24} m^{-3} le gaz est presque totalement ionisé (proche de l'équilibre thermodynamique local) sous des pressions autour de la pression atmosphérique.

- c) **Les Plasmas froids (hors ETL)** : Ils se caractérisent par leur température ambiante et le gaz est ionisé par un champ électrique extérieur sous pression réduite (10^{-3} à 10^{-4} atmosphère) et hors équilibre thermodynamique local, dont seuls les électrons sont portés à haute température, plus de 1 eV, les autres particules (ions, radicaux, fragments de molécules, neutres stables) restent à température ambiante.

I.1.3.e. Technologie par Plasma

Les traitements par plasma sont d'actualité très étudiés dans différents domaines d'applications qu'ils touchent (santé, industrie, matériaux...). Parmi tous ces plasmas, nous limiterons notre étude aux plasmas thermiques qui sont principalement produits par des décharges inductives Radio Fréquence (RF) dans des torches.

Les plasmas thermiques ont des grandes puissances et demandent plus d'énergie pour leur création, ce qui fait que les installations qui les produisent sont moins nombreuses (coûteuses) et moins accessibles. Comparé aux plasmas froids économiques et préférables pour l'étude en laboratoire. Les scientifiques ont alors construit un savoir-faire expérimental, cherchant à optimiser un procédé physique simple, "propre", économique et utilisable en continu, actuellement largement appliqué dans les industries (gravure, décontamination de surfaces, dépôts CVD/PVD...)

1. Les Plasmas Thermiques

La principale caractéristique des plasmas thermiques est qu'ils sont générés à la pression atmosphérique ou à son voisinage (10^4 - 10^6 Pa). Ils relèvent de la cinétique classique et de l'équation de Boltzmann. Du fait de la pression, les collisions entre particules sont très nombreuses et l'ionisation est essentiellement due à un effet thermique. Dans ces plasmas, le champ électrique disparaît, il crée du courant mais n'agit pas sur le centre de masse (et au voisinage des électrodes dans les plasmas arcs) et les libres parcours moyens sont trop faibles pour produire un état d'ionisation par collision inélastique directe. L'ionisation est alors essentiellement un phénomène thermique du aux collisions élastiques. On distingue deux types de plasma thermique sont :

- Les plasmas d'arc (avec électrodes),
- Les plasmas inductifs (sans électrode).

Le transfert d'énergie de la source au plasma étant effectué soit par un couplage inductif, soit par un couplage capacitif (couplage direct). En couplage capacitif, le champ électrique à haute fréquence permet le maintien de la décharge par le biais du courant de déplacement. Cependant, cela implique des fréquences beaucoup plus élevées (13.56MHz) qu'en couplage inductif (3MHz), qui est assuré par le biais des courants induits.

2. Plasma à Couplage Direct (DCP)

Un plasma couplé direct (DCP, Direct Coupled Plasma en anglais) est généré par une décharge électrique entre deux électrodes avec une fréquence, typiquement la plus utilisée dans ce type de décharge, est de 13.56MHz. La puissance RF est couplée à la décharge à travers une capacité de blocage est aucune tension continue n'est appliquée à la cathode. Un gaz plasmagène, habituellement l'argon, est nécessaire. Des échantillons peuvent être déposés sur l'une des électrodes, ou s'ils sont conducteurs ils peuvent jouer le rôle d'électrode. Des échantillons solides isolants sont disposés à proximité de la décharge, de manière à ce que les atomes de gaz ionisés pulvérisent l'échantillon dans la phase gazeuse où les atomes à analyser sont stimulés. On fait souvent référence à ce processus de pulvérisation comme une stimulation par décharge lumineuse.

3. Plasma à Couplage Inductif (ICP)

Un plasma à couplage inductif (ICP, Inductively Coupled Plasma en anglais) peut être généré en dirigeant l'énergie d'un générateur HF (typiquement 3MHz) vers un gaz approprié, habituellement l'argon. L'hélium et l'azote sont aussi utilisés comme gaz plasmagène. Il est important que le gaz plasma soit pur, car des contaminants dans le gaz pourraient éteindre le dispositif inductif (ex. torche ICP).

Le principe du chauffage par courants de Foucault bien connu dans le chauffage des métaux s'applique de la même façon aux gaz ionisés. Le couplage est atteint par la génération d'un champ électromagnétique en faisant passer un courant électrique HF à travers une bobine d'induction refroidie. Cette dernière génère un flux magnétique oscillant rapidement, lorsque ce flux est variable et coupe d'autre conducteur (plasma), il peut entraîner en ceux-ci une force électromotrice et une puissance induite. A grande vitesse, les cations et les électrons, connus comme courant de Foucault, entreront en collision avec les atomes d'argon pour produire une ionisation supplémentaire, ce qui engendre une augmentation sensible de la température.

I.1.4.f. Les Torches ICP

1. Définition

La torche ICP, aussi appelée applicateur, est un outil industriel permettant de produire de très hautes températures supérieures aux méthodes conventionnelles (gaz, charbon...). D'autre part la torche à plasma est une méthode physique d'analyse chimique (l'analyse prend quelques minutes, hors préparation). Cette torche constitue une source spectroscopique [12,13]. Elle contient tous les atomes et les ions à analyser qui ont été stimulés par la chaleur du plasma. Elle a aussi d'autres applications tels que, les dépôts, traitement de déchets toxiques et pour le traitement de poudres,...

2. Construction des torches ICP

La torche comporte trois tubes concentriques avec une faible distance annulaire entre eux: Le tube externe, appelé tube de confinement du plasma généralement fabriqué souvent en quartz, son refroidissement dépend des puissances dissipées. Dans la zone de décharge, le tube de confinement est entouré par une courte bobine en cuivre (soit en inconel) alimentée par un courant (RF), refroidie par circulation d'eau, et qui comporte 3 ou 4 spires suivant les caractéristiques de l'alimentation RF. Le tube intermédiaire fabriqué, soit en quartz, soit en métal segmenté refroidi par circulation d'eau, descend environ jusqu'au niveau de la première spire. Il sert essentiellement à assurer un écoulement de gaz plasmagène, appelé le gaz périphérique assez rapide le long de la paroi interne du tube en quartz afin de réduire les pertes conductibles et convectives du plasma et de limiter la surchauffe du tube de confinement. Le gaz central, appelé plasmagène de débit est introduit, entre le tube intermédiaire et le tube central soit longitudinalement, c'est dans ce gaz qu'a lieu la décharge. Le débit de gaz au centre de la torche, appelé le gaz porteur, éventuellement injecté par le biais d'une sonde refroidie pouvant descendre à l'intérieur de la torche, permet d'introduire soit les réactifs par (exemple SiCl_4 et O_2), soit les poudres à traiter (échantillons).

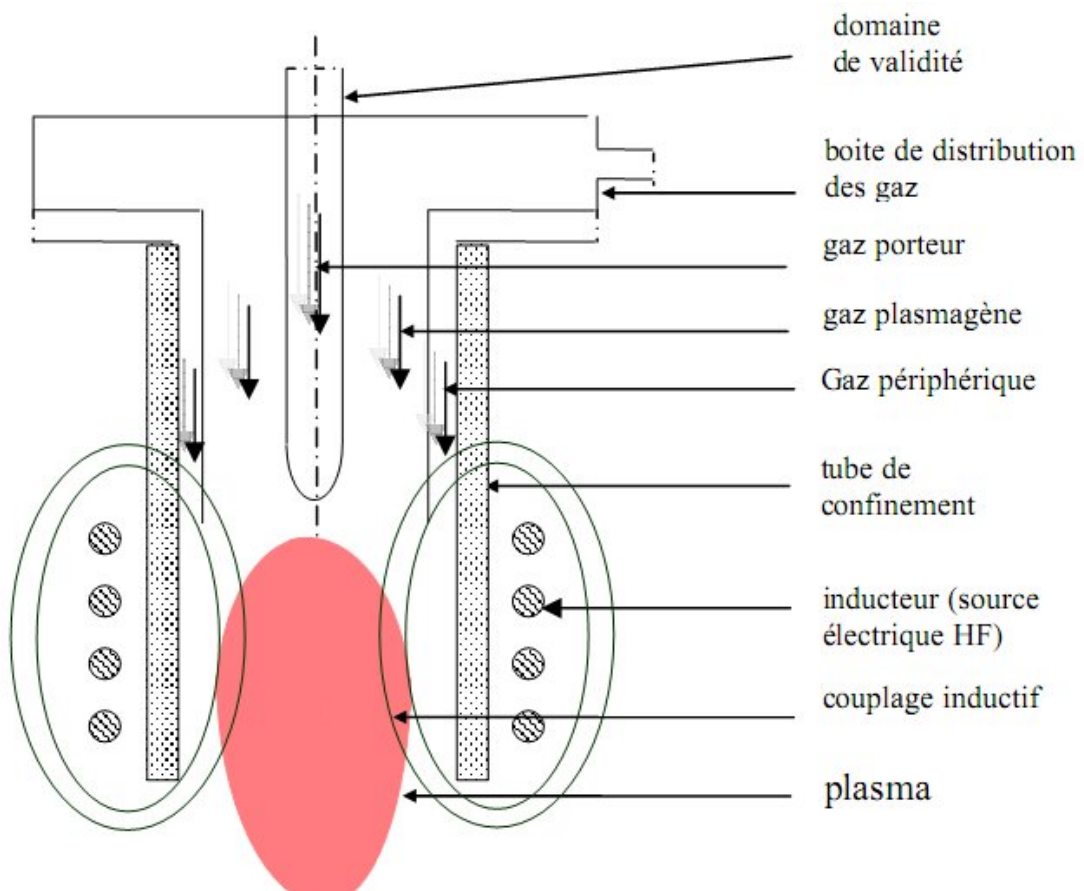


Figure I.3: Schéma de principe d'une torche ICP

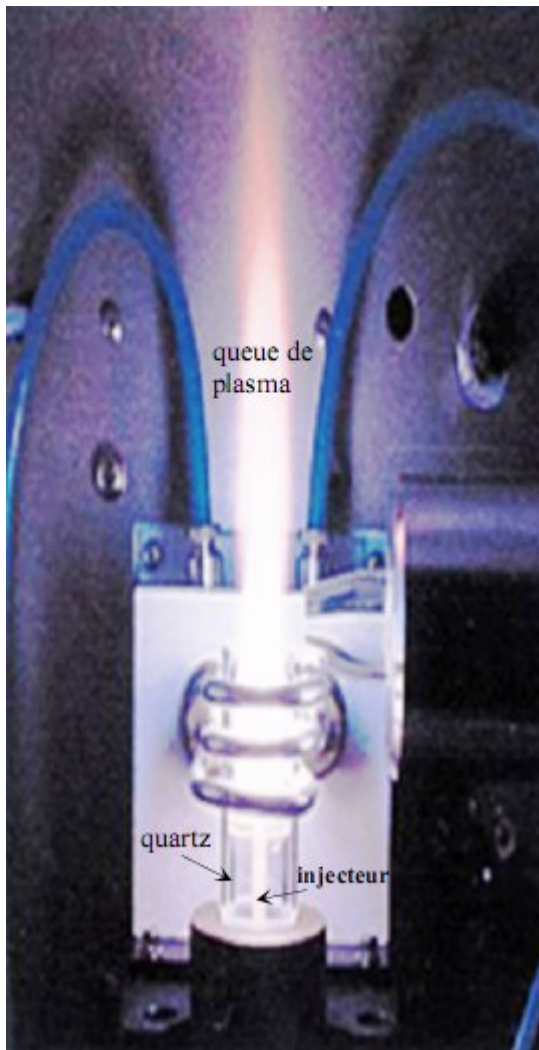


Figure I.4: Torche à plasma inductif à tube de quartz

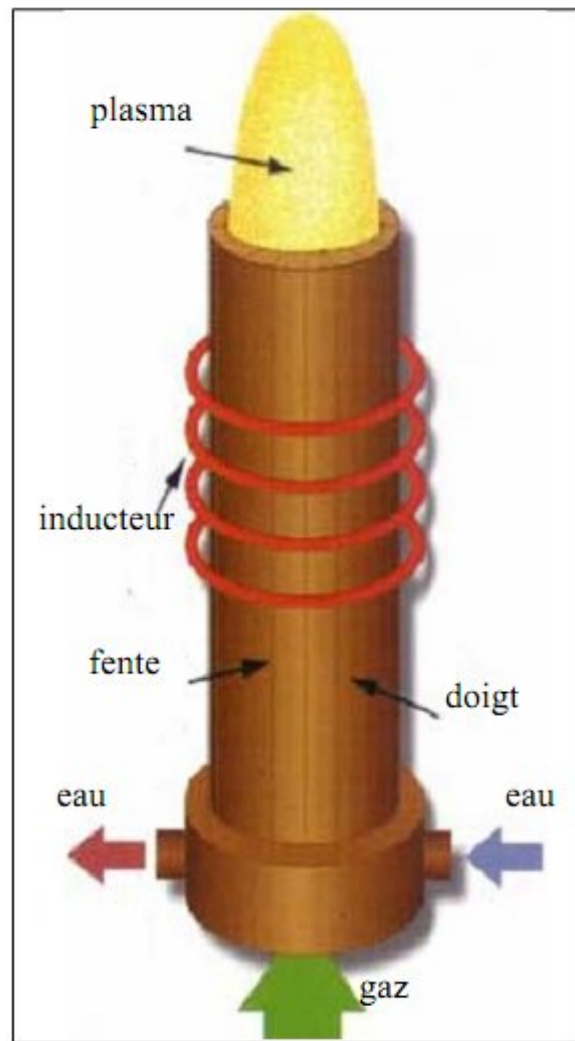


Figure I.5: Torche à plasma inductif à cage froide métallique

Selon la puissance utilisée et les fréquences RF de fonctionnement qui vont de 9,6kHz à 40MHz. La torche ICP opère sur une large gamme de puissance de l'ordre de 1kW à 1MW, avec des débits de gaz variant de 10 à 200 slpm (*standard liter per minute*). Les figures ci-dessus représentent deux types des torches construites selon la puissance. La première à tube de confinement (fig. 4), en quartz refroidi extérieurement par air pour des puissances inférieures à 20kW à 3 MHz. Les enceintes en quartz, même refroidies à l'eau, ne permettent pas de dépasser des puissances de 120 kW [14]. Une deuxième à cage froide métallique (fig. 5), reproduit à l'intérieur le champ magnétique créé par l'inducteur qu'elle voit à l'extérieur. Cette technologie permet d'atteindre des puissances très importantes. Et pour éviter le couplage avec la bobine au-delà de 100 kW et même à plus faible puissance lorsqu'on utilise des gaz diatomiques comme l'hydrogène. Un autre moyen pour augmenter la puissance de la torche, est d'élargir le rayon de cette dernière, et, par conséquent, d'une baisse de la fréquence de travail f (afin d'accroître δ (profondeur de pénétration)). Cependant, que la caractérisation du plasma étant plus délicate pour les torches de forte puissance, il est compréhensible que

ces torches soient moins étudiées, du point de vue expérimental que les torches d'analyses avec des tubes en quartz transparents, isolants et non refroidis.

3. Amorçage d'une torche ICP et Aspects électromagnétiques

a) Amorçage et puissance de maintien

Au moment de l'allumage du plasma, le générateur HF ne fournit pas une énergie suffisante pour créer l'ionisation directement à partir du gaz plasmagène. L'ionisation initiale est créée par décharge thermo-ionique soit: une pointe de graphite est plongée à l'intérieur de la torche près de l'inducteur puis retirée immédiatement après l'amorçage, soit par une étincelle provenant d'un transformateur de Tesla. Les électrons ainsi libérés sont accélérés par le champ HF et engendrent la réaction plasma par collision avec les atomes du gaz plasmagène. L'argon est souvent utilisé à l'amorçage car il s'ionise à plus faible énergie que les autres gaz plasmagènes (N_2 , H_2 , He). Le plasma est ensuite maintenu au moyen du chauffage du gaz par induction, en condition que la puissance fournie par le générateur HF le permet dans une pression donnée de travail. La figure 6 montre la puissance minimale nécessaire au maintien d'un plasma d'induction en fonction de la fréquence et la pression [15].

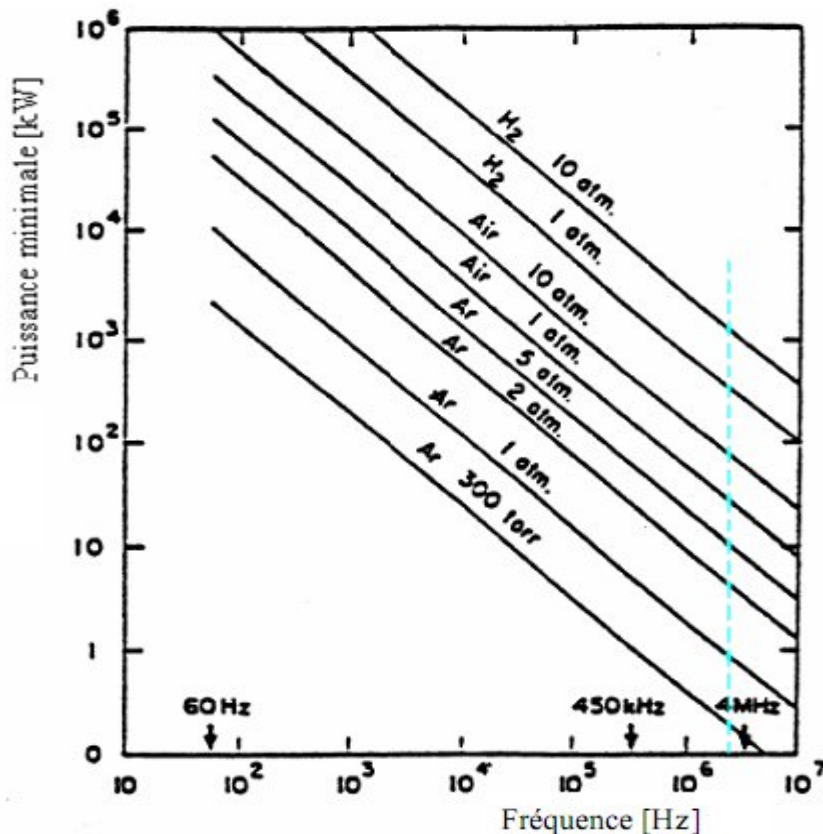


Figure I.6: Puissance minimale de maintien dans un plasma inductif en fonction de la fréquence et la pression

Les points sur la ligne discontinue montre les puissances de maintien à 3 MHz. On constate que la puissance de maintien doit être d'autant plus faible que la fréquence diminue

et la pression augmente. Par exemple, la puissance minimale nécessaire au maintien pour un plasma d'argon est moins de 1 kW dans la pression atmosphérique pour une fréquence de 3MHz. A cette fréquence la puissance nécessaire est presque 8 kW à pression 2atm.

b) *Champ EM et épaisseur de peau*

Le premier transfert d'énergie s'effectue entre le champ électrique et le plasma. Le champ électrique dans un inducteur est nul sur l'axe, la dissipation d'énergie s'effectue donc dans la zone annulaire du plasma, zone où le champ électrique est le plus intense. La conductibilité électrique du plasma étant relativement élevée, le champ électromagnétique oscillant ne peut pénétrer le plasma, spécialement aux hautes fréquences. Ce phénomène est quantifié en introduisant la notion d'effet de peau [16]. Dans le plasma comme dans un métal chauffé par induction, les courants induits, qui circulent dans le sens opposé au courant primaire de l'inducteur, le sont dans la coquille externe de la charge. L'épaisseur de peau δ , qui est fonction de la fréquence, a pour expression :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu_0\sigma f}} \quad 1.5$$

Où f est la fréquence de l'oscillateur, σ la conductibilité électrique moyenne de la charge et μ_0 la perméabilité de la charge supposée égale à celle du vide ($4 \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$).

L'épaisseur de peau étant dépendante de la conductivité électrique, celle-ci est susceptible d'évoluer en fonction de la température mais aussi du degré de déséquilibre thermique. Dans le plasma HF, la profondeur de peau étant de quelques millimètres.

La figure suivante montre les variations radiales, de la densité de courant induit, le champ électrique et la conductivité électrique, obtenus de la référence [17].

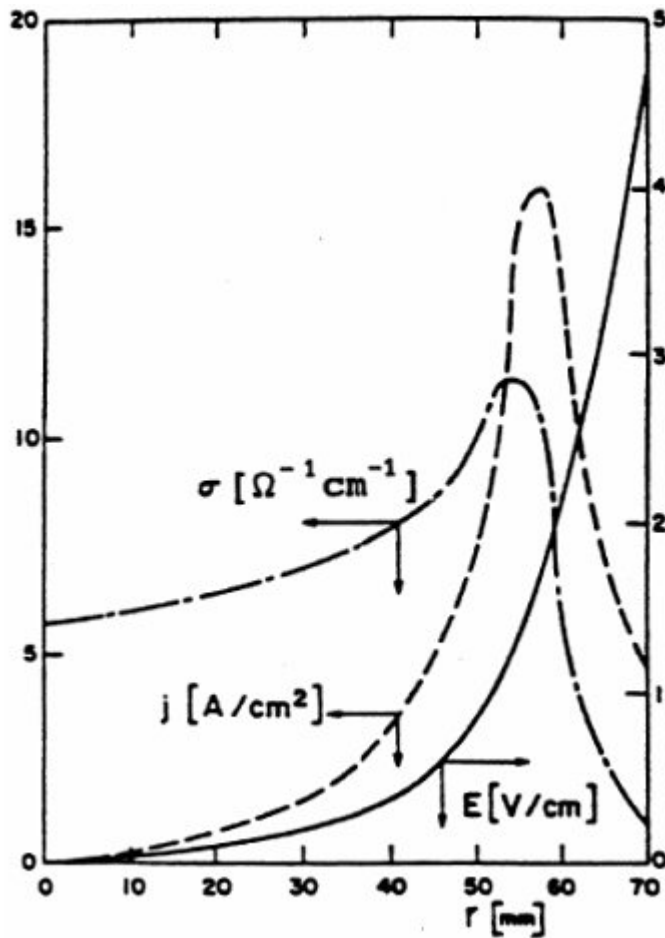


Figure I.7: Distribution radiale du champ électrique, de la densité de courant induit et de la conductivité

c) Couplage inducteur – induit

L'augmentation en puissance des Torches ICP s'accompagne d'une augmentation du diamètre de la torche et d'une diminution de la fréquence de travail afin de d'accroître l'épaisseur de peau [16].

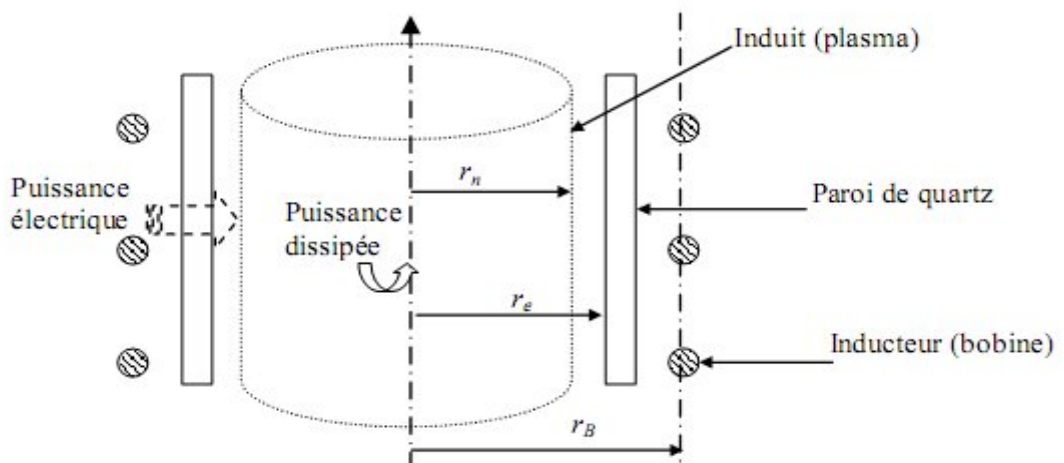


Figure I.8: Modèle d'une décharge inductive

L'étude de l'efficacité du couplage η , défini par le rapport entre la puissance dissipée dans la décharge (puissance active transférée P_0) et la puissance réactive de la source P_e :

$$\eta = \frac{P_0}{P_e} \quad 1.6$$

La figure ci-après montre le coefficient de couplage η en fonction de deux coefficients. Le premier, est le rapport entre le rayon moyen de la décharge et l'épaisseur de peau $\frac{r_n}{\delta}$ et le second, est le rapport entre le rayon moyen de la décharge et le rayon de la torche $\frac{r_n}{r_e}$.

On remarque sur la figure (fig. 9), que le meilleur couplage en puissance η est obtenu pour un rapport $\frac{r_n}{\delta}$ compris entre 2.5 et 4, tandis que $\frac{r_n}{r_e}$ aussi proche que possible de l'unité (allure discontinue). Alors la meilleure façon est de diminuer le rayon de l'inducteur r_B à celui de la torche r_e pour une fréquence appropriée. Mais cette adjacence engendre des contraintes thermiques sur l'inducteur (on le prend généralement ~ 0.75). En effet le choix de la fréquence est important, du fait que la puissance minimale nécessaire au maintien de la décharge croit très rapidement avec la diminution de la fréquence f . Pour un plasma d'argon à pression atmosphérique, moins de 1 kW est nécessaire à 1 MHz, et doit être utilisé presque de 10 kW à 450 kHz à 50 Hz.

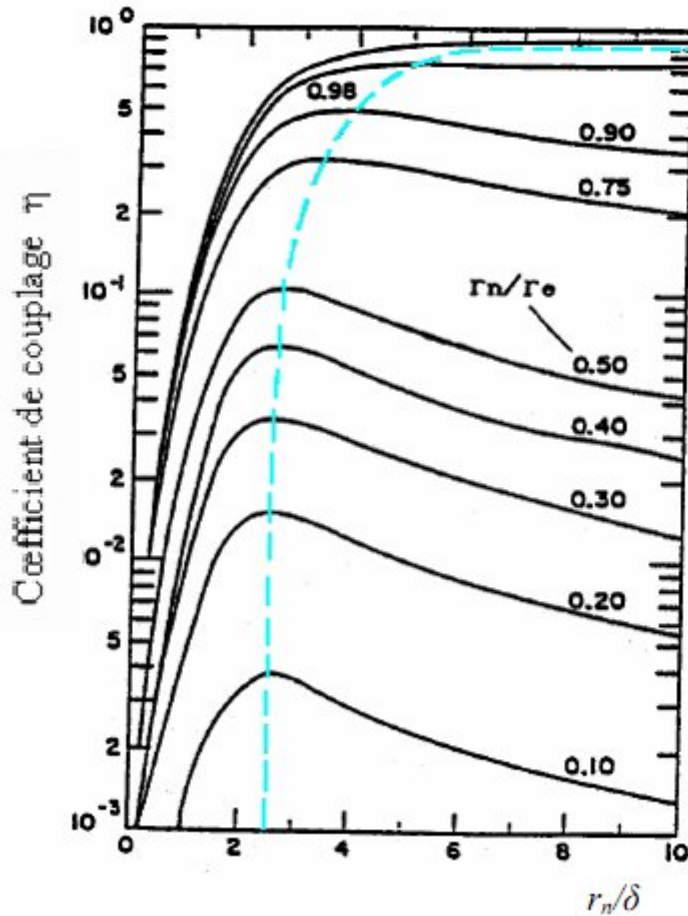


Figure I.9: Coefficient de couplage η en fonction des rapports $\frac{r_n}{\delta}$ et $\frac{r_n}{r_e}$ [16]

4. Les Installations des Torches ICP

Une installation de plasma thermique inductif est constituée d'une manière générale:

- D'une alimentation électrique ;
- D'un applicateur ;
- D'un dispositif de distribution de gaz (débitmètre) ;
- D'un dispositif de contrôle et de régulation.

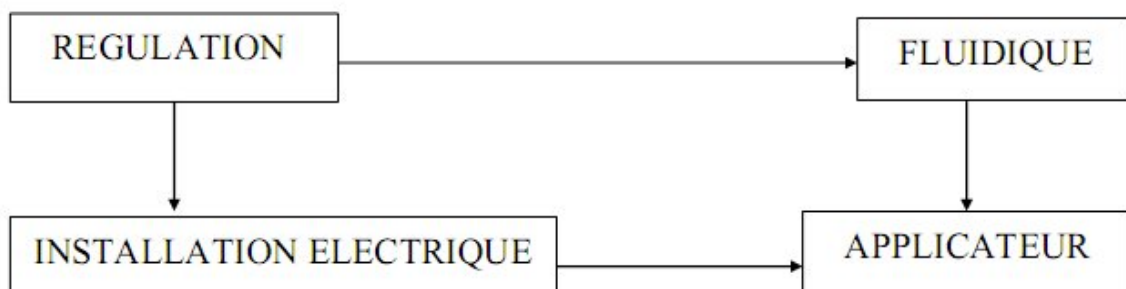


Figure I.10: Installation de plasma inductif.

L'alimentation électrique est un générateur de fréquence de type tournant "Alternateur", ou de type statique "convertisseurs". Ces alimentations réclament toujours un circuit résonant pour fonctionner ajusté différemment.

D'une manière générale, un applicateur de plasma inductif thermique est considéré comme un transformateur, dont le primaire est un inducteur solénoïdal (R, L) et dont le secondaire est constitué par la spire en court circuit du plasma électriquement conducteur.

Le type tournant moins utilisé dans les applications industrielles de plasma inductif opère simplement à basse fréquence, jusqu'à 50kHz,

Grâce aux progrès qui ne cessent d'accroître la connaissance sur les semi-conducteurs, les générateurs à semi-conducteur (transistors, thyristors) permettent, aujourd'hui, de couvrir une large gamme jusqu'à 500 kHz, ont supplanté totalement les tubes à vide dans toutes les applications, basse et moyenne puissance. Ainsi que, les inconvénients des tubes, de volume, de consommation, et de fiabilité, sont devenus rédhibitoires. Malgré tout, les tubes sont toujours utilisés pour des applications spécifiques comme les très fortes puissances et ou la très haute fréquence : les fours et les réacteurs micro-ondes (magnétron, 2.45 GHz), le chauffage par induction radiofréquence (triode, 3 MHz).

a. Applications des Torches ICP

La technologie des plasmas a évolué pendant les dernières années en devenant une science interdisciplinaire avancée. Les plasmas thermiques inductifs (plasma sans électrodes) ont connu une pénétration industrielle tardive en comparaison avec les plasmas thermiques capacitifs ou plasmas d'arc (plasma avec électrodes). Ils sont très attractifs pour plusieurs applications industrielles, spécialement dans les procédés de traitement des matériaux. Leurs avantages tiennent spécialement à l'absence d'électrodes, offrant ainsi :

- Une facilité d'opération sur une grande plage de conditions avec les gaz inertes, oxydants ou réducteurs à pression atmosphérique ou à basse pression,
- Un milieu de haute température et de très haute pureté (absence de contact avec les parois),
- Un temps de séjour des réactifs relativement important,
- Des températures élevées (plus de 6 000 K) entraînant des cinétiques réactionnelles d'au moins deux ordres de grandeurs supérieures à celles obtenues en combustion,
- Des temps de démarrage et d'arrêt du plasma de l'ordre de quelques dizaines de secondes.
- Un rendement énergétique et, par conséquent, le coût de cette énergie n'a qu'un faible poids dans le choix de la technologie, possède aussi quelques limites pour ses applications :

bruit, émission de poudre, radiations et difficile à mètre en mouvement (le substrat doit bouger).

Les applications les plus intéressantes des plasmas thermiques inductifs peuvent être rangées en trois groupes d'outils[16]:

- Outil thermique :
 - élaboration de monocristaux ;
 - sphéroïdisation de poudres de matériaux réfractaires ;
 - réalisation de dépôts ;
 - fusion de verres ;
 - frittage sous plasma.

- Outil chimique :
 - synthèse de la silice ultrapure ;
 - synthèse de dioxyde de titane ;
 - synthèse de poudres ultrafines et ultrapures ;
 - affinage de métaux ;
 - réaction en chimie organique.

Outil analytique : source d'émission en analyse spectrochimique, avec comme application :

- suivi du taux de pollution (métaux et métalloïdes) dans les eaux de rejet, les eaux de boisson, les cours d'eaux,
- contrôles métallurgiques,
- contrôles préventifs, des moteurs d'avions, de camions et d'autres engins par l'analyse de l'huile de lubrification, l'analyse des traces d'impuretés dans les catalyseurs et le contrôle quantitatif des additifs,
- toute analyse dans les domaines de la pharmacie, de la médecine, de la biologie (aliments, engrais, sol, etc.).

On peut penser également que l'utilisation du plasma thermique inductif dans la destruction des déchets toxiques sera un outil très performant dans les années à venir.

CONCLUSION

Après avoir acquis certaines notions de base sur les plasmas en générale et sur les plasmas thermique en particulier, et avoir présenté certaines installations (torche ICP) ; elles sont mises en évidence, l'importance du plasma thermique et sa large utilisation dans une grande variété d'applications due à ces propriétés spécifiques que nous avons vues, sous l'effet d'un champ électromagnétique en HF un couplage complexe de phénomène thermique, électromagnétique et d'écoulement nécessite bien d'être modélisé mathématiquement afin de simplifier son étude et puis pouvoir faire des simulations, c'est ce que nous verrons par la suite.

Chapitre II

**Modélisation mathématique
de la torche a plasma ICP**

Introduction

Afin de pouvoir étudier les phénomènes magnétothermiques on va étudier le phénomène magnétique et le phénomène thermique indépendamment puis déduire les relations entre les deux phénomènes

II.1. Phénomène électromagnétique

Les équations qui gouvernent le phénomène électromagnétique sont les équations de Maxwell, les lois constitutives des milieux, la loi d'Ohm.

Les équations de Maxwell permettent de traduire le comportement de la plupart des phénomènes de l'électromagnétisme. Ces équations sont en nombre de quatre, elles permettent de déterminer le champ électrique, champ magnétique, induction électrique et induction magnétique, en fonction de la densité du courant J et des caractéristiques des milieux, ces quatre champs sont des fonctions à valeurs vectorielles réelles de la position et du temps.

Le champ électrique E est dû à la présence de charge électrique dans un matériau, tandis que le champ magnétique H est dû au déplacement de ces charges mobiles, ou à la présence d'un moment magnétique, tel que celui qui peut être créé par un aimant. La dérivée temporelle de l'induction électrique D , qui décrit en particulier les déplacements des dipôles électriques dans les matériaux diélectriques, s'appelle aussi courants de déplacement. [19]

II.1.1. Equations de Maxwell

Etant donné que la nature du plasma thermique est considéré comme un fluide conducteur constitué d'un ensemble de particules (électrons, cations et neutrons) on peut utiliser des équations locales pour décrire ce milieu avec une échelle très petite devant les tailles caractéristiques macroscopiques est cela en équilibre thermodynamique local, des équations comme celles de Maxwell qui relient le champ électrique au champ magnétique et à leurs sources et permettent de décrire leurs évolutions spatio-temporelles, ces équations sont à la base de l'électromagnétisme.

Loi de Gauss

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \dots 1$$

Equation de Maxwell Faraday

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad \dots 2$$

Loi de Gauss magnétique

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \dots 3$$

Equation de Maxwell Ampère

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \dots 4$$

Où :

\vec{B} : est le vecteur induction magnétique, [T]

\vec{E} : est le vecteur champ électrique, [V.m⁻¹]

\vec{D} : est le vecteur déplacement électrique, [A.s /m²]

\vec{H} : est le vecteur champ magnétique, [A.m⁻¹]

\vec{J} : est le vecteur densité de courant électrique, [C/m²]

ρ : est la densité de charge électrique, [A/m²]

t : est le temps, [s]

II.1.2. Relations constitutives du milieu

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad ..5$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

μ_0 : Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ [H /m]

μ_r : Perméabilité relative du milieu

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad ..6$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

ε_0 : Perméabilité électrique du vide $\varepsilon_0 = 8,8544.10^{-12}$ [F /m]

ε_r : Perméabilité électrique relative du milieu

II.1.3. Loi d'Ohm

$$\vec{J} = \vec{J}_{ind} + \vec{J}_s \quad ..7$$

$$\vec{J}_{ind} = \sigma \vec{E} + \sigma (\vec{v} \wedge \vec{E}) \quad ..8$$

\vec{J}_{ind} : vecteur densité du courant induit

\vec{J}_s : vecteur densité du courant source

σ : conductivité électrique [$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$]

\vec{v} : vecteur vitesse aux points considérés [$m \cdot s^{-1}$]

Dans l'équation 4 le terme $\frac{\partial D}{\partial t}$ (terme de courant de déplacement) correspond au phénomène de propagation des ondes électromagnétique. Dans le domaine de la radiofréquence ce terme peut être négligé, compte tenu des dimensions de la torche qui sont très inférieures à la longueur d'onde qui est plus grande que la dimension du plasma dans le système. Cela peut nous mener à considérer le champ à l'intérieur de la torche comme étant statique, de ce fait cette équation 4 devient le théorème d'Ampère :

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad \dots 9$$

Dans ce cas on parle de régime quasi-statique des équations de Maxwell ou d'approximation des régimes quasi-stationnaire.

A partir de l'équation 9 on peut déduire que

$$\text{div rot} \vec{H} = \text{div} \vec{j} = 0$$

Ainsi

$$\text{div} \vec{j} = 0 \quad \dots 10$$

II.2. Formulation magnétodynamique

Afin de simplifier les modèles dans certains cas on peut découpler les équations du couplage électromagnétique en effet magnétique et effet électrique, ainsi elles font apparaître différentes variables d'état.

Nous allons utiliser les formulations associant le potentiel vecteur magnétique \vec{A} et le potentiel scalaire électrique V , nous élaborerons un modèle magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique à partir de certaines hypothèses simplificatrices

II.2.1. Modèle magnétodynamique

Pour les dispositifs électromagnétiques dans les quelles les sources de courant ou de tension varient dans le temps le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ n'est pas nul et les deux champs électrique et magnétique sont couplés par la présence des courants induits, ainsi on prend les deux équations de Maxwell qui se présentent sans terme source 2 et 3 :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad ..3$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ..2$$

L'équation 3 montre que \vec{B} est un champ rotationnel, cela implique l'existence du potentiel vecteur magnétique \vec{A} .

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= \text{div } \text{rot } \vec{A} = 0 \\ \Rightarrow \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} \end{aligned} \quad ..11$$

On remplace 11 dans 2 et on aura :

$$\text{rot } \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad ..12$$

Cette dernière montre que le champ $\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ est conservatif, ce qui implique :

$$\begin{aligned} \text{rot } \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= \text{rot } (\text{grad } V) = 0 \\ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\text{grad } V \end{aligned} \quad ..13$$

Par conséquent le champ magnétique et le champ électrique peuvent s'écrire en termes de deux potentiels \vec{A} et V :

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V \quad ..14$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \quad ..15$$

A partir des équations 7, 8 et 9 on a :

$$\text{rot } \vec{H} - \sigma \vec{E} - \sigma (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{J}_s \quad ..16$$

On remplace 14 et 15 dans 16 :

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) + \sigma\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}V\right) - \sigma(\vec{v}\wedge\vec{B}) = \vec{J}_s \quad ..17$$

La formulation $\vec{AV} - \vec{A}$ implique :

- Présence d'un potentiel vecteur magnétique \vec{A} et d'un potentiel scalaire électrique V dans la région conductrice,
- Présence uniquement du potentiel vecteur magnétique \vec{A} Dans la région non conductrice.

Pour une perméabilité magnétique constante et si le problème est considéré linéaire alors :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) + \mu\sigma\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}V\right) - \mu\sigma(\vec{v}\wedge\vec{B}) = \mu\vec{J}_s \quad ..18$$

Pour avoir une solution unique on ajoute une autre équation, on fixe la divergence de \vec{A} (Jauge de Colomb)

$$div\vec{A} = 0 \quad ..19$$

Considérant l'induit (plasma) ne procédant pas de propriétés magnétiques, sa perméabilité magnétique sera assimilée à celle du vide μ_0 .

D'autre part pour le terme de transport $\mu\sigma(\vec{v}\wedge\vec{B})$, vu la faible valeur de l'induction et de la vitesse dans l'induit, on considère que :

$$|\vec{E}| \gg (\vec{v}\wedge\vec{B})$$

Ce qui laisse négliger ce terme dans l'équation électromagnétique qui devient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) + \mu\sigma\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}V\right) = \mu\vec{J}_s \\ div\vec{A} = 0 \end{cases} \quad ..20$$

II.2.2. Formulation en coordonnées cylindriques axisymétriques

La modélisation des phénomènes dans les dispositifs présentant une symétrie de révolution par rapport à son axe, permet de ramener un modèle tridimensionnel (3D) à un modèle bidimensionnel (2D). Dans une configuration axisymétrique, en utilisant la

formulation en potentiel vecteur magnétique A . Cette dernière est mieux adaptée pour notre problème [20-21], et elle offre un double intérêt :

- Le système d'équations EM présente une seule inconnue.

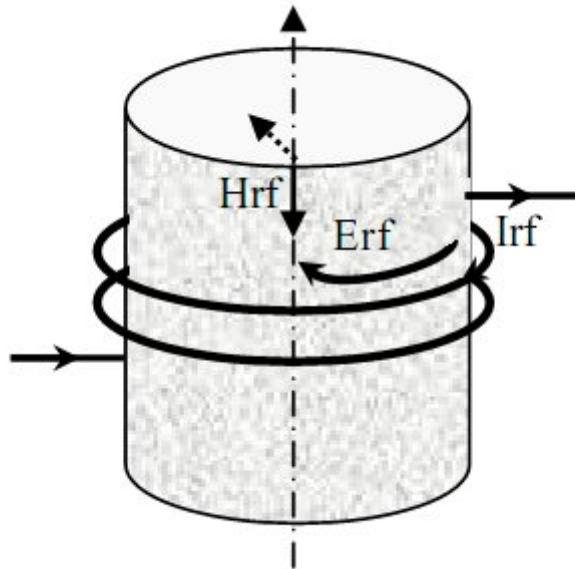


Figure II.1 Schéma de principe d'un mode inductif

- Cette inconnue ne possède qu'une seule composante, A_ϕ dans notre modèle. Aucune charge électrique n'est présente dans le système, les courants de déplacement sont négligés et la polarisation électrique est nulle. Les courants étant perpendiculaires au plan d'étude, les différentes grandeurs ont les composantes suivantes :

$$\vec{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{J}_\phi \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{E} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{E}_\phi \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{A}_\phi \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{B} \begin{bmatrix} \vec{B}_r \\ 0 \\ \vec{B}_z \end{bmatrix}, \vec{H} \begin{bmatrix} \vec{H}_r \\ 0 \\ \vec{H}_z \end{bmatrix}$$

L'hypothèse de jauge de Coulomb, naturellement vérifiée dans la configuration axisymétrique, assure également l'unicité de \vec{A} en fixant la valeur de V :

Comme \vec{A} ne possède qu'une seule composante ortho radiale sa divergence est naturellement nulle. En prenant la divergence de chaque membre de l'équation:

$$\text{div} \left[\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\text{grad}} V \right] = \sigma \frac{\partial}{\partial t} \cdot \vec{\text{grad}} \sigma + \sigma \text{div}[\vec{\text{grad}} V] + \vec{\text{grad}} \sigma \cdot \vec{\text{grad}} V = 0$$

....II.21

$$\sigma = \sigma(r, z) \Rightarrow \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \xrightarrow{\text{grad}} \sigma = 0 \Rightarrow \sigma \text{div} \left[\xrightarrow{\text{grad}} V \right] + \xrightarrow{\text{grad}} \sigma \cdot \xrightarrow{\text{grad}} V = 0$$

Pour que cette identité soit vérifiée quel que soit σ , la condition nécessaire et suffisante est que :

$$\xrightarrow{\text{grad}} V = 0 \quad \text{..II.22}$$

Ce qui implique : $V = \text{constante}$.

La constante est déterminée classiquement en supposant le potentiel nul à l'infini donc : $V=0$.

L'équation électromagnétique est donc :

$$\xrightarrow{\text{rot}} \left[\frac{1}{\mu_0} \xrightarrow{\text{rot}} A \right] + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \xrightarrow{J} \quad \text{..II.23}$$

En coordonnées axisymétriques, les coordonnées de $\xrightarrow{\text{rot}} \xrightarrow{A}$ sont :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} \end{bmatrix}$$

Ainsi la formulation axisymétrique de cette équation se déduit :

$$\sigma \mu_0 \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \frac{\partial A_\varphi^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{A_\varphi}{r^2} = \mu_0 J_\varphi \quad \text{..II.24}$$

Si les sources d'excitation sont de nature alternatives de pulsation ($\omega = 2\pi f$), on peut utiliser la représentation de Fresnel pour modéliser leur variation temporelle. L'utilisation des nombres complexes permet alors de remplacer le terme :

$$\sigma \mu_0 \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} \text{ par } j\omega \sigma \mu_0 A_\varphi$$

j : unité imaginaire ($j^2 = -1$)

Pour la commodité de l'écriture, on notera, à partir de maintenant, simplement A et J les composantes ortho radiales complexes de A et J , d'où l'équation devient:

$$j\omega\sigma\mu_0 A - \frac{\partial A^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right) + \frac{A}{r^2} = \mu_0 J \quad \text{..II.25}$$

À partir du potentiel vecteur magnétique A on peut déterminer les autres composantes des champs par leurs expressions :

$$H_r = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A}{\partial r} \quad \text{..II.26}$$

$$H_z = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \quad \text{..II.27}$$

$$E_\varphi = -j\omega A \quad \text{..II.28}$$

II.3. Modèle thermique

Nous présentons maintenant les équations régissant la thermique. La formulation physique est obtenue à partir du principe de conservation de l'énergie. Notre propos n'est pas ici, de démontrer ces lois mais d'utiliser celles-ci pour obtenir, à travers différentes hypothèses, le modèle thermique. Le comportement thermique dans la torche, au cours d'échauffements par effet Joule, est donné par une relation d'état. Dans notre cas les effets thermiques sont liés aux phénomènes d'induction.

II.3.1. Transfert de chaleur

a. Les modes de transfert de chaleur

Le transfert de chaleur l'un des modes les plus connus d'échange d'énergie, il intervient naturellement à chaque fois qu'un gradient de température existe à l'intérieur d'un système ou lorsque deux systèmes à températures différentes sont mis en contact.

Les transferts thermiques se font selon trois moyens : la conduction thermique, la convection et le rayonnement.[22]

➤ Transfert de chaleur par conduction

La conduction thermique est la propagation de la chaleur des parties les plus chaudes vers les parties les plus froides.

La conduction thermique intervient essentiellement dans les transferts de chaleur dans les solides, dans les liquides et les gaz, les transferts par conduction sont généralement marginaux par rapport aux transferts par convection.

Tous les transferts de chaleur qui se font à travers une paroi séparant deux corps à des températures différentes se font par conduction thermique.[19]

La densité de flux est reliée au gradient de température par l'équation :

$$\varphi = -\lambda \text{ grad } T \quad \dots \text{II.29}$$

λ : conductivité thermique du milieu [$\text{w.m}^{-1}.\text{k}^{-1}$].

φ : densité de flux thermique [w/m^2].

T : température du milieu [k].

➤ **Transfert de chaleur par convection**

La convection correspond un transfert de chaleur entre un solide et un fluide, la convection caractérise la propagation de la chaleur dans un fluide, gaz ou liquide, dont les molécules sont en mouvement. Le phénomène global résulte de la combinaison de la conduction thermique et du déplacement de ces molécules, on distingue généralement deux types de convection :

- La convection naturelle, dans laquelle le mouvement du fluide résulte de la variation de la masse volumique du fluide avec la température.[19]
- La convection forcée, dans la quelle le mouvement du fluide est provoqué par un procédé mécanique, indépendant des phénomènes thermiques.

Le flux de chaleur transmis par convection entre une surface et un fluide peut être évalué par la loi de Newton :

$$\varphi = h_c \cdot A_s (T_s - T_f) \quad \dots \text{II.30}$$

φ : flux de chaleur par convection [w].

A_s : l'air de surface de transmission de chaleur [m^2].

T_s : la température de la surface d'échange.

T_f : température du fluide sur la frontière.

h_c : Coefficient d'échange de chaleur par convection [$\text{w/m}^2\text{k}$].

➤ **Transfert de chaleur par rayonnement**

Dans la transmission de la chaleur par rayonnement thermique, le transfert thermique s'effectue par des vibrations électromagnétiques qui se propagent sans support de matière.

Le rayonnement thermique concerne les ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde va du spectre ultraviolet au spectre infrarouge. [19]

Les échanges de chaleur surfaciques par rayonnement sont donnés par loi de Boltzmann suivante :

$$\varphi = \sigma_B \cdot \epsilon_s (T^4 - T_\infty^4) \quad \dots \text{II.31}$$

Avec :

σ_B : constante de Boltzmann [$\text{w/m}^2.\text{k}$].

ϵ_s : coefficient d'émission .

T_∞ : température du milieu [k].

Pour les deux premiers modes, la présence de matière est indispensable pour qu'il y ait un transfert thermique à l'inverse du mode de transfert par rayonnement qui peut s'effectuer dans le vide, il s'agit d'un transfert à distance sans nécessiter de support matériel.

b. Formulation vectorielle

L'équation générale de propagation de la chaleur dans le cas d'un fluide (gaz) compressible s'écrit [23] :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\rho} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} \rho \frac{D\rho}{Dt} = -div(Q) + P - Q_r \quad ..II.32$$

ρ : Masse volumique [Kg/m³]

C_p : Chaleur spécifique à pression constante [J/K^o.Kg].

T : Température [K^o].

Q : Sources des flux de conduction thermique [W/m].

P : Terme source de chaleur correspondant, d'une part au travail des forces appliquées au fluide, d'autre part à la dissipation visqueuse.

Q_r : Pertes radiatives [W/m³], supposées nulles ($Q_r=0$)[24].

Si les vitesses sont suffisamment faibles pour considérer les termes de pression p comme négligeables, on obtient l'équation classique en régime permanent [16].

$$\rho C_p \vec{v} \cdot \text{grad} T = -div Q + P \quad ..II.33$$

Dans l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local les transferts de chaleur par conduction peuvent être exprimées à l'aide d'une conductivité thermique totale K [16].

$$Q = -K \text{grad} (T) \quad ..II.34$$

L'équation de bilan énergétique de sorte que la conservation d'énergie soit donnée par :

$$\rho C_p \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} T = \text{div}(\vec{K} \cdot \vec{\text{grad}} T) + P \quad \text{..II.35}$$

b.1. Formulation en coordonnées cylindriques

En coordonnées axisymétriques l'équation s'écrit :

$$\rho C_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + P \quad \text{..II.36}$$

Terme source

Si on ne prend pas en compte la dissipation visqueuse de la chaleur pour le cas d'un plasma. Donc la puissance induite qui est le résultat du travail des courants induits. Donc P exprime le terme source d'électromagnétisme dans l'équation thermique :

$$P = \frac{1}{2\sigma} J \cdot J^* \quad \text{..II.37}$$

En substituant cette dernière dans l'équation de la thermique, on obtient :

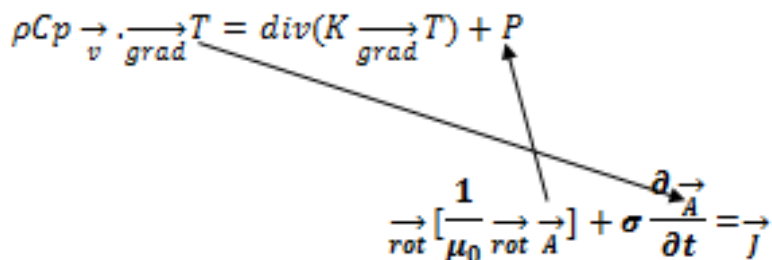
$$\rho C_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{2\sigma} J \cdot J^* \quad \text{..II.38}$$

II.4. Termes de couplage

Les trois phénomènes électromagnétique, thermique et hydrodynamique sont intimement liés et la variation de l'un des trois influence les deux autres. Nous pouvons représenter ces interactions par les équations suivantes :

$$j\omega\sigma\mu_0 A - \frac{\partial A^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right) + \frac{A}{r^2} = \mu_0 J \quad \text{..II.39}$$

$$\rho C_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{2\sigma} J \cdot J^* \quad \text{..II.40}$$



Ainsi les interactions entre les phénomènes physiques sont pilotées par quatre termes:

II.4.1. Les termes sources

La source thermique P est issue du phénomène électromagnétique. Les courants induits dans la charge créent une densité de puissance Joule P à l'origine de la source de chaleur.

$$P = \frac{JJ^*}{2\sigma} \quad \text{..II.37}$$

Les propriétés physiques variant avec la température T : Ainsi le phénomène thermique a une influence sur les autres phénomènes.

La conductivité électrique () : la variation de la température entraîne une modification de la conductivité électrique, entraînant une modification de la répartition des courants induits.

La masse volumique () : la variation de la température entraîne une modification de la masse volumique. Cette variation pour les métaux, semi conducteurs et oxydes est relativement faible. Elle est principalement à l'origine des effets thermo convectifs.

La capacité calorifique () : la variation de la température entraîne une modification de la capacité calorifique, entraînant l'évolution de la température en régime transitoire et convectif.

La conductivité thermique () : la variation de la température entraîne une modification de la conductivité thermique, entraînant l'évolution de la température.

Hypothèses

Pour écrire ces équations, les hypothèses suivantes ont été appliquées :

Notre travail est porté sur la modélisation de la zone de décharge qui est cylindrique et présente un axe de révolution. Si on ne tient pas compte de l'hélicité de l'enroulement inducteur, on peut réduire notre modèle à une représentation axisymétrique bidimensionnelle;

Le plasma créé par induction est un milieu gazeux composé de molécules, d'atomes, d'ions et d'électrons. Ce milieu est supposé continu et se comportant globalement comme un fluide.

L'hypothèse de continuité impose, dans l'approche numérique, de considérer des éléments de volume très grands à l'échelle moléculaire; très petits à l'échelle macroscopique du système étudié :

Le libre parcours moyen λ des molécules est la distance qu'elles parcourent entre deux collisions. Il peut être calculé par :

$$\lambda = \frac{k_B T}{p \sigma_s} \quad \text{..II.41}$$

est la constante de Boltzmann,
 T la température, p la pression et
 σ_s la section efficace de collision des molécules du gaz en m^2 [25].

Ce libre parcours moyen est de l'ordre de $6,6 \cdot 10^{-8}$ à la pression atmosphérique [26].

Dans nos calculs, les dimensions des plus petites mailles sont de l'ordre de 10^{-4} m.

Les éléments sont donc très grands vis à vis de l'échelle moléculaire.

Le domaine de calcul est de forme cylindrique. Le maillage de ce domaine comporte de l'ordre 15 000 mailles. Les éléments sont donc petits, vis à vis de l'échelle macroscopique du système et les grandeurs caractéristiques de l'écoulement (température, masse volumique, vitesse) peuvent être supposées uniformes dans chaque élément.

Le plasma est en équilibre thermodynamique local (ETL) : toutes les espèces du plasma (électrons, ions, atomes, molécules) ont la même énergie et donc, il est possible de définir une température unique.

Le plasma est traité comme un unique fluide neutre et laminaire. Un écoulement est laminaire lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée (il ne présente pas trop de variations spatiales ou temporelles), bien souvent stationnaire. Il devient turbulent lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide. Le nombre de Reynolds Rn , qui représente le rapport des forces d'inertie sur celles de viscosité, permet de caractériser l'apparition de la turbulence. Il est défini par:

$$Rn = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu} \quad \text{..II.42}$$

Si : $Rn < 2000$: l'écoulement est laminaire,
 Si : $Rn > 3000$: l'écoulement devient turbulent.

Avec :

V : la vitesse du fluide [m/s]

L : la longueur caractéristique du plasma [m]

ρ : densité de masse du fluide [kg/m^3]

η : viscosité dynamique du fluide [Pa.s] –

La pression thermodynamique p peut être déterminée de différentes manières en fonction du domaine d'étude. Dans le cas où le fluide est en contact avec un très grand réservoir à pression p^∞ comme l'atmosphère p_{atm} la pression est constante ($p=\text{constante}$) [13].

La figure suivante montre la cohérence physique, la description du couplage entre phénomènes dans un modèle MHD est assurée via des termes sources.

Le champ EM (énergie électrique) exercé sur le fluide par la force de Lorentz correspondant à l'énergie mécanique,

Le champ EM (énergie électrique) chauffe le fluide par des courants induits (effet joule) correspondant à l'énergie thermique.

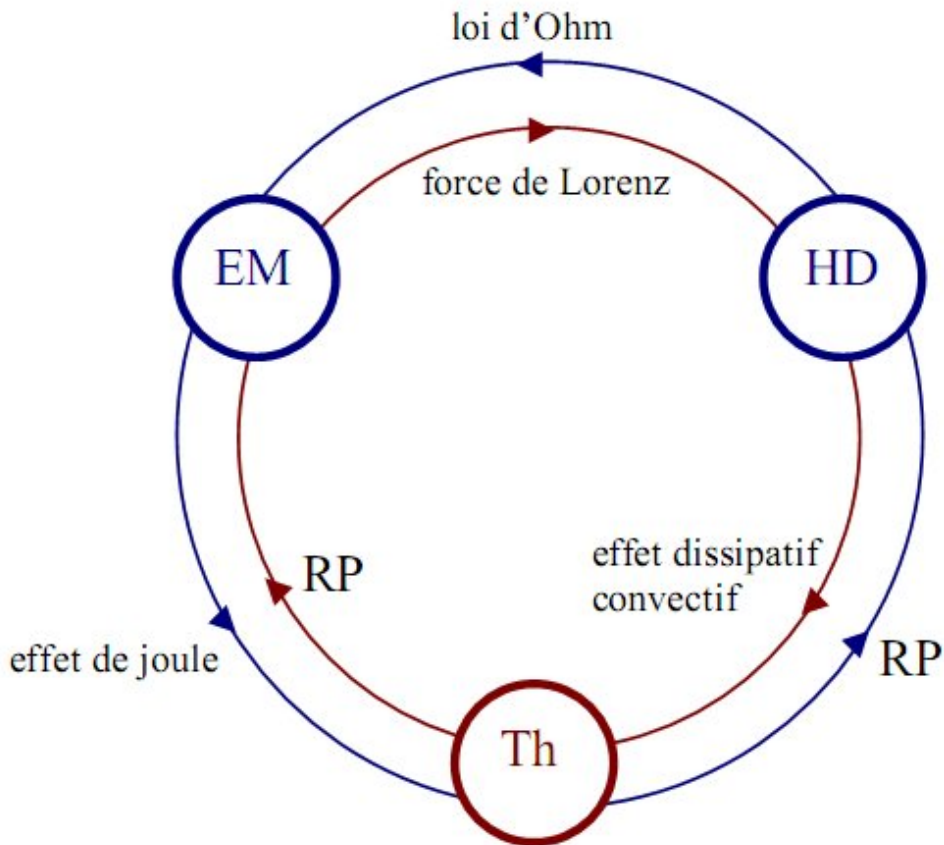


Figure II.1: Schéma du couplage MHD-Thermique

EM : électromagnétique, HD : hydrodynamique, Th : thermique, RP : Réintroduire les propriétés du milieu en fonction de T [K°]

Conclusion

Nous avons trouvé les différentes formulations pour les différents modèles mathématiques pour les phénomènes magnétodynamiques et thermiques en régime transitoire et en régime harmonique en les reliant avec des termes de couplage entre phénomènes, et à base de ces dernières que nous allons développer le modèle numérique en utilisant la méthode des éléments finis ce que nous allons voir dans le chapitre suivant.

Chapitre III

**Modélisation numériques et
résolution du phénomène
magnétothermique**

Introduction

La modélisation numérique a pour objectif de simuler numériquement le comportement de systèmes physiques, en utilisant l'outil informatique. Les méthodes numériques nous permettent de ramener la résolution d'une équation aux dérivées partielles, avec des conditions aux limites, à un système d'équations algébriques. La démarche est la suivante :

- La discrétisation en langage d'ingénieur du système physique étudié et du problème pose à son sujet (modèle physique).
- La traduction du problème d'ingénieur en écritures mathématiques (modèle mathématique)
- L'écriture d'un logiciel qui simule le comportement du système physique (modèle informatique).
- La construction d'un modèle numérique (ou algébrique) qui peut être résolu sur ordinateur et qui fait appel à des méthodes de discrétisation telle que la méthode des volumes finis, la méthode des différences finis ou la méthode des éléments finis.[27]

III-1. Méthode des différences finis

La méthode des différences finis est basée sur la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences ou chaque dérivée est approchée par une différence de valeur de l'inconnu aux nœuds du domaine d'étude.

La méthode des différences finis a été rendue très populaire par l'événement de l'ordinateur et consiste à discrétiser le problème pose et à le résoudre au calculateur numérique. La discrétisation d'une fonction $U(x,y)$ défini en tout points (x,y) du domaine Ω , avec des conditions aux limites données sur le contour r délimitant ce domaine consiste à :

- Remplacer le domaine Ω des variables (x,y) par un ensemble fini S de N éléments.
- Remplacer la fonction $U(x,y)$ par une fonction $U(P)$ définie sur S , l'équation aux dérivées partielles déterminant $U(x,y)$ donc remplacer par un système fini d'équations simultanées déterminant $U(P)$. [28]

III-2. Méthode d'intégrale de frontières

La méthode d'intégrale de frontières permet la représentation du domaine tout en limitant la discrétisation à la frontière, Elle est souvent utilisée dans l'étude des structures de grande dimension, et elle s'adapte aux problèmes à frontières ouvertes. En revanche elle à

comme inconvénient la difficulté de prendre en considération la structure, et elle nécessite un espace mémoire considérable et un temps de calcul long, car le système algébrique issu de cette méthode est à matrice pleine.[29] cette méthode est mise en œuvre par la méthode directe qui basée sur la loi de Biot et savart ou bien sur la méthode de l'identité de Green. [30][31]

III-3. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode de résolution des équations aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites. Cette méthode à été utilisé initialement pour la résolution des problèmes dans le domaine de la mécanique de la rupture et calcul de structures (par les “mécaniciens“).

La méthode à été utilisée dans le domaine du calcul du champ électromagnétique pour la première fois vers 1970 par deux chercheurs qui sont : P.P SILVESTER et M.V.K CHARI.

Dans la plupart des cas, elle s'intègre à des logiciels C.A.O cette partie constitue un avantage de taille pour le concepteur de systèmes physiques.

Le principe de la méthode des éléments finis consiste à représenter sous forme intégrale une formulation type équation aux dérivées partielles avec des conditions aux limites associé d'un problème physique mathématique [32].

Problème physique \longrightarrow représenté par E.D.P+C.A.L \longrightarrow forme intégrale

Cette forme intégrale soit :

- De type variationnelle.
- De type résidus pondérés.

Cette méthode reste imprécise dans au moins deux situation :

- Domaine d'étude infini.
- Présence de singularité dans le domaine d'étude.

III.3.1.Principe de la méthode

La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis suit le procédé suivant

- Traduire le problème physique sous forme d'un modèle mathématique (équations aux dérivées partielles) avec des conditions aux limites aux bords du domaine d'étude (Ω), nécessaires et suffisantes pour l'unicité de la solution.
 - Construire une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation intégrale du système.
 - Diviser (Ω) en sous domaines (maillage), les sous domaine sont appelés éléments.
 - Choisir la famille des champs locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds, la maille complétée par ces informations est alors appelée élément
 - Ramener le problème à un problème discret, c'est la discrétisation.
 - On résout le problème discret.
-
- Construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs.
 - Visualiser et exploiter la solution pour juger sa qualité numérique et de la satisfaction des critères de cahier des charges.

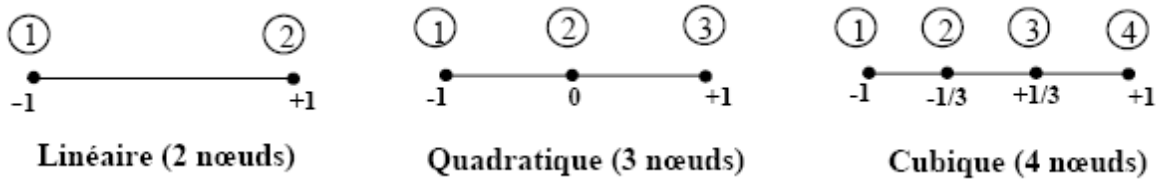
III.3.2. Discrétisation du domaine d'étude

L'approche de base de la méthode des éléments finis est de subdiviser le domaine d'étude en nombre finis de sous domaines appelés éléments [33] [34] [35]. L'approximation de l'inconnue se fait en chaque élément des fonctions d'interpolation. La fonction d'interpolation est aussi définie en fonction de la géométrie de l'élément qu'on choisit préalablement et coïncide avec les nœuds de cet élément relatifs aux valeurs de l'inconnue. On parle alors d'interpolation nodale.

a) Eléments de références

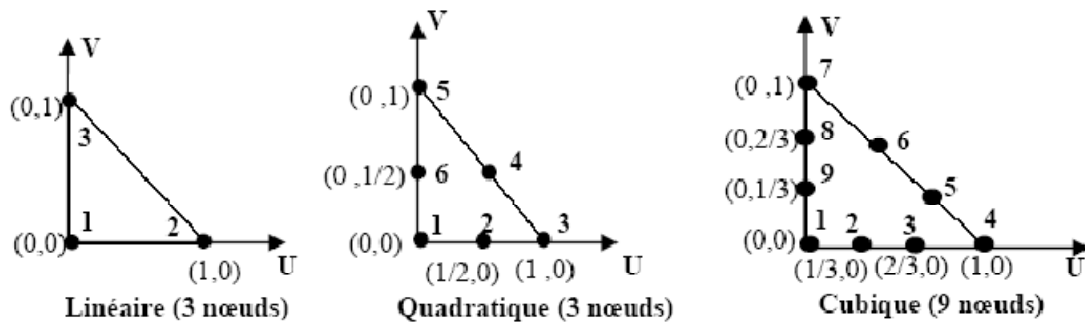
Pour des domaines d'étude à une, deux ou trois dimensions, on utilise des éléments de références simples tels que : le triangle, le rectangle, le tétraèdre ; parallélépipède, auxquels on associe un système de coordonnées normé. Cela permet de définir une fois, pour chaque type d'élément les fonctions d'interpolation. Ces dernières, une fois construites, on obtient les fonctions associées au système réel à l'aide des transformations géométriques.

- **Eléments à une dimension**

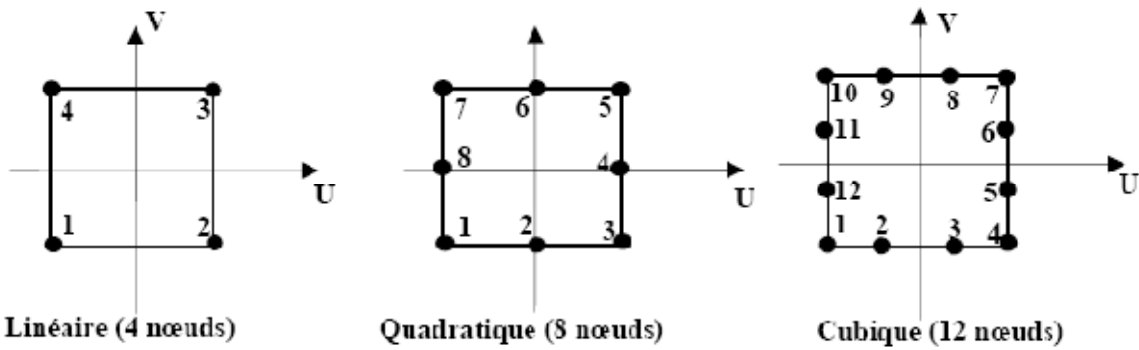


- **Eléments à deux dimensions**

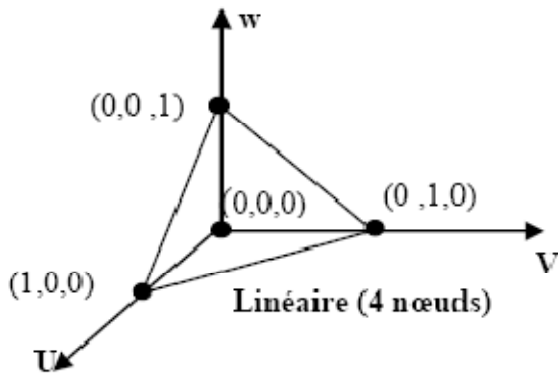
- **Elément triangulaire**



➤ Élément carré



Éléments à trois dimensions



b) Fonction d'interpolation

Les fonctions d'interpolations sont obtenues à partir du triangle de pascal, donné ci dessous :

		1		
	U		V	
	U ²	UV	V ²	
	U ³	U ² V	UV ²	V ³

Triangle de Pascal.

Ces fonctions sont construites de telles sortes à obéir aux conditions suivantes [36] :

b.1) Principe de l'état complet

-La fonction doit contenir un terme constant.

b.2) Principe de compatibilité

Ce principe consacre la continuité de la fonction d'interpolation. On cite un exemple de la fonction d'interpolation dans le cas d'un élément carré

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{aU} + \mathbf{bV} + \mathbf{cUV} + \mathbf{d} \quad \text{III.1}$$

D'où:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = [\mathbf{U} \ \mathbf{V} \ \mathbf{UV} \ \mathbf{1}] \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad \text{III.2}$$

La base polynomiale est

$$\mathbf{P}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = [\mathbf{U} \ \mathbf{V} \ \mathbf{UV} \ \mathbf{1}] \quad \text{III.3}$$

III-3-2. Formulation variationnelle :

Cette formulation nécessite la connaissance au préalable de la fonction d'énergie du système à étudier, car cette méthode est basée sur l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégrale et qui est définie comme suit :

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{L}(\mathbf{u}) d\Omega \quad \text{III.4}$$

Sachant que :

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{W}_C - \mathbf{W}_P \quad \text{III.5}$$

Avec :

Ω : Domaine d'étude

$\mathbf{L}(\mathbf{u})$: Fonction de *Lagrange*.

\mathbf{W}_C : Energie cinétique du système.

\mathbf{W}_P : Energie potentielle du système.

III-3-4. Formulation résidus pondérés

La formulation résidus pondérés appelée aussi la méthode projective est la plus utilisée car elle ne nécessite pas la connaissance préalable d'une expression énergétique du système.

Le principe de cette méthode est basé sur le théorème d'Hilbert qui stipule que seul le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace [28], [30]. Cette méthode consiste à rechercher des fonctions projectives Ψ_i de façon à minimiser l'intégrale du résidu dont l'équation est la suivante :

$$\int R(A) \Psi_i d\Omega = 0 \quad \text{III.6}$$

Sachant que :

$$R(A) = L(A) - F \quad \text{III.7}$$

Avec :

A : L'inconnu du problème.

L(A) : Opérateur différentiel.

Ψ_i : Fonction de projection ou de pondération.

F : Fonction définit sur le domaine Ω .

R : Représente le résidu de l'approximation.

Les valeurs de A permettent d'annuler l'intégrale et donc représentent la solution du système algébrique obtenu. [37]

La méthode des résidus pondérés fournis, selon le choix des fonctions de pondération, tout un ensemble de formulations intégrales :

- Formulation de type collocation par points ou par sous-domaines, cette formulation utilise les fonctions de Dirac comme fonction de pondération, projective.
- Formulation de type moindres carrées, cette méthode de moindre carré utilise la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites.

- La méthode de Galerkin, ou de Ritz si l'on utilise la notion de fonctionnelle, celle-ci est la plus utilisée. La méthode de Galerkin permet d'approcher la solution de problèmes modèles dont la formulation abstraite est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, w) = f(w), \quad \forall w \in W, \end{array} \right.$$

- où V et W sont des espaces fonctionnels (des espaces vectoriels dont les éléments sont des fonctions),
- a est une forme bilinéaire définie sur $V \times W$ et f est une forme linéaire définie sur W .
- On dit que V est l'espace solution et que W est l'espace test. Les éléments de W sont appelés des fonctions tests. (éléments finis PDF dans le dossier thermique)

Pour la méthode de résidus pondérés, le choix des fonctions Ψ_i induit une erreur de méthode mais elle présente un avantage par rapport à la formulation variationnelle car elle peut s'appliquer à toutes les équations indépendamment de la connaissance et de l'existence de l'expression énergétique du système.[38]

III-3-5. Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis

a. Les avantages

- Adaptation aux géométries complexes.
- Prise en compte des non linéarités.
- Temps de calcul relativement avantageux.

b. Les inconvénients

- La non-prise en considération des domaines infinis.
- Impuissante en présence de singularités dans le domaine d'étude dont certains points présentent des dérivées infinies.

Et pour résoudre ce problème, on utilise les méthodes mixtes.

III-4. Les méthodes mixtes

III-4-1. Éléments finis / éléments frontières

Cette formulation regroupe une formulation variationnelle sur les domaines fermés, représentant les matériaux métalliques, alliée à une formulation intégrale du champ électromagnétique dans l'air. La méthode des éléments de frontière permet de coupler les

inducteurs et la pièce étudiée par le calcul des valeurs imposées du potentiel magnétique sur le contour des inducteurs et pièces. La répartition des champs électromagnétiques à l'intérieur d'un domaine est ensuite calculée par une formulation variationnelle. Ce couplage dépend :

- des conditions de continuité aux interfaces qui doivent être respectées par le champ interne issu d'un calcul éléments finis et par le champ externe issu de la méthode des équations intégrales de frontière,
- de l'ordre de discrétisation de chaque méthode.

Cette méthode mixte possède l'avantage :

- de bien prendre en compte le domaine ouvert,
- de réduire considérablement le nombre d'éléments du maillage (étant donné que l'air n'est pas maillé et donc le nombre d'inconnues),
- de permettre le déplacement de l'inducteur sans remaillage,
- de bien prendre en compte les effets non linéaires des pièces magnétiques.

L'inconvénient majeur provient du fait que la matrice du système est pleine ce qui entraîne des besoins en mémoire importants et la résolution du système linéaire peut être coûteuse en temps.[39]

III-4-2. Eléments finis / Equations intégrales

La méthode des éléments finis est employée dans les milieux conducteurs et nécessite la connaissance du potentiel magnétique sur les contours des pièces et inducteurs. La loi de Biot et Savart peut être utilisée à cette fin.

Néanmoins, étant donné que la répartition de densité de courant dans les conducteurs dépend du champ électromagnétique environnant et donc de ses valeurs sur les contours, une résolution itérative est nécessaire pour réactualiser les conditions aux limites sur les contours après qu'une nouvelle répartition de densité de courant ait été obtenue. Cette méthode est peu performante en termes de rapidité de calcul car elle nécessite de nombreuses itérations pour converger.[39]

III-5. Formulations éléments finis des modèles d'équations électromagnétiques et thermiques

III-5-1. Les étapes de déroulement de la méthode des éléments finis

III-5-1-1. L'équation aux dérivées partielles

En utilisant les équations de Maxwell, les relations du milieu et la loi d'Ohm on arrive à décrire le comportement d'un phénomène électromagnétique par une équation aux dérivées partielles dans l'espace et/ou dans le temps, et d'après le principe de la conservation de l'énergie interne d'un système on arrive à établir l'équation aux dérivées partielles qui régit la répartition de la température et du potentiel vecteur, on associe à ces équations les conditions aux limites conformes à la nature du problème, elles sont de type Dirichlet, Neumann ou mixtes (Dirichlet-Neumann).

Il existe trois types d'équations aux dérivées partielles sont :

- Equations elliptiques : elles traduisent le comportement stationnaire des phénomènes physiques.
- Equations paraboliques : elles traduisent le comportement en régime transitoire.
- Equations hyperboliques : elles traduisent le phénomène de propagation d'ondes.

III-5-1-2. D'une équation aux dérivées partielles à une intégrale

La formulation intégrale de l'équation aux dérivées partielles utilise une de ces méthodes :

- Méthode des résidus pondérés.
- méthode de formulation variationnelle.

III-5-1-3. Discrétisation du domaine

La méthode des éléments finis est basée sur une discrétisation du domaine en un nombre fini de petits sous domaines appelés éléments, dont on aura au préalable choisis la géométrie selon les dimensions du domaine d'étude, en s'appuyant sur les éléments de référence, auxquelles on associe un système de coordonnées normées. Les points caractéristiques de ces éléments sont appelés nœuds.

III-5-1-4. Ecriture matricielle

La formulation intégrale suivie de la discrétisation de domaine, nous permet de faire la somme des valeurs obtenues ; la formulation intégrale de l'E.D.P sur chaque élément du domaine, et la discrétisation du domaine suivit d'une approximation de l'inconnu sur chaque élément de celui-ci nous donnent un ensemble de valeurs ; on peut dire alors qu'on est passé d'un intégrale a une somme numérique qui ne peut être qu'une écriture matricielle.

III-5-1-5. Résolution du système matriciel

Nous avons un système matriciel de la forme suivante :

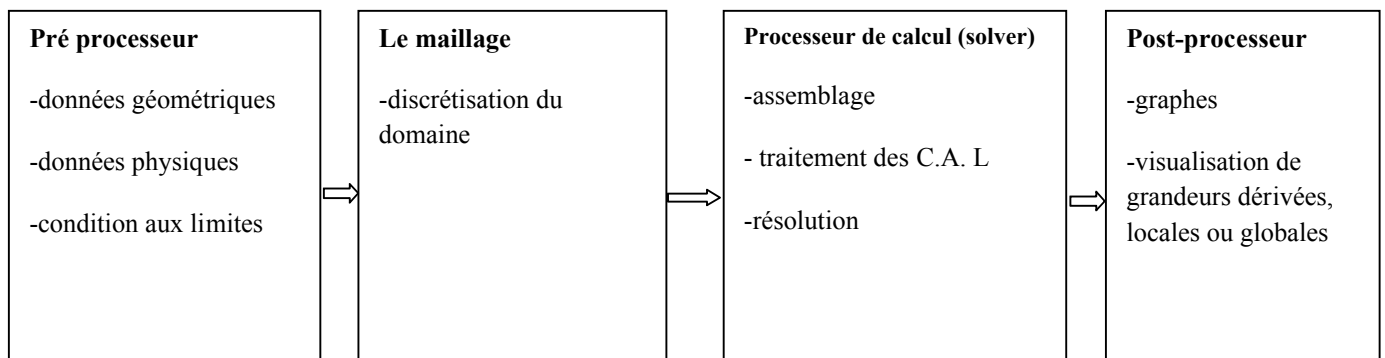
$$[M] [A] = [K]$$

La résolution d'un tel système se fait par des méthodes directes ou itératives, selon la nature de la relation entre la matrice [M] et le vecteur inconnu [A].

III-5-1-6. Utilisation du vecteur solution [A]

La solution de système matriciel, nous fournis des valeurs aux nœuds par le vecteur solution [A], la fonction d'interpolation nous permet d'avoir la solution de chaque élément du domaine, il est donc possible de calculer les grandeurs physiques de système étudié.

III-5-2.Implémentation informatique de la méthode des éléments finis



III-5-3. Formulation éléments finis de l'équation magnétodynamique en terme de potentiel vecteur A en coordonnées cartésiennes 2D

III-5-3-1.Hypothèse simplificatrice

L'équation électromagnétique à établir sera obtenue à partir des hypothèses simplificatrices, souvent utilisées lors du traitement des phénomènes électromagnétiques dans le domaine des courants forts, suivants :

- Les courants de déplacement sont négligeables.
- La densité de charge volumique est supposée nulle.
- Les matériaux utilisés sont à propriétés physiques isotropes.[6]

Cas linéaire :

On considère que les propriétés électromagnétiques, la perméabilité magnétique μ et la conductivité électrique σ indépendantes du champ magnétique, de l'induction magnétique et de la température.[37]

III-5-3-2. Conditions aux limites

a-Condition de *Dirichlet*

Cette condition nous renseigne sur la valeur exacte de l'inconnu sur la frontière extérieur du domaine de résolution.

$$U = g \quad \text{III.8}$$

Avec :

g : Constante

U : L'inconnu du problème.

b-Condition de *Newman*

Cette condition nous renseigne sur la valeur de la composante normale de l'inconnu sur la limite du domaine étudié et elle s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial n} = g \quad \text{III.9}$$

c-Condition mixte *Dirichlet-Newman*

Appelée aussi condition de Cauchy ou Robin, elle s'exprime comme suit :

$$\mathbf{a}U + \mathbf{b} \frac{\partial U}{\partial n} = \mathbf{g} \quad \text{III.10}$$

Avec :

g : Valeur de l'inconnu sur la frontière.

a,b : Coefficients.

U : Inconnu du problème.

➤ **Régime transitoire** : l'équation magnétodynamique en terme de A au régime transitoire est

$$\vec{\nabla} \Lambda (\mathcal{G} \vec{\nabla} \Lambda \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad \text{III.11}$$

La formulation intégrale de l'équation (5) par la méthode des résidus pondérés, donnée par :

En coordonnées cartésiennes

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{G} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{G} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - j\omega\sigma A_z \right) \psi_i dx dy = \iint_{\Omega} J_s \psi_i dx dy \quad \text{III.12}$$

en coordonnées axisymétrique

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\mathcal{G} \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{G} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + j\omega\sigma A \right) \psi_i dr dz = \iint_{\Omega} J_s \psi_i dr dz \quad \text{III.13}$$

A=rA

En appliquant le théorème de Green, qui nous permet d'écrire :

En coordonnées cartésiennes

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{G} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{G} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \psi_i dx dy = - \iint_{\Omega} \overrightarrow{\nu \nabla A_z} \cdot \overrightarrow{\nabla \psi_i} dx dy + \int_{\Gamma} \mathcal{G} \frac{\partial A_z}{\partial n} \psi_i d\Gamma \quad \text{III.14}$$

Avec :

$\nu = \frac{1}{\mu}$: Réflectivité magnétique du milieu [H/m].

\vec{A} : Potentiel vecteur magnétique [T.m].

\vec{J}_{sz} : Vecteur de densité source [A/m^2].

Pour simplifier la résolution du problème, on suppose que les conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann homogène et on aura à la fin un système matriciel à résoudre qui s'écrit comme suit :

$$[M] \cdot [A] + [C] - [A] = [K] \quad \text{III.15}$$

[M] : matrice de rigidité

[A] : inconnu aux nœuds

[C] : matrice qui représente les constantes physiques

[K] : matrice qui représente le terme source

➤ **Régime harmonique**

L'équation magnétodynamique en régime harmonique s'écrit sous la forme :

$$\vec{\nabla} \times (\nu \vec{\nabla} \times \vec{A}) + \mu \vec{\nabla} \times \vec{J}_s = \vec{\nabla} \times \vec{J}_s \quad \text{III.16}$$

La formulation intégrale de l'équation (5) par la méthode des résidus pondérés, donnée par :

$$\iint_{\Omega} \left(\vec{\nabla} \times (\nu \vec{\nabla} \times \vec{A}) + \mu \vec{\nabla} \times \vec{J}_s - \vec{\nabla} \times \vec{J}_s \right) \cdot \vec{\alpha} \, d\Omega = 0 \quad \text{III.17}$$

α : fonction de projection.

L'équation (9) après transformation et considération des conditions aux limites devient :

En coordonnées cartésiennes

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \left(\frac{\partial \vec{A}_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \left(\frac{\partial \vec{A}_z}{\partial y} \right) \right) dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha \sigma \mu \vec{A}_z dx dy = \iint_{\Omega} \alpha \mu \vec{J}_s dx dy \quad \text{III.18}$$

En coordonnées axisymétrique

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial r} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \right) \right) dr dz + j\omega \iint_{\Omega} \frac{\alpha \sigma \mu \vec{A}}{r} dr dz = \iint \alpha \mu \vec{J}_s dr dz \quad \text{III.19}$$

Les grandeurs A_z et J_s sont dans ce cas complexes, Le système algébrique à résoudre est de la forme :

$$[M+j\omega L] [\vec{A}] = [\vec{K}]$$

III-5-4. Formulation éléments finis de l'équation de conduction de chaleur en coordonnées cartésiennes 2D :

Cas linéaire :

On considère que les propriétés thermiques ; la capacité calorifique ($\rho.C_p$), la conductivité thermique λ et la densité de puissance dissipée par effet joule ; indépendantes de la température et des coordonnées de plan d'étude. –

a- Régime transitoire : l'équation thermique au régime transitoire est

$$\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \vec{\nabla} T) + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = p \quad \text{III.20}$$

La formulation intégrale de l'équation (11) par la méthode des résidus pondérés, donnée par :

$$\iint \alpha \left[\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (-\lambda \vec{\nabla} T) - p \right] d\Omega = 0 \quad \text{III.21}$$

En utilisant les conditions aux limites de type Dirichlet et Newmen homogène on aura :

$$\iint \lambda \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right) dx dy + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \alpha dx dy = \iint \alpha p dx dy \quad \text{III.22}$$

On aura a la fin un système matriciel a résoudre qui s'écrit comme suit :

$$[M] [T] + [C] [\text{---}] = [K] \quad \text{III.23}$$

III-5-5. Formulation éléments finis de l'équation du couplage magnétothermique

On associe aux équations (5) et (11) des conditions aux limites de type Diriclet ($A=A_0$, $T=T_0$) et Newmann homogène ($\frac{\partial T}{\partial n}$). Les systèmes algébriques relatifs a ces deux

phénomènes conduisent a deux systèmes algébriques couplés a résoudre, Le model couple magnétothermique linéaires est représenté par l'organigramme suivant :

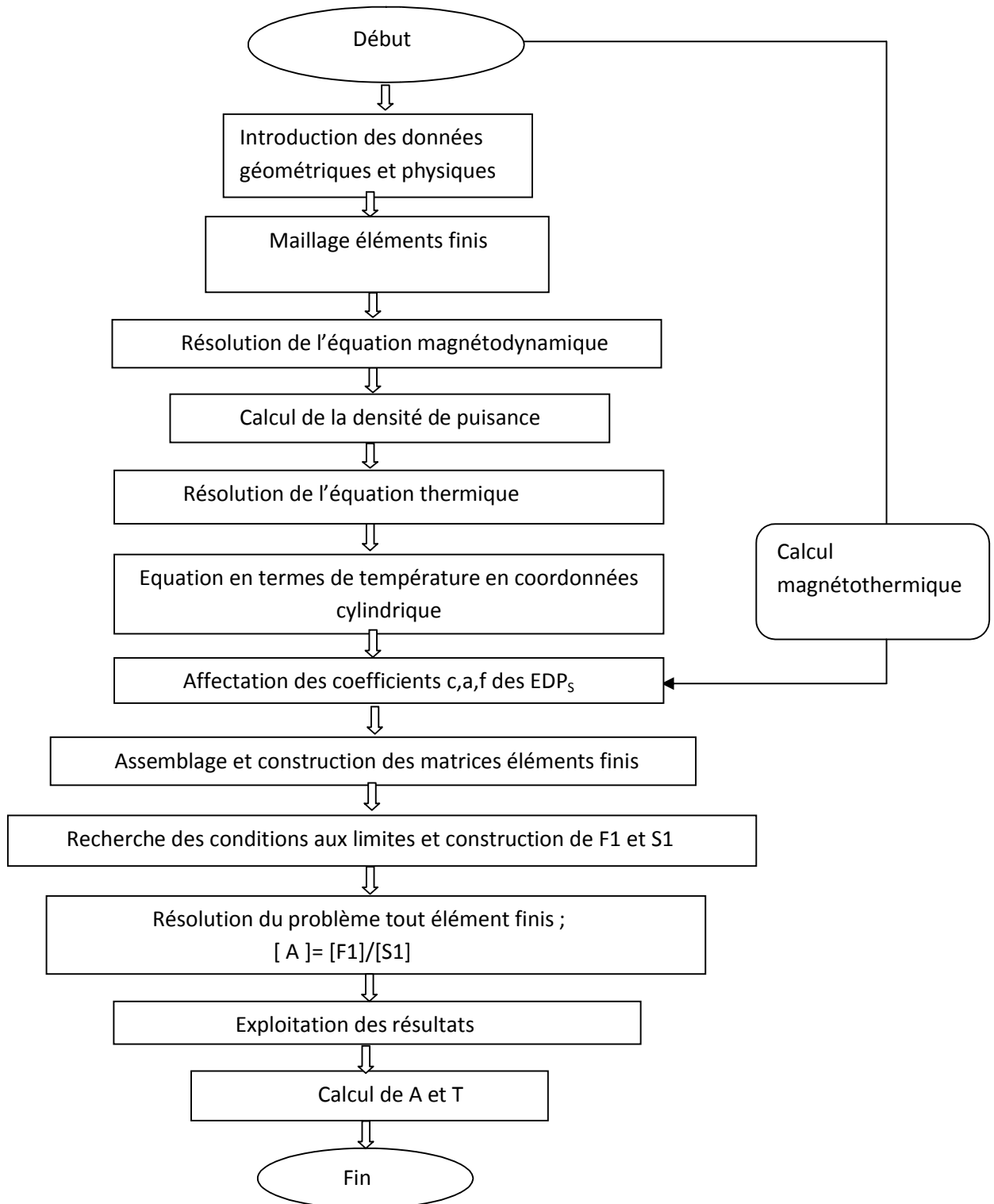


Figure III.1 Organigramme de la solution couplée magnétothermique

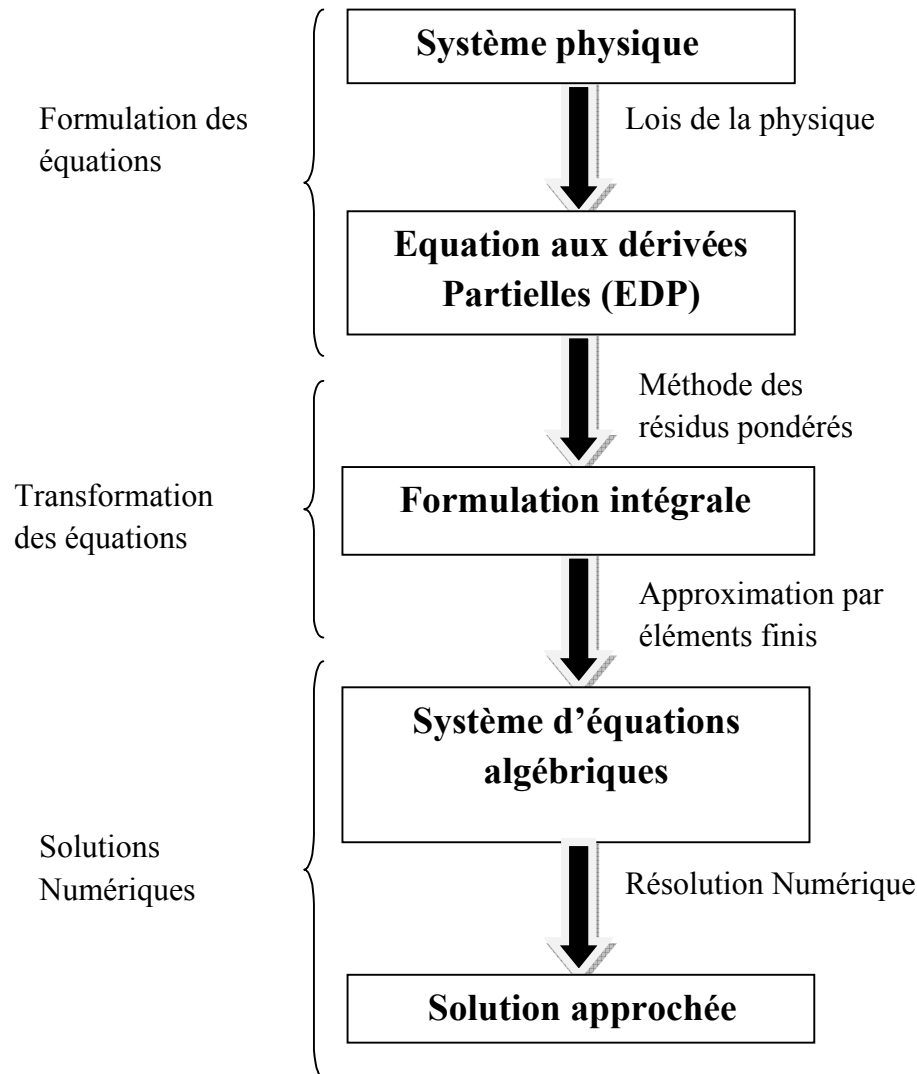


Figure III.2: étapes de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis

III-5-6. Méthode de résolution des systèmes matriciels

La recherche de la solution des équations aux dérivées partielle par la méthode des éléments finis, nous a conduit après formulation intégrale, vers une écriture matricielle qui est sous la forme suivante :

$$[M] [A] = [K]$$

Si le problème est linéaire ; $[M]$ ne dépend pas de l'inconnu $[A]$ les méthodes de résolution sont de deux type :

* Les méthodes directes : elle consiste en une solution donnée par un nombre fini d'étapes, c'est une méthode très précise mais très coûteuse en temps de calcul (méthodes de Gauss, Cholesky et Jordan).

* Les méthodes itératives : c'est une succession d'amélioration de l'approximation de la solution atteinte après un certain nombre d'itérations. Le nombre d'itérations est imprévu, il est dépendant de la structure de la matrice [M].

La résolution de tel système se fait par ordinateur, en implémentant un programme de résolution, qui déroule l'une de ces méthodes.

* Discrétisation temporelles : dans le régime transitoire on remarque que les systèmes matricielles obtenues possèdent un vecteur dont sa composante varie par rapport au temps, la discrétisation de ce terme est de type différence finis implicite. Par exemple dans le cas du système matriciel (14) obtenu suite à la formulation éléments finis de l'équation de transfert de chaleur dans le plan cartésien 2D.

Le système peut être décrit comme suite :

$$[M] [T] + [C] \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right] = [K] \quad \text{III.24}$$

Dans ce cas l'opérateur différentiel est transformé en un opérateur aux différences finis comme suit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T^{t+1} - T^t}{\Delta t} \quad \text{III.25}$$

Où Δt représente la différence entre les valeurs T^{t+1} à l'instant $t + 1$ et T^t à l'instant t par rapport à un pas de temps Δt , et la valeur de la température T^t sera utilisée pour calculer la valeur de la température T^{t+1} ; la résolution à chaque pas de temps nécessite un calcul itératif et on aura le système suivant :

$$[F] \Delta t + [C] [T]_{t+1} = [C][T]_t + \Delta t [S] \quad \text{III.26}$$

On pose

$$[[F] \Delta t + [C]] = [E] ; [C][T]_t + \Delta t [S] = [H] \quad \text{III.27}$$

$$\text{On aura : } [E] [T]_{t+1} = [H] \quad \text{III.28}$$

Conclusion

A travers ce chapitre nous avons présenté le modèle numérique du phénomène couplé magnétothermique traduisant le comportement de la torche a plasma, nous avons d'abord commencé par des généralités sur les différentes méthodes numériques usuelles et avec une présentation plus détaillée de la méthode des éléments finis que nous avons utilisé pour la modélisation numérique du phénomène qui sera exploitée dans le chapitre suivant par le traitement d'applications sous environnement Matlab en utilisant le programme de calcul par éléments finis.

Chapitre IV

Applications et résultats

Introduction

Après avoir développé le modèles mathématiques et avoir fait la modélisation numérique du couplage magnétothermique de la torche, nous allons les exploiter les avec des programmes sous le logiciel Matlab pour vérifier les résultats obtenus en simulation de la répartition du potentielle vecteur magnétique, de la température, de la densité de puissance, ainsi que l'évolution de la température de la conductivité électrique ... en fonction du temps et de ces derniers paramètres en fonction de la température

IV.1. Géométrie du dispositif

La géométrie du dispositif simplifié est représentée sur la figure suivante, la charge est représentée en bleu :

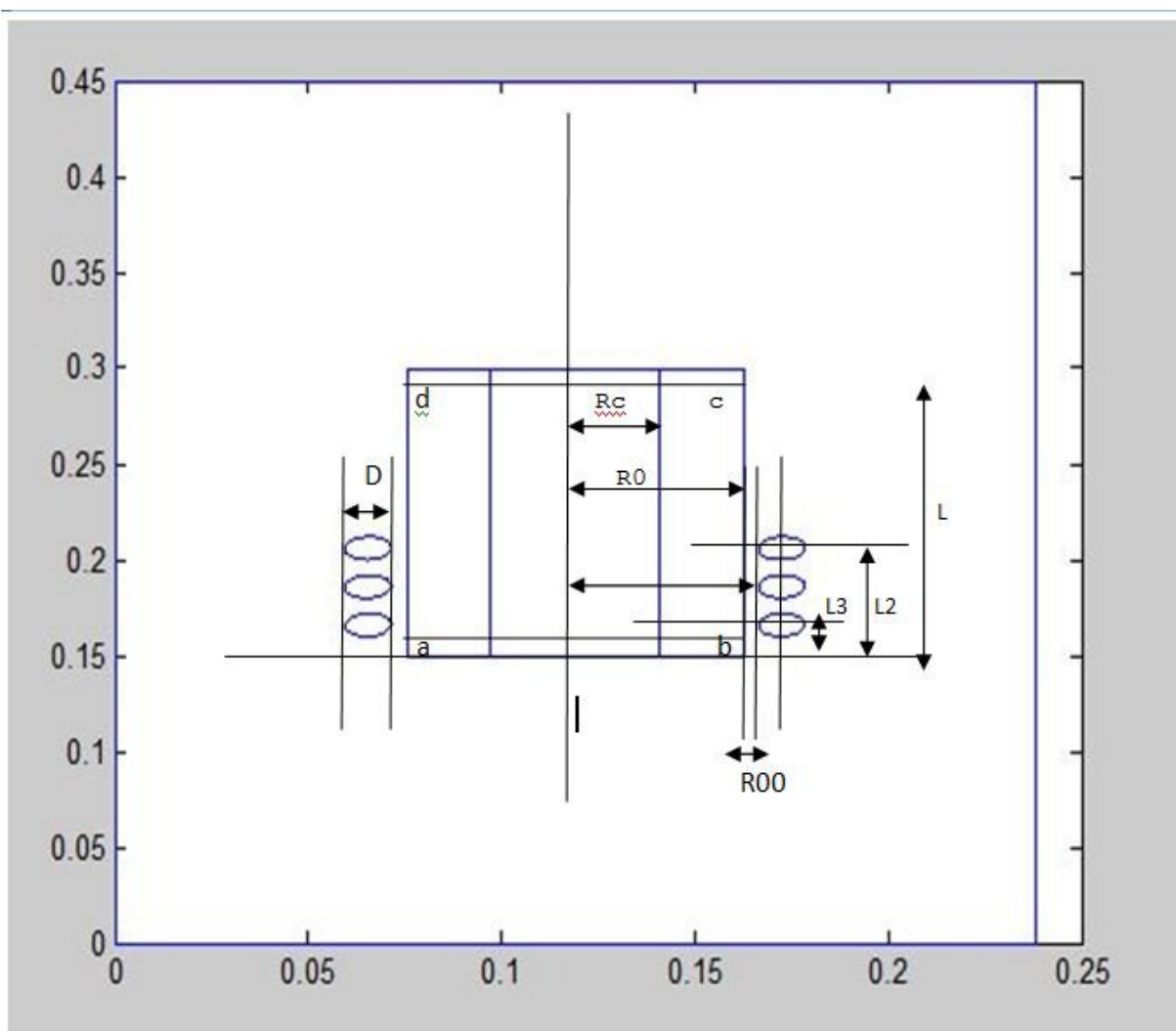


Figure IV.1 : géométrie de la torche

Dimension de la géométrie

$L=0.150$ m
 $L1=0.01$ m
 $L2=0.056$ m
 $Rc=0.022$ m
 $R0=0.0435$ m
 $D=0.012$ m
 $R00=0.004$ m

IV.2. Les régions du système

Le système est composé de régions :

L'Inducteur en cuivre ;

La charge ou L'Induit en Argon ;

Et l'air qui entoure le système.

Les régions sont représentées sur la figure suivante :

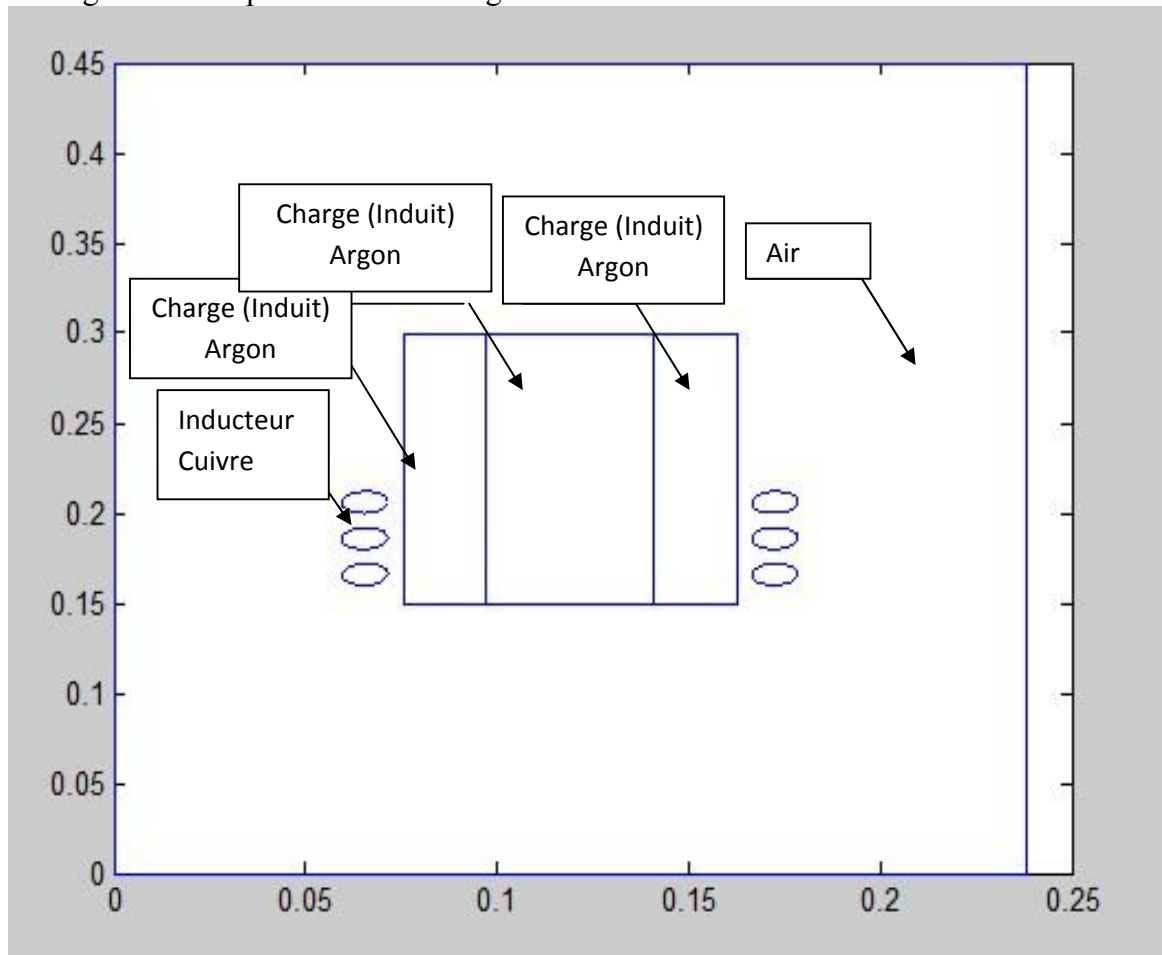


Figure IV. 2 : représentation des régions

IV.3. Maillage éléments finis

Pour le maillage on a fait en sorte que la charge soit bien remaillée pour une meilleure précision et la région étudiée.

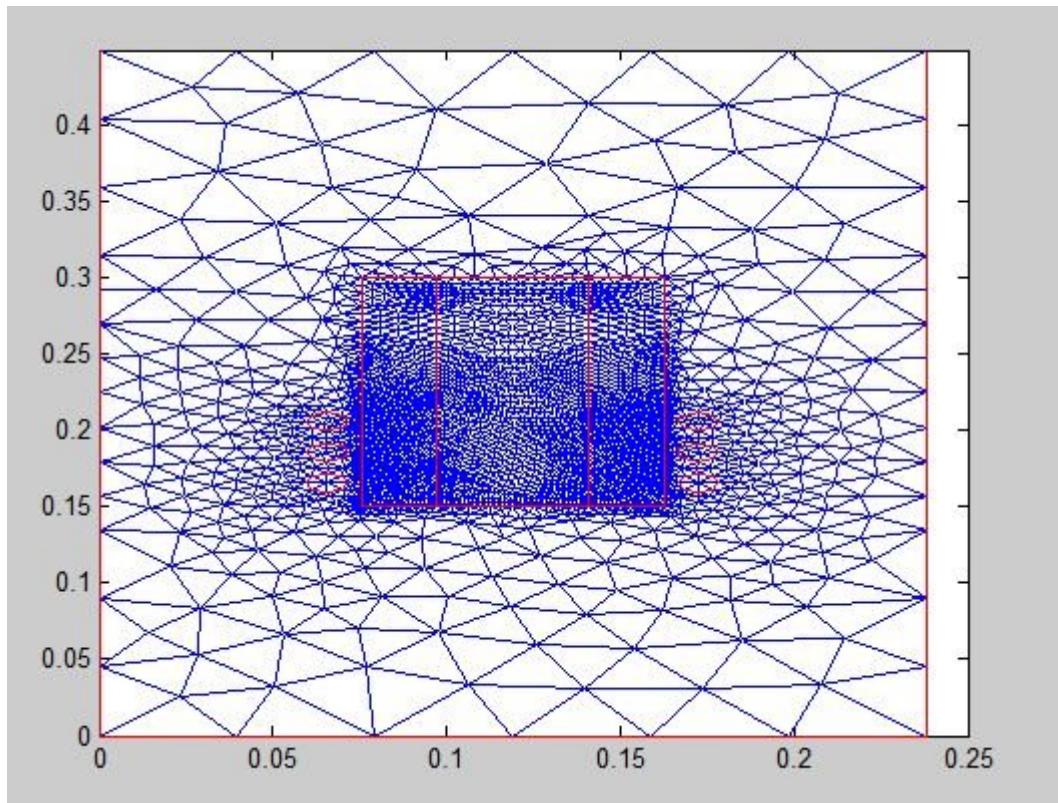


Figure IV. 3 : maillage éléments finis

IV.4. Caractéristiques physiques

Les inducteurs sont en **cuivre** traversé par une **densité de courant J** de l'ordre de $J_{\max}=7.10^6[C/m^3]$ sous une **haute fréquence** de 2 Mhz

L'induit ou la charge ou se forme le plasma est gaz rare , l'Argon , qui a les propriétés physiques suivantes :

IV.4.1. La conductivité électrique

Le modèle est établi sur la base des mesures rapportées dans [15]

On pose $S=T /10^3$

$$= 2,26866. \quad T \leq 7000 \text{ °K}$$

$$= 25,7555. +276,881.S - 2202,08 \quad 7000 \text{ °K} < T \leq 13750 \text{ °K}$$

IV.4.2 . Conductivité thermique

Le modèle est établi sur la base des tables [51]

$S=T /10^3$

$$K=-0,0141678.S^2+0,0565179.S+0,00161325 \quad T \leq 2000 \text{ °K}$$

$$K=-0,00122708.S^3+0,013348.S^2+0,061682.S-0,0206273 \quad 2000 < T \leq 11000 \text{ °K}$$

$$K=0,151623.S+0,897453 \quad T>11000 \text{ °K}$$

IV.4.3. Chaleur spécifique

Le modèle est établi sur la base des tables [51]

$$S=T / 10^3$$

$$C_p=519,188 \quad 350^\circ\text{K} \leq T \leq 8000^\circ\text{K}$$

$$C_p=-20,1304.S^4 + 843,146.S^3 - 12758,8.S^2 - 83711,7.S - 201865 \quad 8000 < T \leq 15000^\circ\text{K}$$

$$C_p=1,83735.10^{10}/S^{5,34194} \quad 15000 < T \leq 30000^\circ\text{K}$$

IV.4.4. La masse volumique

Le modèle est établi sur la base des tables [51]

$$S=T / 10^3$$

$$=0,480998.S^{-0,999739} \quad 350^\circ\text{K} \leq T \leq 5000^\circ\text{K}$$

$$=-1,2586.10^{-4}.S^3 + 4,03339.10^{-3}.S^2 - 0,0483859.S + 0,253936 \quad 5000^\circ\text{K} \leq T \leq 13000^\circ\text{K}$$

$$=0,030342 \quad T > 13000^\circ\text{K}$$

IV.4.5. Densité de puissance :

Le modèle est établi selon les courbes rapportées dans [16]

$$S=T . 10^3$$

$$DPJ=0 \quad T \leq 5000^\circ\text{K}$$

$$DPJ=4,61497.10^{-13}.S^{19,5806} \quad T > 5000^\circ\text{K}$$

IV.5. Potentiel vecteur magnétique

La simulation sous Matlab du phénomène électromagnétique est représentée par le potentiel vecteur magnétique dans la figure suivante, ou en remarque un champ intense autour des inducteurs et surtout au niveau des parois de la charge et il se propage dans l'air entourant les inducteurs.

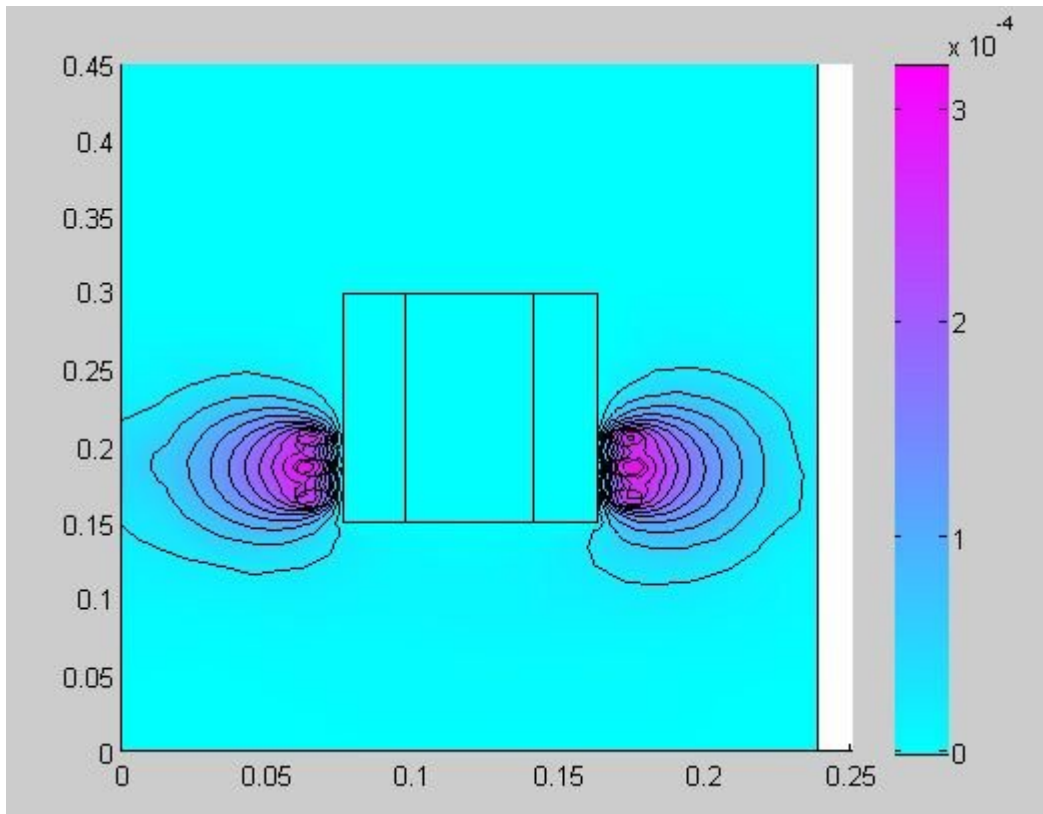


Figure IV. 4 : répartition du potentiel vecteur magnétique dans le système

IV.6. Température

La température induite par effet joule est de densité de puissance importante, elle est représentée dans la figure qui suit ; la répartition de celle-ci n'est pas uniforme, elle est très élevée sur les parois exposées aux inducteurs mais moindre au centre, ce qui s'explique par l'effet de peau du à la fréquence élevée qui est inversement proportionnelle à la profondeur de pénétration qui diminue : $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$, les températures peuvent dépasser les 10 000 °K ce qui peut former un plasma suite à une petite décharge qui va enchaîner l'ionisation des particules du gaz.

La figure suivante représente l'évolution de la température en fonction du temps pour un point (nœud) de la région de la température maximale.

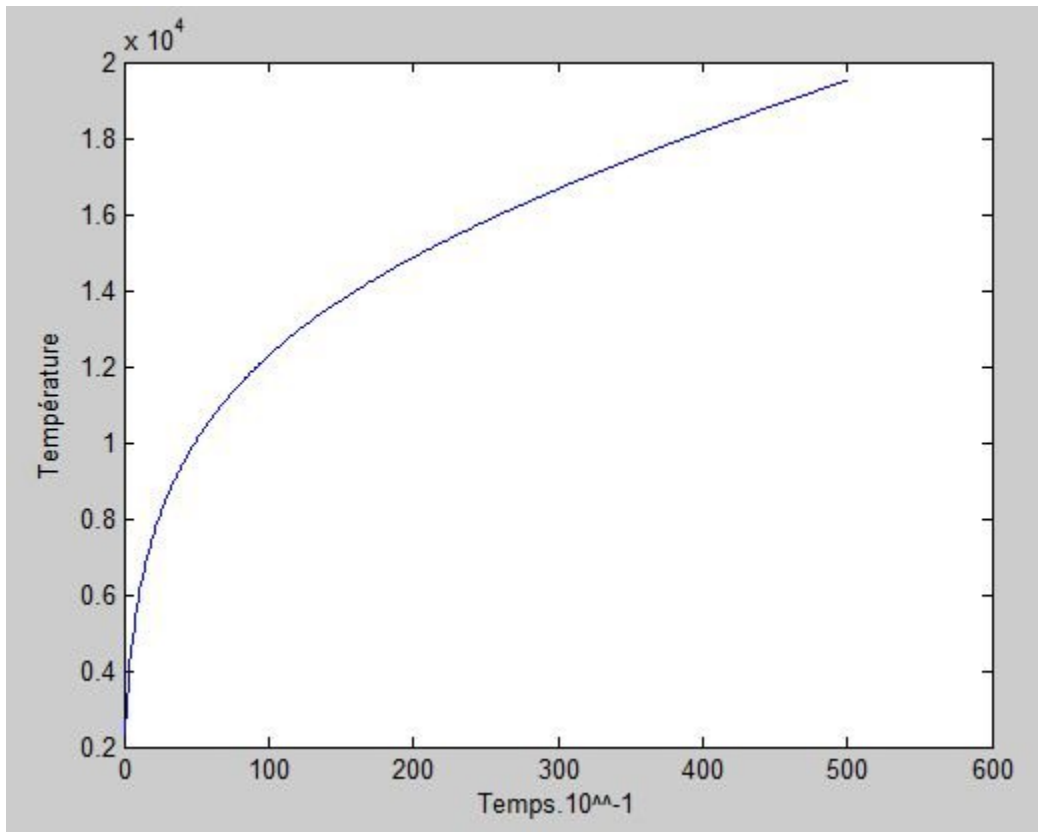


Figure IV. 5 : évolution de la température en fonction du temps sur un point de la zone Tmax de la charge.

Nous remarquons une évolution proportionnelle avec le temps,

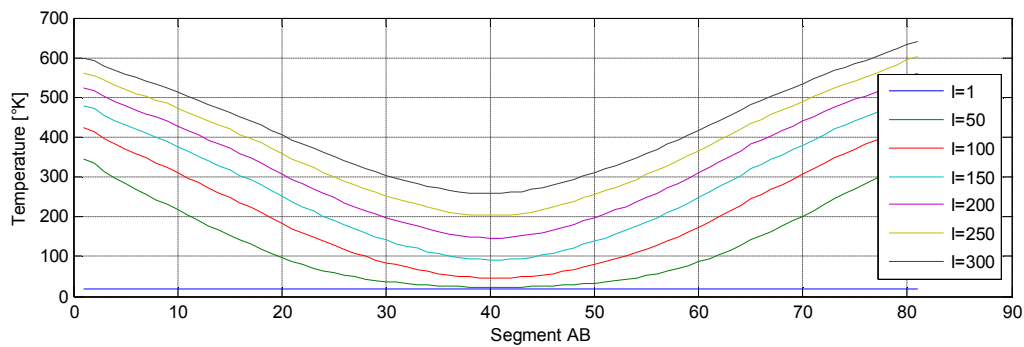


Figure IV.6 : Evolution de la température en fonction du temps le long du segment AB

Dans cette figure nous remarquons bien comment la température augmente avec le temps et nous remarquons que la température diffère d'un point à un autre les régions proche des parois sont à une température beaucoup plus grande que celle du centre et c'est exactement ce qui s'explique par l'effet de peau déjà mentionné.

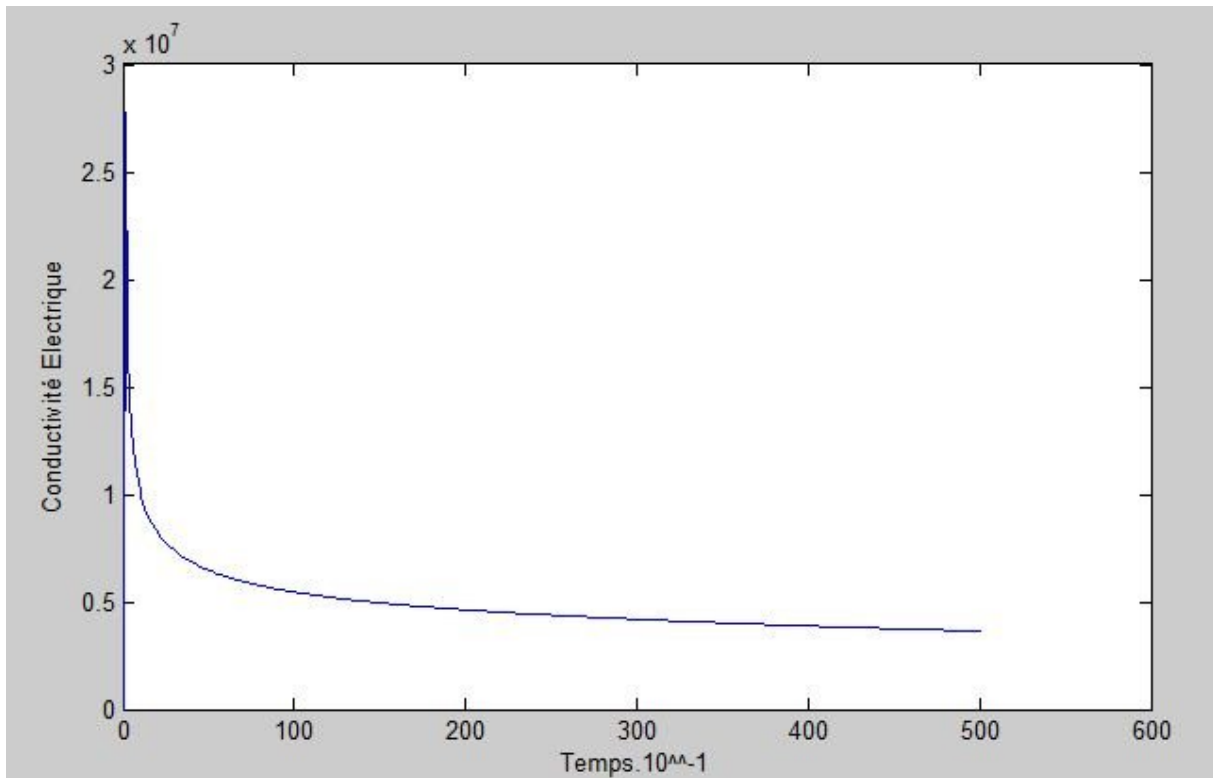


Figure IV. 7 : Evolution de la conductivité électrique en fonction du temps sur le point Tmax.

Nous remarquons un pic juste aux premières dixièmes de secondes qui ne tarde pas trouvé le régime permanent

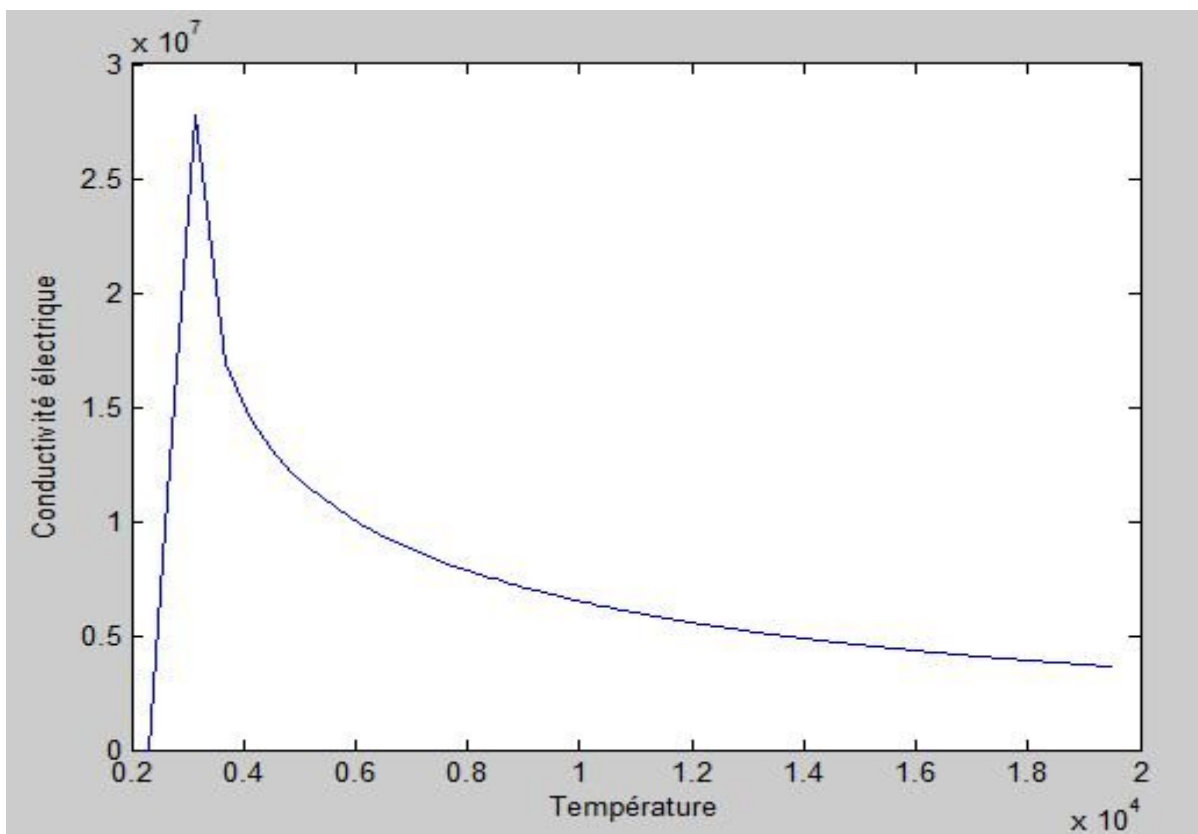


Figure IV. 8: Evolution de la conductivité électrique en fonction de la température sur un point de la région à température maximale Tmax.

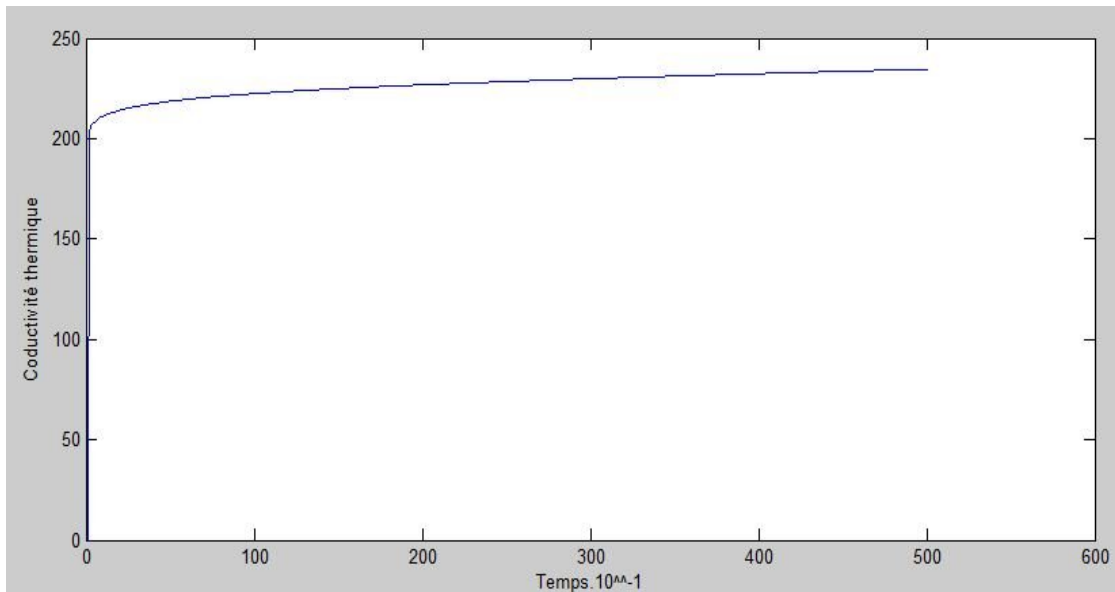


Figure IV. 9 : Evolution de la conductivité thermique en fonction du temps sur le point Tmax.

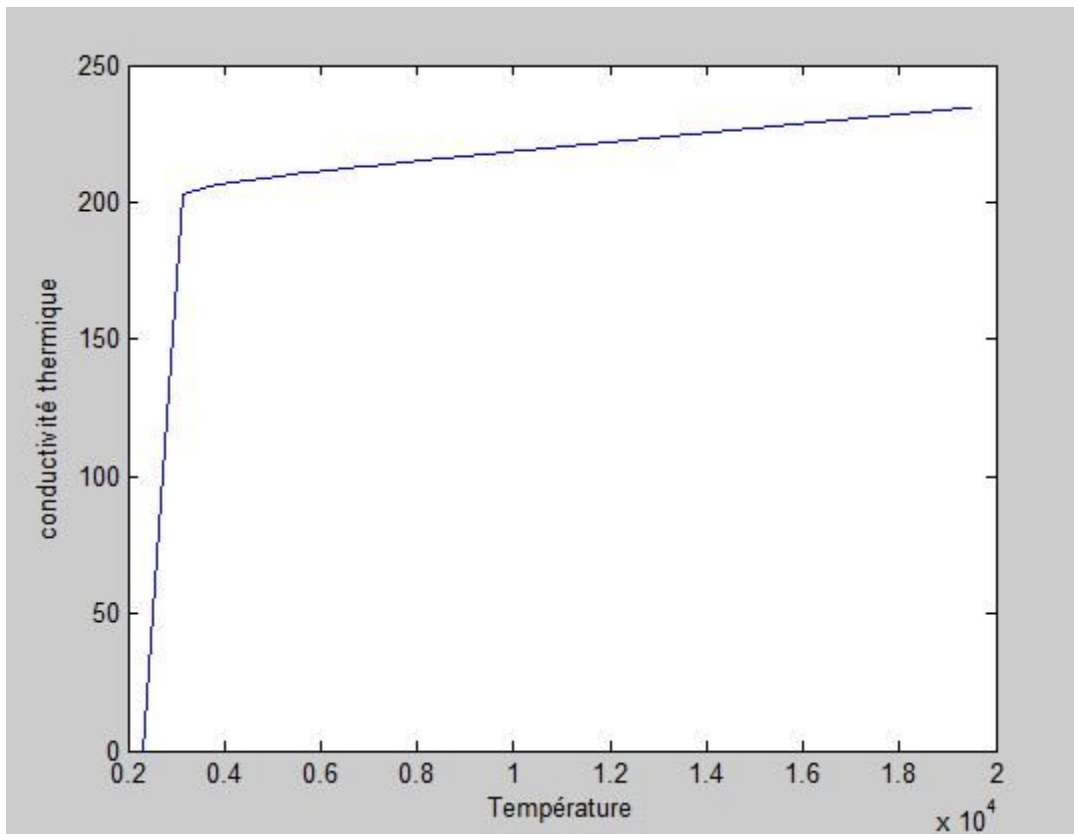


Figure IV. 10 : Evolution de la conductivité électrique en fonction de la température sur un point de la région à température maximale Tmax.

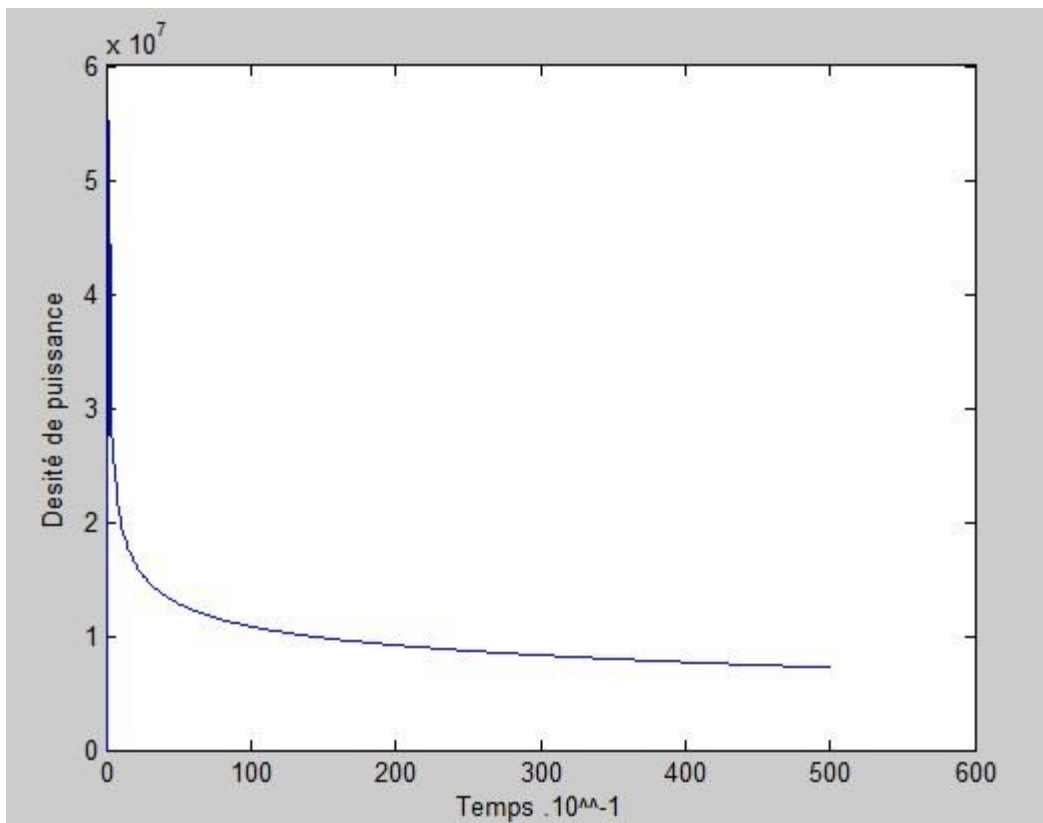


Figure IV. 11 Evolution de la densité de puissance en fonction du temps sur le point Tmax.

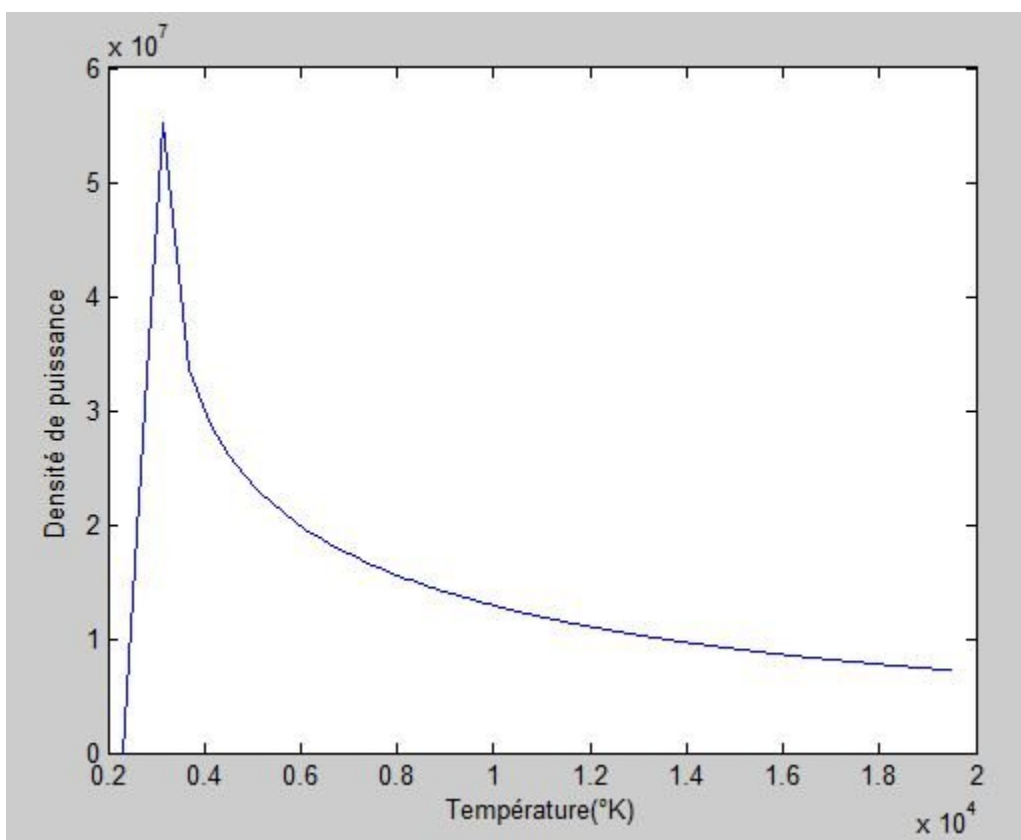


Figure IV. 12 Evolution de la conductivité électrique en fonction de la température sur un point de la région à température maximale Tmax.

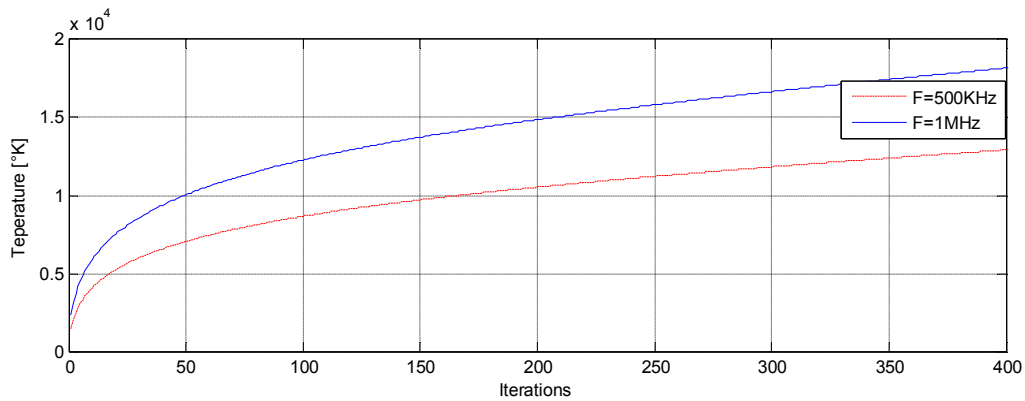


Figure IV.13 comparaison entre deux courbe de l'évolution de la température à des fréquences différentes.

La considération des différentes fréquences nous montre l'influence de celle-ci sur la température et les conductivités thermiques et électriques ainsi que la densité de puissance

Plus la fréquence est élevée plus la température augmente cela est dû au libre parcours moyen qui devient plus petit ce qui augmente les collisions élastiques causant ainsi l'augmentation de la température.

L'augmentation de la température engendre une hausse de la conductivité thermique vue l'ionisation du gaz pour atteindre un régime permanent.

Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons exploité les modèles développés précédemment transcrit en un programme informatique sous environnement Matlab. La géométrie du système, les propriétés physiques ainsi que le domaine de résolution avec les conditions limites associées sont représentés pour le dispositif choisi. La résolution du problème couple magnétothermique permet d'obtenir : la répartition du champ magnétique, de la température, l'évolution de cette dernière, et l'évolution en fonction du temps et de la température des grandeurs telle que la conductivité électrique, et conductibilité thermique, la densité de puissance.

Conclusion Générale

Conclusion générale :

Pour répondre aux besoins de la recherche et de l'industrie en termes de chauffage par induction, l'utilisation de technologies développées a conduit à la mise en place de torches à plasma non polluantes. La torche à plasma est un dispositif pouvant produire des températures très élevées. Le présent travail a concerné la modélisation par éléments finis de la torche à plasma d'induction en procédant à la résolutions des équations couplées électromagnétique et thermique..

Un programme de calcul par éléments finis traduisant le comportement électromagnétique de la torche à plasma d'induction en hypothèse bidimensionnelle a été écrit sous environnement Matlab. Une fois les résultats du problème électromagnétique sont obtenus et validés, le problème de la diffusion de la chaleur a été introduit à un programme réalisant le couplage entre les phénomènes électromagnétiques et thermique qui'a été développé sous environnement Matlab en exploitant les fonctionS PDETOOL

Le modèle a été appliqué à l'étude magnétothermique de la torche à plasma et les résultats obtenus en hypothèses non linéaires (variation de la conductivité électrique, de la conductivité thermique en fonction de la température) sont fournis en termes d'évolution de la température, de la conductivité électrique, de la conductivité thermique et de la densité de puissance en fonction du temps et en suit en fonction de la température. les résultats sont conformes et convergent aux travaux déjà faits précédemment.

Espérons que ce travail trouvera suite et sera utile pour l'étudiant chercheur et pour tous ceux qui veulent s'initier aux plasmas, au chauffage par induction, à la magnéto thermie, aux méthodes numériques et aux torches à plasma.

Bibliographie

Références bibliographiques :

- [1] W. Hittorf, Wiedsmann, "Ueber die Electricitätsleitung der Gase", Ann. D. Physik., Vol. 21, p.90 1884.
- [2] Babat, G.I., "Electrodeless discharges and some allied problems", J. Institution of Electrical Engineers, part III, 94 (27), pp 27-37, January 1947.
- [3] T.B. Reed, "Induction Coupled Plasma Torch", J. Appl. Phys., Vol 32,. 1961, pp 821-824.
- [4] <http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/energies-th4/electrothermie-industrielle-42270210/chauffage-par-induction-electromagnetique-principes-d5935/>, Consulté le 06/08/2014, Référence D5935 | Date de publication : 10 févr. 2000 | Gérard DEVELEY
- [5] A.A. Shepelenko, P. A. Mikheyev, A. I. Voronov and N. V. Kupryaev, "Measurement of singlet oxygen concentrations in a fast flow dc discharge in oxygen–argon mixtures", J. Phys. D: Appl. Phys. 41, N° 24, 245203 (5pp), 2008
- [6] N. Ikhlef, M. R. Mékidèche, O. Leroy and A. Kimouche, "3D Electromagnetic Simulation of a Large Diameter Cylindrical Surface Wave Excited Plasma Reactor", COMPEL, Vol. 27, N° 5, pp.1069 – 1080, 2008
- [7] E. Mateev, "RF magnetron discharge model based on power balance", J. Phys.: Conf. Ser. 63 012027 (5pp), 2007.
- [8] L. Maunoury, C. Pierret, S. Biri and J.Y Pacquet, "Studies of the ECR plasma using the TrapCAD code", Plasma Sources Sci. Technol. 18 015019 (7pp), 2009.
- [9] M. El Morsli, P. Proulx, "Two-temperature chemically non-equilibrium modelling of an air supersonic ICP", Journal of physics. D, Applied physics, vol. 40, no16, pp. 4810-4828, 2007.
- [10] D. Pelletier D. 'Modélisation de la cinétique chimique dans les plasmas inductifs – Applications aux procédés', Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 2006.
- [11] M. I. Boulos, P. Fauchais, E. Pfender, "Thermal plasmas: fundamental and applications". Vol.1, New York: Plenum Press, 452p. ISBN 0-306-44607-3, 1994.
- [12] V. Colombo, E. Ghedini and J. Mostaghimi, "Three-Dimensional Modeling of an Inductively Coupled Plasma Torch for Spectroscopic Analysis", IEEE transactions on plasma science, vol. 36, N° 4, pp 570, 2008
- [13] Z. Kregar, N. Krstulovic, S. Milosevic, K. Kenda, U. Cvelbar and M Mozetic "Inductively Coupled RF Oxygen Plasma Studied by Spatially Resolved Optical Emission

Spectroscopy Plasma Science”, IEEE Transactions on Volume 36, Issue 4, pp.:1368 – 1369 Aug. 2008

[14] B. Paya, P. Fache, “Le plasma inductif de forte puissance”, les fiches techniques, EDF, Direction des Etudes et Recherches, 1997.

[15] J. W. Pool, M. P. Freeman, K. W. Doak and M. L. Thorpe,” Simulator Tests to Study Hot-Flow Problems Related to a Gas Core Reactor”, NASA-CR-2309, 1973.

[16] M. R. Mékidèche," Contribution à la modélisation numérique d'une torche à plasma d'induction ", Thèse de doctorat, Université de Nantes, IUT de Saint-Nazaire, France, 1993.

[17] H.U. Eckert, "The Induction Arc: A State-of-the-Art Review" High Temp. Sci. Vol 6, pp. 99-134, 1974.

[18] N. IKHLEF,”Modélisation numérique d'une installation convertisseur-plasma d'induction en vue d'une commande optimale», Thèse de doctorat de l'université de Batna, 2010

[19] Jean Lucas : « induction, conduction magnétique » ; Coyright © 1996.

[20] M.R. Mékidèche and M. Filiachi, "An Axially Symmetric Finite Element Model for the Electromagnetic Behavior in an RF Plasma Device". IEEE. Trans. On Mag, vol29. N°6, pp.2476, Nov. 1993.

[21] J.P. Pontaza, Xu Diaob, J.N. Reddy and K.S. Suranac,” Least-squares finite element models of two-dimensional compressible flows”, Finite Elements in Analysis and Design 40, pp 629–644, (2004).

[22] J.F. Sacadura : « Initiation aux transferts thermiques »; Lavoisier, Paris, 1967.

[23] Y. Safa, ” Simulation numérique des phénomènes thermiques et magnétohydrodynamique dans une cellule de hall- Héroult “, Thèse de doctorat, école le polytechnique de Lausanne, 2005.

[24] D. Bernardi, V. Colombo, E. Ghedini and A. Mentrelli, “ Comparaison of different technique for the Fluent –based treatment of the electromagnetic field in inductivity coupled plasma torch, Eur.Phys. J. D 27, pp 55-72, 2003.

[25] R.S. Devoto, ' Transport Coefficient of ionized argon', Physics of fluids, vol 16 (1973).

[26] B. Dussoubs, “Modélisation tri-dimensionnelle du procédé de projection plasma: influence des conditions d'injection de la poudre et des paramètres de projection sur le traitement et la répartition des particules dans l'écoulement “, Thèse de doctorat de l'Université de Limoges, France, (1998)

- [27] Gouri Dhatt, Gilbert Tazot, Emmanuel Lefrancois : « Méthodes des éléments finis » ; © LAVOISIER, 11, rue Laviosier, 75008 Paris, 2005.
- [28] Mr Mohellebi : « Modélisation numérique des systèmes d'entraînement électrique (Cour MEE36), 2013/2014.
- [29] Z-Oudni : « Régulation par la température de curie du chauffage par induction d'une plaque ferromagnétique » thèse de magister a l'université de Mouloud Mammeri de tizi-ouzou; 2007.
- [30] Philip Robert : « Matériaux de l'électrotechnique »; Dunod 1979.
- [31] Anneuquin et Boutiny : « Cours de physique : thermodynamique » ; Vuibert 1976
- [32] Cours H.MOHELBI «méthode numérique et calcul du champ 2013 »
- [33] D EUVRARD « résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique mécanique et des sciences de l'ingénieur DF, EF » Edition MASSON 1994
- [34] J.PEDRO, A.BASTOS, NELSON.SODOWSKI « electromagnetic modeling by finite element method CRC, 1 Edition AVRIL 2003
- [35] O.C ZIEN CHIEWIC, W.L WOOD « the finit element method » Mc GRAW HILL, NEW YORK 1989
- [36] F.FOULADYAR « the inverse problem methodology for measurement of permeability of the ferromagnetic material » IEEE transaction on magnetic vol33, N02 MARCH 1997
- [37] A-Nait- Ouslimane : « Mise en œuvre du couplage magnétothermique pour l'étude de la répartition de la température en utilisant la méthode des éléments finis: application aux dispositifs de chauffage par induction et lanceurs électromagnétiques »; thèse d'ingénieur ;2002.
- [38] Alexandre Ern : « Aide Mémoire; Éléments finis » ; Dunod, Paris 2005.
- [39] Valérie Labbe : « Modélisation numérique du chauffage par induction, Approche éléments finis et calcul parallèle »; thèse de doctorat a l'Ecole des Mines de Paris ;2002.