

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mouloud MAMMARI, Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique  
Département d'Automatique**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

En vue de l'obtention du diplôme

*de MASTER ACADEMIQUE EN AUTOMATIQUE  
OPTION : COMMANDE DES SYSTEMES*

*Thème*

***Synthèse d'observateur pour les systèmes  
linéaires et non linéaires soumis aux retards  
sur la mesure***

Proposé par : **Mr. DJENNOUNE Said**

Présenté par : **Melle. KADER Zohra**

Dirigé par : **Mr. HAMMACHE Amar**

**Et Mr. DJENNOUNE Said**

Soutenu le :    /    /2013

*Promotion 2013*

Ce travail a été préparé à : ..... (Nom et adresse de l'entreprise)

## Résumé :

La connaissance des variables internes des systèmes dynamiques est nécessaire pour réaliser les deux principaux objectifs de l'automatique. Or pour des raisons technologiques et économiques ces variables sont inaccessibles à la mesure. La solution qui a été proposée est l'estimation de ces variables, dans les cas des systèmes linéaires la théorie est élaborée, cependant, dans le cas des systèmes non linéaires le problème d'observation reste ouvert. La plus part des systèmes physiques présentent des retard sur la mesure, des exemples de la nouvelle technologie illustre ce cas comme la commande coopérative multi agents, la télé opération...etc. la solution proposée pour la résolution de problème de synthèse d'observateur pour les systèmes à retard sur la mesure est l'observateur en chaine, des simulations ont été faite dans le cadre de ce travail et d'autre problèmes sont toujours ouverts en perspectives.

## Mot clé :

Systèmes à retard, observabilité, synthèse d'observateur, observabilité des systèmes non linéaire. Retard, commande coopérative. Commande multi agents.

# Sommaire

<b>Introuduction générale</b> .....	01
<b>Chapitre 1 : Observabilité, Observateurs linaires et non linéaires</b>	
1.1 Introduction .....	04
1.2 Observation .....	06
1.3 Système d'observateurs pour les systèmes linéaires et non linéaires .....	11
1.4 Conclusion .....	23
<b>Chapitre 2 : les systèmes à retard.</b>	
2.1 Introduction .....	24
2.2 Généralité sur les systèmes à retard .....	25
2.3 Stabilité .....	31
2.4 Observabilité .....	37
2.5 Conclusion .....	37
<b>Chapitre 3 : synthèse d'observateur pour les systèmes linéaire et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure</b>	
3.1 Introduction .....	39
3.2 Cas des systèmes linéaires .....	40
3.3 Cas des systèmes non linéaires .....	46
3.4 Conclusion .....	58
<b>Chapitre 4 : synthèse d'observateur pour les systèmes linéaire et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure</b>	
4.1 Introduction .....	59
4.2 Cas des systèmes linéaires .....	60
4.3 Cas des systèmes non linéaires .....	70

4.4 Conclusion .....	78
<b>Chapitre 5 : Applications</b>	
5.1 Introduction .....	79
5.2 Application 1 : Conduites coopérative de véhicule terrestre .....	80
5.3 Application 2 : Stabilisation coopérative des satellites géostationnaire .....	95
5.4 Conclusion .....	106
<b>Conclusion générale</b> .....	107
<b>Annexe A</b> .....	109
<b>Annexe B</b> .....	113
<b>Annexe C</b> .....	123
<b>Bibliographie</b> .....	136

# Liste des figures

2.1 Principe de l'approximation de padé.....	34
2.2 Système linéaire à retard .....	35
2.3 Prédicteur de Smith .....	36
3.1 Observateur en chaine .....	39
3.2 Variable d'état et leur estimées .....	43
3.3 Erreur d'estimation .....	43
3.4 Variable d'état et leurs estimées.....	45
3.5 Erreur d'estimation.....	45
3.6 Variable d'état réelles et leurs estimées .....	54
3.7 Erreur d'observation .....	54
3.8 Variable d'état et leurs estimées.....	55
3.9 Erreur d'estimation.....	55
3.10 Variable d'état et leurs estimées.....	56
3.11 Erreur d'estimation.....	57
4.1 profile de variation du retard .....	59
4.2 profile de variation du retard .....	65
4.3 Variable d'état réelle et estimées .....	66
4.4 Erreur d'estimation.....	66
4.5 profile de variation du retard .....	67
4.6 Variable d'état réelle et estimées .....	67
4.7 Erreur d'estimation.....	68
4.8 profile de variation du retard .....	68

<b>4.9</b> Variable d'état réelle et estimées .....	69
<b>4.10</b> Erreur d'estimation.....	69
<b>4.11</b> profile de variation du retard .....	76
<b>4.12</b> Variable d'état réelle et estimées .....	76
<b>4.13</b> Erreur d'estimation.....	77
<b>5.1</b> Circulation de véhicules respectant la distance de sécurité.....	81
<b>5.2</b> Maintient d'une distance de sécurité constante utilisant l'information sur la position du vehicule leader.....	82
<b>5.3</b> Position des trois véhicules .....	84
<b>5.4</b> distance entre le véhicule 1 et véhicule 2et 3 .....	85
<b>5.5</b> Entrée de commande du deuxième véhicule .....	85
<b>5.6</b> Entrée des commandes de troisième véhicule .....	86
<b>5.7</b> Erreur d'observation de deuxième véhicule .....	86
<b>5.8</b> Erreur d'observation de troisième véhicule.....	87
<b>5.9</b> Position des véhicules 2et 3 .....	87
<b>5.10</b> 4 distance entre le véhicule 1 et véhicule 2et 3 .....	88
<b>5.11</b> Profil de variation du retard au niveau du véhicule2 .....	89
<b>5.12</b> Profil de variation du retard au niveau du véhicule .....	90
<b>5.13</b> Position des trois véhicules .....	91
<b>5.14</b> Distance des véhicules 3 et 2 par rapport au véhicule maitre .....	91
<b>5.15</b> Erreur d'observation au niveau du véhicule 2.....	92
<b>5.16</b> Erreur d'observation au niveau du véhicule 3.....	92
<b>5.17</b> Commande du deuxième véhicule .....	93

<b>5.18</b> Commande du deuxième véhicule .....	93
<b>5.19</b> Position des trois véhicules en régime transitoire .....	94
<b>5.20</b> Distance des véhicules 3 et 2 par rapport au véhicule maître .....	95
<b>5.21</b> Position initiale des deux microsattellites .....	96
<b>5.22</b> Position finale des deux microsattellites .....	96
<b>5.23</b> Position des deux microsattellites .....	102
<b>5.24</b> Trajectoire des deux microsattellites sur l'orbiter .....	103
<b>5.25</b> Erreur d'observation dans les trois directions .....	104
<b>5.26</b> Commande de deuxième satellite applique dans la direction X.....	104
<b>5.27</b> Commande de deuxième satellite applique dans la direction y .....	105
<b>5.28</b> Commande de deuxième satellite applique dans la direction z.....	105

# Notations et acronymes

---

## Notations

$\mathbb{R}$ :	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$ :	ensemble des variables réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^n$ :	espace euclidien de dimension $n$ .
$\mathbb{R}^{n \times m}$ :	espace des matrices réelles de dimension $n \times m$ .
$\mathbb{N}$ :	ensemble des nombres entiers.
$[a, b]$ :	intervalle fermé de $\mathbb{R}$ , d'extrémités $a$ et $b$
$]a, b[$ :	intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ , d'extrémités $a$ et $b$
$[a, b[$ :	intervalle semi-fermé de $\mathbb{R}$ , d'extrémités $a$ et $b$
$\mathbb{C} = \mathbb{C}([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ :	ensemble des fonctions continues de $[- \tau, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$
$ \cdot $ :	valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$\ \cdot\ $ :	norme Euclidienne
$x \in \mathbb{R}^n$ :	vecteur d'état instantané
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ :	dérivée temporelle de l'état $x$
$V(\cdot)$ :	fonction de Lyapunov.
$\dot{V}(\cdot)$ :	dérivée de la fonction Lyapunov $V(\cdot)$ par rapport au temps.
$x^T$ :	vecteur transposé de vecteur $x$
$x_t \in \mathbb{C}$ :	fonction segment à l'instant $t$ , $x(\theta) = x(t + \theta)$ , $\forall \theta \in [- \tau, 0]$ .

## Notations et acronymes

---

$\gamma_{(.)}$ :	constante de Lipchitz
$A < 0$ :	matrice A définie négative
$A > 0$ :	matrice A définie positive.
$\ A\ $ :	norme Euclidienne de la matrice $A$
$I_n$ :	matrice identité de $\mathbb{R}^{n \times n}$ .
$\lambda_{min}(A)$ :	valeur propre minimale de la matrice $A$ .
$\lambda_{max}(A)$ :	valeur propre maximale de la matrice $A$
$\delta(.)$ :	Pic de Dirac.

### Acronymes

EDO :	Equation Différentielle Ordinaire
EDF :	Equation Différentielle Fonctionnelle
LMI :	Linear Matrix Inequality/Inégalité Matricielle Linéaire
UAV :	Unmaned Areal Vehicles

# **Introduction Générale**

## Introduction générale

Les problèmes importants qui se posent en automatique sont la commande et la surveillance des systèmes. Tout système est caractérisé par les grandeurs d'entrées de commande qui nous permettent d'agir sur le système afin de lui imposer un comportement désiré et les grandeurs de sorties ou d'observation qui nous renseignent sur l'état du système. Bien souvent, la disponibilité des grandeurs de sorties sur lesquelles sont placés les capteurs de mesure demeure insuffisante aussi bien pour assurer une surveillance efficace sans faille que pour mettre en œuvre des techniques de commande sophistiquées garantissant des performances meilleures. Le recours aux variables internes, dite variables d'état qui décrivent de manière plus complète le système est nécessaire. L'idée de placer des capteurs pour la mesure de toutes les variables d'état est fastidieuse pour des raisons économiques (le nombre de variables d'état est souvent très élevé), de faisabilité technologique (le capteur peut être pratiquement irréalisable), de fiabilité (l'ajout de matériels conduit à une dégradation de la fiabilité), de complexité de modélisation (les modèles doivent prendre en considération tous les capteurs ajoutés), etc. La question qui se pose est de savoir s'il est possible de disposer de l'information exacte ou approximée des variables d'état uniquement à partir des mesures d'entrées-sorties déjà disponibles. La réponse est affirmative si le système en question vérifie l'hypothèse dite d'observabilité. Sous cette hypothèse, il est alors possible de concevoir un système dynamique qui permet de reconstruire les estimés des variables d'état réelles à partir des informations recueillies sur les entrées sorties. Ce système est dénommé observateur d'état. Un observateur d'état joue donc le rôle d'un capteur. Implémenté sur un ordinateur, il devient un capteur logiciel.

Dans la plupart des systèmes physiques, il existe des retards dus aux délais de transmission d'informations soit au sein même du système (transport d'énergie, transport de matière, ...) soit entre un système et son contrôleur (en télé opération ou dans les schémas de commande en réseaux), soit entre un système et un autre (systèmes en coopération type maître-esclave), etc. Ignorer les retards dans le modèle permet, sans doute d'un côté, de le simplifier afin de faciliter son analyse et la conception du contrôleur mais d'un autre côté peut être complètement irréaliste et entraîner une analyse erronée du système ou des dégradations majeures (perte de stabilité) lors de l'insertion du contrôleur. Dans beaucoup d'applications,

la prise en compte dans le modèle des retards existants au sein d'un système s'avère une nécessité.

Le retard peut se manifester soit dans l'entrée de commande, soit dans les variables d'état ou encore dans les sorties de mesures. Classiquement, les observateurs qui ont été proposés, pendant de nombreuses décennies des années soixante aux années quatre vingt dix, ont été connus sans considérer les retards pouvant affecter les mesures. Actuellement, les nouvelles applications employant des techniques de contrôle modernes comme la télé opération ou bien la commande coopérative exigent des échanges d'informations via des supports de transmission (fibres optiques, faisceaux hertziens) entre les différents éléments constituant le système et son contrôleur induisant des délais. La prise en compte de ces délais devient donc inévitable.

L'objectif de notre travail porte sur l'étude de la conception d'observateurs des systèmes dynamiques lorsque les sorties de mesure sont soumises aux retards. Les cas des systèmes linéaires et non linéaires affines en entrées seront considérés. De plus, nous traitons la situation de retard constant et celle de retard variable. Deux exemples pratiques comme celui de la conduite automatisée de véhicules et la stabilisation coopérative de satellites sont données afin d'étayer les méthodes présentées et de valider les programmes réalisés pour l'implémentation numérique de ces méthodes.

Notre mémoire est organisé comme suit.

Dans le premier chapitre, nous exposons les notions essentielles sur l'observabilité et les différentes méthodes de synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires. Le second chapitre porte sur les systèmes à retard. Les différentes classes de systèmes sont définies et les méthodes d'analyse de la stabilité et de stabilisation sont brièvement présentées. Le troisième chapitre est consacré à la synthèse d'observateurs lorsque la mesure est affectée d'un retard constant. La méthode développée consiste à mettre en œuvre des observateurs en cascade afin de compenser le retard. Le quatrième chapitre présente la méthodologie de synthèse d'observateurs lorsque cette fois le retard sur la mesure est variable. Dans les deux chapitres, nous traitons les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires affines en entrée. Des résultats de simulations effectuées sur des exemples académiques sont donnés afin d'illustrer l'efficacité des méthodes étudiées. Dans le cinquième chapitre, deux applications pratiques sont présentées. La première porte sur la conduite automatisée de véhicules modélisée par un système linéaire et la seconde sur la

stabilisation coopérative de satellites modélisée par un système non linéaire. Nous terminons notre travail par une conclusion générale et quelques perspectives.

# **Premier chapitre :**

**Observabilité, observateurs linéaires et non linéaires**

## 1.1 Introduction :

Dans un système dynamique, on connaît généralement les grandeurs d'entrées qui nous permettent de le piloter et le conduire dans un état de fonctionnement désiré et les grandeurs de sorties mesurées qui nous renseignent sur son état à un instant donné. Cependant, les informations de sorties sont souvent insuffisantes et ne peuvent nous fournir qu'une vision partielle de l'état du système. Une description complète nécessite la connaissance de toutes les grandeurs internes intervenant dans le système. Ces grandeurs appelées variables d'état constituent l'information complète du système. La disponibilité des variables d'état reste primordiale aussi bien pour résoudre les problèmes de commande ou bien à des fins de surveillance et de diagnostic. Pour les problèmes de commande, il est bien établi que la commande par retour d'état permet de résoudre de nombreux problèmes (stabilisation par placement de pôles, commande optimale, linéarisation par feedback d'un système non linéaire, découplage des systèmes multi-variables, ...). La reconstruction des variables d'états, supposées inaccessibles, d'un système devient donc indispensable. Cette reconstruction est effectuée à partir des grandeurs mesurables qui sont les entrées et les sorties. La possibilité de reconstruire toutes et/ou quelques variables d'état est liée à la propriété d'observabilité du système. Si le système est observable alors il est possible de construire un système dynamique qui permet de reconstruire le vecteur d'état à partir de la connaissance des entrées et des sorties. Ce système dynamique est dénommé observateur d'état. La notion d'observabilité a été introduite, pour la première fois, par R. Kalman pour les systèmes stochastiques décrits par des modèles d'état tout en proposant l'estimateur optimal d'état connu sous le nom de filtre de Kalman. Cette notion a été ensuite généralisée dans le cas déterministe par Luenberger en développant les observateurs asymptotiques complet et réduit par injection de sortie. Ces différents travaux pionniers ont été réalisés dans le cas des systèmes linéaires.

Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité et la synthèse des observateurs d'état reste un problème encore ouvert malgré l'abondance de travaux rapportés dans la littérature. En effet, une solution systématique est loin d'être établie. Selon la classe du système non linéaire considérée, les définitions d'observabilité ainsi que les méthodes de construction d'observateurs peuvent différer profondément d'une classe à une autre. Les différentes classes rencontrées dans la littérature et qui permettent de modéliser une large gamme de systèmes physiques sont :

- Les systèmes bilinéaires

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) D_i x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

- Les systèmes affines en l'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t))x(t) + B(u(t)) \\ y(t) = C(u(t))x(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

- Les systèmes affines en la commande

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g(x(t))u_i(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (1.3)$$

- Les systèmes linéaires perturbés

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t), u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

- Les systèmes autonomes

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.5)$$

- Les systèmes affines modulo injection d'entrée/sorties

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), y(t))x(t) + B(u(t), y(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

Où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^q$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  sont les vecteurs d'état, de sortie et d'entrée, respectivement, avec  $n, m, q \in \mathbb{N}$  représentent l'ordre du système, le nombre d'entrées et le nombre de sorties.  $A, B$  et  $C$  sont respectivement la matrice d'état, la matrice de commande et la matrice d'observation de dimensions appropriées.  $f, g$  sont des champs de vecteur et  $h$  une fonction scalaire.

Par ailleurs, les observateurs proposés sont soumis à des conditions et hypothèses souvent sévères et parfois non remplies par le système (non linéarité lipchitzienne, bornitude des entrées, bornitude des états, ...) supposées pour assurer la stabilité de l'observateur.

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions sur l'observabilité et les résultats permettant de vérifier cette propriété puis nous exposons quelques méthodes de synthèse d'observateurs. Nous présentons le cas des systèmes continus linéaires et celui des systèmes continus non linéaires. Soulignons que la liste d'approches citées est loin d'être exhaustive. Pour la rédaction de ce chapitre, nous avons utilisé les références suivantes [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

## 1.2 Observabilité :

Pour appréhender la théorie des observateurs d'état, et pour pouvoir les synthétiser dans les cas linéaire et non linéaire, il faudrait bien évidemment, savoir si la reconstruction du vecteur d'état à partir des entrées/sorties est possible. Il y a lieu aussi de vérifier si les conditions nécessaires et/ou suffisantes d'existence sont remplies. Dans la littérature, il est démontré qu'un tel observateur existe si et seulement si la réalisation d'état du système en question est observable. En effet, l'observabilité est la possibilité de reconstruire l'état initial du système à partir de l'observation de sa sortie résultant d'une entrée appliquée à ce dernier. Concernant les conditions d'existence des observateurs, celles-ci diffèrent selon que le modèle est linéaire, où la notion d'observabilité est bien établie et est généralisée au cas non linéaire où l'observabilité est fortement liée à la nature des entrées et des non linéarités.

### 1.2.1 Observabilité des systèmes linéaires :

Soit le système linéaire temps invariant d'ordre  $n$  donné par sa représentation d'état telle que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

Où :  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représentent le vecteur d'état, le vecteur de sortie et le vecteur de commande, respectivement,  $t$  désigne la variable temps. Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées. Soit  $x(t_0) = x_0$  la condition initiale et  $t_0$  l'instant initial. Rappelons certaines définitions et certains résultats relatifs à l'observabilité.

**Définition 1. :**

Le système (1.7) est dit observable s'il existe un temps  $t_f \geq t_0$  tel que la connaissance de l'entrée  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$  sur l'intervalle  $[t_0 \quad t_f]$  suffit pour déterminer de manière unique la condition initiale  $x_0$

Pour les systèmes linéaires, l'information produite en sortie est la superposition de celle générée par l'entrée  $u(t)$  et de celle générée par la condition initiale  $x_0$ . Si on suppose le régime libre ( $u = 0$ ) alors on peut adopter la définition suivante.

**Définition 2. :**

Le système (1.7) est observable si et seulement si, en régime libre ( $u(t) = 0, \forall t \geq t_0$ ), l'observation d'une sortie  $y(t)$  uniformément nulle  $t_0 \leq t \leq t_f$  n'est possible que pour un état initial  $x_0$  nul.

**Remarque 1. :**

Lorsque toutes les variables d'état sont observables, alors le système est dit complètement observable, sinon, il est dit partiellement observable. Dans cette thèse, nous désignons par "système observable", tout système complètement observable et nous précisons le cas "partiellement observable", s'il y a lieu.

Pour tester l'observabilité, on définit les deux matrices suivantes.

**Grammien d'observabilité :**

On appelle grammien d'observabilité la matrice semi-définie positive de dimension  $n \times n$  donné par :

$$W(0, t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \tag{1.8}$$

La matrice d'observabilité est donnée par :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

**Condition nécessaire et suffisante d'observabilité :**

Les conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité des systèmes linéaires sont données dans le théorème qui suit :

**Théorème 1. :**

Le système décrit par (1.7) est complètement observable si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) Si et seulement si : la matrice gramien d'observabilité est de rang plein  $\text{rang}(W(0, t)) = n$  pour tout  $t$  appartenant à  $[t_0 \quad t_f]$
- (ii) Si et seulement si : les colonnes de la matrice  $Ce^{At}$  sont linéairement indépendantes pour tout  $t$  appartenant à  $[t_0 \quad t_f]$ .
- (iii) Si et seulement si : la matrice d'observabilité est de rang plein,  $\text{rang}(O) = n$ .

**1.2.2 Observabilité des systèmes non linéaires :**

Soit le système non linéaire donné sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.10)$$

Comme l'observabilité des systèmes non linéaires dépend de l'entrée appliquée au système, elle est donc définie en premier lieu par le concept d'indistinguabilité, dite aussi, indiscernabilité définie comme suit :

**Définition 3. : Indiscernabilité**

L'indiscernabilité d'une paire d'état  $(x_0; \bar{x}_0)$  par toute entrée  $u$  est si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall t \geq 0, h(x_u(t, x_0)) \equiv h(x_u(t, \bar{x}_0))$$

Où  $x_u(t, x_0)$  désigne la solution à l'instant  $t$  pour une condition initial  $x_0$

Ainsi la propriété d'observabilité est définie comme suit :

**Définition 4. : Observabilité**

Un système non linéaire est dit observable s'il n'admet pas de paires indiscernables. La notion d'observabilité locale faible a été définie sur un voisinage d'un point  $x_0$  où toutes les paires sont indiscernables, à savoir :

**Définition 5. : Observabilité locale faible**

Le système décrit par (1.10) est dit localement faiblement observable en  $x_0$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  tel que :

$$I_u(x_0) \cap U = \{x_0\}.$$

Où :

$I_u(x_0)$  est l'ensemble de points indiscernables de  $x_0$  sur un ouvert  $U$ . Autrement dit, si il n'existe pas de paires indiscernables de  $x_0$  dont le voisinage constitue l'ouvert  $U$ , le système est faiblement localement observable en ce point.

Une condition de rang analogue à celle du cas linéaire a été donnée, et définie par le concept d'espace d'observabilité défini comme suit :

**Définition 6. : Espace d'observabilité**

La condition du rang d'observabilité est satisfaite pour le système (1.10) si elle est satisfaite pour tout  $x_0$ , tel que :

L'espace d'observabilité du système (1.10) est le plus petit espace vectoriel  $O(h)$  de fonction de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans l'espace de sortie, contenant les sorties  $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$  et invariant sous l'action de la dérivée de Lie par rapport à tous les champs de vecteurs de type :  $f_u(x) = f(x, u), u \in \mathbb{R}^p$ , fixé en notant  $dO(h)$  l'espace des différentielles de  $O(h)$  et

$dO(h)(x_0)$  l'espace des différentielles évaluées autour de  $x_0$ , à savoir :

$$dO(h) = \begin{bmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ dL_f^2 h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}.$$

La condition de rang en  $x_0$  est donc donnée par :  $\dim(dO(h))(x_0) = n$ .

Le système est localement faiblement observable en  $x_0$  s'il satisfait la condition du rang autour de  $x_0$ . Contrairement au cas linéaire, la condition du rang n'est pas suffisante pour la synthèse d'un observateur pour un système non linéaire.

Les définitions précédentes n'excluent pas l'existence des paires indiscernables par l'entrée  $u$ , donc l'observabilité d'un système non linéaire dans ce cas, ne suffit pas pour synthétiser un observateur, d'où l'importance d'étudier les propriétés des entrées pour la conception d'observateur. Un cas particulier est celui des entrées pour lesquelles le système ne présente pas de paires indiscernables, définies comme suit :

**Définition 7. : Entrées universelles**

Une entrée  $u$  est universelle sur  $[0 \ t]$  si pour tout couple d'état initiaux distincts  $x_0 \neq \bar{x}_0$  il existe  $\theta \in [0 \ t]$  tel que  $h(x_u(\theta, x_0)) \neq h(x_u(\theta, \bar{x}_0))$ .

Une entrée universelle sur  $\mathbb{R}^+$  est dite universelle. Une entrée non universelle est dite singulière. Il en découle, directement la définition de l'observabilité uniforme.

**Définition 8. : Observabilité uniforme**

Un système dont toutes les entrées sont universelles sur  $[0 \ t]$  est dit uniformément localement observable. Et si  $\forall t > 0$ , toutes les entrées sont universelles, le système est dit uniformément globalement observable.

Une définition d'observabilité a été démontrée pour la classe des systèmes affines en la commande donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \tag{1.11}$$

La définition s'annonce comme suit :

**Définition 9. : Observabilité Différentielle (the drift-Observability)**

Le système (1.11) est observable au sens de l'observabilité différentielle si et seulement si :

$$z = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} = \phi(x) \text{ Est un difféomorphisme global sur } \mathbb{R}^n .$$

Les conditions géométriques d'observabilité globale des systèmes non linéaires n'existent pas. L'observabilité locale est utilisée avec des contraintes sur les entrées (bornitude par exemple), ce qui sera explicité dans les approches exposées dans ce travail.

Bien que le problème d'observabilité ne soit pas tout à fait résolu, les résultats bénéfiques d'implémentation d'observateurs pour systèmes linéaires (réduction de coût, simplicité des systèmes en remplaçant les capteurs matériels par des capteurs logiciels, et résolution d'autres problèmes de réalisation ...etc.) poussent les chercheurs à proposer plus de solutions et d'idées de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires. Notons que la plus part des systèmes physiques ont des comportements non linéaires et nécessitent, par soucis de précision, une représentation mathématique par des modèles non linéaires. Dans la section suivante, quelques approches proposées par différents auteurs seront exposées, après un bref passage par la théorie élaborée de conception d'observateur linéaire.

**1.3 Synthèse d'observateurs linéaires et non linéaires**

Pour un système non linéaire décrit par le modèle général (1.10), l'observateur qui fournit l'estimé  $\hat{x}(t)$  du vecteur d'état  $x(t)$  est un système auxiliaire ayant la même structure que le système à observer avec un terme correctif dont le rôle est d'assurer la convergence de l'observateur. L'observateur obéit donc aux équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) - K(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}(t)) \end{cases} \tag{1.12}$$

Le terme correctif  $K(y - \hat{y})$  (injection de sortie) assure la convergence de l'observateur vers le système à observer. Le paramètre  $K$  est le gain de l'observateur. La détermination d'un observateur revient à calculer ce gain pour assurer la convergence. Pour de nombreux observateurs, la convergence peut être asymptotique c'est-à-dire satisfaisant la propriété :

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ Quand } t \rightarrow \infty \quad (1.13a)$$

D'autres observateurs comme ceux basés sur la technique des modes glissants assurent la convergence en temps fini c'est-à-dire satisfaisant la propriété :

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ Quand } t \geq t_s \quad (1.13b)$$

où:  $t_s$  est le temps de convergence.

Une stratégie se basant sur une copie de la dynamique du système, avec une injection d'un terme de correction (erreur d'estimation pondérée par un gain d'observation) pour ajuster la vitesse de convergence (la dynamique de l'observateur doit être au moins dix fois plus rapide que celle du système) comme le montre la structure (1.12) qui a été largement utilisée, pour la majorité des observateurs proposés dans la littérature.

### 1.3.1 Synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires :

Selon les objectifs, différentes manières de calcul du gain d'observation existent dans la littérature.

#### ***Observateur de Luenberger :***

C'est le premier observateur proposé pour les systèmes linéaires (1.7) respectant la structure (1.12). L'observateur est sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.14)$$

Si on désigne par

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (1.15)$$

L'erreur d'observation ou d'estimation, alors le gain constant  $K$  de l'observateur est calculé par un simple placement de pôles, imposant ainsi une vitesse de convergence de l'erreur d'observation  $e(t)$  à zéro. En effet, nous pouvons montrer que :

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t) \text{ avec } e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \neq 0 \quad (1.15a)$$

Ce qui entraîne

$$e(t) = e^{(A-KC)t} e(0) \quad (1.15b)$$

$K$  : est alors déterminé pour que la matrice  $(A - KC)$  ait des valeurs propres stables (à partie réelles strictement négatives) et choisi afin de garantir la dynamique rapide désirée de l'observateur. Ce type d'observateur est très utilisé dans le cas déterministe, et sous les hypothèses :

- Bruit de mesure nul.
- Modèle de système parfait.

Ce qui ne reflète pas, généralement la réalité.

Les mesures des sorties sont toujours entachées de bruit. Même si dans l'observateur de Luenberger, la sortie est injectée à l'entrée de l'intégrateur, ce qui signifie que le bruit sera filtré, cependant, ce type d'observateur reste trop sensible aux bruits de mesure. Afin de remédier à cela, on utilise l'observateur de Kalman (filtre de Kalman) qui permet de prendre en considération la présence du bruit de mesure et aussi du bruit de modélisation.

**Observateur de Kalman :**

Pour les systèmes linéaires stochastiques de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w_1(t) \\ y(t) = Cx(t) + w_2(t) \end{cases} \quad (1.16)$$

Où :  $w_1(t)$  et  $w_2(t)$  modélisent les bruits de modélisation et de mesure respectivement,

blancs et non corrélés. Notons :  $w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$  sa fonction d'auto-corrélation est :

$$\phi_{ww}(t, \tau) = E\{w(t)w(\tau)\} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \quad (1.17)$$

Avec  $\delta(t - \tau)$  : Impulsion de Dirac.

L'observateur de Kalman reposant sur le principe de minimisation d'une matrice d'erreur d'estimation est donné par la même structure (1.12). Cependant, le gain d'estimation  $K$  est calculé en minimisant le critère quadratique suivant:

$$J_{LQG} = E\left\{\int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Lu(t)] dt\right\}$$

Où  $Q$  et  $L$  sont des matrices de pondération symétriques et positives définies.

Revenons à minimiser la variance de l'erreur d'estimation :  $E\left\{\int_0^{\infty} [e^T(t)Qe(t)] dt\right\}$

La résolution du problème d'optimisation, ainsi posé, aboutit à la résolution de l'équation de Riccati :

$$0 = AP + PA^T + V_1 - PC^T V_2^{-1} CP \quad (1.18)$$

$P$  : est la solution de l'équation de Riccati, matrice symétrique positive définie, utilisée pour calculer le gain d'observation tel que :

$$K = PC^T V_2^{-1} \quad (1.19)$$

Les observateurs de Luenberger et de Kalman ne résolvent pas le problème de variation des paramètres (les deux observateurs ne sont pas robustes). Pour cela,

Un observateur basé sur les structures variables, dit observateur à modes glissants, a été proposé. Cet observateur est décrit ci-dessous.

#### **Observateur à mode glissant :**

Les techniques basées sur la théorie des structures variables, assurant la robustesse du contrôleur ou de l'observateur, développées en premier lieu par les chercheurs des pays soviétiques (ex. URSS), sont devenues très utilisées et l'objet de plusieurs travaux de recherche actuellement.

Lorsqu'il est utilisé pour l'observation, l'observateur non linéaire dit à mode glissant consiste à contraindre la dynamique des erreurs d'observations de sorte à converger vers zéro et cela en injectant une fonction discontinue dans la structure d'observateur, et y rester indéfiniment. D'où la conception d'un observateur à mode glissant pour estimer les  $(n - p)$  variables non mesurables à partir des  $p$  variables mesurables, répond à deux propriétés liées à deux phases :

**L'attractivité :** notant par la surface de glissement la variété:  $S = e_y = y - \hat{y}$ , la condition assurant l'attractivité de cette surface se déduit en choisissant la fonction de Lyapunov :

$V(x) = S^T S$  et donc si  $\dot{V}(x) < 0$  la surface est dit attractive, et les trajectoires des erreurs d'observation atteignent la surface après un temps fini  $t_1$ .

**Le glissement :** à  $t > t_1$  les trajectoires doivent rester (glisser) sur la surface, et cela est assurer si :

$$\begin{cases} S = 0 \\ \dot{S} = 0 \end{cases}$$

Une condition satisfaite par un bon choix de l'élément correctif dit, gain d'observateur à mode glissant donné généralement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - K \operatorname{sgn}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \quad (1.20)$$

Où :

$\operatorname{sgn}$  : Présente la fonction signe usuelle.

$K$  : Le gain d'observation.

L'observateur à mode glissant proposé pour le système (1.7), nécessite un changement de base, à savoir :

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Où:  $C = (C_1 \ C_2)$ , et  $T$  la matrice changement de base inversible.

Le système dans la nouvelle base est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}y + B_1u \\ \dot{y} = A_{21}x_1 + A_{22}y + B_2u \end{cases} \quad (1.22)$$

Avec :

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y \end{pmatrix} = Tx(t)$$

L'observateur à mode glissant est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}\hat{y} + B_1u + Kv(t) \\ \dot{\hat{y}} = A_{22}\hat{y} + A_{21}\hat{x}_1 + B_2u + v(t) \end{cases} \quad (1.23)$$

Avec  $\hat{x}_1$  et  $\hat{y}$  sont respectivement, les estimés de  $x_1$  et  $y$ . Et  $v(t) = L_1 \text{sgn}(y - \hat{y})$ , représente la fonction  $\text{sign}()$  et  $L_1 > 0$  une matrice positive définie diagonale choisie arbitrairement, et la matrice de gain d'observation  $K$  est choisi de sorte à imposer la dynamique de convergence de l'erreur d'estimation, telle que la matrice  $(A_{11} - KA_{21})$  soit Herwitz, ce qui est possible car la paire  $(C, A)$  est observable, et puis  $(A_{21}, A_{11})$  l'est aussi.

L'observateur à mode glissant ainsi conçu, remédie aux variations paramétriques et si dans la conception, la condition de matching est prise en compte, la qualité de filtrage des bruits de mesure par l'observateur sera élevée.

Vu les résultats obtenus pour les systèmes linéaires, durant les dernières décennies, l'étude des systèmes non linéaires traduisant la réalité physiques des systèmes, a connu un grand intérêt. La synthèse d'observateur non linéaires était parmi les sujets de recherche actifs. Depuis, plusieurs approches ont été proposées et la plus part reposent sur la linéarité de la dynamique de l'erreur d'observation c'est-à-dire  $\dot{e}(t) = Ae(t)$ . Spécifique chacune à une classe de système, ces approches doivent satisfaire un nombre non négligeable de conditions et d'hypothèses, ce qui n'est pas toujours possible. Quelques approches feront l'objet de la section suivante.

### 1.3.2 Synthèse d'observateur pour les systèmes non linéaires :

#### *Observateur à grand gain:*

La première approche proposée par J.P.Gauthier, pour une classe des systèmes affines en la commande, dont la représentation d'état est donnée par (1.11), la conception de cet observateur est conditionnée par deux hypothèses comme suit:

- La fonction non linéaire  $f$  doit être lipchitzienne.
- Les fonctions  $g_i$  avec  $i = 1, \dots, n$  doit être continument différentiable par rapport à  $x$ .
- L'affinité en la commande c'est-à-dire  $g(x, u) = g(x)u(t)$ .
- Les fonctions  $g_i$  avec  $i = 1, \dots, n$  et leurs dérivées sont bornées pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}^m$ .

L'observateur a la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + g(\hat{x}, u) - S_\theta^{-1}C^T(C\hat{x} - y) \quad (1.24)$$

Où :  $x$  et  $\hat{x}$  représentent le vecteur d'état du système et son estimé, respectivement.

$y$  est le vecteur de sortie. Et les matrices  $A$  et  $C$  sont la matrice d'évolution et la matrice d'observation du système mises sous la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

$S$  : est une matrice dépendante du paramètre  $\theta > 0$ , et solution de l'équation de Lyapunov donnée par :

$$\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A = C^T C \quad (1.25)$$

Le gain d'observation peut être calculé pour la partie linéaire, et factorisé comme suit :

$$S_{\theta}^{-1}C^T = \Delta_{\theta}^{-1}K \quad (1.26)$$

$$\text{Où : } \Delta_{\theta}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\theta & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\theta^n \end{bmatrix}$$

Cependant, un choix satisfaisant la condition que la matrice  $(A-KC)$  est Hurwitz, et en ajustant  $\theta$  assez élevé pour que l'effet de la non linéarité soit négligeable, l'observateur à grand gain classique prend la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + g(\hat{x}, u) - \Delta_{\theta}^{-1}K(C\hat{x} - y) \quad (1.27)$$

L'observateur à grand gain ainsi conçu, bien qu'il soit parmi les premiers observateurs proposés pour les systèmes non linéaires, il présente quelques critères indésirables, à savoir :

- Sensibilité aux bruits de mesures.
- Choix de  $\theta$  assez élevé, provoque des oscillations importantes en régime transitoire.
- Sensibilité vis-à-vis des variations paramétriques.

Pour remédier à ces problèmes, une nouvelle approche a été proposée. La prise en compte des non linéarités dans la démarche de conception de l'observateur est nécessaire.

La jacobéenne de la fonction non linéaire  $g(x, u)$  a été injectée dans le calcul du gain d'observation. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, l'observateur à grand gain amélioré est donné comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + g(\hat{x}, u) + M^{-1}(\hat{x}, u) \left[ L(\hat{x}, u) + \Delta_{\theta}^{-1}K \right] (y - C\hat{x}) \quad (1.28)$$

Le gain d'observation est adaptatif (il dépend de  $\hat{x}$ ), les preuves de convergence et de stabilité ont été démontrées et les matrices  $M$  et  $L$  sont calculées par un algorithme spécifique. Cet observateur remplit bien certains des objectifs soulignés, à savoir :

- Atténuation de l'amplitude des oscillations en régime transitoire.
- Qualité de filtrage des bruits appréciable relativement à l'observateur précédent.

Cependant il reste toujours sensible aux variations paramétriques.

**Observateur de Thau:**

La méthode de synthèse de l'observateur de Thau est relativement triviale. Elle se base sur le modèle linéarisé du système non linéaire. Cet observateur est proposé pour la classe de système non linéaire, avec une non linéarité lipchitzienne écrite sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x) + Bu \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.29)$$

L'observateur de Thau est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(\hat{x}) + Bu + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (1.30)$$

Choisissons un gain d'observabilité telle que la matrice  $A_0 = (A - KC)$  soit Hurwitz, vérifiant ainsi l'équation de Lyapunov :

$$A_0^T P + P A_0 = -2Q \quad (1.31)$$

Le résultat de stabilité de l'observateur (1.30), est annoncé dans le théorème suivant :

**Théorème2:**

Si le gain  $K$  dans  $A_0$  satisfaisant l'équation de Lyapunov (1.31), vérifie que :

$$\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\|P\|} > \gamma_f \quad (1.32)$$

Où :  $\gamma_f$  est la constante de Lipchitz :

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \gamma_f \|x_1 - x_2\|$$

Alors, l'observateur de Thau (1.30) est asymptotiquement stable.

La condition (1.32) semble être très restreinte, et rend l'observateur de Thau souvent irréalisable pour un nombre non négligeable de systèmes non linéaire.

Un autre observateur proposé toujours pour la classe des systèmes affines en l'entrée en vue de remédier aux problèmes précités, principalement la prise en compte de la commande dans son design, celui-ci fait l'objet du paragraphe suivant.

**Observateurs basés sur l'observabilité différentielle (the drift-observability) :**

Le difféomorphisme  $z = \phi(x)$  définit un changement de coordonnées global, sous les hypothèses suivantes :

H1 :  $z = \phi(x)$  est lipchitzienne et inversible, c'est-à-dire :

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \gamma_\phi \|x_1 - x_2\| \quad (1.33)$$

H2 : l'inverse  $x = \phi^{-1}(z)$  est lipchitzienne et inversible, à savoir :

$$\|\phi^{-1}(z_1) - \phi^{-1}(z_2)\| \leq \gamma_{\phi^{-1}} \|z_1 - z_2\| \quad (1.34)$$

$\gamma_\phi$  et  $\gamma_{\phi^{-1}}$  : sont les constantes de Lipchitz.

Ainsi, leurs matrices jacobiennes sont données par:

$$Q(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \quad (1.35)$$

$$Q^{-1}(x) = \frac{\partial \phi^{-1}(z)}{\partial z} \Big|_{z=\phi(x)} \quad (1.36)$$

L'observateur est donné sous la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t))u(t) + Q^{-1}(\hat{x}(t))K(y(t) - h(\hat{x}(t))), \quad (1.37)$$

La convergence exponentielle de l'observateur ainsi proposé, est démontrée en réécrivant le système dans les nouvelles coordonnées à savoir :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_b z(t) + \tilde{H}(z(t), u(t)) \\ y(t) = C_b z(t) \end{cases} \quad (1.38)$$

Avec :  $(A_b, B_b, C_b)$  sont les matrices de Brunowski, données par :

$$A_b = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}, \quad B_b = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_b = [1 \quad 0_{1 \times (n-1)}]$$

$$\tilde{H}(z, u) = H(\phi^{-1}(z), u) \text{ et } H(x, u) = B_b L_f^n h(x) + Q(x)g(x)u(t)$$

Une troisième hypothèse a été posée, à savoir :

H3 : la fonction  $\tilde{H}$  est lipchitzienne, sa constante de Lipchitz est  $\gamma_{\tilde{H}}$ , c'est-à-dire :

$$\|\tilde{H}(z_1, u) - \tilde{H}(z_2, u)\| \leq \gamma_{\tilde{H}}(|u|) \|z_1 - z_2\| \quad (1.39)$$

Les résultats de convergence exponentielle de l'erreur d'observation sont donnés par les théorèmes suivants :

**Théorème 3:**

Soit le système (1.11), avec  $y(t) = h(x(t))$  comme sortie, et vérifie les hypothèses  $H_1, H_2$ . Quelque soit  $\alpha$  positif, il existe un gain  $K$  pour l'observateur (1.37) et  $\mu, u_M$  des constantes positives telle que, si  $|u(t)| \leq u_M$  pour  $t \geq 0$ , il vient :

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \mu e^{-\alpha t} \|x(0) - \hat{x}(0)\|, t \geq 0 \quad (1.40)$$

**Théorème 4:**

Soit le système (1.11), sous les hypothèses  $H_1, H_2, H_3$ . Supposons qu'il existe  $u_M$  tel que  $|u(t)| \leq u_M$ , pour  $t \geq 0$ . Alors, quelque soit  $\alpha$  positif, il existe un gain  $K$  pour l'observateur (1.37), et une constante  $\mu$  de sorte que (1.40) soit vérifiée.

Le calcul du gain d'observation se fait par résolution d'une inégalité matricielle  $H_\infty$  de Riccati, qui n'admet pas toujours de solution. Pour résoudre ce problème, un paramètre positif a été introduit, à savoir :  $K = K(\omega)$  telle que  $\omega$  est pris très élevé, ce qui sous entend un comportement à grand gain.

Tous les observateurs cités ci-dessus reposent dans leurs principes sur une dynamique d'erreur d'estimation linéaire, ce que n'est pas toujours possible. Outre, ils présentent tous une sensibilité non négligeable vis-à-vis des bruits de mesure et des variations paramétriques. L'observateur à mode glissant pas à pas permet d'améliorer la robustesse par rapport aux

variations paramétriques et au bruit. De plus, il assure une convergence en temps fini et non plus asymptotique.

**Observateur à mode glissant étape par étape :**

Appliqué aux systèmes linéaires, l'observateur à mode glissant résout beaucoup de problèmes. La stratégie de conception d'un observateur à mode glissant étape par étape ne nécessite pas une dynamique linéaire de l'erreur d'estimation. La mise en œuvre d'un observateur à modes glissant étape par étape exige cependant une forme particulière du système non linéaire dite forme triangulaire donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} \\ \dot{\hat{x}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + g_1(x_1, u) \\ x_3 + g_2(x_1, x_2, u) \\ \vdots \\ x_n + g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, u) \\ f_n(x) + g_n(x, u) \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

L'observateur à mode glissant étape par étape est comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} \\ \dot{\hat{x}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 + g_1(x_1, u) + \lambda_1 \operatorname{sgn}_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \hat{x}_3 + g_2(x_1, \tilde{x}_2, u) + \lambda_2 \operatorname{sgn}_2(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ \hat{x}_n + g_{n-1}(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n-1}, u) + \lambda_{n-1} \operatorname{sgn}_{n-2}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \\ f_n(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) + g_n(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) + \lambda_n \operatorname{sgn}_{n-1}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n) \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= \hat{x}_2 + \lambda_1 \operatorname{sgn}_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \tilde{x}_3 &= \hat{x}_3 + \lambda_2 \operatorname{sgn}_2(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ &\vdots \\ \tilde{x}_n &= \hat{x}_n + \lambda_n \operatorname{sgn}_{n-1}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Et  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$  le gain d'observation,  $\operatorname{sgn}_i, i = 1, \dots, n-1$  égale à la fonction  $\operatorname{sign}()$  usuelle si  $x_{i-1} - \hat{x}_{i-1} = 0$  sinon elle est nulle ( $\operatorname{sgn}_i = E_i \operatorname{sgn}, E_i = 1$  si  $x_{i-1} - \hat{x}_{i-1} = 0$  sinon  $E_i = 0$ ). Ainsi,

la convergence des variables d'état se fait une par une, ce qui assure un fonctionnement à 'grand gain' de premier ordre ce qui élimine les oscillations de grande amplitude.

La convergence en temps fini de l'observateur a été énoncée dans le théorème qui suit :

### **Théorème 5:**

Soit le système à état borné/ entrée borné (1.41), et l'observateur à mode glissant étape par étape (1.42), pour toutes valeurs initiales  $x(0)$  et  $\hat{x}(0)$ , pour  $\forall u(t)$ , il existe un choix approprié des  $\lambda_i$ , tel que les estimés  $\hat{x}$  convergent en temps fini  $t_s$  vers  $x$ .

L'observateur à mode glissant ainsi conçu, renvoie une estimation assez performante des variables d'état. Il est robuste aux variations paramétriques, de plus il présente une qualité de filtrage des bruits de mesure remarquable (chaîne d'intégration), aussi, si dans la conception la condition de matching est vérifiée, l'observateur à mode glissant rejette aussi certaines perturbations. Un autre avantage de cet observateur est que la convergence est en temps fini. Notant que le théorème de séparation est mis à défaut dans la plupart des systèmes non linéaires et du fait que l'observateur doit délivrer l'information en temps très court, cet avantage est très important dans la mise en œuvre de commande par retour d'état reconstruit.

### **1.4 Conclusion :**

Le problème de conception d'observateur pour systèmes linéaires est considéré dans certaines situations quasiment comme résolu. Les systèmes non linéaires sont complexes car, dans ce cas, l'observabilité dépend des entrées appliquées au système, en plus les signaux exogènes n'interviennent plus linéairement. Malgré les difficultés, plusieurs approches ont été développées spécifiques à certains cahiers des charges et à certaines classes de systèmes.

La réalité physique des systèmes linéaires ou non linéaires, impose l'existence de certains phénomènes dont l'étude devient de plus en plus nécessaire et désirable. Un des phénomènes auquel nous nous sommes intéressés dans notre travail est le retard. Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, le retard est souvent présent dans les systèmes

commandés comme par exemple en télé opération. Les systèmes à retard (linéaire et non linéaire) reçoivent une grande part d'intérêt de plusieurs chercheurs. Que ce soit un problème de stabilité, stabilisation, ou observabilité, un retard peut avoir plusieurs conséquences indésirables. Le retard peut intervenir en entrée en état, ou même en sortie. Dans les problèmes de synthèse d'observateurs, le retard sur la sortie doit être considéré avec un intérêt particulier. Dans le chapitre suivant, nous exposons les notions fondamentales des systèmes à retard.

# **Deuxième chapitre :**

## **Les systèmes à retard**

### 2.1 Introduction

Le phénomène du retard est présent dans de nombreux procédés industriels, physico-chimiques, économiques ou biologiques. Ce phénomène est dû aux délais dans la transmission de l'information, du transfert de matière ou de l'énergie. Le retard apparaît aussi dans les systèmes à paramètres distribués comme les systèmes thermiques dans lesquelles la diffusion de chaleur générée en un point provoque une action sur un autre point de l'espace avec un délai. De nos jours, les systèmes de commande modernes utilisent des moyens de commande à distance comme la télé opération et la commande via les réseaux internet ou intranet. Il est évident que la transmission de l'information de commande vers le procédé à commander et l'acquisition de l'information de mesure recueillie des capteurs placés sur le procédé à travers les canaux de transmission (câbles, fibres optiques, faisceaux hertziens) nécessitent un délai [9].

La présence du retard dans un système de commande provoque en général des effets néfastes comme la perte de stabilité ou la réduction des marges de stabilité. Dans certaines situations, le retard est volontairement ignoré dans l'élaboration du modèle du procédé afin de simplifier la synthèse de sa commande. Afin de garantir les conditions de stabilité et les performances, des lois de commande robustes sont proposées pour palier à la présence du retard.

De nos jours en raison de l'importance et de la diversité des types de retard intervenant dans les procédés modernes et en raison du développement des outils mathématiques d'analyse et de commande des systèmes (LMI : Inégalités matricielle, par exemple), la prise en compte du retard dans les modèles devient une nécessité.

Dans les modèles linéaires de fonction de transfert, le retard apparaît dans une exponentielle de la variable de Laplace qui est un terme irrationnelle. La présence du retard génère donc une infinité de modes. Les systèmes à retard appartiennent donc à la classe des systèmes de dimension infinie. Dans les modèles d'état linéaires ou non linéaires, le retard apparaît soit dans l'état, dans sa dérivée, dans l'entrée de commande ou dans la sortie d'observation. Les systèmes à paramètres répartis décrits par les équations différentielles partielles peuvent aussi être ramenés à des équations différentielles ordinaires avec des retards.

La présence du retard dans un système rend difficile l'analyse de ses propriétés comme la stabilité, la commandabilité, l'observabilité et la synthèse de sa commande.

Dans le cas de notre travail, nous nous sommes focalisé sur les propriétés d'observabilité des systèmes à retard et à la synthèse d'observateurs. L'objet de ce chapitre est d'exposer les notions fondamentales des systèmes à retard. Nous avons privilégié la modélisation dans l'espace d'état qui nous intéresse particulièrement.

### 2.2 Généralités sur les systèmes à retard

#### Définition1 :

Un système à retard est un système régi par un système d'équations différentielles fonctionnelles de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t(\theta)), t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente l'état du système (2.1) à l'instant  $t$ , et  $f$  est une fonction supposée continue localement Lipchitzienne par rapport à la seconde variable et telle que:  $f(t, 0) = 0$ . L'équation (2.1) indique que la dérivée de l'état  $x(t)$ , à l'instant  $t$ , dépend du temps et de l'état passé.

#### 2.2.1 Origine du retard

Les origines du retard son diverses. Elles peuvent être physiques et inhérentes à la nature même du système comme dans tous les phénomènes de transport ou de diffusion (transport de la matière, transport d'énergie, transport de charges électriques, diffusions de la chaleur, ..). Ainsi, le retard est omniprésent dans divers domaines, dans les systèmes biologiques, dans les systèmes électriques, les systèmes physico-chimiques, les systèmes économiques, etc. D'un autre côté, les moyens technologiques modernes mis en place pour la conduite et le pilotage des systèmes (robots, engins terrestres mobiles, vaisseaux spatiaux, satellite) sont aussi sources de retard dû à l'acheminement de l'information à travers les canaux de transmission (fibres optiques, faisceaux hertzien). Nous pouvons citer les systèmes en télé opération, les systèmes commandés via le réseau internet ou intranet (SCR : Systèmes Commandés en Réseaux) [9].

Lors de la modélisation du système, le retard peut apparaître sous plusieurs formes. En effet il peut apparaître sur la sortie, sur l'entrée de commande ou encore sur l'état.

De plus, le retard peut être distribué, continu ou discret, constant, ou variable. Selon la forme de représentation découlent les classes des systèmes à retard. Les classes des systèmes à retard usuellement considérées sont exposées ci-après :

### 2.2.2 Classes des systèmes à retard [9], [10], [11].

#### *Systèmes de type retardé :*

L'équation différentielle fonctionnelle retardée (retarded functional differential equation) compensée donnée par l'équation (2.1) régissant les systèmes dynamiques à retard devient dans le cas des systèmes de type retardé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, u_t), t \geq t_0 \\ y(t) = g(t, x_t, u_t) \\ x_{t_0} = \phi(\theta), \theta \in [-\tau, 0] \\ u_{t_0} = \phi(\theta), \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.2)$$

Avec,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représentent le vecteur d'état, le vecteur de sortie et le vecteur d'entrée, respectivement. Et  $f, g$  sont des fonctions Lipchitziennes, continues, différentiables alors que les fonctions  $x_t, u_t$  sont elles définies par la notion de Shimanov :

$$x_t, u_t \begin{cases} [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n, \theta \in [-\tau, 0] \\ x_t(\theta) = x(t + \theta) \\ u_t(\theta) = u(t + \theta) \end{cases} \quad (2.3)$$

Où  $\tau > 0$  présente la plus grande valeur possible du retard, et  $x_t, u_t$  caractérisent les valeurs retardées de l'état  $x(t)$  et de l'entrée  $u(t)$  prises en compte dans le modèle du système.

La résolution de l'équation différentielle fonctionnelle dans ce cas nécessitera une connaissance précise des conditions initiales sur l'état et sur la commande sur l'intervalle  $[t_0 - \tau, t_0]$  (avoir ainsi l'évolution temporelle du système à partir de  $t_0$ ) ou  $[-\tau, 0]$  si  $t_0 = 0$ , c'est-à-dire qu'une infinité de point doivent être connues et pas seulement une valeur unique

contrairement au cas des systèmes régis par des équations différentielles ordinaires. Cette particularité montre bien que les systèmes à retard sont de dimension infinie.

Le retard figurant dans les équations précédentes peut être ponctuel donné par :

$$\dot{x}(t) = \int_{t-\tau}^t f(t, x(\theta), u(\theta)) d\theta, \tau \geq 0 \quad (2.4)$$

Il peut être aussi distribué ou dit discret, donné comme suit :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t-\tau_x), u(t-\tau_u), \tau_x \geq 0, \tau_u \geq 0 \quad (2.5)$$

Partant des équations (2.2)-(2.5), par quatre classes des systèmes de type retardé sont souvent rencontrées dans le cas des systèmes linéaires.

➤ Systèmes linéaires retardés avec un retard discret sur l'état

Ils sont décrits par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

Où :

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des sortie de systèmes, et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur d'entrées/commandes, les matrices  $A, A_d, B, C$  sont de dimensions appropriés, et les conditions initiales sont telles que :  $x(t_0, \theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0]$ .

➤ Fonction de transfert à retard pur

Un système linéaire à retard d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  est décrit la fonction de transfert suivante:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} L + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} L + a_0} e^{-ts}$$

La variable « s » est la variable de Laplace. Le retard est égal à  $\tau$  exprimé en unité de temps. Ce retard peut être dû à délai sur l'entrée de commande ou bien à un délai dans les mesures.

Le terme irrationnel  $e^{-\tau s}$  engendre une infinité de mode.

➤ Systèmes linéaires retardés avec un retard discret sur l'état et sur la commande

L'équation (2.6) peut facilement être étendue à un modèle d'un système à état et entrée retardés, par introduction de l'entrée retardée.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t - \bar{\tau}) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

Ces modèles très souvent utilisés dans plusieurs travaux de commande des systèmes via les réseaux. Une autre classe est celle des systèmes linéaires retardés avec des retards discrets et distribués modélisés comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + \int_0^{\tau_2} A_{d_2} x(t - \theta) d\theta + Bu(t) \\ x(t_0, \theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.8)$$

Cette classe aussi, est très étudiée, et modélise des systèmes physiques comme par exemple, la combustion du propane dans un missile.

➤ Systèmes retardés avec un retard sur les mesures

Dans notre travail, l'intérêt majeur est porté pour une classe de système très particulière où le délai n'affecte que les mesures. Le retard présent sur les sorties d'un système est prise en compte et ces effets sont largement étudiées (parmi ces travaux ceux présentés dans [9] [12], [13], [14], [15], [16]...etc.). La représentation mathématique de cette catégorie de systèmes à retard est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), t \geq -\tau \\ \bar{y}(t) = h(x(t - \tau)), t \geq 0 \\ \bar{x}(t) = x(-\tau) \end{cases} \quad (2.8)$$

$\bar{y}(t)$  est donc fonction de l'état évalué à l'instant  $t - \tau$ . Tout récemment, de nombreux chercheurs se sont penchés sur l'analyse de la stabilité et l'observabilité de ce genre de système. L'équation (2.8) régit le fonctionnement des systèmes présentant des retards de transmission d'informations et de matières (transport, commande à distance, ...). Les systèmes en coopération maître-esclave, espacés géographiquement, dont lequel la commande du système esclave dépend de la mesure effectuée sur le système maître sont aussi modélisés par ce type d'équations. Le retard reflète alors le délai de transmission des informations échangées entre le maître et l'esclave. Nous verrons au chapitre cinq une application de conduite autonome de véhicules illustrant cet aspect. Si la commande par retour d'état stabilisant un système à retard est traitée largement dans la littérature, la reconstruction des variables d'état à partir des sorties retardés reste un problème ouvert.

### *Systèmes de type neutre*

Les systèmes à retard de type neutre sont modélisés par des équations différentielles neutres (neural fonctionnel differential equation), contenant la dérivée de l'état retardé  $\dot{x}_t$ , à savoir :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, \dot{x}_t, x_t, u_t), t \geq t_0 \\ x_{t_0} = \phi(\theta), \theta \in [-\tau, 0] \\ u_{t_0} = \phi(\theta), \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.9)$$

La présence de la dérivée de l'état retardé dans la représentation augmente le degré de difficulté d'analyse et de stabilité/stabilisation de ce genre de systèmes. Cette classe modélise quelques systèmes physiques comme les lignes de transmission sans perte, barre flexible couplée à une charge...etc.

### **2.2.3 Type de retard :**

Dans tous les modèles présentés précédemment, le retard peut être constant, variable, ou inconnu. Il est bien entendu que selon le type de retard, la problématique devient différente. On distingue trois types de retard :

### ***Retard constant***

Le retard constant est un phénomène quotidiennement présent dans pratiquement tous les domaines. Un exemple attirant, est celui de la mèche constituant la dynamite (inventée par Alfred Nobel). Bien évident, la mèche produit un retard temporel constant utile ![10].

Il existe bien beaucoup d'exemples comme les épidémies et les maladies possèdent toujours un temps d'incubation considéré presque constant. Mathématiquement un retard constant est défini par un nombre réel positif  $\tau \in \mathbb{R}^+$ . Même si dans certains systèmes notamment en biologie, il est admis de considérer les retards constants car ils sont relativement faiblement variable, l'idée d'un retard constant est physiquement peu réaliste. La prise en considération de ces variations donne lieu à une autre catégorie du retard dite retard variable.

### ***Retard variable***

La transmission des données à travers un réseau de communication, en considérant une ligne de transmission idéale (sans perte), le retard constant est donné par  $\tau = d / \sqrt{L/C}$ , où  $L$  et  $C$  sont respectivement, l'inductance et la capacité caractéristique par unité de longueur de la ligne de transmission. Toutefois, une telle approximation est loin de refléter la réalité, si le réseau est étendu, et/ou interconnecté. Le retard dans ces cas est variable en fonction de la charge du réseau de la traversée des nœuds interconnectés, et les bruits de réseaux parfois non négligeables. Le retard variable est modélisé mathématiquement par une fonction variable de temps  $\tau(t) \geq 0$ , généralement considérée connue sur un intervalle du temps borné, et telle que :  $0 \leq \tau(t) \leq \tau^*$  où  $\tau^* > 0$  est la borne maximale du retard variable. Dans certains cas, ce retard est représenté comme suit :  $0 \leq \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$  où  $\tau_1$  représente la borne inférieure positive différente de zéro, et  $\tau_2$  la borne supérieure du retard variable. D'autres représentations sont détaillées dans [9].

### ***Retard inconnu***

La détermination de la valeur exacte du retard est une tâche difficile. Les techniques de sont identification engendrent souvent des incertitudes. Certains travaux privilégient la voie de considérer le retard inconnu et développent des méthodes robustes pour la commande et la

stabilisation. Le fait de considérer le retard comme terme inconnu permet aussi d'aborder le cas où le retard est variable. Cependant, dans bien des cas, la connaissance des bornes inférieures et/ou supérieures est une nécessité.

### 2.3 Stabilité et commande des systèmes à retard [9], [10], [11]

Comme souligné précédemment, les systèmes à retards sont très complexes à étudier, et nécessitent des outils mathématiques sophistiqués. La présence du retard dans un modèle nécessite une approche différente dans la plupart des problèmes comme l'analyse de la stabilité, la stabilisation, la synthèse d'observateurs.

Ci-dessous, nous exposons quelques points illustrant la difficulté que posent les systèmes à retard.

#### 2.3.1 Stabilité et stabilisation

La stabilité des systèmes à retard est le sujet de recherche qui présente une théorie abondante, relativement à tous les autres axes. L'importance de la stabilité pour tout système s'exprime directement du fait qu'un système instable n'est jamais souhaité. Le retard est source d'instabilité. Lorsque le retard apparaît dans la commande, il est évident que des délais importants dans l'action sur le système peuvent entraîner des divergences dans les trajectoires des variables du système. La théorie de Lyapunov sur l'analyse de la stabilité a été étendue aux systèmes à retard. Ceci a abouti à des résultats importants comme le théorème de Lyapunov-Krasovskii ou le théorème de Lyapunov-Razumikhin.

#### *Approche de Lyapunov-Krasovski*

Cette approche est due à Krasovskii, qui a projeté la théorie de Lyapunov en se basant sur le choix et l'étude de fonction (méthode directe et indirecte) pour conclure sur la stabilité à une version étendue à des fonctionnelles. Le résultat est énoncé par le théorème ci-dessous :

#### **Théorème de Lyapunov-Krasovskii:**

Soit le système à retard suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.9)$$

Où  $f(t, 0) = 0$  et  $x_t(\cdot)$  pour  $t \geq t_0$  donné, représente la restriction de  $x(\cdot)$  sur l'intervalle  $[t - \tau, t]$  translaté sur  $[-\tau, 0]$  i.e.  $x_t(\theta) = x(t + \tau)$ ,  $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ ,  $\mathbb{C} = \mathbb{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  et l'ensemble des fonctions continues de  $[-\tau, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Et soient  $u, v, w: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  des fonctions continues non décroissantes, avec en plus  $u(\theta), v(\theta)$  positives pour  $\theta > 0$ , et  $u(0) = v(0) = 0$ . S'il existe une fonctionnelle continue et différentiable  $V(t, \phi) / V(t, \phi): \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- a.  $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c)$
- b.  $\dot{V}(t, x_t) \leq -w(\|x(t)\|)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$

Où  $\dot{V}(t, x_t)$  est la dérivée dans le sens de Dini, à savoir :

$$\dot{V}(t, x_t) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \varepsilon, x_{t+\varepsilon}) - V(t, x_t)}{\varepsilon}$$

Alors la solution triviale  $x = 0$  de (2.9) est uniformément stable. Si de plus  $w(\theta) > 0$  quand  $\theta > 0$ , alors la solution triviale est uniformément asymptotiquement stable.

Dans ce cas, le problème de la stabilité asymptotique ou uniforme se réduit à l'existence d'une fonctionnelle satisfaisant les conditions (a) et (b). Cependant la condition (a) signifie que la fonctionnelle est positive, et la condition (b) quant à elle signifie que la dérivée de la fonctionnelle doit être négative définie (extension de théorème de Lyapunov).

#### ***Approches de Lyapunov-Razumikhin :***

La méthode donnée par Razumikhin est fondée sur l'existence d'une fonction de Lyapunov particulière appelée fonction de Lyapunov-Razumikhin, donc dans ce cas d'étude de la stabilité il faut chercher une fonction et pas une fonctionnelle bornée. Le résultat donné par Razumikhin s'énonce comme suit :

#### **Théorème de Lyapunov-Razumikhin :**

Supposons que la fonction  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est telle que l'image par  $f$  de  $\mathbb{R} \times$  (un ensemble borné de  $\mathbb{C}$ ) est un ensemble borné  $\mathbb{R}^n$ , et que  $u, v, w: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  sont des fonctions

décroissantes, avec en plus  $u(\theta), v(\theta)$  positives pour  $\theta > 0$ , et  $u(0) = v(0) = 0$ ,  $v$  est strictement croissante, S'il existe une fonction continue différentiable  $V(t, x(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- a.  $u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
- b.  $\dot{V}(t, x_t) \leq -w(\|x\|), si V(t + \theta, x(t + \theta)) < V(t, x(t)), \forall \theta \in [-\tau, 0]$

Alors la solution triviale  $x = 0$  du système (2.9) est uniformément stable. si en plus,  $w(\theta) > 0$  pour  $\theta > 0$  et qu'il existe une fonction continue non décroissante  $p(s) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $p(\theta) > 0$  pour  $\theta > 0$  telle que :

- a'.  $u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
- b'.  $\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x\|), si V(t + \theta; x(t + \theta)) < pV(t, x(t)), \forall \theta \in [-\tau, 0]$

Alors la solution triviale est uniformément asymptotiquement stable.

D'autres critères d'analyse de stabilité ont été étendus, tel que l'extension des méthodes fréquentielles (méthode de lieu des racines, le critère de Routh-Hurwitz). Et aussi des définitions de stabilité analogues à celles de la stabilité asymptotique et stabilité exponentielle sont données pour les systèmes à retards. Cependant, des méthodes d'analyse de la stabilité dépendante de retard ont été développées pour remédier au conservatisme rencontré dans les méthodes d'analyse de la stabilité indépendamment du retard.

### 2.3.2 Commande des systèmes à retard

La source majeure d'instabilité des systèmes à retard est le retard lui-même. Il est donc nécessaire de prévoir un compensateur. Les deux méthodes les plus classiques de compensation consistent pour la première à prendre en compte le retard dans le modèle en rationalisant celui-ci par l'approximation de Padé et la seconde en insérant prédicateur de Smith.

Ces deux méthodes sont largement utilisées dans le cas des systèmes linéaires et elles se basent sur la représentation externe du système (fonction de transfert du système), à savoir :

**L'approximation de Padé**

Les systèmes linéaires à retard sont de dimension infinie c'est-à-dire qu'ils possèdent un nombre infini de pôles (il est impossible de déterminer les pôles du système). L'approximation de Padé, permet d'approximer la fonction de transfert à retard par une fonction de transfert rationnelle. Soit le système à retard représenté par sa fonction de transfert comme suit :

$$G(s) = e^{-\tau s} G_0(s)$$

Où :

$s$  : Est la variable de Laplace.

$G_0(s) = \frac{N_0(s)}{D_0(s)}$  : Fonction de transfert d'un système linéaire sans retard et  $e^{-\tau s}$  est le

retard pur. L'approximation est donnée par la fonction de transfert suivante :

$$\hat{G}(s) = P_d(s) G_0(s)$$

Les deux processus sont excités par une même commande, et leurs sorties sont comparées jusqu'à ce que le terme  $P_d(s)$  approxime de la manière la plus fiable possible le terme  $e^{-\tau s}$ , ce qui est montré par la figure suivante :

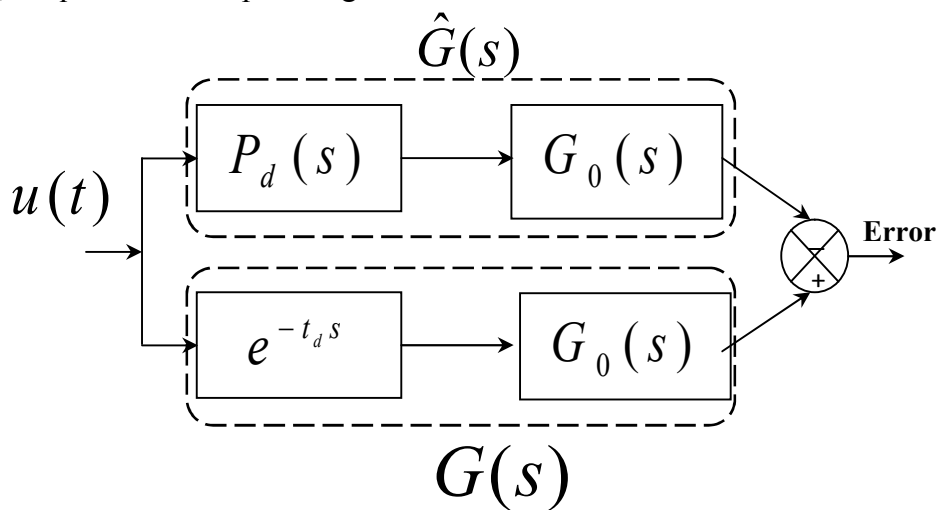


Fig.2.1. Principe de l'approximation de Padé.

Le terme  $P_d(s)$  est tel que :

$$e^{-\tau s} = P_d(s) = \frac{N_d(s)}{D_d(s)} = \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k \tau^k s^k}{\sum_{k=0}^n c_k \tau^k s^k}$$

Le nombre de terme dans les polynômes de numérateur et de dénominateur dépend de la précision souhaitée, en effet, l'ordre  $n$  doit être assez important lorsque le retard est important, et si le terme  $P_d(s)$  doit être très proche de  $e^{-\tau s}$

Après la validation de l'approximation le contrôleur peut être conçu à base de modèle obtenu.

**Prédicteur de Smith :**

Le prédicteur de Smith largement utilisé pour stabiliser les systèmes industriels présentant un retard important, est synthétisé à base de modèle du système en deux étapes. La première consiste à réécrire le modèle du système de sorte à avoir le retard pur sur sa sortie et puis synthétiser un contrôleur pour le système non retardé donné par la fonction de transfert  $G_0(s)$ , et cela comme le montre la figure suivante :

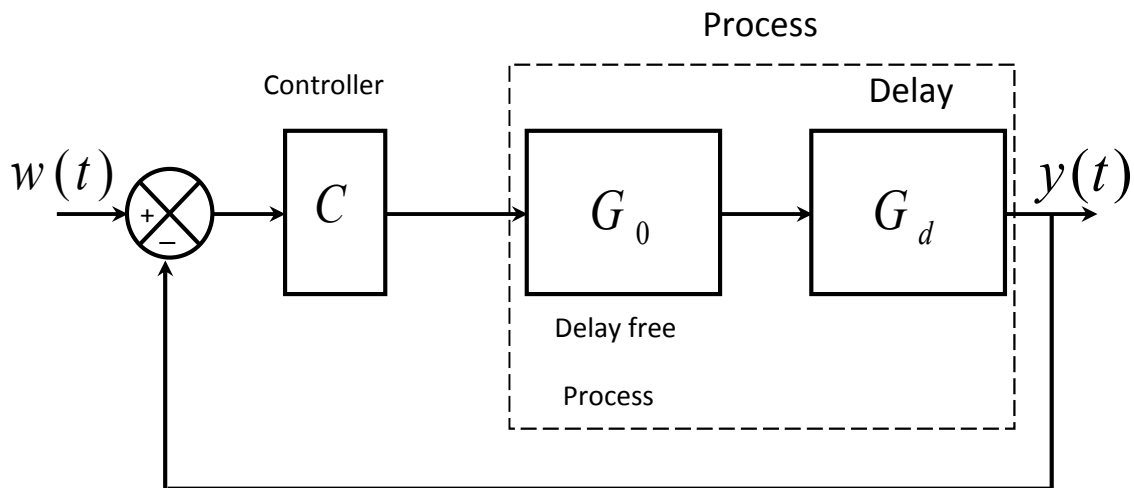


Fig.2.2. Système linéaire à retards.

Le prédicteur de Smith est composé de deux boucles internes la première est le contrôleur de Smith qui inclut la partie du système non retardée, et la deuxième est le compensateur de Smith qui inclut le système retardé, à savoir :

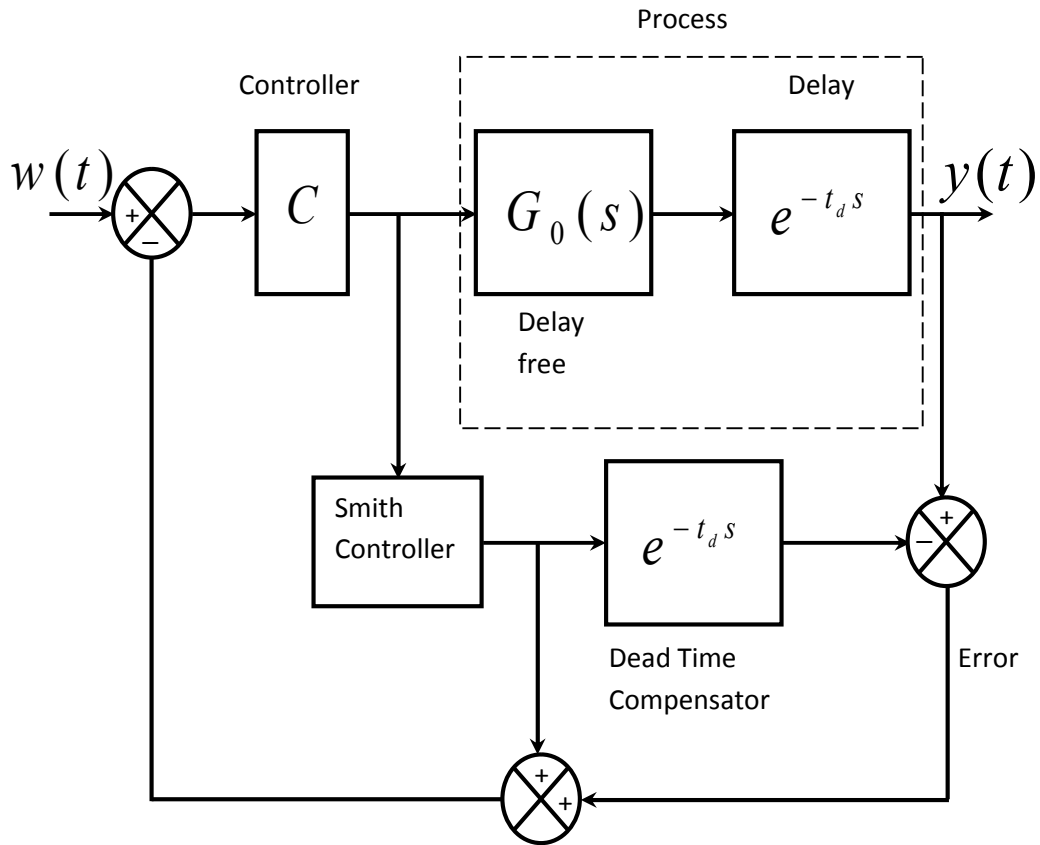


Fig.2.3.Prédicteur de Smith.

L'avantage de l'utilisation du prédicteur de Smith est que le retard est exclu de la boucle de commande.

Les deux techniques explicitées ci-dessous, s'appliquent aux systèmes linéaires à retards, et se basent sur la représentation externe du système ce qui les expose aux bruits de modélisation, et les incertitudes de modélisation, en effet, un modèle très simplifié ne donne pas les performances souhaitées.

Différentes méthodes de conception de loi de commande ont été de grande utilité dans la stabilisation des systèmes dynamiques ordinaires, et donc comme première intuition ces lois de commande ont été étendues en vue de stabiliser les systèmes dynamiques à retards. La conception des contrôleurs dynamiques a été abordée par plusieurs chercheurs, ainsi, des

techniques prédictives et de la commande par retours d'état ont été aussi largement utilisées [9]. Notamment, et comme souvent est le cas, les variables d'états ne sont pas toutes accessibles à la mesure, alors la commande à base d'observateur s'impose [9]. Or, ceci mène directement à un autre problème dans le domaine des systèmes à retard : observabilité et la conception d'observateur. Ce problème est exposé ci-dessous

### **2.4 Observabilité et synthèse d'observateurs pour els systèmes à retard**

Comme il a été montré à travers les sections précédentes, un système à retard est un système dont les états présents dépendent des états passés et possédant un intervalle de conditions initiales au lieu d'une valeur unique. Le problème qui se pose est la possibilité d'estimer les variables d'états actuelles à partir des variables passées. Ce problème a été posé pour les différentes classes des systèmes à retard, et plusieurs approches ont été développées. Soulignons les travaux de T. Ahmed Ali rapportés dans ([12], [13]) qui portent sur la synthèse d'observateur à grand gain pour les systèmes à retard variable sur la mesure, les travaux de Muralidhar et al ([14], [15]) considérant un retard variable par paliers, et finalement les travaux de Germani et al ([16],[17], [18]) traitant les cas des retards variables et constants sur les mesures des systèmes linéaires et non linéaires...etc.

Ce problème connaît moins d'activité lorsque le retard est considéré inconnu, dans ce cadre une méthode d'identification ou d'estimation de l'amplitude du retard a été proposé par J.P. Richard et al [19] et cela en se basant sur la théorie de synthèse d'observateur à structure variable. Le problème de synthèse d'observateurs des systèmes à retard sera détaillé dans le chapitre trois.

### **2.5 Conclusion**

La prise en compte du retard dans la modélisation des systèmes la rend plus fiable et plus proche de la réalité. Cependant, l'analyse et l'étude de cette catégorie de systèmes devient difficile. Ce qui est loin d'empêcher les chercheurs de développer des nouvelles théories, et donner des nouvelles orientations. Dans ce chapitre nous avons essayé d'exposer les notions essentielles des systèmes à retard en mettant en relief leurs difficultés d'analyse et de synthèse de leur commande. L'étude de l'observabilité et la synthèse d'observateurs des systèmes à retard est un autre problème majeur. La possibilité d'estimation des variables

d'états à partir des mesures soumises aux retards fera l'objectif principal de la suite de notre travail.

## **Troisième chapitre :**

**Synthèse d'observateur pour les systèmes  
linéaires/non linéaires soumis aux retards constants  
sur la mesure.**

# Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

## 3.1 Introduction

Si la présence du retard dans un système rend complexe la synthèse d'une commande stabilisante, elle pose aussi d'un autre côté des difficultés de reconstruction des variables d'état à partir des mesures d'entrées-sorties si le retard affecte justement ces sorties. Comme nous l'avons souligné au premier chapitre, le recours à un observateur est une nécessité afin d'implémenter des lois de commande par retour d'état ou bien pour surveiller l'évolution des grandeurs internes d'un procédé.

Le problème qui se pose est de savoir s'il est possible de concevoir un observateur à partir des mesures retardées. Ce problème a attiré l'attention de nombreux chercheurs à travers le monde. Dans [12,13], les auteurs proposent un observateur à grand gain en considérant le retard sur la sortie variable. Les travaux de Germani [17,18] restent à notre connaissance les plus conséquents. La solution proposée par ces auteurs et reprises par plusieurs autres consiste à concevoir deux observateurs en cascade. Le premier observateur estime les variables d'état à l'instant retardé  $t - \tau$  (avec  $\tau > 0$  est l'amplitude du retard). Le second délivre une estimation de l'état à l'instant courant  $t$  à partir de l'estimation retardée fournie par le premier observateur, comme le montre la figure suivante :

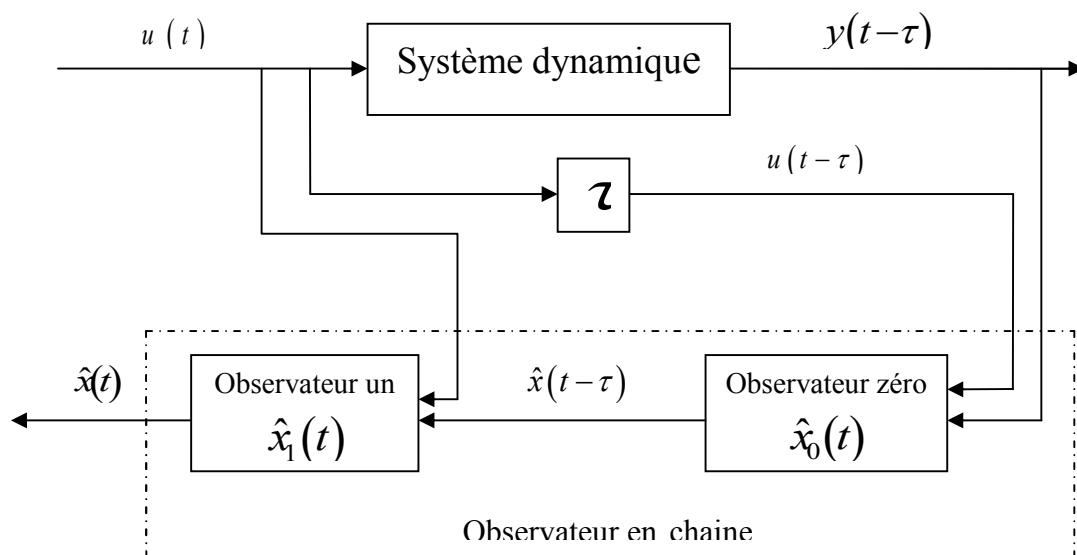


Fig.3.1.Observateur en chaîne.

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

Pour les systèmes linéaires et non linéaires affines en entrée, la chaîne d'observateurs est limitée à deux observateurs alors que, pour les systèmes non linéaires quelconques, le nombre d'observateurs constituant la chaîne dépend, inévitablement, des non linéarités et de l'amplitude du retard. Les cas des retards constants et variables sont considérés. Nous exposons, dans ce chapitre, la méthode de synthèse d'un observateur cascade des systèmes linéaires et non linéaires ayant un retard constant sur la sortie de mesure. Des résultats de simulations effectuées sur des exemples numériques illustrent l'efficacité de la méthode.

### 3.2 Cas des systèmes linéaires

Le retard dans ce cas est considéré constant, et caractérisé simplement par son amplitude  $\tau > 0$ . Soit le système linéaire temps invariant donné par sa représentation d'état comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \geq -\tau \\ \bar{y}(t) = Cx(t - \tau), t \geq 0 \\ x(-\tau) = \bar{x} \end{cases} \quad (3.1)$$

A savoir :  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}$  représentent le vecteur de variable d'état, le vecteur de commande, et la sortie, respectivement (Avec  $n, m \in \mathbb{N}$  nombre de variables d'état et d'entrées),  $\bar{y}(t) = y(t - \tau)$  est la sortie à l'instant  $t - \tau$ ,  $\tau > 0$  est l'amplitude du retard connue.  $A, B, C$  sont, respectivement la matrice d'évolution, de commande et d'observation de dimensions appropriées. Nous supposons que la paire  $(A, C)$ , est observable. L'observateur en chaîne (cascade) proposé par Germani et al dans [17] est sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_0(t) = A\hat{x}_0(t) + Bu(t - \tau) + K(\bar{y}(t) - C\hat{x}_0(t)) \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + Bu(t) + e^{A\tau}K(\bar{y}(t) - C\hat{x}_0(t)) \end{cases} \quad (3.2)$$

$\hat{x}_0(t)$  est l'estimée retardée de  $x(t)$  à l'instant  $t - \tau$  et  $\hat{x}_1(t)$  est l'estimée de  $x(t)$  à l'instant courant  $t$ , à savoir :  $\hat{x}_0(t) = \hat{x}(t - \tau)$  ;  $\hat{x}_1(t) = \hat{x}(t)$ . Les conditions initiales sont telle que :

$$\hat{x}_0(0) = \hat{x}(-\tau) \quad (3.3)$$

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

$$\text{et } \hat{x}_1(0) = \hat{x}(0) \quad (3.4)$$

Le gain d'observation  $K$  est calculé par un simple placement de pole assignant les valeurs propres de la matrice  $A-KC$  dans le demi-plan gauche. Sous cette stratégie la démonstration d'une convergence exponentielle de l'erreur d'observation vers zéro peut facilement être établie.

### 3.2.1 Analyse de la stabilité :

Les erreurs d'estimation sont définies telle que :

$$e_0(t) = x(t - \tau) - \hat{x}_0(t) \quad (3.5)$$

$$e_1(t) = x(t) - \hat{x}_1(t) \quad (3.6)$$

La démonstration de la convergence de l'erreur d'observation de l'observateur zéro vers zéro, se fait suivant la même méthode que dans un observateur de Luenberger classique. L'erreur d'observation est donc donnée par :

$$e_0(t) = e^{(A-KC)t} e_0(0) \quad (3.7)$$

La convergence exponentielle prouvée pour l'observateur retardé (convergence de l'estimé de l'état retardé), est nécessaire pour la démonstration de la convergence du premier observateur. En effet, l'état et l'état estimé sont exprimés comme suit :

$$\hat{x}_1(t) = e^{A\tau} \hat{x}_0(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds \quad (3.8)$$

$$x(t) = e^{A\tau} x(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds \quad (3.9)$$

Par simple soustraction de ces deux équations, et par remplacement du terme intégral par son équivalent tiré de l'équation (3.8), il vient :

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

$$e_1(t) = x(t) - \hat{x}_1(t) = e^{At} e_0(t) \quad (3.10)$$

Des équations (3.7) et (3.10) la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est garantie pour quelque soit le retard  $\tau$ . Les détails de la démonstration de la stabilité sont donnés en Annexe B.

### 3.2.2 exemple de simulation :

Soit le système linéaire donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \bar{y}(t) &= [1 \quad 0] x(t - \tau) \\ \tau &= 2s \end{aligned}$$

Avec  $u(t) = 5t + 100$  et les conditions initiales sont prises :

$$x(0) = [1 \quad 2]^T, \hat{x}_0(0) = [0.1 \quad 0.2]^T, \hat{x}_1(0) = [0.01 \quad 0.02]^T.$$

#### *Résultats de simulation avec connaissance exacte du retard*

Les figures 3.2, 3.3 ci-dessous montrent les réponses temporelles des deux variables d'état du système réel et de leurs estimées et les erreurs d'estimation.

# Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

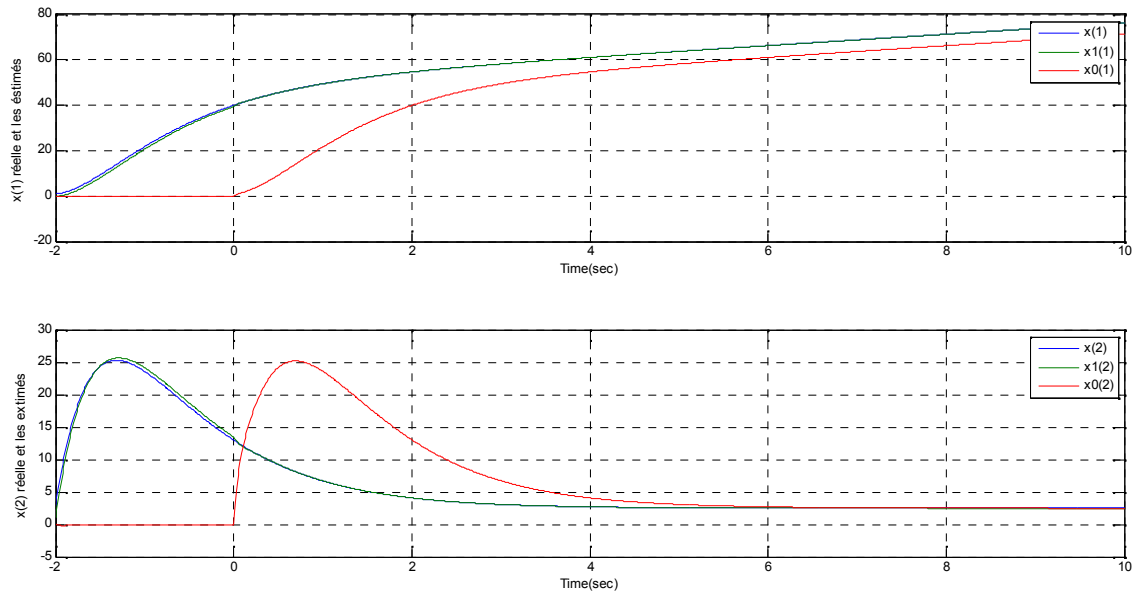


Fig.3.2. Variables d'état et leurs estimées.

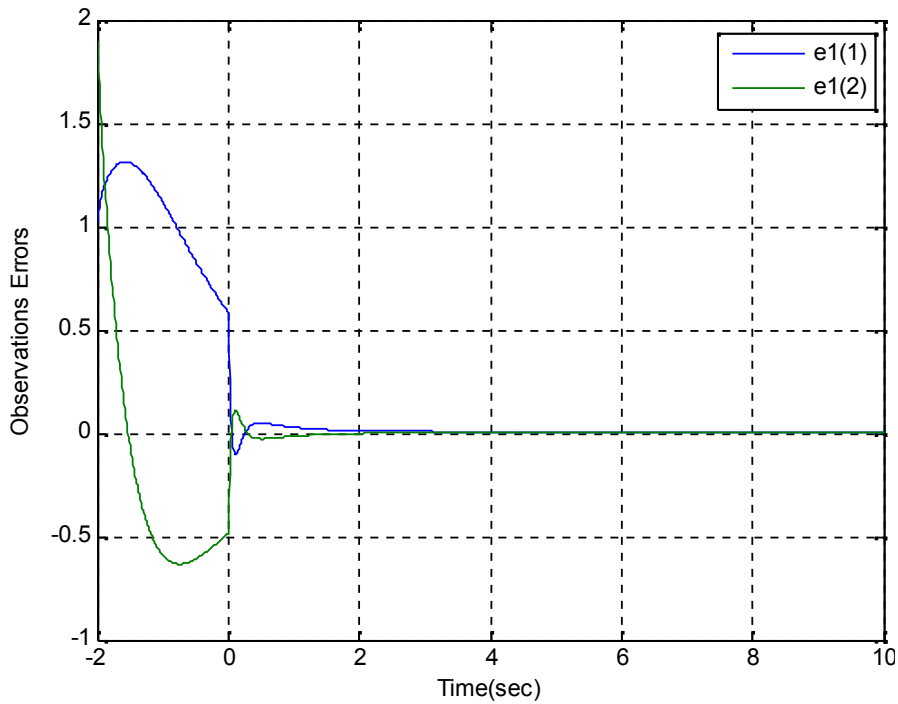


Fig.3.3. Erreurs d'estimation.

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

Remarques et commentaires :

- Dans la figure 3.3 sont tracées les erreurs d'estimations. Nous remarquons que l'observateur donnant  $x_1$  converge asymptotiquement. Pratiquement l'erreur d'estimation ( $e_1$ ) devient nulle au bout de 4 secondes environ.
- Sur les graphes apparaît un intervalle où le temps prend des valeurs négatives ce qui est fait pour montrer le décalage dans le temps.
- L'observateur zéro estime les variables d'état ( $x_0$  sur la figure) retardée pendant que l'observateur premier ( $x_1$  sur la figure) compense le délai et renvoie la variable estimée actuelle.

### ***Test de robustesse :***

Les simulations ont été refaites dans le cas d'une variation du retard, en effet, l'observateur est synthétisé pour une valeur nominale du retard  $\tau_n$  est à l'instant  $t = 3s$  le retard présent sur la sortie de mesure varie et prend la valeur  $\tau = \tau_n + 0,5 * \tau_n$  et y reste. Dans les figures suivantes sont représentés les résultats de simulation.

# Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

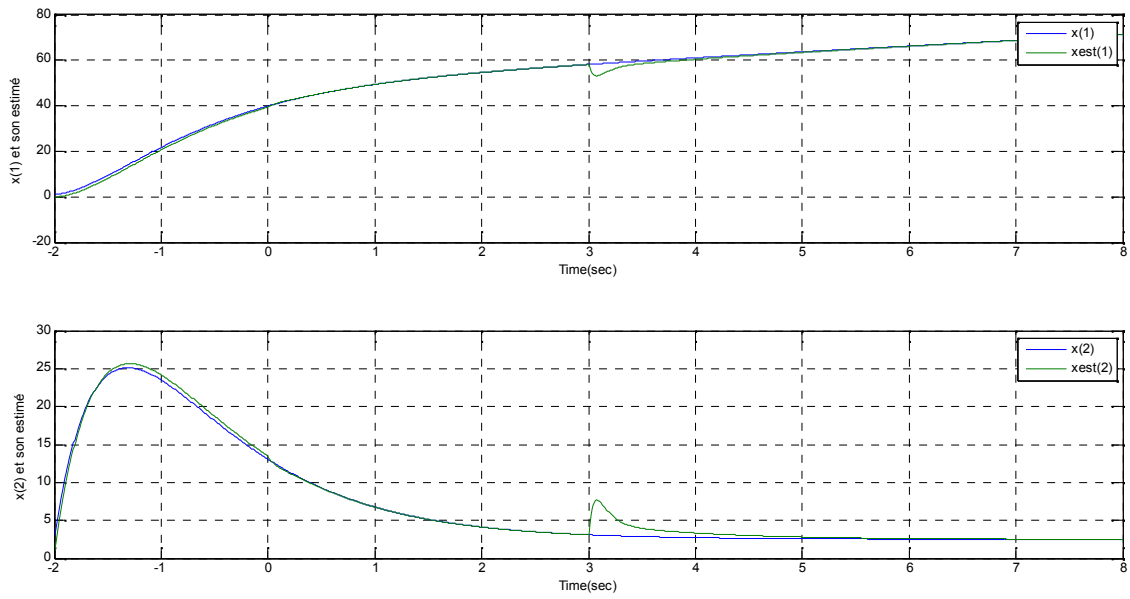


Fig.3.4. Variables d'état et leurs estimées.

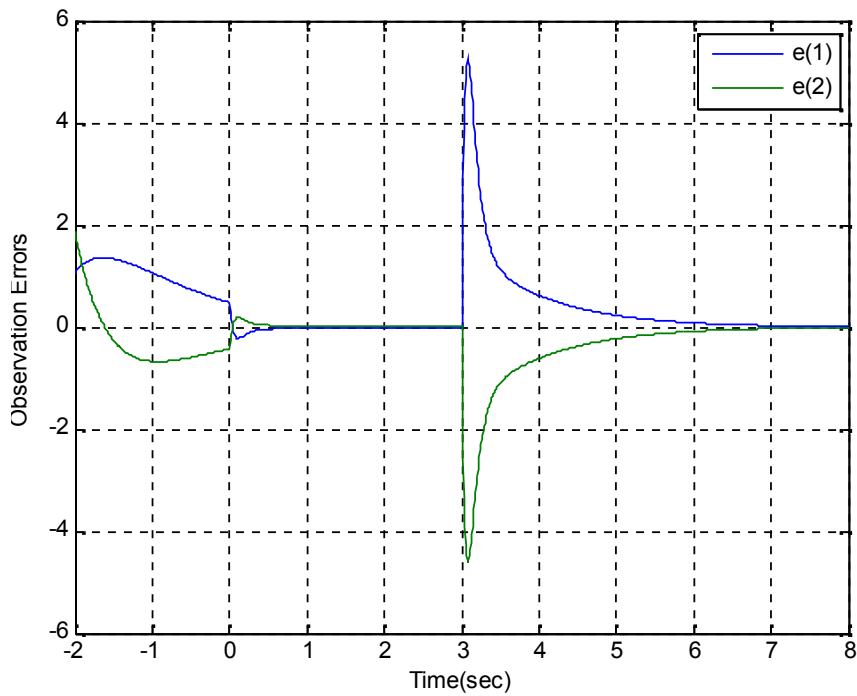


Fig.3.5. Erreurs d'estimations.

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

Remarques et commentaires:

- Le retard considéré dans la synthèse de cet observateur est connu et d'amplitude constante ce qui est loin de la réalité.
- L'effet de la variation de l'amplitude du retard n'est pas négligeable (l'erreur d'observation devient non nulle entre l'instant de l'introduction de la variation et l'instant  $t = 7s$ ), à partir de l'instant  $t = 7s$  l'erreur d'observation revient à zéro, donc une conclusion de robustesse ne peut pas être prononcée.

### 3.3 Cas des systèmes non linéaires

L'observateur cascade exposé dans le cas linéaire est aussi étendu au cas des systèmes non linéaires affines en la commande [17, 18]. Cette classe des systèmes affines en commande avec retard sur la mesure donné par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), t \geq -\tau, x(-\tau) = \bar{x}, \quad (3.11)$$

$$\bar{y}(t) = h(x(t-\tau)), t \geq 0 \quad (3.12)$$

Où :  $\tau > 0$  est l'amplitude du retard affectant la mesure,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$  et  $f, g$  et  $h$  sont des fonction  $C^\infty$ . La sortie  $\bar{y}(t) \in \mathbb{R}$  est fonction de l'état  $x$  à l'instant  $t - \tau$ , pendant que  $y(t) = h(x(t))$  désigne la sortie non retardée.

L'observateur proposé pour estimer les variables d'état du système (3.11)-(3.12) est basé sur l'approche développée dans [8] (observateur basé sur l'observabilité différentielle exposée dans le premier chapitre de ce travail) pour les systèmes à sortie non retardée.

Le difféomorphisme  $z = \phi(x)$  inversible tel que  $x = \phi^{-1}(z)$ , est défini par :

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) & L_f h(x) & \cdots & L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}^T \quad (3.13)$$

$\phi(x)$  et  $\phi^{-1}(z)$  vérifient l'hypothèse  $H_1$ , à savoir :

$H_1$  : Le difféomorphisme  $z = \phi(x)$  et son inverse  $x = \phi^{-1}(z)$  sont globalement et uniformément Lipchitziennes dans  $R^n$ , avec  $\gamma_\phi$  et  $\gamma_{\phi^{-1}}$  leurs constantes de Lipchitz :

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \gamma_\phi \|x_1 - x_2\| \quad (3.14)$$

$$\|\phi^{-1}(z_1) - \phi^{-1}(z_2)\| \leq \gamma_{\phi^{-1}} \|z_1 - z_2\| \quad (3.15)$$

Ainsi, la matrice jacobéenne de  $\phi(x)$  et son inverse sont calculées comme suit :

$$Q(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}, \quad Q^{-1}(x) = \left. \frac{\partial \phi^{-1}(z)}{\partial z} \right|_{z=\phi(x)} = Q^{-1}(x) \quad (3.16)$$

A partir de (3.13) et (3.16) les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$Q(x)f(x) = A_n \phi(x) + B_n L_f^n h(x), \quad h(x) = C_n \phi(x) \quad (3.17)$$

Sous l'hypothèse  $H_1$ ,  $z = \phi(x)$  définit un changement de coordonnées global et le système écrit dans les nouvelles coordonnées est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_n z(t) + \tilde{H}(z(t), u(t)), t \geq -\tau \\ \bar{y}(t) &= C_n z(t - \tau), t \geq 0 \\ z(-\tau) &= \phi(\bar{x}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Où :

$$\begin{aligned} \tilde{H}(z, u) &= H(x, u) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \\ H(x, u) &= B_n L_f^n h(x) + Q(x)g(x)u \end{aligned} \quad (3.19)$$

$(A_n, B_n, C_n)$  : sont des matrices de Brunowski déjà définies en chapitre 1.

Aussi, les hypothèses suivantes considérées dans la conception de l'observateur sont :

$H_2$  : Le vecteur  $\tilde{H}(z, u)$  est globalement uniformément Lipchitzien par rapport à  $z$  et sa constante de Lipchitz est  $\gamma_{\tilde{H}}$ , à savoir :

$$\|\tilde{H}(z_1, u) - \tilde{H}(z_2, u)\| \leq \gamma_{\tilde{H}}(|u|) \|z_1 - z_2\| \quad (3.20)$$

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

$H_3$  : Le triplet  $f(x), g(x), h(x)$  du système (3.11)-(3.12) possède un degré relatif d'observabilité égal à  $n$ , à savoir :

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega / L_g L_f^k h(x) = 0, k = 0, 1, \dots, n-2 \\ \exists x \in \Omega : L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

L'observateur proposé par Germani et al sous ces hypothèses été en premier lieu pour des retards d'amplitude relativement faible. Dans ce cas, l'observateur en chaine est limité à deux observateurs en cascade donnés sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_0(t) = f(\hat{x}_0(t)) + g(\hat{x}_0(t))u(t-\tau) + Q^{-1}(\hat{x}_0(t))K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = f(\hat{x}_1(t)) + g(\hat{x}_1(t))u(t) + Q^{-1}(\hat{x}_1(t))e^{A_n \tau} K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) \\ \quad + Q^{-1}(\hat{x}_1(t))e^{A_n \tau} (H(\hat{x}_0(t), u(t-\tau)) - H(\hat{x}_1(t-\tau), u(t-\tau))) \end{cases} \quad (3.22)$$

Comme le retard est souvent accru par les incertitudes, et que dans certains systèmes son amplitude est d'ordre élevée, Germani et al proposent une adaptation de l'observateur en chaine pour le cas des retards d'amplitude importante. La chaine d'observateurs dans ce cas contient  $m+1$  observateur. La méthodologie de conception est exposée ci-après :

Dans les équations de l'observateur, nous adoptons les notations suivantes :

$$\begin{cases} x_j(t) = x(t - \tau + \frac{j}{m}\tau), t \geq \frac{-j\tau}{m} \\ u_j(t) = u(t - \tau + \frac{j}{m}\tau), j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.23)$$

L'observateur en chaine proposé pour le système (3.11)-(3.12), sous les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$ , et  $H_3$ , est composé de  $m+1$  systèmes régis par des équation différentielles retardées en cascade, sous la forme :

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_0(t) = f(\hat{x}_0(t)) + g(\hat{x}_0(t))u_0(t) \\ \quad + Q^{-1}(\hat{x}_0(t))K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) \\ \dot{\hat{x}}_j(t) = f(\hat{x}_j(t)) + g(\hat{x}_j(t))u_j(t) + Q^{-1}(\hat{x}_j(t)) \\ \quad \cdot \left\{ e^{A_n \frac{\tau}{m} j} K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) + \sum_{i=0}^{j-1} e^{A_n \frac{\tau}{m} (j-i)} (H(\hat{x}_i(t), u_i(t)) - H(\hat{x}_{i+1}(t - \frac{\tau}{m}), u_i(t))) \right\} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

$$\begin{array}{l} j = 1, \dots, m, \\ t \geq 0 \end{array}$$

Où :  $A_n$  est la matrice de Brunowski résultante du changement de coordonnées. Les conditions initiales sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_0(0) = \hat{x}(-\tau) \\ \hat{x}_j(\theta) = \hat{x}(\theta - \tau + \frac{j}{m}\tau), \\ \theta \in \left[ \frac{-\tau}{m} \quad 0 \right], j = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Avec :  $\hat{x}(\theta), \theta \in [-\tau \quad 0]$  sont les variables d'états estimées,  $\hat{x}_j(t)$  est l'estimé des variables d'état retardées  $x(t - \tau + \frac{j}{m}\tau)$ .

La considération du théorème 3 et de théorème 4 (donnés dans le premier chapitre) dans la conception de l'observateur, assure la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation du premier observateur vers zéro pour un  $\alpha$  positif,  $\mu$  adéquat et un gain  $K$  approprié, à savoir :

$$\|x(t - \tau) - \hat{x}_0(t)\| \leq \mu e^{-\alpha t} \|x(-\tau) - \hat{x}_0(0)\| \quad (3.26)$$

Afin d'analyser la convergence de l'observateur, il est judicieux de le faire dans les nouvelles coordonnées  $z$ . Le Lemme ci-dessous donne la transformation de l'observateur dans les coordonnées  $z$ . Sa démonstration est donnée en Annexe A.

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

**Lemme 1[15]:**

Après le changement de coordonnées  $\hat{z}_j = \phi(\hat{x}_j)$ , pour  $j = 1, \dots, m$ . L'observateur (3.24) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_0(t) = A_n \hat{z}_0(t) + \tilde{H}(\hat{z}_0(t), u_0(t)) + K(\bar{y}(t) - C_n \hat{z}_0(t)), t \geq 0. \\ \hat{z}_1(t) = e^{A_n \frac{\tau}{m}} \hat{z}_{j-1}(t) \\ \quad + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{A_n(t-s)} \tilde{H}(\hat{z}_j(s), u_j(s)) ds, j = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \hat{z}_0(0) &= \phi(\hat{x}(-\tau)). \\ \hat{z}_j(\theta) &= \phi(\hat{x}(\theta - \tau + \frac{j}{m}\tau)), \theta \in \left[ \frac{-\tau}{m} \quad 0 \right] \end{aligned}$$

### 3.3.1 Analyse de la stabilité :

L'erreur d'observation dans le cas de l'observateur zéro est donnée par :

$$e_{z,0}(t) = z(t - \tau) - \hat{z}(t - \tau) \quad (3.28)$$

La stabilité de l'observateur zéro (convergence de l'erreur d'observation vers zéro) peut se faire simplement en choisissant une fonction de Lyapunov candidate, donnée par :

$$V_{e_{z,0}}(t) = \frac{1}{2} e_{z,0}^T(t) P e_{z,0}(t) \quad (3.29)$$

Où :  $P$  est une matrice symétrique positive définie.

Et que la dérivée de la fonction de Lyapunov soit négative définie, ce qui est donné en Annexe B.

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

La stabilité de l'observateur zéro ne suffit pas, car il faut que tous les observateurs  $\hat{x}_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , constituant l'observateur en chaîne doivent être stables, y compris l'observateur  $\hat{x}_m(t)$  qui estime l'état  $x(t)$

La stabilité de la chaîne d'observateurs  $\hat{x}_j(t)$  établie dans [18] est formulée par le théorème suivant:

### **Théorème 1 [15]:**

Soit le système (3.11)-(3.12), tel que les hypothèses  $H_1, H_2$  sont satisfaites. Et soit un réel positif  $\tilde{u}_M$  choisi et  $m$  un entier. La constante de Lipchitz de  $\tilde{H}_z(z, u)$  défini en (3.20) et l'amplitude du retard  $\tau$  sont tel que :

$$\gamma_{\tilde{H}(\tilde{u}_M)} \left\| e^{A_n \frac{\tau}{m}} \right\| \frac{\tau}{m} < 1. \quad (3.30)$$

Il existe  $\alpha, u_M > 0$ ,  $u_M \leq \tilde{u}_M$  et un gain d'observation  $K$  pour l'observateur (3.24) si  $|u(t)| \leq u_M$  pour  $t \geq -\tau$  :

$$\|x(t) - \hat{x}_m(t)\| \leq \nu e^{-\alpha t} \quad (3.31)$$

$\nu$  dépend de l'erreur d'estimation sur l'intervalle  $[-\tau \ 0]$  comme suit :

$$\nu = \nu_1 \|x(-\tau) - \hat{x}(-\tau)\| + \nu_2 \int_{-\tau}^0 \|x(s) - \hat{x}(s)\| ds \quad (3.32)$$

Où :  $\nu_2, \nu_1 > 0$  des constantes adéquates.

Si en plus  $H_3$  est vérifiée, la borne  $u_M$  de  $|u(t)|$  peut être égale à  $\tilde{u}_M$  donnée dans l'équation (3.30).

Pour démontrer ce résultat, le lemme suivant a été donné et démontré dans [18].

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

**Lemme2 [15] :**

Soit une fonction  $s(t) \geq 0, t \in [-\tau, +\infty[$ , avec  $\tau > 0$ , tel que :

$$\int_{-\tau}^0 s(\theta) d\theta < +\infty, \quad s(t) \leq \mu e^{-\bar{\alpha}t} + \gamma \int_{t-\tau}^t s(\theta) d\theta, \quad t \geq 0. \quad (3.33)$$

Où :  $\bar{\alpha}, \gamma, \mu$  sont des réels positifs.

Si  $\gamma\tau < 1$ , il existe un réel positif  $\alpha \leq \bar{\alpha}$  tel que :

$$s(t) \leq \bar{\mu} e^{-\alpha t}, t \geq 0. \quad (3.34)$$

Où :

$$\bar{\mu} = \frac{e^{\alpha\tau}}{1-c} \left( \mu + \gamma \int_{-\tau}^0 s(\theta) d\theta \right), c = \frac{\gamma}{\alpha} (e^{\alpha\tau} - 1) < 1. \quad (3.35)$$

La démonstration de théorème est donnée en Annexe B.

**Remarque :**

Le nombre d'observateurs constituant la chaîne d'observateur dépend de l'amplitude du retard et de la constante de Lipchitz de la non linéarité. En effet, la condition (3.30) doit être vérifiée. Si la convergence ( $\hat{x}_m(t) \rightarrow x(t)$ ) n'est pas atteinte en utilisant deux observateurs, il faut ajouter des observateurs à la chaîne.

La section suivante est consacrée à un exemple académique, montrant le fonctionnement de l'observateur en chaîne appliqué pour un système non linéaire à retard sur la sortie de mesure.

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

---

### 3.3.2 Exemple de simulation

Soit le système non linéaire soumis au retard sur la sortie donné par son modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + x_1(t)x_2(t) + x_1(t)u(t) \\ \bar{y}(t) = x_1(t - \tau) \end{cases}$$

$u(t) = 0.1 \sin(0.1t)$  est l'entrée du système,  $x_1, x_2$  sont ses variables d'état.

Le degré relatif d'observation du système est  $r = n = 2$ , ainsi la matrice de changement de coordonnées et sa jacobéenne sont donnée comme suit :

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le gain d'observation est calculé de sorte à assigner les pôles de la matrice  $A_2 - KC_2$  à  $(-1, -1)$  avec :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = [1 \quad 0]$$

Les résultats de simulation ci-dessous sont représentés dans les conditions initiales suivantes :

$$x(-\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \hat{x}_0(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \theta \in [-\tau \quad 0].$$

La première simulation est réalisée dans le cas d'un retard d'amplitude relativement petite  $\tau = 0.3s$ , quant à la deuxième elle est réalisée pour une valeur un peu plus grande  $\tau = 1.3s$ , et dans les deux cas la chaîne d'observation contient deux observateur et donc  $m = 1$ .

# Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

## Résultats de simulation :

Les figures 3.5 à 3.8 montrent respectivement les réponses sur les états réelles et leurs estimés pour les deux valeurs du retard.

- Pour  $\tau = 0.3s$

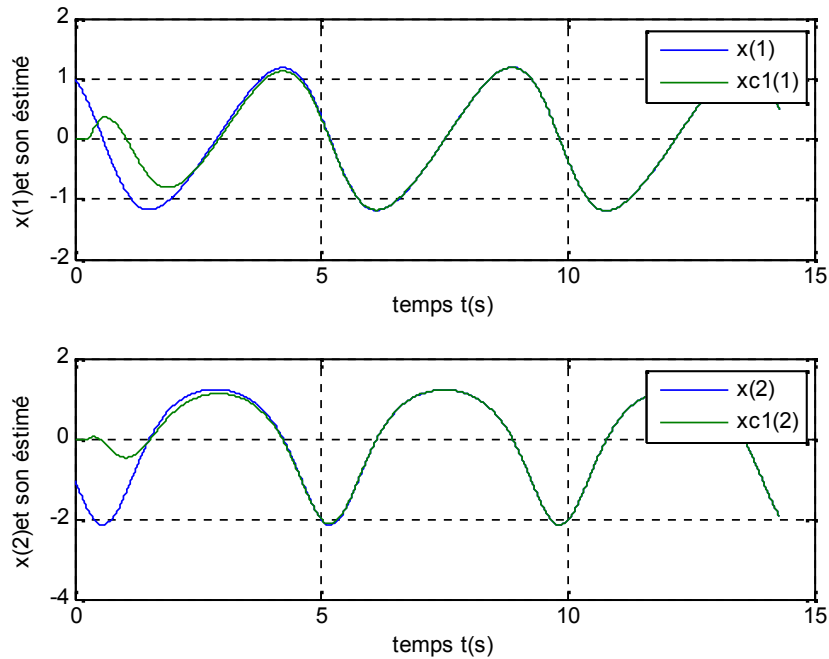


Fig.3.6. Variables d'état réelles et leurs estimées.

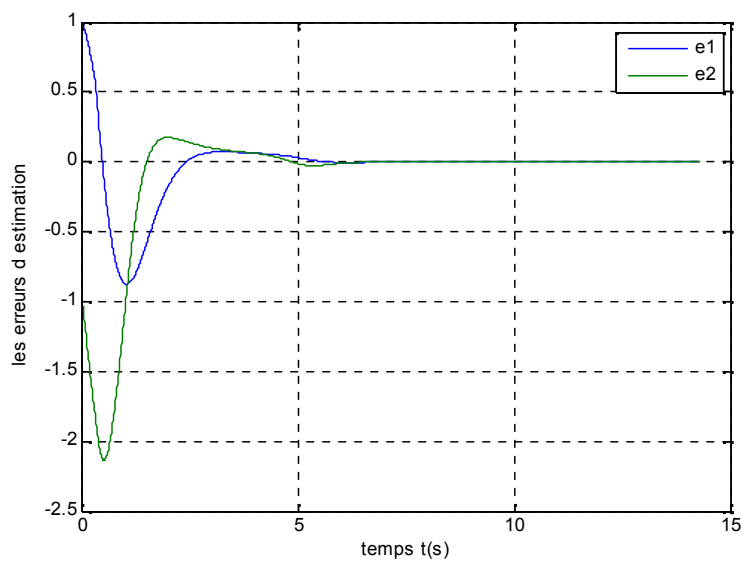


Fig.3.7. Erreurs d'observation.

# Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

- Pour  $\tau = 1.3s$

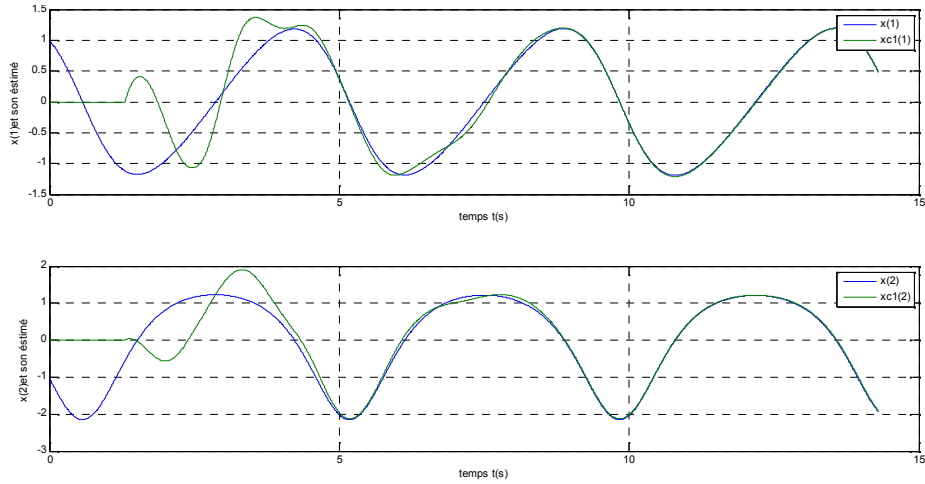


Fig.3.8. Variables d'état et leurs estimés

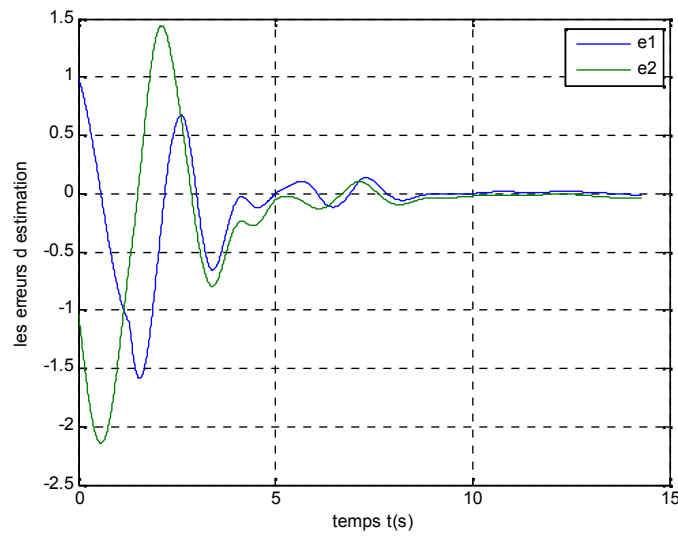


Fig.3.9. Erreurs d'estimation.

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

Remarque est commentaires :

- La convergence asymptotique de l'observateur est assurée. L'erreur d'observation converge vers zéro même si la chaîne d'observation ne contient que deux observateurs, ce qui est évident de moment que l'amplitude du retard est petite (cas où  $\tau = 0.3s$ ).
- Dans la deuxième simulation ( $\tau = 1.3s$ ) l'erreur d'observation converge vers une valeur non nulle, donc il faut ajouter un observateur à la chaîne d'observation pour faire tendre l'erreur d'estimation vers zéro.

### Test de robustesse :

Afin de tester la robustesse de l'observateur vis-à-vis à une incertitude du retard, des simulations rapportées par les figures 3.9 et 3.10 où une variation sur l'amplitude du retard a été introduite dans le cas où  $\tau = 0.3s$ , à l'instant  $t = 10s$ .

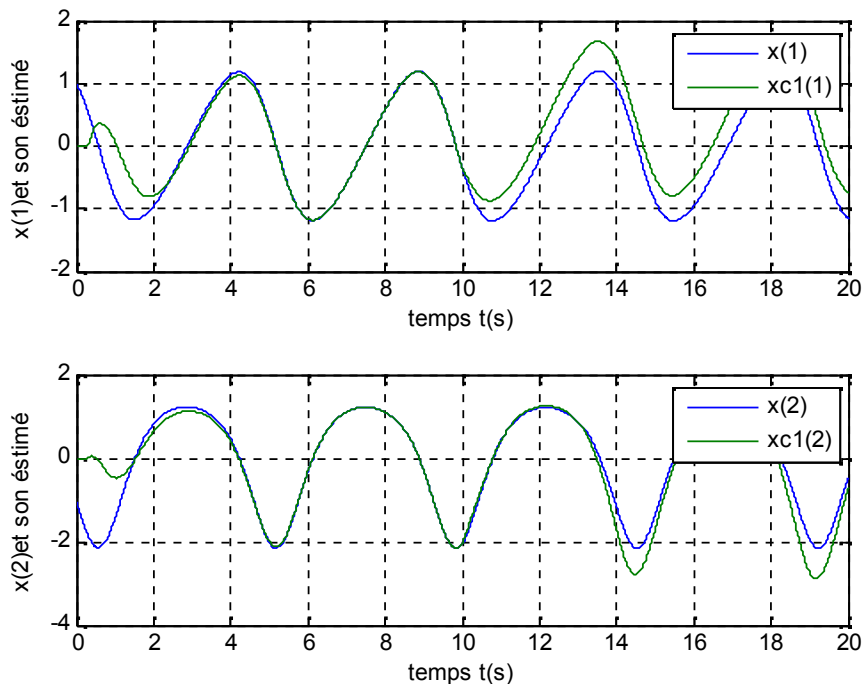


Fig.3.10. Variables d'état et leurs estimées.

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure

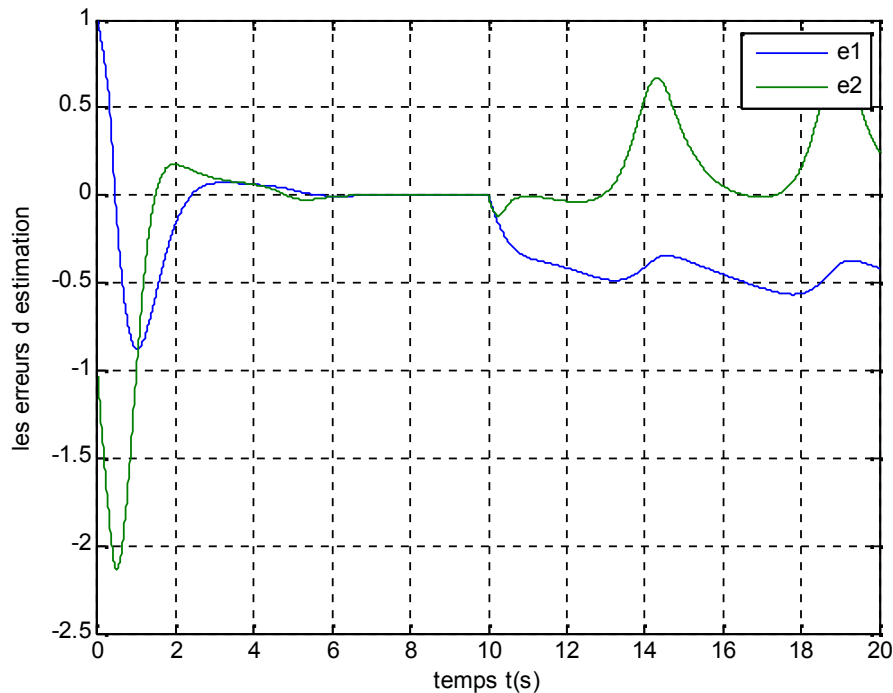


Fig.3.11. Erreurs d'estimation.

Remarques et Commentaires :

- La convergence exponentielle d'estimation vers zéro, dans le cas du système non linéaire présentant un retard fixe sur ses mesures de petite amplitude, est assurée (dans cet exemple) par une chaîne d'observateur composée de deux observateur cascade.
- Dans le cas où le retard est accru ( $\tau=1.3s$ ) l'observateur assure une convergence exponentielle de l'erreur d'estimation, avec une certaine erreur résiduelle qui peut être éliminée en ajoutant un observateur à la chaîne d'estimation.
- L'observateur est d'une robustesse faible vis-à-vis des variations de l'amplitude du retard. L'introduction d'une variation assez faible soit elle à provoqué l'instabilité de l'observateur, de la, les variations doivent être prises en compte dans la conception de l'observateur ce qui est plus réaliste et plus fiable.

## **Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards constants sur la mesure**

---

### **3.4 Conclusion**

La convergence asymptotique de l'erreur d'observation vers zéro dans le cas des systèmes linéaires temps invariant est assurée par l'observateur proposé par Germani et al, et son implémentation est relativement simple. Dans le cas des systèmes non linéaires, l'observateur est proposé uniquement pour la classe des systèmes affins en commande présentant une non linéarité lipchitzienne. Sa convergence est démontrée après un changement de coordonnées (réécriture du système sous forme d'un système linéaire perturbé), et les pôles de l'observateur ne peuvent pas être choisis librement grands pour accélérer la convergence contrairement au cas linéaire. Les deux observateurs linéaires et non linéaires présentent une robustesse en performance relativement faible. Et l'hypothèse d'un retard constant est peu réaliste, une raison pour laquelle un autre observateur a été proposé en considérant un retard variable par paliers, et qui sera le sujet du chapitre suivant.

## **Quatrième chapitre :**

**Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires  
/non linéaires soumis aux retards variables sur la  
mesure.**

# Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

## 4.1 Introduction :

Dans la pratique, le retard est loin d'être constant. Des changements de conditions de fonctionnement peuvent être à l'origine des variations non négligeables de l'amplitude du retard en fonction de temps. L'utilisation de l'observateur exposé dans le chapitre précédent est limitée au cas du retard constant. Cette hypothèse restreint l'étendu de son application. Afin de lever à cet inconvénient, une extension de cet observateur est proposée en considérant que le retard varie par paliers comme le montre la figure 4.1. Comme le montre cette figure le retard est une fonction continue et constante par morceaux (piecewise function) d'amplitude variables  $0 < \tau(t) \leq \tau_{\max}$  ;  $\tau_{\max}$  est l'amplitude maximale atteignable par le retard sur les différents intervalles.  $\tau_i$  est l'amplitude du retard sur l'intervalle  $[t_{i-1}, t_i[$  et que les intervalles  $[t_i, t_{i+1}[$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$  sont de longueurs  $\Delta t_i$  variables, tandis que le profil du retard en général est supposé connu (les amplitudes du retard et les instants de sauts sont connus). Dans ce chapitre, nous exposons la stratégie de construction de cet observateur dans le cas des systèmes linéaires et le cas des systèmes non linéaires, puis nous l'illustrons par des exemples numériques.

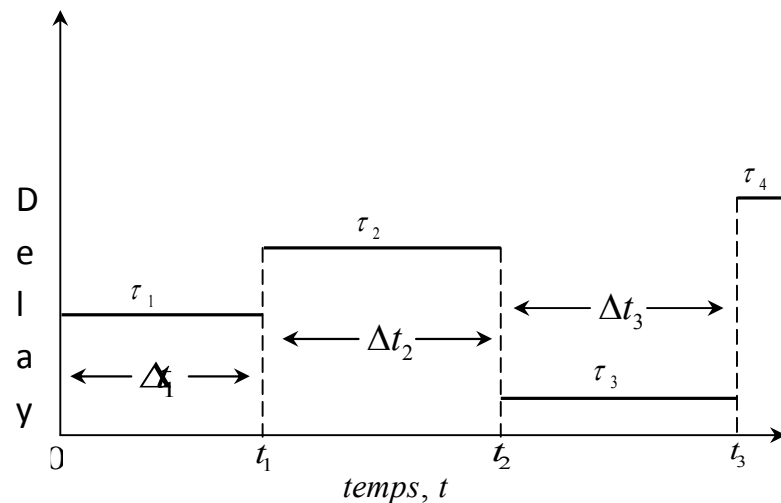


Fig. 4.1. Profil de variation du retard.

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

---

### 4.2 Cas des systèmes linéaires :

Considérons le système linéaire décrit par le modèle d'état :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad t \geq \tau, \\ \bar{y}(t) &= Cx(t - \tau(t))\end{aligned}\tag{4.1}$$

Où :  $y(t) = Cx(t)$  est la sortie du système non retardée (la paire  $(A, C)$  est observable),  $\bar{y}(t)$  la sortie réelle retardée et  $\tau(t)$  est le retard variable comme le montre la figure 4.1. L'observateur proposé par Muralidhar et al et al [14, 15] repose sur la même architecture que celui dans le cas du retard constant. En effet, sur chaque segment d'amplitude constante du retard, l'observateur cascade s'écrit:

$$\dot{\hat{x}}(t - \tau_c) = A\hat{x}(t - \tau_c) + Bu(t - \tau_c) + K(\bar{y}(t) - C\hat{x}(t - \tau_c)).\tag{4.2}$$

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + Bu(t) + e^{A\tau_c} K(\bar{y}(t) - C\hat{x}(t - \tau_c))\tag{4.3}$$

Et les valeurs initiales de l'observateur sont :

$$\begin{aligned}\hat{x}_0(0) &= \hat{x}(-\tau_1) \\ \hat{x}_1(\tau) &= \hat{x}(0)\end{aligned}$$

Où :  $\tau_i$  est l'amplitude du retard constante sur un intervalle du temps, et  $K$  est le vecteur gain d'observation constant, choisi tel que les valeurs propres de la matrice  $A_m = A - KC$  soient à parties réelles négatives.  $\tau_1$  : est l'amplitude du retard sur l'intervalle  $t_0 \leq t < t_1$ .

Pour simplifier l'écriture, les notations suivantes sont utilisées :

- L'estimé de l'état à l'instant  $t - \tau_i$  est noté :  $\hat{x}_0(t) = \hat{x}(t - \tau_i)$
- L'estimé de l'état à l'instant actuelle  $t$  est notée :  $\hat{x}_1(t) = \hat{x}(t)$
- L'entrée à l'instant  $t - \tau_i$  est notée :  $u_0(t) = u(t - \tau_i)$

Le profil de variation du retard est connu et vérifie les hypothèses suivantes :

$$\tau_i < \tau_{\max}\tag{4.4}$$

$$\tau_{\max} \ll \Delta t_i\tag{4.5}$$

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

---

Sous ces hypothèses (4.4) et(4.5) la convergence de l'observateur cascade composé de l'observateur dit « zéro » qui estime l'état retardé et de l'observateur « premier » qui estime l'état actuel est étudiée ci après.

### 4.2.1 Analyse de la stabilité de l'observateur cascade

#### *Stabilité de L'observateur zéro (the zeroth observer):*

La stabilité de l'observateur sur l'intervalle  $]t_{i-1} \quad t_i[$  est déjà démontrée (cas du retard constant), en effet, l'erreur d'observation est donnée par :

$$e_0(t) = x(t - \tau_i) - \hat{x}(t - \tau_i) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_0(t) &= \dot{x}(t - \tau_i) - \dot{\hat{x}}(t - \tau_i) \\ &= Ax(t - \tau_i) + Bu(t - \tau_i) \\ &\quad - \{A\hat{x}(t - \tau_i) + Bu(t - \tau_i) + KCe_0(t)\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Et d'où :

$$\begin{aligned} \dot{e}_0(t) &= A_m e_0(t) \\ A_m &= A - KC \end{aligned} \quad (4.8)$$

Le problème qui se pose dans ce cas de figure, et l'analyse de la stabilité aux moments de sauts c'est-à-dire aux instant de changement de la valeur du retard. L'analyse a été faite dans [14, 15] pour un instant  $t = t_i$  et puis généralisée pour tout le profil de variation du retard. La démonstration est donnée en Annexe C.

Aux moments de changement d'amplitude l'observateur chaine présente une erreur résiduelle. En effet, à l'instant  $t = t_i$  l'observateur zéro a déjà convergé vers l'état  $\hat{x}(t_i - \tau_i)$ , et l'observateur premier doit converge à son tour vers  $\hat{x}(t_i)$ . Or, à l'instant  $t = t_i$  l'observateur zéro présente sur sa sortie l'estimé  $\hat{x}(t_i - \tau_{i+1})$  (valeur initiale de l'observateur zéro sur le prochain intervalle) et l'observateur premier n'a pas atteint l'estimé, d'où un cumul d'erreur sur la sortir de l'observateur zéro donné à chaque instant comme suit :

$$\hat{x}(t_i - \tau_{i+1}) - \hat{x}(t_i - \tau_i) = A_m \delta_{\hat{x}_i}(t) + B \delta_{u_i}(t) \quad (4.9)$$

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

---

Où :

$$\delta_{u_i}(t) = u(t_i - \tau_{i+1}) - u(t_i - \tau_i).$$

$$\delta_{\hat{x}_i}(t) = \hat{x}(t_i - \tau_{i+1}) - \hat{x}(t_i - \tau_i)$$

Pour chaque instant  $t = t_i$ , la substitution de l'équation (4.9) dans (4.8) donne :

$$\dot{e}_0(t_i) = A_m e_0(t_i) + A_m \delta_{\hat{x}_i}(t) + B \delta_{u_i}(t) \quad (4.10)$$

D'où la dynamique de l'erreur d'observation de l'observateur zéro est écrite telle que :

$$\dot{e}_0(t) = \begin{cases} A_m e_0(t) + A_m \delta_{\hat{x}_i}(t) + B \delta_{u_i}(t) & t > t_i \\ A_m e_0(t) & \text{pour } t \in [t_{i-1}, t_i[ \end{cases} \quad (4.11)$$

Il est clair que lorsque le retard est constant  $\tau = \tau_c$ ,  $\delta_{\hat{x}_i} = 0$  et  $\delta_{u_i} = 0$ .

L'erreur d'observation du l'observateur zéro évaluée à chaque instant est bornée et est donnée par :

$$\|e_0(t_N)\| \leq \exp(-m \sum_{i=1}^N \Delta t_i) \|e_0(0)\| + \sum_{j=1}^{N-1} \exp(-m \sum_{i=j+1}^N \Delta t_i) \bar{\delta}_j + \bar{\delta}_N \quad (4.12)$$

Où pour  $\forall k = 1, 2, \dots, N$

$$\bar{\delta}_k = \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \exp(A_m(t_k - s)) \times \{A_m \delta_{\hat{x}_k}(s) + B \delta_{u_k}(s)\} ds \right\|$$

**Remarque 1. :**

- a. Dans l'équation (4.11) le terme  $\bar{\delta}_j$  représente le cumul d'erreur d'observation. or si les hypothèses (4.4) et (4.5) sont vérifiées, sa valeur diminue en fonction de temps (il est multiplié par une fonction exponentielle décroissante).

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

---

b. A l'instant  $t = t_N$  le terme  $\bar{\delta}_N$  est non nul. Ce qui revient à dire qu'il existe toujours une erreur résiduelle résultante des changements de l'amplitude du retard, et donc l'erreur d'estimation convergera vers une valeur non nulle lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

c. Si le délai sur la mesure est constant  $\bar{\delta}_i = 0, \forall i = 1, \dots, N$ . et donc

$$\|e_0(t_N)\| \leq \exp(-mt_N) \|e_0(0)\|. \quad (4.13)$$

d. Si tous les intervalles  $\Delta t_i, \forall i = 1, \dots, N$ . du profil de variation du retard ont la même longueur c'est-à-dire  $\Delta t_i = \Delta t_j, \forall i \neq j$ , l'équation d'erreur devient :

$$\begin{aligned} \|e_0(t_N)\| &\leq \exp(-mN\Delta t) \|e_0(0)\| \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \exp(-m(N-j)\Delta t) \bar{\delta}_j \end{aligned} \quad (4.14)$$

Et dans ce cas tous les termes  $\bar{\delta}_j$  sont multipliés par une exponentielle décroissante et donc leurs valeurs décroît d'avantage, et l'erreur résiduelle d'estimation devient négligeable. La stabilité de l'observateur zéro est obligatoire pour assurer la stabilité du premier observateur, ce qui est explicité par l'analyse suivante :

### *Analyse de la stabilité du premier observateur (the first observer) :*

D'après le lemme 1 (donné dans le chapitre 3), l'intégration de l'équation d'état du système (4.1) renvoie :

$$x_1(t) = \exp(A\tau(t))x_0(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \exp(A(t-s))Bu(s)ds \quad (4.15)$$

De manière similaire, l'intégration de l'équation (4.3) donne :

$$\hat{x}_1(t) = \exp(A\tau(t))\hat{x}_0(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \exp(A(t-s))Bu(s)ds \quad (4.16)$$

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

---

A partir de la soustraction de ces deux dernières équations, l'erreur d'estimation est telle que :

$$e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t) \quad (4.17)$$

L'évaluation de l'erreur d'observation de premier observateur à chaque instant et par remplacement de l'erreur d'observation de l'observateur zéro par son expression, il vient :

$$\begin{aligned} \|e_1(t_N)\| \leq & \alpha_N \exp\left(-m \sum_{i=1}^N \Delta t_i\right) \|e_0(0)\| \\ & + \alpha_N \sum_{j=1}^{N-1} \exp\left(-m \sum_{i=j+1}^N \Delta t_i\right) \bar{\delta}_j + \alpha_N \bar{\delta}_N \end{aligned} \quad (4.18)$$

Où :  $\|\exp(A\tau_N)\| \leq \alpha_N, \alpha_N > 0$  et constante.

C'est visiblement clair, à partir de l'équation (4.18), qu'à chaque instant  $t = t_i, i = 1, \dots, N$  l'erreur d'observation de l'observateur zéro est non nulle et multiplié dans l'observateur premier par une valeur constante  $\|\exp(A\tau_i)\| \leq \alpha_i, \alpha_i > 0 \forall i = 1, \dots, N$ . alors, l'erreur d'observation de l'observateur cascade ainsi proposé converge asymptotiquement vers une valeur constante et non nulle, ce qui peut être plus explicite à travers l'exemple de simulation ci après.

### 4.2.2 Exemple de simulation

Soit le système donné par ça représentation d'état, comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \bar{y}(t) = Cx(t - \tau(t)) \end{cases}$$

Tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0].$$

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

Le gain d'observation  $K$  est calculé par un simple placement de pôles de la matrice  $A - KC$  à -10 et -15 respectivement. L'entrée du système est  $u(t) = \sin(t)$ . Les simulations sont réalisées pour les conditions initiales suivantes :

$$x(\tau) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \hat{x}_0(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x}_1(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tau \in [-\tau(t), 0].$$

Le profil des variations de l'amplitude du retard est donné par la figure 4.2 ci-dessous :

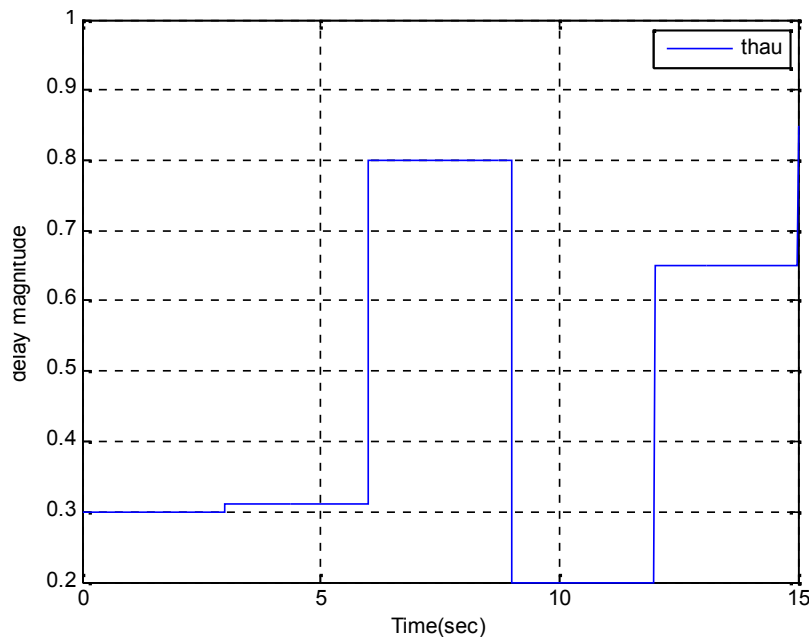


Fig.4.2. Profil de variation du retard.

Le fonctionnement de l'observateur en chaîne a été simulé, pour un retard  $\tau(t)$  sur la mesure variable aléatoirement sur l'intervalle  $\tau \in [0.1 \ 1]$ , et cela chaque  $\Delta t = 3s$ .

### *Simulation du fonctionnement nominal*

L'observateur est synthétisé pour un retard à profil connu (les amplitudes du retard et les moments de changement d'amplitudes sont connus). Les variables d'état et leurs estimées ainsi que les erreurs d'observation sont montrées dans les figures 4.3 et 4.4 ci après.

# Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

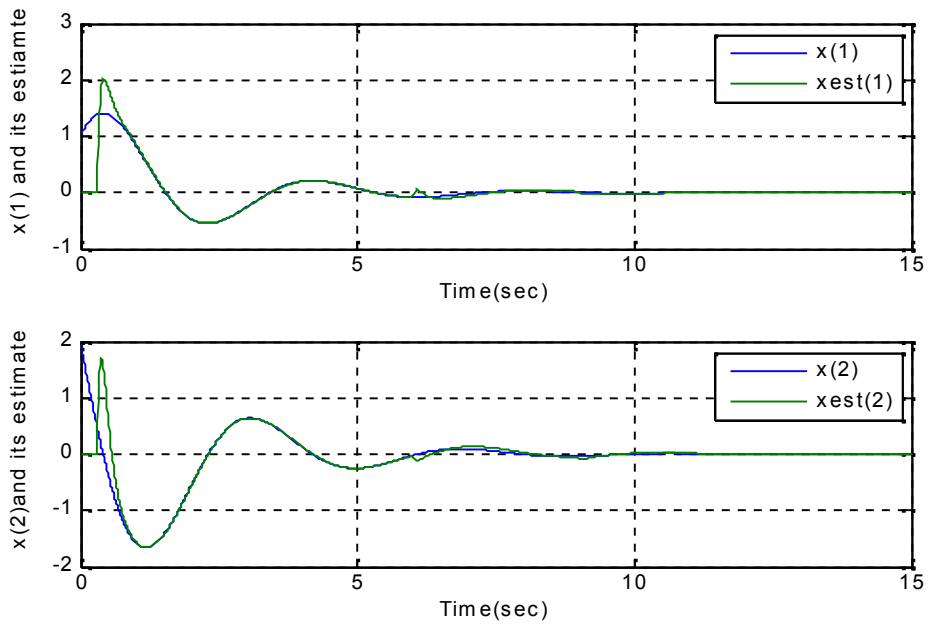


Fig.4.3. Variables d'état réelles et estimées

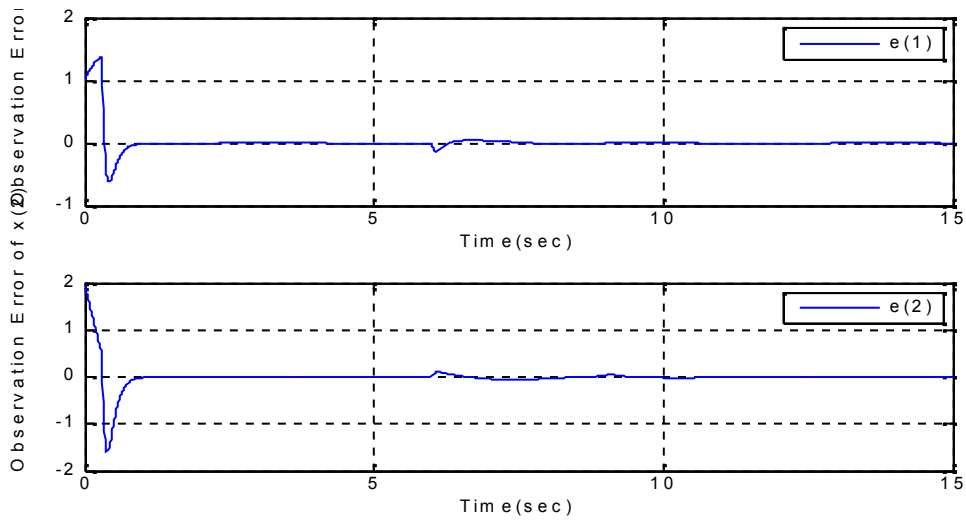


Fig.4.4. Erreurs d'estimation.

# Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

## Tests de robustesse :

Comme le profil de variation du retard est considéré parfaitement connu, l'effet des incertitudes paramétriques dans ce cas sera simulé pour deux cas possibles :

### a. Variation sur les amplitudes du retard sur chaque intervalle :

Des petites variations ont été introduites sur les valeurs prises par le retard sur chaque intervalle du temps  $\Delta t$ . Ainsi l'observateur synthétisé pour le profil connu est utilisé pour estimer les variables d'état du système soumis au retard sur la mesure ayant le profil suivant :

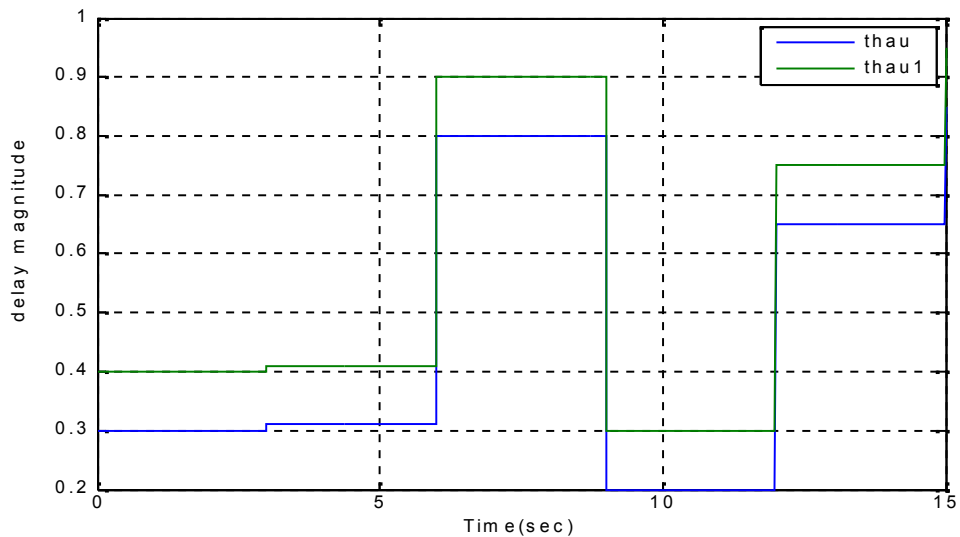


Fig.4.5. Profil de variation du retard.

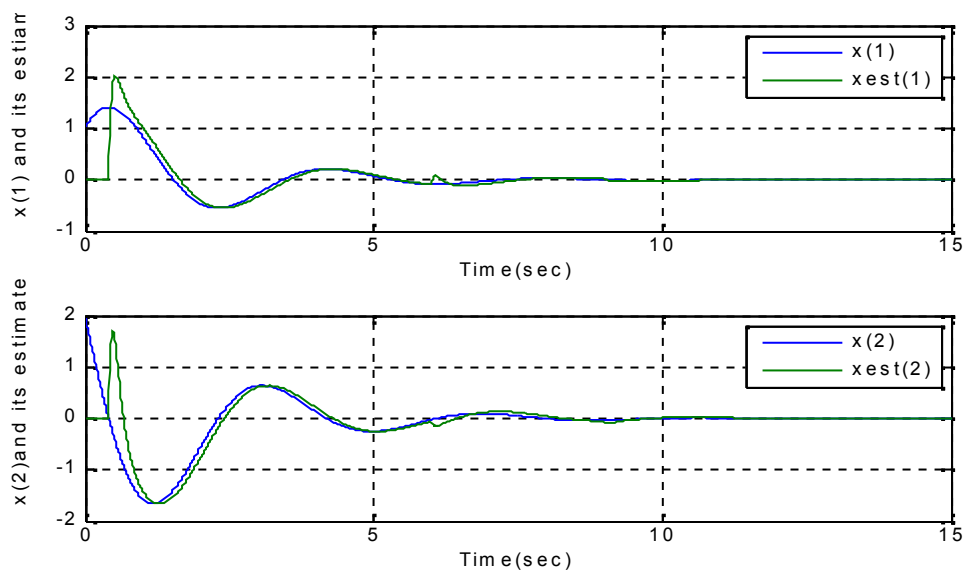


Fig.4.6. Variables d'état et leurs estimés.

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

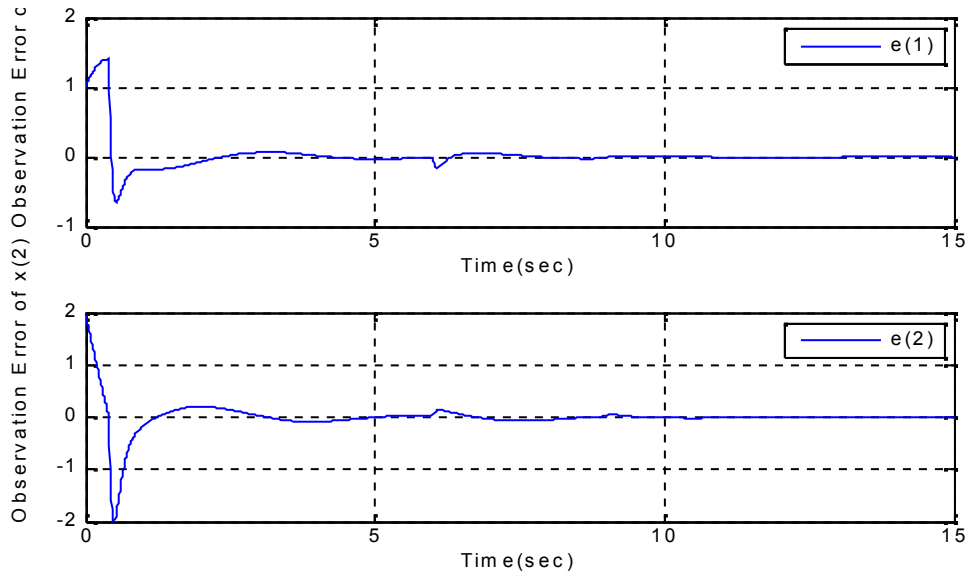


Fig.4.7. Erreurs d'estimation.

### *b. Incertitudes sur les instants de saut :*

Dans ce cas l'observateur est synthétisé pour un retard variable pour chaque  $\Delta t_i = 3s$ , tandis que le retard sur la mesure du système est variable chaque  $\Delta t_i = 2s$ , comme le montre la figure 4.8. Les résultats de simulation obtenus sont illustrés sur les figures 4.9 et 4.10.

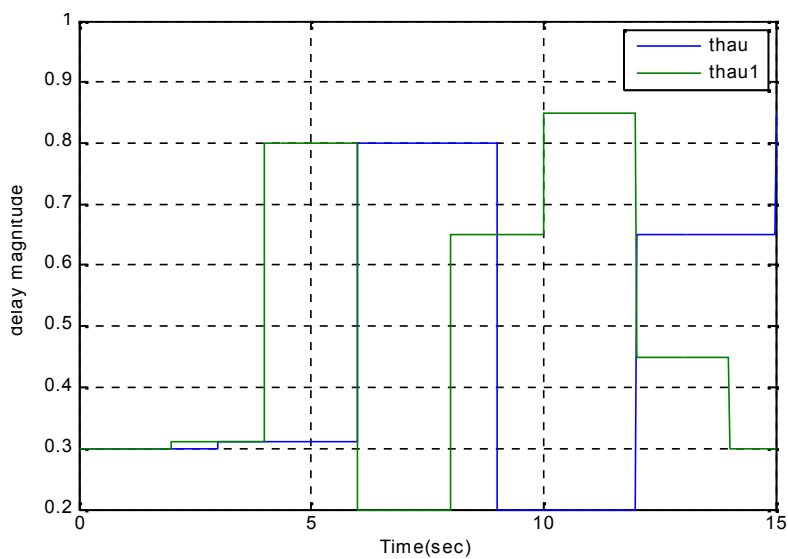


Fig.4.8. Profil de variation du retard.

# Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

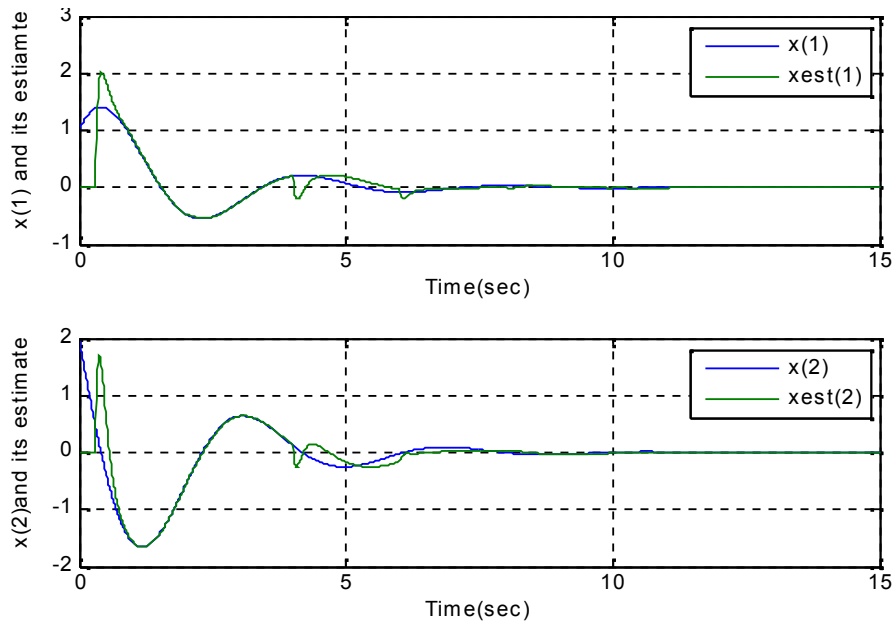


Fig.4.9. Variables d'états et leurs estimées.

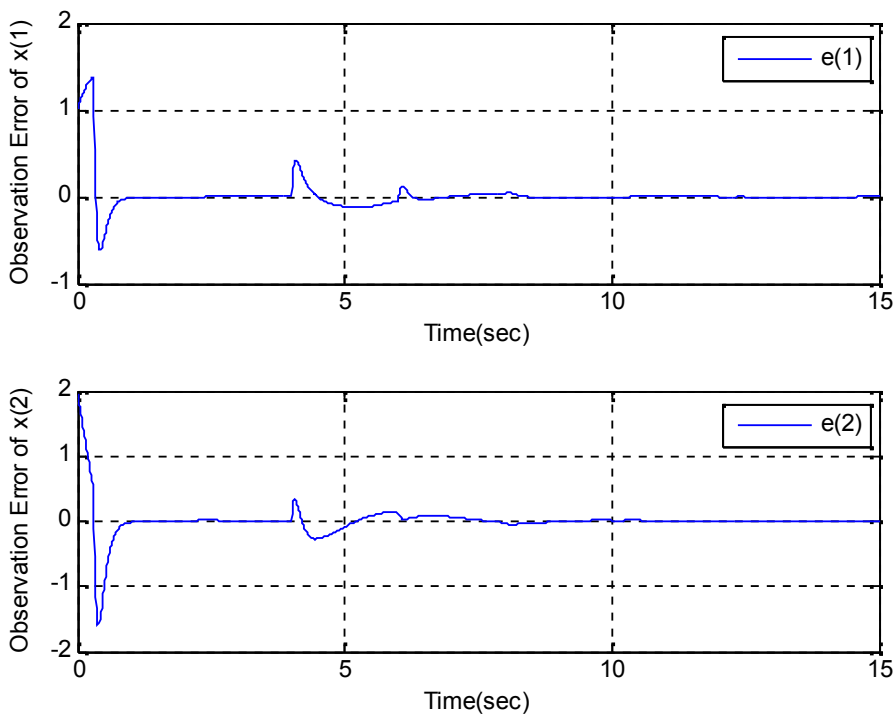


Fig.4.10. Erreurs d'observation.

## **Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.**

---

Remarques et Commentaires :

La convergence asymptotique de l'observateur est assurée, lorsqu' il est synthétisé pour un profil du retard connu. La vitesse de la convergence est affectée par des simples variations sur les amplitudes du retard variable, (l'observateur est synthétisé pour des valeurs nominales d'amplitudes du retard). Tandis qu'une variation sur les instants de sauts influence la valeur de l'erreur résiduelle. La vitesse de la convergence de l'observateur peut être ajustée par un choix adéquat du gain d'observation (placement de pôles). Une variation brusque et importante entraîne une erreur résiduelle d'amplitude élevée.

La même approche a été développée pour la classe des systèmes non linéaires affines en la commande, et cela en se basant sur les travaux de Germani et al proposé pour le cas de retard constant d'amplitude relativement petite, et alors la chaîne d'observation est limitée à deux observateur mis en cascade. Les résultats sont exposés dans le paragraphe suivant pour les systèmes à une seule entrée et une sortie (SISO).

### **4.3 Cas des systèmes non linéaires :**

L'observateur proposé dans ce cas repose principalement sur les travaux de Germani et al [17, 18]. Toutes les hypothèses sont donc retenues pour pouvoir démontrer la stabilité de l'observateur cascade dans le cas d'un retard variable par paliers donné par son profil de variation considéré complètement connu (les valeurs prises par le retard et les instants de changement de son amplitude sont considérés connus). L'observateur est synthétisé après avoir mis le système sous la forme d'un système linéaire perturbé (linéarisation par changement de coordonnées).

Comme dans le cas des systèmes linéaires, le retard est variable par paliers dans des intervalles de temps  $\Delta t_i$ , avec  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ , et l'observateur en chaîne est toujours proposé pour la classe des systèmes affines en entrée, donné par sa représentation d'état comme suit :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad t \geq \tau \quad (4.19)$$

$$\bar{y}(t) = h(x(t - \tau(t))) \quad t \geq 0 \quad (4.20)$$

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

---

Et pour simplifier l'écriture, les notations suivantes sont posées :

$\hat{x}_0(t) = \hat{x}(t - \tau(t))$  : Les estimées des variables d'état à l'instant

$u_0(t) = u(t - \tau(t))$  : L'entrée retardée utilisée dans l'observateur zéro.

$\hat{x}_{10}(t) = \hat{x}_1(t - \tau(t))$  : La variables estimée retardée.

$u_{10}(t) = u_1(t - \tau(t))$  : L'entrée de commande retardée dans le premier observateur.

L'observateur est donc comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_0(t) &= f(\hat{x}_0(t)) + g(\hat{x}_0(t))u_0(t) + Q^{-1}(\hat{x}_0(t))K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) \\ \dot{\hat{x}}_1(t) &= f(\hat{x}_1(t)) + g(\hat{x}_1(t))u_1(t) + Q^{-1}(\hat{x}_1(t))\{\exp(A_n\tau(t))K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) \\ &\quad + \exp(A_n\tau(t))(H(\hat{x}_0(t), u_0(t)) - H(\hat{x}_{10}(t), u_{10}(t)))\}\end{aligned}\tag{4.21}$$

Sous les conditions initiales :

$$\hat{x}(t - \tau)\Big|_{t=0} = \hat{x}(-\tau_1) ;$$

$$\hat{x}_1(\tau) = \hat{x}(\tau), \tau \in [-\tau_1, 0]$$

Où :  $\tau_1$  est l'amplitude du retard sur l'intervalle  $t_0 \leq t < t_1$

La stabilité de cet observateur a été démontrée dans les travaux de Germani et al [17] pour le cas d'un retard connu et constant. Une extension de ces résultats été proposée par Muralidhar et al ([14], [15]) pour le cas du retard variable par paliers. En effet Les hypothèses et les résultats donnés dans le chapitre trois sont maintenus et utilisés dans la démonstration de la stabilité de l'observateur en chaine résumée ci après, et détaillée en Annexe C.

### 4.3.1 Analyse de la stabilité de l'observateur en chaine

#### *Stabilité de l'observateur zéro*

La stabilité de l'observateur est démontrée dans les nouvelles coordonnées  $z$ . L'erreur d'observation est définie comme suit :

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

---

$$e_{z,0}(t) = z(t - \tau(t)) - \hat{z}(t - \tau(t)) \quad (4.22)$$

Sa dérivée relativement à la variable temps renvoie :

$$\dot{e}_{z,0}(t) = \dot{z}(t - \tau(t)) - \dot{\hat{z}}(t - \tau(t)) \quad (4.23)$$

Le remplacement des dérivées par leurs équivalents donne :

$$\begin{aligned} \dot{e}_{z,0}(t) &= A_n z_0(t) + \tilde{H}(z_0(t), u_0(t)) \\ &\quad - \{A_n \hat{z}_0(t) + \tilde{H}(\hat{z}_0(t), u_0(t)) + KC_n (z_0(t) - \hat{z}_0(t))\} \end{aligned}$$

Après calcul et simplification, la dynamique de l'erreur d'observation est donnée par :

$$\dot{e}_{z,0}(t) = A_m e_{z,0}(t) + e_{\tilde{H}}(z_0, \hat{z}_0, u_0) \quad (4.24)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_m &= A_n - KC_n \\ e_{\tilde{H}}(z_0, \hat{z}_0, u_0) &= \tilde{H}(z_0(t), u_0(t)) - \tilde{H}(\hat{z}_0(t), u_0(t)) \end{aligned}$$

Et  $K$  est le gain d'observation calculé de sorte que la matrice  $A_m$  ait des valeurs propres à parties réelles négatives. Comme la stabilité de l'observateur sur les intervalles  $]t_{i-1}, t_i[$  a été démontrée dans le cas du retard constant il reste alors l'évaluation de l'erreur d'observation aux instants de sauts (changement de l'amplitude du retard). On obtient :

$$\dot{\hat{z}}(t_i - \tau_i) = \dot{\hat{z}}(t_i - \tau_{i+1}) - A_m \delta_{z_i}(t) - \delta_{\tilde{H}_i}(t) \quad (4.25)$$

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

---

Où :

$$\begin{aligned}\delta_{\hat{z}_i}(t) &= \hat{z}(t_i - \tau_{i+1}) - \hat{z}(t_i - \tau_i) \\ \delta_{\tilde{H}_i}(t) &= \tilde{H}(\hat{z}(t_i - \tau_{i+1}), u(t_i - \tau_{i+1})) - \tilde{H}(\hat{z}(t_i - \tau_i), u(t_i - \tau_i))\end{aligned}$$

La substitution de l'équation (4.25) dans l'équation (4.24), renvoie l'erreur d'estimation de l'observateur zéro sur tout le profil de variation du retard donnée par :

$$\dot{e}_{z,0}(t) \begin{cases} A_m e_{z,0}(t) + e_{\tilde{H}(z_0, \hat{z}_0, u_0)} + A_m \delta_{\hat{z}_i}(t) + \delta_{\tilde{H}_i}(t), & \text{à } t > t_i \\ A_m e_{z,0}(t) + \delta_{\tilde{H}_i}(t) & \text{pour } t \in [t_{i-1}, t_i[ \end{cases} \quad (4.26)$$

D'où :

$$\|e_{z,0}(t_N)\| \leq \beta \exp(-m \sum_{i=1}^N \Delta t_i) \|e_{z,0}(0)\| + \sum_{j=1}^{N-1} \exp(-m \sum_{i=j+1}^N \Delta t_i) \beta_j \bar{\delta}_j + \beta_N \bar{\delta}_N \quad (4.27)$$

Où :

$$\begin{aligned}\beta &= \prod_{i=1}^N \beta_i \\ \beta_i &= \frac{1}{(1 - \gamma_{\tilde{H}} M_i)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\exp(A_m(t_i - s))\| ds \leq M_i\end{aligned}$$

$$\text{Et } \bar{\delta}_i = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \exp(A_m(t_i - s)) \times \{A_m \delta_{\hat{z}_i}(s) + \delta_{\tilde{H}_i}(s)\} ds \right\|, i = 1, 2, \dots, N.$$

Ces dernières équations montrent qu'il existe une erreur résiduelle et que L'erreur d'observation converge vers une valeur non nulle quand le temps tend vers l'infini.

La valeur de l'erreur résiduelle dépend inévitablement de la valeur de

$$\beta_i = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_{\tilde{H}}}{m} (\exp(-m \Delta t_i) - 1)} \text{ et donc de la valeur de } \Delta t_i :$$

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

---

Les valeurs possibles de  $\Delta t_i$  sont :

- $\Delta t_i = 0$  : cas du système non retardée.
- $\Delta t_i < 1$  : l'erreur résiduelle est amplifiée.
- $\Delta t_i > 1$  : l'erreur résiduelle est atténuée.

### Remarque 2. :

Dans le cas où les intervalles du temps sont de même longueur  $\Delta t_i = \Delta t_j, i \neq j$ . l'erreur d'observation de l'observateur zéro devient :

$$\|e_{z,0}(t_N)\| \leq \tilde{\beta}^N \exp(-mN\Delta t) \|e_{z,0}(0)\| + \sum_{j=1}^N \exp(-m(N-j)\Delta t) \tilde{\beta}^{N-j} \bar{\delta}_j \quad (4.28)$$

Avec :

$$\beta_i = \beta_j = \tilde{\beta}, i \neq j \text{ et } \beta = \prod_{i=1}^N \tilde{\beta}_i = \tilde{\beta}^N$$

### Stabilité de l'observateur un

Dans le cas où  $\Delta t_i = \Delta t_j, \forall i \neq j$ , le premier observateur est donné par :

$$\hat{z}_1(t) = e^{A_n \tau(t)} \hat{z}_0(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_n(t-s)} \tilde{H}(\hat{z}_1(s), u(s)) ds \quad (4.29)$$

De même l'intégration de l'équation d'états du système donne :

$$z(t) = e^{A_n \tau(t)} z(t-\tau(t)) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_n(t-s)} \tilde{H}(z(s), u(s)) ds \quad (4.30)$$

L'erreur d'observation du premier observateur s'écrit :

$$e_1(t) = e^{A_n \tau(t)} e_{z,0}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_n(t-s)} (\tilde{H}(z(s), u(s)) - \tilde{H}(\hat{z}_1(s), u(s))) ds \quad (4.31)$$

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

---

L'erreur d'observation est bornée et par remplacement de l'erreur d'observation de l'observateur zéro et Comme la non linéarité est lipchitzienne, il vient :

$$\begin{aligned} \|e_{z,1}(t)\| \leq & \|e^{A_n \tau(t)}\| \left\{ \tilde{\beta}^N \exp(-mN\Delta t) \|e_{z,0}(0)\| \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^N \exp(-m(N-j)\Delta t) \tilde{\beta}^{N-j} \bar{\delta}_j \right\} \\ & + \gamma_{\tilde{H}}(|u|) \|e^{A_n \tau(t)}\| \int_{t-\tau(t)}^t \|e_{z,1}(s)\| ds \end{aligned} \quad (4.32)$$

Par considération du résultat de lemme (chapitre 3), il vient :

$$\|e_{z,1}(t)\| = \beta_{z_1} \|e_{z,0}(t)\| \quad (4.33)$$

Avec :

$$\beta_{z_1} = \frac{\alpha}{1 - \gamma_{\tilde{H}} M}, \quad \alpha = \|\exp(A_n \tau(t))\|, \quad \int_{t-\tau}^t \|\exp(A_n(t-s))\| ds \leq M$$

### Remarque 3. :

La valeur de l'erreur résiduelle de l'observateur ainsi proposé dépend de la largeur des intervalles  $\Delta_j$ . Elle peut être fortement élevée. La vitesse de la convergence de l'observateur ne peut pas être librement modifiée par le choix du gain d'observation.

### 4.3.2 Exemple de simulation

Les simulations sont faites sur le même exemple étudié dans le chapitre trois, mais le retard est supposé variable par paliers et son profil est donné par la figure 4.11. Les résultats sont illustrés par les figures 4.12, 4.13.

# Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

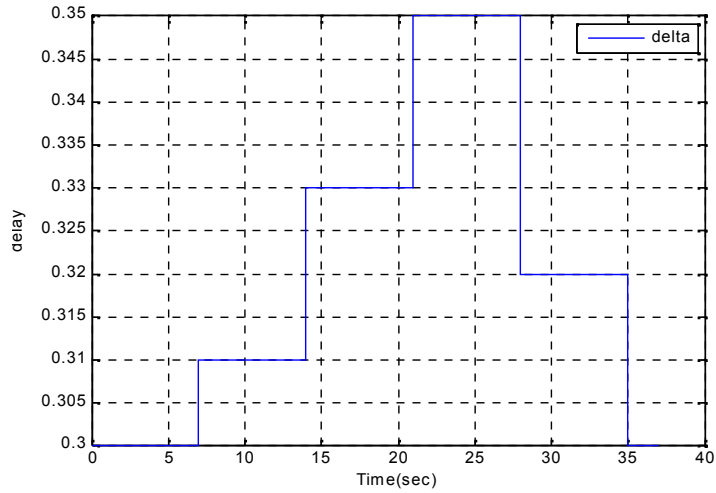


Fig.4.11. Profil de variation du retard.

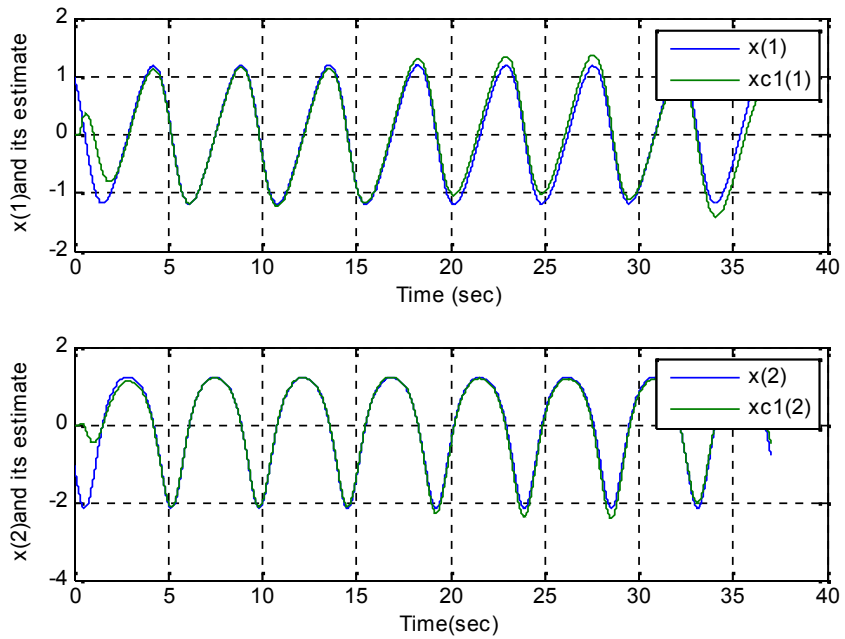


Fig.4.12. Variables d'état réelles et leurs estimées.

## Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.

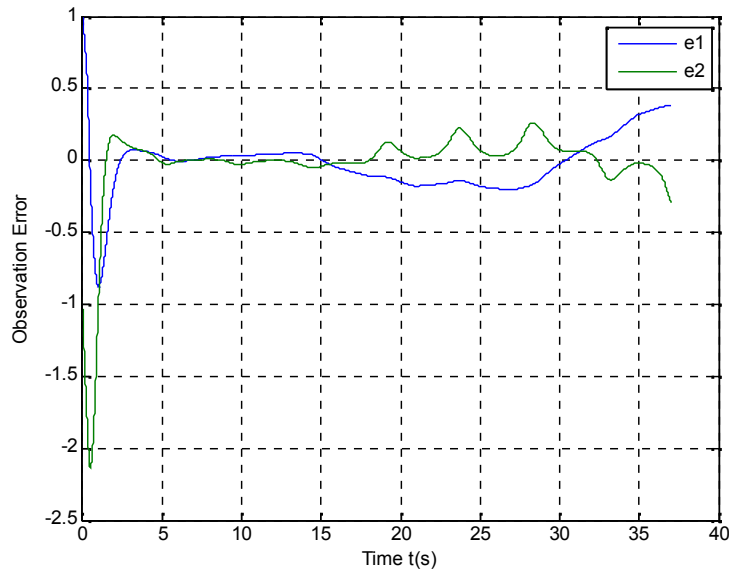


Fig.4.13. Erreurs d'estimation.

Remarques et commentaires :

Nous remarquons que durant le premier changement de palier, l'observateur cascade converge. Comme le montrent les courbes des erreurs d'estimation. Les états estimés sont très proches des états réels. Cependant, à partir du troisième palier de changement, les performances de l'observateur se dégradent. Les écarts entre les états estimés et les états réels sont peut être moins visibles sur les réponses portées sur la figure 4.12 mais cette dégradation est significative si on examine les courbes des erreurs de la figure 4.13. On remarquera aussi que ces dégradations s'amplifient aux autres changements de palier suivants. Ces dégradations sont dues, à notre avis, aux erreurs de cumulation ou résiduelle dues aux changements de paliers. Il est possible dans ce cas de recourir à un observateur impulsif qui permettra la remise à zéro à chaque changement de palier par l'envoi d'une information bien choisie du système vers l'observateur. La vitesse de convergence ne peut pas être fixée librement par le choix du gain d'observation (système non linéaire). La possibilité du placement de cet observateur dans une boucle de commande reste donc à discuter et demeure un problème ouvert.

## **Synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards variables sur la mesure.**

---

### **4.4 Conclusion**

L'approche proposée dans ce chapitre consiste à supposer un retard variable en paliers. Cette approche a donnée de bons résultats dans le cas des systèmes linéaires dont les résultats de stabilité sont bien établis. Par contre dans le cas des systèmes non linéaire, même si l'erreur d'estimation a été bornée théoriquement avec cependant beaucoup d'hypothèse de bornitude des différentes grandeurs, nous avons constaté que l'erreur résiduelle est un problème sérieux dans le fonctionnement de cet observateur. Ce problème peut conduire à la divergence c'est à dire à l'instabilité de la dynamique des erreurs d'estimation. De plus, l'observateur est encore moins efficace dans le cas des systèmes non linéaires du moment que la vitesse de sa convergence est limitée par le choix des gains d'observation. Ceci remet en cause la possibilité de l'insertion de cet observateur dans une boucle de commande. Le problème de synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et/ou non linéaires à retards sur la mesure, reste toujours ouvert et présente un grand intérêt en vertu de nouvelles applications modernes dans lesquelles ce problème se pose de manière cruciales. Nous présentons dans le chapitre suivant deux applications pour illustrer cet intérêt.

# **Cinquième chapitre :**

## **Applications**

## 5.1 Introduction

Poussé par le développement des techniques de commande plus élaborées sur le plan théorique, des moyens de communications plus rapides et plus denses entre les différents éléments constituant le système, ainsi que, le développement des matériels et des logiciels informatiques de plus en plus puissants nécessaires à l'implémentation, la commande coopérative associant plusieurs agents pour exécuter la même tâche ( processus multi agents bien connus des informaticien) est un champ de recherche très récent en automatique. Les applications sont très nombreuses et ont des retombées économiques très significatives. A titre d'exemple, remplacer un robot exécutant une tâche dans une chaîne de production par plusieurs mini robots de moindre puissance pour exécuter la même tâche permet une flexibilité, meilleure fiabilité et une meilleure sécurité (si un robot tombe en panne, la tâche pourrait se poursuivre et le remplacement du mini robot revient moins cher), une meilleure rapidité d'exécution (des éléments de la tâche sont exécutés en parallèle) et donc une meilleure rentabilité économique. Nous pouvons aussi citer l'exemple de remplacer un gros satellite par une équipe de micro satellites qui entraîne une meilleure efficacité et une meilleure précision dans les tâches de surveillance ou de recueil d'informations par des images satellitaires. D'autres applications peuvent être citées comme la conduite des véhicules terrestres sans conducteur, la conduite des véhicules aériens sans pilote UAV (Unmanned Aerial Vehicles), etc.

L'utilisation de plusieurs sous systèmes repose sur une sorte « d'intelligence ». Sa classification se fait par rapport aux critères cités dans [20] :

- **Fonction** : Préciser les tâches qui doivent être automatisées et le degré d'automatisation.
- **Architecture** : La décomposition des différentes fonctions et formulation du problème de commande de chaque sous système.
- **Design** : La division des tâches et de l'intelligence entre les différents agents, et la combinaison des différentes technologies pour réaliser cette architecture.
- **Evolution** : Synchronisation et coordination des différentes tâches.
- **Evaluation** : Efficacité, coûts ...

Cependant tout progrès technologique amène de nouveaux problèmes à résoudre. Plusieurs challenges sont à relever comme la prise de décision de chaque agent qui doit être en rapport avec celles des autres agents ; les problèmes liés à la communication (délais de transmission, package loss ou pertes d'information, congestion, ...), l'environnement incertain qui s'élargit et les consommations d'énergie qui peuvent devenir importantes ([20], [21], [22], [23]).

Le retard temporel lié aux délais de transmission de l'information entre agents est parmi les problèmes inévitables dans ce genre de stratégie coopérative.

Pour illustrer l'étude que nous avons menée dans les chapitre trois et quatre sur la conception d'observateur avec un retard sur la mesure, nous présentons dans ce chapitre deux applications de la commande coopérative ou multi-agents. La première porte sur la conduite coopérative de véhicules terrestre. Cette application est modélisée par des modèles linéaires. Dans la seconde application, il s'agit de la stabilisation coopérative de satellites. Cette application est modélisée par un modèle non linéaire.

## **5.2 Application 1 : Conduite coopérative de véhicules terrestres**

Dans la plupart des pays notamment développés, le parc automobile devient de plus en plus gigantesque causant des encombrements rendant la conduite dans les autoroutes pénible et insoutenable. Le volume important du parc automobile est aussi l'une des principales causes des accidents dont le nombre plus en plus croissant. Alertée par ce fléau, la communauté scientifique s'est attelée ces dernières années à trouver des solutions. L'une des solutions proposées a donnée naissance à ce qu'on appelle véhicules/autoroutes intelligents dont l'objectif majeur est de minimiser les dégâts humains et matériels [20].

Les véhicules terrestres intelligents sont des véhicules à pilotage automatique c'est à dire sans conducteur. Avec un leader réel ou virtuel (agent maître), les véhicules s'échangent des informations (leurs positions en général) grâce au GPS. Ces informations sont exploités par les contrôleurs locaux propres à chaque véhicule complètement automatique et ce pour maintenir un espace de sécurité entre les différents véhicules, comme le montre la figure 5.1 ci-dessous

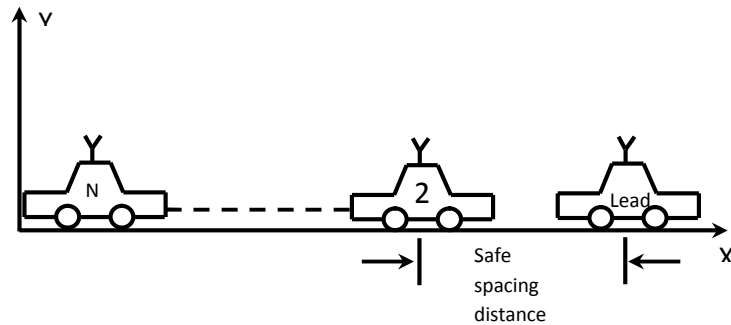


Fig.5.1: Circulation de véhicules, respectant la distance de sécurité.

Le véhicule leader communique sa position aux  $N-1$  véhicules, et les commandes de ces derniers sont ainsi calculées de manière à garder l'écart entre véhicules constant. Dans le cas où l'information arrive aux véhicules esclaves en retard, l'écart varie et dans le cas pire, peut provoquer des scénarios catastrophiques dont la collision est une conséquence directe (instabilité du système). Le problème traité dans ce travail est celui des véhicules linéaires, et se pose comme suit :

Soit le système composé de trois véhicules (Figure 5.2), dont le leader émet un signal sur un rayon  $R_{lead}$  portant l'information sur sa position à l'instant  $t$ . Les véhicules 2 et 3 reçoivent l'information après un retard temporel non négligeable c'est-à-dire à l'instant  $t - \tau_j, j = 2, 3$ .

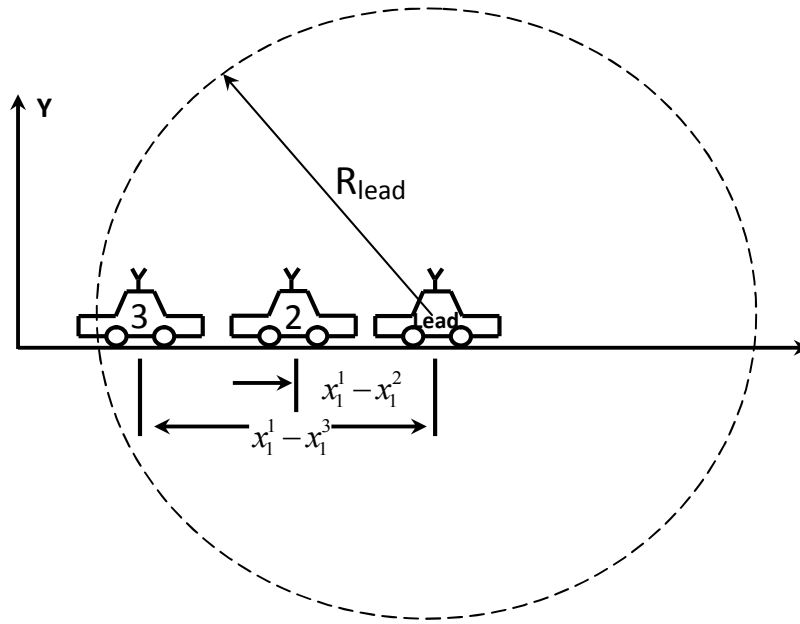


Fig.5.2. Maintient d'une distance de sécurité constant utilisant  
L'information sur la position de véhicule leader.

Chaque véhicule est modélisé comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Avec  $x_i(t)$  est la position,  $v_i(t)$  est la vitesse et  $u_i(t)$  est la commande de l'i-ème véhicule.

La représentation d'état est donnée par :

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t) \tag{5.2}$$

$$y_i(t) = Cx_i^i(t), i = 1, 2, 3. \tag{5.3}$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = [0 \quad 1]^T, C = [1 \quad 0]$$

Le choix des variables d'état est tel que :

$$x_i(t) = [x_1^i \quad x_2^i]^T = [x_i \quad v_i]^T$$

### *Cas du retard constant*

La sortie de premier véhicule est reçue par le deuxième véhicule après un laps de temps  $\tau_2 = 0.1s$  c'est-à-dire  $\bar{y}_{1,2}(t) = x_1^1(t - \tau_2)$ , et par le troisième après  $\tau_3 = 0.3s$  alors  $\bar{y}_{1,3}(t) = x_1^1(t - \tau_3)$ .

Pour pouvoir synthétiser une commande pour maintenir la distance de sécurité estimée de 20m entre chaque deux véhicules, deux observateurs sont conçus pour reconstruire l'état du premier véhicule à partir des mesures retardées reçues par les véhicules deux et trois (estimation de la position du premier véhicule à l'instant  $t$  à partir des mesures à l'instant  $t - \tau_j, j = 2, 3$ ). Les deux observateurs sont sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_0(t) = A\hat{x}_0(t) + Bu(t - \tau_j) + K(\bar{y}_{1,j}(t) - C\hat{x}_0(t)), t \geq -\tau_j \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + Bu(t) + K(\bar{y}_{1,j}(t) - C\hat{x}_0(t)), t \geq 0 \\ j = 2, 3. \end{cases} \quad (5.4)$$

La commande est basée sur l'équation d'erreur telle que :

$$e(t) = \hat{x}_1^1(t) - x_1^j(t), j = 2, 3. \quad (5.5)$$

La dynamique de l'erreur désirée est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{e}(t) + 2\xi\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e = \omega_n^2 e_d \quad (5.6)$$

Où :  $\xi$  est le coefficient d'amortissement et  $\omega_n$  est la pulsation propre et  $e_d$  désigne l'écart désiré entre deux véhicules. Par l'évaluation de la deuxième dérivée de l'erreur, et après tout calcul fait, les lois de commande des véhicules 2 et 3 prennent la forme :

$$u_j = u_1 + 2\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e - \omega_n^2 e_d \quad (5.7)$$

Les simulations sont faites dans les conditions suivantes  $\xi = 1, \omega_n = 1$ . La commande du premier véhicule est nulle  $u_1 = 0$  et les conditions initiales sur le système et sur les observateurs sont :

## Applications

$$x_{lead}(0) = [600 \ 10]^T, \hat{x}_0(\tau) = [590 \ 10]^T, \hat{x}_1(0) = [590 \ 10]^T$$
$$x_{véhicule2}(0) = [500 \ 10]^T, x_{véhicule3}(0) = [400 \ 10]^T$$

Le gain d'observation est calculé par placement de pôles de la matrice  $A-KC$ , les pôles sont choisis égaux à  $-20, -10$ . Les résultats des simulations sont illustrés par les figures 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, et 5.8. L'objectif a été relativement atteint mais nous constatons une erreur statique relativement faible d'environ 5% pour les deux objectifs sur les deux véhicules. Nous avons comparé ces résultats de commande des véhicules 2 et 3 obtenus sans connaissance de la position du véhicule 1 avec ceux obtenus avec la connaissance de la position du premier véhicule. Ces derniers sont reportés dans les figures 5.9 et 5.10. Il est évident que l'observateur en chaîne introduit manifestement un écart statique. Les résultats chiffrés sont donnés dans le tableau 5.1.

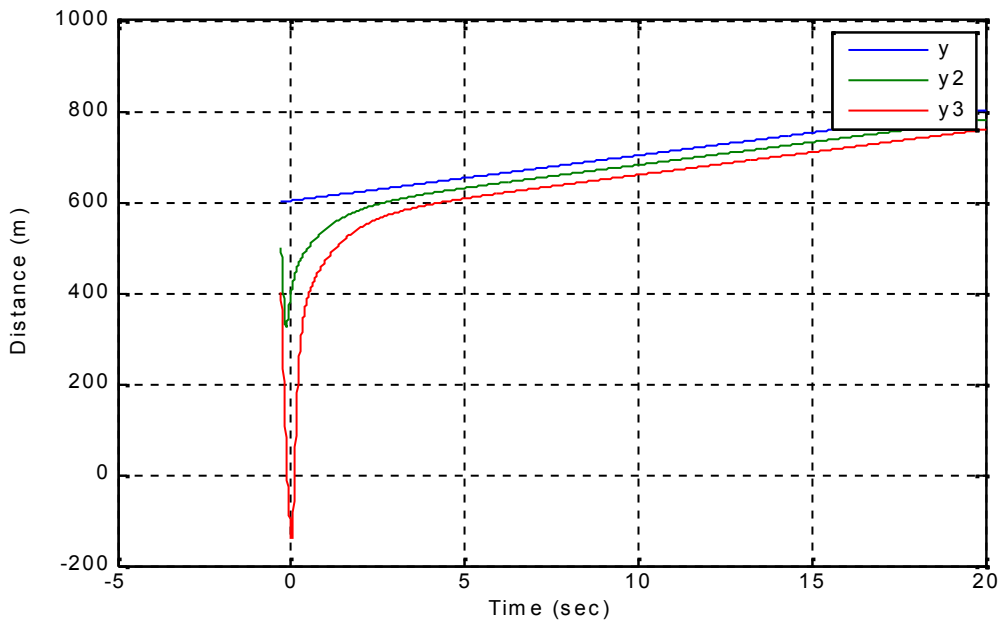


Fig.5.3. Position des trois véhicules

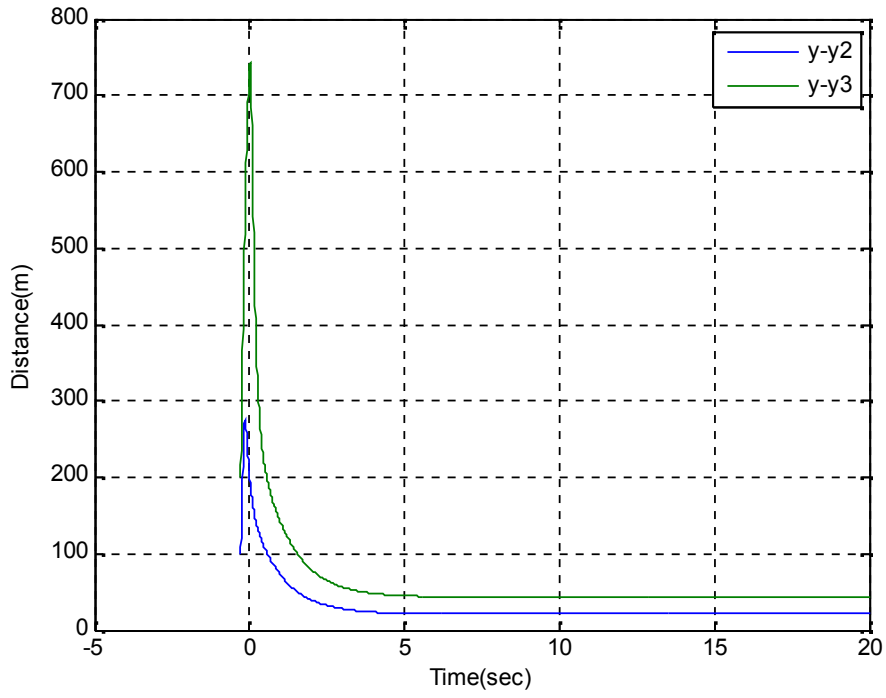


Fig.5.4. Distance entre le véhicule 1 et les véhicules 2 et 3.

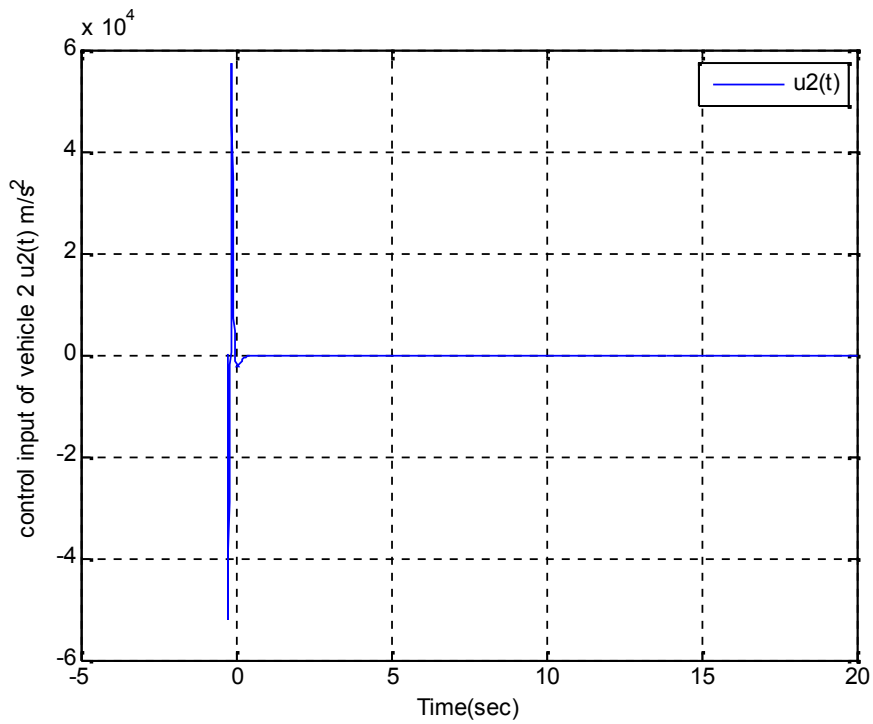


Fig.5.5. Entrée de commande du deuxième véhicule.

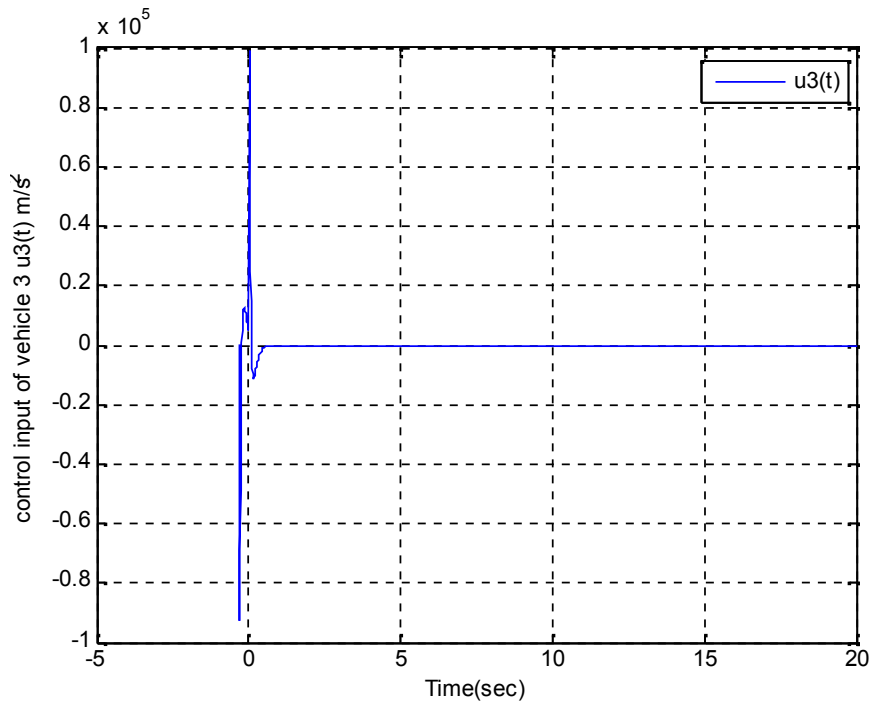


Fig.5.6. Entrée de commande de troisième véhicule.

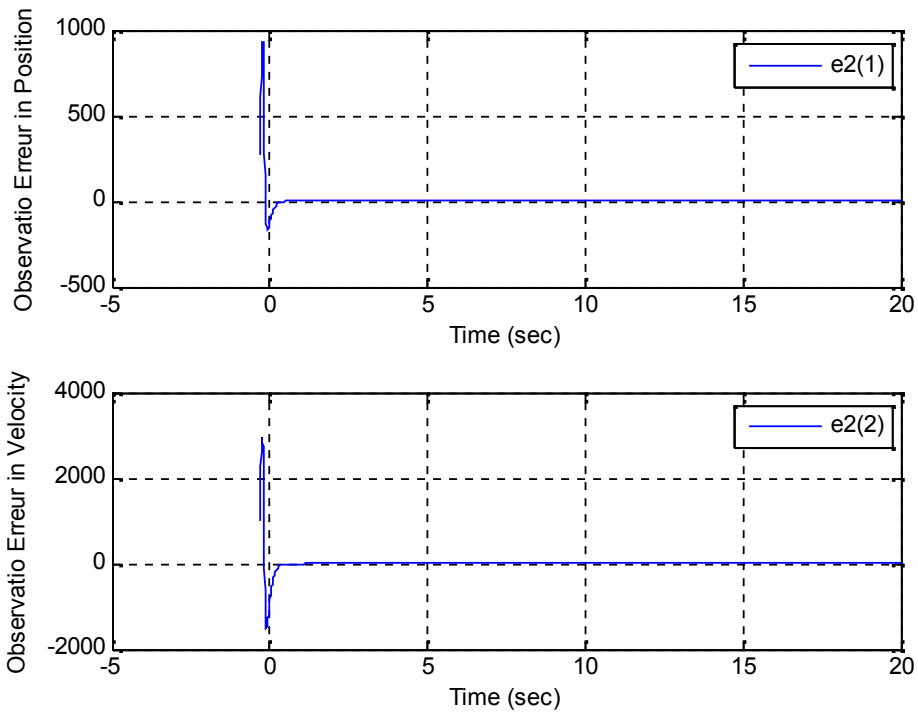


Fig.5.7. Erreur d'observateur de deuxième véhicule.

# Applications

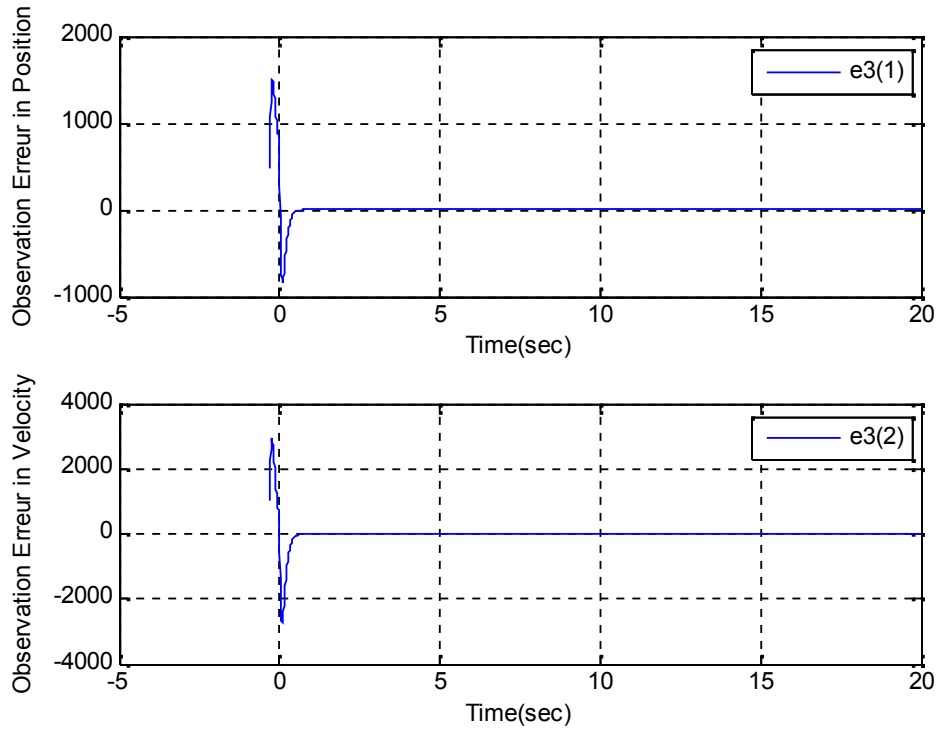


Fig.5.8.Erreur d'observateur de troisième véhicule.

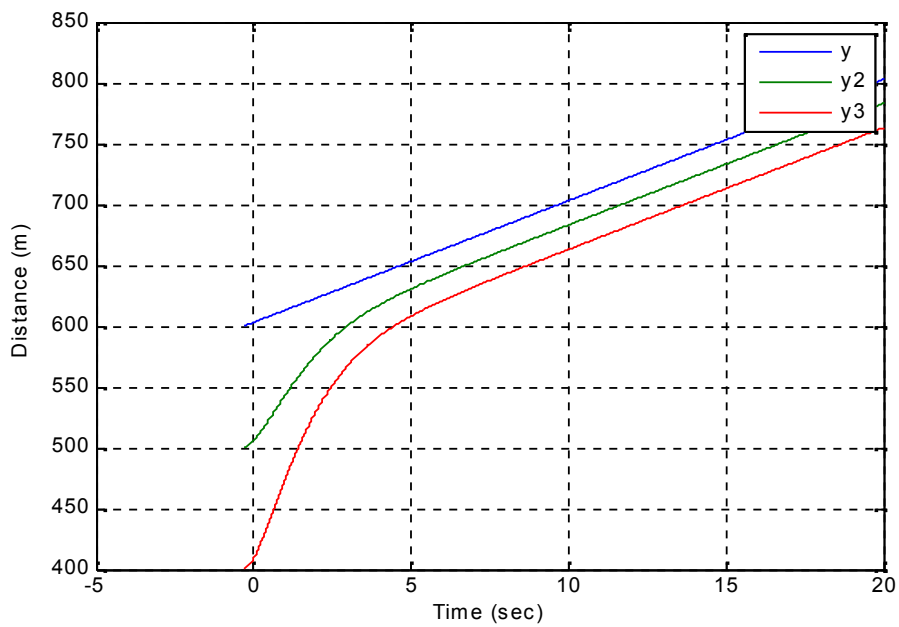


Fig.5.9.Positions des véhicules 2 et 3.

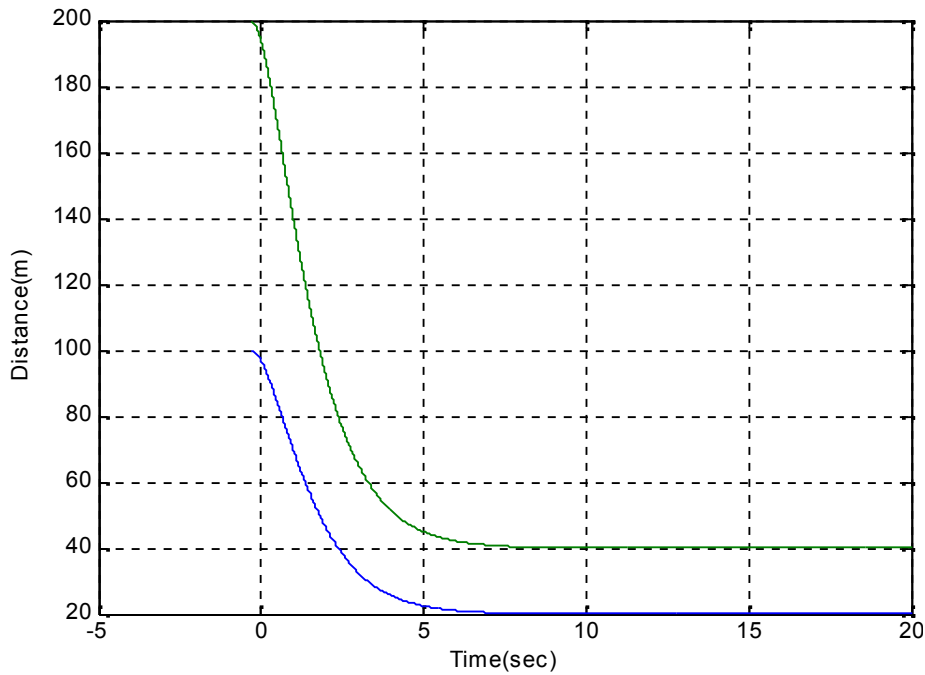


Fig.5.10.Distance entre le véhicule 1 et les véhicules 2 et 3.

Tableau.5.1.Comparaison des résultats de simulation

distance m position	Entre les véhicules 1 et 2	Entre les véhicules 1 et 3
Sans observateur	D=20.00	D=40.00
Avec observateur	D=21.05	D=43.05

Les commandes appliquées aux véhicules 2 et 3 sont énergiques en régime transitoire, et devient nulles en régime permanent dans le cas étudié. Si la quantité d'énergie est limitée, une commande optimale est envisageable.

L'exemple étudié est très simplifié, en effet, dans le cadre de ce travail il représente un exemple réel des systèmes à retard sur la mesure, d'autre cas d'étude peuvent être étudiés comme : le cas des véhicules linéaires sur deux lignes, l'ajout d'évitement d'obstacles ...etc.

## *Cas du retard variable :*

Le même système a été commandé en considérant que le retard sur la sortie du véhicule leader est variable. Les profils de variation du retard sur la position du véhicule leader reçue par les véhicule 2 ( $\tau_2$  :  $\text{thau2}$ ) et 3 ( $\tau_3$  :  $\text{thau3}$ ) sont comme reportés sur les figures 5.11 et 5.12.

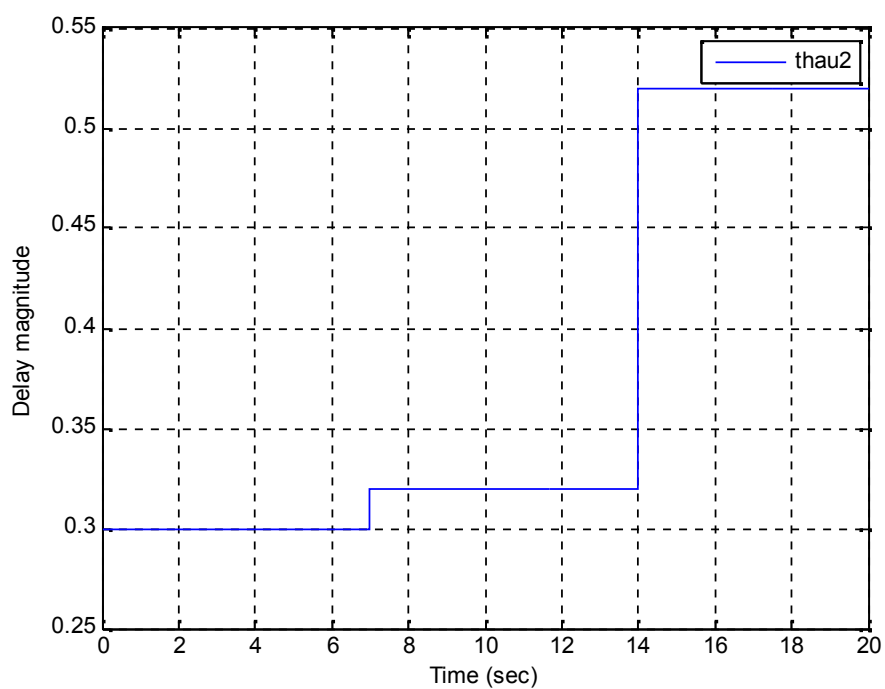


Fig.5.11. Profil de variation du retard au niveau du véhicule 2.

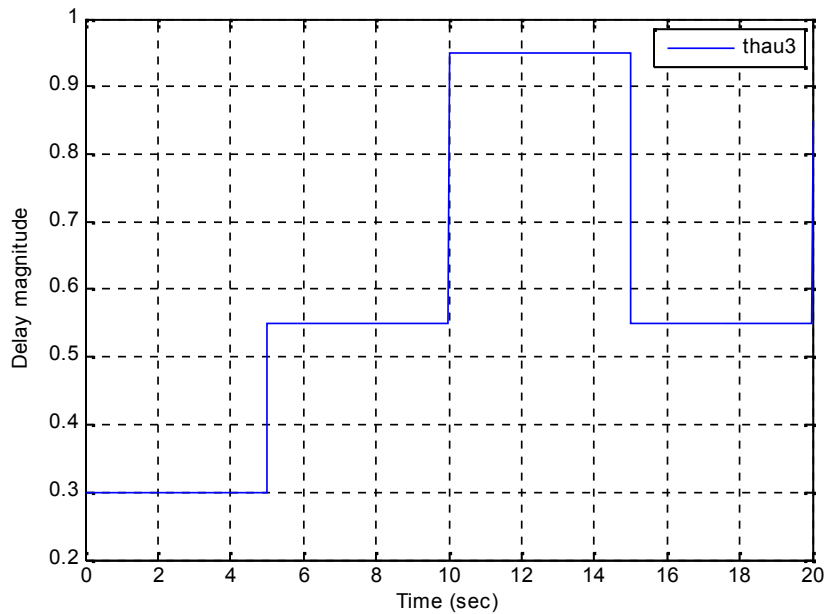


Fig.5.12. Profil de variation du retard au niveau du véhicule 3.

Comme le montrent les figures ci-dessus, le retard est variable par palier et les intervalles de variation sont de même largeur ( $\Delta t = 7$  sec dans le cas du véhicule 2 et  $\Delta t = 5$  sec pour le véhicule 3). La loi de commande dans ce cas est la même que dans la partie précédente mais elle assure une distance de 30 m entre le véhicule maître et le deuxième véhicule et de 50m entre le véhicule maître et le troisième véhicule. Les résultats de simulation sont portés sur les figures 5.13, 5.14 et 5.15.

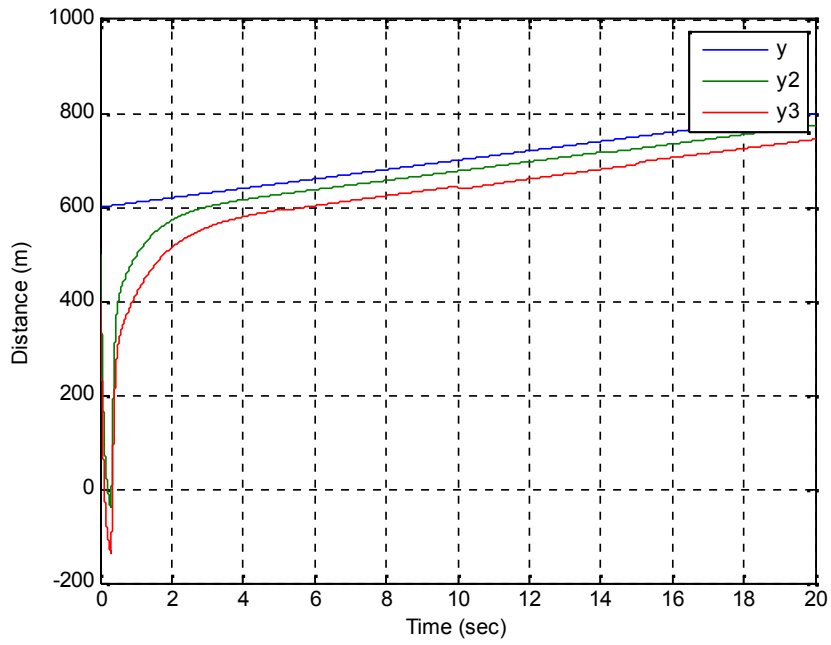


Fig.5.13. Position des trois véhicules.

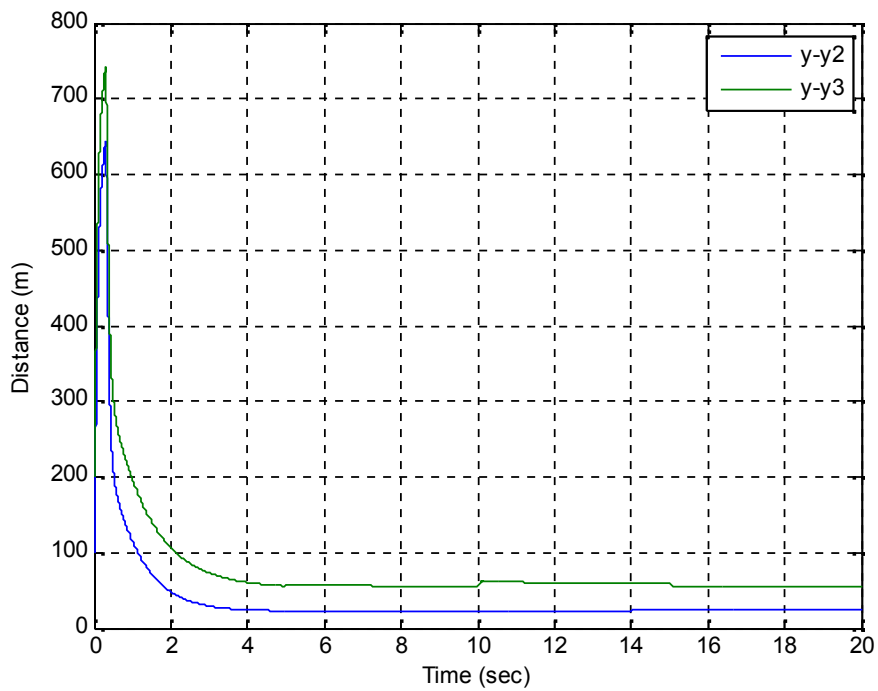


Fig.5.14. Distance des véhicules 2 et 3 par rapport au véhicule maitre.

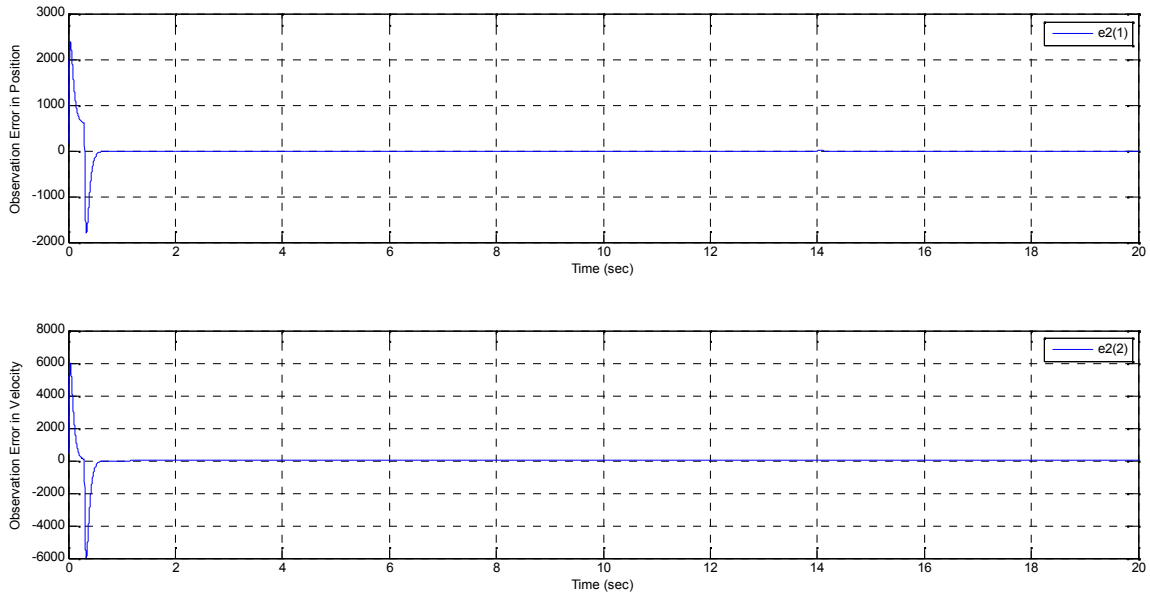


Fig.5.15.Erreur d'observation au niveau de véhicule 2.

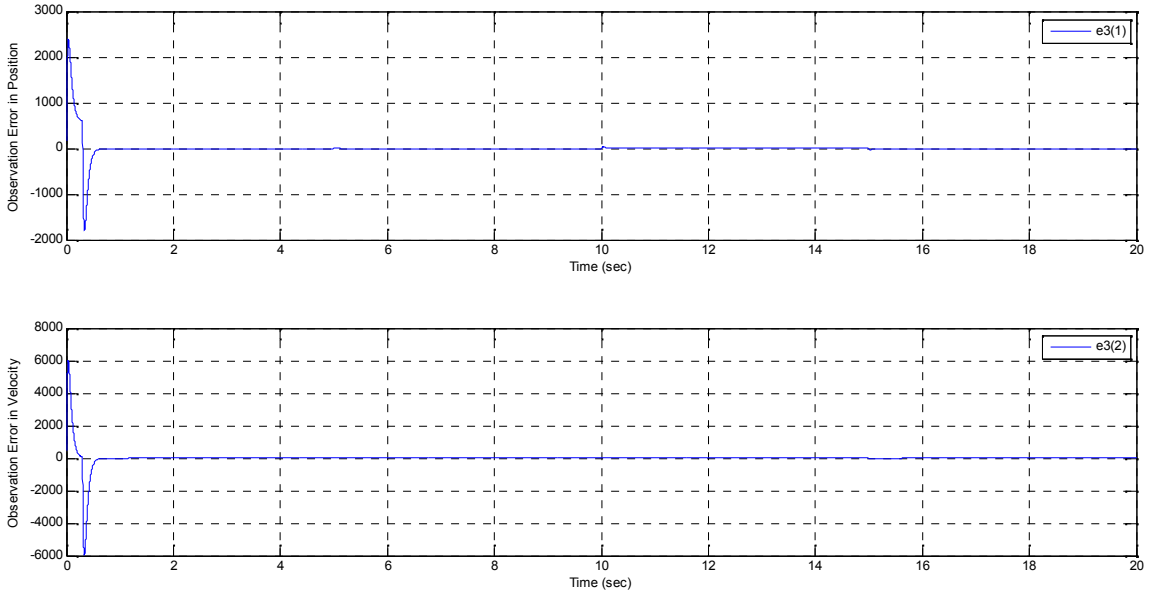


Fig.5.16 Erreurs d'observation au niveau de véhicule 3

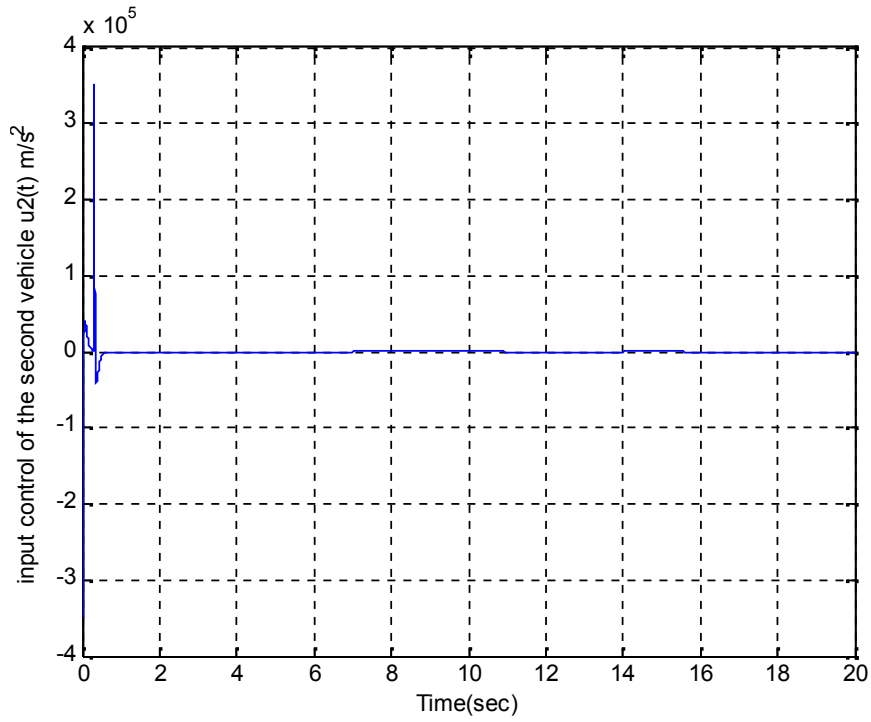


Fig.5.17. Commande du deuxième véhicule.

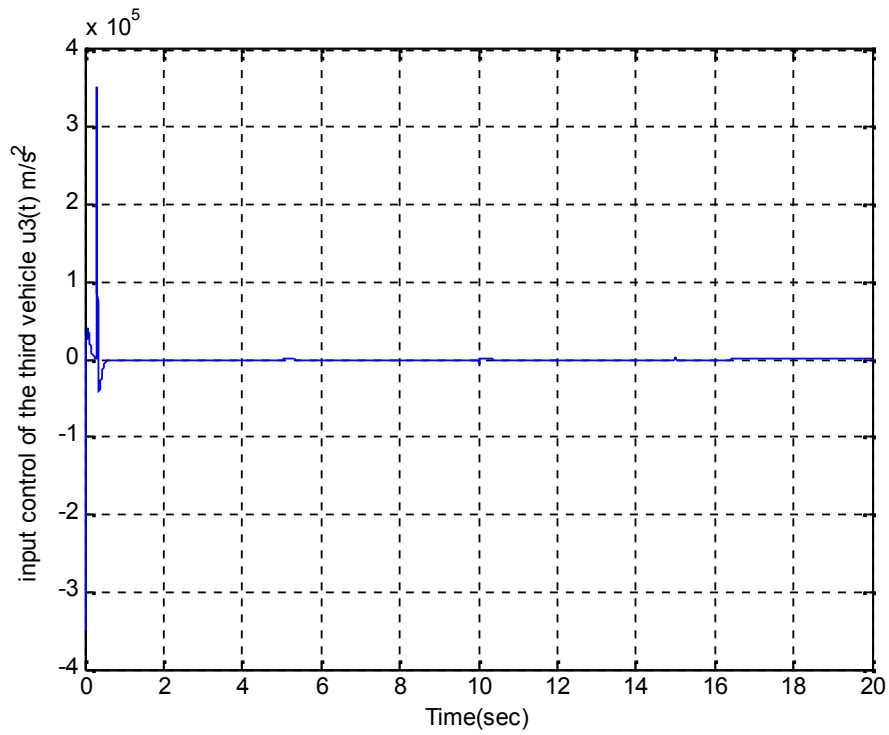


Fig.5.18 Commande du troisième véhicule.

## Commentaires

Les états estimés convergent vers les états réels. Cependant, on peut noter une erreur résiduelle qui apparait clairement sur les résultats de simulation puisque l'erreur d'observation converge vers une valeur non nulle. L'erreur résiduelle n'est pas sans effet car l'erreur statique augmente d'une manière remarquable (33.26 m au lieu de 30m pour entre le véhicule 1 et 2, et 54.99m entre le véhicule 1 et 3 au lieu de 50m). Mais la possibilité de collision est écartée même en régime transitoire, ce qui plus claire sur les figures 5.19 et 5.20 qui porte l'agrandissement des courbes 5.13 et 5.14.

Les erreurs résiduelles dues aux variations de l'amplitude du retard se retrouvent sur les commandes des véhicules 2 et 3 (voir les figure 5.17 et 5.18) et inévitablement sur leurs sorties. Il est remarquable que la distance entre le véhicule 3 et le véhicule leader atteint 60m au lieu de 50m lorsque l'amplitude du retard  $\tau_3$  passe à la valeur  $\tau_3 = 0.95s$  brusquement.

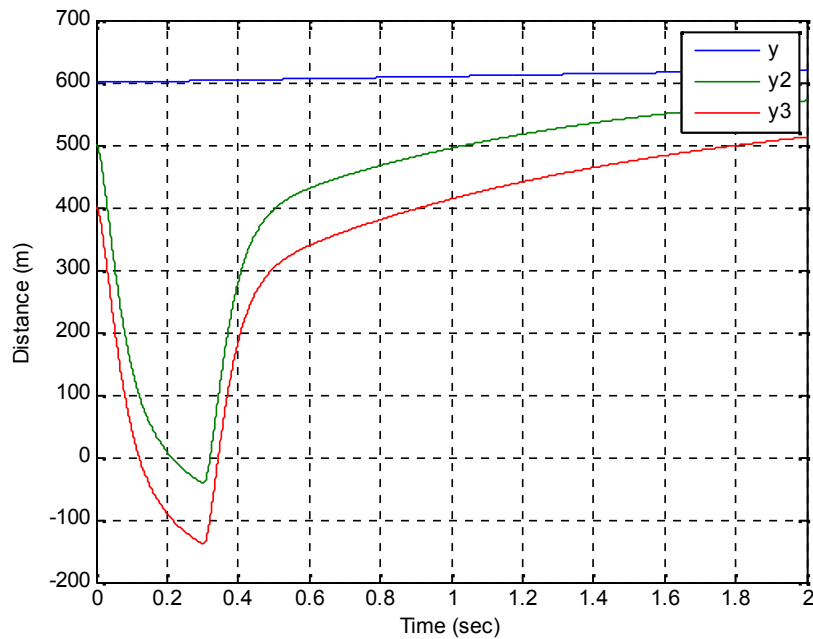


Fig.5.19. Position des trois véhicules en régime transitoire.

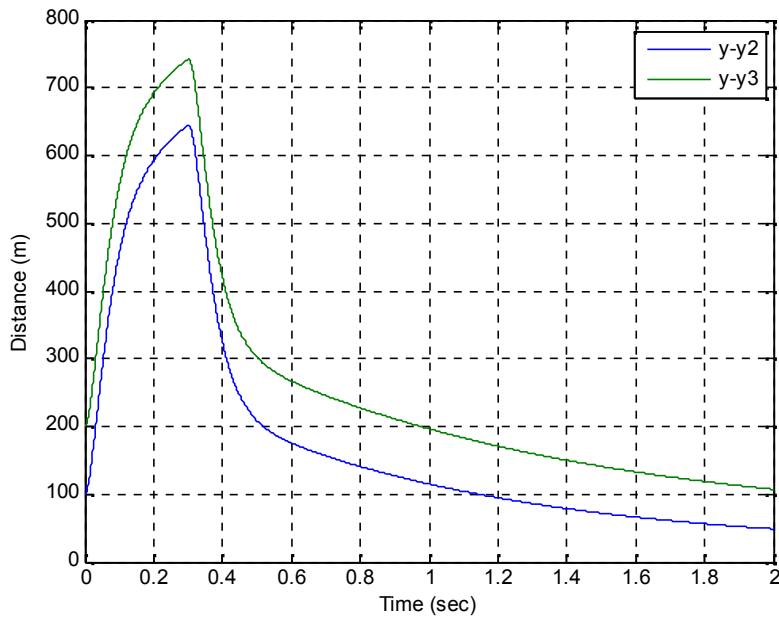


Fig 5.20 : distance entre les véhicules 2 et 3 et le véhicule maitre.

### 5.3 Application 2 : stabilisation coopérative de satellites géostationnaires

Si à l'origine, les satellites artificiels sont dédiés à des objectifs militaires et de défense des territoires, de nos jours, ils sont beaucoup plus exploités à applications civiles (météorologie, télévision, guidage routier, etc.). Le nombre de satellites artificiels est exorbitant. Comme nous l'avons souligné auparavant, l'utilisation de microsattelites pour exécuter une tâche permet l'obtention d'un résultat plus précis et plus fiable.

Nous considérons dans notre application deux microsattelites placés sur une orbite géostationnaire pour récupérer une information utile. Initialement, les deux microsattelites sont séparés par un angle de 90 degré (voir la figure.5.13). Le problème qui se pose est de synthétiser une loi de commande par observateur pour assurer que le deuxième microsattellite suit le premier tout en laissant un angle de 45 degré entre eux (voir la figure.5.14). L'observateur estime la position de premier microsattellite à partir de la mesure retardée, en effet cette information est nécessaire pour la commande de deuxième satellite.

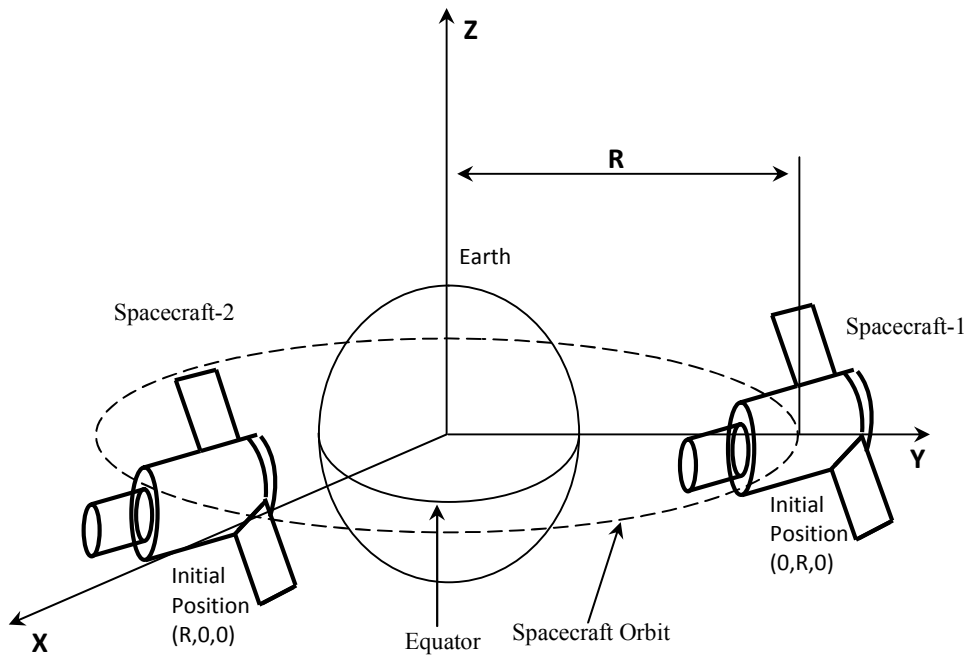


Fig.5.21. Positions initiales des deux microsattellites.

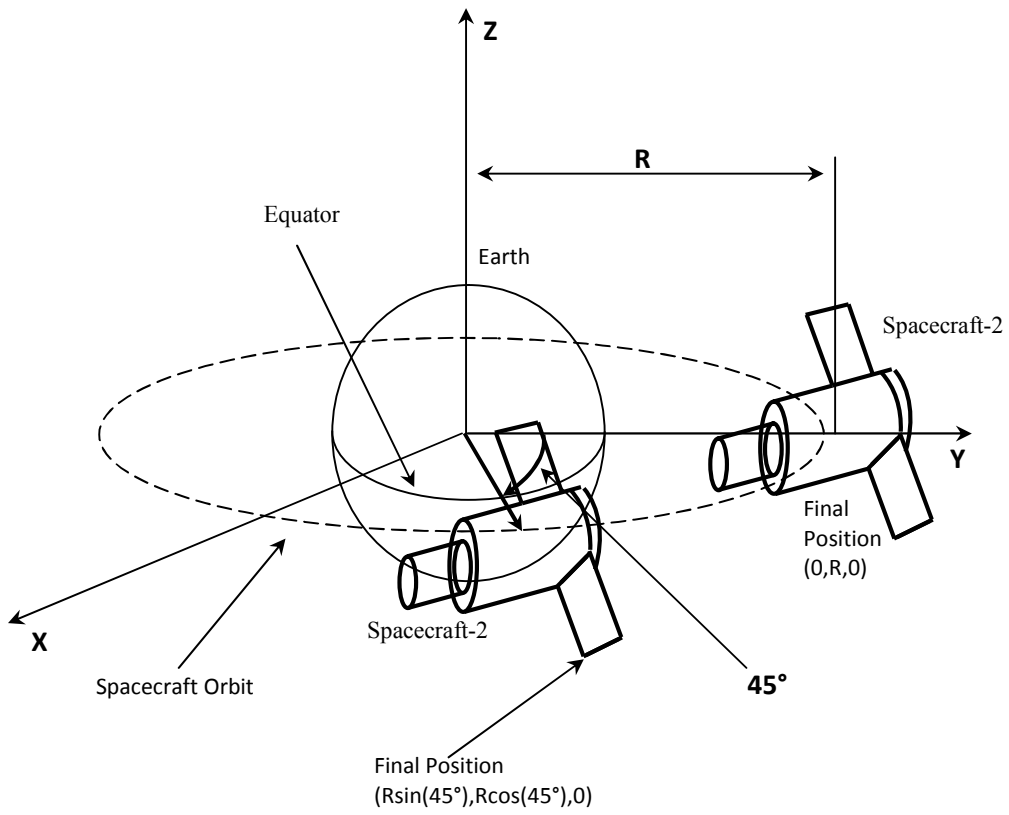


Fig.5.22. Position finale des microsattellites.

## Modélisation du système

La modélisation de mouvement de chaque microsatellite repose sur la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad (5.8)$$

Ou encore

$$\vec{F} + \vec{F}_r = m\vec{a} \quad (5.9)$$

Où :  $\vec{F}$  est la force d'attraction universelle et  $\vec{F}_r$  la force de répulsion développée par le réacteur. Il vient :

$$\frac{-GMm}{R^2} \vec{\mu}_r + F_r \vec{\mu}_r = m a \vec{\mu}_r \quad (5.10)$$

Où :

$$\frac{-GM}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} + \frac{F_r}{m} \frac{\vec{R}}{R} = \ddot{\vec{R}} \quad (5.11)$$

De la :

$$\frac{-GM}{R^3} \vec{R} + \vec{u} = \ddot{\vec{R}} \quad (5.12)$$

L'équation différentielle régissant la dynamique du satellite est donnée par :

$$\frac{-\mu}{R^3} \vec{R} + \vec{u} = \ddot{\vec{R}} \quad (5.13)$$

Avec :

$$\mu = \frac{-GM}{R^3} \quad (5.14)$$

$R = |\vec{R}|$   $\vec{R}$  est le vecteur de position.

$G$  : la constante d'attraction universelle.

$M$  : la masse de la terre.

$m$  : la masse du microsatellite.

$$\mu = 3.986 \times 10^5 .$$

Les variables d'état sont choisies comme suit :

$$x = [R_x \quad R_y \quad R_z \quad \dot{R}_x \quad \dot{R}_y \quad \dot{R}_z]^T$$

Ainsi la représentation d'état de chaque microsatellite est comme suit :

$$\dot{x}^i(t) = \begin{bmatrix} x_4^i \\ x_5^i \\ x_6^i \\ \frac{-\mu}{R_i^3} x_1^i \\ \frac{-\mu}{R_i^3} x_2^i \\ \frac{-\mu}{R_i^3} x_3^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Avec :

$$R_i = \sqrt{((x_1^i)^2 + (x_2^i)^2 + (x_3^i)^2)}, \quad i = 1, 2. \quad (5.16)$$

La sortie retardée du premier microsatellite, et reçue par le deuxième microsatellite est donnée par :

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1^1(t - \tau) \\ x_2^1(t - \tau) \\ x_3^1(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

### Synthèse d'observateur en chaîne

Le retard dans cet exemple est considéré constant  $\tau = 0.5s$ , et un observateur en cascade a été synthétisé pour estimer la position du premier microsatellite à partir de la sortie retardée, et cela dans les conditions suivantes :

- Le difféomorphisme est tel que :

$$z = \phi(x) = [x_1^1 \quad x_4^1 \quad x_2^1 \quad x_5^1 \quad x_3^1 \quad x_6^1]^T \quad (5.18)$$

- La matrice jacobéenne de  $z$  est :

$$Q(x(t)) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

- Le modèle d'état après changement de coordonnées est donné par :

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Le gain d'observation est calculé de manière à placer les pôles de la matrice

$$A_m = A_n - KC_n \text{ aux positions suivantes } P = [-6 \quad -2 \quad -0.75 \quad -0.01 \quad -5 \quad -2]^T$$

- Les conditions initiales sont données par :

$$\text{microsatellite -1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7000 \\ 0 \\ -\frac{\mu}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{microsatellite -2} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\mu}{R_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{observateur} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6900 \\ 0 \\ -\frac{\mu}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Remarque :

L'observateur exposé dans le chapitre 3 pour les systèmes SISO est facilement généralisé pour les systèmes MIMO, à savoir :

$$\phi(x) = \left[ h_1(x) \quad \dots \quad L_f^{r_1-1} h_1(x) \quad h_2(x) \quad \dots \quad L_f^{r_2-1} h_2(x) \quad \dots \quad h_q(x) \quad \dots \quad L_f^{r_q-1} h_q(x) \right]^T \quad (5.20)$$

Après changement de coordonnées les matrices d'état  $(A_n, B_n, C_n)$  sont :

$$A_n = \text{diag}_{i=1}^n A_i, B_n = \text{diag}_{i=1}^n B_i \text{ et } C_n = \text{diag}_{i=1}^n C_i \quad (5.21)$$

Avec :

$$A_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(i-1) \times 1} & I_{i-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times (i-1)} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(i-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times (i-1)} \end{bmatrix}.$$

### Détermination de la loi de commande

Pour calculer la loi de commande, le modèle d'état (5.15) est réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X}_1^i = X_2^i \\ \dot{X}_2^i = \frac{-\mu}{R_i^3} X_1^i + u_i \end{cases} \quad (5.22)$$

Avec :

$$X_1^i = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{bmatrix} : \text{le vecteur position.}$$

$$X_2^i = \begin{bmatrix} x_4^i \\ x_5^i \\ x_6^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}^i \\ \dot{y}^i \\ \dot{z}^i \end{bmatrix} : \text{le vecteur accélération.}$$

Pour calculer la commande du microsatellite 2, le modèle est mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X}_1^i = X_2^i \\ \dot{X}_2^i = \nu \end{cases} \quad (5.23)$$

L'objectif de la commande est tel que :

$$X_1^2 \rightarrow X_1^{ref}$$

Et donc :

$$e = X_1^{ref} - X_1 \rightarrow 0 \quad (5.24)$$

Ce qui veut dire que la position de microsatellite tend vers la position désirée en temps fini, et pour cela un choix judicieux et de prendre :

$$\nu = \ddot{X}_1^{ref} + 2\xi\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e \quad (5.25)$$

## Applications

---

Par remplacement dans l'équation (5.23), il vient :

$$\ddot{X}_1^2 = \ddot{X}_1^{ref} + 2\xi\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e \quad (5.26)$$

Ce qui donne l'équation régissant la dynamique de l'erreur suivante :

$$\ddot{e} + 2\xi\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e = 0 \quad (5.27)$$

Le problème qui se pose est le calcul de  $\ddot{X}_1^{ref}$ . Or la commande du premier microsatellite est nulle et  $\ddot{X}_1^{ref}$  n'est qu'une rotation de  $45^\circ$  de la position du premier microsatellite et donc :

$$\ddot{X}_1^{ref} = Rot.\ddot{X}_1^1 \quad (5.28)$$

Avec :  $Rot = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  la matrice de rotation.

Par substitution dans l'équation (5.23), il vient :

$$\ddot{X}_1^2 = Rot.\ddot{X}_1^1 + 2\xi\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e = \frac{-\mu}{R_2^3} X_1^2 + u_2 \quad (5.29)$$

Et :

$$\ddot{X}_1^1 = -\frac{\mu}{R_1^3} X_1^1 \quad (5.30)$$

Après développement, la commande du deuxième satellite est donnée par :

$$u_2 = Rot.\left(-\frac{\mu}{R_1^3} X_1^1\right) + 2\xi\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e + \frac{\mu}{R_2^3} X_1^2 \quad (5.31)$$

## Résultats de simulation :

Les résultats de simulation sont illustrés sur les figures 5.23, 5.24 et 5.25. Les figures 5.15 et 5.16 montrent les trajectoires de deux satellites dans l'espace  $R^3$ . Sur la figure 5.18, les erreurs d'estimation dans les trois dimensions.

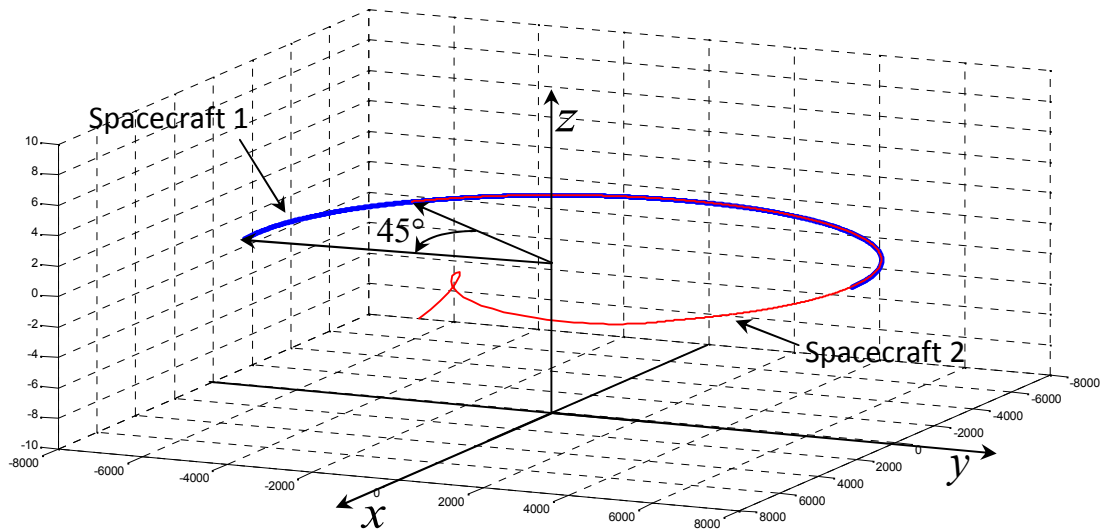


Fig.5.23. Position des deux microsattellites.

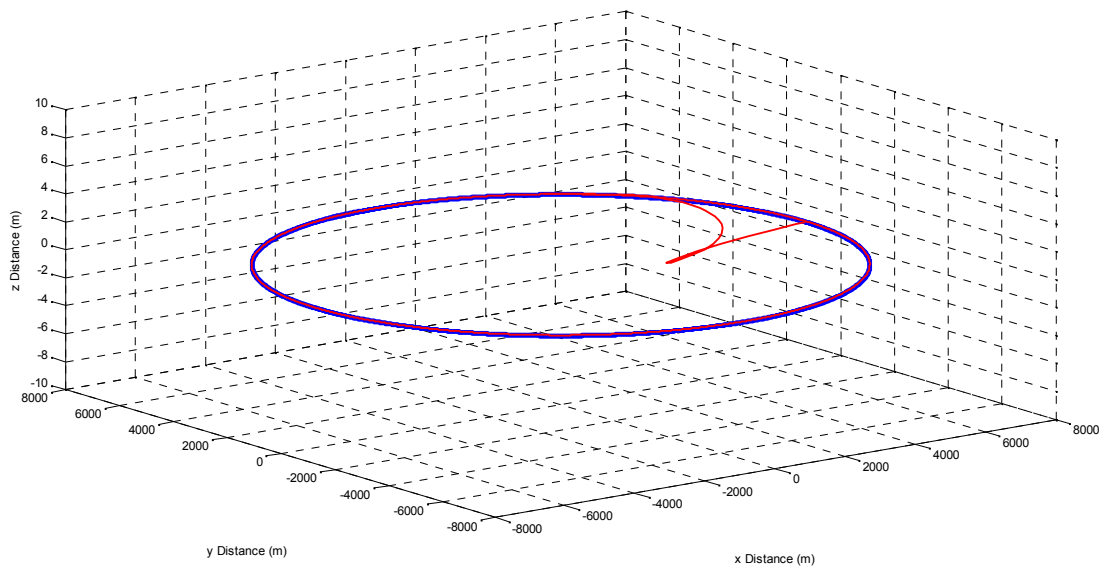


Fig.5.24. Trajectoires des deux microsattellites sur l'orbite.

# Applications

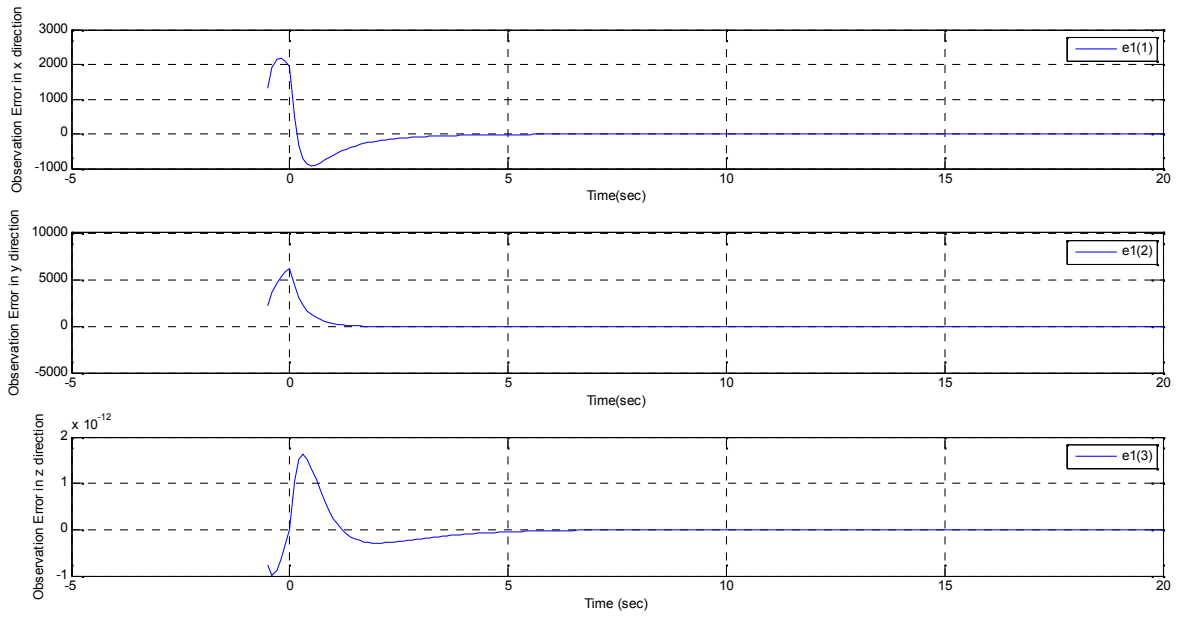


Fig. 5. 25. Erreurs d'observation dans les trois directions.

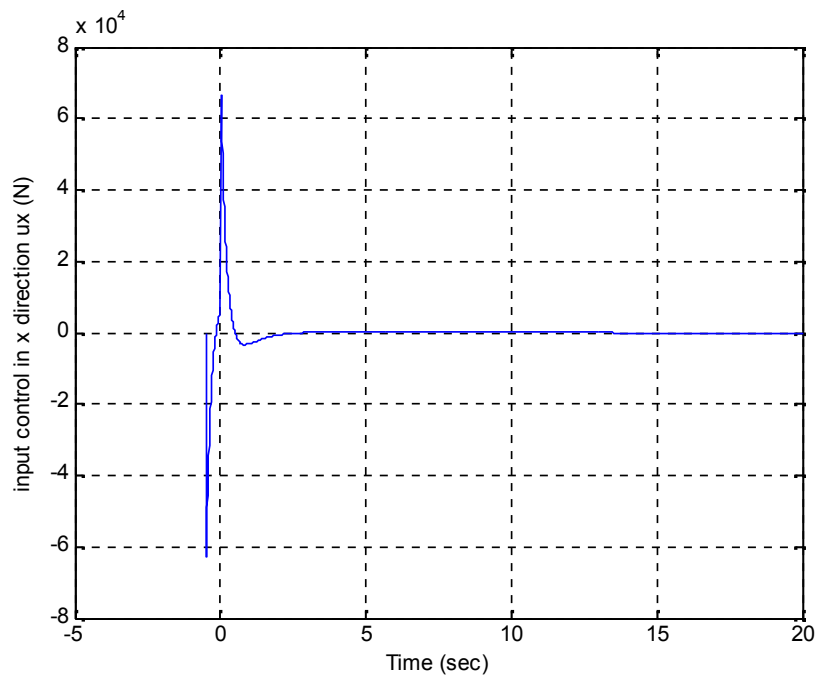


Fig.5.26. commande du deuxième satellite appliquée dans la direction x.

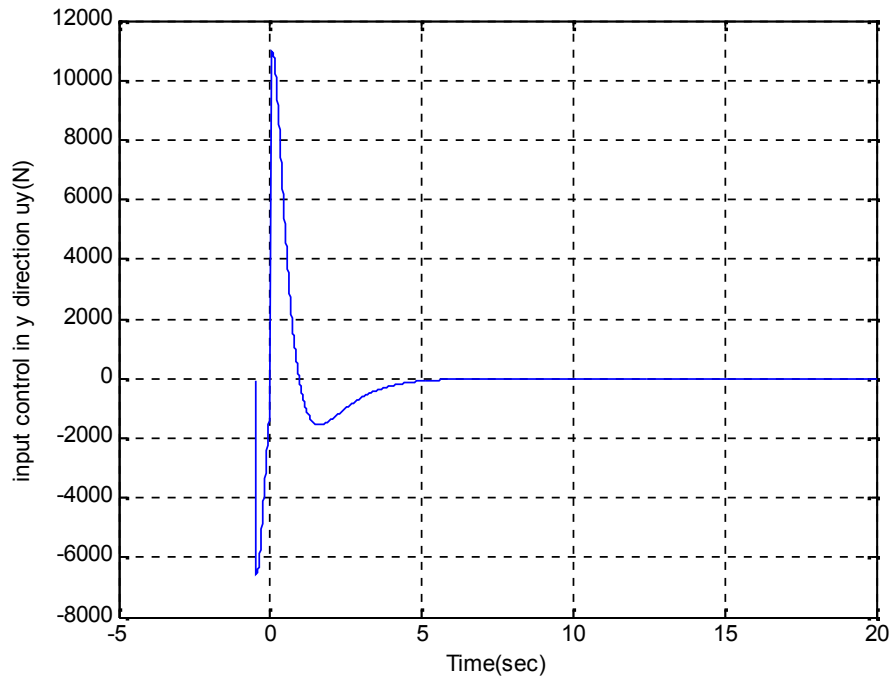


Fig.5.27. commande du deuxième satellite appliquée dans la direction y.

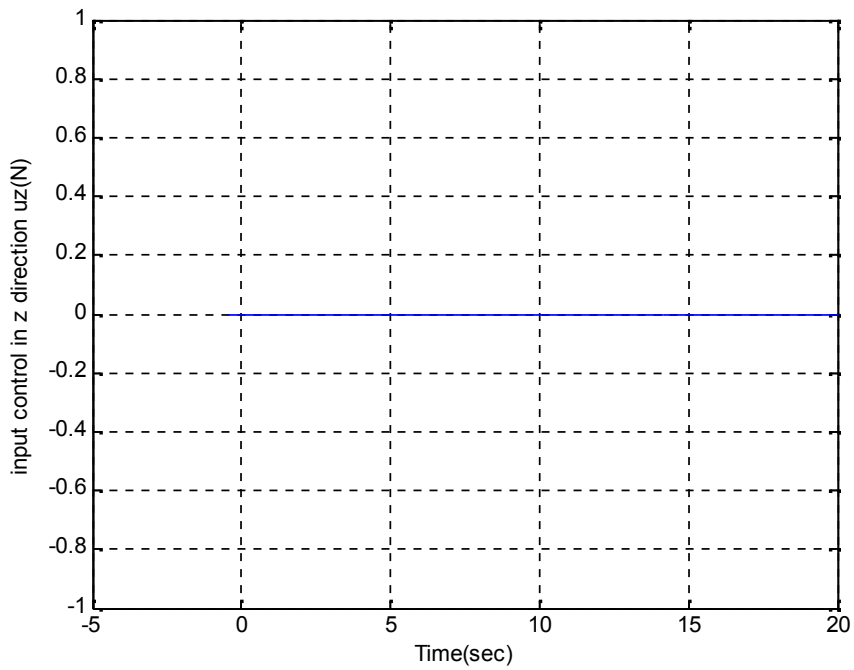


Fig.5.28. commande du deuxième satellite appliquée dans la direction z.

Remarques Commentaires :

L'objectif de la commande a été atteint. L'observateur en cascade permet d'estimer les variables d'état nécessaires pour la commande d'une manière efficace. Les erreurs d'estimation en régime établi sont quasiment nulles. Dans le cas des systèmes non linéaires, le principe de séparation n'est pas vérifié. En contre partie, le difféomorphisme a permis d'imposer une dynamique linéaire à l'observateur et nous remarquons que le choix des pôles pour avoir une dynamique de convergence rapide a permis de satisfaire les objectifs de commande.

## **5.4 Conclusion :**

L'utilisation de nombreux agents pour effectuer une même tâche est une solution intéressante dans l'industrie (unités de production manufacturières), dans l'aérospatial, ou autre. Dans cette stratégie qui est de plus en plus utilisée, les problèmes liés aux retards dus aux délais de communication d'information entre différents agents se posent de manière cruciale. La commande coopérative doit tenir compte de ces retards. Afin d'illustrer les méthodes de conception d'observateurs dans les cas linéaire et non linéaire, présentées dans les chapitre précédents, nous avons considérés deux applications. Les résultats de simulation obtenus ont montré l'efficacité des méthodes étudiées.

# **Conclusion générale**

## Conclusion générale

Notre travail a porté sur la synthèse d'observateurs lorsque les sorties de mesure sont soumises à des retards dus aux délais de transmission. Ce cas de figure se pose dans beaucoup d'applications comme par exemple, dans la commande par télé opération ou encore dans les schémas de commande coopérative avec plusieurs agents jouant le rôle de contrôleurs, etc.

Dans une première étape, nous avons mené une étude théorique et bibliographique sur l'observabilité et la synthèse d'observateurs linéaires et non linéaires puis sur les systèmes à retard. Cette étude, rapportée dans les chapitre un et deux, nous a permis d'approfondir nos connaissances en automatique, d'aborder des thématiques récentes comme l'observabilité des systèmes non linéaires, la synthèse d'observateurs non linéaires par les différentes techniques (modes glissants, backstepping, grand gain, filtre de Kalman étendu, ...) et la stabilité et la stabilisation des systèmes à retard.

Le problème de synthèse d'observateurs lorsque les mesures sont soumises aux retards est toujours d'actualité en témoignent les publications apparues récemment. De plus, c'est un problème ouvert. En effet, les quelques solutions apportées sont restreintes à des conditions pas toujours satisfaites dans des cas réels. Nous avons, pour notre part, étudié et mis en œuvre la solution basée sur les observateurs en cascade. Nous avons considéré le cas du retard constant (chapitre trois) et le cas du retard variable (chapitre quatre) aussi bien pour les systèmes linéaires et non linéaires. Les solutions de construction d'observateurs en cascade traitées dans notre travail ont été implémentées sous Matlab et illustrées par des simulations effectuées sur des exemples académiques. Afin de montrer l'intérêt pratique de notre étude, nous avons présenté dans le dernier chapitre deux applications, la première sur la conduite coopérative de véhicules terrestres et la seconde sur la stabilisation coopérative de micro satellites. Les résultats de simulation obtenus nous ont permis, d'une part, d'illustrer l'efficacité des approches étudiées, et d'autre part, de soulever des difficultés et les limites des approches proposées.

Nous avons remarqué que si l'observateur cascade donne de bons résultats dans le cas linéaire, par contre, ceux obtenus dans le cas non linéaire restent mitigés. De même, dans les deux cas linéaire et non linéaire, la robustesse de convergence de l'observateur vis à vis des incertitudes sur la valeur du retard n'est pas satisfaisante du moins sur les exemples que nous avons traités. D'autre part, si le retard est variable par paliers, les erreurs de cumul peuvent faire diverger l'observateur.

Afin de remédier à certains de ces problèmes, il nous est apparu, au cours de notre travail, de développer, comme perspectives, les points suivants :

- Utiliser les observateurs à modes glissants (simples, d'ordre supérieur ou bien étape par étape) afin d'améliorer la robustesse.

- Traiter le problème de retard inconnu en insérant éventuellement un estimateur du retard.
- Développer des observateurs impulsifs permettant de remettre à zéro les erreurs de cumul afin d'éviter la divergence dans le cas du retard variable.
- Investiguer la commande et l'observation coopérative de type multi-agents qui nous est apparue, tout au long de notre étude, comme une thématique d'avenir en automatique.

# **Annexe A**

**Lemme 1 :**

Soit l'observateur en chaîne donné sous sa représentation d'état comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_0(t) = f(\hat{x}_0(t)) + g(\hat{x}_0(t))u_0(t) \\ \quad + Q^{-1}(\hat{x}_0(t))K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) \\ \dot{\hat{x}}_j(t) = f(\hat{x}_j(t)) + g(\hat{x}_j(t))u_j(t) + Q^{-1}(\hat{x}_j(t)) \\ \quad \cdot \left\{ e^{A_n \frac{\tau}{m} j} K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) + \sum_{i=0}^{j-1} e^{A_n \frac{\tau}{m} (j-i)} (H(\hat{x}_i(t), u_i(t)) - H(\hat{x}_{i+1}(t - \frac{\tau}{m}), u_i(t))) \right\} \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

$j = 1, \dots, m,$   
 $t \geq 0$

Considérons le changement de coordonnées  $\hat{z}_j(t) = \phi(\hat{x}_j(t))$ , la représentation (A.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_0(t) = A_n \hat{z}_0(t) + \tilde{H}(\hat{z}_0(t), u_0(t)) + K(\bar{y}(t) - C_n \hat{z}_0(t)), t \geq 0. \\ \hat{z}_1(t) = e^{A_n \frac{\tau}{m}} \hat{z}_{j-1}(t) \\ \quad + \int_{t - \frac{\tau}{m}}^t e^{A_n(t-s)} \tilde{H}(\hat{z}_j(s), u_j(s)) d\tau, j = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \hat{z}_0(0) &= \phi(\hat{x}(-\tau)). \\ \hat{z}_j(\theta) &= \phi(\hat{x}(\theta - \tau + \frac{j}{m} \tau)), \theta \in \left[ \frac{-\tau}{m} \quad 0 \right] \end{aligned}$$

La démonstration de ce Lemme peut se faire par simple différentiation des deux équations.

**Preuve :**

Nous avons :

$$\hat{z}_0(t) = \phi(\hat{x}_0(t)) \quad (\text{A.3})$$

La dérivée par rapport au temps renvoie :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_0(t) &= \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_0(t)} \dot{\hat{x}}_0(t) \\
&= Q(\hat{x}_0(t))(f(\hat{x}_0(t)) + g(\hat{x}_0(t))u(t - \tau) \\
&\quad + Q^{-1}(\hat{x}_0(t))K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t)))) \\
&= A_n \phi(\hat{x}_0(t)) + B_n L_f^n h(\hat{x}_0(t)) \\
&\quad + Q(\hat{x}_0(t))g(\hat{x}_0(t))u(t - \tau) + K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) \\
&= A_n \hat{z}_0(t) + \tilde{H}(\hat{z}_0(t), u(t - \tau)) + K(\bar{y}(t) - C_n \hat{x}_0(t))
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Ainsi la première équation est démontrée. Et le même principe est utilisé pour démontrer la deuxième :

$$\hat{z}_j(t) = \phi(\hat{x}_j(t)) \tag{A.5}$$

D'une part, La dérivée de l'équation (A.5) donne :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_j(t) &= A_n \hat{z}_j(t) + \tilde{H}(\hat{z}_j(t), u(t)) + e^{A_n \frac{\tau}{m} j} K(\bar{y}(t) - C_n \hat{z}_0(t)) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{j-1} e^{A_n \frac{\tau}{m} (i-j)} (\tilde{H}(\hat{z}_i(t), u_i(t)) - \tilde{H}(\hat{z}_{i+1}(t - \frac{\tau}{m}), u_i(t)))
\end{aligned} \tag{4.6}$$

et d'autre part, la dérivée de la deuxième équation de la représentation (A.3), renvoie :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_j(t) &= e^{A_n \frac{\tau}{m}} \dot{\hat{z}}_{j-1}(t) \\
&\quad + A_n \int_{t - \frac{\tau}{m}}^t e^{A_n(t-s)} \tilde{H}(\hat{z}_j(s), u_j(s)) ds + \tilde{H}(\hat{z}_j(t), u_j(t)) \\
&\quad - e^{A_n \frac{\tau}{m}} \tilde{H}(\hat{z}_j(t - \frac{\tau}{m}), u_j(t - \frac{\tau}{m}))
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Le remplacement du terme intégral par  $\hat{z}_j(t) - e^{A_n \frac{\tau}{m}} \hat{z}_{j-1}(t)$ , donne :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_j(t) &= A_n \hat{z}_j(t) + \tilde{H}(\hat{z}_j(t), u_j(t)) \\
&\quad + e^{A_n \frac{\tau}{m}} (\dot{\hat{z}}_{j-1}(t) - A_n \hat{z}_{j-1}(t)) \\
&\quad - e^{A_n \frac{\tau}{m}} \tilde{H}(\hat{z}_j(t - \frac{\tau}{m}), u_j(t - \frac{\tau}{m}))
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Par addition et soustraction du terme  $e^{A_n \frac{\tau}{m}} \tilde{H}(\hat{z}_{j-1}(t), u_{j-1}(t))$  à l'équation (A.8), il vient :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_j(t) &= A_n \hat{z}_j(t) + \tilde{H}(\hat{z}_j(t), u_j(t)) \\
&+ e^{A_n \frac{\tau}{m}} (\dot{\hat{z}}_{j-1}(t) - A_n \hat{z}_{j-1}(t) - \tilde{H}(\hat{z}_{j-1}(t), u_{j-1}(t))) \\
&+ e^{A_n \frac{\tau}{m}} (\tilde{H}(\hat{z}_{j-1}(t), u_{j-1}(t)) - \tilde{H}(\hat{z}_j(t - \frac{\tau}{m}), u_j(t - \frac{\tau}{m})))
\end{aligned} \tag{A.10}$$

La nouvelle fonction  $s_j(t)$  est définie pour  $j = 1, \dots, m$  comme suit :

$$s_j(t) = \dot{\hat{z}}_j(t) - A_n \hat{z}_j(t) - \tilde{H}(\hat{z}_j(t), u_j(t)) \tag{A.11}$$

Ce qui peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
s_j(t) &= e^{A_n \frac{\tau}{m}} s_{j-1}(t) + e^{A_n \frac{\tau}{m}} (\tilde{H}(\hat{z}_{j-1}(t), u_{j-1}(t)) \\
&- \tilde{H}(\hat{z}_j(t - \frac{\tau}{m}), u_j(t - \frac{\tau}{m})))
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Pour la première équation de (A.2),  $s_j(t)$  devient :

$$s_0(t) = K(\bar{y}(t) - C_n \hat{z}_0(t)) \tag{A.13}$$

En utilisant l'équation standard des systèmes discrets, il vient :

$$\begin{aligned}
s_j(t) &= e^{A_n \frac{\tau}{m} j} s_0(t) \\
&+ \sum_{i=0}^{j-1} e^{A_n \frac{\tau}{m} (j-i-1)} e^{A_n \frac{\tau}{m} i} (\tilde{H}(\hat{z}_i(t), u_i(t)) \\
&- \tilde{H}(\hat{z}_{i+1}(t - \frac{\tau}{m}), u_{i+1}(t - \frac{\tau}{m})))
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Par substitution des expressions de  $s_j(t)$  et de  $s_0(t)$  dans (A.14), il vient :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_j(t) &= A_n \hat{z}_j(t) + \tilde{H}(\hat{z}_j(t), u_j(t)) + e^{A_n \frac{\tau}{m} j} K(\bar{y}(t) \\
&- C_n \hat{z}_0(t)) + \sum_{i=0}^{j-1} e^{A_n \frac{\tau}{m} (j-i)} (\tilde{H}(\hat{z}_i(t), u_i(t)) \\
&- \tilde{H}(\hat{z}_{i+1}(t - \frac{\tau}{m}), u_{i+1}(t - \frac{\tau}{m})))
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Rappelons que  $u_i(t) = u(t - \frac{\tau}{m})$ , les équations (A.6) et (A.15) sont égales. Ainsi le lemme 1 est prouvé.

# **Annexe B**

## Démonstration de la stabilité de l'observateur cascade

### B.1 Cas Linéaire :

Soit le système linéaire temps invariant à une entrée et une sortie, donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t), t \geq -\tau \\ \bar{y}(t) = C\hat{x}(t - \tau), t \geq 0 \\ \hat{x}(-\tau) = \bar{x} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

L'observateur en chaine qui permet la reconstruction ses variables d'état est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_0(t) = A\hat{x}_0(t) + Bu(t - \tau) + K(\bar{y}(t) - C\hat{x}_0(t)) \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + Bu(t) + e^{A\tau} K(\bar{y}(t) - C\hat{x}_0(t)) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

➤ Analyse de la stabilité :

Les erreurs d'estimation sont définies telle que :

$$e_0(t) = x(t - \tau) - \hat{x}_0(t) \quad (\text{B.3})$$

$$e_1(t) = x(t) - \hat{x}_1(t) \quad (\text{B.4})$$

La dérivée de l'erreur d'observation  $e_0(t)$  est donnée comme suit :

$$\dot{e}_0(t) = \dot{x}(t - \tau) - \dot{\hat{x}}_0(t) \quad (\text{B.5})$$

Ce qui revient à soustraire le premier terme de (B.2) du premier terme de (B.1) et c'est ce qui donne :

$$\dot{e}_0(t) = (A - KC)e_0(t) \quad (\text{B.6})$$

L'intégration de cette dernière équation renvoie :

$$e_0(t) = e^{(A-KC)t} e_0(0) \quad (\text{B.7})$$

La convergence exponentielle est prouvée pour l'observateur retardé (convergence de l'estimé de l'état retardé). D'un autre coté l'équation suivante est considérée pour  $\hat{x}_1(t)$  [17]:

$$\hat{x}_1(t) = e^{A\tau} \hat{x}_0(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds \quad (\text{B.8})$$

La dérivée de cette équation et après tout calcul fait renvoie :

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = e^{A\tau} \dot{\hat{x}}_0(t) + Bu(t) - e^{A\tau} Bu(t-\tau) + A \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds \quad (\text{B.9})$$

Le terme intégral peut être remplacé par le terme  $\hat{x}_1(t) - e^{A\tau} \hat{x}_0(t)$  tiré de l'équation (B.8)

Ce qui donne :

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + Bu(t) + e^{A\tau} (\dot{\hat{x}}_0(t) - A\hat{x}_0(t) - Bu(t-\tau)) \quad (\text{B.10})$$

Or  $\dot{\hat{x}}_0(t) - A\hat{x}_0(t) - Bu(t-\tau) = K(\bar{y}(t) - C\hat{x}_0(t))$  donc l'équation (B.8) est bien la solution du premier terme de (B.2).

De manière similaire, l'intégration de l'équation d'état renvoie :

$$x(t) = e^{A\tau} x(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds \quad (\text{B.11})$$

Par soustraction de l'équation (B.8) de (B.11), l'erreur d'estimation  $e_1(t)$  est :

$$e_1(t) = x(t) - \hat{x}_1(t) = e^{A\tau} e_0(t) \quad (\text{B.12})$$

Des équations (B.7) et (B.12) la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est garantie pour quelque soit le retard  $\tau$ .

## B.2 Cas non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), t \geq -\tau, x(-\tau) = \bar{x}, \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{y}(t) = h(x(t-\tau)), t \geq 0 \quad (\text{B.14})$$

L'observateur est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_0(t) = f(\hat{x}_0(t)) + g(\hat{x}_0(t))u_0(t) \\ \quad + Q^{-1}(\hat{x}_0(t))K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) \\ \dot{\hat{x}}_j(t) = f(\hat{x}_j(t)) + g(\hat{x}_j(t))u_j(t) + Q^{-1}(\hat{x}_j(t)) \\ \quad \cdot \left\{ e^{\frac{A_n \tau}{m} j} K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) + \sum_{i=0}^{j-1} e^{\frac{A_n \tau}{m} (j-i)} (H(\hat{x}_i(t), u_i(t)) - H(\hat{x}_{i+1}(t - \frac{\tau}{m}), u_i(t))) \right\} \end{array} \right. \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{array}{l} j = 1, \dots, m, \\ t \geq 0 \end{array}$$

Après le changement de coordonnées  $\hat{z}_j = \phi(\hat{x}_j)$ , pour  $j = 1, \dots, m$ . L'observateur (B.15) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_0(t) = A_n \hat{z}_0(t) + \tilde{H}(\hat{z}_0(t), u_0(t)) + K(\bar{y}(t) - C_n \hat{z}_0(t)), t \geq 0. \\ \hat{z}_1(t) = e^{\frac{A_n \tau}{m}} \hat{z}_{j-1}(t) \\ \quad + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{A_n(t-s)} \tilde{H}(\hat{z}_j(s), u_j(s)) ds, j = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (\text{B.16})$$

Avec :

$$\hat{z}_0(0) = \phi(\hat{x}(-\tau)).$$

$$\hat{z}_j(\theta) = \phi(\hat{x}(\theta - \tau + \frac{j}{m} \tau)), \theta \in \left[ \frac{-\tau}{m} \quad 0 \right]$$

➤ Analyse de la stabilité :

- Stabilité de l'observateur zéro  $\hat{z}_0(t)$  [13]:

L'erreur d'observation est donnée par :

$$e_{z,0}(t) = z(t-\tau) - \hat{z}(t-\tau) \quad (\text{B.17})$$

La dérivée par rapport au temps de cette dernière équation est donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{z,0}(t) &= \dot{z}(t-\tau) - \dot{\hat{z}}_0(t) \\ &= A_n z(t-\tau) + \tilde{H}(z(t-\tau), u(t-\tau)) \\ &\quad - (A_n \hat{z}(t-\tau) + \tilde{H}(\hat{z}_0(t), u(t-\tau)) + KC_n(z(t-\tau) - \hat{z}_0(t-\tau))). \\ &= A_n e_{z,0}(t) + \tilde{H}(z(t-\tau), u(t-\tau)) - \tilde{H}(\hat{z}(t-\tau), u(t-\tau)) - KC_n e_{z,0}(t) \\ &= A_m e_{z,0}(t) + e_{\tilde{H}(z_0, \hat{z}_0, u_0)}(t) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Et donc :

$$\dot{e}_{z,0}(t) = A_m e_{z,0}(t) + e_{\tilde{H}(z_0, \hat{z}_0, u_0)}(t) \quad (\text{B.19})$$

Où :

$$\begin{aligned} A_m &= A_n - KC_n \\ e_{\tilde{H}(z_0, \hat{z}_0, u_0)}(t) &= \tilde{H}(z(t-\tau), u(t-\tau)) - \tilde{H}(\hat{z}(t-\tau), u(t-\tau)). \\ z_0 &= z(t-\tau), \hat{z}_0 = \hat{z}(t-\tau), u_0 = u(t-\tau) \end{aligned}$$

Pour démontrer la stabilité exponentielle, la fonction de Lyapunov est considérée telle que :

$$V_{e_{z,0}}(t) = \frac{1}{2} e_{z,0}^T(t) P e_{z,0}(t) \quad (\text{B.20})$$

Où :  $P$  est une matrice symétrique positive définie, solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$A_m^T P + P A_m = -Q \quad (\text{B.21})$$

Pendant que la matrice  $Q = Q^T > 0$ .

La dérivée par rapport au temps l'équation de Lyapunov (B.21) donne :

$$\begin{aligned}\dot{V}_{e_{z,0}}(t) &= \frac{1}{2} \dot{e}_{z,0}^T(t) P e_{z,0} + \frac{1}{2} e_{z,0}^T(t) P \dot{e}_{z,0}(t) \\ &= \frac{1}{2} (e_{z,0}^T(t) A_m^T + e_{\tilde{H}(z_0, \hat{z}_0, u_0)}^T(t)) P e_{z,0}(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} e_{z,0}^T(t) P (A_m e_{z,0}(t) + e_{\tilde{H}(z_0, \hat{z}_0, u_0)}(t))\end{aligned}$$

Après simplification :

$$\dot{V}_{e_{z,0}}(t) = \frac{-1}{2} e_{z,0}^T(t) Q e_{z,0}(t) + e_{z,0}^T(t) P e_{\tilde{H}(z_0, \hat{z}_0, u_0)}(t) \quad (\text{B.22})$$

Et en découle :

$$\begin{aligned}\|\dot{V}_{e_{z,0}}(t)\| &\leq \frac{-1}{2} \|e_{z,0}^T(t) Q e_{z,0}(t)\| + \|e_{z,0}^T\| \cdot \|P\| \gamma_{\tilde{H}}(|u|) \|z(t-\tau) - \hat{z}(t-\tau)\| \\ \|\dot{V}_{e_{z,0}}(t)\| &\leq -\left(\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) - \lambda_{\max}(P) \gamma_{\tilde{H}}(|u|)\right) \|e_{z,0}(t)\|^2\end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Si  $\left(\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) - \lambda_{\max}(P) \gamma_{\tilde{H}}(|u|)\right) > 0$  est vérifié l'observateur zéro est exponentiellement stable, à savoir :

$$\|e_{z,0}(t)\| = \mu_0 \|e_{z,0}(0)\| e^{-\alpha_0 t} \quad (\text{B.24})$$

La stabilité de l'observateur zéro ne suffit pas, car il faut que tout les observateurs  $\hat{x}_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . constituant l'observateur en chaine doivent être stables, y compris l'observateur  $\hat{x}_m(t)$  qui estime l'état  $x(t)$ .

➤ Analyse de la stabilité des observateurs  $\hat{x}_j(t)$  [15]:

La stabilité de la chaîne d'observateurs établie dans [15] est formulée par le théorème suivant:

**Théorème 1[15]:**

Soit le système (B.13)-(B.14), tel que les hypothèses  $H_1, H_2$  sont satisfaites. Et soit un réel positif  $\tilde{u}_M$  choisi et  $m$  un entier. La constante de Lipchitz de  $\tilde{H}_z(z, u)$  et l'amplitude du retard  $\tau$  sont tel que :

$$\gamma_{\tilde{H}(\tilde{u}_M)} \left\| \left\| e^{A_n \frac{\tau}{m}} \right\| \frac{\tau}{m} \right\| < 1. \quad (\text{B.25})$$

Il existe  $\alpha, u_M > 0$ ,  $u_M \leq \tilde{u}_M$  et un gain d'observation  $K$  pour l'observateur (B.15) si  $|u(t)| \leq u_M$  pour  $t \geq -\tau$  :

$$\|x(t) - \hat{x}_m(t)\| \leq \nu e^{-\alpha t} \quad (\text{B.26})$$

$\nu$  dépend de l'erreur d'estimation sur l'intervalle  $[-\tau \ 0]$  comme suit :

$$\nu = \nu_1 \|x(-\tau) - \hat{x}(-\tau)\| + \nu_2 \int_{-\tau}^0 \|x(s) - \hat{x}(s)\| ds \quad (\text{B.27})$$

Où :  $\nu_2, \nu_1 > 0$  des constantes adéquates.

Si en plus  $H_3$  est vérifiée, la borne  $u_M$  de  $|u(t)|$  peut être égale à  $\tilde{u}_M$  donnée dans l'équation (B.25).

Pour démontrer ce résultat, le lemme suivant a été donné et démontré dans [15].

**Lemme 1 [15] :**

Soit une fonction  $s(t) \geq 0, t \in [-\tau, +\infty[$ , avec  $\tau > 0$ , tel que :

$$\int_{-\tau}^0 s(\theta) d\theta < +\infty, \quad s(t) \leq \mu e^{-\bar{\alpha}t} + \gamma \int_{t-\tau}^t s(\theta) d\theta, \quad t \geq 0. \quad (\text{B.28})$$

Où :  $\bar{\alpha}, \gamma, \mu$  sont des réels positifs.

Si  $\gamma\tau < 1$ , il existe un réel positif  $\alpha \leq \bar{\alpha}$  tel que :

$$s(t) \leq \bar{\mu} e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (\text{B.29})$$

Où :

$$\bar{\mu} = \frac{e^{\alpha\tau}}{1-c} (\mu + \gamma \int_{-\tau}^0 s(\theta) d\theta), \quad c = \frac{\gamma}{\alpha} (e^{\alpha\tau} - 1) < 1. \quad (\text{B.30})$$

**Preuve du théorème 1 [15] :**

A partir du lemme 1 :

$$\hat{z}_j(t) = e^{A_n \frac{\tau}{m}} \hat{z}_{j-1}(t) + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{A_n(t-s)} \tilde{H}(\hat{z}_j(s), u_j(s)) ds \quad (\text{B.31})$$

D'une manière similaire :

$$z_j(t) = e^{A_n \frac{\tau}{m}} z_{j-1}(t) + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{A_n(t-s)} \tilde{H}(z_j(s), u_j(s)) ds \quad (\text{B.32})$$

L'erreur d'observation est donnée par :

$$e_{z,j}(t) = z_j(t) - \hat{z}_j(t) \quad (\text{B.33})$$

La soustraction (B.31)-(B.32) donne :

$$e_{z,j}(t) = e^{A_n \frac{\tau}{m}} e_{z,j-1}(t) + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{A_n(t-s)} (\tilde{H}(z_j(s), u_j(s)) - \tilde{H}(\hat{z}_j(s), u_j(s))) ds \quad (\text{B.34})$$

Sachant que la non linéarité est Lipchitzienne, il vient :

$$\begin{aligned} \|e_{z,j}(t)\| &\leq \left\| e^{A_n \frac{\tau}{m}} \right\| \|e_{z,j-1}(t)\| \\ &\quad + \gamma_{\tilde{H}}(u_M) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|e^{A_n(t-s)}\| \|e_{z,j}(s)\| ds \\ &\leq \left\| e^{A_n \frac{\tau}{m}} \right\| \|e_{z,j-1}(t)\| \\ &\quad + \gamma_{\tilde{H}}(u_M) \left\| e^{A_n \frac{\tau}{m}} \right\| \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|e_{z,j}(s)\| ds \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Les inégalités suivantes sont supposées vérifiées :

$$\begin{cases} \exists \tilde{\mu}_{j-1} > 0 : \|e_{z,j-1}(t)\| \leq \tilde{\mu}_{j-1} e^{-\alpha t} \\ \Rightarrow \exists \tilde{\mu}_j \geq 0 : \|e_{z,j}(t)\| \leq \tilde{\mu}_j e^{-\alpha t} \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

A partir de l'inéquation (B.35) et de la première inéquation de (B.36), et après simplification, on obtient:

$$\|e_{z,j}(t)\| \leq \left\| e^{A_n \frac{\tau}{m}} \right\| \cdot \tilde{\mu}_{j-1} e^{-\alpha t} + \gamma_{\tilde{H}}(u_M) \left\| e^{A_n \frac{\tau}{m}} \right\| \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|e_{z,j}(s)\| ds \quad (\text{B.37})$$

Le second terme de (B.36) est vérifié par le lemme 2, avec :

$$\tilde{\mu}_j = \frac{e^{\alpha \frac{\tau}{m}}}{1-c} \left\| e^{A_n \frac{\tau}{m}} \right\| + \left( \tilde{\mu}_{j-1} + \gamma_{\tilde{H}}(u_M) \times \int_{t-\frac{\tau}{m}}^0 \|e_{z,j}(s)\| ds \right)$$

$$c = \gamma_{\tilde{H}}(\tilde{u}_M) \left\| e^{A_n \frac{\tau}{m}} \left\| \frac{e^{\frac{\alpha \tau}{m}} - 1}{\alpha} \right\| \right\| < 1.$$

Le résultat (B.24) peut être réécrit sous la forme :

$$\|e_{z,0}(t)\| = \tilde{\mu}_0 e^{-\alpha t}$$

Et aussi, à partir de (B.36) :

$$\|e_{z,m}(t)\| = \tilde{\mu}_m e^{-\alpha t} \tag{B.38}$$

Avec :

$$\tilde{\mu}_m = \lambda^m \mu_0 \|e_{z,0}(0)\| + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^{m-j} \left( \gamma_{\tilde{H}}(u_M) \times \int_{\frac{-\tau}{m}}^0 \|e_{z,j}(s)\| ds \right)$$

$$\lambda = \frac{e^{\frac{\alpha \tau}{m}}}{1-c} \left\| e^{A_n \frac{\tau}{m}} \right\| > 1$$

Ainsi la stabilité exponentielle est prouvée dans les nouvelles coordonnées, et sachant que le difféomorphisme est lipchitzien, il vient :

$$\|x(t) - \hat{x}_m(t)\| \leq \tilde{\nu} e^{-\alpha t} \tag{B.39}$$

Avec :

$$\tilde{\nu} = \gamma_{\phi} \gamma_{\phi^{-1}} (\lambda^m \mu_0 \|x(-\tau) - \hat{x}(0)\| + \gamma_{\tilde{H}}(u_M) \sum_{j=1}^m \lambda^{m-j} \int_{\frac{-\tau}{m}}^0 \|x_j(s) - \hat{x}_j(s)\| ds)$$

Toujours par le résultat du lemme2 et du théorème :

$$\nu = \gamma_{\phi} \gamma_{\phi^{-1}} \lambda^m (\mu_0 \|x(-\tau) - \hat{x}(-\tau)\| + \gamma_{\tilde{H}}(u_M) \int_{-\tau}^0 \|x(s) - \hat{x}(s)\| ds)$$

Avec :

$$\nu > \tilde{\nu}$$

$$\nu_1 = \gamma_\phi \gamma_{\phi^{-1}} \lambda^m \mu_0, \quad \nu_2 = \gamma_\phi \gamma_{\phi^{-1}} \lambda^m \gamma_{\tilde{H}}(u_M)$$

Ainsi la convergence exponentielle a été démontée.

# **Annexe C**

## Démonstration de la stabilité de L'observateur cascade dans le cas des retards variables.

### 4 Cas des systèmes linéaires :

Soit le système linéaire SISO donné sous la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad t \geq \tau, \quad (\text{C.1})$$

$$\bar{y}(t) = Cx(t - \tau(t))$$

Où :  $y(t) = Cx(t)$  est la sortie du système non retardée, et  $\tau(t)$  est le retard variable.

En effet, sur chaque segment d'amplitude constante du retard, l'observateur en cascade s'écrit:

$$\dot{\hat{x}}(t - \tau_c) = A\hat{x}(t - \tau_c) + Bu(t - \tau_c) + K(\bar{y}(t) - C\hat{x}(t - \tau_c)) \quad (\text{C.2})$$

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + Bu(t) + e^{A\tau_c} K(\bar{y}(t) - C\hat{x}(t - \tau_c)) \quad (\text{C.3})$$

Les valeurs initiales de l'observateur sont telles que:

$$\hat{x}_0(0) = \hat{x}(-\tau_1)$$

$$\hat{x}_1(\tau) = \hat{x}(0)$$

Où:  $\tau_c$  est l'amplitude constante du retard sur un intervalle de temps, et  $K$  est le vecteur gain d'observation constant, choisi tel que les valeurs propres de la matrice  $A_m = A - KC$  aient des parties réelles négatives.  $\tau_1$  est l'amplitude du retard sur l'intervalle  $t_0 \leq t < t_1$ .

Pour simplifier l'écriture, les notations suivantes sont utilisées :

#### Notations :

- L'estimé de l'état à l'instant  $t - \tau_c$  est noté :  $\hat{x}_0(t) = \hat{x}(t - \tau_c)$
- L'estimé de l'état à l'instant actuelle  $t$  est notée :  $\hat{x}_1(t) = \hat{x}(t)$
- L'entrée à l'instant  $t - \tau_c$  est notée:  $u_0(t) = u(t - \tau_c)$

Le profil de variation du retard est connu et vérifie les hypothèses suivantes :

- $\tau_i < \tau_{c\max}$
- $\tau_{c\max} \ll \Delta t_i$

Sous ces hypothèses, la stabilité de l'observateur en cascade composé de l'observateur dit « zéro » qui estime l'état retardé, et de l'observateur « premier » qui estime l'état actuel, fera l'objet de la section suivante.

### **Analyse de stabilité de l'observateur en cascade :**

#### **➤ stabilité de l'observateur zéro (*zeroth observer*):**

La stabilité de l'observateur sur l'intervalle  $]t_{i-1} \ t_i[$  est déjà démontrée (cas du retard constant), en effet, l'erreur d'observation est donnée par :

$$e_0(t) = x(t - \tau_c) - \hat{x}(t - \tau_c) \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_0(t) &= \dot{x}(t - \tau_c) - \dot{\hat{x}}(t - \tau_c) \\ &= Ax(t - \tau_c) + Bu(t - \tau_c) \\ &\quad - \{A\hat{x}(t - \tau_c) + Bu(t - \tau_c) + KCe_0(t)\} \end{aligned} \tag{C.5}$$

D'où :

$$\dot{e}_0(t) = A_m e_0(t) \tag{C.6}$$

$$A_m = A - KC$$

Le problème qui se pose dans ce cas de figure, c'est-à-dire variation du retard par paliers, est l'analyse de stabilité aux moments de changement de l'amplitude du retard.

L'analyse a été faite dans [14] pour un instant  $t = t_i$  puis généralisée pour tout le profil de variation du retard, et c'est ce qui sera reproduit dans la partie suivante.

1. A l'instant  $t = t_1$  l'observateur zéro estime l'état à l'instant  $t_1 - \tau_1$  et le premier observateur renvoie à son tour l'état estimé à l'instant  $t_1$ . Alors, à la fin du segment  $[t_0 \quad t_1[$ , la sortie de l'observateur zéro est  $\hat{x}(t_1 - \tau_1)$ , et  $\hat{x}_1(t_1)$  la sortie du premier observateur.
2. L'instant  $t = t_1$  est l'instant de changement d'amplitude du retard qui passe à la valeur  $\tau_2$ . Dans ce cas l'observateur zéro doit estimer l'état à partir de  $t_1 - \tau_2$ , ainsi le temps initial de l'observateur zéro change dès que l'amplitude du retard passe de  $\tau_1$  à  $\tau_2$  et donc à l'instant  $t = t_1$  qui est le début du segment prochain.
3. La variable d'état estimée actuelle sur l'intervalle  $[t_1 \quad t_2[$  est à la sortie du premier observateur, mais l'analyse révèle certaines modifications, à savoir :

- La propagation de l'équation de l'observateur zéro à partir de l'instant  $t = t_1$  se fait à partir de la condition initiale évaluée à l'instant  $t_1 - \tau_2$ .
- Suite à ce qui est explicité ci-dessus, un cumul d'erreur d'observation égal à  $\hat{x}(t_1 - \tau_2) - \hat{x}(t_1 - \tau_1)$ , apparaît au niveau de l'observateur zéro.
- Pour appréhender l'accumulation de l'erreur d'observation et sa dynamique, sa dérivée par rapport au temps est évaluée en tenant compte de la dynamique de l'observateur et après simplification, il vient :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t_1 - \tau_2) - \dot{\hat{x}}(t_1 - \tau_1) &= (A - KC)(\hat{x}(t_1 - \tau_2) - \hat{x}(t_1 - \tau_1)) \\
&\quad + B(u(t_1 - \tau_2) - u(t_1 - \tau_1)) \\
&= A_m \delta_{\hat{x}_1}(t) + B \delta_{u_1}(t)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Ce qui peut être généralisé pour chaque instant  $t = t_i$  constituant l'instant de changement d'amplitude du retard comme suit :

$$\dot{\hat{x}}(t_i - \tau_{i+1}) - \dot{\hat{x}}(t_i - \tau_i) = A_m \delta_{\hat{x}_i}(t) + B \delta_{u_i}(t) \tag{C.8}$$

Où :

$\tau_i$  est l'amplitude du retard sur l'intervalle  $t_{i-1} \leq t < t_i$  et  $\tau_{i+1}$  son amplitude sur  $t_i \leq t < t_{i+1}$ , et  $\delta_{u_i}(t) = u(t_i - \tau_{i+1}) - u(t_i - \tau_i)$  représente le cumul d'erreur.

A l'instant  $t = t_i - \tau_{i+1}$  le premier observateur n'a pas encore atteint la valeur estimé.

Pour chaque instant  $t = t_i$ , la substitution de l'équation (C.8) dans (C.5) renvoie à:

$$\dot{e}_0(t_i) = A_m e_0(t_i) + A_m \delta_{\hat{x}_i}(t) + B \delta_{u_i}(t) \quad (\text{C.9})$$

D'où l'erreur d'observation pouvant être écrite comme suit :

$$\dot{e}_0(t) = \begin{cases} A_m e_0(t) + A_m \delta_{\hat{x}_i}(t) + B \delta_{u_i}(t) & t > t_i \\ A_m e_0(t) & \text{pour } t \in [t_{i-1}, t_i[ \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Il est clair que lorsque le retard est constant  $\tau = \tau_c$ ,  $\delta_{\hat{x}_i} = 0$  et  $\delta_{u_i} = 0$ .

L'intégration de  $\dot{e}_0(t)$  a l'instant  $t = t_1$  renvoie :

$$e_0(t_1) = \exp(A_m(t_1 - 0))e_0(0) + \int_0^{t_1} \exp(A_m(t_1 - s)) \times \{A_m \delta_{\hat{x}_i}(s) + B \delta_{u_i}(s)\} ds$$

Il vient que:

$$\begin{aligned} \|e_0(t_1)\| &\leq \|\exp(A_m \Delta t_1) e_0(0)\| + \left\| \int_0^{t_1} \exp(A_m(t_1 - s)) \right. \\ &\quad \times \left. \{A_m \delta_{\hat{x}_i}(s) + B \delta_{u_i}(s)\} ds \right\| \\ &\leq \|\exp(A_m \Delta t_1)\| \|e_0(t)\| + \left\| \int_0^{t_1} \exp(A_m(t_1 - s)) \right. \\ &\quad \times \left. \{A_m \delta_{\hat{x}_i}(s) + B \delta_{u_i}(s)\} ds \right\| \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Où :

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0,$$

Comme  $A_m$  est une matrice hirwitz alors,

$$\|\exp(A_m t)\| \leq \exp(-mt) \quad (\text{C.12})$$

Avec :  $m$  la partie réelle de la plus petite valeur propre de  $A_m$ .

Le terme intégral est noté comme suit:

$$\bar{\delta}_1 = \left\| \int_0^{t_1} \exp(A_m(t_1 - s)) \{A_m \delta_{\hat{x}_1}(s) + B \delta_{u_1}(s)\} ds \right\|$$

L'équation (4.11) s'écrit :

$$\|e_0(t_1)\| \leq \exp(-m\Delta t_1) \|e_0(0)\| + \bar{\delta}_1 \quad (\text{C.13})$$

D'une manière similaire, l'erreur d'estimation à  $t = t_2$  s'écrit :

$$e_0(t_2) = \exp(A_m \Delta t_2) e_0(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \exp(A_m(t_2 - s)) \times \{A_m \delta_{\hat{x}_2}(s) + B \delta_{u_2}(s)\} ds$$

Puis :

$$\|e_0(t_2)\| \leq \|\exp(A_m \Delta t_2) e_0(t_1)\| + \left\| \int_{t_1}^{t_2} \exp(A_m(t_2 - s)) \{A_m \delta_{\hat{x}_2}(s) + B \delta_{u_2}(s)\} ds \right\|$$

Ainsi :

$$\|e_0(t_2)\| \leq \exp(-m\Delta t_2) \|e_0(t_1)\| + \bar{\delta}_2 \quad (\text{C.14})$$

Le remplacement de  $\|e_0(t_1)\|$  par son expression donne :

$$\begin{aligned} \|e_0(t_2)\| &\leq \exp(-m\Delta t_2) \exp(-m\Delta t_1) \|e_0(0)\| \\ &\quad + \exp(-m\Delta t_2) \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2 \\ &\leq \exp(-m(\Delta t_1 + \Delta t_2)) \|e_0(0)\| \\ &\quad + \exp(-m\Delta t_2) \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2 \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Avec :

$$\bar{\delta}_2 = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \exp(A_m(t_2 - s)) \{A_m \delta_{\hat{x}_2}(s) + B \delta_{u_2}(s)\} ds \right\|$$

Suivant la même méthode de calcul jusqu'à  $t = t_N$ , l'erreur d'estimation s'écrira :

$$\begin{aligned} \|e_0(t_N)\| &\leq \exp(-m \sum_{i=1}^N \Delta t_i) \|e_0(0)\| \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \exp(-m \sum_{i=j+1}^N \Delta t_i) \bar{\delta}_j + \bar{\delta}_N \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Où  $\forall k = 1, 2, \dots, N$

$$\bar{\delta}_k = \left\| \int_{t_k-1}^{t_k} \exp(A_m(t_k - s)) \times \{A_m \delta_{x_k}(s) + B \delta_{u_k}(s)\} ds \right\|$$

A noter que la stabilité de l'observateur zéro est exigée pour assurer la stabilité du premier observateur, ce qui est explicité par l'analyse suivante :

➤ **Analyse de stabilité du premier observateur :**

D'après le lemme.1, l'intégration de l'équation d'état du système (C.1) donne :

$$x_1(t) = \exp(A\tau(t))x_0(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \exp(A(t-s))Bu(s)ds \quad (\text{C.18})$$

De manière similaire, l'intégration de l'équation (4.3) donne :

$$\hat{x}_1(t) = \exp(A\tau(t))\hat{x}_0(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \exp(A(t-s))Bu(s)ds \quad (\text{C.19})$$

La soustraction de ces deux dernières équations, l'erreur d'estimation est telle que :

$$e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$$

Il en découle :

$$e_1(t) = \exp(A\tau(t))e_0(t) \quad (\text{C.20})$$

A l'instant  $t = t_1$ , il vient :

$$\|e_1(t_1)\| \leq \|\exp(A\tau_1)\| \cdot \|e_0(t_1)\| \quad (\text{C.21})$$

Par remplacement de  $\|e_0(t_1)\|$  par sa valeur obtenue dans (C.13), l'erreur d'estimation s'écrit :

$$\begin{aligned}\|e_1(t_1)\| &\leq \alpha_1 (\exp(-m\Delta t_1) \|e_0(0)\| + \bar{\delta}_1) \\ &\leq \alpha_1 \exp(-m\Delta t_1) \|e_0(0)\| + \alpha_1 \bar{\delta}_1\end{aligned}\tag{C.22}$$

Où  $\|\exp(A\tau_1)\| \leq \alpha_1$  et  $\alpha_1 > 0$ .

De la même façon, à l'instant  $t = t_2$  l'erreur d'observation est telle que:

$$\begin{aligned}\|e_1(t_2)\| &\leq \alpha_2 \exp(-m(\Delta t_1 + \Delta t_2)) \|e_0(0)\| \\ &\quad + \alpha_2 \exp(-m\Delta t_2) \bar{\delta}_1 + \alpha_2 \bar{\delta}_2\end{aligned}\tag{C.23}$$

Avec :  $\|\exp(A\tau_2)\| \leq \alpha_2$  et  $\alpha_2$  est une valeur constante strictement positive.

Par généralisation l'erreur d'observation à l'instant  $t = t_N$  est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\|e_1(t_N)\| &\leq \alpha_N \exp(-m \sum_{i=1}^N \Delta t_i) \|e_0(0)\| \\ &\quad + \alpha_N \sum_{j=1}^{N-1} \exp(-m \sum_{i=j+1}^N \Delta t_i) \bar{\delta}_j + \alpha_N \bar{\delta}_N\end{aligned}\tag{C.24}$$

Où :  $\|\exp(A\tau_N)\| \leq \alpha_N$ ,  $\alpha_N > 0$ .

Il est visible clairement à partir de l'équation (C.24) qu'à chaque instant  $t = t_i, i = 1, \dots, N$  l'erreur d'observation de l'observateur zéro est non nulle et multipliée dans l'observateur premier par une valeur constante  $\|\exp(A\tau_i)\| \leq \alpha_i, \alpha_i > 0 \forall i = 1, \dots, N$ . Alors, l'erreur d'observation de l'observateur en cascade ainsi proposé converge en temps fini vers une valeur constante et non nulle, ce qui peut être mieux explicité à travers l'exemple de simulation ci-après.

➤ **Stabilité de l'observateur cascade dans le cas d'un système non linéaire soumis aux retards variables par paliers.**

Soit le système non linéaire donné par

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad t \geq \tau \quad (\text{C.25})$$

$$\bar{y}(t) = h(x(t - \tau(t))) \quad t \geq 0 \quad (\text{C.26})$$

Stabilité de l'observateur zéro :

La stabilité de l'observateur est démontrée dans les nouvelles coordonnées  $z$ .

L'erreur d'observation est définie comme suit :

$$e_{z,0}(t) = z(t - \tau(t)) - \hat{z}(t - \tau(t)) \quad (\text{C.27})$$

Sa dérivée relativement à la variable temps renvoie :

$$\dot{e}_{z,0}(t) = \dot{z}(t - \tau(t)) - \dot{\hat{z}}(t - \tau(t)) \quad (\text{C.28})$$

Le remplacement des dérivées par leurs équivalents donne :

$$\begin{aligned} \dot{e}_{z,0}(t) = & A_n z_0(t) + \tilde{H}(z_0(t), u_0(t)) \\ & - \{A_n \hat{z}_0(t) + \tilde{H}(\hat{z}_0(t), u_0(t)) + KC_n (z_0(t) - \hat{z}_0(t))\} \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Après calcul et simplification, la dynamique de l'erreur d'observation est donnée par :

$$\dot{e}_{z,0}(t) = A_m e_{z,0}(t) + e_{\tilde{H}}(z_0, \hat{z}_0, u_0) \quad (\text{C.30})$$

Avec :

$$A_m = A_n - KC_n$$

$$e_{\tilde{H}}(z_0, \hat{z}_0, u_0) = \tilde{H}(z_0(t), u_0(t)) - \tilde{H}(\hat{z}_0(t), u_0(t))$$

Et  $K$  est le gain d'observation calculé de sorte que la matrice  $A_m$  ait des valeurs propres à partie réelle négative.

Comme la stabilité de l'observateur sur les intervalles  $]t_{i-1}, t_i[$  a été démontrée (retard constant), il reste alors l'évaluation de l'erreur d'observation aux instant de sauts (changement de l'amplitude du retard), ce qui est comme suit :

A l'instant  $t = t_1$  L'erreur dû au changement de l'amplitude du retard apparait sur la sortie de l'observateur zéro comme suit :

$$\hat{z}(t_1 - \tau_2) - \hat{z}(t_1 - \tau_1) \quad (\text{C.31})$$

Sa dérivée par rapport au temps renvoie :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}(t_1 - \tau_2) - \dot{\hat{z}}(t_1 - \tau_1) &= A_n \hat{z}(t_1 - \tau_2) + \tilde{H}(\hat{z}(t_1 - \tau_2), u(t_1 - \tau_2)) \\ &\quad + K(\bar{y}(t) - C_n \hat{z}(t - \tau_2)) - \{A_n \hat{z}(t_1 - \tau_1) \\ &\quad + \tilde{H}(\hat{z}(t_1 - \tau_1), u(t_1 - \tau_1)) + K(\bar{y}(t) - C_n \hat{z}(t_1 - \tau_1))\} \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Le remplacement des estimés par leurs expressions, et après simplification l'erreur est donnée

par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}(t_1 - \tau_2) - \dot{\hat{z}}(t_1 - \tau_1) &= (A_n - KC_n)(\hat{z}(t_1 - \tau_2) - \hat{z}(t_1 - \tau_1)) \\ &\quad + \{\tilde{H}(\hat{z}(t_1 - \tau_2), u(t_1 - \tau_2)) - \tilde{H}(\hat{z}(t_1 - \tau_1), u(t_1 - \tau_1))\} \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

D'où :

$$\dot{\hat{z}}(t_1 - \tau_1) = \dot{\hat{z}}(t_1 - \tau_2) - A_m \delta_{\hat{z}_1}(t) - \delta_{\tilde{H}_1}(t) \quad (\text{C.34})$$

La généralisation de cette dernière équation pour tous les instants de saut d'amplitude de retard donne :

$$\dot{\hat{z}}(t_i - \tau_i) = \dot{\hat{z}}(t_i - \tau_{i+1}) - A_m \delta_{\hat{z}_i}(t) - \delta_{\tilde{H}_i}(t) \quad (\text{C.35})$$

Où :

$$\delta_{\hat{z}_i}(t) = \hat{z}(t_i - \tau_{i+1}) - \hat{z}(t_i - \tau_i)$$

$$\delta_{\tilde{H}_i}(t) = \tilde{H}(\hat{z}(t_i - \tau_{i+1}), u(t_i - \tau_{i+1})) - \tilde{H}(\hat{z}(t_i - \tau_i), u(t_i - \tau_i))$$

La substitution de l'équation (C.35) dans l'erreur d'observation de l'observateur zéro donne :

$$\dot{e}_{z,0}(t_i) = A_m e_{z,0}(t_i) + e_{\tilde{H}(z_0, \hat{z}_0, u_0)} + A_m \delta_{\hat{z}_i}(t) + \delta_{\tilde{H}_i}(t) \quad (\text{C.36})$$

Ainsi la dynamique de l'erreur d'observation de l'observateur zéro à chaque instant est donnée comme suit :

$$\dot{e}_{z,0}(t) \begin{cases} A_m e_{z,0}(t) + e_{\tilde{H}(z_0, \hat{z}_0, u_0)} + A_m \delta_{\hat{z}_i}(t) + \delta_{\tilde{H}_i}(t), & \text{à } t > t_i \\ A_m e_{z,0}(t) + \delta_{\tilde{H}_i}(t) & \text{pour } t \in [t_{i-1}, t_i[ \end{cases} \quad (\text{C.37})$$

Pour expliciter l'effet des sauts de la valeur du retard sur l'erreur d'observation, cette dernière est quantifiée aux instants  $t = t_i$  par intégration de l'équation (C.36) comme suit :

1. A  $t = t_1$

De manière similaire au cas des systèmes linéaires l'erreur d'observation s'écrit :

$$e_{z,0}(t_1) = \exp(A_m(t_1 - 0))e_{z,0}(0) + \int_0^{t_1} \exp(A_m(t_1 - s)) \times \{e_{\tilde{H}}(s) + A_m \delta_{\hat{z}_1}(s) + \delta_{\tilde{H}_1}(s)\} ds \quad (\text{C.38})$$

Puisque la non linéarité est lipchitzienne, il vient :

$$\|e_{z,0}(t_1)\| \leq \exp(-m\Delta t_1) \|e_{z,0}(0)\| + \gamma_{\tilde{H}}(u) M_1 \int_0^{t_1} \|e_{z,0}(s)\| ds + \left\| \int_0^{t_1} \exp(A_m(t_1 - s)) \times \{A_m \delta_{\hat{z}_1}(s) + \delta_{\tilde{H}_1}(s)\} ds \right\| \quad (\text{C.39})$$

D'où :

$$\|e_{z,0}(t_1)\| \leq \exp(-m\Delta t_1) \|e_{z,0}(0)\| + \gamma_{\tilde{H}}(u) M_1 \sup_{0 \leq s \leq t_1} \|e_{z,0}(s)\| + \bar{\delta}_1 \quad (\text{C.40})$$

Où :

$$\int_0^{t_1} \|\exp(A_m(t_1 - s))\| ds \leq M_1 \text{ et } \bar{\delta}_1 = \left\| \int_0^{t_1} \exp(A_m(t_1 - s)) \times \{A_m \delta_{\hat{z}_1}(s) + \delta_{\tilde{H}_1}(s)\} ds \right\|$$

Comme :

$$\gamma_{\tilde{H}}(|u|) < \frac{1}{M_1} \quad (\text{C.41})$$

$$\sup_{0 \leq s \leq t_1} \|e_{z,0}(s)\| \leq \frac{1}{(1 - \gamma_{\tilde{H}} M_1)} \{ \exp(-m\Delta t_1) \|e_{z,0}(0)\| + \bar{\delta}_1 \}$$

et par considération de l'équation (C.41), il vient :

$$\|e_{z,0}(t_1)\| \leq \frac{1}{(1 - \gamma_{\tilde{H}} M_1)} \{ \exp(-m\Delta t_1) \|e_{z,0}(0)\| + \bar{\delta}_1 \} \quad (\text{C.42})$$

Par notation de :

$$\beta_1 = \frac{1}{(1 - \gamma_{\bar{H}} M_1)}$$

L'erreur d'observation s'écrit :

$$\|e_{z,0}(t_1)\| \leq \beta_1 \left\{ \exp(-m\Delta t_1) \|e_{z,0}(0)\| + \bar{\delta}_1 \right\} \quad (\text{C.43})$$

2. A l'instant  $t = t_2$

L'erreur d'observation s'écrit dans ce cas sous la forme :

$$e_{z,0}(t_2) = \exp(A_m(t_2 - t_1))e_{z,0}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \exp(A_m(t_2 - s)) \times \left\{ e_{\bar{H}}(s) + A_m \delta_{z_2}(s) + \delta_{\bar{H}_2}(s) \right\} ds$$

D'où :

$$\|e_{z,0}(t_2)\| \leq \beta_2 \exp(-m\Delta t_2) \|e_{z,0}(t_1)\| + \beta_2 \bar{\delta}_2 \quad (\text{C.44})$$

Par remplacement de terme  $\|e_{z,0}(t_1)\|$  par son équivalent, l'erreur d'observation à l'instant

$t = t_2$  s'écrit :

$$\|e_{z,0}(t_2)\| \leq \beta_1 \beta_2 \exp(-m(\Delta t_1 + \Delta t_2)) \|e_{z,0}(0)\| + \beta_1 \beta_2 \exp(-m\Delta t_2) \bar{\delta}_1 + \beta_2 \bar{\delta}_2 \quad (\text{C.45})$$

Suivant le calcul jusqu'à l'instant  $t = t_N$  l'erreur d'observation de l'observateur zéro est calculée à chaque instant.

3. A  $t = t_N$

L'erreur d'observation est telle que :

$$\|e_{z,0}(t_N)\| \leq \beta \exp(-m \sum_{i=1}^N \Delta t_i) \|e_{z,0}(0)\| + \sum_{j=1}^{N-1} \exp(-m \sum_{i=j+1}^N \Delta t_i) \beta_j \bar{\delta}_j + \beta_N \bar{\delta}_N \quad (\text{C.46})$$

Où :

$$\beta = \prod_{i=1}^N \beta_i$$

$$\beta_i = \frac{1}{(1 - \gamma_{\bar{H}} M_i)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\exp(A_m(t_i - s))\| ds \leq M_i$$

$$\text{Et } \bar{\delta}_i = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \exp(A_m(t_i - s)) \times \{A_m \delta_{\hat{z}_i}(s) + \delta_{\tilde{H}_i}(s)\} ds \right\|, i = 1, 2, \dots, N.$$

Ces dernières équations montrent qu'il existe une erreur résiduelle et que l'erreur d'observation converge vers une valeur non nulle quand le temps tend vers l'infini.

La valeur de l'erreur résiduelle dépend inévitablement de la valeur de

$$\beta_i = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_{\tilde{H}}}{m} (\exp(-m\Delta t_i) - 1)} \text{ et donc de la valeur de } \Delta t_i :$$

Les valeurs possibles de  $\Delta t_i$  sont :

- $\Delta t_i = 0$  : cas du système non retardée.
- $\Delta t_i < 1$  : l'erreur résiduelle est amplifiée.
- $\Delta t_i > 1$  : l'erreur résiduelle est atténuée.

Remarque :

Dans le cas où les intervalles du temps sont de même longueur  $\Delta t_i = \Delta t_j, i \neq j$ . l'erreur d'observation de l'observateur zéro devient :

$$\|e_{z,0}(t_N)\| \leq \tilde{\beta}^N \exp(-mN\Delta t) \|e_{z,0}(0)\| + \sum_{j=1}^N \exp(-m(N-j)\Delta t) \tilde{\beta}^{N-j} \bar{\delta}_j \quad (\text{C.47})$$

Avec :

$$\beta_i = \beta_j = \tilde{\beta}, i \neq j \text{ et } \beta = \prod_{i=1}^N \tilde{\beta}_i = \tilde{\beta}^N.$$

Ainsi la stabilité de l'observateur zéro est démontrée.

#### ➤ Stabilité du premier observateur :

Dans le cas où  $\Delta t_i = \Delta t_j, \forall i \neq j$ , le premier observateur est donné par :

$$\hat{z}_1(t) = e^{A_n \tau(t)} \hat{z}_0(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_n(t-s)} \tilde{H}(\hat{z}_1(s), u(s)) ds \quad (\text{C.48})$$

De même l'intégration de l'équation d'états du système donne :

$$z(t) = e^{A_n \tau(t)} z(t - \tau(t)) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_n(t-s)} \tilde{H}(z(s), u(s)) ds \quad (\text{C.49})$$

L'erreur d'observation du premier observateur s'écrit :

$$e_1(t) = e^{A_n \tau(t)} e_{z,0}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_n(t-s)} (\tilde{H}(z(s), u(s)) - \tilde{H}(\hat{z}_1(s), u(s))) ds \quad (C.50)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|e_{z,1}(t)\| &\leq \|\exp(A_n \tau(t))\| \cdot \|e_{z,0}(t)\| \\ &+ \left\| \int_{t-\tau}^t \exp(A_n(t-s)) (\tilde{H}(z_1(s), u_1(s)) - \tilde{H}(\hat{z}_1(s), u_1(s))) ds \right\| \end{aligned} \quad (C.51)$$

Par remplacement de l'erreur d'observation de l'observateur zéro par son équivalent donné par l'équation (C.47) et Comme la non linéarité est lipchitzienne, il vient :

$$\begin{aligned} \|e_{z,1}(t)\| &\leq \|e^{A_n \tau(t)}\| \left\{ \tilde{\beta}^N \exp(-mN\Delta t) \|e_{z,0}(0)\| \right. \\ &+ \sum_{j=1}^N \exp(-m(N-j)\Delta t) \tilde{\beta}^{N-j} \bar{\delta}_j \left. \right\} \\ &+ \gamma_{\tilde{H}}(|u|) \|e^{A_n \tau(t)}\| \int_{t-\tau(t)}^t \|e_{z,1}(s)\| ds \end{aligned} \quad (C.52)$$

Par considération du résultat de lemme (chapitre 3), il vient :

$$\|e_{z,1}(t)\| = \beta_{z_1} \|e_{z,0}(t)\| \quad (C.53)$$

Avec :

$$\beta_{z_1} = \frac{\alpha}{1 - \gamma_{\tilde{H}} M}$$

$$\alpha = \|\exp(A_n \tau(t))\|$$

$$\text{Et } \int_{t-\tau}^t \|\exp(A_n(t-s))\| ds \leq M$$

Et de la, la et de l'équation (C.47) la stabilité de l'observateur cascade est démontrée.

## Bibliographie :

- [1] **P. J. Antsaklis**, and **A. N. Michel**, "Linear systems", Birkhäuser, Boston, 2006.
- [2] **L. A. C. Corona**, "Quelques contributions aux observateurs non linéaires à horizon glissant", Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2002.
- [3] **B. Bergeon**, "Commande linéaire des systèmes multi-variables", Cours, Université de Bordeaux 1.
- [4] **H. Kwakernak**, and **R. Sivan**, "Linear optimal control systems", Wiley & Sons, New York, 1972.
- [5] **Y. Xiong** and **S. Mehrdad**, "Sliding mode observer for uncertain systems, Part 1: Linear systems", in IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 39, pp. 316-321, Sydney, December, 2000.
- [6] **K. K. Busawon**, and **J. De Leon-Morales**, "An observer design for uniformly observer non-linear system", in Int. J. Contr. Vol. 73, No. 15, pp. 1375-138, 2000.
- [7] **M. D. Mora**, **A. Germani**, and **C. Manes**, "Design of state observer from a drift-observability property", In IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 45, No. 8, pp.1536-1540, 2000.
- [8] **W. Perruquetti** and **J. P. Barbot**, "Sliding Mode control in Engineering", in Control Engineering Series, Marcel Dekker, New York, 2002.
- [9] **I. Dilaneh**, "Etude de la commande et de l'observation à distance des systèmes", Thèse de Doctorat, ENSEA, Université de Cergy-Pontoise, 2009.
- [10] **N. Yeganfar**, "Définitions et analyse de la stabilité pour les systèmes à retard non linéaires", Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lille, 2006.
- [11] **A. SI Ammour**, "Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire", Thèse de Doctorat, Université Mouloud Mammeri, 2011.
- [12] **T. Ahmed Ali**, "Cascade high gain observers for nonlinear systems with delayed output measurement", in 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, pp. 8226-8231, Shangai, December 16-18, 2009.

- [13] **T. Ahmed Ali**, ‘‘High gain observer design for nonlinear systems with time varying delayed measurements’’, in IFAC World Congress, Vol.18, pp. 692-696, Milano, August 28-September 2, 2011.
- [14] **P. C. Muralidhar**, ‘‘Observer synthesis for linear/nonlinear dynamical systems subject to measurements delays’’, Master Thesis, University of Texas at Arlington, 2006.
- [15] **K. Subbarao, P. C. Muralidhar**, ‘‘State observer for linear systems with piece-wise constant output delays’’, in IET Control Theory and Applications, Vol. 3, No. 8, pp.1017-1022, 2008.
- [16] **A. Germani, C. Manes, and P. Pepe**, ‘‘A state observer for nonlinear delay systems’’, in IEEE Conference of decision and control, Vol.37, No.12, pp. 335-360, Florida, December, 1998.
- [17] **A. Germani, C. Manes, and P. Pepe**, ‘‘State observation of nonlinear systems with delayed measurements’’, in Proc. 2<sup>nd</sup> IFAC Workshop Time Delay Systems (LTDS2000), pp. 58-63, Italy, September 11-13, 2000.
- [18] **A. Germani, C. Manes, and P. Pepe**, ‘‘A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output’’, in IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 47, No. 1, pp.96-101, 2002.
- [19] **J.P.Richard**, ‘‘Delay identification in time-delay systems using variable structure observers’’, in Elsevier, J. Arcontrol, Vol.30, pp. 143-158, 2006.
- [20] **P. Varaiya**, ‘‘Smart cars on smart roads: Problems of control’’, IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 38, No. 2, pp.195-207, 1993.
- [21] **J. Alexander Fax, and R. M. Murray**, ‘‘Information flow and cooperative control of vehicle formations’’, in IEEE Trans. Automat. Cont. Vol.49, No. 9, pp.1465-1476, 2004.
- [22] **Yanmei Liu, Yibo Li and Jianhi Xi**, ‘‘Design and simulation of satellite formation flying position-keeping control method’’, in the Third International Workshop on Advanced Computational Intelligence, China, August 25-27, 2010.
- [23] **Xingping Chen, A. Serrani, and H.  zbay**, ‘‘Control of leader follow formations of terrestrial UAVs’’, in IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 42, pp. 498-503, USA, 2003.
- [24] **Chang Boon Low**, ‘‘A dynamic virtual structure formation control for fixed-wing UAVs’’, in IEEE International Conference on Control and Automation, Vol. 9, pp. 627-632, Chile, December 19-21, 2011.