

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

Faculté du génie de la construction

Département de Génie Civil



MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Génie Civil

OPTION : MODELISATION ET CALCUL NON LINEAIRE

PRESENTE PAR

ALI BOUGRESSI

THEME

***Application du concept des réseaux acoustiques à
bandes interdites pour l'isolation sismique d'un site***

Devant le jury d'examen composé de :

Mr. Youcef Bouafia	Professeur, UMMTO	Président
Mr. Nouredine Bourahla	Professeur, USDB	Rapporteur
Mr. Ahmed Abed	Maitre de Conférences A, UMMTO	Examineur
Mr. Mohand Hamizi	Maitre de Conférences A, UMMTO	Examineur
Mr. Abdelkrim Khelif	Dr. (HDR), CNRS Institut FEMTO-ST, Besançon	Invité

Année 2013

RESUME

La propagation d'ondes dans des milieux hétérogènes, désordonnés ou périodiques, est un sujet très général qui se trouve au confluent de nombreuses disciplines de la physique. En particulier, les cristaux phononiques (réseaux périodiques), arrangement périodique de plusieurs matériaux. Ces derniers présentent en effet sous certaines conditions des bandes de fréquences interdites, bandes de fréquence dans lesquelles la propagation des ondes élastiques est interdite, dans certaines directions et gammes de fréquences, par le biais des réflexions de Bragg ou par le phénomène de résonance locale des éléments mis en réseau. Dès lors, plusieurs applications potentielles d'un tel matériau artificiel sont possibles, telles que l'isolation phonique, les structures anti-vibratoires, le filtrage et le traitement de signal acoustique.

Le travail présenté a pour objectif l'application du concept de ces réseaux périodiques à bande interdite à l'aide de structures uni et bidimensionnelles de différentes compositions afin d'obtenir des bandes interdites dans la gamme des basses fréquences [0.1 à 20 Hz] (Chopra, 2005), en vue de l'intégration de ces concepts dans le génie parasismique à travers l'isolation sismique d'un site.

Un bref rappel des fondamentaux sur les cristaux phononiques pour l'étude des structures de bandes est fait, avant de présenter leurs applications aux nano et microstructure et en particulier en génie sismique. Une étude numérique de deux réseaux périodiques (1D et 2D) constitués d'un arrangement ordonné de trois matériaux, une matrice en argile qui abrite des inclusions en acier enrobées de caoutchouc a été menée afin de mettre en évidence le potentiel de bloquer la propagation des ondes sismiques de surface dans la gamme des basses fréquences. Enfin une étude paramétrique a été effectuée sur la cellule élémentaire du réseau 2D en vue de déterminer les différents paramètres ayant une influence significative sur la bande de fréquence interdite, tel que les propriétés physique des matériaux utilisés et la configuration géométrique de la cellule.

Mots-Clés : Cristaux pnononiques, Réseaux périodiques, Bandes de fréquences interdites, Réflexions de Bragg, Résonance locale, Isolation sismique d'un site, Ondes sismiques.

ABSTRACT

Wave propagation in heterogeneous, disordered or periodic media, is a very widespread topic that lies at the confluence of many disciplines of physics. In particular, phononic crystals (periodic arrays), periodic arrangement of several materials. In fact the latter present under certain conditions bands of frequency gap, frequency bands in which the elastic wave propagation is prohibited in certain directions and frequency range, through Bragg reflections or the resonance of local elements phenomenon. Consequently, several potential applications of such an artificial material are possible, such as sound insulation, anti-vibration structures, filtering and acoustic signal processing.

The presented work aims at applying the concept of the periodic structures band gap using one- and two-dimensional structures of different compositions to obtain bands gap in the low frequency range [0.1 à 20 Hz] (Chopra, 2005), for the integration of these concept on earthquake engineering through the seismic isolation of a site.

A brief review of the basic concepts of phononic crystals for band structure study is given, before present their applications in nano and microstructure, particularly in seismic engineering. A numerical study of two periodic arrays (1D and 2D), which consists of an ordered arrangement of three materials, a clay matrix which shelters inclusions in steel coated with rubber has been conducted to bring out the potential to block the propagation of seismic surface waves in the low frequency range. Finally a parametric study has been carried out on the unit cell of the 2D array in order to determine the parameters that have a significant influence on the band of frequency gap, such as physical properties of used materials and geometric configurations of the unit cell.

Keywords : Phononic crystals, Periodic arrays, Bands of frequency gap, Bragg reflections, Local resonances, Seismic isolation of a site, Seismic waves.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier « Dieu » de m'avoir donné la santé, le courage et la volonté pour compléter la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à mes très chers parents pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Je remercie chaleureusement **P^r. Nouredine Bourahla**, mon directeur de mémoire pour m'avoir proposé un sujet de mémoire ambitieux et accordé tant de confiance et pour m'avoir si bien encadré durant ces deux ans. J'ai grandement apprécié ses conseils, sa compétence et sa disponibilité. Travailler à son contact a été très instructif et très agréable. J'espère que beaucoup d'autres auront la chance de travailler avec lui.

Je remercie également l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation. Que monsieur le président et les membres du jury trouvent ici l'expression de mon respect pour avoir fait l'honneur d'examiner ce travail.

Je tiens à exprimer ma vive gratitude à Monsieur **Abdelkrim Khelif**, Professeur Chargé de recherche CNRS à l'Institut FEMTO-ST, Besançon pour son extrême gentillesse et qui n'a pas hésité à me fournir les informations nécessaires pour mener à terme ce travail.

J'ai également apprécié le travail en collaboration avec l'équipe « Micro & Nano Systèmes » du laboratoire FUNDAPL (Université Saad Dahleb, Blida) dirigé par Mr **Abdelkader Hassein-Bey** ainsi que toute l'équipe « MEMS & SENSORS » du DMN/CDTA (Baba Hassene), qui a été porteur de nombreuses idées nouvelles.

Une pensée spéciale pour tous les thésards avec lesquels j'ai eu l'occasion de partager mes états d'âme et autres questionnements existentiels : Mohamed Anis Doufene, Hiba Meddah, Walid Yahiaoui, Farah Kahlouche : souhaitons leur bonne chance dans la recherche. Mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Je terminerai en remerciant de tout mon cœur **Mr Houssine Doufene** pour son aide, son soutien ses encouragements tant d'un point de vue professionnel que personnel. Je le remercie d'autant plus.

TABLE DES MATIERES

RESUME	i
ABSTRACT	ii
REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIERES	iv
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	x
SYMBOLES	xi
INTRODUCTION	01
CHAPITRE 1 : PRINCIPE ET FONDEMENT THEORIQUE DES CRISTAUX PHONONIQUES	04
1.1. Introduction	04
1.2. Les cristaux phononiques	04
1.2.1. Qu'est ce qu'un cristal phononique?	05
1.2.2. Historique et concept	06
1.2.3. Comparaison entre les cristaux phononiques et photoniques	09
1.3. Structures périodiques	11
1.3.1. Exemple de structures périodiques	11
1.3.1.1. Structures périodiques unidimensionnelles (1D)	12
1.3.1.2. Structures périodiques bidimensionnelles (2D)	12
1.3.1.3. Structures périodiques tridimensionnelles (3D)	12
1.3.2. Formulation théorique	13
1.3.2.1. Equation d'onde	13
1.3.2.2. Développement en série de Fourier d'une fonction périodique	14
1.3.2.3. Théorème de Bloch	14
1.3.2.4. Réseau direct et réseau réciproque	15
1.3.2.5. Zone de Brillouin	18
1.3.3. Diagramme de bandes	20
1.3.3.1. Notion de bande interdite	20
1.3.3.2. Bande interdite due à des réflexions de Bragg	21
1.3.3.3. Bande interdite due à l'interaction entre la diffusion de Bragg et le phénomène de résonance locale	23
1.3.3.4. Paramètres d'influences des bandes interdites	24

TABLE DES MATIERES

1.4. Propagation des ondes sismiques	25
1.4.1. Généralités sur les ondes	25
1.4.2. Origine et propagation des ondes sismiques	25
1.4.3. Caractéristiques des différents types d'ondes sismiques	26
1.4.3.1. Ondes de volume	26
1.4.3.2. Ondes de surface	28
1.5. Conclusion	31

CHAPITRE 2 : APPLICATION DU CONCEPT DES RESEAUX PERIODIQUES DANS DIFFERENTS DOMAINES

2.1. Introduction	32
2.2. Application des cristaux phononiques	32
2.2.1. Application aux nano et micro structure	32
2.2.2. Application en génie sismique	33
2.2.2.1. Isolation sismique d'un site	33
2.2.2.2. Isolation sismique d'une structure par le biais des fondations périodique	38
2.3. Conclusion	42

CHAPITRE 3 : CONCEPTION ET ELABORATION D'UN PROCEDE D'ISOLATION SISMIQUE D'UN SITE

3.1. Introduction	43
3.2. Présentation du logiciel « Comsol multiphysics »	44
3.3. Procédure d'analyse	44
3.4. Modèles étudiés	45
3.4.1. Modèle 1 (périodicité unidimensionnelle)	45
3.4.1.1. Configuration de la cellule élémentaire	46
3.4.1.2. Modèle numérique	47
3.4.1.3. Résultats et discussions	47
3.4.2. Modèle 2 (périodicité bidimensionnelles)	49
3.4.2.1. Zone de Brillouin et vecteur d'onde	49
3.4.2.2. Modèle numérique	50
3.4.2.3. Résultats et discussions	51
3.5. Conclusion	53

CHAPITRE 4: IDENTIFICATION ET ETUDE DES PARAMETRES D'INFLUENCE SUR LES CARACTERISTIQUES DE LA BANDE DE FREQUENCE INTERDITE	54
4.1. Introduction	54
4.2. Influence de la masse volumique du noyau	54
4.3. Influence du module d'élasticité du polymère	56
4.4. Influence du module d'élasticité de la matrice	58
4.5. Influence de la fraction de remplissage	59
4.6. Conclusion	62
CONCLUSION GENERALE	63
RECOMMANDATIONS POUR TRAVAUX FUTURE	65
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	66
ANNEXES	70

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Structure de bandes pour un cristal phononique consistant en un arrangement de tiges d'aluminium dans une matrice de nickel. D'après [11]	7
Figure 1.2	Sculpture minimaliste de l'artiste Eusebio Sempere, qui a servi de support à la première démonstration expérimentale de bandes interdites pour les ondes élastiques	8
Figure 1.3	Exemples de structures périodiques	11
Figure 1.4	Structure 2D : a) Structure carrée, b) triangulaire et c) hexagonale	12
Figure 1.5	Exemples de structures 3D publiées dans [22] : structure cubique(1), tas de bois(2), structure multicouches (3), opales ou opales inversées(4), Yablonovite(5)	13
Figure 1.6	Illustration d'une conséquence du théorème de Bloch	14
Figure 1.7	Cristal phononique à deux dimensions constitué d'un ensemble de cylindres disposés en réseau périodique carré	16
Figure 1.8	Vecteurs de base et maille élémentaire de Wigner-Seitz (zone grisée) dans le réseau direct	16
Figure 1.9	Vecteurs de base et première zone de Brillouin dans le réseau réciproque	18
Figure 1.10	Représentation d'un réseau carré dans l'espace réel et l'espace réciproque avec la première zone de Brillouin associée	19
Figure 1.11	Diagramme de bande pour une structure périodique à une dimension [29]	21
Figure 1.12	Cas de bandes interdites de résonance pour un cristal phononique 2D d'après [30]	23
Figure 1.13	Sismogramme montrant quatre types d'ondes successives	26

Figure 1.14	Les ondes de volume	27
Figure 1.15	Les ondes de surface	28
Figure 2.1	Schéma du cristal phononique 2D	33
Figure 2.2	Champ de pression et déplacement des particules dans une dimension	34
Figure 2.3	Propagation de l'onde de pression (a) : sans réseau périodique (b) : avec réseau périodique [36]	35
Figure 2.4	Vue en coupe du réseau périodique mis en place pour l'isolation sismique de la vallée [36]	36
Figure 2.5	Conception pour la protection contre le tsunami par des sacs gonflables [36]	37
Figure 2.6	Première étude expérimentale sur l'application du concept des réseaux phononiques en génie sismique [37]	38
Figure 2.7	Fondation périodique [25]	39
Figure 2.8	Courbe de dispersion [25]	40
Figure 2.9	Structure avec trois différentes bases	41
Figure 2.10	Réponse en termes d'accélération de la structure avec les trois types de fondations [38]	41
Figure 3.1	Schéma du réseau périodique unidimensionnel	46
Figure 3.2	Cellule après maillage et introduction des conditions aux limites périodiques	47
Figure 3.3	Courbes de dispersion du modèle 1 (périodicité unidimensionnelle)	48
Figure 3.4	Schéma du réseau périodique bidimensionnel	49
Figure 3.5	Cellule de Wigner Seitz (carré hachuré) et la première zone irréductible de Brillouin (triangle ΓXM) dans l'espace réciproque	50
Figure 3.6	Cellule après maillage avec les conditions aux limites périodiques	51

LISTE DES FIGURES

Figure 3.7	Courbe de dispersion du modèle 2 (périodicité bidimensionnelle)	52
Figure 4.1	Influence de la masse volumique du noyau sur la bande interdite	56
Figure 4.2	Influence du module d'élasticité du polymère sur la bande interdite	57
Figure 4.3	Influence du module d'élasticité de la matrice sur la bande interdite	59
Figure 4.4	Influence de la fraction de remplissage sur la bande interdite	60
Figure 4.5	Influence du rapport α sur la bande interdite	61

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Tableau d'analogies entre cristaux Electronique, Photonique et Phononique d'après [11]	10
Tableau 1.2	L'espace direct et réciproque pour un réseau carré et hexagonal	19
Tableau 1.3	Comparaison entres les différents types d'ondes sismique	30
Tableau 2.1	Les paramètres de conception du réseau périodique pour $\lambda_{\max}=3000$ m d'apres [36]	36
Tableau 3.1	Propriétés des matériaux utilisés	46
Tableau 3.2	Bandes interdites obtenues pour le modèle1	48
Tableau 4.1	Influence de la masse volumique du noyau sur les caractéristiques de la bande interdite	55
Tableau 4.2	Influence du module d'élasticité du polymère sur les caractéristiques de la bande interdite	57
Tableau 4.3	Influence du module d'élasticité de la matrice sur les caractéristiques de la bande interdite	58
Tableau 4.4	Influence de la fraction de remplissage F sur les caractéristiques de la bande de fréquence interdite	60
Tableau 4.5	Influence du paramètre α sur les caractéristiques de la bande de fréquence interdite	61

SYMBOLES

ω	Pulsation de l'onde
λ	Longueur d'onde
a, d, L	Période du réseau
ρ	Masse volumique
C_t	Célérité des ondes transversales
C_l	Célérité des ondes longitudinales
C_{44}, C_{11}	Constantes élastiques
u_i	Vecteur déplacement
G	Vecteur du réseau réciproque
t	Variable temporelle
F_G	Coefficient d'expansion
$\phi(\vec{r})$	Fonction de Bloch
$\phi(r, t)$	Potentiel scalaire dérivant le champ de déplacement
k_B	Vecteur d'onde de Bloch
k	Vecteur d'onde
$\vec{d}_1, \vec{d}_2$	Vecteurs de base du réseau direct
$\delta_{i,j}$	Symbole de Kronecker
$\vec{r}_1, \vec{r}_2$	Vecteurs de base du réseau réciproque
$\vec{G}_{m1,m2}$	Repérage dans le réseau réciproque
R	Rayon du cylindre

SYMBOLES

n	Indice de réfraction
ϵ	Permittivité diélectrique
n_{eff}	Indice effectif
V	Vitesse de l'onde
r	Rayon du diffuseur
h	Hauteur du diffuseur
R_{noyau}	Rayon du noyau
e, s	Epaisseur
F	Fraction de remplissage
E	module de Young
γ	Rigidité
f	Fréquence
ν	Coefficient de poisson
$U_i^k(r)$	Conditions aux limites à droite
$U_i^k(l)$	Conditions aux limites à gauche
$U_i^k(t)$	Conditions aux limites côté supérieur
$U_i^k(b)$	Conditions aux limites côté inférieur
α	Rapport du rayon sur l'épaisseur du polymère

INTRODUCTION

L'étude de la propagation des ondes élastiques dans les milieux périodiques a connu un renouveau considérable au cours de la dernière décennie du fait de l'introduction du concept de cristal phononique, des matériaux composites présentant des variations périodiques de leurs constantes élastiques et de leur densité. Ils détiennent de ce fait, la particularité de pouvoir prohiber la propagation des ondes élastiques dans une gamme de longueurs d'ondes de l'ordre de la période de la structure. Il s'agit alors, comme en physique du solide, d'un phénomène de bande interdite. Le concept de cristal pour les ondes classiques est apparu avec les premières études relatives aux cristaux photoniques à la fin des années quatre-vingts. Les cristaux photoniques sont des assemblages périodiques de diffuseurs diélectriques, ils ont été initialement imaginés dans l'objectif d'inhiber l'émission spontanée d'atomes. L'émergence de ces structures artificielles, dites cristaux photoniques a ouvert un champ d'investigation nouveau : au niveau fondamental, d'abord, du fait de possibilités inédites de contrôle de la propagation des ondes optiques qu'elles autorisent ; et appliqué ensuite, certains dispositifs photoniques parvenant même à s'imposer comme des composants optiques viables. Les cristaux phononiques s'annoncent tout aussi prometteurs, comme en témoigne le nombre de travaux consacrés à cette activité de recherche. Ils consistent également à mettre à profit les phénomènes de diffusion se produisant dans un matériau composite périodique pour inhiber la propagation des ondes acoustiques dans toutes les directions de l'espace : le réseau fait donc office de réflecteur parfait, n'absorbant qu'une partie infime de l'onde incidente. Bien évidemment, les conditions de périodicité menant à une annulation de la propagation des ondes sont bien spécifiques, mettant en jeu la forme des inclusions, leurs dimensions, la symétrie du réseau, mais aussi l'anisotropie du substrat.

D'autre part, l'un des avantages de l'acoustique par rapport aux métamatériaux optiques est la possibilité de travailler avec différents milieux pour obtenir des ondes acoustiques ou

INTRODUCTION

ondes élastiques mais aussi avec différents types d'ondes à savoir onde de volume ou onde de surface. Les nombreux matériaux utilisés et les dimensions des réseaux mis en place permettent également de pouvoir travailler sur une gamme de fréquence très large, ce qui représente un attrait important pour les applications futures.

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire de magister est d'étudier la possibilité d'appliquer les concepts des matériaux à bandes interdites élastiques à l'aide de structures uni et/ou bidimensionnelles de différentes compositions à l'échelle des sites ou des ouvrages de génie civil, afin d'obtenir des bandes interdites phononiques dans la gamme des basses fréquences [0.1 à 20 Hz] Chopra (2005), en vue de l'intégration de ces concepts dans le génie parasismique.

Pour pouvoir couvrir les différents aspects de ce thème, le mémoire a été structuré en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous passons en revue les fondements théoriques et le principe de base des cristaux phononiques en présentant un bref historique et une comparaison entre les cristaux phononiques et photoniques, avant d'exposer quelques notions de base sur les ondes sismiques et leurs modes de propagation en vue d'appliquer le concept de ces réseaux périodiques dans le domaine du génie sismique.

L'application du concept de ces réseaux périodiques dans différents domaines est montrée dans le second chapitre, à savoir leurs applications aux nano et microstructures et récemment en génie sismique, en présentant les différentes conceptions potentielles proposées par plusieurs chercheurs.

Le troisième chapitre porte sur la conception et l'élaboration d'un procédé d'isolation sismique d'un site. Pour ce faire, deux réseaux périodiques ayant respectivement des périodicités uni et bidimensionnelles sont présentés suivis par des simulations numériques en utilisant le logiciel Comsol basé sur la méthode des éléments finis, afin de vérifier numériquement si les effets attendus sont présents ou non avec le réseau que l'on souhaite mettre en place. Les différents diagrammes de bande obtenus par ces simulations sont présentés et commentés.

INTRODUCTION

Dans le dernier chapitre, une étude de l'effet de certains paramètres de la cellule élémentaire constituant le réseau périodique sur la bande de fréquence interdite est présentée, à savoir l'influence de la masse volumique du noyau, du module d'élasticité du polymère et celui de la matrice ainsi que la fraction de remplissage.

Nous terminerons ce travail par une conclusion générale avec certaines perspectives offertes par notre approche dans ce domaine.

CHAPITRE 1

PRINCIPE ET FONDEMENT THEORIQUE DES CRISTAUX PHONONIQUES

1.1. Introduction

La propagation d'ondes élastiques dans les milieux hétérogènes dotés d'une structure périodique fait l'objet d'un grand intérêt depuis quelques décennies. Un grand nombre de structures périodiques a été étudié, toutes ont mis en évidence l'existence de propriétés physiques telles que la présence de bandes de fréquences interdites correspondant à une forte atténuation des ondes élastiques. A ce titre, il s'évertue dans un premier temps à fournir quelques notions fondamentales nécessaires à la compréhension des matériaux à bandes interdites phononiques ainsi qu'un aperçu sur les ondes sismiques et leurs modes de propagation, en vue d'intégrer le concept de ces structures périodiques dans le génie sismique.

1.2. Les cristaux phononiques

Imaginez une forêt dans laquelle des arbres seraient plantés suivant un plan régulier parfaitement périodique. Dans cette forêt, le diamètre des troncs varie fort peu d'un arbre à ses voisins et la distance qui les sépare est partout rigoureusement la même. La structure périodique bidimensionnelle que forment les arbres est intuitivement similaire à un arrangement parfaitement ordonné des atomes dans un cristal, pour peu que l'on fasse abstraction de la différence d'échelle. Un promeneur suivant un chemin tracé dans cette forêt aurait la surprise de constater que les sons lui parviennent déformés. Plus précisément, d'un orchestre jouant à proximité, il entendrait distinctement les sons graves des contrebasses ou les sons aigus des violons, mais s'apercevrait que toute une partie du

spectre sonore entre ces deux extrêmes manque à l'appel ! Cette atténuation d'une certaine bande de fréquences est la signature de l'existence d'une bande interdite pour le son, elle-même conséquence de l'arrangement périodique des arbres. Une telle forêt est un exemple de ce que les physiciens nomment un cristal phononique [1].

Dans la suite de ce travail, nous allons tenter de décrire ce que sont les cristaux phononiques et quelles applications prospectives les physiciens ont en tête pour eux. En décrivant un domaine de recherche en pleine ébullition et en évolution permanente, nous courrons le risque que notre vision résiste mal au temps et que certaines perspectives ne restent que pure science-fiction. Mais la tentation de mettre les vibrations en cage reste la plus forte !

1.2.1. Qu'est-ce qu'un cristal phononique ?

Les cristaux phononiques sont des matériaux composites macroscopiques présentant une périodicité spatiale dans une ou plusieurs directions de l'espace. En tant que tels, ils sont capables de bloquer la propagation acoustique dans certaines directions et gammes de fréquences, par le biais de réflexions de Bragg où par le phénomène de résonance locale des éléments mis en réseau. On parle alors de bande de fréquences interdites, que l'on abrège le plus souvent en "bande interdite" [2].

Ce nom a été choisi par analogie avec les cristaux photoniques, des structures similaires mais agissant sur la lumière. Du point de vue quantique, un phonon est une vibration élastique élémentaire d'un morceau de matière, tout comme le photon est une particule élémentaire de lumière [3].

Le tableau d'analogie (Tableau 1.1) nous montre qu'il existe une forte correspondance entre les cristaux photoniques et la théorie acoustique.

L'idée du cristal phononique est de fabriquer un matériau artificiel structuré périodiquement, par exemple par assemblage d'au moins deux matériaux différents. Intuitivement, plus les propriétés acoustiques des matériaux mis en jeu sont contrastées, plus les phénomènes d'interférence d'onde sont importants [4].

1.2.2. Historique et concept

En acoustique, l'intérêt pour les structures périodiques s'est manifesté à partir des années 1970 pour des raisons aussi fondamentales qu'appliquées. On peut citer par exemple les travaux de L. P. Solie [5] sur les filtres à ondes de surface, ceux de J. D. Achenbach [6] concernant le calcul des relations de dispersion de matériaux possédant des inclusions sphériques périodiques ou encore ceux de V. Narayanamurti [7] relatifs à des filtre phononiques utilisant des super réseaux en arséniure de gallium (AsGa).

Le renouveau du domaine, au début des années 1990, fait suite à l'intérêt manifesté par la communauté des opticiens pour des matériaux composites constitués d'arrangements périodiques de diffuseurs diélectriques, autrement appelés cristaux photoniques.

Les cristaux photoniques sont des matériaux hétérogènes dont l'indice de réfraction varie périodiquement dans les différentes directions de l'espace. Ces composites peuvent présenter des bandes interdites pour les ondes électromagnétiques et constituent à l'heure actuelle une nouvelle classe de matériaux pour l'optoélectronique et l'optique en général [8].

Initialement, les cristaux photoniques ont été conçus dans l'objectif d'interdire la désexcitation radiative d'un atome en empêchant la propagation des photons qu'il est susceptible d'émettre. En effet, l'émission spontanée des atomes est assujettie à la présence de modes électromagnétiques d'énergie égale à celle de la transition électronique. Piéger l'atome dans un milieu présentant une bande interdite photonique couvrant l'énergie de la transition devait alors garantir l'absence de désexcitation. Cette idée fut introduite par Eli Yablonovitch [9], ouvrant ainsi la voie aux premières réalisations expérimentales de cristaux photoniques [10]. Ces dispositifs laissent entrevoir la possibilité de réaliser des composants optiques très efficaces.

Le concept de cristal phononique, c'est-à-dire de matériau composite périodique bi- ou tridimensionnel permettant l'ouverture de bandes interdites pour les ondes élastiques, a été introduit de façon quasiment simultanée par Kushwaha et al.[11] d'une part, et Economou et Sigalas [12] d'autre part en 1993. Pour ces auteurs, si la seule mise en évidence des propriétés liées à la périodicité du matériau présente un intérêt certain d'un point de vue purement fondamental, les possibilités d'applications des cristaux phononiques justifient

plus encore leur étude : structures anti-vibratoires ou encore transducteurs figurent parmi les premiers systèmes évoqués.

D'autres applications évidentes sont rapidement envisagées : systèmes d'isolation phonique [13,14] structures parasismiques [15], filtrage et traitement du signal acoustique, etc. Les travaux théoriques présentés dans l'article fondateur de Kushwaha [11] traitent un exemple simple de réseau périodique bidimensionnel dont le diagramme de bandes est illustré sur la figure 1.1 : des cylindres d'aluminium dans une matrice de nickel.

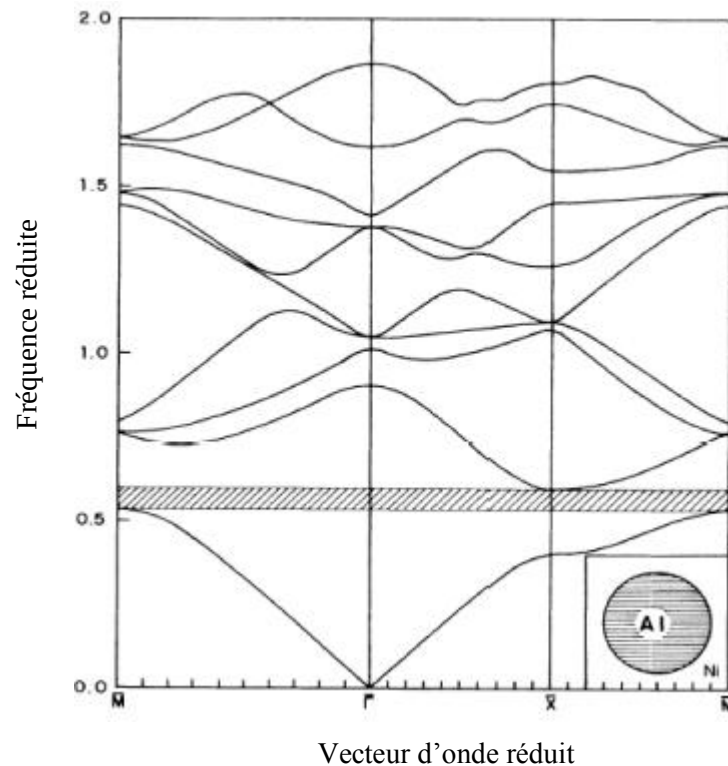


Figure 1.1 : Structure de bandes pour un cristal phononique consistant en un arrangement de tiges d'aluminium dans une matrice de nickel. D'après [11].

Comme souvent, ce sont des papiers théoriques qui ouvrent un nouveau sujet, et il fallut attendre près de deux ans (et la publication de 9 articles) pour que paraisse une première communication présentant des travaux expérimentaux similaires dans le domaine de l'acoustique audible. Des mesures ont été réalisées sur une structure objectivement non prévue pour cela, puisqu'il s'agit d'une sculpture minimaliste de l'artiste Eusebio Sempere exposée dans les jardins de la Juan March Foundation à Madrid (figure 1.2). Cette sculpture, constituée de cylindres d'acier de 2,9 cm de diamètre répartis selon un réseau carré simple

de pas 10 cm, présente des atténuations marquées à 1,7 et 2,4 kHz, reliées à la diffraction sur les plans cristallographiques. Une étude théorique postérieure [16] montre qu'il ne s'agit pas de bandes interdites totales, mais plutôt de pseudo-gaps, car l'atténuation introduite par la structure dépend de la direction du vecteur d'onde incident.



Figure 1.2 : Sculpture minimaliste de l'artiste Eusebio Sempere, qui a servi de support à la première démonstration expérimentale de bandes interdites pour les ondes élastiques.

L'avantage des cristaux phononiques sur leurs homologues optiques apparaît tout d'abord à la fabrication : la structuration a eu lieu à des échelles macroscopiques, en rapport avec la longueur d'onde atténuée, donc aisément contrôlable. Ensuite, du point de vue de la mesure, les acousticiens ont à leur disposition l'amplitude et la phase grâce aux transducteurs piézoélectriques, tandis que les détecteurs optiques sont intrinsèquement limités à la mesure de l'intensité du champ. Enfin, nous verrons que les paramètres mis en jeu dans l'apparition de bandes interdites sont beaucoup plus riches en acoustique qu'en optique.

Toutes ces raisons expliquent l'engouement passé et actuel pour les cristaux phononiques: la physique est souvent comparable à celle des cristaux photoniques, mais la facilité de réalisation est évidente et les mesures sont réalisées avec du matériel souple d'utilisation. Les cristaux phononiques sont donc particulièrement adaptés à la modélisation et la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents. Le développement des applications envisagées jusqu'ici (création d'environnement dépourvu de vibrations, filtrage acoustique ainsi que l'optimisation des réseaux de transducteurs) reste en effet à un stade peu avancé.

D'autres types de cristaux permettent d'atténuer efficacement des fréquences dont les longueurs d'ondes sont de deux ordres de grandeur supérieures au pas de la structure (a) : ce sont les cristaux phononiques munis d'unités localement résonantes [17, 18, 19]. Ce concept repose sur la présence de diffuseurs résonants au sein d'une structure périodique : la réponse linéaire d'un tel diffuseur s'établit en $1/(\omega_0^2 - \omega^2)$, ce qui permet au matériau de présenter des constantes élastiques effectives négatives dans certaines gammes de fréquences. En cela, le principe de fonctionnement de ces structures est extrêmement proche des phénomènes physiques qui gouvernent l'atténuation à la traversée d'un nuage de bulles résonantes. De tels cristaux ont été construits par l'équipe de Liu, en utilisant comme diffuseurs des billes métalliques denses enrobées d'un matériau mou, noyées dans une matrice en résine époxy. Ceux-ci ouvrent d'intéressantes perspectives en termes de filtrage dans le domaine de l'audio puisqu'ils permettent de s'affranchir de la condition $\lambda \approx a$: les fréquences atténuées par le prototype se situent en effet autour de 400 Hz et 1,3 kHz pour un réseau cubique de période 1,55 cm.

1.2.3. Comparaison entre les cristaux phononiques et photoniques

Les cristaux phononiques tels qu'ils sont définies auparavant, sont des structures périodiques. Cependant, il y a de fortes analogies entre la propagation des électrons dans les cristaux ordinaires et les ondes électromagnétiques et élastiques dans les cristaux photoniques respectivement. Les propriétés fondamentales régissant la propagation des ondes électroniques, électromagnétiques et élastiques dans les structures périodiques tridimensionnelles isotropes sont résumées sur le tableau 1.1.

CHAPITRE 1 : PRINCIPE ET FONDAMENT THEORIQUE DES CRISTAUX PHONONIQUES

Tableau 1.1 : Tableau d'analogies entre cristaux Electronique, Photonique et Phononique d'après [11].

<i>Propriétés</i>	<i>Cristal électronique</i>	<i>Cristal photonique</i>	<i>Cristal phononique</i>
Matériaux	Cristallin (naturel ou obtenu par croissance)	Composé de deux matériaux diélectriques	Composé de deux matériaux élastiques
Paramètres	Constantes universelles nombres atomiques	Constantes diélectriques des constituants	Densités, vitesse du son dans les constituants
Constantes de maille	1 - 5Å (microscopique)	0.1 µm- 1 cm (mésoscopiques ou macroscopiques)	mésoscopiques ou macroscopiques
Ondes	De Broglie (électron) ψ	Electromagnétiques ou lumineuses (photon) E.B	Vibration ou sonores (phonon) u
Polarisation	Spin (haut et bas)	Transversale : $\nabla \cdot D = 0$ $\nabla \cdot E \neq 0$	Trans. Longit. : $\nabla \cdot u \neq 0$ $\nabla \cdot u \neq 0$
Equation différentielle	$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) \nabla^2 \psi + V(r) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$	$\nabla^2 E - \nabla(\nabla \cdot E) = \frac{\epsilon(r) \partial^2 E}{c^2 \partial t^2}$	$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_t} \left(\lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_t} \left[\mu \left(\frac{\partial u_t}{\partial x_t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_t} \right) \right] \right\}$ Milieu isotrope
Particules libres	$W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (electron)	$W = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} k$ (photons)	$W = c_{t,i} k$ (phonons)
Bandes interdites	Augmente avec le potentiel dans le cristal ; pas d'état électronique possible	Augmente avec $ \epsilon_a - \epsilon_b $; pas de photons, pas de lumière.	Augmente avec $ \rho_a - \rho_b $; pas de vibration, pas de son.
Gamme spectral	Ondes radio, micro-ondes, optiques, rayons x	Micro-ondes, optique	$w \leq q \text{ GHz}$

La propagation des ondes électromagnétiques et/ou élastiques acoustiques dans les matériaux composites a fait l'objet d'une attention particulière. Ces derniers en l'occurrence les cristaux photoniques et phononiques respectivement, existent naturellement, ou sont fabriqués artificiellement. Ils montrent une grande variété d'intérêt de propriétés physiques, à la fois sur le plan de la recherche fondamentales et celui de la recherche appliquée.

Les cristaux phononiques ont des propriétés qui concordent avec celles des cristaux photoniques, toute fois il existe une certaine nuance entre eux. Les cristaux photoniques peuvent être caractérisés par deux paramètres indépendants, à savoir le rapport de la fraction diélectrique et la fraction volumique occupée par un de ces composants ; tandis que pour les cristaux phononiques plusieurs paramètres peuvent déterminer la propagation des ondes, tels que : le rapport des vitesses transversales et longitudinales, la densité, la fraction volumique, etc... dans les deux cas la propagation des ondes dépend de la structure [1].

1.3. Structures périodiques

1.3.1. Exemples de structures

Les structures à bandes interdites phononiques sont constituées de matériaux disposées périodiquement suivant une, deux ou trois dimensions (voir figure 1.3).

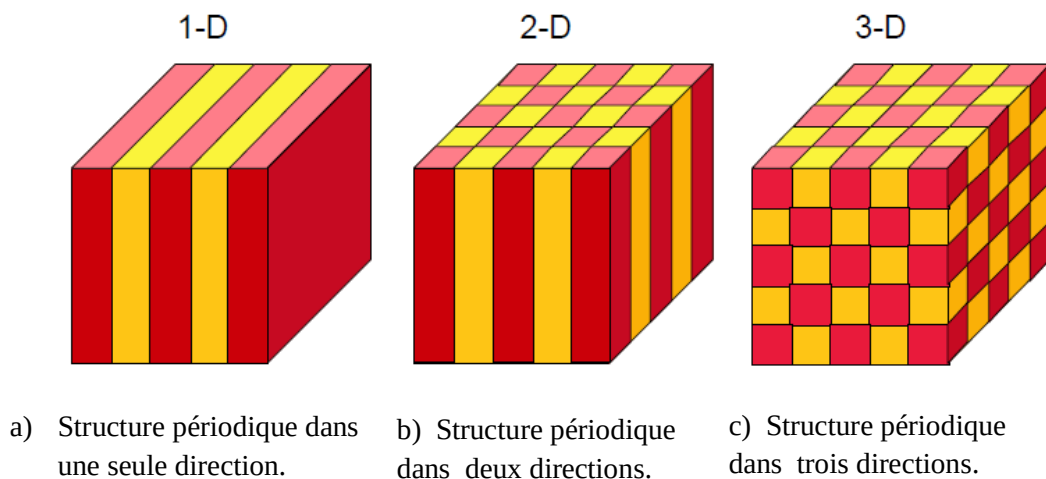


Figure 1.3 : Exemples de structures périodiques.

1.3.1.1. Structures périodiques unidimensionnelles (1D)

Les structures 1D sont les plus anciennes, elles ont été déjà longtemps étudiées et utilisées comme miroirs diélectriques ou filtres optiques. Elles consistent en une alternance de plans diélectriques d'épaisseur $\lambda/4$ où λ représente la longueur d'onde du rayonnement guidé (figure 1.3 (1D)). Les bandes interdites de cette structure, appelée également miroir de Bragg, sont sensibles à l'angle d'incidence de l'onde. Ainsi pour obtenir un contrôle des bandes interdites quel que soit l'angle d'incidence, il faut étendre la périodicité de la structure à 2 voir 3 dimensions.

1.3.1.2. Structures périodiques bidimensionnelles (2D)

Les structures 2D [20 ,21] sont des cristaux dont la permittivité diélectrique est périodique dans les deux dimensions et reste invariante dans la troisième dimension (figure 1.3 (2D)). Elles se regroupent principalement suivant trois familles qui sont les réseaux carré, triangulaire et hexagonal (voir figure 1.4).

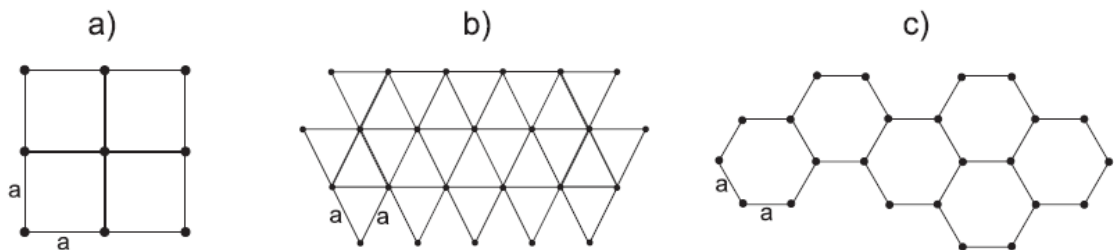


Figure 1.4: Structure 2D :a) Structure carrée, b) triangulaire et c)hexagonale.

Ces structures bi-périodiques sont généralement composées de cylindres diélectriques. Elles présentent une géométrie simple qui facilite leurs études théoriques et expérimentales.

1.3.1.3. Structures périodiques tridimensionnelles (3D)

Les structures périodiques tridimensionnelles sont périodiques suivant les trois directions de l'espace. La figure 1.5 montre quelques exemples de cristaux photoniques artificiels 3D.

En réalité, peu de structure 3D possèdent une bande interdite complète [22]. Ho et al.[23] ont été les premiers à montrer théoriquement la présence d'une bande interdite complète dans une structure à symétrie Cubique à Face Centrée (CFC) ou communément appelée structure diamant. L'inconvénient des structures 3D réside dans le fait qu'elles soient difficiles à réaliser expérimentalement.

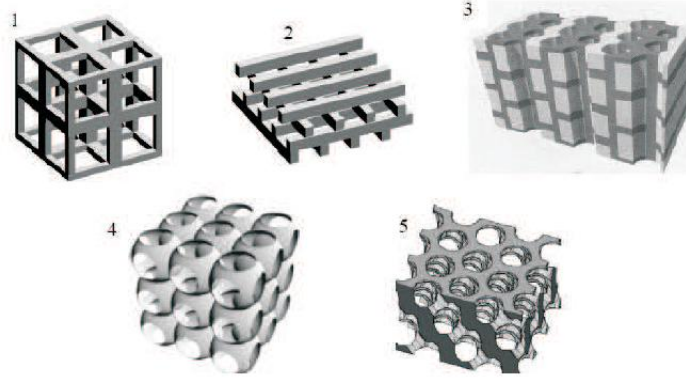


Figure 1.5 : Exemples de structures 3D publiées dans [22] : structure cubique(1), tas de bois(2), structure multicouches (3), opales ou opales inversées(4), Yablonovite(5).

1.3.2. Formulation théorique

1.3.2.1. Equation d'onde

En considérant un milieu inhomogène, l'équation générale de propagation de l'onde élastique peut s'écrire sous la forme (Cheong et al.[24]) :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\rho C_t^2 \nabla u_i) + \nabla \cdot \left(\rho C_t^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho C_l^2 - 2\rho C_t^2) \nabla \cdot u] \quad (1.1)$$

Avec $i=1, 2, 3$. Pour un système 2D infini, le vecteur déplacement $u_i = u(x, y)$, et l'expression (1.1) devient :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \nabla_T \cdot (C_{44} \nabla_T u_i) + \nabla_T \cdot \left(C_{44} \frac{\partial u_T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} [(C_{11} - 2C_{44}) \nabla_T \cdot u_T] \quad (1.2)$$

Avec,

$$U_T = [u_x, u_y] \quad \text{et} \quad \nabla_T = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right], \quad i = 1, 2$$

1.3.2.2. Développement en série de Fourier d'une fonction périodique

La nature périodique de la structure, permet d'exprimer les paramètres élastiques associés (ρ , $C_{11} = \rho C_l^2$ et $C_{44} = \rho C_t^2$) en série de Fourier [25], en utilisant la forme générale suivante :

$$F(r) = \sum_G F_G e^{iG r} \quad (1.3)$$

Où les vecteurs G sont les vecteurs d'un réseau appelé réseau réciproque et F_G coefficient d'expansion.

1.3.2.3. Théorème de Bloch

Le réseau étant périodique, les potentiels scalaires $\Phi(\vec{r})$ sont des fonctions de Bloch définies par la relation,

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{r}) e^{i\vec{k}_B \vec{r}} \quad (1.4)$$

Où les $\vec{k}_B$ sont les nombres d'onde de Bloch à déterminer correspondants aux constantes de propagation. La fonction $\Phi_{\vec{k}_B}(\vec{r})$ est une fonction de période L dans la direction Ox . Cette propriété, illustrée par la figure 1.6, indique le passage d'une maille à une autre du réseau est entièrement décrit par un facteur d'amplitude porté par la fonction exponentielle apparaissant dans la relation ci-dessus [26].

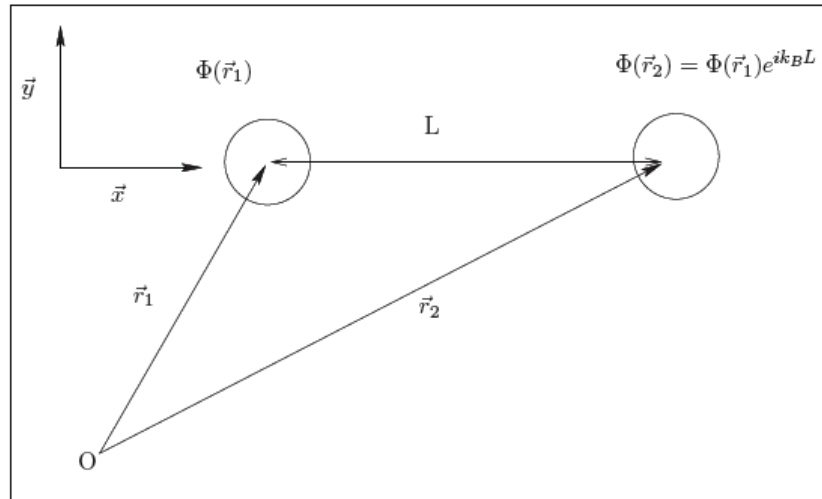


Figure 1.6 : Illustration d'une conséquence du théorème de Bloch.

Le passage d'un point du réseau à un autre espacé d'une maille se traduit par un déphasage de $e^{i\vec{k}_B L}$. Le calcul des bandes interdites d'un réseau périodique se limite à l'étude d'une cellule élémentaire moyennant l'application de conditions aux limites périodiques données par l'équation (1.6) ci-dessous.

Selon la théorie de Bloch [25], les solutions de l'équation d'onde sous la forme de Floquet-Bloch peuvent être écrites comme :

$$u(r, t) = e^{i(K.r - \omega t)} \cdot u_k(\vec{r}) \quad (1.5)$$

Où :

k : Vecteur d'onde dans l'espace réciproque.

ω : Pulsation de l'onde.

$u_k(\vec{r})$ a la même périodicité que les paramètres élastiques et satisfait à

$u_k(r) = u_k(r+1)$. Ainsi, l'expression suivante peut être dérivée :

$$\begin{aligned} u_k(r + L, t) &= e^{i(K(r+L) - \omega t)} \cdot u_k(r + L) \\ &= e^{iK.L} \cdot e^{i(K.r - \omega t)} \cdot u_k(r) = u(r, t) \cdot e^{iK.L} \end{aligned} \quad (1.6)$$

On obtient ainsi une équation aux valeurs propres. A chaque vecteur d'onde $\vec{k}$ correspond un ensemble de valeurs propres, dont les solutions $\omega(k)$ constituent les courbes de dispersion dans le cristal. Les solutions étant elles-mêmes périodiques, il est possible de représenter la totalité des solutions sur un graphe réduit à la zone de Brillouin dans l'espace réciproque [27].

1.3.2.4. Réseau direct et réseau réciproque

D'un point de vue géométrique, chaque élément du réseau illustré sur la figure 1.7 peut être représenté à l'aide de deux vecteurs de base $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$. De plus, le réseau considéré étant à géométrie carré, ces deux vecteurs définissent une base orthogonale dont les normes sont égales au paramètre de maille L ,

$$\|\vec{d}_1\| = \|\vec{d}_2\| = L \quad (1.7)$$

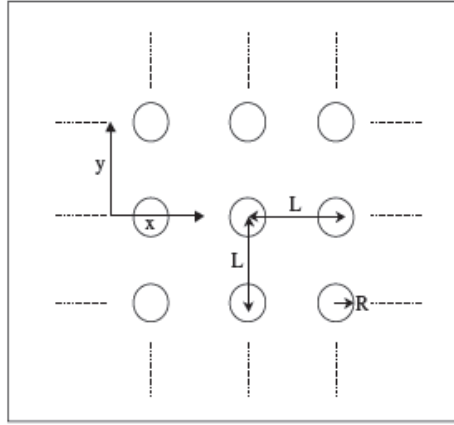


Figure 1.7 : Cristal phononique à deux dimensions constitué d'un ensemble de cylindres disposés en réseau périodique carré.

La géométrie de ce cristal est entièrement définie par le rayon R des cylindre et le paramètre de maille L du réseau.

Ces deux vecteurs de base sont représentés sur la figure 1.8. En fixant pour origine arbitraire le centre d'un cylindre, l'ensemble des positions des centres des cylindres est décrit par les vecteurs $\vec{D}_{l_1, l_2}$ du réseau direct. Ces vecteurs sont définis par la relation,

$$\vec{D}_{l_1, l_2} = l_1 \vec{d}_1 + l_2 \vec{d}_2 \quad (1.8)$$

Où l_1 et l_2 sont des entiers relatifs. Les vecteurs $\vec{D}$ désignent les positions du centre des cylindres dans le réseau direct.

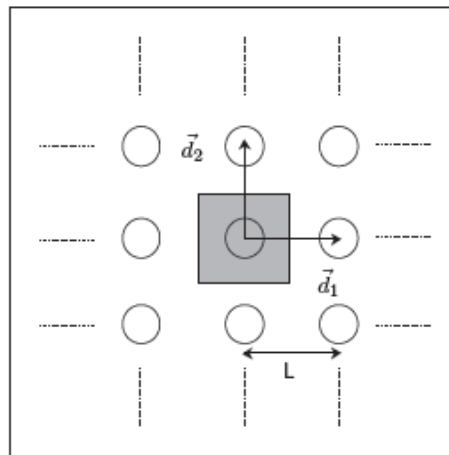


Figure 1.8 : Vecteurs de base et maille élémentaire de Wigner-Seitz (zone grisée) dans le réseau direct.

Pour décrire totalement ce réseau direct, il suffit de connaître la géométrie complète d'une maille élémentaire. A partir de celle-ci, l'ensemble du réseau est décrit par l'intermédiaire de la relation (1.8).

Un exemple de maille élémentaire est représenté en zone grisée sur la figure 1.8.

A tout réseau direct est associé un réseau réciproque également décrit par deux vecteurs de base $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ définis d'après la propriété suivante,

$$\vec{d}_i \cdot \vec{r}_j = \delta_{i,j} \quad (1.9)$$

Où : $\delta_{i,j}$ représente le symbole de Kronecker et les entiers i et j prennent chacun les valeurs 1 ou 2. La norme de ces vecteurs vérifie la relation,

$$\|\vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = \frac{1}{L} \quad (1.10)$$

Ces deux vecteurs de base sont représentés sur la figure 1.9. Pour le cas particulier du réseau carré, les deux vecteurs de base du réseau réciproque $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont respectivement colinéaires aux vecteurs de base du réseau direct $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$. L'ensemble des points du réseau réciproque est décrit par les vecteurs $\vec{R}_{m_1, m_2}$ définis par la relation,

$$\vec{R}_{m_1, m_2} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \quad (1.11)$$

Où m_1 et m_2 sont des entiers relatifs. Dans le réseau réciproque, ces vecteurs $\vec{R}$ désignent des directions de propagation. La plus petite cellule élémentaire permettant de décrire ce réseau réciproque est appelé «première zone de Brillouin». Cette zone est délimitée par le contour $\Gamma X M$ représenté sur la figure I.9. En incidence normale, l'onde acoustique se propage suivant l'axe Ox, c'est-à-dire, suivant l'axe ΓX du contour de Brillouin.

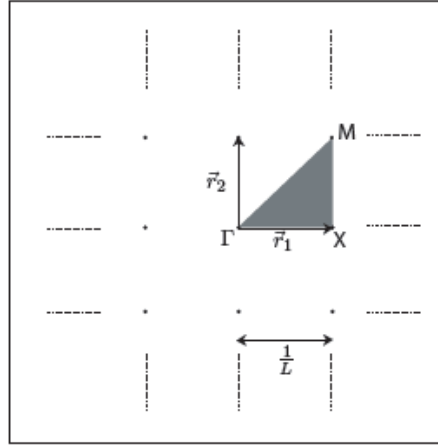


Figure 1.9 : Vecteurs de base et première zone de Brillouin dans le réseau réciproque.

Le contour de cette zone définit toutes les directions possibles de propagation. L'incidence normale d'une onde acoustique selon l'axe Ox est décrite par ΓX .

Pour des raisons de commodité, dans la suite, l'ensemble des points du réseau réciproque est décrit par les vecteurs $\vec{G}_{m_1, m_2}$ définis par la relation,

$$\vec{G}_{m_1, m_2} = 2\pi m_1 \vec{r}_1 + 2\pi m_2 \vec{r}_2 \quad (1.12)$$

Ceci permet de rendre les grandeurs mesurées dans le réseau réciproque (décrivant des directions de propagation) homogène à des nombres d'onde (i.e. [rad.m⁻¹]) [26].

1.3.2.5. Zone de Brillouin

La zone de Brillouin irréductible dans l'espace réciproque est l'équivalent de la cellule élémentaire pour un réseau de Bravais dans l'espace réel. On peut y définir une cellule élémentaire correspondant à la zone définie par les plans médiateurs entre chaque motif de la maille représentant les points de hautes symétries du réseau réciproque. Chaque point de l'espace contenu dans cette zone de Brillouin irréductible est donc plus proche du nœud d'un réseau que des autres nœuds. Pour illustrer simplement cet aspect, la figure 1.10 représente la zone de Brillouin irréductible pour un réseau carré de période a .

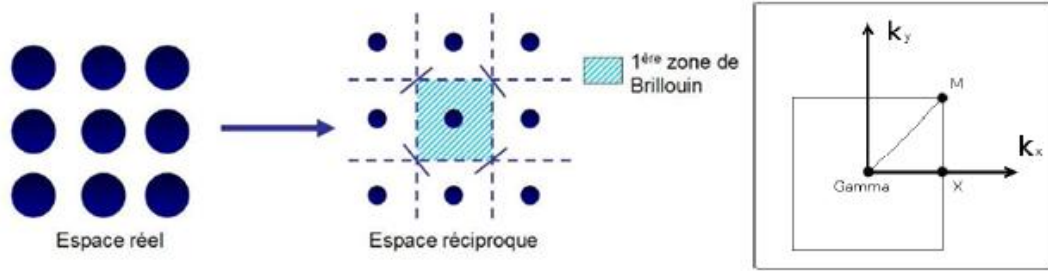
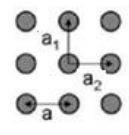
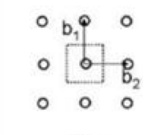
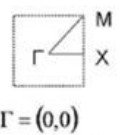
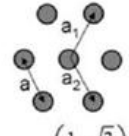
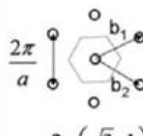
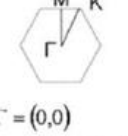


Figure 1.10 : Représentation d'un réseau carré dans l'espace réel et l'espace réciproque avec la première zone de Brillouin associée.

Dans l'espace réciproque, les vecteurs de base $\vec{k}_x = \frac{2\pi}{a} \vec{x}$ et $\vec{k}_y = \frac{2\pi}{a} \vec{y}$. La première zone de Brillouin est carrée, de paramètre $\frac{2\pi}{a}$. Les points de haute symétrie de cette maille primitive sont nommés Γ , X et M (comme le montre la figure 1.10), et leurs coordonnées respectives dans le réseau réciproque $(\Gamma, \vec{k}_x, \vec{k}_y)$ sont $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ [2].

Le tableau 1.2 représente l'espace direct et réciproque ainsi que la première zone de Brillouin pour un réseau carré et triangulaire [27]. On définit également par symétrie, la zone de Brillouin réduite (ΓMX pour le réseau carré et ΓMK pour le réseau triangulaire). La connaissance de la structure de bandes dans cette zone de Brillouin réduite est suffisante pour connaître l'ensemble des modes de propagation dans le cristal si on considère ce dernier comme ayant une périodicité infinie dans chaque direction du plan.

Tableau 1.2 : L'espace direct et réciproque pour un réseau carré et hexagonal.

	direct	réciproque	zone de Brillouin
carré	 $a_1 = a(0,1)$ $a_2 = a(1,0)$	 $b_1 = \frac{2\pi}{a}(0,1)$ $b_2 = \frac{2\pi}{a}(1,0)$	 $\Gamma = (0,0)$ $X = \left(\frac{\pi}{a}, 0\right)$ $M = \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)$
triangulaire	 $a_1 = a\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $a_2 = a\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	 $b_1 = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $b_2 = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	 $\Gamma = (0,0)$ $K = \left(\frac{2\pi}{3a}, \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}\right)$ $M = \left(0, \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}\right)$

La cellule élémentaire dans l'espace direct est aussi définie par son facteur de remplissage. Celui-ci est le rapport entre l'aire occupée par la particule élémentaire et l'aire de la cellule élémentaire. Pour le cas d'une particule circulaire de rayon R dans une cellule de base de dimension a , le facteur de remplissage est égal à :

- $\frac{\pi R^2}{a^2}$ Pour un réseau carré.
- $\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}a^2}$ Pour un réseau hexagonal.

Ces notions de facteur de remplissage, de zone de Brillouin et de diagramme de dispersion vont être nos principaux outils pour l'étude du comportement d'un cristal phononique.

1.3.3. Diagramme de bandes

La propagation des ondes mécaniques dans un milieu est généralement décrite par une relation de dispersion entre la fréquence de l'onde ω et le vecteur de propagation k . Le mécanisme régissant la constitution de bande interdite est basé sur les réflexions de Bragg en raison de la périodicité du cristal ou sur le phénomène de résonance locale des éléments mis en réseaux.

1.3.3.1. Notion de bande interdite

La notion de bande interdite peut être comprise en représentant les interférences des ondes multiples diffusées dans le cristal phononique. L'interférence constructive ou destructive des ondes crée des gammes de fréquences pour lesquelles les ondes peuvent se propager à travers le cristal ou sont bloquées par ce dernier [1].

En général, la régularité de l'agencement des éléments de dispersion des cristaux phononiques donne lieu à des réflexions de Bragg à l'intérieur du cristal, par contre la présence des éléments singuliers possédant des propriétés de résonance engendre un phénomène de résonance locale de chaque élément mis en réseau.

1.3.3.2. Bande interdite due à des réflexions de Bragg

Si les longueurs d'ondes des ondes élastiques, λ s'y propageant dans le milieu sont de l'ordre de la périodicité du réseau, a , la bande interdite obtenue est due à réflexion de Bragg. On peut distinguer trois domaines différents suivant la valeur de la longueur d'onde λ par rapport à la période de l'empilement [28].

Pour $\lambda \ll a$: l'onde se propage dans une succession de milieux.

Pour $\lambda \gg a$: l'onde est peu affectée par la structuration et se propage comme dans un matériau homogène.

Pour $\lambda \approx a$: l'onde est fortement perturbée par la périodicité du milieu. La propagation de l'onde est plus complexe que dans les cas précédents.

La figure 1.11 montre le diagramme de bande d'un cristal photonique unidimensionnelle 1D (cas optique) composé dans un premier cas d'un matériau homogène et dans un deuxième cas d'un empilement périodique de deux couches diélectriques, de permittivité ε_1 (respectivement ε_2) et d'épaisseur a_1 (respectivement a_2).

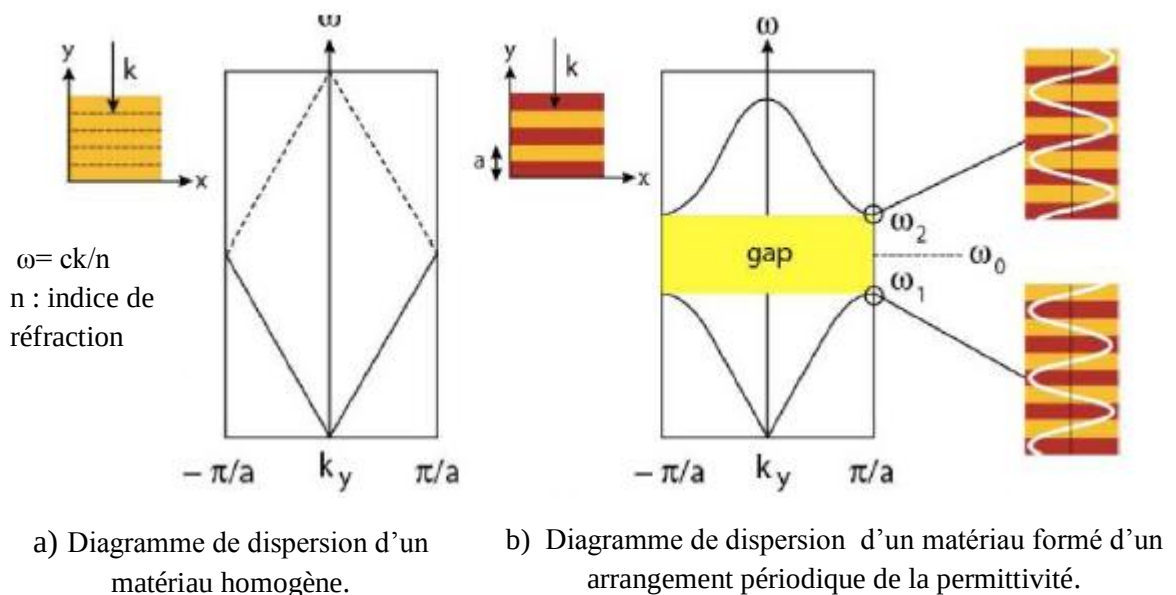


Figure 1.11 : Diagramme de bande pour une structure périodique à une dimension [29].

La période vaut alors $a_1 + a_2 = a$. Dans le repère $(0, \vec{t})$, le vecteur $\vec{a} = \vec{a}_i$ définit la maille élémentaire et le vecteur $\vec{b} = \frac{2\pi}{a} \vec{t}$ définit l'espace réciproque avec la première zone de Brillouin délimitée par $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$.

-Dans le cas où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, le matériau est homogène et il n'existe pas de bande interdite sur la courbe de dispersion (figure 1.11(a)). Cette dernière est donc une courbe classique de dispersion $\omega = \frac{ck}{n}$ avec $n = \sqrt{\varepsilon_1}$ qui peut être représenté sur la zone de Brillouin en considérant que le matériau est virtuellement périodique. Au-delà de $\frac{\pi}{a}$ (et en deçà de $-\frac{\pi}{a}$), ω continue à croître, mais dans le cadre d'une description d'un milieu périodique, cela correspondrait à une branche supérieure (mode supérieur) issu de $-\frac{\pi}{a}$ qui croîtrait jusque $+\frac{\pi}{a}$ à nouveau, et ainsi de suite. Il en va de même en deçà de $-\frac{\pi}{a}$. Cela donne naissance à un diagramme de bande fictif « replié » entre $-\frac{\pi}{a}$ et $+\frac{\pi}{a}$ de la figure 1.11(a).

-Si maintenant ε_1 et ε_2 sont différents, il a été montré qu'il existe une longueur d'onde, dite longueur de Bragg telle que :

$$\lambda_{Bragg} = 2.n_{eff} . a \quad (1.13)$$

Avec n_{eff} , l'indice effectif du milieu et a la période du réseau ($a_1 + a_2$), pour laquelle la réflectivité est maximale. Dans ce cas, pour une onde plane sous incidence normale de vecteur d'onde $\vec{k}$, les réflexions sont en phase et créent une onde réfléchie de vecteur d'onde $-\vec{k}$. On est dans le cas d'un miroir de Bragg où la transmission est nulle et où il existe des interférences constructives des ondes réfléchies. En conséquence, il existe des bandes de fréquence pour lesquelles la propagation est impossible, ce sont les bandes interdites photoniques (figure 1.11 (b)).

Ce phénomène intervient pour des nombres d'ondes équivalents à $k = \pm \frac{\pi}{a}$ soit en bord de la zone de Brillouin précédemment définie. On peut voir que la courbe de dispersion s'ouvre en bord du gap entre chaque branche, l'allure de la courbe y est alors quasi-plane traduisant une vitesse de groupe nulle. Lorsque cette onde stationnaire est établie il y a de fait une levée de dégénérescence en ces points créant ainsi deux états distincts. L'un localisé dans l'indice haut et l'autre dans la couche à indice plus faible (voir figure

1.11(b) représentant le comportement de l'onde dans le réseau pour le mode fonctionnant à la pulsation ω_1 et ω_2). Ces modes de pulsation ω_1 et ω_2 sont séparés par une zone fréquentielle où il n'existe aucun mode pour cette valeur de k . Le saut d'énergie pour passer d'un état à un autre (de $\varepsilon_1|E_0|^2$ à $\varepsilon_2|E_0|^2$) n'est alors pas continu et implique un saut fréquentiel (de $\hbar\omega_1$ à $\hbar\omega_2$).

On peut en déduire que la bande interdite photonique sera plus importante si le contraste d'indice entre les deux couches l'est aussi. L'épaisseur de chaque couche influera sur la valeur de la fréquence à laquelle se produit ce gap. Cette étude peut être étendue aux cristaux phononiques uni et /ou bidimensionnels où on y retrouvera les mêmes propriétés de bandes photoniques interdites [27].

1.3.3.3. Bande interdite due à l'interaction entre la diffusion de Bragg et le phénomène de résonance locale

Il est possible de placer des éléments singuliers possédant des propriétés de résonance plutôt que de simples éléments diffusants. Les résonateurs mis en place peuvent se déplacer et donc d'absorber l'énergie du système, on obtient alors une réelle interaction entre les deux phénomènes, la diffusion de Bragg due à la périodicité et la résonance locale de chaque élément.

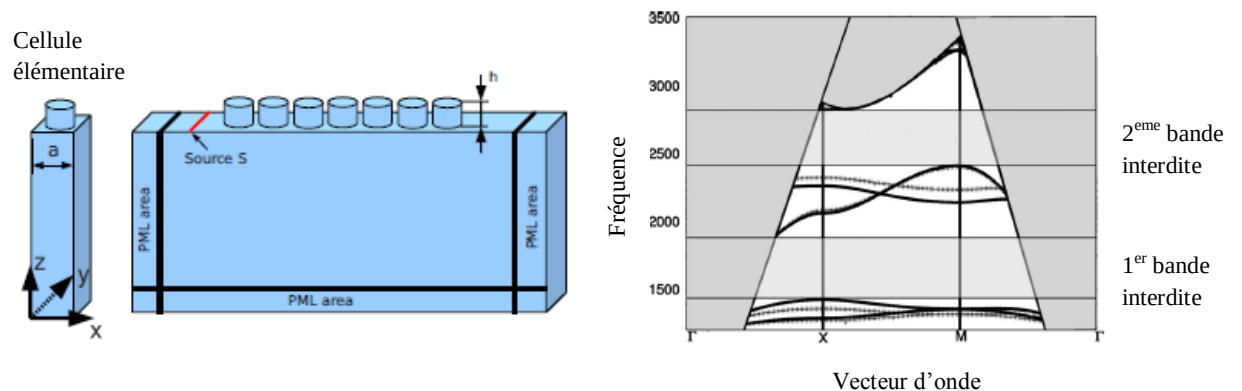


Figure 1.12 : Cas de bandes interdites de résonance pour un cristal phononique 2D d'après [30].

Certains articles récents [30, 31] traitent plus particulièrement des bandes interdites associées à ces phénomènes. Dans un milieu organisé il est possible de simuler la diffusion de Bragg et donc de prévoir la présence de bande interdite pour un certain angle avec une certaine fréquence (voir diagramme de bande figure 1.11(b)). Ces effets ont été validés par

l'expérience cependant, dans le cas des résonateurs, on voit parfois apparaître une bande interdite due aux résonances locales des éléments mis en réseau, on l'a nomme alors bande interdite de résonance (voir figure 1.12). L'apparition de cette dernière est liée au fait que chaque résonateur va piéger une partie de l'énergie de l'onde transmise, cependant l'onde interagit avec l'ensemble des éléments résonnants couplés entre eux et également couplés à la matrice hôte. C'est véritablement cette association qui joue un rôle clé dans la présence ou non d'une telle bande interdite, où les longueurs d'ondes dépassent de loin la périodicité du cristal phononique.

On se rend alors compte que l'on va vraiment pouvoir jouer sur chaque variable du problème pour obtenir ces effets, à la fois les paramètres du réseau mais aussi les paramètres des résonateurs.

1.3.3.4. Paramètres d'influence des bandes interdites

Les paramètres régissant l'obtention de bandes interdites totales ont fait l'objet d'études approfondies. Les paramètres ayant une influence significative sont la topologie du réseau, le contraste de vitesse et de densité et la fraction volumique de diffuseurs.

La topologie cermet, constituée de diffuseurs isolés, semble généralement préférable à la topologie réseau, dans laquelle les diffuseurs sont interconnectés. Diminuer la symétrie de la maille semble généralement fournir de bons résultats : un arrangement cubique à faces centrées est a priori plus favorable qu'un arrangement cubique simple ou centré.

En ce qui concerne les composites solide-solide, un contraste de densité important est crucial pour l'apparition de bandes interdites totales. Plus spécifiquement, des diffuseurs de forte densité dans une matrice de faible densité semblent extrêmement favorables, alors que c'est l'opposé pour les composites liquide-liquide.

Quant à la fraction volumique optimale d'apparition d'une large bande interdite absolue (définie par le rapport de sa largeur sur sa fréquence centrale), elle s'étend de 10 à 50 %, et dépend fortement des autres paramètres [2].

1.4. Propagation des ondes sismiques

Avant de passer aux applications du concept des cristaux phononiques dans les différents domaines, en particulier en génie sismique nous avons jugé utile de rappeler quelque notion de base sur la nature et l'origine des ondes sismiques ainsi que leur propagation à travers les différentes couches géologique, afin d'étudier la possibilité d'utiliser le concept des matériaux à bandes interdites à l'aide de structures uni ou bidimensionnelles de différentes compositions en vu de protéger le site des vibrations d'origine sismique.

1.4.1. Généralités sur les ondes

Le terme « onde » est issu du latin « unda » signifiant « eau courante ». Une onde est définie comme étant la propagation d'une déformation, d'un ébranlement ou une vibration dont l'élongation est une fonction périodique des variables de temps et d'espace (célérité, fréquence ou période).

On distingue deux types d'ondes :

- Les ondes mécaniques : propagation d'une déformation mécanique dans un milieu. La perturbation se transmet de proche en proche dans le milieu. Elle transfère de l'énergie sans transfert de matière. Ce sont les ondes sonores, les vagues, les ondes sismiques, etc.
- Les ondes électromagnétiques : propagation d'un champ électromagnétique ne nécessitant pas de milieu matériel connu. Ce sont les ondes hertziennes, les rayons infrarouges, les ondes lumineuses (radiations visibles), les rayons ultraviolets, les rayons x et les rayons gamma. Ces ondes transfèrent de l'énergie.

1.4.2. Origine et propagation des ondes sismiques

Les ondes sismiques se propagent à partir du foyer (source d'émission) dans toutes les directions qui leur sont offertes. L'énergie est propagée sous forme de trains d'ondes à l'origine du tremblement de terre. L'onde sismique provoque un déplacement minime de chaque particule minérale qui oscille autour de sa position d'équilibre. Une particule ayant des « liaisons » avec les particules voisines, l'énergie (le mouvement)

se transmet de proche en proche sur de très longues distances. La surface séparant les particules en mouvement de celles qui ne le sont pas encore correspond au front d'onde. La surface formée par les particules vibrant en phase est la surface d'onde [32]. On matérialise la direction de propagation de l'énergie (donc de l'onde) par le rai sismique, qui, dans un milieu isotope, est perpendiculaire à la surface d'onde. Dans un milieu homogène, le rai sismique est une droite.

1.4.3. Caractéristiques des différents types d'ondes sismiques

Les vibrations lors d'un séisme se propagent dans toutes les directions. On distingue deux types d'ondes, les ondes de volume qui traversent les couches géologiques et les ondes de surface qui se propagent à sa surface. Sur les enregistrements des sismographes (figure 1.13), elles se succèdent ou se superposent. Leur vitesse de propagation et leur amplitude sont modifiées par les structures géologiques qu'elles traversent, c'est pourquoi, les signaux enregistrés sont la combinaison d'effets liés à la source, aux milieux traversés et aux instruments de mesure.

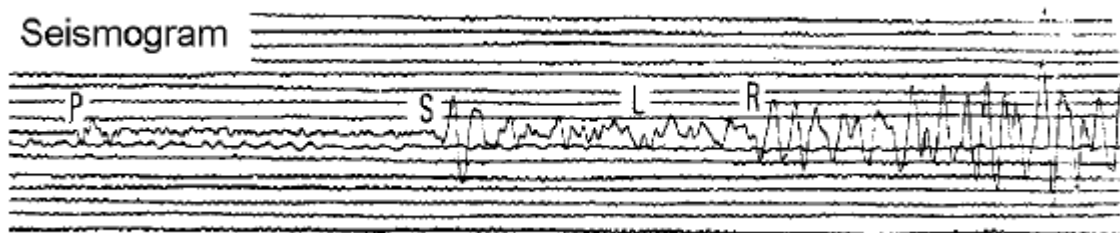


Figure 1.13 : Sismogramme montrant quatre types d'ondes successives.

1.4.3.1. Ondes de volume

Elles se propagent à l'intérieur du globe terrestre. Leur vitesse de propagation dépend du matériau traversé et, d'une manière générale, cette dernière augmente avec la profondeur car le matériau traversé devient plus dense.

On distingue :

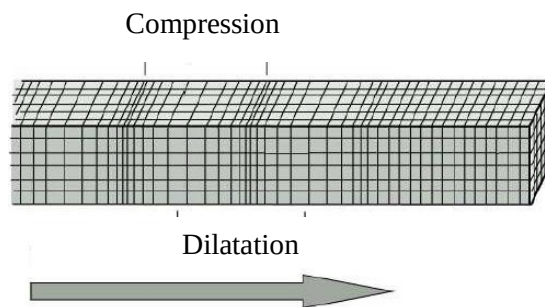
- Les **ondes P** ou **ondes primaires** appelées aussi ondes de compression ou ondes longitudinales (figure 1.14(a)). Le déplacement du sol qui accompagne leur passage se fait par des dilatations et des compressions successives. Ces déplacements du sol sont parallèles à la direction de propagation de l'onde. Ce

sont les plus rapides (6 km.s^{-1} près de la surface) et donc les premières à être enregistrées sur les sismogrammes. Elles sont responsables du grondement sourd que l'on peut entendre au début d'un tremblement de terre.

- Les **ondes S** ou **ondes secondaires** appelées aussi ondes de cisaillement ou ondes transversales (figure 1.14(b)). À leur passage, les mouvements du sol s'effectuent perpendiculairement au sens de propagation de l'onde. Ces ondes ne se propagent pas dans les milieux liquides, elles sont en particulier arrêtées par le noyau externe de la terre. Leur vitesse est de $4,06 \text{ km.s}^{-1}$. Elles apparaissent en second sur les sismogrammes.

La différence des temps d'arrivée des ondes P et S suffit à donner une indication sur l'éloignement du séisme en connaissant leur vitesse de propagation.

a) Onde P



b) Onde S

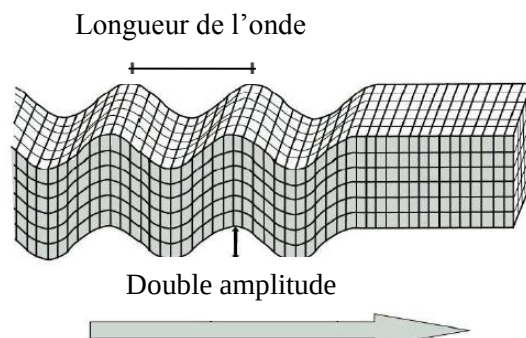


Figure 1.14 : Les ondes de volume.

Les ondes de volume se propagent comme toutes les ondes, et en particulier comme les rayons lumineux : elles peuvent être réfléchies ou réfractées. , c'est-à-dire déviées à chaque changement de milieu, au passage manteau-noyau par exemple. Elles peuvent ainsi suivre

des trajets très complexes à l'intérieur des couches géologiques. Leur temps de parcours dépend de ce trajet, elles n'arrivent pas toutes en même temps au même endroit.

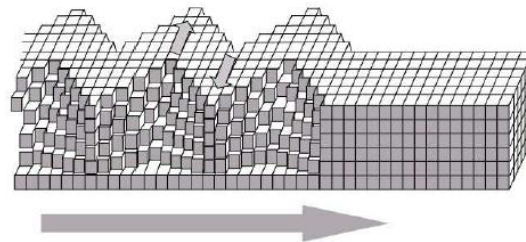
1.4.3.2. Ondes de surface

Ce sont des ondes guidées par la surface de la terre. Leur effet est comparable aux rides formées à la surface d'un lac. Elles sont moins rapides que les ondes de volume mais leur amplitude est généralement plus forte.

On peut distinguer :

- L'onde de love (L) : c'est un anglais Augustus Edward Hough Love qui a découvert son existence en 1911. Son déplacement est comparable à celui des ondes S sans le mouvement vertical (figure 1.15(a)). Les ondes de love provoquent un ébranlement horizontal qui est la cause de nombreux dégâts aux fondations d'un édifice qui n'est pas une construction parasismique. Les ondes de love se propagent à environ 4 km.s^{-1} .
- L'onde de Rayleigh (R) : elle a été découverte par John William Strutt Rayleigh en 1885. Son déplacement est complexe, assez semblable à celui d'une poussière portée par une vague, constituant un mouvement à la fois horizontal et vertical (figure 1.15(b)) [33].

a) Onde de Love



b) Onde de Rayleigh

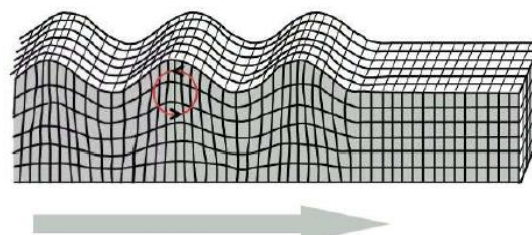


Figure 1.15 : Les ondes de surface.

CHAPITRE 1 : PRINCIPE ET FONDAMENT THEORIQUE DES CRISTAUX PHONONIQUES

Pour caractériser une onde, on indique sa direction de propagation, sa « vitesse » de propagation ou célérité. Le terme « vitesse » est réservé au déplacement d'un mobile (déplacement de la matière), dans le cas d'une onde, on utilise le terme célérité (pas de déplacement de matière). Vitesse et célérité sont représentées par la lettre V [32].

Une comparaison entre les différents types d'ondes sismiques est illustrée dans le tableau 1.3.

TABLEAU 1.3 : Comparaison entre les différents types d'ondes sismique

1.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé le fondement théorique et les notions de bases associées aux cristaux phononiques, nous avons notamment vu qu'un matériau composite présentant une périodicité spatiale dans une, deux ou trois directions de l'espace est capable de bloquer la propagation des ondes élastiques ou acoustiques dans certaines directions et gammes de fréquences, par le biais de réflexion de Bragg due à la périodicité ou par interaction entre les résonances locales des éléments mis en réseau et la diffusion de Bragg. Nous avons décrit également l'origine et la nature de la propagation des ondes sismiques en vue de l'intégration du concept des cristaux phononiques dans le génie parasismique.

CHAPITRE 1 : PRINCIPE ET FONDAMENT THEORIQUE

Tableau 1.3 : Comparaison entres les différents types d'ondes sismiques.

<i>Caractéris- tiques</i>		<i>Période</i>	<i>Type d'ondes</i>	<i>Zones traversées</i>	<i>Célérité</i>	<i>Mouvement des particules</i>	<i>Comportement de l'onde sur une surface séparant deux milieux physiques différents</i>
<i>Ondes de volume</i>	Ondes P (ondes premières)	Courte de 1 à 10 secondes	Ondes de compression, dilatation Ondes longitudinales	Ces ondes traversent la planète. Transmises dans tous les milieux (y compris dans l'air : responsables du grondement sourd lors d'un séisme).	Célérité (V) en fonction de la nature du milieu. V augmente avec la distance parcourue. V augmente avec la densité du milieu traversé. V : 5,5 à 12 km /s.	Les particules se déplacent suivant la direction de propagation. Les matériaux subissent un changement de volume.	L'énergie transportée par l'onde incidente P est distribuée en ondes P réfléchies et réfractées.
	Ondes S (ondes secondes)	Courte de 1 à 10 secondes	Ondes de cisaillement Ondes transversales	Ces ondes traversent la planète. Elles ne sont pas transmises par les fluides.	Célérité (V) en fonction de la nature du milieu. V augmente avec la distance parcourue. V augmente avec la densité du milieu traversé. V : 3,5 km/s à 6,5 km/s	Les particules se déplacent perpendiculairement à la direction de propagation. Les matériaux ne subissent pas de changement de volume.	L'énergie transportée par l'onde incidente S est distribuée en ondes S réfléchies et réfractées
<i>Ondes de surface</i>	Ondes L (ondes love)	Longue de 30 à 40 secondes	Ondes de surface	Ces ondes circulent parallèlement à la surface de la planète	Célérité « constante »(plus rapide sous les océans que sous les continents) V=4,4 km/s	Les particules oscillent dans un plan horizontal perpendiculaire à la direction de propagation. Ondes de grande amplitude.	Ces ondes transportent la plus grande partie de l'énergie
	Ondes R (ondes Rayleigh)				V=4km/s pour les ondes de Rayleigh	Les particules oscillent dans un plan vertical et réalisent un mouvement elliptique.	

CHAPITRE 1 : PRINCIPE ET FONDEMENT THEORIQUE

CHAPITRE 2

APPLICATION DU CONCEPT DES RESEAUX PERIODIQUES DANS DIFFERENTS DOMAINES

2.1. Introduction

En structurant périodiquement la matière, il est possible d'empêcher les ondes élastiques de se propager, mais aussi de les confiner ou de leur faire suivre les chemins les plus détournés à l'échelle de la longueur d'onde. Ces objets artificiels imitant la structure des cristaux naturels pourraient mener à la conception de véritables circuits phononiques. En effet, l'existence de bandes interdites acoustiques, des bandes de fréquences où aucune propagation n'est permise dans ces structures offre de nombreuses applications potentielles allant de l'isolation sonore au filtrage en passant par les guides d'ondes et les capteurs. Dernièrement d'autres applications sont envisagées tel que l'isolation sismique des structures et des sites à travers l'atténuation des ondes de surface engendrées par un tremblement de terre.

2.2. Application des cristaux phononiques

2.2.1. Application aux nano et micro structure

Depuis une quinzaine d'années, une nouvelle voie a été ouverte dans le domaine des ondes acoustiques et de leurs applications : il est possible de modéliser la matière pour créer des structures périodiques (les cristaux phononiques) ayant des propriétés acoustiques très particulières. En effet, il est maintenant possible d'élaborer des structures possédant un comportement discriminant vis-à-vis des fréquences des ondes qui les traversent : certaines sont transmises inchangées, alors que d'autres sont bloquées ou interdites.

- Les applications sont variées et s'étendent du macro- au microscopique. A l'échelle du mètre, des murs antibruit qui bloquent la transmission des ondes sonores très efficacement peuvent être construits. À l'échelle millimétrique, c'est l'imagerie échographique du corps humain, par exemple, qui est concernée. A l'échelle microscopique, des nouveaux composants mariant microélectronique et ondes acoustiques pourraient voir le jour et étendre les capacités des téléphones portables et des réseaux sans fil [34].

2.2.2. Application en génie sismique

Contrairement aux autres applications, la protection sismique par le concept des réseaux périodiques nécessite de travailler dans le domaine des basses fréquences [0.1-20 Hz] (Chopra 2005 [35]).

2.2.2.1. Isolation sismique d'un site

Une première étude théorique dans le domaine de l'isolation sismique a été menée par B. Baykant ALAGÖZ et Serkan ALAGÖZ (2009) [36], pour l'isolation sismique d'un site de surface 40x40 km à travers l'atténuation des ondes de surface, supposées comme le type le plus destructeur pour les constructions lors d'un séisme. En effet cette hypothèse n'est pas en conformité totale avec le principe de la propagation des ondes sismiques et l'incidence de ces ondes sur les ouvrages de génie civil. L'étude suppose une propagation en surface des ondes sismiques et ne tient pas compte des ondes de cisaillement venant du substratum/profondeurs.

Le réseau mis en place (illustré sur la figure 2.1) est constitué d'un sol, représentant la matrice, dans lequel des trous cylindriques vides sont réalisés périodiquement.

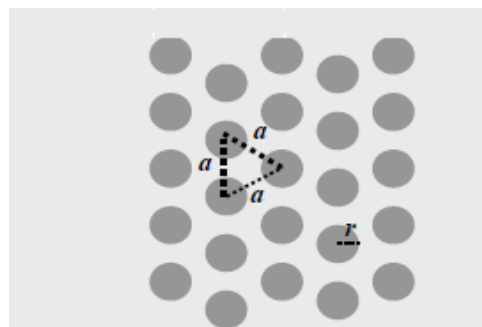


Figure 2.1 : Schéma du cristal phononique 2D.

Pour le modèle numérique de la propagation de l'onde sismique, il a été supposé que le sol est fait de petites structures granulaires appelées particules et le déplacement de ces dernières entraînent la compression et la traction des zones. La pression dans la zone comprimée est plus grande que celle de la zone tendue comme le montre figure 2.2.

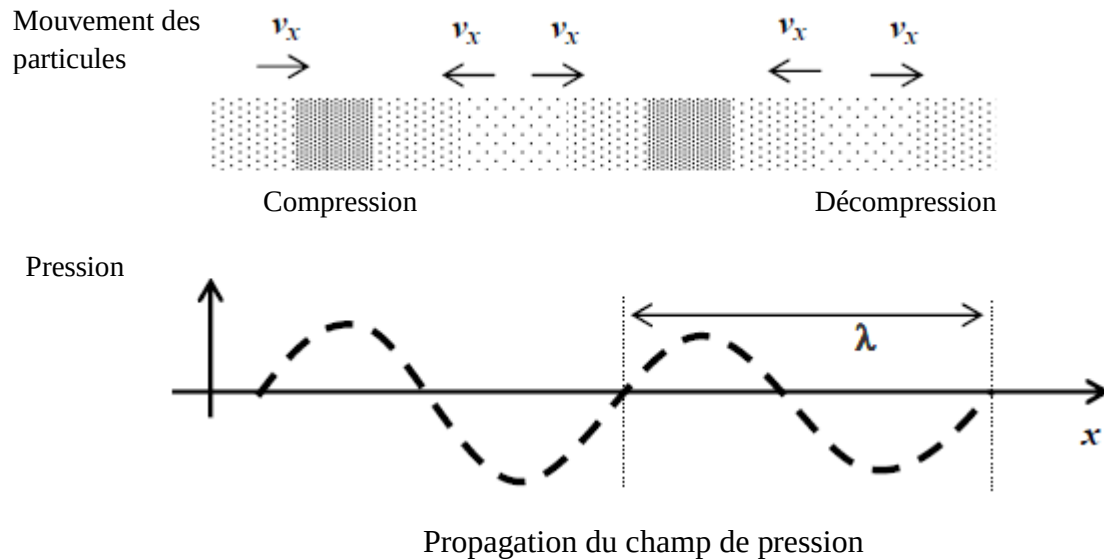
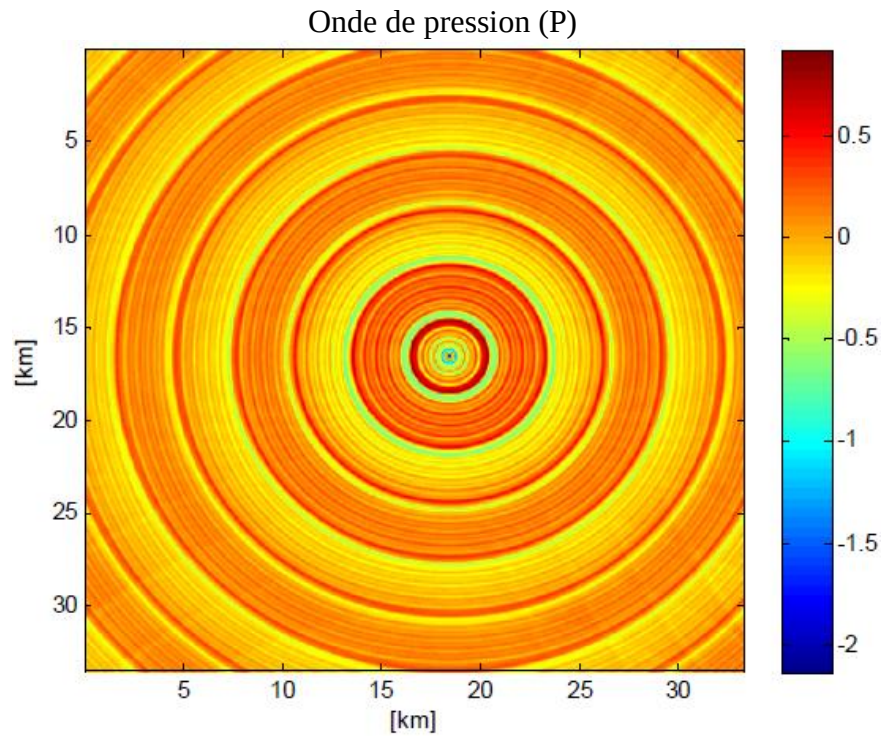


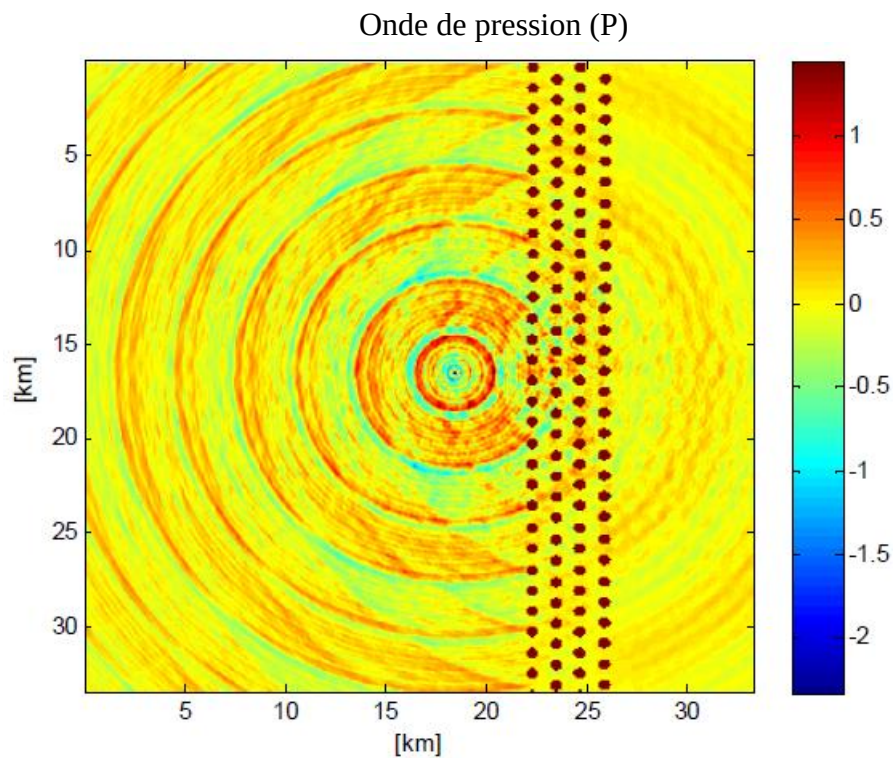
Figure 2.2 : Champ de pression et déplacement des particules dans une dimension.

La figure 2.3 (a) et 2.3 (b) montrent respectivement la propagation de l'onde de pression sans et avec réseau périodique [36]. Les résultats obtenus par la simulation FDTD (finite difference time domain) montre l'apport du réseau périodique mis en place dans l'atténuation de l'onde de pression.

Ce concept permet de considérer le cristal comme bouclier antisismique capable d'atténuer la propagation des ondes de surface dans une certaine gamme de fréquences.



a) Propagation de l'onde de pression sans réseau périodique



b) Propagation de l'onde de pression avec réseau périodique

Figure 2.3 : Propagation de l'onde de pression (a) : sans réseau périodique (b) : avec réseau périodique [36].

Le tableau 2.1 résume les différents paramètres de conception, qui manquent de validation par des études théoriques et expérimentales plus avancées.

Tableau 2.1 : Les paramètres de conception du réseau périodique pour $\lambda_{max}=3000$ m d'après [36].

<i>Paramètres de conception</i>	<i>Ordre de grandeur des paramètres</i>	<i>Valeurs</i>
Période a	$a \cong 0.44 \lambda_{max}$	1320 m
Le rayon du diffuseur (r)	$a/5 < r < a/3$	264-440 m ($a=1320m$)
La hauteur du diffuseur (h)	$h \geq 2 \lambda_{max}$	6000 m

D'autres conceptions potentielles pour l'isolation sismique des grandes surfaces telles que les villes, vallées, côtes...etc. ont été proposées par Baykant ALAGÖZ et Serkan ALAGÖZ. La figure 2.4 montre l'application du concept des cristaux phononiques pour l'isolation sismique d'un sol mou, c'est le cas de la vallée où la couche sédimentaire est la plus épaisse ce qui provoque une amplification de l'accélération sismique due à la présence de sédiments non consolidés. L'objectif est de réduire cette amplification afin d'éviter l'effet de site qui se manifeste dans ce type de sol.

Le réseau périodique mis en place est constitué de plusieurs trous représentant les diffuseurs du cristal et le sol comme matrice.

Ce réseau est caractérisé par le rayon du cylindre (r), la distance entre le centre de deux diffuseurs adjacents (a) et la hauteur du diffuseur (h).

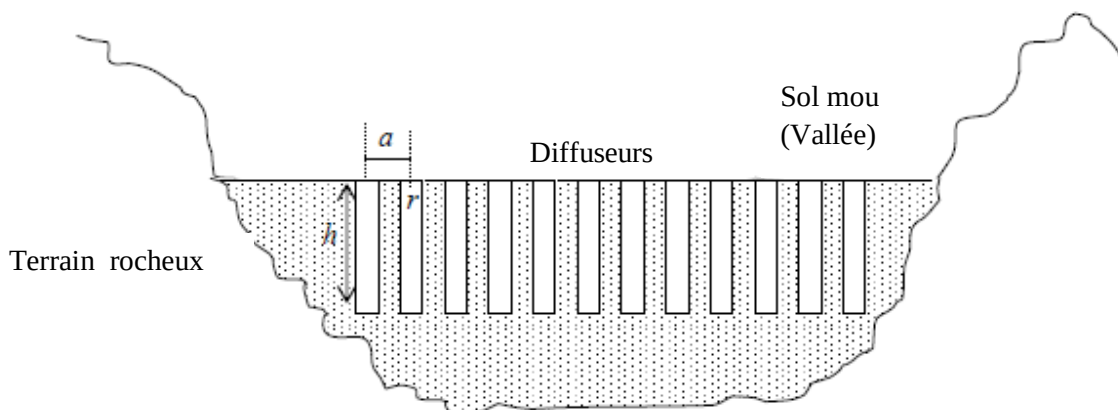


Figure 2.4 : Vue en coupe du réseau périodique mis en place pour l'isolation sismique de la vallée [36].

D'une manière similaire les cristaux phononiques peuvent être utilisés pour la réduction des effets de tsunamis qui survient suite à une secousse sismique [36].

La protection peut être faite par des réservoirs ou sacs reliés entre eux et qui représentent dans ce cas les diffuseurs du cristal et la mer sera la matrice.

La conception présentée sur la figure 2.5 montre que le réseau peut être placé au fond de la mer, puis remonter grâce à une pompe hydraulique qui se déclenche une fois le tsunami est détecté.

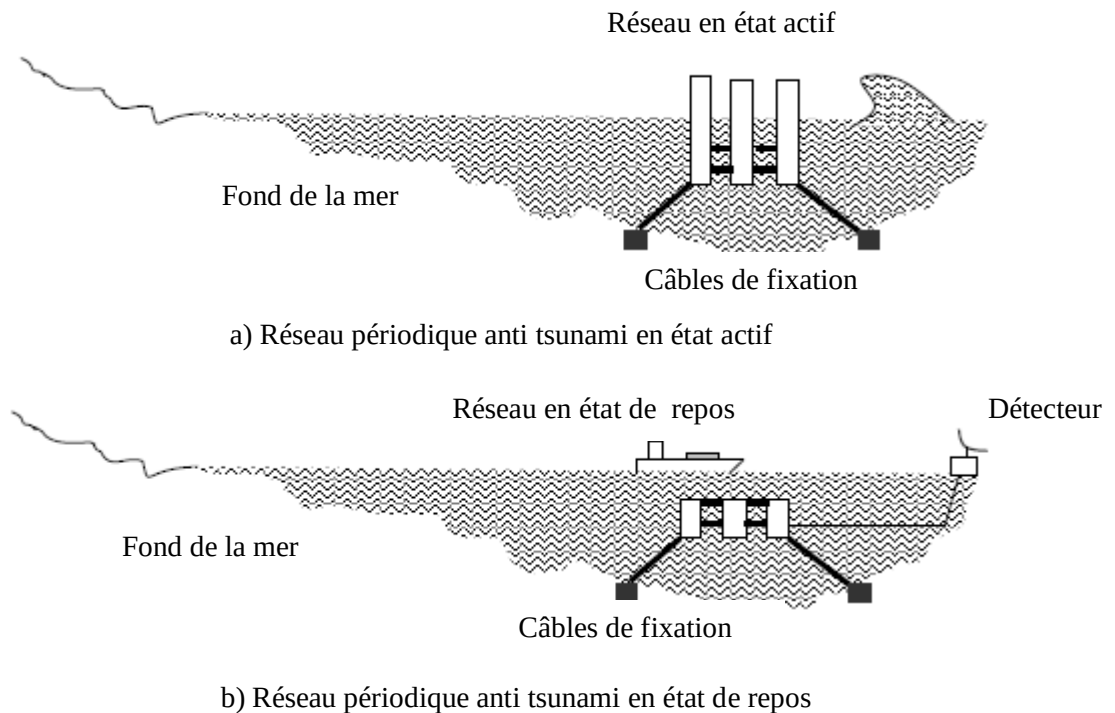


Figure 2.5 : Conception pour la protection contre le tsunami par des sacs gonflables [36].

- **Première étude expérimentale**

L'idée d'utiliser des principes d'optique pour dévier les ondes sismiques a été développée par Sébastien Guenneau et ses collègues de l'institut Fresnel de Marseille, il y a quelques années, les sismologues ont été au mieux sceptiques. Peut-être y regarderont-ils de plus près à l'issue d'une expérience réalisée le 26 septembre 2012 près de Lyon en France par l'entreprise de génie civil Menard, filiale du groupe Vinci, pour tester le principe en vraie grandeur [37]. Le protocole d'essai consiste à lâcher une masse de 17 tonnes depuis une grue ce qui provoque un micro séisme et voir comment se comportent

les ondes sismiques engendrées par cette chute, lorsqu'elles traversent un réseau de trous forés dans le sol (voir figure 2.6). Le réseau de trous a été conçu pour les dévier avant de les reconcentrer de l'autre côté de l'objet à protéger. Des enregistrements ont été effectués pour prouver que ce mini tremblement de terre a bien été dévié de sa trajectoire.

Deux applications sont envisagées : éviter que les vibrations engendrées par un chantier n'affectent les constructions alentour ou, à l'inverse, faire en sorte qu'un séisme ne touche pas des bâtiments sensibles dans un périmètre donné.

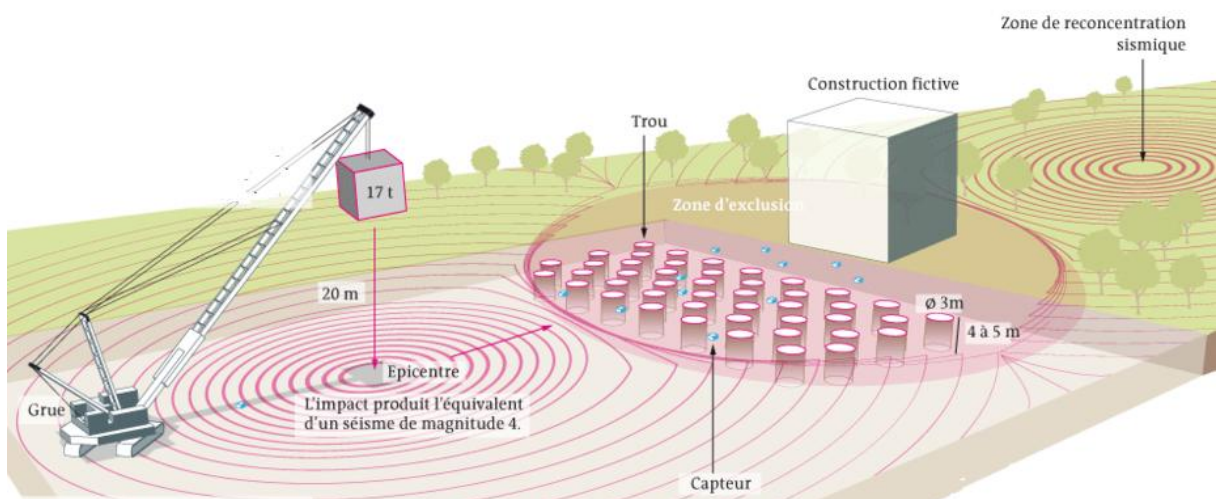


Figure 2.6 : Première étude expérimentale sur l'application du concept des réseaux phononiques en génie sismique [37].

2.2.2.2. Isolation sismique d'une structure par le biais des fondations périodiques

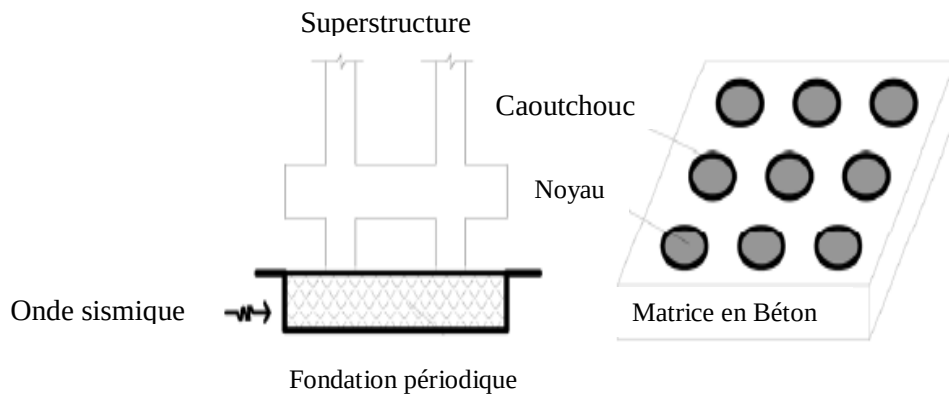
Les ondes sismiques étant caractérisées par de grandes longueurs d'onde, leur atténuation par la diffusion de Bragg mènera à des dispositifs de dimensions très grandes de l'ordre du kilomètre comme mentionné précédemment par B. Baykant ALAGÖZ et Serkan ALAGÖZ [36].

En vue de ramener les dispositifs de protection sismique à l'échelle des structures de génie civil, des études se sont basées sur des cristaux phononiques à résonance locale.

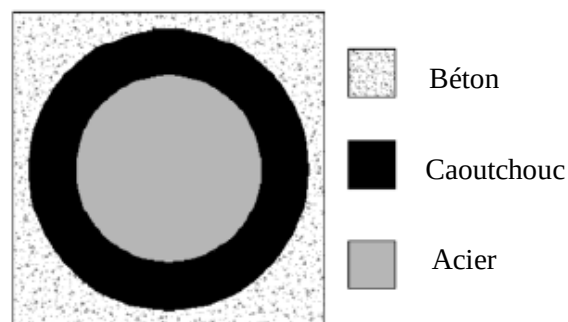
Une étude a été menée par Jia Gaofeng et Shi Zhifei (2010) [25] dans le but de l'isolation sismique d'une structure en R+6 par le biais d'un réseau périodique appelé

« fondations périodiques » permettant d’obtenir des bandes interdites dans la gamme des basses fréquences.

Le cristal phononique de la figure 2.7 (a) est constitué d’un radier en béton dans lequel des inclusions en acier de rayon R_{noyau} entourées de caoutchouc d’épaisseur e sont disposées périodiquement suivant les deux sens x et y . La configuration de la cellule unitaire carrée de coté a est représentée sur la figure 2.7 (b).



a) Fondation périodique



b) Configuration de la cellule

Figure 2.7 : Fondation périodique [25].

La courbe de dispersion obtenue en utilisant un code basé sur les éléments finis pour un modèle 2D en déformations planes et une analyse aux fréquences propres, présente sur la figure 2.8 une bande interdite de 6.03-8.73 Hz [25], pour une fraction de remplissage $F = 75.43\%$, un rapport $R_{noyau}/e = 1$ et une période $a = 1\text{m}$.

Ces paramètres géométriques et physiques choisis permettent d’obtenir la plus basse et plus large bande interdite.

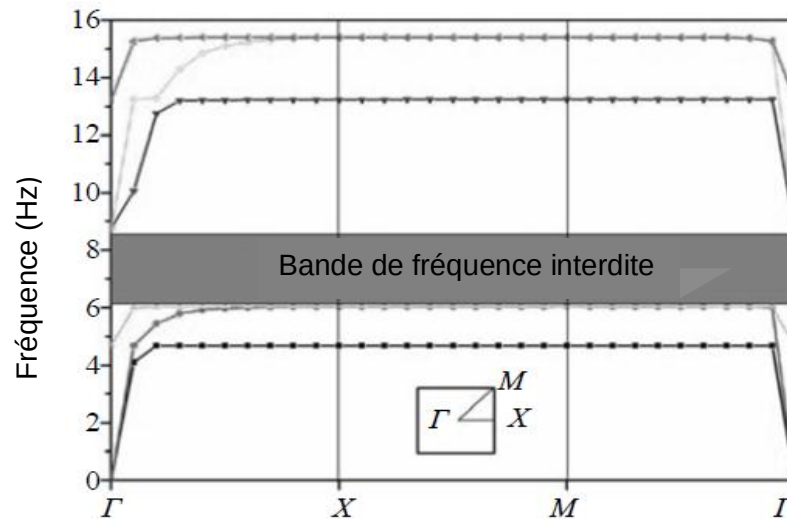
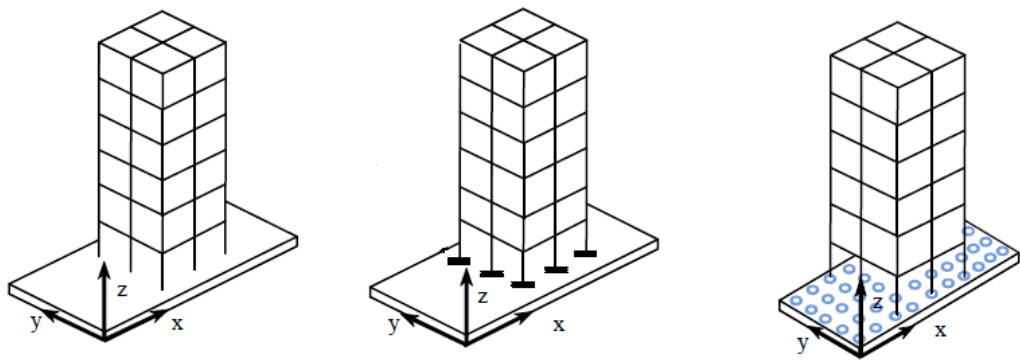


Figure 2.8 : Courbe de dispersion [25].

Dans le but de mettre en évidence l'efficacité de ces fondations périodiques, une étude complémentaire de la transmission a été faite par Z.B. Cheng, Z.F. Shi et H.J. Xiang (2012) sur une structure (poteaux-poutres) en béton armé de six étages avec trois différents types de fondations : Sans isolation à la base, isolation traditionnelle (avec amortisseurs) et fondation périodique (figure 2.9).

Les dimensions de la fondation ainsi que les éléments constituant la superstructure sont : 10m x 22m x 0.5m et 8m x 8m x 3.3m, respectivement. La section transversale des poteaux et poutres sont : 0.5m x 0.5m et 0.5m x 0.3m, respectivement. L'épaisseur du plancher est égale à 0.1m.

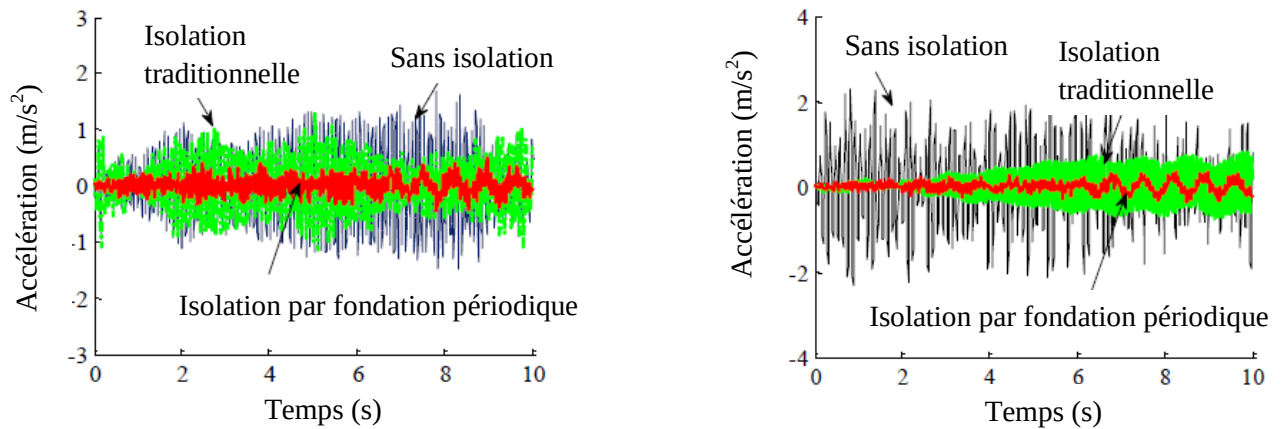
La fréquence fondamentale calculée de la structure non isolée est égale à 7.32 Hz, cette fréquence coïncide avec la bande interdite [7.22-10.16Hz] obtenue pour une cellule élémentaire constituée d'une matrice et d'un noyau en béton enrobé de caoutchouc avec : $a = 2\text{m}$, $R_{\text{noyau}} = 0,7\text{m}$, $e = 0,2\text{m}$. Par conséquent la base représentée sur la figure 2.9 (c), constituée de ces trois matériaux (béton, caoutchouc et béton) arrangés périodiquement est utilisée afin de bloquer la propagation des ondes sismiques ayant des fréquences proches à la fréquence fondamentale de la structure non isolée à la base [38].



(a) Sans isolation à la base (b) Système d'isolation traditionnel (c) Fondation périodique

Figure 2.9 : Structure avec trois différentes bases.

La figure 2.10 représente la réponse dynamique en terme d'accélération, (a) à la surface supérieure de la fondation et (b) au deuxième étage de la structure en portique. Il a été constaté que lorsque le contenu fréquentiel de l'excitation sismique à la base coïncide avec la bande de fréquence interdite, le système PF (periodic foundation) réduit d'une manière plus efficace la réponse de la structure en termes d'accélération par rapport aux deux autres types de fondations [38].



(a) À la surface supérieure de la fondation.

(b) Au deuxième étage.

Figure 2.10 : Réponse en termes d'accélération de la structure avec les trois types de fondations [38].

2.3. Conclusion

L'application en génie sismique du concept des réseaux périodiques est introduit par analogie avec les cristaux phononiques et leurs applications aux nano et microstructure.

Les différentes conceptions potentielles pour l'isolation sismique d'un site ou d'une structure présentées dans ce chapitre ont mis en évidence l'apport du réseau périodique mis en place sur la réponse de la structure qui peut être considérablement réduite à travers l'atténuation des ondes sismiques de surface lorsque le contenu fréquentiel de l'excitation sismique à la base coïncide avec la bande de fréquence interdite.

En revanche, les différentes solutions proposées pour l'atténuation des ondes sismiques de surface en appliquant le concept des réseaux périodiques manquent de validation en réalité par des études théoriques et expérimentales plus avancées.

CHAPITRE 3

CONCEPTION ET ELABORATION D'UN PROCEDE D'ISOLATION SISMIQUE D'UN SITE

3.1. Introduction

La méthode la plus efficace pour éviter qu'un bâtiment soit détruit par un séisme est encore de construire ce bâtiment dans un endroit où il n'y a pas de tremblement de terre. Ceci semble évident mais il est relativement difficile à appliquer dans la pratique, la question qui se pose est-il possible d'élaborer un modèle numérique en se basant sur le concept des réseaux périodiques permettant d'isoler un site et de faire en sorte qu'un séisme ne touche pas des structures implantées sur un périmètre donné.

L'objectif de cet étude théorique est d'investiguer le potentiel d'appliquer le concept des matériaux à bandes interdites élastiques à l'aide de structures de différentes compositions afin d'obtenir des bandes interdites dans la gamme des basses fréquences, en vue de protéger le site des vibrations d'origine sismique.

La démarche la plus répandue dans ce domaine de recherche est de vérifier numériquement si les effets attendus sont présents ou non avec le réseau que l'on souhaite mettre en place. On retrouve alors les techniques numériques habituelles, éléments finis de volume ou de frontière, schéma aux différences finies mais également des logiciels type Comsol que nous allons utiliser pour l'analyse de la cellule élémentaire du réseau périodique mis en place.

Avant d'exposer les modèles étudiés, nous avons jugé utile de donner une brève présentation du logiciel Comsol Multiphysics utilisé, ainsi que la procédure d'analyse.

3.2. Présentation du logiciel « Comsol multiphysics »

Le logiciel Comsol multiphysiques 3.4, anciennement appelé FEMLab est utilisé pour la simulation des différents modèles proposés en s'appuyant sur une analyse 2D en fréquences propres à partir du module : mécanique des structures. Ce logiciel est un outil de résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) par éléments finis, sa particularité est de disposer d'une base de données d'équations permettant de modéliser différents phénomènes physiques, comme la déformation des matériaux, l'écoulement de fluides ou encore l'électrostatique [39].

A l'aide de ce logiciel, différents types d'analyses peuvent être effectuées, y compris :

- Analyse modale
- Analyse stationnaire et temporelle
- Analyse linéaire et non linéaire

Lors de la résolution d'EDP Comsol Multiphysiques utilise la méthode des éléments finis MEF. Le logiciel fait l'analyse par éléments finis avec adaptation de maillage et contrôle de l'erreur en utilisant différentes variétés de solveurs numériques [40]. Une description plus détaillée de ce fondement mathématique et numérique apparaît dans le guide d'utilisateur Comsol Multiphysiques et le guide de modélisation Comsol Multiphysiques.

Développé initialement comme une toolbox de Matlab, il dispose aujourd'hui de son propre environnement graphique permettant à la fois le dessin des géométries et l'affichage de résultats en post-traitement. De plus, les données du logiciel sont accessibles depuis Matlab pour définir les propriétés des matériaux, les charges, les sources et les conditions aux limites ce qui permet la réalisation de scripts [39].

3.3. Procédure d'analyse

Au démarrage du logiciel, le navigateur de modèle apparaît. C'est lui qui permettra de définir le ou les modèles physiques qui seront utilisés. C'est aussi ici que la dimension de l'espace est choisie (2D, 2D axisymétrique, 3D,...). Pour chacun des modèles, il est précisé quelles sont les variables et quel est le suffixe propre à ce modèle. En effet, Comsol crée

automatiquement des variables pour chaque modèle. Ces variables sont toujours suffixées par le nom du modèle auquel elles sont rattachées.

Lorsque le ou les modèles sont choisis, la fenêtre principale du Comsol apparaît. D'une manière générale lors de la création d'un projet il faut parcourir le menu en allant de gauche à droite, en commençant par construire la géométrie du problème.

On définit ensuite le comportement des domaines en leur associant des propriétés, puis on impose des conditions sur certaines frontières et éventuellement sur certains points. Cette opération est à refaire pour chaque modèle utilisé.

Une fois la physique du problème est saisie, il faut effectuer le maillage de la géométrie. Il est possible de faire un raffinement local du maillage. Il ne reste ensuite plus qu'à simuler le modèle.

Toutes les inconnues sont alors déterminées. Il est possible de les afficher dans la fenêtre du post-processeur. L'utilisateur peut choisir les variables et la forme qu'il désire représenter.

Un exemple de simulation du modèle 2, présenté ci-dessous, en utilisant le logiciel Comsol est donné dans l'annexe A.

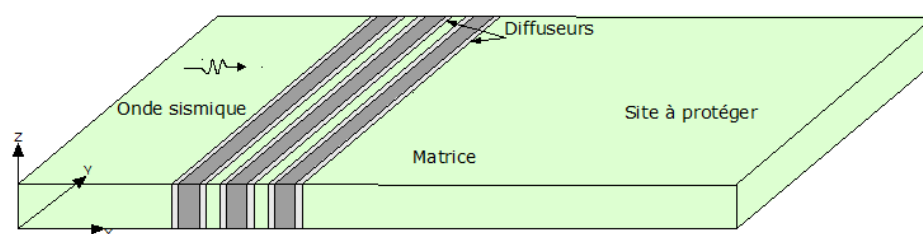
3.4. Modèles étudiés

3.4.1. Modèle 1 (périodicité unidimensionnelle)

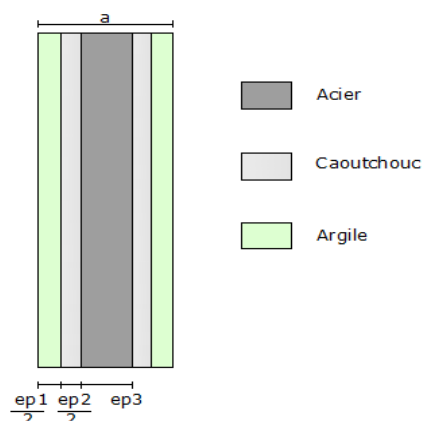
Un réseau phononique unidimensionnel est un composite stratifié obtenu en empilant en alternance des couches de matériaux de caractéristiques physiques différentes. Dans ces structures unidimensionnelles, la bande de fréquence interdite dépend de la direction de propagation de l'onde incidente. En revanche, dans une structure tridimensionnelle il est possible d'obtenir des bandes interdites absolues ou omnidirectionnelles, c'est-à-dire qu'une onde de fréquence appartenant à une telle bande interdite ne peut pas se propager, quelque soit son angle d'incidence [8].

3.4.1.1. Configuration de la cellule élémentaire

La cellule élémentaire de ce modèle (figure 3.1 (b)) est constituée de trois couches : argile, caoutchouc et acier ayant les épaisseurs $ep1$, $ep2$ et $ep3$ respectivement. Cette cellule est disposée périodiquement (période constante $a=1m$) suivant la direction x , comme le montre la figure 3.1 (a). Les propriétés élastiques des matériaux utilisés sont données dans le tableau 3.1.



(a) Réseau périodique 1D



(b) Configuration de la cellule élémentaire

Figure 3.1 : Schéma du réseau périodique unidimensionnel.

On parle ici de structure unidimensionnelle car la périodicité n'existe que pour une seule direction de l'espace et par conséquent, k_x est la seule composante du vecteur d'onde k .

Tableau 3.1 : Propriétés des matériaux utilisés.

<i>Matériaux</i>	<i>La masse volumique ρ (Kg /m³)</i>	<i>Le module d'élasticité E (Gpa)</i>	<i>Le coefficient de poisson ν</i>
Argile	1500	3.9	0.3
Caoutchouc	1300	$1.37 \cdot 10^{-4}$	0.463
Acier	7850	210	0.3

3.4.1.2. Modèle numérique

Une analyse 2D en déformations planes aux fréquences propres est utilisée pour construire les courbes de dispersion (c'est-à-dire le graphe représentant les valeurs de la pulsation ω en fonction du vecteur d'onde $\vec{k}$).

Le maillage de la cellule élémentaire ainsi que les conditions aux limites périodiques imposées dans le sens x sont illustrés sur la figure 3.2, où les conditions aux limites à droite $U_i^k(r)$ sont reliées à celles de gauche $U_i^k(l)$. En outre pour un problème de déformations planes les composants du vecteur déplacement sont $U_i^k (i = u, v)$.

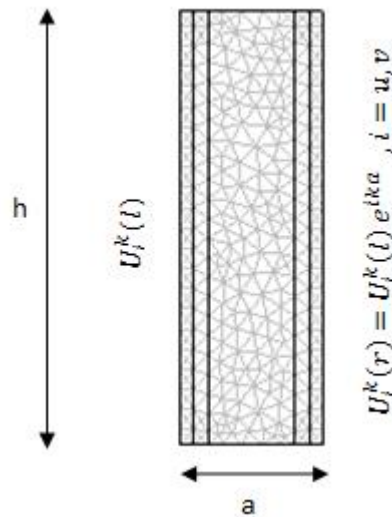


Figure 3.2 : Cellule après maillage et introduction des conditions aux limites périodiques.

Afin de tracer la courbe de dispersion, des modifications (voir annexe B) ont été opérées sur le script sous MATLAB obtenu à partir de la première simulation qui correspond à une seule valeur du vecteur d'onde k , or pour avoir la structure de bande, il faut balayer la zone de Brillouin irréductible car à chaque valeur de k correspond un ensemble de valeur propres $\omega(k)$.

3.4.1.3. Résultats et discussions

En modifiant uniquement les épaisseurs des couches, deux essais ont été présentés dont les résultats obtenus sont résumés sur le tableau 3.2.

Tableau 3.2 : Bandes interdites obtenues pour le modèle1.

<i>Essai</i>	<i>a (m)</i>	<i>ep1(m)</i>	<i>ep2(m)</i>	<i>ep3(m)</i>	<i>h(m)</i>	<i>Bandes interdites (Hz)</i>
1	1	0.2	0.2	0.6	10	[8.4-25] ; [26.05-27.89]
2	1	0.1	0.1	0.8	10	[10.39-15.60] ; [16-41.89] [44.54-51.99]

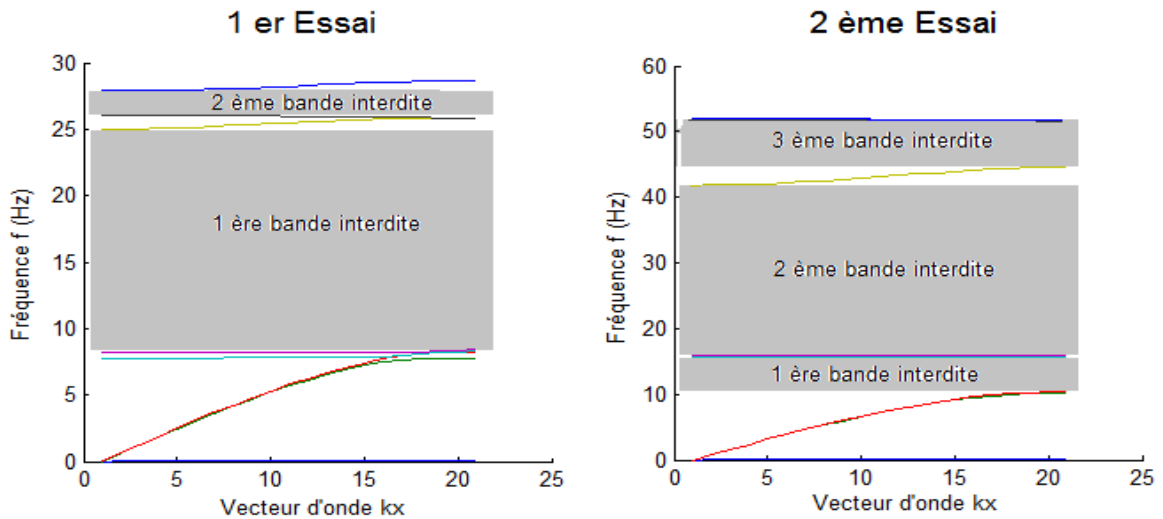


Figure 3.3 : Courbes de dispersion du modèle 1 (périodicité unidimensionnelle).

Les courbes de dispersion correspondantes sont représentées sur la figure 3.3, avec en abscisse le vecteur d'onde kx (périodicité unidimensionnelle) représentant la direction de propagation et en ordonné la fréquence d'onde. Pour certaines fréquences il n'y a pas de vecteur d'onde kx associé, donc une onde à ces fréquences, suivant la direction x ne peut pas se propager dans le milieu puisque il n'y a pas de modes correspondant.

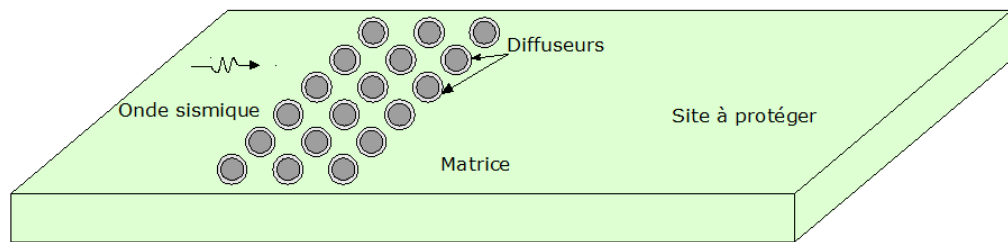
Les différentes bandes de fréquences interdites montrées sur la figure 3.3 sont dues à l'interaction entre les deux phénomènes, c'est-à-dire la diffusion de Bragg due à périodicité et les résonances locales de chaque élément. D'après les résultats obtenus, les bandes interdites les plus intéressantes sont : de 8.4 à 25 Hz pour le premier essai et deux autres : de 10.39 à 15.60 Hz et de 16 à 41.89 Hz pour le deuxième essai.

En outre, le réseau périodique étudié présente une périodicité unidimensionnelle, par conséquence la propagation des ondes sismiques de surface dont le contenu fréquentiel coïncide avec la bande de fréquence interdite peut être prohibée dans une seule direction.

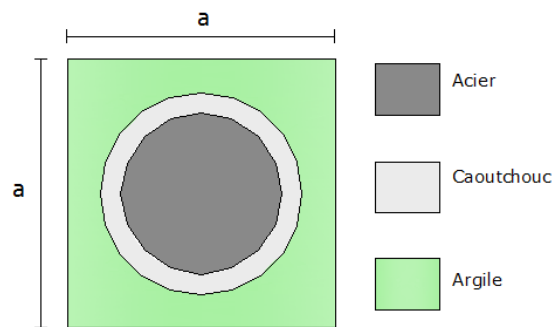
3.4.2. Modèle 2 (périodicité bidimensionnelle)

Les structures périodiques à une dimension ne présentent qu'un intérêt réduit pour les applications de protection parasismique. On réalise alors des structures périodiques à deux dimensions.

Le deuxième modèle étudié est un réseau périodique carré constitué d'une matrice en argile dans laquelle des inclusions cylindrique en acier (de rayon r) enrobées de caoutchouc (d'épaisseur e) sont disposées périodiquement en plan sur toute la longueur du site à isoler, comme le montre la figure 3.4 (a).



(a) Réseau périodique 2D



(b) Configuration de la cellule élémentaire

Figure 3.4 : Schéma du réseau périodique bidimensionnel.

Les propriétés des matériaux utilisés sont données dans le tableau 3.1.

3.4.2.1. Zone de Brillouin et vecteur d'onde

La périodicité de la structure permet d'investiguer l'existence de bandes interdites aux seins de ce réseau 2D en étudiant une seule cellule élémentaire. Ainsi les conditions aux limites périodiques données par l'équation (1.6) sont appliquées.

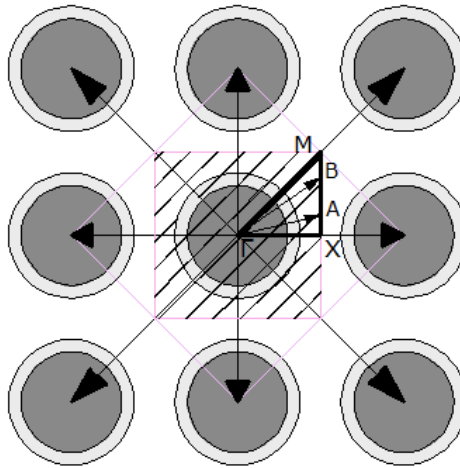


Figure 3.5 : Cellule de Wigner Seitz (carré hachuré) et la première zone irréductible de Brillouin (triangle ΓXM) dans l'espace réciproque.

La cellule élémentaire hachurée montrée sur la figure 3.5 est la cellule de Wigner-Seitz dans le réseau direct.

La bande interdite est obtenue en solvant aux fréquences propres le système en différentes valeurs du vecteur d'onde de Bloch k [k_x, k_y] (périodicité bidimensionnelle) défini dans le réseau réciproque et qui représente les directions de propagation de l'onde. Par raison de symétrie, la connaissance de la structure de bandes dans cette zone de Brillouin réduite (triangle représenté sur la figure 3.5) est suffisante pour connaître l'ensemble des modes de propagation dans toutes les directions ($[0^\circ, 360^\circ]$).

Les limites du triangle (ΓXM) peuvent couvrir la propagation de l'onde suivant les directions dont l'angle d'incidence $\theta \in (0^\circ, 45^\circ)$. Par exemple, le vecteur ΓA peut être définie par le point A sur la limite XM et le vecteur ΓB par le point B. Si ΓX et $M\Gamma$ représentent les directions de propagation dont l'angle d'incidence 0° et 45° respectivement, alors les points sur la limite XM représentent la propagation d'onde suivant les directions dont l'angle d'incidence $\theta \in (0^\circ, 45^\circ)$.

3.4.2.2. Modèle numérique

La configuration de la cellule élémentaire est montrée sur la figure 3.4 (b), avec $a = 1\text{m}$, $r = 0.39\text{m}$ et $e = 0.10\text{m}$. Les propriétés des matériaux utilisés sont données dans le tableau 3.1.

Une analyse 2D en déformations planes aux fréquences propres est utilisée pour tracer les courbes de dispersion. Le maillage de la cellule élémentaire est montré sur la figure 3.6.

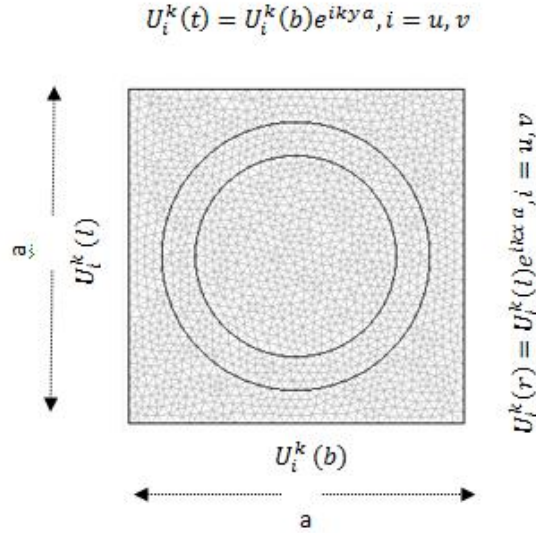


Figure 3.6 : Cellule après maillage et introduction des conditions aux limites périodiques.

Le modèle a été soumis aux conditions aux limites périodiques dans les deux directions x et y pour obtenir des solutions sous la forme : $U_i^k(\mathbf{r} + \mathbf{L}) = U_i^k(\mathbf{r}) e^{ikL}$, k est le vecteur d'onde de Bloch dans le réseau réciproque [25].

Les conditions aux limites périodiques imposées sont illustrées sur la figure 3.6, où les conditions aux limites à droite et du côté supérieur $U_i^k(r)$ et $U_i^k(t)$ sont reliées à celles de gauche et du côté inférieur $U_i^k(l)$ et $U_i^k(b)$, à travers les deux coefficients de phase $e^{ikx a}$ et $e^{iky a}$, respectivement. $U_i^k(i = u, v)$ sont les deux composantes du vecteur déplacement pour un problème de déformations planes. La bande interdite peut être obtenue en faisant balayer k le long des limites de la première zone de Brillouin.

3.4.2.3. Résultats et discussions

La courbe de dispersion obtenue après modification du script (voir annexe B) est montrée sur la figure 3.7, avec en abscisse ΓX , XM , $M\Gamma$ représentent les directions de propagation de l'onde suivant les angles 0° , $0^\circ - 45^\circ$, 45° respectivement et en ordonné la fréquence de l'onde.

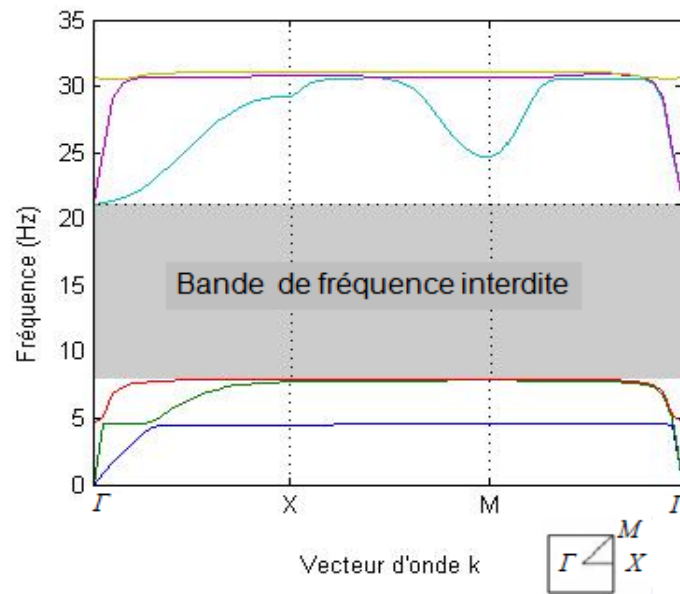


Figure 3.7 : Courbe de dispersion du modèle 2 (périodicité bidimensionnelle).

La bande interdite obtenue pour ce modèle est due aussi à l'interaction entre les résonances locales des éléments mis en réseau (noyaux) et la diffusion de Bragg liée à la périodicité. Cette bande se situe dans l'intervalle 7.91 à 21.13 Hz, ce qui permet d'empêcher la propagation des ondes de surface (suivant les deux directions x et y) ayant des fréquences qui coïncident avec les fréquences de la bande interdite.

En revanche, ce modèle de périodicité 2D peut être potentiellement développé et utilisé pour bloquer la propagation des ondes sismiques de surface en vue de protéger le site des vibrations d'origine sismique, par conséquent réduire énormément la réponse sismique des structures implantées derrière le réseau périodique mis en place.

3.5. Conclusion

Les enseignements tirés de ce chapitre se résument comme suit :

- Un des avantages du logiciel d'analyse Comsol multiphysics est la possibilité d'accéder au script, par conséquence d'opérer les différentes modifications sur ce dernier afin de tracer les courbes de dispersion permettant de prédire l'existence et la position de bandes de fréquences interdites.
- Les résultats obtenus par la simulation sous logiciel Comsol ont mis en évidence que les deux réseaux périodiques étudiés présentent effectivement des bandes interdites dans la gamme des basses fréquences appropriées pour les applications en génie sismique, ces bandes interdites sont dues à l'interaction entre les deux phénomènes, la diffusion de Bragg liée à périodicité et les résonances locales de chaque élément mis en réseau.
- Le premier modèle présenté dans ce chapitre permet de bloquer la propagation des ondes dans une seule direction de l'espace car la périodicité est unidimensionnelle, par contre, le deuxième modèle ayant une périodicité bidimensionnelles peut prohiber la propagation des ondes dans les deux directions de l'espace, par conséquence protéger les sites à travers l'atténuation des ondes sismiques de surface.

CHAPITRE 4

IDENTIFICATION ET ETUDE DES PARAMETRES D'INFLUENCE SUR LES CARACTERISTIQUES DE LA BANDE DE FREQUENCE INTERDITE

4.1. Introduction

Dans le but de déterminer les différents paramètres ayant une influence significatif sur la bande de fréquence interdite, une étude paramétrique a été effectuée sur la cellule élémentaire du deuxième modèle présenté dans le chapitre 3 en se basant sur les trois caractéristiques : la fréquence inférieure (FIB), la fréquence supérieure (FSB) et la largeur (LBF) de la bande de fréquence interdite.

Les facteurs étudiés sont : les propriétés des matériaux utilisés (module d'élasticité E , la masse volumique ρ et le coefficient de poisson ν) ainsi que la configuration géométrique comportant la fraction de remplissage F et le rapport α qui est égale au rayon du noyau sur l'épaisseur du polymère.

La cellule élémentaire utilisée pour étudier l'influence des propriétés des matériaux est constituée d'un noyau de rayon $R = 0.25m$, enrobé d'un polymère d'épaisseur $e = 0.24m$. Le calcul a été effectué sous la même constante du réseau $a = 1m$.

4.2. Influence de la masse volumique du noyau

Les bandes interdites obtenues et engendrées par les différentes masses volumiques des matériaux constituant le noyau sont comparées afin de mettre en évidence l'apport de ce paramètre sur la position et la largeur de la bande interdite.

CHAPITRE 4 : IDENTIFICATION ET ETUDE DES PARAMETRES D'INFLUENCE SUR LES CARACTERISTIQUES DE LA BANDE DE FREQUENCE INTERDITE

Les masses volumiques des matériaux 1, 2, 3, 4 et 5 correspondent respectivement, aux celles de l'argile, le béton, l'aluminium, l'acier et le plomb (des matériaux usuels), tandis que les modules d'élasticité ainsi que les coefficients de poisson restent inchangés pour les cinq matériaux et sont pris égales à 210 Gpa et 0.3, respectivement.

Notant à partir du tableau 4.1 et la figure 4.1, que lorsque la masse volumique du noyau augmente, FIB décroît rapidement. Ainsi, pour une valeur de la masse volumique $\rho = 11600 \text{ kg/m}^3$, FIB atteint la plus basse fréquence 5.04 Hz. Cette propriété est critique et utile dans la construction d'un tel réseau périodique ayant une bande interdite à basse fréquence.

Cette étude a révélé aussi que le module d'élasticité et le coefficient de poisson du matériau constituant le noyau ont une faible influence sur la bande interdite car en variant ces deux caractéristiques on obtient pratiquement les mêmes résultats c'est-à-dire la même variation montrée sur la figure 4.1. Par contre la masse volumique est le paramètre le plus sensible agissant sur sa position.

Tableau 4.1 : Influence de la masse volumique du noyau sur les caractéristiques de la bande interdite.

<i>Essais</i>	<i>Masse volumique ρ (10^3 Kg/m^3)</i>	<i>Bandes interdites [Hz]</i>	<i>FIB [Hz]</i>	<i>FSB [Hz]</i>	<i>LBF [Hz]</i>
Matériau 1	1.5	-	-	-	-
Matériau 2	2.5	[9,86-10,61]	9.86	10.61	0.75
Matériau 3	2.7	[9.57-10.61]	9.57	10.61	1.04
Matériau 4	7.85	[6.05-9.23]	6.05	9.23	3.18
Matériau 5	11.6	[5.04-8.76]	5.04	8.76	3.72

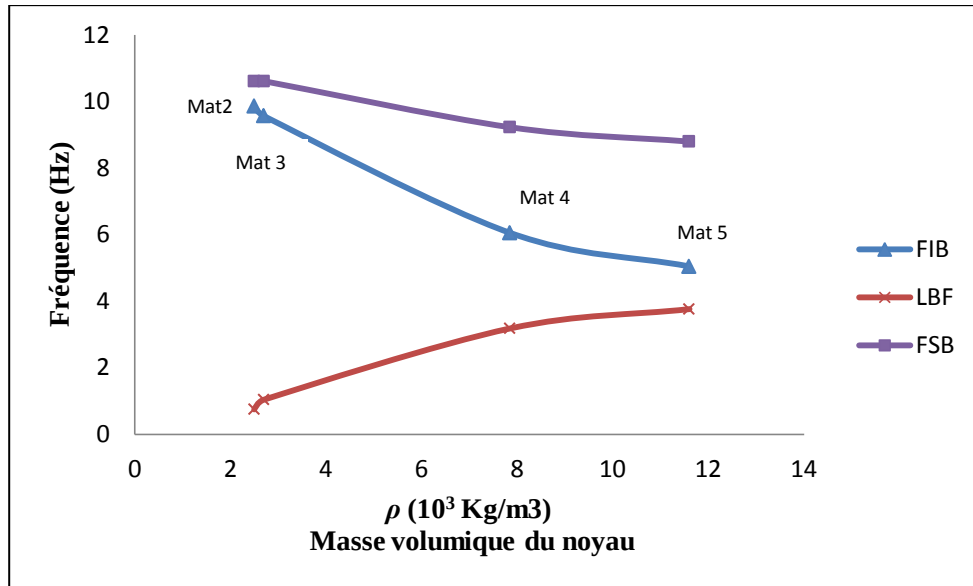


Figure 4.1: Influence de la masse volumique du noyau sur la bande interdite.

4.3. Influence du module d'élasticité du polymère

Afin d'étudier l'influence du module d'élasticité du polymère sur les caractéristiques de la bande de fréquence interdite, différents types de polymères ayant des modules d'élasticité variant de 0.1 à 1.5 Mpa ont été utilisées tandis que, les autres paramètres à savoir, la masse volumique et le coefficient de poisson restent inchangé et sont pris égaux à 1300 kg/m^3 et 0,463 respectivement. Les résultats obtenus sont récapitulés dans le tableau 4.2 et sur la figure 4.2.

Il a été constaté à partir de la figure 4.2 que lorsque le module d'élasticité du polymère augmente, les trois caractéristiques de la bande (FIB, FSB et LBF) augmentent aussi.

Selon une étude récente menée par Xiao et al (2006) [45], les modes de vibration sont similaires à ceux du système masse-ressort, et la courbe croissante de FIB peut être expliquée par la formule $\omega = \sqrt{k/m}$. Ainsi l'augmentation du module d'élasticité E est équivalente à l'augmentation de la rigidité k , ce qui entraîne une valeur plus élevée de la pulsation ω .

Cette propriété explique pourquoi il est nécessaire de maintenir un faible module d'élasticité du polymère.

CHAPITRE 4 : IDENTIFICATION ET ETUDE DES PARAMETRES D'INFLUENCE SUR LES CARACTERISTIQUES DE LA BANDE DE FREQUENCE INTERDITE

Tableau 4.2 : Influence du module d'élasticité du polymère sur les caractéristiques de la bande interdite.

<i>Essais</i>	<i>Module d'élasticité du polymère(E) [Mpa]</i>	<i>Bandes interdites [Hz]</i>	<i>FIB [Hz]</i>	<i>FSB [Hz]</i>	<i>LBF [Hz]</i>
polymère 1	0,1	[5,17-7,95]	5,17	7,95	2,78
polymère 2	0,3	[8,94-13,74]	8,94	13,74	4,8
polymère 3	0,5	[11,53-17,22]	11,53	17,22	5,69
polymère 4	0,7	[13,63-19,92]	13,63	19,92	6,29
polymère 5	0,9	[15,44-22,30]	15,44	22,3	6,86
polymère 6	1,1	[17,05-24,44]	17,05	24,44	7,39
polymère 7	1,3	[18,52-26,41]	18,52	26,41	7,89
polymère 8	1,5	[19,87-28,24]	19,87	28,24	8,37

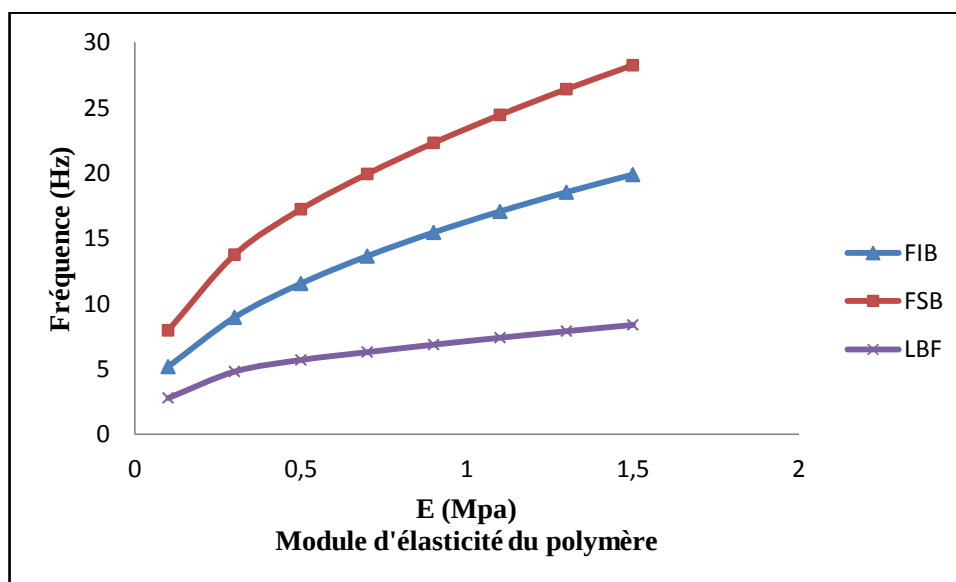


Figure 4.2 : Influence du module d'élasticité du polymère sur la bande interdite.

4.4. Influence du module d'élasticité de la matrice

En vue d'étudier l'influence du module d'élasticité du matériau constituant la matrice sur les caractéristiques de la bande de fréquence interdite, plusieurs cellules élémentaires ayant des matrices de matériaux différents ont été analysées dont les résultats sont récapitulés dans le tableau 4.3 et sur la figure 4.3.

Les modules d'élasticité des matériaux 1, 2, 3 et 4 correspondent respectivement, aux celles de l'argile, le plomb, l'aluminium et l'acier (des matériaux usuels), tandis que les masses volumiques ainsi que les coefficients de poisson restent inchangés pour les quatre matériaux et sont pris égaux à 1500 kg/m^3 et 0.3, respectivement.

La figure 4.3 montre que la variation du module d'élasticité du matériau constituant la matrice n'entraîne aucune modification sur la bande de fréquence interdite, c'est parce que le module d'élasticité de la matrice est beaucoup plus élevé que celui du polymère. Par conséquent, un champ large se présente pour choisir le matériau constituant la matrice, ce qui permet également de sélectionner les différents matériaux utilisés dans le domaine de génie civil pour la conception des réseaux périodiques.

Tableau 4.3 : Influence du module d'élasticité de la matrice sur les caractéristiques de la bande interdite.

<i>Essais</i>	<i>Module d'élasticité de la matrice (E) [Gpa]</i>	<i>Bandes interdites [Hz]</i>	<i>FIB [Hz]</i>	<i>FSB [Hz]</i>	<i>LBF [Hz]</i>
Matériau 1	3,9	[6,05-9,23]	6,05	9,23	3,18
Matériau 2	16,46	[6,05-9,24]	6,05	9,24	3,19
Matériau 3	67	[6,05-9,25]	6,05	9,25	3,2
Matériau 4	210	[6,05-9,29]	6,05	9,29	3,24

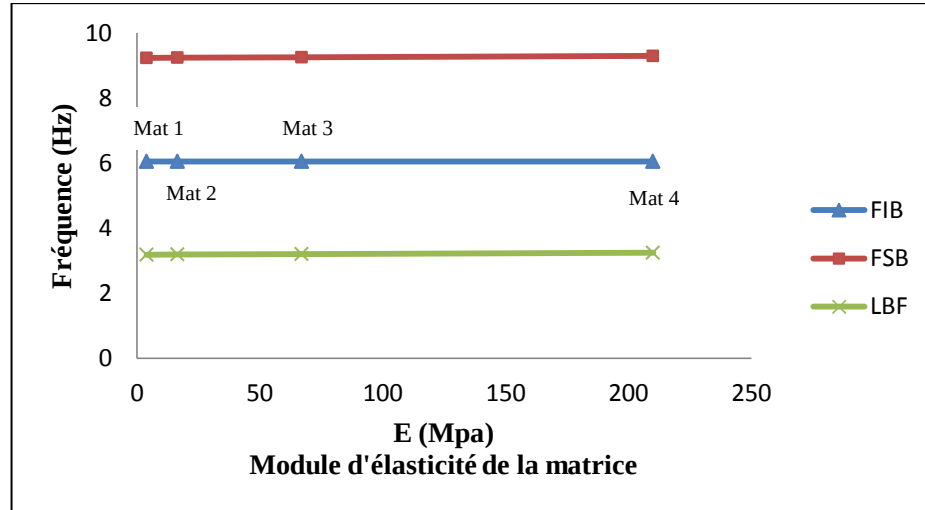


Figure 4.3 : Influence du module d'élasticité de la matrice sur la bande interdite.

4.5. Influence de la fraction de remplissage

La fraction de remplissage est définie par : $F = \pi R_{ext}^2 / a^2$ et $R_{ext} = R_{int} + e$, où R_{int} : rayon du noyau

e : épaisseur du polymère

Un autre paramètre $\alpha = R_{int}/e$ est défini pour évaluer l'apport de ce facteur sur la bande de fréquence interdite.

Les figures 4.4 et 4.5 montrent respectivement, l'influence de la fraction de remplissage F et du rapport α sur la position et la largeur de la bande de fréquence interdite.

Il a été conclu à partir du tableau 4.4 et la figure 4.4 que pour obtenir de basse FIB et de large LBF il suffit d'augmenter la fraction de remplissage F , cela aussi peut être expliqué par la formule $\omega = \sqrt{k/m}$, c'est-à-dire en augmentant la masse m la pulsation ω diminue. Pour le cas étudié la fraction de remplissage maximale est de 78,5%.

CHAPITRE 4 : IDENTIFICATION ET ETUDE DES PARAMETRES D'INFLUENCE SUR LES CARACTERISTIQUES DE LA BANDE DE FREQUENCE INTERDITE

Tableau 4.4 : Influence de la fraction de remplissage F sur les caractéristiques de la bande de fréquence interdite.

<i>Essais</i>	α	<i>F</i> [%]	<i>Rext</i> [m]	<i>Rint</i> [m]	<i>e</i> [m]	<i>bande interdite</i> [Hz]	<i>FIB</i> [Hz]	<i>FSB</i> [Hz]	<i>LBF</i> [Hz]
1	1	20	0,252	0,126	0,126	[11,72-13,34]	11,72	13,34	1,62
2	1	30	0,309	0,155	0,155	[9,57-11,54]	9,57	11,54	1,97
3	1	40	0,357	0,178	0,178	[8,27-10,57]	8,27	10,57	2,3
4	1	50	0,399	0,199	0,199	[7,40-9,99]	7,4	9,99	2,59
5	1	60	0,437	0,219	0,219	[6,76-9,49]	6,76	9,49	2,73
6	1	70	0,472	0,236	0,236	[6,26-9,24]	6,26	9,24	2,98
7	1	75	0,489	0,244	0,244	[6,03-9,07]	6,03	9,07	3,04

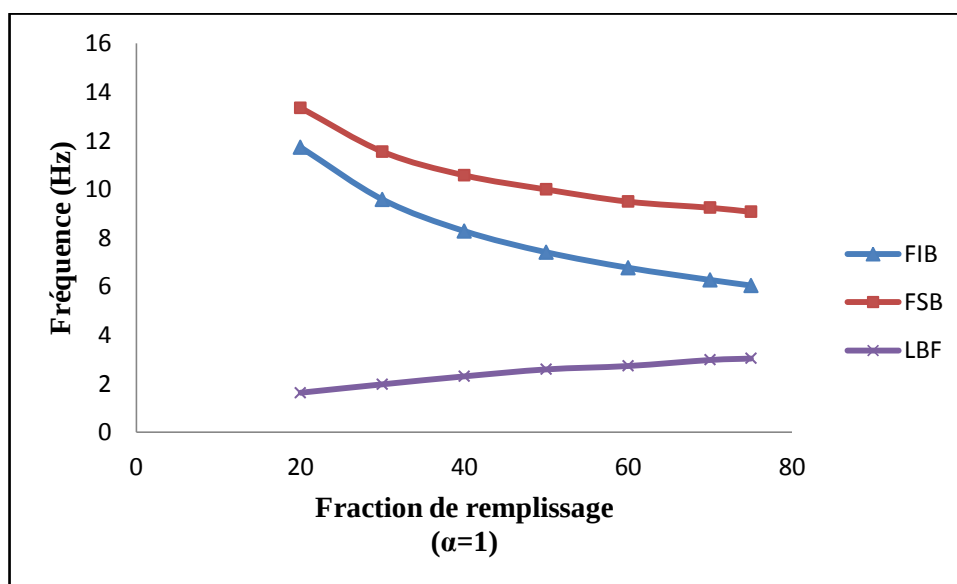


Figure 4.4 : Influence de la fraction de remplissage sur la bande interdite.

CHAPITRE 4 : IDENTIFICATION ET ETUDE DES PARAMETRES D'INFLUENCE SUR LES CARACTERISTIQUES DE LA BANDE DE FREQUENCE INTERDITE

Tableau 4.5 : Influence du paramètre α sur les caractéristiques de la bande de fréquence interdite.

Essais	F [%]	α	Rext [m]	Rint [m]	e [m]	bande interdite [Hz]	LEF [Hz]	UEF [Hz]	FGW [Hz]
1	75,43	0,2	0,49	0,082	0,408	[7,28-7,62]	7,28	7,62	0,34
2	75,43	0,4	0,49	0,140	0,350	[6,27-7,22]	6,27	7,22	0,95
3	75,43	0,6	0,49	0,184	0,306	[5,94-7,6]	5,94	7,6	1,66
4	75,43	0,8	0,49	0,218	0,272	[5,94-8,33]	5,94	8,33	2,39
5	75,43	1	0,49	0,245	0,245	[6,02-9,07]	6,02	9,07	3,05
6	75,43	1,2	0,49	0,267	0,223	[6,14-9,92]	6,14	9,92	3,78
7	75,43	1,4	0,49	0,286	0,204	[6,27-10,82]	6,27	10,82	4,55
8	75,43	1,6	0,49	0,302	0,188	[6,41-11,74]	6,41	11,74	5,33
9	75,43	2	0,49	0,327	0,163	[6,69-13,43]	6,69	13,43	6,74
10	75,43	4	0,49	0,392	0,098	[7,97-21,44]	7,97	21,44	13,47

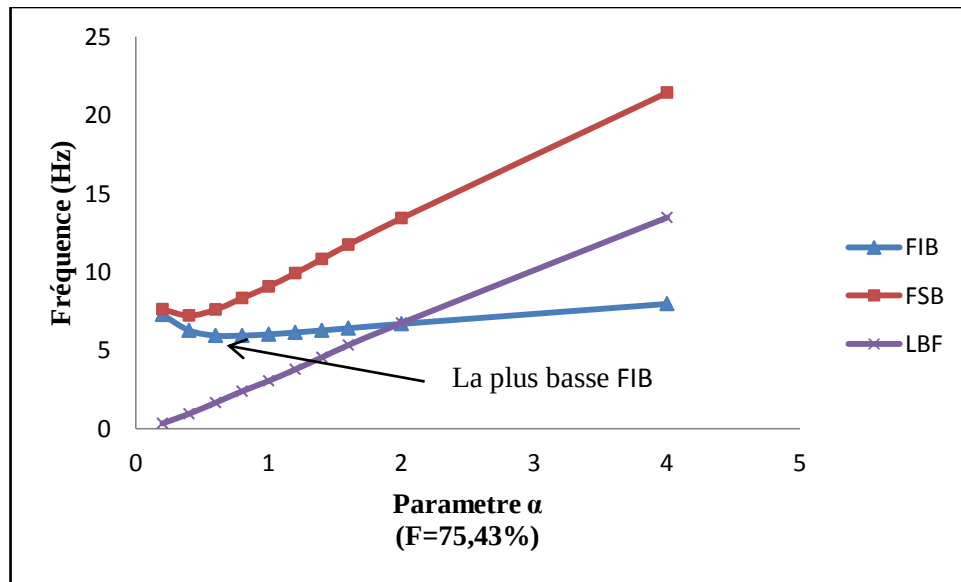


Figure 4.5 : Influence du rapport α sur la bande de interdite.

À partir du tableau 4.5 et la figure 4.5 il a été constaté que le fait de maintenir la valeur de la fraction de remplissage F à 78.5%, FIB varie en fonction du paramètre α . En augmentant α la courbe FIB décroît jusqu'à $\alpha = 0,6$, puis elle augmente au delà de cette

valeur. Du point de vue conception α peut être pris égal à 0.6 afin d'obtenir la plus basse FIB. Pour FSB, en augmentant α la courbe FSB croît rapidement, cela est dû à la faible épaisseur du polymère.

4.6. Conclusion

Dans cette partie une étude paramétrique a été effectuée dans le but d'obtenir des bandes interdites dans la gamme des basses fréquences appropriées pour les différentes applications en génie sismique. Pour cela plusieurs cellules avec différentes typologies et configurations ont été analysées.

D'après les résultats trouvés, il a été constaté qu'une cellule élémentaire constituée d'un noyau ayant une grande masse volumique (ρ), un faible module d'élasticité du polymère et une fraction de remplissage (F) maximale, présente la plus large bande de fréquence interdite. En revanche la simulation numérique a montré qu'un modèle constitué d'une matrice en argile dans laquelle des inclusions cylindriques en acier enrobées de caoutchouc peut produire une bande interdite ayant les plus basses fréquences de 5,94 - 7,6 Hz avec $a = 1\text{m}$, $F = 75,43\%$ et $\alpha = 0,6$.

En outre, Les paramètres étudiés dans ce chapitre peuvent être optimisés selon la bande de fréquence à interdire.

CONCLUSION GENERALE

En structurant périodiquement la matière, il est possible d'empêcher les ondes acoustiques ou élastiques de se propager dans certaines directions et gammes de fréquences. Ces réseaux périodiques constitués de matériaux composites sont qualifiés de cristaux phononiques. Ceux-ci ont fait un domaine de recherche d'ébullition exponentielle et en évolution permanente. Un grand nombre de structures périodiques a été étudié et des approches théoriques variées ont été employées. Toutes ont mis en évidence l'existence de propriétés physiques telles que la présence de bandes interdites, des bandes de fréquences où aucune propagation d'onde n'est permise dans ces structures. Cela offre de nombreuses applications potentielles allant de l'isolation sonore au filtrage et traitement du signal acoustique en passant par les guides et les capteurs.

Dans ce travail de mémoire nous avons mené une étude théorique et numérique sur les cristaux phononiques à bandes de fréquences interdites pour la conception de structures périodiques ayant une périodicité spatiale dans une ou deux directions de l'espace afin d'obtenir des bandes interdites phononiques dans la gamme des basses fréquences [0,1 à 20 Hz] (Chopra 2005), en vue de l'intégration de ces concepts dans le génie parasismique à travers l'isolation sismique d'un site.

Dans un premier temps, nous avons effectué un rappel sur les notions de base des structures périodiques, et nous avons vu que la réalisation de structures simples consistant en un arrangement ordonné de diffuseurs se traduit par l'apparition de bandes de fréquences interdites. Ces dernières sont obtenues soit par le biais de réflexion de Bragg due à la périodicité dont les longueurs d'ondes λ s'y propageant dans le milieu sont de l'ordre de la périodicité du réseau, soit par interaction entre ce phénomène et les résonances locales des éléments mis en réseau dans le cas où les simples éléments diffusant sont remplacés par des éléments singuliers possédant des propriétés de résonance.

Le deuxième volet de notre travail est dédié aux applications du concept des réseaux périodiques aux nano et microstructure et en particulier en génie sismique. Les ondes sismiques étant caractérisées par de grandes longueurs d'onde, leur atténuation par la diffusion de Bragg mènera à des dispositifs de dimensions très grandes de l'ordre du kilomètre. Afin de ramener les dispositifs de protection sismique à l'échelle des structures de génie civil, les études se sont basées sur des cristaux phononiques à résonance locale où les longueurs d'ondes dépassent de loin la périodicité du réseau. Les différentes conceptions potentielles présentées pour l'isolation sismique d'un site ou d'une structure ont mis en évidence l'apport des réseaux périodiques sur la réponse de la structure qui peut être considérablement réduite à travers l'atténuation des ondes sismiques de surface.

La troisième partie qui constitue le vif du mémoire est consacrée à la conception et l'étude d'un réseau périodique influençant la propagation des ondes sismiques de surface. Il s'agit donc de deux réseaux périodiques (1D et 2D) constitués d'un arrangement ordonné de trois matériaux, une matrice en argile qui abrite des inclusions en acier enrobées de caoutchouc. Ces structures ont été réalisées d'une manière à obtenir des bandes interdites qui exploitent à la fois les résonances locales des éléments mis en réseau et leur répartition périodique. Selon la théorie de Bloch, il est possible de limiter l'étude du réseau à une cellule élémentaire moyennant l'application des conditions aux limites périodiques. Les résultats numériques obtenus par la simulation sous logiciel Comsol après modification du script sous Matlab ont mis en évidence que les deux modèles étudiés présentent un grand potentiel de bloquer la propagation des ondes sismiques de surface lorsque le contenu fréquentiel de ces dernières coïncide avec la bande de fréquence interdite. Il est à noter, cependant, que la mise en œuvre en pratique reste à développer car les dimensions et les matériaux ne sont pas adaptés aux réalités des sites courants.

Dans une dernière partie, une étude paramétrique a été effectuée sur la cellule élémentaire du réseau 2D en vue de déterminer les différents paramètres ayant une influence significative sur la bande de fréquence interdite, tel que les propriétés physiques des matériaux (la masse volumique du noyau, le module d'élasticité du polymère ainsi que de la matrice) et la configuration géométrique de la cellule (la fraction de remplissage). Il a été constaté qu'une cellule élémentaire constituée d'un noyau à forte densité enrobé d'un

matériau mou ayant un faible module d'élasticité et une fraction de remplissage maximale, présente une bande interdite plus large située dans la gamme des basses fréquences.

RECOMMANDATIONS POUR TRAVAUX FUTURES

- Ce travail, limité au calcul de la bande de fréquence interdite, nécessite une étude complémentaire de la transmission qui s'avère indispensable afin de mettre en évidence l'efficacité de ces réseaux périodiques pour l'isolation sismique des sites ou des ouvrages.
- Ce sujet de recherche a fait l'objet de l'étude des réseaux périodiques 2D capables de bloquer la propagation des ondes de surface, or pour les ondes sismiques, ces dernières peuvent se propager suivant les trois directions de l'espace ainsi, une étude des réseaux périodiques 3D est requise.
- Pour corroborer les trouvailles numériques et valider le potentiel d'appliquer le concept de ces structures périodiques dans le domaine du génie sismique, des investigations expérimentales sont nécessaires à l'échelle du laboratoire en utilisant les tables vibrantes ou à l'échelle réelle par les vibrations forcées.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] : Kheffache, S., "Propagation d'ondes élastiques dans les cristaux phononiques bidimensionnels", Thèse de magister - Université Mouloud Mammeri Tizi-ouzou, (septembre 2011).
- [2] : Van Der Biest, F., "Diffusion multiple et renversement du temps ultrasonore dans des milieux périodiques et désordonnés ", Thèse de doctorat - Université de Paris 7, (Janvier 2006).
- [3] : Laude, V., Khelif, A., Choujaa, A., "Les cristaux phononique", le journal de la recherche et du transfert de l'arc jurassien, n° 210, (Octobre 2006).
- [4] : <http://www.femto-st.fr/fr/Diffusion/Une-introduction-aux-cristaux-phononiques-3>
- [5] : Solie, L. P., "Surface acoustic wave reflective dot array (RDA)", *Applied Physics Letters*, vol. 28, no. 8, (1976), pp. 420–422.
- [6] : Achenbach, J. D. et Kitahara, M., "Harmonic waves in a solid with a periodic distribution of spherical cavities", *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 81, no. 3, (1987), pp. 595–598.
- [7] : Narayanamurti, V., Stormer, H. L., Chin, M. A., Gossard, A. C. et Wiegmann, W., "Selective transmission of high-frequency phonons by a superlattice : The "dielectric" phonon filter", *Physical Review Letters*, vol. 43, no. 27, (1979), pp. 2012–2016.
- [8] : Berger, V., Lourtioz, J.M., "Les photons dans tous leurs états : les matériaux à bandes interdites photoniques", *Images de la Physique*, (1998).
- [9] : Yablonovitch, E., "Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics," *Phys. Rev. Lett*, vol. 58, no. 20, (1979), pp. 2059-2062.
- [10] : Yablonovitch, E., Gmitter, T. J. et Leung, K. M., "Photonic band structure : The facecentered-cubic case employing nonspherical atoms", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, no. 17, (1991), pp. 2295-2298.
- [11] : Kushwaha, M.S., Halevi, P., Dobrzynski, L. et Djafari-Rouhani, B., "Acoustic band structure of periodic elastic composites", *Phys. Rev. Lett.* 71, 2022–2025 (1993).
- [12] : Economou, E. N. et Sigalas M., "Stop bands for elastic waves in periodic composite materials", *J. Acous. Soc. Am.*, 95, 1734 (1994).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [13] : Goffaux, C. et Vigneron, J. P., "Theoretical study of a tunable phononic band gap system", *Phys. Rev. B*, 64, 075118 (2001).
- [14] : Martínez-Sala, R., Rubio, C., García-Raffi, L. M., Sánchez-Pérez, J. V., Sánchez-Pérez, E. A. et Llinares, J., "Control of noise by trees arranged like sonic crystals", *J. Sound Vib.*, 291, 100 (2006).
- [15] : Meseguer, F., Holgado, M., Caballero, D., Benaches, N., Sánchez-Dehesa, J. López, C. et Llinares, J., "Rayleigh-wave attenuation by a semi-infinite two-dimensional elastic-band-gap crystal", *Phys. Rev. B*, 59, 12169 (1999).
- [16] : Kushwaha, M. S., "Stop-bands for periodic metallic rods : Sculptures that can filter the noise", *Applied Physics Letters*, vol. 70, no. 24, (1997), pp. 3218–3220.
- [17] : Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y. Y., Yang, Z., Chan, C. T. et Sheng, P., "Locally resonant sonic materials", *Science*, vol. 289, no. 5485, (2000), pp. 1734–1736.
- [18] : Wang, G., Wen, X., Wen, J., Shao, L. et Liu, Y., "Two-dimensional locally resonant phononic crystals with binary structures", *Physical Review Letters*, vol. 93, no. 15, (2004), p. 154302.
- [19] : Wang, G., Yua, D., Wen, J., Liu, Y. et Wen, X., "One-dimensional phononic crystals with locally resonant structures", *Physics Letters A*, vol. 327, (2004), pp. 512–521.
- [20] : Zheng, G., Kishk, A. A., Glisson, A. W. et Yakovlev, A. B., *PIER* 59, 85, 2006.
- [21] : Wu, B.-I., Yang, E., Kong, J. A., Oswald, J. A., McIntosh, K. A., Mahoney, L. et Verghese, S., *Microwave Opt. Technol. Lett* 27, 81, 2000.
- [22] : Jaffre, T., "Caractérisation des matériaux à bande interdite électromagnétique multi-périodiques et leurs applications aux antennes", Thèse de doctorat - Université de Limoges, (2005).
- [23] : Ho, K.M., Chan, C.T. et Soukoulis, C. M., *Phys. Rev. Lett.* 65, 3152, 1990.
- [24] : Cheong, YK., Gorishnyy, T. et Thomas, EL, (2007), "Phononic Band Structures of Two-dimensional Hypersonic Phononic Crystals", *Proceedings of the COMSOL Conference 2007*, Boston.
- [25] : Jia, G. et Shi, Z., "A new seismic isolation system and its feasibility study", *Earthq Eng & Eng Vib*, vol.9, no.1, (2010) 9: 75-82.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [26] : Duclos, A., "Diffusion multiple en fluide visco-thermique, cas du cristal phononique à deux dimensions" Thèse de doctorat - Ecole doctorale de l'université du Maine, le Mans, France, (Juin 2007).
- [27] : Hofman, M., "Composants optiques a base de cristaux photoniques pour applications a l'imagerie infrarouge", Thèse de doctorat - Université des sciences et technologies de Lille, (Novembre 2011).
- [28] : Bernier, D., "Propriétés de superprisme des cristaux photoniques sur substrats SOI pour le démultiplexage en longueur d'onde", Thèse de doctorat – Université de Paris-Sud XI, Orsay, (Décembre 2008).
- [29] : Dubois, M., "Ondes en milieu complexes, Métamatériaux Acoustiques et Cristaux Phononiques", Rapport bibliographique (Stage master II-Acoustique), Institut Langevin France, (mai 2011).
- [30] : Khelif, A. Achaoui, Y. Benchabane, S. Laude, V and Aoubiza, B., "Locally resonant surface acoustic wave band gaps in a two-dimensional phononic crystal of pillars on a surface", Phys. Rev. B 81, 214303 (2010).
- [31] : Achaoui, Y., Khelif, A., Benchabane, S., Robert, R. et Laude, V., "Experimental observation of locally-resonant and Bragg band gaps for surface guided waves in a phononic crystal of pillars", Phys. Rev. B 83, 104201 (2011).
- [32] : <http://crdp.ac-amiens.fr/crdp/seismes/006-Imp.htm>
- [33] : http://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_sismique
- [34] : http://endirect.univ-fcomte.fr/index.php?id=numero_13_1&art=1916
- [35] : Chopra AK, *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Beijing: Tsinghua University Press, (2005).
- [36] : ALAGÖZ, B. B. et ALAGÖZ, S., "Seismic Crystals And Earthquake Shield Application", *CEJP-D-09-00056*, (2009).
- [37] : http://www.lemonde.fr/sciences/infographie/2012/09/27/quand-des-trous-jouent-les-murailles-parasismiques_1767020_1650684.html?xtmc=protection_sismique&xtcr=
- [38] : Cheng, Z.B., Shi, Z.F., Xiang, H.J., "Vibration Attenuation by Periodic Foundations", Paper No.4206, 15 World Conference on Earthquake Engineering, (2012 Sep), 24-28 Lisbon, Portugal.
- [39] : <http://cfao30.ulb.ac.be/beams/teaching/meca-h-501/Notes/tp01-introduction-Comsol.pdf>

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [40] : COMSOL Multiphysics User's Guide version COMSOL 3.4, (Octobre 2007), trademark COMSOL AB.
- [41] : Xiao, W. Zeng, GW. et Cheng, YS., "Flexural Vibration Band Gaps in A Thin Plate Containing A Periodic Array of Hemmed Discs", *Applied Acoustics*, (2006), 69: 255–261.

ANNEXES

ANNEXE A : SIMULATION DU MODELE 2 (PERIODICITE BIDIMENSIONNELLE) EN UTILISANT LE LOGICIEL COMSOL MULTIPHYSICS VERSION 3.4

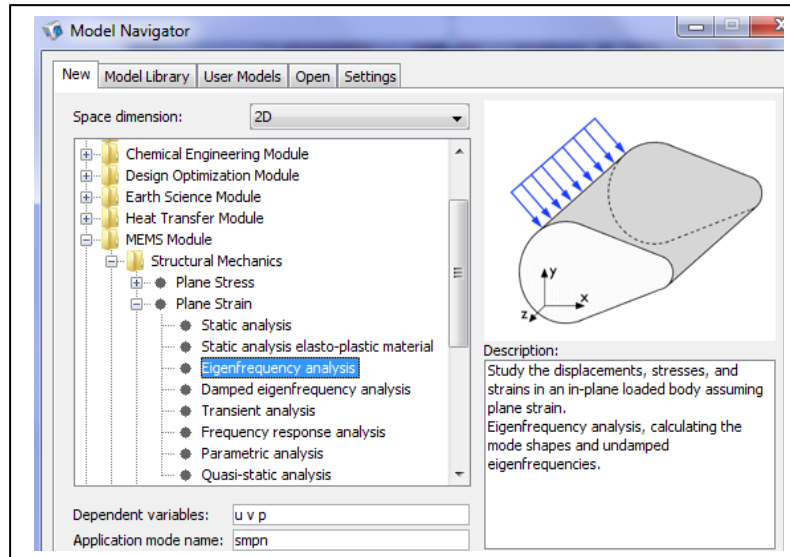
Nous présentons ci-après les différentes étapes de la modélisation du modèle 2 (périodicité bidimensionnelle) en utilisant le logiciel Comsol Multiphysics et afin de valider notre programme de simulation, nous avons comparé les résultats qu'il fournit à ceux que l'on peut trouver dans la littérature, ainsi un exemple de comparaison est donné dans le cas d'une fondation périodique constituée d'une matrice en béton dans laquelle des inclusions cylindriques en acier enrobées de caoutchouc sont disposées périodiquement dans les deux directions (x et y), en présentant d'une part la courbe de dispersion donnée par [25] et d'autre part celle obtenue par notre simulation.

A.1 Etapes de simulation du modèle 2

1- Géométrie :

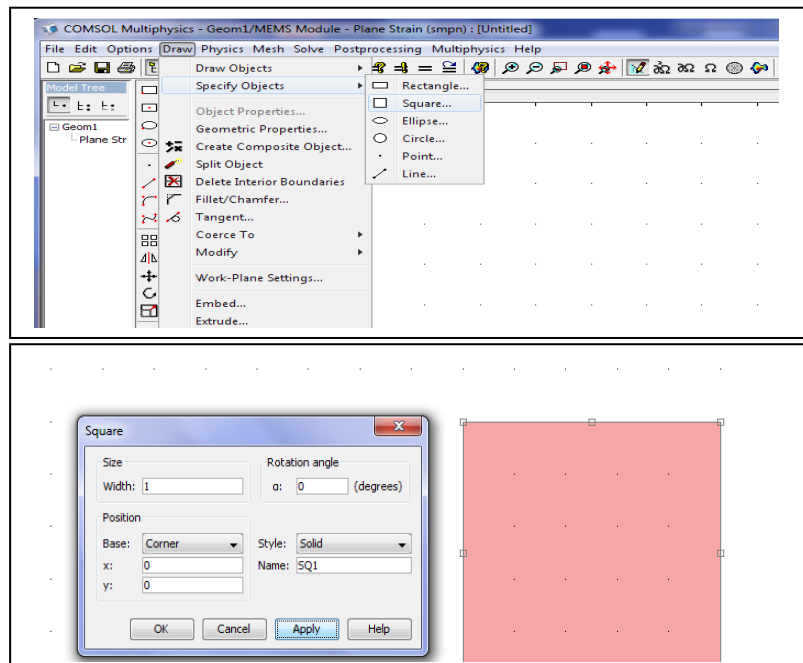
- Sur le **Model Navigator** allez à la page **New**, puis sélectionnez **2D** dans la liste **Space dimension**.
- Sur la même page, accédez à la liste des modes d'application et sélectionnez **Structural Mechanics Module > Plane Strain > Eigenfrequency analysis**.

ANNEXE A : SIMULATION DU MODELE 2 EN UTILISANT LE LOGICIEL COMSOL VERSION 3.4

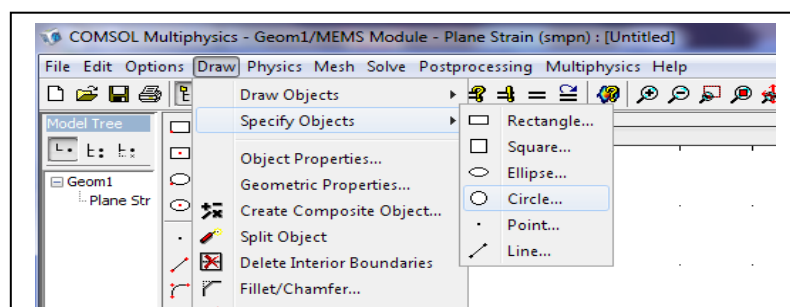


La première chose à faire une fois le programme ouvert est de dessiner la géométrie de la cellule élémentaire :

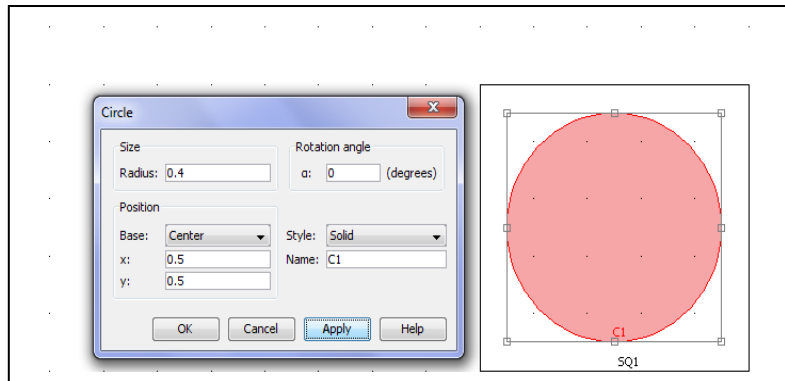
- Sélectionnez **Draw> Specify Objects> Square**.



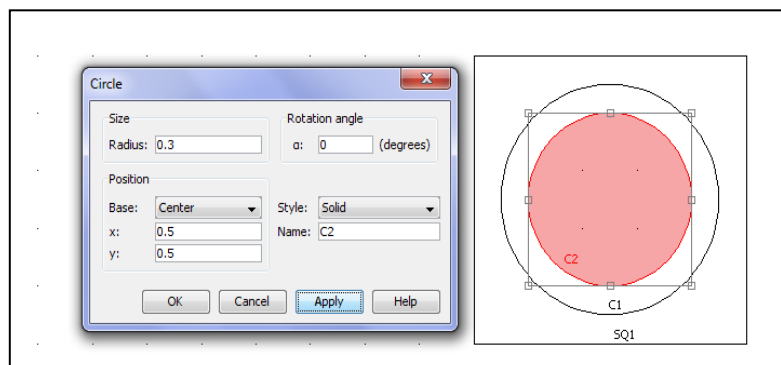
- Sélectionnez **Draw> Specify Objects> Circle**.



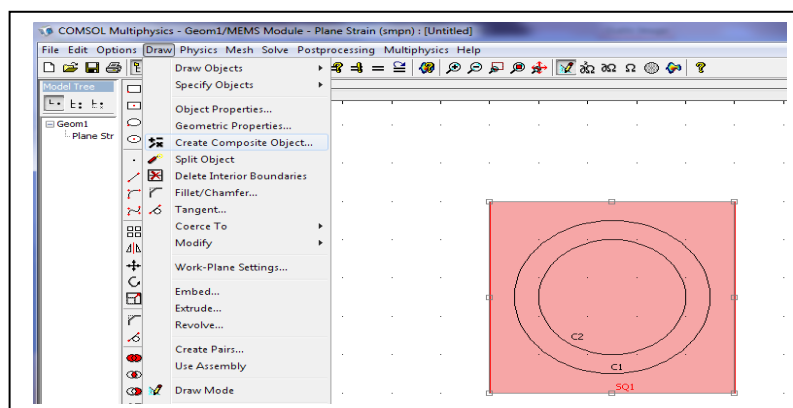
ANNEXE A : SIMULATION DU MODELE 2 EN UTILISANT LE LOGICIEL COMSOL VERSION 3.4



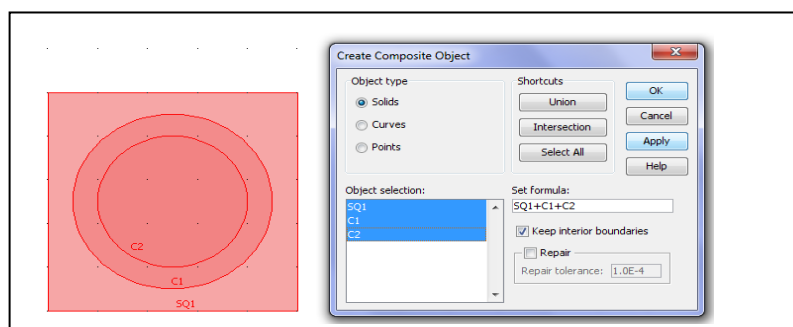
- Refaire l'étape précédente pour dessiner le deuxième cercle.
- Sélectionnez **Draw> Specify Objects> Circle**.



- Sélectionnez **Draw> Create Composite Object**.



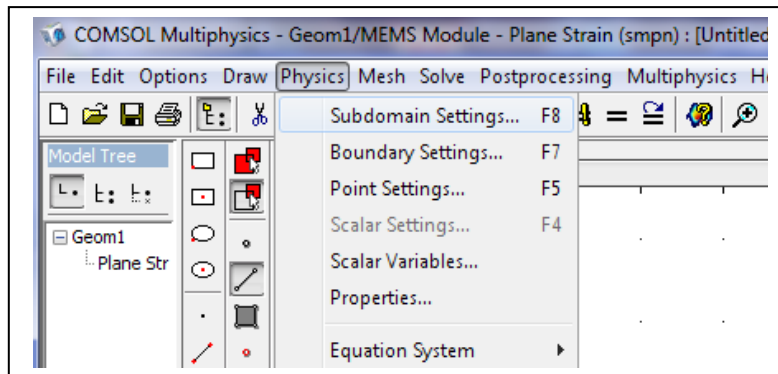
- Sélectionnez les trois objets puis cliquez sur **ok**.



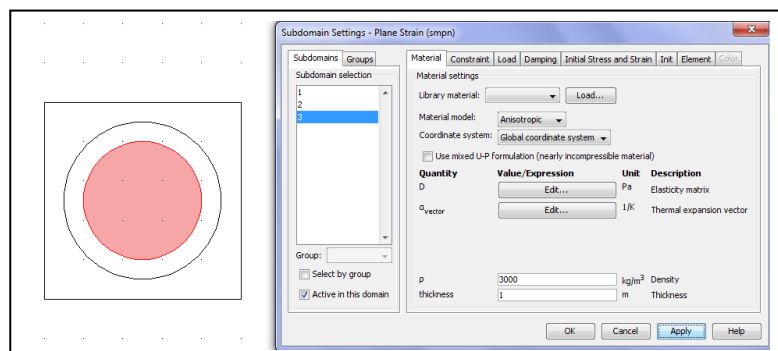
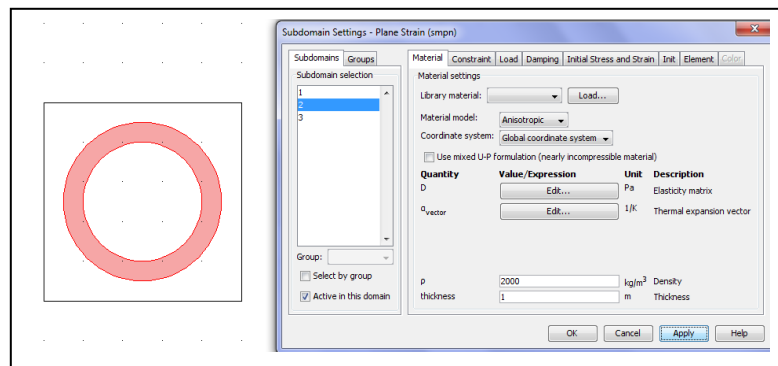
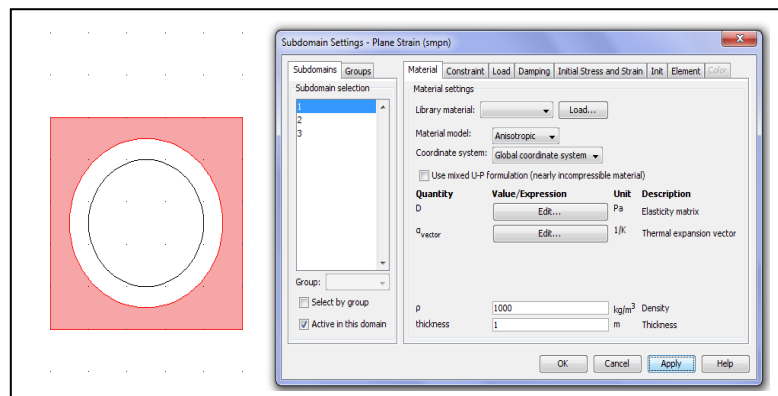
2- Introduction des propriétés des domaines:

Le but ici est de définir les paramètres physiques pour chaque domaine : Matrice d'élasticité, densité et coefficient de poisson. Les paramètres sont évidemment liés au modèle physique étudié.

- Sélectionnez **Physics > Subdomain Settings**.



- Sélectionnez et paramétrez les trois Sous domaines 1, 2 et 3

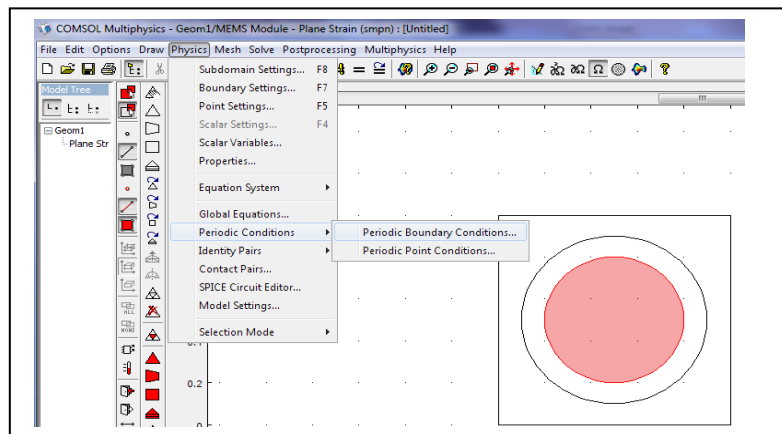


3- Introduction des conditions aux limites:

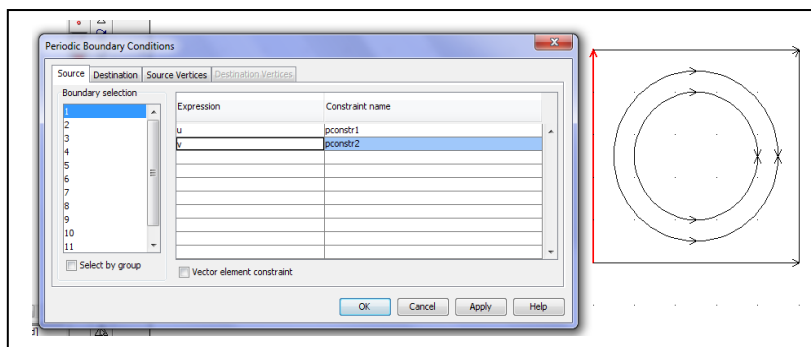
Pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP), il est nécessaire de définir un certain nombre de conditions aux limites cohérentes.

Dans notre cas le modèle a été soumis aux conditions aux limites périodiques suivant les deux directions x et y (périodicité 2D).

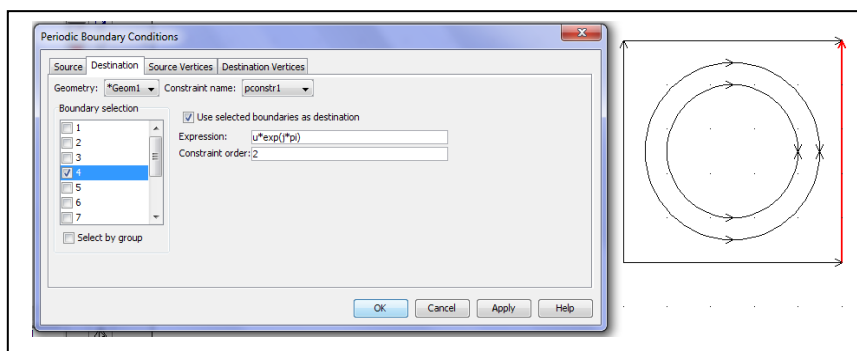
- Sélectionnez **Physics > Periodic Conditions > Periodic Boundary Conditions**.



- Sélectionnez **Source** pour définir les deux sources u et v dans la direction x (**Boundary selection 1**).

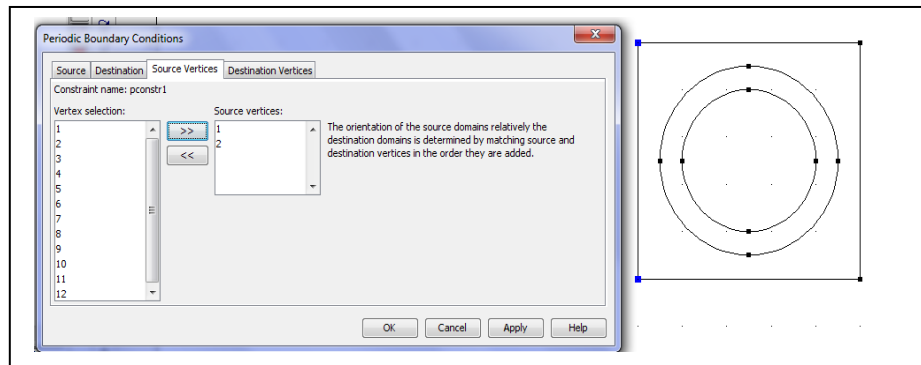


- Sélectionnez **Destination (Boundary selection 4)** pour définir son expression $u * \exp(j * kx)$ dans la direction x.

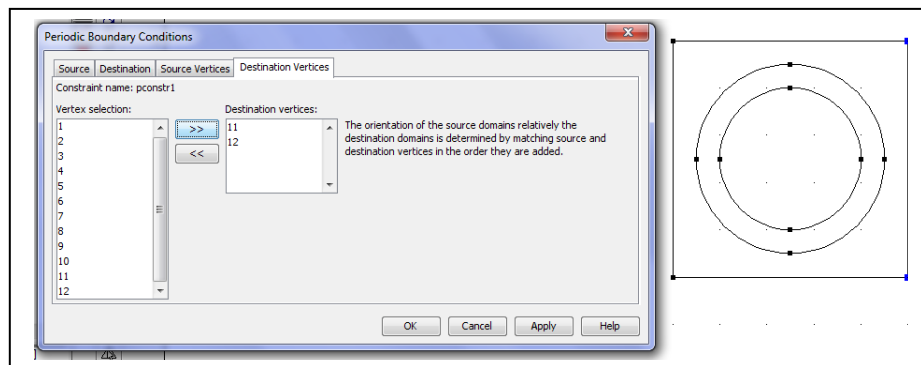


ANNEXE A : SIMULATION DU MODELE 2 EN UTILISANT LE LOGICIEL COMSOL VERSION 3.4

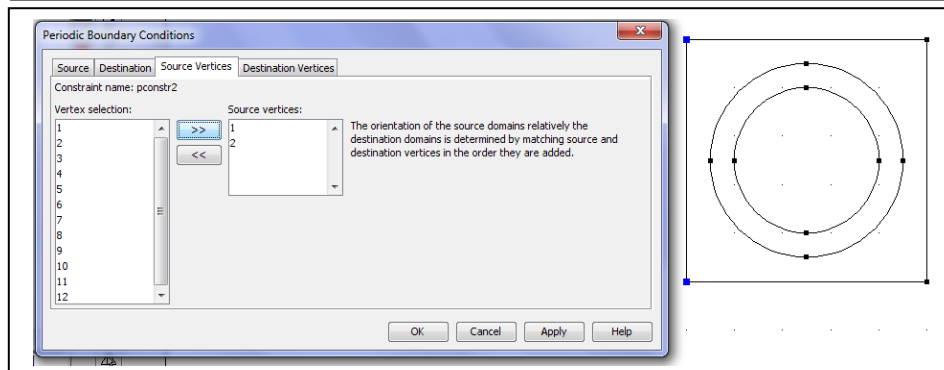
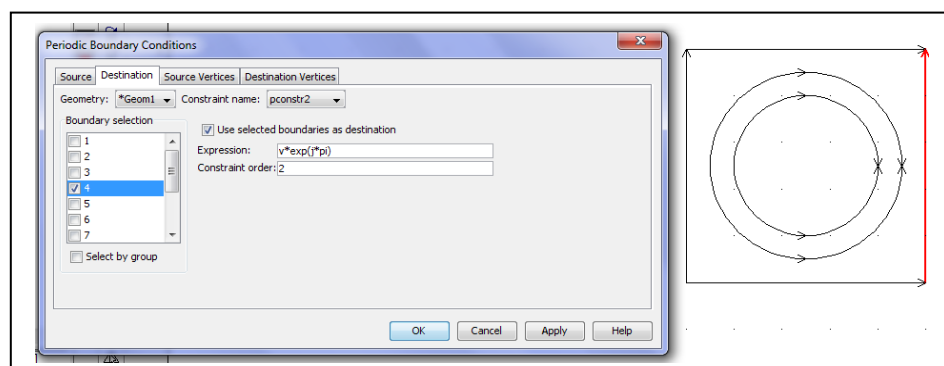
- Sélectionnez **Source Vertices** pour définir les deux nœuds de la source dans la direction x (nœuds 1 et 2).



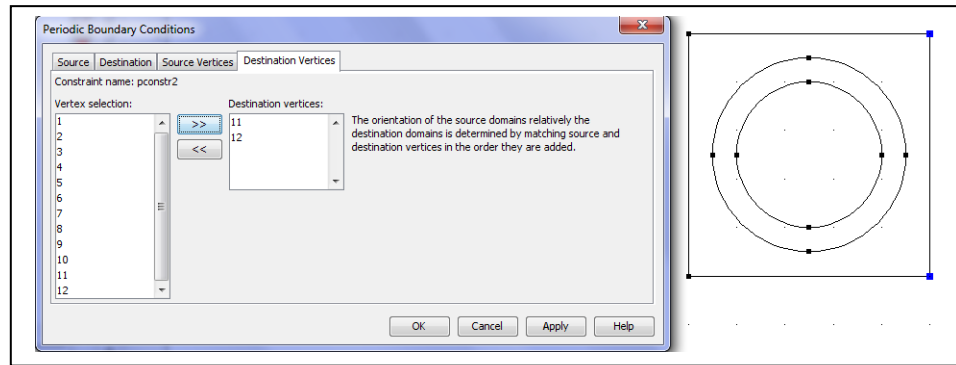
- Sélectionnez **Destination Vertices** pour définir les deux nœuds de la destination dans la direction x (nœuds 11 et 12).



- Sélectionnez **Destination > Constraint name > Pconstr2** pour définir l'expression $v * \exp(j * kx)$ dans la direction x, puis définir les **Source Vertices** et **Destination Vertices**.



ANNEXE A : SIMULATION DU MODELE 2 EN UTILISANT LE LOGICIEL COMSOL VERSION 3.4

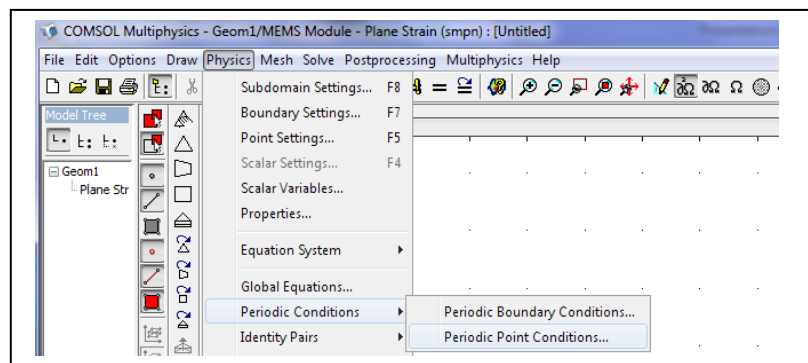


- Refaire la même chose (les cinq dernières étapes) pour définir les conditions périodiques dans la direction y, en remplaçant :

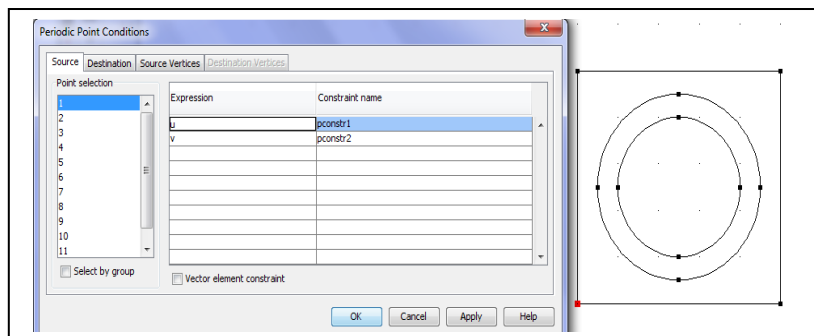
- Boundary selection** 1 par 2
- Source Vertices** (nœud 1 et 2) par (nœud 1 et 11)
- Destination Vertices** (nœuds 11 et 12) par (nœud 2 et 12)
- $j*kx$ par $j*ky$.

Il reste maintenant à définir les conditions aux limites périodiques suivant la diagonale. Cela peut se faire en suivant les étapes données dans ce qui suit :

- Sélectionnez **Periodic Conditions** à partir du menu **Physics** et cliquez sur **Periodic Point Conditions**.

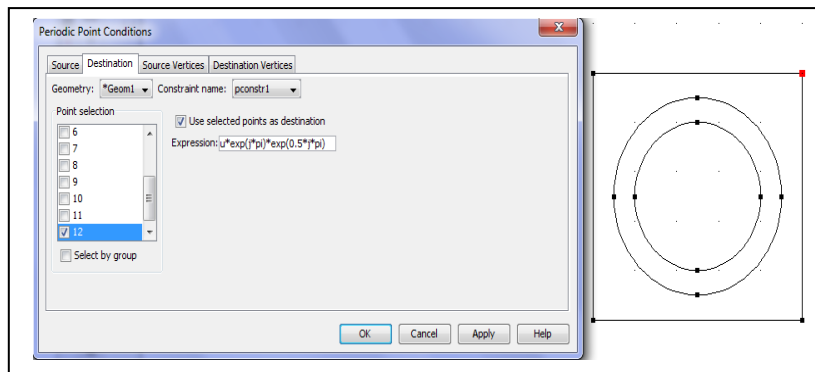


- Sélectionnez **Source** pour définir les deux sources u et v dans le sens diagonale (**Point selection 1**).

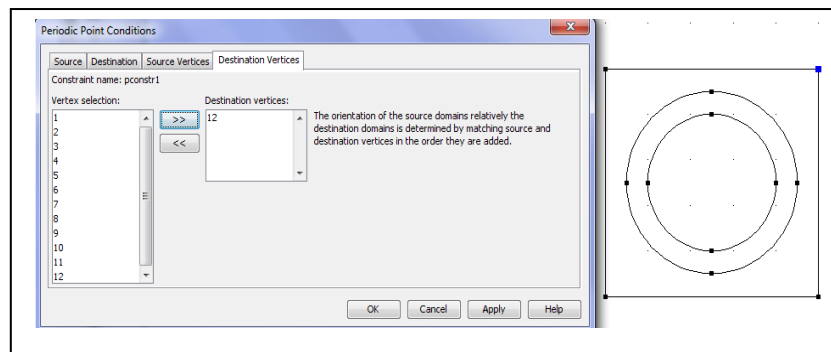
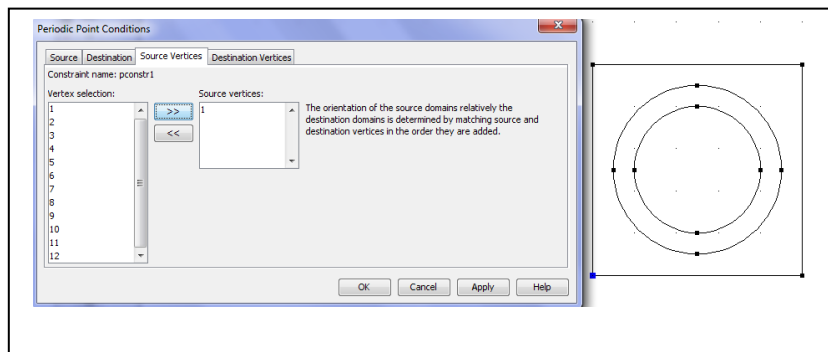


ANNEXE A : SIMULATION DU MODELE 2 EN UTILISANT LE LOGICIEL COMSOL VERSION 3.4

- Sélectionnez **Destination (Point selection 12)** pour définir son expression $u * \exp(j * kx) * \exp(j * ky)$.



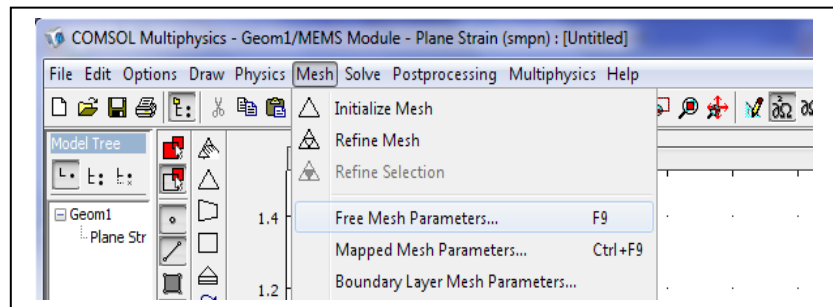
- Sélectionnez **Source Vertices** (nœud 1) puis **Destination Vertices** (nœud 2) pour définir la source et la destination dans le sens diagonale.



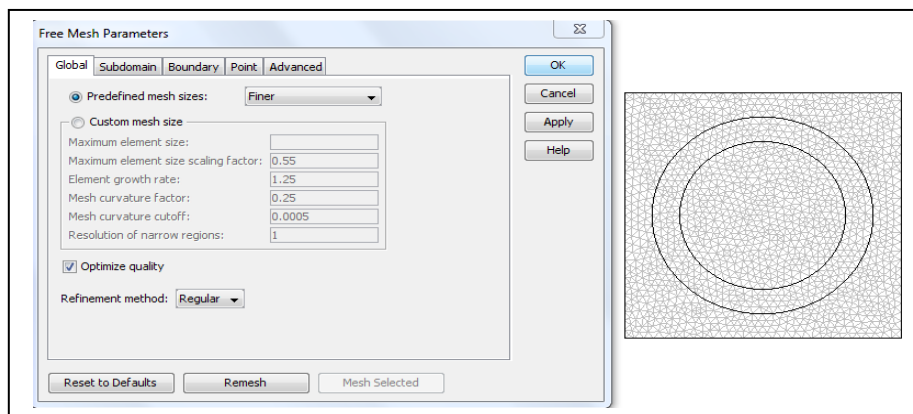
- Refaire les deux dernières étapes pour définir l'expression la deuxième composante v , en remplaçant l'expression $u * \exp(j * kx) * \exp(j * ky)$ par $v * \exp(j * kx) * \exp(j * ky)$.

4- Maillage des domaines:

- Sélectionnez **Mesh> Free Mesh Parameters**



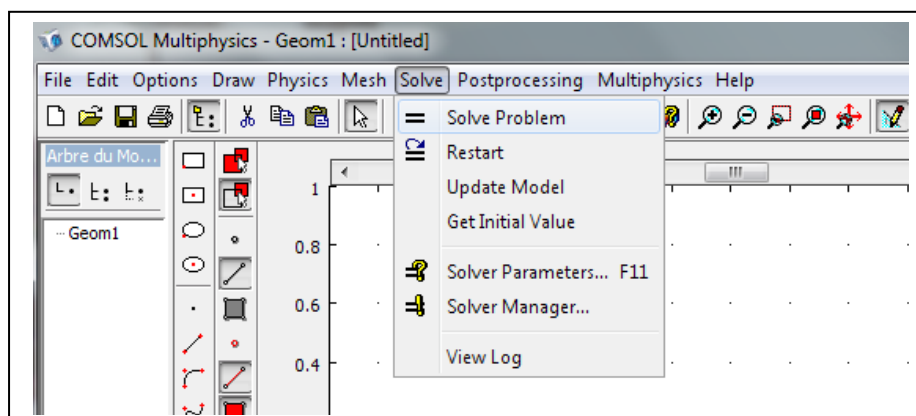
- Définir le type du maillage à partir de **Predefined mesh sizes** puis appuyez sur **ok**.

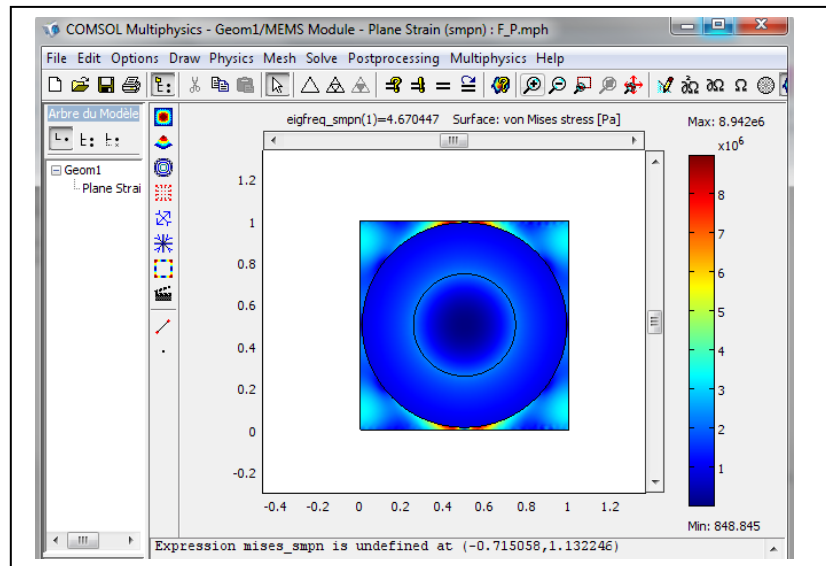


5- Résolution du problème:

Lorsque le problème est complètement défini, il ne reste plus qu'à le résoudre :

- Sélectionnez **Solve > Solve Problem** afin de résoudre le problème.





A.2 Exemple de comparaison

Les deux courbes sur la figure A.1 donnent l'évolution de la fréquence f de l'onde se propageant suivant les directions principales du cristal en fonction du vecteur d'onde k dans la première zone de Brillouin. On présente d'une part la courbe de dispersion donnée par [25] et d'autre part celle obtenue par notre simulation.

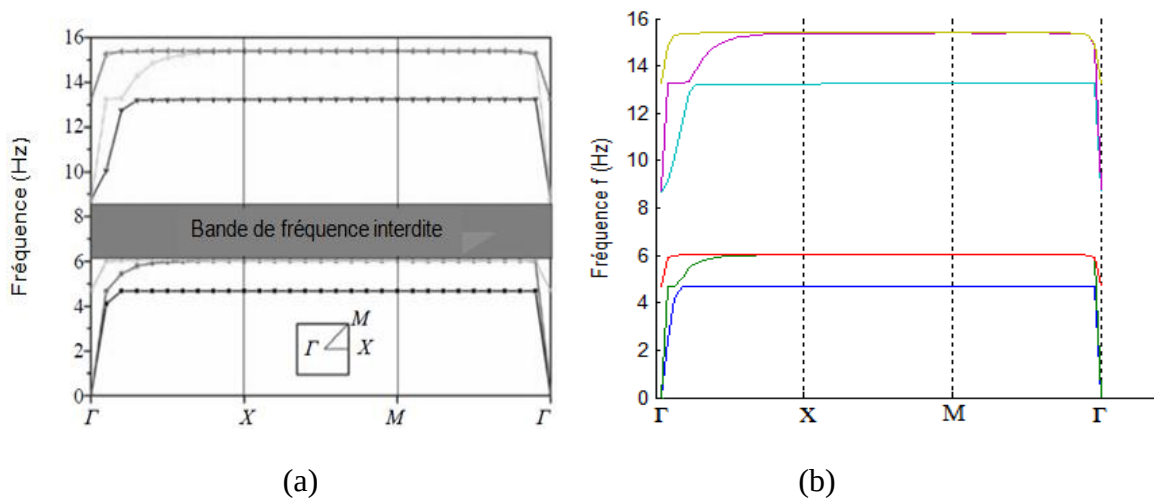


Figure A.1: (a) : Courbe de dispersion obtenue par Jia Gaofeng et Shi Zhifei [25].
(b) : Celle obtenue avec notre simulation.

La courbe de dispersion obtenue correspond à l'analyse 2D en déformations planes aux fréquences propres d'une cellule élémentaire constitué d'une matrice en béton ayant un noyau en acier de rayon R entouré de caoutchouc d'épaisseur e , cette courbe présente une

***ANNEXE A : SIMULATION DU MODELE 2 EN UTILISANT LE LOGICIEL
COMSOL VERSION 3.4***

bande de fréquence interdite de 6.03-8.73 Hz [25], pour une fraction de remplissage $F=75.43\%$, un rapport $R_{\text{noyau}}/e=1$ et une période $a=1\text{m}$.

En revanche il a été constaté que la courbe de dispersion obtenue par notre simulation correspond parfaitement à celle obtenue dans la littérature.

ANNEXE B : MODIFICATIONS OPEREES SUR LE SCRIPT DU MODELE 2 OBTENU DE LA PREMIERE SIMULATION SOUS LOGICIEL « COMSOL MULTIPHYSICS »

B.1 Le script initial

```
flclear fem
```

Reset l'espace de travail.

```
-----  
% COMSOL version  
-----
```

```
% Geometry
```

```
g1=rect2('1','1','base','corner','pos',{0,0},0,0);  
g2=circ2('0.49','base','center','pos',{0.5,0.5},0,0);  
g3=circ2('0.245','base','center','pos',{0.5,0.5},0,0);  
g4=geomcomp({g1,g2,g3},'ns',{R1,C1,C2},'sf','R1+C1+C2','edge','none')  
;
```

Dessin de la cellule
élémentaire.

```
-----  
% Analyzed geometry  
-----  
-----
```

```
% Initialize mesh  
-----
```

```
% Application mode 1  
-----
```

```
clear equ  
equ.nu = {0.3,0.463,0.3};  
equ.eta = 0;  
equ.kappa = 1e10;  
equ.materialcoord = 'global';  
equ.coord = 'global';  
equ.gporder = 1;  
equ.Tflag = 0;  
equ.exyi = 0;  
equ.dinit = 0;  
equ.FyPh = 0;  
equ.ini_strain = 0;  
equ.rho = {2500,1300,7850};  
equ.cporder = 1;  
equ.loadcoord = 'global';  
equ.Ly = 'dy_smpn';  
equ.Lx = 'dx_smpn';  
equ.y0 = 0;  
equ.sxi = 0;  
equ.Lr = 'dr_smpn';  
equ.betadk = 0.001;  
equ.Gxy = 7.52e10;  
equ.dampingtype = 'Rayleigh';  
equ.D = {'2.0e11/((1+0.33)*(1-2*0.33))*(1-0.33)', '2.0e11/((1+0.33)*(1-  
2*0.33))*0.33', ...
```

Introduction des propriétés des
matériaux utilisés (Données).


```

'2.0e11/((1+0.33)*(1-2*0.33))*0.33',0;'2.0e11/((1+0.33)*(1-
2*0.33))*0.33',...;
'2.0e11/((1+0.33)*(1-2*0.33))*(1-0.33)', '2.0e11/((1+0.33)*(1-
2*0.33))*0.33',...;
0;'2.0e11/((1+0.33)*(1-2*0.33))*0.33', '2.0e11/((1+0.33)*(1-
2*0.33))*0.33',...;
'2.0e11/((1+0.33)*(1-2*0.33))*(1-0.33)',0;0,0,0,'2.0e11/((1+0.33)*2)'};
equ.E = {3.21e10,1.37e5,2.10e11};
equ.dx = 'dx_guess_smpn';
equ.dy = 'dy_guess_smpn';
equ.Ey = 2.0e11;
equ.Syi = 0;
equ.Ez = 2.0e11;
equ.H = 0;
equ.Y0 = 'Y0_guess_smpn';
equ.ETkin = 2.0e10;
equ.x0 = 0;
equ.Ex = 2.0e11;
equ.accx = 0;
equ.R = 0;
equ.accy = 0;
equ.dr = 'dr_guess_smpn';
equ.Sys = 2.0e8;
equ.x0 = 'x0_guess_smpn';
equ.FxPh = 0;
equ.n = 1;
equ.mu = 8e5;
equ.Tempref = 0;
equ.szi = 0;
equ.ETiso = 2.0e10;
equ.Fx = 0;
equ.Fy = 0;
equ.constrcond = 'free';
equ.hardeningmodel = 'iso';
equ.materialmodel = 'iso';
equ.loadtype = 'volume';
equ.C01 = 2e5;
equ.alphax = 1.2e-5;
equ.Syfunc = 'mises_smpn';
equ.alphay = 1.2e-5;
equ.thickness = 1;
equ.eyi = 0;
equ.alphaz = 1.2e-5;
equ.alphadM = 1;
equ.vely = 0;
equ.constrcoord = 'global';
equ.velx = 0;
equ.Syfunc_kin = 'misesKin_smpn';
equ.init = 0;
equ.ini_stress = 0;
equ.C10 = 2e5;
equ.shape = [1;2];
equ.R0 = 'R0_guess_smpn';
equ.Hy = 0;
equ.coord0nx = 0;
equ.isodata = 'tangent';
equ.Hx = 0;
equ.Z0 = 0;
equ.coord0ny = 0;
equ.mixedform = 0;
equ.exi = 0;
equ.Temp = 0;
equ.hypertype = 'neo_hookean';
equ.Shard = '2.0e10[Pa]/(1-2.0e10[Pa]/2.0e11[Pa])*epe_smpn';
equ.sxyi = 0;
equ.Rx = 0;
equ.yieldtype = 'mises';
equ.Ry = 0;
equ.alpha = 1.2e-5;

```

```

equ.name = '';
equ.Haccx = 0;
equ.nuyz = 0.33;
equ.rOn = 0;
equ.userPML = {'x','y'};
equ.Hvely = 0;
equ.Haccy = 0;
equ.Hvelx = 0;
equ.constrtype = 'standard';
equ.PMLtype = 'none';
equ.alphavector = {[1.2e-5;1.2e-5;1.2e-5]};
equ.usage = 1;
equ.nuxy = 0.33;
equ.ezi = 0;
equ.nuxz = 0.33;
equ.ind = [1,2,3];
appl.equ = equ;
appl.var = {'jomega','-lambda', ...
    't_old_ini','-1'};
fem.appl{1} = appl;
fem.sdim = {'x','y'};
fem.frame = {'ref'};
-----
% Simplify expressions
-----
% Scalar expressions
fem.expr = {};
-----
% Coupling variable elements
% Extrusion coupling variables
-----
% Point constraint variables (used for periodic conditions)
clear elem
elem.elem = 'elpconstr';
elem.g = {'1'};
clear pnt
pnt.constr = {'pconstr1-(u*exp(j*pi)*exp(0.5*j*pi))','pconstr2-
(v*exp(j*pi)*exp(0.5*j*pi))'};
pnt.cpoints = {'2','2'};
pnt.ind = {'12'};
clear bnd
bnd.constr = {'0','0','pconstr3-(u*exp(0.5*j*pi))','pconstr4-
(v*exp(0.5*j*pi))'}, ...
{'pconstr1-(u*exp(j*pi))','pconstr2-(v*exp(j*pi))','0','0'};
bnd.cpoints = {'2','2','2','2','2','2','2','2'};
bnd.ind = {'3','4'};
elem.geomdim = {pnt,bnd,{} };
elemcpl{2} = elem;
fem.elemcpl = elemcpl;
-----
% Global expressions
-----
% Functions
-----
% Solution form
% ODE Settings
-----
% Multiphysics
-----
% Extend mesh
-----
% solve problem
fem.sol=femeig(fem, ...
    'method','eliminate', ...
    'nullfun','auto', ...
    'blocksize',5000, ...
    'complexfun','off', ...

```

Application des conditions
aux limites périodiques.

```

'matherr','on', ...
'solfile','off', ...
'conjugate','off', ...
'symmetric','auto', ...
'solcomp',{'v','u'}, ...
'outcomp',{'v','u'}, ...
'rowscale','off', ...
'neigs',6, ...
'shift',0, ...
'krylovdim',0, ...
'maxeigit',300, ...
'etol',0.0, ...
'eigname','lambda', ...
'eigref',0, ...
'linsolver','umfpack', ...
'thresh',0.1, ...
'umfalloc',0.7, ...
'uscale','auto', ...
'mcase',0);

% Save current fem structure for restart purposes
fem0=fem;

% Plot solution
postplot(fem, ...
    'tridata',{'mises_smpn','cont','internal','unit','Pa'}, ...
    'triedgestyle','none', ...
    'trifacestyle','interp', ...
    'tribar','on', ...
    'trimap','jet(1024)', ...
    'solnum',1, ...
    'phase',0, ...
    'title','eigfreq_smpn(1)=4.670447      Surface: von Mises stress
[Pa]', ...
    'refine','auto', ...
    'geom','on', ...
    'geomnum',[1], ...
    'sdl',{'[1,2,3]}, ...
    'axisvisible','on', ...
    'axisequal','on', ...
    'grid','off', ...
    'axis',[-2.25,2.25,-0.3333333333333328,1.6666666666666674]);

```

Résolution du problème aux valeurs propres.

Présentation des résultats.

B.2 Les modifications opérées sur le script initial

```

-----
% Geometry
rext=0.49;
rint=0.25;
g1=rect2(1,1,'base','corner','pos',{'0','0'},'rot','0');
g2=circ2(rext,'base','center','pos',{'0.5','0.5'},'rot','0');
g3=circ2(rint,'base','center','pos',{'0.5','0.5'},'rot','0');
g4=geomcomp({g1,g2,g3},'ns',{'R1','C1','C2'},'sf','R1+C1+C2','edge','none');
;
-----

clear equ
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% parametres des materiaux
fid=fopen('données sol caoutchouc Aluminium.dat','r');
data=fscanf(fid,'%f');
%vecteur des coefficients de poisson
for ii=1:3
    nu(ii)=data(ii);
end
%vecteur des masses volumiques des materiaux

```

```

for ii=1:3
    jj=ii+4;
    rho(ii)=data(jj);
end
% vecteur des modules de young
for ii=1:3
    jj=ii+8;
    E(ii)=data(jj);
end
equ.nu={nu(1),nu(2),nu(3)};
equ.rho={rho(1),rho(2),rho(3)};
equ.E={E(1),E(2),E(3)};
%Matrices d'elasticite des materiaux 2D
%Materiau 1 beton
for ii=1:4
    jj=4*(ii-1)+13;
    D1(ii,:)=data(jj:jj+3)*E(1)/((1+nu(1))*(1-2*nu(1)));
end
%Materiau 2 caoutchou
for ii=1:4
    jj=4*(ii-1)+29;
    D2(ii,:)=data(jj:jj+3)*E(2)/((1+nu(2))*(1-2*nu(2)));
end
%Materiau 3 acier
for ii=1:4
    jj=4*(ii-1)+45;
    D3(ii,:)=data(jj:jj+3)*E(3)/((1+nu(3))*(1-2*nu(3)));
end

equ.D={{D1(1,1),D1(1,2),D1(1,3),D1(1,4);...
        D1(2,1),D1(2,2),D1(2,3),D1(2,4);...
        D1(3,1),D1(3,2),D1(3,3),D1(3,4);...
        D1(4,1),D1(4,2),D1(4,3),D1(4,4)};...
        {D2(1,1),D2(1,2),D2(1,3),D2(1,4);...
        D2(2,1),D2(2,2),D2(2,3),D2(2,4);...
        D2(3,1),D2(3,2),D2(3,3),D2(3,4);...
        D2(4,1),D2(4,2),D2(4,3),D2(4,4)};...
        {D3(1,1),D3(1,2),D3(1,3),D3(1,4);...
        D3(2,1),D3(2,2),D3(2,3),D3(2,4);...
        D3(3,1),D3(3,2),D3(3,3),D3(3,4);...
        D3(4,1),D3(4,2),D3(4,3),D3(4,4)}};
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%equ.nu = {0.3,0.463,0.3};
%equ.eta = 0;
%equ.kappa = 1e10;
equ.materialcoord = 'global';
equ.coord = 'global';
equ.gporder = 1;
equ.Tflag = 0;
equ.exyi = 0;
equ.dinit = 0;
equ.FyPh = 0;
equ.ini_strain = 0;
%equ.rho = {2500,1300,7850};
equ.cporder = 1;
equ.loadcoord = 'global';
equ.Ly = 'dy_smpn';
equ.Lx = 'dx_smpn';
equ.y0 = 0;
equ.sxi = 0;
equ.Lr = 'dr_smpn';
equ.betadk = 0.001;
equ.Gxy = 7.52e10;
equ.dampingtype = 'Rayleigh';
%equ.D = {{'2.0e11/((1+0.33)*(1-2*0.33))*(1-0.33)', '2.0e11/((1+0.33)*(1-
2*0.33))*0.33', ...
% '2.0e11/((1+0.33)*(1-2*0.33))*0.33', 0; '2.0e11/((1+0.33)*(1-
2*0.33))*0.33', ...

```

Introduction des propriétés des matériaux à partir d'un fichier de données (input).

Les propriétés déjà introduites sont précédées par % (commentaire).

```
% '2.0e11/((1+0.33)*(1-2*0.33))*(1-0.33)', '2.0e11/((1+0.33)*(1-
2*0.33))*0.33',
% 0; '2.0e11/((1+0.33)*(1-2*0.33))*0.33', '2.0e11/((1+0.33)*(1-
2*0.33))*0.33', ...
% '2.0e11/((1+0.33)*(1-2*0.33))*(1-0.33)', 0; 0, 0, 0, '2.0e11/((1+0.33)*2)'};
%equ.E = {3.21e10, 1.37e5, 2.10e11};
equ.dx = 'dx_guess_smpn';
equ.dy = 'dy_guess_smpn';
%equ.Ey = 2.0e11;
equ.syi = 0;
%equ.Ez = 2.0e11;
equ.H = 0;
equ.Y0 = 'Y0_guess_smpn';
%equ.ETkin = 2.0e10;
equ.x0 = 0;
%equ.Ex = 2.0e11;
equ.accx = 0;
equ.R = 0;
equ.accy = 0;
equ.dr = 'dr_guess_smpn';
%equ.Sys = 2.0e8;
equ.x0 = 'x0_guess_smpn';
equ.FxPh = 0;
equ.n = 1;
%equ.mu = 8e5;
equ.Tempref = 0;
equ.szi = 0;
%equ.ETiso = 2.0e10;
equ.Fx = 0;
equ.Fy = 0;
equ.constrcond = 'free';
equ.hardeningmodel = 'iso';
equ.materialmodel = 'iso';
equ.loadtype = 'volume';
equ.C01 = 2e5;
equ.alphax = 1.2e-5;
equ.Syfunc = 'mises_smpn';
equ.alphay = 1.2e-5;
equ.thickness = 1;
equ.eyi = 0;
equ.alphaz = 1.2e-5;
equ.alphadm = 1;
equ.vely = 0;
equ.constrcoord = 'global';
equ.velx = 0;
equ.Syfunc_kin = 'misesKin_smpn';
equ.init = 0;
equ.ini_stress = 0;
equ.C10 = 2e5;
equ.shape = [1;2];
equ.R0 = 'R0_guess_smpn';
equ.Hy = 0;
equ.coordonx = 0;
equ.isodata = 'tangent';
equ.Hx = 0;
equ.Z0 = 0;
equ.coordony = 0;
equ.mixedform = 0;
equ.exi = 0;
equ.Temp = 0;
equ.hypertype = 'neo_hookean';
equ.Shard = '2.0e10[Pa]/(1-2.0e10[Pa]/2.0e11[Pa])*epe_smpn';
equ.sxyi = 0;
equ.Rx = 0;
equ.yieldtype = 'mises';
equ.Ry = 0;
equ.alpha = 1.2e-5;
equ.name = '';
equ.Haccx = 0;
```

```
%equ.nuyz = 0.33;
equ.ron = 0;
equ.userPML = {'x','y'};
equ.Hvely = 0;
equ.Haccy = 0;
equ.Hvelx = 0;
equ.constrtype = 'standard';
equ.PMLtype = 'none';
%equ.alphavector = {[1.2e-5;1.2e-5;1.2e-5]};
equ.usage = 1;
%equ.nuxy = 0.33;
equ.ezi = 0;
%equ.nuxz = 0.33;
equ.ind = [1,2,3];
appl.equ = equ;
appl.var = {'jomega','-lambda', ...
't_old_ini','-1'};
fem.appl{1} = appl;
fem.sdim = {'x','y'};
fem.frame = {'ref'};

-----
% scalar expressions
fem.expr = {};
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%variation de k
for dom=1:3
    nbrepas =20;
    nvpropre = 7;
    for jj=1:nbrepas+1
        compteur=jj;

%variation dom of kx
        if dom==1
            kxx=j*pi*(jj-1)/(nbrepas);
        elseif dom==2
            kxx=j*pi;
        elseif dom==3
            kxx=j*(pi-(pi*(jj-1)/(nbrepas)));
        end
        if kxx==0.0
            kxx=0.000001;
        end
%variation dom of ky
        if dom==1
            kyy=0.0;
        elseif dom==2
            kyy=j*pi*(jj-1)/(nbrepas);
        elseif dom==3
            kyy=j*(pi-(pi*(jj-1)/(nbrepas)));
        end
        if kyy==0.0
            kyy=0.000001;
        end

        fem.const={...
            'img'      sqrt(-1) ...
            'kx'      kxx ...
            'ky'      kyy};

% Le complexe i

    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
-----
```

Discrétisation du vecteur d'onde k en 20 pas pour les trois domaines (rx, xm, mr) et pour chaque valeur du vecteur d'onde k, il calcule les 7 premières fréquences.

Variation du vecteur kx pour chaque domaine.

Variation du vecteur ky pour chaque domaine.

```
% Point constraint variables (used for periodic conditions)
clear elem
elem.elem = 'elpconstr';
elem.g = {'1'};
clear pnt
pnt.constr = {'pconstr1-(u*exp(kx)*exp(ky))','pconstr2-
(v*exp(kx)*exp(ky))'};
pnt.cpoints = {'2','2'};
pnt.ind = {'12'};
clear bnd
bnd.constr = {'0','0','pconstr3-(u*exp(ky))','pconstr4-(v*exp(ky))'}, ...
{'pconstr1-(u*exp(kx))','pconstr2-(v*exp(kx))','0','0'};
bnd.cpoints = {'2','2','2','2'},{'2','2','2','2'};
bnd.ind = {'3','4'};
elem.geomdim = {pnt,bnd,{}};
elemcpl{2} = elem;
fem.elemcpl = elemcpl;
```

Application des conditions
aux limites périodiques.

```
% Solve problem
[U,lambda]=femeig(fem, ...
    'method','eliminate', ...
    'nullfun','auto', ...
    'blocksize',5000, ...
    'complexfun','off', ...
    'matherr','on', ...
    'solfile','off', ...
    'conjugate','on', ...
    'symmetric','auto', ...
    'solcomp',{'v','u'}, ...
    'outcomp',{'v','u'}, ...
    'rowscale','off', ...
    'neigs','nvpropre', ...
    'shift',0, ...
    'krylovdim',0, ...
    'maxeigiter',300, ...
    'etol',0.0, ...
    'eigname','lambda', ...
    'eigref',0, ...
    'linsolver','umfpack', ...
    'thresh',0.1, ...
    'umfalloc',0.7, ...
    'uscale','auto', ...
    'mcase',0);
if dom == 1;
    fid= fopen('GX.dat','a');
    for in=1:length(lambda) %length renvoi a la longueur du vecteur
        lambda
        GXMGLambda(in,jj)=-1.0*imag(lambda(1,in))/(2*pi);
        fprintf(fid,'%15.4f %15.15f\n',1.0*jj,GXMGLambda(in,jj));
        jj,
        GXMGLambda(in,jj),
        end
        end
        if dom == 2
            fid= fopen('XM.dat','a');
            for in=1:length(lambda) %length renvoi a la longueur du vecteur
                lambda
                GXMGLambda(in,jj+nbrepas+1)=-1.0*imag(lambda(1,in))/(2*pi);
                fprintf(fid,'%15.4f %15.15f\n',1.0*jj,GXMGLambda(in,jj));
                jj,
                GXMGLambda(in,jj),
                end
                end
                if dom == 3
                    fid= fopen('GM.dat','a');
                    for in=1:length(lambda) %length renvoi a la longueur du vecteur
                        lambda
                        GXMGLambda(in,jj+2*(nbrepas+1))=-1.0*imag(lambda(1,in))/(2*pi);
```

Résolution aux valeurs
propres $f = -\frac{Im(\lambda)}{2\pi}$.

```

        fprintf(fid,'%15.4f %15.15f\n',1.0*jj,GXMGlamba(in,jj));
        jj,
        GXMGlamba(in,jj),
        end
    end
end
figure(1)
plot(GXMGlamba','-');

% Save current fem structure for restart purposes
% fem0=fem;

% % Plot solution
% postplot(fem, ...
%         'tridata',{'mises_smpn','cont','internal','unit','Pa'}, ...
%         'triedgestyle','none', ...
%         'trifacestyle','interp', ...
%         'tribar','on', ...
%         'trimap','jet(1024)', ...
%         'solnum',1, ...
%         'phase',0, ...
%         'title','eigfreq_smpn(1)=4.670447      Surface: von Mises stress
[Pa]', ...
%         'refine','auto', ...
%         'geom','on', ...
%         'geomnum',[1], ...
%         'sdl',{'[1,2,3]'}, ...
%         'axisvisible','on', ...
%         'axisequal','on', ...
%         'grid','off', ...
%         'axis',[-2.25,2.25,-0.3333333333333328,1.6666666666666674]));

```

Dessin de la courbe de dispersion
c'est-à-dire la variation du vecteur
d'onde k en fonction de la
fréquence f .