

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTÉ DU GENIE DE LA CONSTRUCTION

DÉPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE MASTER

OPTION : CONSTRUCTION MECANIQUE

THÈME :

**Méthodes d'identification paramétrique
des structures mécaniques
par mesures vibratoires**

Présenté Par :

BOUFATAH Said

Devant le jury composé de :

M. SLIMANI Mohend	UMMTO	Président
M. TIACHACHT Samir	UMMTO	Promoteur
M. BEHTANI Amar	UMMTO	Examineur
M. AMZIANI Ahcène	UMMTO	Examineur

Soutenu le 14.09.2013

L'obtention de modèles performants par la description du comportement réel des structures est de plus en plus recherchée de nos jours, la méthode des éléments finis vise à atteindre cet objectif et à prédire avec exactitude le comportement de ces structures qui deviennent de plus en plus complexes. De nos jours elle reste couramment utilisée dans la conception et la simulation numérique de plusieurs ouvrages, initiée dans le domaine spatial et aéronautique, elle est largement répandue maintenant dans l'industrie mécanique et dans le génie civil (bâtiments et ouvrages d'arts). En utilisant la méthode des éléments finis, on constate souvent dans la réalité des erreurs de modélisations résultant soit d'une simplification et ou d'incertitude sur les paramètres physiques des structures. Pour palier à ce problème, les défauts de modélisations sont corrigés par une procédure de recalage qui à l'aide d'exploitation des résultats d'essais vibratoires essaye de corriger les paramètres de rigidité, masse et amortissement du modèle, le but est d'arriver à minimiser l'écart observé entre le calcul et l'expérience.

Vue que le recueil des résultats expérimentaux sur une structure réelle n'est pas disponible, nous avons choisis de travailler sur un modèle théorique (élément finis) sur lequel on introduit des défauts de masse, rigidité et d'amortissement, ce modèle on va l'appeler "structure réelle", ces perturbations affectent sa fonction de réponse en fréquence et /ou ses paramètres propre, en premier lieu nous essayerons d'exploiter une partie de ces informations que on va assimiler à des résultats expérimentaux fournis par des capteurs (déformées modales ou réponses fréquentielles) afin d'élaborer un algorithme de détection et localisation d'endommagements (ou défauts de modélisations).

Ce mémoire vise à choisir une méthode adaptée qui permette de localiser les erreurs de modélisation d'une structure qui contiennent des défauts.

Avant tous, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la force, le courage et surtout la volonté nécessaire pour la réalisation de ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance, et vive gratitude à monsieur TIACHACHT Samir, pour avoir proposé, dirigé, suivi constamment le progrès de ce mémoire, et d'avoir consacré un temps et une disponibilité d'esprit considérable à mon égard.

Je suis également reconnaissant aux enseignants et enseignantes qui ont contribué à ma formation, et qui se sont donné la peine et la patience, pour nous transmettre leurs connaissances.

Que messieurs le président et les membres du jury trouvent ici l'expression de ma gratitude de m'avoir fait l'honneur d'accepter de lire et de juger ce mémoire.

J'adresse mes remerciements aussi aux bibliothécaires de génie mécanique et de génie civil, et à toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, jusqu'à l'aboutissement final de ce modeste travail.

Je ne peux oublier de remercier tous ceux qui ont de près ou de loin contribué à la réalisation de ce modeste travail.

Je dédie ce travail à :

La mémoire de ma grand-mère

Mon père et ma mère

Mes frères et sœurs

Mes belles sœurs

Mes beaux frères

Toute ma Famille

Tous les soixante ainsi que tous mes amis

Saïd

Avant propos.....	i
Remerciements.....	ii
Dédicaces.....	iii
Sommaire.....	iv
Liste des figures.....	iiiv
Liste des tableaux.....	x
Nomenclature.....	xi
Chapitre I.	
Introduction générale.....	1
I.1. étude bibliographique sur le recalage des modèles élément finis.....	3
I.2. Etude bibliographique sur les indicateurs d'endommagement.....	8
I.2.1. Caractéristiques basées sur le changement de fréquence.....	8
I.2.2. Changement de forme de mode	11
I.2.3. Indicateur base sur l'énergie de déformation	13
I.2.4. Indicateur basées sur la matrice de flexibilité	15
I.2.5. Caractéristiques basées sur le Vecteur Résidu en Force.....	16
Conclusion.....	17
Chapitre II.	
Introduction a la méthode des éléments finis	18
II.1. Démarche de formulation éléments finis	19
II.1.1. Discrétisation de la structure en éléments finis.....	19
II.1.2. Construction de l'approximation nodale par sous domaines	19
II.1.3. Etablissement de la relation entre déformations et déplacements.....	19
II.1.4. Etablissement de la relation entre contraintes et déformations.....	20
II.1.5. Calcul des matrices élémentaires	20
II.1.6. Assemblage des matrices élémentaires.....	20

II.2. Elément fini barre	21
II.2.1. Définition	21
II.2.2. Formulation de l'élément barre dans le plan	22
a. Identification du problème.....	22
b. Fonction d'interpolation.....	22
c. Relation entre déformation et déplacement.....	23
d. Matrice de rigidité d'une barre dans le repère local.....	23
e. Matrice de masse d'une barre dans le repère local.....	23
f. Transformation dans le repère global.....	23
II.2.3. Formulation d'un élément barre tridimensionnelle.....	25
II.3. Elément fini poutre.....	26
II.3.1. Définition.....	26
II.3.2. Formulation d'un élément poutre dans le plan.....	26
a. Identification du problème	26
b. Fonction d'interpolation.....	27
c. Relation entre les déplacements et les déformations.....	28
d. matrice de rigidité d'un élément poutre dans le plan.....	28
e. Matrice de masse d'un élément poutre dans le plan	29
f. Transformation dans le repère global.....	30
II.3.3. Formulation d'un élément poutre tridimensionnelle.....	30
a. La matrice de rigidité.....	30
b. La matrice de masse.....	31
c. Transformation dans le repère global.....	32
II.4. Charges appliquées sur les éléments.....	35
II.5. Assemblage des matrices élémentaires.....	36
II.6. Etude des systèmes à n degrés de liberté.....	37

II.7. Notion d'amortissement mécanique.....	39
II.7.1. Modèles d'amortissement visqueux.....	39
II.7.1.1 Définition physique de l'amortissement visqueux.....	39
II.7.1.2 Oscillateur harmonique avec amortissement visqueux.....	40
II.7.1.3. Amortissement visqueux proportionnel "global".....	40
II.7.1.4. Influence des coefficients d'amortissement proportionnel.....	41
II.7.2. Amortissement hystérétique "global".....	43
II.7.3. Amortissement localisé.....	44
II.8. Fonction de la réponse fréquentielle.....	44
Chapitre III.	
III. Identification paramétrique des structures mécaniques à partir des paramètres modaux observés.....	46
III.1. Formulation de la théorie de l'indicateur d'endommagement.....	46
a. Indicateur de défaut de rigidité (beta_I).....	46
b. Indicateur de défaut de masse (alpha_I).....	49
c. indicateur de défaut d'amortissement (gamma_I).....	51
III.2. Reconstitution des d.d.l non observées et introduction du bruit.....	53
III.2.1. Reconstitution des d.d.l non observés.....	53
III.2.2. Sélection des d.d.l observés.....	56
a. Sélection des d.d.l potentiels.....	56
b. Choix du premier d.d.l capteur.....	56
c. Choix du deuxième d.d.l capteur.....	56
d. Choix du $p^{ème}$ d.d.l capteur.....	57
e. Choix du nombre de d.d.l optimum c_o.....	57
III.2.3. Introductions du bruit (erreurs aléatoires).....	58
III.3. mise en œuvre et validation des methodes.....	59
III.3.1. présentation des structures.....	59

III.3.3. Simulation numérique et validation de la méthode.....	61
III.3.3. Résultats de la simulation numérique.....	62
III.3.4. Interprétation des résultats	66
III.3.5. Limite de validation d'un défaut.....	67
Chapitre IV.	
IV. identification paramétrique des structures mécaniques à partir des	
FRFs observées.....	68
IV.1. Formulation de la théorie de l'indicateur d'endommagement.....	68
a. Indicateur de défaut de rigidité (Beta_II)	68
b. Indicateur de défaut de masse (alpha_II)	70
c. Indicateur de défaut d'amortissement (gamma_II)	72
IV.2. Mise en œuvre et validation de la méthode.....	74
IV.2.1. Choix des fréquences.....	74
IV.2.2. Sélection du nombre de ddl capteur optimal.....	76
IV.2.3. Résultats de la simulation numérique.....	77
IV.2.4. Interprétation des résultats.....	81
Conclusion général.....	82
Annexe A : quelques commandes MATLAB.....	84
Annexe B : courbes de conditionnement.....	86
Annexe C : comportement de beta_I par apport a un défaut important	88
Références bibliographiques.....	92

Fig. 2.1. Modélisation d'un élément barre.....	21
Fig. 2.2. Elément barre dans le repère local $(i, \bar{x}, \bar{y})$	22
Fig. 2.3. Elément dans le repère global.....	24
Fig. 2.4. Elément barre spatiale.....	25
Fig. 2.5. Elément poutre dans le plan avec 6 degrés de liberté.....	27
Fig. 2.6. Elément poutre tridimensionnelle.....	31
Fig. 2.7. Axes locaux d'un élément poutre.....	32
Fig. 2.8. Rotations des axes pour un élément poutre tridimensionnelle.....	33
Fig. 2.9. Axes principaux d'un élément poutre.....	34
Fig. 2.10. Charges sur un élément.....	35
Fig. 2.11. Cas du poids propre d'une barre d'un treillis.....	36
Fig. 2.12. Système dissipatif forcé a 1 ddl.....	39
Fig. 2.13. évolution de l'amortissement modal réduit en fonction de la fréquence d'excitation, Cas d'un amortissement proportionnel aux caractéristiques d'inertie.....	42
Fig. 2.14. évolution de l'amortissement modal réduit en fonction de la fréquence d'excitation. Cas d'un amortissement proportionnel aux caractéristiques de rigidité.....	42
Fig. 2.15. Évolution de l'amortissement modal réduit en fonction de la fréquence d'excitation, Cas d'un amortissement proportionnel complet.....	43
Fig. 2.16. Système dissipatif a 1ddl soumis a une force harmonique.....	43
Fig. 2.17. Fonction linéaire de transfert avec une entrée sinusoïdale.	45
Fig. 3.1. Evolution de rang et du conditionnement.....	57
Fig. 3.2. Cas test N°1.....	59
Fig. 3.3. Cas test N°2.....	60
Fig. 3.4. Cas test N°1. éléments endommagés 4 de $0.5 \times E / 21$ de $0.3 \times \rho / 3$ de $0.3 \times (\alpha, \beta)$	62
Fig. 3.5. Cas test N°1. éléments endommagés 2-3 de $0.45 \times E / 10$ de $0.6 \times \rho / 5$ de $0.4 \times (\alpha, \beta)$	62
Fig. 3.6. Cas test N°1. éléments endommagés 1-5-8 de $0.4 \times E / 12$ de $0.7 \times \rho / 9$ de $0.5 \times (\alpha, \beta)$	62

Fig.3.7.Cas test N°1.éléments endommagés 11-14-18 de $0.5 \times E$ // 15-22 de $0.4-0.2 \times \rho$ // 13-6 de $0.6-0.1 \times (\alpha, \beta)$	63
Fig.3.8.Cas test N°1.éléments endommagés 1-10-13-19 de $0.7 \times E$ // 2-16-21 de $0.55-0.45-0.65 \times \rho$ // 20-12 de $0.7 \times (\alpha, \beta)$	63
Fig.3.9.Cas test N°1.éléments endommagés 10-2-16-14 de $0.5-0.5-0.6-0.6 \times E$ // 10-2-5-19 de $0.5-0.5-0.6-0.6 \times \rho$ // 10-2-22-17 de $70 \times (\alpha, \beta)$	63
Fig.3.10.Cas test N°2.éléments endommagés 4 de $0.5 \times E$ // 4 de $0.6 \times \rho$ // 4 de $0.4 \times (\alpha, \beta)$	64
Fig.3.11.Cas test N°2.éléments endommagés 5-11 de $0.4-0.7 \times E$ // 5 de $0.5 \times \rho$ // 7 de $0.5 \times (\alpha, \beta)$	64
Fig.3.12.Cas test N°2.éléments endommagés 2-9-19 de $0.35-0.35-0.45 \times E$ // 19-3 de $0.5 \times \rho$ // 14-11 de $0.7-0.1 \times (\alpha, \beta)$	64
Fig.3.13.Cas test N°2.éléments endommagés 5-6-21 de $0.3-0.8-0.1 \times E$ // 13-17 de $0.1-0.6 \times \rho$ // 5-12 de $0.5 \times (\alpha, \beta)$	65
Fig.3.14.Cas test N°2.éléments endommagés 13-1-15-20 de $0.5 \times E$ // 3-11-20 de $0.5-0.55-0.4 \times \rho$ // 17-4-1 de $0.7-0.5-0.4 \times (\alpha, \beta)$	65
Fig.3.15.Cas test N°2.éléments endommagé 7-14-19-22 de $0.4 \times E$ // 7-1-19-6 de $0.4 \times \rho$ // 7-12-5-19 de $0.4 \times (\alpha, \beta)$	65
Fig.4.1. : FRF du cinquième d.d.l. de la structure cas test 1.....	75
Fig.4.2. : FRF du quinzième d.d.l. de la structure cas test 2.	75
Fig.4.3.: Cas test N°1.éléments endommagés 4 de $0.5 \times E$ / 21 de $0.3 \times \rho$ / 3 de $0.3 \times (\alpha, \beta)$	77
Fig.4.4.: Cas test N°1.éléments endommagés 2-3 de $0.45-0.3 \times E$ // 10 de $0.6 \times \rho$ // 5 de $0.4 \times (\alpha, \beta)$	77
Fig.4.5.: Cas test N°1.éléments endommagés 1-5-8 de $0.4-0.2-0.8 \times E$ // 12 de $0.70 \times \rho$ // 9 de $0.5 \times (\alpha, \beta)$	77
Fig.4.6.: Cas test N°1.éléments endommagés 11-14-18 de $0.5 \times E$ // 15-22 de $0.4-0.2 \times \rho$ // 13-6 de $0.6-0.1 \times (\alpha, \beta)$	78
Fig.4.7. : Cas test N°1.éléments endommagés 1-10-13-19 de $0.7 \times E$ // 2-16-21 de $0.55-0.45-0.65 \times \rho$ // 20-12 de $0.7 \times (\alpha, \beta)$	78
Fig.4.8.: Cas test N°1.éléments endommagés 10-2-16-14 de $0.5-0.5-0.6-0.6 \times E$ // 10-2-5-19 de $0.5-0.5-0.6-0.6 \times \rho$ // 10-2-22-17 de $70 \times (\alpha, \beta)$	78
Fig.4.9.: Cas test N°2.éléments endommagés 4 de $0.5 \times E$ // 4 de $0.6 \times \rho$ // 4 de $0.4 \times (\alpha, \beta)$	79

Liste des figures

<i>Fig.4.10.: Cas test N°2.éléments endommagés</i> 5-11 de $0.4-0.7 \times E$ // 5 de $0.5 \times \rho$ // 7 de $0.5 \times (\alpha, \beta)$	79
<i>Fig.4.11.: Cas test N°2.éléments endommagés</i> 2-9-19 de $0.35-0.35-0.45 \times E$ // 19-3 de $0.5 \times \rho$ // 14-11 de $0.7-0.1 \times (\alpha, \beta)$	79
<i>Fig.4.12.: Cas test N°2.éléments endommagés</i> 5-6-21 de $0.3-0.8-0.1 \times E$ // 13-17 de $0.1-0.6 \times \rho$ // 5-12 de $0.5 \times (\alpha, \beta)$	80
<i>Fig.4.13.: Cas test N°2.éléments endommagés</i> 13-1-15-20 de $0.5 \times E$ // 3-11-20 de $0.5-0.55-0.4 \times \rho$ // 17-4-1 de $0.7 \ 0.5 \ 0.4 \times (\alpha, \beta)$	80
<i>Fig.4.14.: Cas test N°2.éléments endommagés</i> 7-14-19-22 de $0.4 \times E$ // 7-1-19-6 de $0.4 \times \rho$ // 7-12-5-19 de $0.4 \times (\alpha, \beta)$	80

Liste des tableaux :

Tableau 1 : différents scénarios d'endommagements introduit dans les cas tests.....	61
Tableau. A.1. Commandes Générales.....	84
Tableau. A.2. Opérateurs.....	84
Tableau. A.3. Instructions.....	84
Tableau. A.4. Noms réservés.....	85
Tableau. A.5. Fonctions mathématiques élémentaires.....	85
Tableau. A.6. Matrices	85

ε : Déformations

σ : contrainte(Mpa)

E : module de Young du matériau (GPa)

A : section (m²)

$n(x)$: l'effort normal dû à une la force (N)

$(i, \bar{x}, \bar{y})$: Repère local.

(i, x, y) : Repère global.

$\bar{U}_{xi}$: Déplacements aux nœuds i

$\bar{F}^e$: Vecteur force relatif à l'élément e

$\bar{U}^e$: Vecteur déplacement

N : La matrice d'interpolation

$\bar{K}^e$: Matrice de rigidité de l'élément e dans le repère local

$\bar{M}^e$: La matrice de masse de l'élément e dans le repère local

c_y, c_x, c_z : Cosinus directeurs

L : la longueur de l'élément calculée à partir des coordonnées des nœuds (m)

T : La matrice transformation du repère local au repère global est

K^e : Matrice de rigidité de l'élément e dans le repère global.

M^e : La matrice de masse de l'élément e dans le repère global.

Π^e : Énergies potentielles des éléments. (Joule)

Π : L'énergie potentielle totale de la structure (Joule)

K : Matrice de rigidité global.

M : Matrice de masse global.

C : Matrice d'amortissement de la structure.

p_i : Déphasage du $i^{\text{ème}}$ mode.(rad)

ω_i : $i^{\text{ème}}$ valeur propre.(rad/s)

$\{\omega\}$: Matrice des valeurs propre.

$\{\Phi\}$: matrice des vecteurs propres.

m : Masse (Kg)

k : Rigidité (N/m)

c : Amortissement (N. s/m)

U : énergie de déformation (Joule)

T : énergie potentiel (Joule)

D : énergie dissipatif (Joule)

η : coefficient de perte).

$c_{critique}$: L'amortissement critique

ξ : L'amortissement réduit (taux d'amortissement)

α et β : Coefficients de l'amortissement proportionnel.

ξ_j : Amortissement modale réduit.

$[Y(\omega)]$: Matrice des fonctions des réponses en fréquence.

$y_i(\omega)$: Réponse fréquentielle pour la $i^{ème}$ pulsation.

ZU_I, ZU_II : Indicateurs de défaut de rigidité non normalisés.

ZT_I, ZT_II : Indicateurs de défaut de masse non normalisés.

ZD_I, ZD_II: Indicateurs de défaut d'amortissement non normalisés.

Beta_I, Beta_II : Indicateurs de défaut de rigidité normalisés.

alpha_I, alpha_II : Indicateurs de défaut de masse normalisés.

gamma_I, gamma_II : Indicateurs de défaut d'amortissement normalisés.

Introduction Générale

nous avons l'habitude de modéliser des structures sous formes d'élément finis, puis nous travaillons dessus afin de prédire sa réaction vis-à-vis des actions extérieurs, mais la nature des structures est imparfaite, a cause de la porosité des matériaux, la présence des microfissures, les liaisons boulonnées,...etc., ces imperfections crée une divergence entre les résultats mesurés et ceux calculés, ce mémoire est une introduction à la réalité du comportement dynamique des structures, nous allons chercher a améliorer un modèle élément finis pour qu'il s'approchent au mieux de la réalité, après avoir discrétisée la structure en sous domaines ou éléments, la où chaque sous domaine est représenté par une matrice élémentaire de rigidité, masse, et amortissement, nous identifions les sous domaines mal modélisés sur la structure réel, puis nous les corrigeons, a la fin on effectue la reconstruction du modèle avec les nouveaux sous domaines.

Dans ce mémoire nous nous focalisons sur les méthodes vibratoires pour la localisation d'endommagements, la définition d'endommagement sera alors limitée aux changements des propriétés physiques de la structure. Pour pallier aux limites des méthodes à base de contrôle non destructif (CND), des méthodes de détection d'endommagements utilisant les essais vibratoires ont été développées. Ces approches utilisent des caractéristiques vibratoires de la structure pour identifier les endommagements. Ces caractéristiques, par exemple : les fréquences de résonance, les formes des modes et les amortissements dépendent des caractéristiques physiques de la structure, telles que sa masse et sa rigidité. Les endommagements changent ces caractéristiques physiques. Par conséquent les caractéristiques vibratoires sont aussi modifiées. Donc, Il s'ensuit, que l'estimation des changements des caractéristiques vibratoires peut permettre de détecter et de localiser les endommagements. L'avantage de ces méthodes est que l'information a priori concernant l'emplacement de l'endommagement n'est pas nécessaire de plus quelques capteurs installés à des endroits appropriés de la structure peuvent fournir des informations suffisantes.

Ce mémoire sera partagé en quatre chapitres

Chapitre I : nous présentons une synthèse bibliographique sur la correction paramétrique des structures mécaniques, et inspectons les différentes approches et travaux antérieurs.

En suite nous allons présenter les différentes méthodes vibratoires de détection d'endommagements les plus fréquemment utilisées, nous discutons pour chaque approche, les avantages et les inconvénients qu'elle procure, en fin, nous sélectionnons la méthode la plus appropriée a notre cadre.

Chapitre II : nous détaillons la procédure d'élaboration d'un élément fini poutre et barre dans l'espace plane et tridimensionnel, puis nous passons a l'étude de la dynamique des structures a n degré de liberté (d.d.l.), la nous nous concentrons sur le mouvement libre et la résolution du problème aux valeurs propres. Puis nous allons introduire les méthodes de modélisation de l'amortissement les plus fréquemment utilisées, on va se

focaliser sur le modèle proportionnel globale, en fin on expose les fonctions des réponses en fréquence des systèmes dissipatif.

Chapitre III : nous traiterons l'identification paramétrique des structures à partir des paramètres modaux observer, nous présenterons les indicateurs de défauts de masse et de rigidité, que nous allons nommer respectivement, indicateur α_I et β_I , nous proposons ensuite l'écriture d'un indicateur de défauts d'amortissement nommer, indicateur γ_I , ce chapitre débute par la présentation de la théorie de l'indicateur d'endommagement exploitant les paramètres modaux, en suite le procédé de sélection des d.d.l. capteurs, puis la méthode de reconstitution des d.d.l. non observer, deux structure en poutre seront présentés, la validation des méthodes se fera après l'analyse des résultats de simulations sur les deux cas tests.

Chapitre IV : nous proposons une nouvelle écriture des indicateurs d'endommagement utilisés dans le chapitre III, mais la, nous allons essayer de les adaptés aux fonctions de réponse en fréquence avant et après endommagement, au début de ce chapitre nous présentons la formulation des indicateurs proposés, en suite nous sélectionnons les fréquences qu'on va employer ainsi que le nombre de d.d.l. optimum, nous allons appliquer ces indicateurs aux mêmes cas test employer dans le chapitre précédant avec les mêmes conditions expérimentaux (bruits de mesures et endommagements, type et nombre de défaut), en fin nous interprétons les résultats obtenus.

L'analyse des résultats obtenue du chapitre un et deux, vont nous permettre de tirer une conclusion générale la où on va critiquer les deux méthodes employer selon leurs avantages et leurs inconvénients.

Chapitre I

I.1. étude bibliographique sur le recalage des modèles élément finis :

L'utilisation de la modélisation par éléments finis pour prédire le comportement des structures complexes est devenue de nos jours une technique couramment utilisée. C'est une pratique commune dans plusieurs applications d'ingénierie. En pratique les modèles éléments finis contiennent souvent des erreurs significatives notamment au niveau des valeurs des paramètres. Pour corriger ces erreurs, les résultats obtenus du modèle doivent être comparés aux mesures expérimentales. Cependant, pour pouvoir disposer d'un modèle numérique fiable et susceptible de se substituer à l'expérimentation, il est nécessaire de procéder à une confrontation des résultats théoriques et expérimentaux. Le recalage des modèles de calcul est l'objectif de cette confrontation et a pour but de corriger le modèle numérique sur la base des données expérimentales.

Un modèle est employé pour simuler la dynamique d'une structure saine et des déviations observées, par rapport à la dynamique simulée. Ces déviations sont directement liées aux changements sur les paramètres du modèle. Le recalage de modèle peut être effectué par les méthodes directes (globales) ou par les méthodes de sensibilité (itératives ou locales). Les méthodes directes donnent des résultats exacts, en recalant les matrices de rigidité et de masse en une seule étape de manière à ce que la sortie du modèle corresponde aux données expérimentales (Berman et al. 1983, Baruch et al. 1978) [1], [2]. Par contre, le modèle recalé ne peut fournir aucune signification physique (Levin et al. 1998b) [3]. Les méthodes de sensibilité vainquent cette limitation des méthodes directes, mais exigent une solution itérative (Friswell et al, 1995. Link, 2000),[4].[5] Le développement d'un mécanisme du recalage basé sur la sensibilité se compose des étapes suivantes :

- choix du résidu et de la fonction objectif ;
- développement du modèle de base ;
- choix des paramètres de recalage ;
- choix d'algorithme d'optimisation.

Les résidus sont définis par des différences entre les quantités dynamiques du modèle mathématique et celles identifiées expérimentalement (Natke, 1998) [6]. Le choix du résidu joue un rôle important dans tous les problèmes de recalage de modèle EF parce qu'il influence le comportement de l'algorithme d'optimisation utilisé. La majorité des algorithmes de recalage de modèle utilisés pour identifier les endommagements ont employé des résidus basés sur les fréquences propres et les formes des modes.

L'amortissement n'est généralement pas pris en considération à cause des difficultés de modélisation.

L'estimation des fréquences propres d'une structure est plus rapide et plus économique (en terme de coût de calcul) que l'identification des formes des modes, ce qui implique son utilisation fréquente pour la construction d'un résidu. Ces méthodes

largement utilisées pour recalibrer les modèles EF en mécanique des structures ont été détournées de leurs objectifs principaux pour être appliquées en détection d'endommagement. Le but est de détecter des écarts sur des paramètres et ces écarts sont des indicateurs de défauts ou d'endommagements. Nous présentons ci-dessous quelques approches de la surveillance de l'intégrité de structures (Structural Health Monitoring) SHM par recalage de modèle. Nous efforcerons pour chaque approche, de préciser la structure et le type d'endommagement que les auteurs ont essayé de surveiller et jusqu'à quelle étape de la procédure SHM ils ont pu satisfaire.

Une fente dans une armature expérimentale de cinq étages a été localisée par (Morassi, 1997) [7] grâce à l'utilisation comme résidu du changement observé sur les cinq premières fréquences propres liées aux modes de cisaillement. Ils ont considéré que la distribution de la rigidité est connue dans certaines régions du modèle et qu'elle n'atteint jamais une valeur plus grande que celle de la configuration de référence. Ces deux hypothèses ont joué un rôle important dans la convergence des algorithmes d'identification d'endommagement.

(Maeck et al, 2000) [8] ont créé des fissures dans une poutre en béton armé par le chargement statique et ont utilisé un algorithme de recalage du modèle pour recalibrer les changements mesurés des cinq premières fréquences propres de la poutre avec son modèle EF. Pour réduire le nombre de paramètres, ils ont considéré des types d'endommagements prédéfinis. Cette approche n'est pas adaptée aux structures plus complexes.

L'utilisation des fréquences propres réduit le nombre de paramètres possibles et donc le type, le nombre et les endroits où les endommagements peuvent être identifiés. Pour cette raison il est plus pratique d'utiliser les formes des modes mesurées, si elles peuvent être identifiées.

(Jang et al, 2002) [9] ont identifié des endommagements dans une armature pour laquelle six modes ont été identifiés. Ils n'ont pu détecter les endommagements qu'en trois endroits seulement, mais aucun effort n'a été fait pour estimer leurs sévérités.

(Hailing et al, 2001) [10] ont employé trois fréquences et deux modes pour identifier des types de dommages prédéfinis. Des dommages ont été modélisés par des paramètres représentant le moment d'inertie des colonnes d'un pont, où les dommages ont été occasionnés. Les résultats ont permis la localisation des endommagements, mais leurs sévérités n'ont pas été corrélées avec le changement observé sur ces paramètres.

(Papadopoulos et Garcia, 1998) [11] ont présenté une méthode de recalage du modèle et d'identification d'endommagement, qui pourrait prendre en compte la variabilité de la structure. En premier lieu, ils ont estimé les propriétés statistiques de la structure saine comme la masse, la rigidité et la moyennes des fréquences propres. Ensuite, les fréquences propres et les formes des modes du système endommagé ont été simulées. Le nombre de paramètres des endommagements a été choisi égal au nombre de modes

disponibles. En dernier lieu, ils ont comparé les propriétés statistiques de la rigidité de la structure endommagée à celles de la structure saine pour estimer la probabilité de l'existence d'endommagements.

Le recalage de modèle utilisant des mesures de FRF a été également employé pour l'identification des endommagements (Marwala et al, 1998, Cha et Tuck, 2000) [12], [13]. L'avantage de ces méthodes par rapport à celles utilisant les paramètres modaux est qu'il réside dans la quantité (plus importante) d'informations obtenue dans une gamme de fréquence désirée (Lin et Ewins, 1994) [14] et dans la suppression de l'obligation d'effectuer d'opération d'appariement.

Zang et al 2001) [15] précisent également que, en employant un grand nombre de points de FRF, les systèmes d'équations de recalage peuvent être aisément transformés en ensembles d'équations "hyper-déterminé".

Kye et Rong, 2004 [16] Ont proposes une nouvelle méthode de recalage de modèle élément finis basé sur les FRF, ils ont mis en œuvre un algorithme qui calcule automatiquement un nombre optimal de fréquences et cela en cherchant les vecteur les plus linéairement indépendant dans la matrice de sensibilité , la présélection des fréquences a introduire dans l'algorithme doit être loin des fréquences de résonances, l'avantage de cette méthode c'est que elle choisit un minimum de fréquences et qui fournissent un maximum d'informations de base pour le recalage, cette méthode a été appliquée avec succès a une structure en treille plane, puis sur un arbre reposant sur deux pallier.

Le choix et le nombre de paramètres à mettre à jour sont également des facteurs importants à considérer.

Casas et Aparicio, 1994 [17] ont étudié l'identification de la fissure dans une poutre en béton armé en utilisant une technique de recalage du modèle. Ils ont conclu que la seule variation des fréquences propres ne permet pas de distinguer les changements de la flexion, du module de déformation ou la fissuration. Ils ont également conclu que l'amortissement n'était pas sensiblement différent dans les poutres avec fissure par rapport aux poutres sans fissure et qu'il n'y avait aucune relation claire entre la progression de la fissure et l'augmentation de l'amortissement.

Gola et al,2001[18] ont étudié le nombre de paramètres identifiables dans les méthodes de sensibilité. Le nombre théorique de paramètres qui peut être identifié est égal au nombre de fréquences de résonance mesurées. Dans le cas où on utilise aussi les formes des modes, le nombre de paramètres possède une limite supérieure ou égale au nombre de modes multiplié par le nombre de degrés de liberté mesuré.

Afin de trouver la solution d'un problème inverse, différentes méthodes d'optimisation peuvent être employées. Les systèmes linéaires peuvent être régularisés en utilisant des techniques de décomposition orthogonale comme la décomposition QR, où

l'espace initial des paramètres est réduit à un plus petit sous-espace. Ceci rend le problème numériquement plus stable et conduit à une solution plus précise.

Une autre manière est d'utiliser la décomposition en valeurs singulières. Des méthodes itératives comme la méthode des gradients conjugués peuvent également être employées.

Fritzen et Kiefer, 1992 [19] ont appliqué une méthode basée sur la décomposition SVD et une méthode du gradient conjugué pour détecter les endommagements dans une poutre uniforme. Ils ont montré que les deux méthodes fournissent l'ensemble complet des paramètres mais les résultats de la localisation ne sont pas aussi clairs qu'avec des algorithmes basés sur la décomposition QR.

Pour les systèmes non-linéaires il existe plusieurs méthodes pour rechercher le minimum absolu de la fonction d'optimisation. (Natke et Cempel, 1991) [20]. La méthode de Newton-Raphson peut être employée, mais présente l'inconvénient de devoir trouver des valeurs initiales dans la zone de convergence. L'avantage de la méthode des moindres carrés pondérés réside dans sa nature itérative qui assure toujours une convergence de l'algorithme. La méthode de Levenberg-Margquardt est une combinaison de la méthode de descente de Gauss-Newton et de la méthode gradient. C'est la plus robuste, mais prend plus de temps pour trouver le minimum.

La méthode du recuit simulé est basée sur une recherche aléatoire qui permet de trouver le minimum absolu du problème.

Dans (Fritzen et al, 1993) [21] la méthode est employée pour résoudre le problème de détection d'endommagements par un choix aléatoire des petits sous-ensembles des paramètres de recalage.

Levin et Lieven, 1998a [22] ont comparé diverses réalisations des algorithmes basés sur la méthode du recuit simulé et l'algorithme génétique et ont proposé une nouvelle variation d'algorithme du recuit simulé pour le recalage du modèle. Ils ont montré que les méthodes basées sur les algorithmes génétiques ne peuvent pas traiter le couplage entre les paramètres de recalage, et que les méthodes basées sur la méthode du recuit simulé sont très lentes. Ils ont également précisé que généralement la fonction objectif choisie pour le problème de recalage de modèle a beaucoup de minimums locaux, l'utilisation des techniques d'optimisation puissantes telles que le recuit simulé est donc plus appropriée.

Fritzen et al, 1998 [23] ont montré que la performance d'un algorithme de détection d'endommagement basé sur le recalage de modèle dépend fortement de l'exactitude du modèle mathématique. Les hypothèses et les simplifications jouent un rôle essentiel. Ils ont ainsi utilisé des algorithmes basés sur la sensibilité pour localiser et détecter des endommagements. Ils ont montré que le recours à la théorie de poutre de Bernoulli-Euler au lieu de la théorie de Timoshenko a produit des résultats inexploitable du fait du décalage des hautes fréquences. Souvent les changements des quantités mesurées, provoqués par des endommagements structuraux, sont plus petits que ceux observés entre

la structure saine et le modèle mathématique. En conséquence, il devient presque impossible de discerner entre un modèle imparfait et le changement réel provoqué par l'endommagement.

Il y a deux approches alternatives à ce problème Friswell et al 1997[24] :

Le premier est de recalibrer le modèle de manière à ce que la corrélation entre le modèle et les données mesurées soit améliorée. Cette approche exige que les erreurs qui demeurent après le recalage soient plus petites que les changements provoqués par des endommagements. De plus, les changements au modèle devraient être physiquement significatifs, de sorte que l'algorithme de recalage corrige des erreurs de modélisation réelles, et ne reproduisent pas simplement les données mesurées.

La deuxième approche propose d'utiliser les résidus relatifs basés sur la différence entre les données mesurées sur la structure saine et la structure endommagée.

Les problèmes de recalage de modèle sont généralement résolus par les méthodes itératives qui exigent la résolution du problème analytique au moins une fois à chaque itération : par conséquent la taille du modèle devient un paramètre important à considérer. Selon Natke,1998 [6], ces méthodes fonctionnent correctement quand le nombre de paramètres à estimer est inférieur à environ 100 et le nombre maximum du degré de liberté (d.d.l.) est inférieur à environ 1000 mais le ddl d'un modèle EF est généralement beaucoup plus grand que cette valeur. Pour résoudre ce problème, il est recommandé d'employer la modélisation par sous-systèmes et d'utiliser différentes techniques de réduction du modèle.

Law et al,2001[25] a présenté une méthodologie de modélisation orientée sur la détection des endommagements dans des grandes structures. Pour réduire le nombre de ddl, des super-éléments ont été formulés tandis que la sensibilité des modes à des petits changements physiques a été maintenue. Ce qui a permis au modèle d'être employé dans un algorithme de recalage basé sur la sensibilité. Le fonctionnement de la méthode a été testé sur une structure simulée d'un pont de passerelle où les 5370 ddl initiale ont été réduites à 211 ddl avec une performance raisonnable.

Moller et Friberg,1998 [26] ont proposé une méthode qui a réduit le modèle par la projection sur un sous-espaces représentant un nombre réduit de modes. Ceci a eu comme conséquence de réduire le temps de calcul.

Berman, 2000[27] a conclu qu'il ne peut y avoir aucun modèle dynamique recalé unique d'une structure tant que le ddl du modèle est inférieur au ddl de la structure réelle. Il a argumenté en affirmant que si la structure réelle a un nombre infini de ddl, il existe un nombre infini de modèles physiquement raisonnables, qui représentent le comportement de la structure sur une gamme de fréquences donnée.

Baruch, 1997[28] a prouvé que des changements simultanés des matrices de la masse et de rigidité ne pourraient pas être identifiés par la seule utilisation des données modales. Car les formes des modes ne pouvaient pas fournir une base de référence. Les méthodes qui utilisent des formes des modes comme base de référence peuvent identifier des matrices qui sont très différentes des matrices de rigidité et de masse réelles parce que les matrices identifiées ne sont pas uniques. Ceci a des conséquences importantes sur l'identification des endommagements affectant la masse et la rigidité de la structure : ils ne peuvent pas être identifiés en grâce à la seule utilisation des mesures modales.

I.2. Etude bibliographique sur les indicateurs d'endommagement :

La plupart des développements modernes sur l'identification d'endommagement par des essais vibratoires provient des études effectuées sur plate-formes pétrolières par l'industrie pétrolière dans les années 70 et au début des années 80. Le manque de connaissance du lieu d'endommagement et l'inaccessibilité de certaines parties de structures rendait la situation un peu différente par rapport à d'autres ouvrages (Coppolino et Rubin, 1980) [29]. Il a ainsi été constaté que les conditions d'environnement comme le changement du niveau d'eau qui ajoute une masse significative à la structure, le bruit d'équipement et la variation de la masse qui se produit par le changement du niveau de fluide dans le réservoir, pouvaient influencer les résultats.

L'industrie aérospatiale a également commencé à étudier l'utilisation des techniques d'évaluation d'endommagement basées sur des mesures vibratoires dans les mêmes années que l'industrie pétrolière. Dès le début des années 80, la communauté de génie civil a rapidement suivi les études menées sur les techniques d'évaluation d'endommagement et a commencé à les appliquer aux ponts notamment (Salawu et Williams, 1995a, 1995b) [30, 31].

L'idée de base dans toutes les techniques de détection d'endommagement par essais vibratoires réside dans l'idée que les paramètres modaux (fréquences, coefficients d'amortissement, déformées propres) mesurés sont fonctions des propriétés physiques de la structure (rigidité, masse, amortissement). De ce fait, les modifications pouvant intervenir sur les propriétés physiques ou mécaniques doivent être détectables au travers de changements des paramètres modaux.

Les méthodes de Surveillance de l'intégrité de structures SHM (Structural Health Monitoring) sont généralement divisées en deux groupes: les méthodes locales et les méthodes globales. Cette classification est basée sur le rapport de la longueur caractéristique des ondes ou des modes de vibration à la taille de l'endommagement ainsi que des dimensions de la structure.

Les méthodes locales utilisent par exemple des ondes ultrasonores de hautes fréquences. La longueur de ces ondes doit être inférieure à la taille de l'endommagement que l'on désire déceler. Par conséquent, la localisation sur la structure des

endommagements "attendus" doit être réalisée avant. De plus, il est nécessaire que les capteurs soient situés à proximité du site d'endommagements.

Les méthodes globales consistent généralement en l'utilisation des modes basse fréquence. Ces méthodes globales utilisent un réseau de capteurs distribués spatialement couvrant toute la structure. Il n'est pas nécessaire que les capteurs soient situés à proximité du site d'endommagement. Pour des raisons évidentes, les méthodes locales devraient être plus sensibles aux dommages naissants, cependant, au vu de l'importance de l'instrumentation nécessaire (capteurs, électronique de mesures, etc.) elles restent très coûteuses et difficiles à mettre en œuvre. Nous nous focalisons dans la suite sur les méthodes globales.

En général, les effets d'un endommagement dans une structure peuvent être classés comme linéaire ou non linéaire. Une situation d'endommagement sera dite linéaire, si la structure initialement élastique linéaire reste élastique linéaire après l'endommagement. Les changements des propriétés modales sont causés par le changement des géométries et/ou des propriétés matérielles de la structure, mais la réponse de la structure peut être toujours modélisée en utilisant les équations linéaires du mouvement. L'endommagement sera non linéaire, si la structure initialement élastique linéaire se comporte de façon non linéaire après que l'endommagement se soit produit. Un exemple d'endommagement non linéaire est la formation d'une fissure de fatigue qui s'ouvre et se ferme sous l'environnement normal de vibration.

Les méthodes linéaires peuvent être classifiées en méthodes basées sur modèle (MBM) et les méthodes non basées sur modèle (MNBM). Les MBM supposent que la réponse de la structure évaluée sera dans une certaine manière comparé à un modèle numérique. Les méthodes qui ne nécessitent pas de modèle prédéfini sont souvent basées sur le changement des paramètres modaux (déformées propres, fréquences et coefficients d'amortissement) et leurs dérivés ou bien sur le changement de matrices particulières comme celles de flexibilité et de rigidité.

L'un des avantages des méthodes vibratoires qui ne sont pas basées sur des modèles numériques (MNBM) est qu'elles ne nécessitent pas la connaissance a priori du lieu d'endommagement, le nombre de capteurs de mesures pouvant être réduit et ne se situant pas nécessairement à proximité de l'endommagement. Cet avantage provient du fait que la mesure des caractéristiques dynamiques, les déformées propres, les fréquences et les coefficients d'amortissement sont indépendants de la localisation des capteurs de mesure sur l'ouvrage.

(Rytter, 1993) [32] a défini, la surveillance de l'intégrité des structures comme un processus aux quatre étapes suivantes :

Niveau 1 – Détection

Niveau II – Localisation

Niveau III – Estimation

Niveau IV – Pronostic

Le niveau I fournit uniquement l'information concernant la présence d'éventuels endommagements dans la structure. Pour de nombreuses applications pratiques, cela est suffisant.

Le niveau II consiste à déterminer l'emplacement de l'endommagement. L'utilisation d'un modèle de la structure n'est pas obligatoire, mais peut améliorer les résultats.

Le niveau III consiste à apprécier la sévérité de l'endommagement. Cette évaluation passe par l'utilisation d'un modèle permettant de décrire l'effet d'endommagements (par des paramètres tels que la longueur de la fissure, la taille d'un délaminage ou la diminution de la rigidité, etc.) sur le comportement dynamique de la structure.

Le dernier niveau est celui du pronostic et de la prédiction de la durée de vie de la structure. Cela nécessite la combinaison du modèle structurel global avec des modèles de lésions locales pour prédire l'évolution des endommagements, par exemple la croissance de la fissure de fatigue (Inman et al, 2005) [33].

La rentabilité des méthodes de détection-localisation d'endommagement avec des mesures vibratoires dans le domaine de la SHM notamment en terme de cout et de sécurité a largement contribué au développement de son objectif initial, il faut noter qu'en dépit des coûts et du temps de l'expérimental très limités les chercheurs ont pensé au recalage du modèle élément fini à base des données expérimentales pour améliorer sa représentation du modèle expérimental, ainsi ils pouvaient s'abstenir de celui-ci, le recalage d'un modèle EF a nécessité d'abord une méthode qui localise les défauts de modélisations, par la suite ces méthodes ont été détournées vers la surveillance de l'intégrité de structures afin de répondre au besoin de l'industrie d'une nouvelle forme de maintenance dite conditionnelle vu les pertes importantes que les anciennes formes causaient, depuis la recherche n'a cessé d'avancer, beaucoup de travaux ont été faits dans cet axe de recherche, nous allons résumer certaines des caractéristiques importantes qui ont été les plus fréquemment utilisées.

I.2.1. Caractéristiques basées sur le changement de fréquence

(Kessler, 2002) [34] L'idée générale de ces méthodes est que les endommagements changent la rigidité et/ou la masse de la structure. Ce qui se traduit, en général, par une modification des fréquences propres de cette structure. Ainsi, certains endommagements peuvent être détectés en surveillant les fréquences propres d'une structure. Ces fréquences propres peuvent être mesurées en utilisant un nombre de capteurs limité, mais cette mesure reste très sensible aux perturbations. Parmi ces perturbations, citons: la sensibilité

aux changements de température, la masse non négligeable des capteurs, les conditions limites

(Humar et al, 2006) [35] Cette facilité et rapidité de mesure explique que cette méthode soit la plus souvent mise en œuvre, cependant une modification de la fréquence n'implique pas automatiquement l'existence des endommagements. En effet, la présence de bruit de mesures vient compliquer la prise de décision ou masquer certaines modifications. Ainsi, les bruits de mesures peuvent causer des changements de fréquences de grandeurs semblables à celles produites par des endommagements.

(Kato et Shimada, 1986) [36] ont réalisé des mesures de vibration sous vibration ambiante d'un pont en béton précontraint. Ils conclurent qu'Il faut atteindre un niveau de chargement statique appliqué proche du chargement ultime pour obtenir une réduction des fréquences détectable.

(Kirmser, 1944) [37] a illustré l'effet des fissures sur les fréquences pour un modèle de poutre. Les changements des fréquences propres dus aux différentes fissures sont liés à la taille et la position de la fissure introduite dans la poutre.

(Fox, 1992) [38] en utilisant des résultats numériques et expérimentaux sur une poutre, montre que les changements des fréquences propres sont des indicateurs peu sensibles dans le cas d'une poutre fissurée à la scie.

(Gudmundson, 1982) [39] a également mis en évidence que les fréquences modales diminuent plus lentement avec une fissure de fatigue qui s'ouvre et qui se ferme, qu'avec une fissure qui reste ouverte. Il implique que la diminution de la fréquence est affectée par des facteurs comme les charges permanentes ou les contraintes résiduelles. En effet, les charges permanentes permettent de maintenir des fissures ouvertes, ce qui amène une plus grande sensibilité du changement en fréquence.

Récemment, l'utilisation des fréquences propres comme une caractéristique pour la détection de delamination dans des structures en matériaux composites est à l'étude (Zak et al, 1999, Zou et al, 2000) [40] ,[41]. Pour les matériaux composites, la modification des fréquences propres dépend de la taille et de la position de ces endommagements. Pour des délaminages dans une poutre en matériaux composites, les quatre premières fréquences propres sont inchangées. Parmi ces fréquences, la première est la moins sensible à la présence des délaminages tandis que la quatrième est la plus sensible. D'ailleurs, l'effet de délaminage est plus important dans la région cisailée qu'en flexion.

I.2.2. Changement de forme de mode :

Le changement de la rigidité et/ou de la masse provoquée par des endommagements provoque aussi des modifications des formes de mode de la structure. Comme les formes des modes représentent le déplacement relatif des différents points de structure, ces modifications peuvent donc être utilisées pour la détection et la localisation

des endommagements. Afin d'évaluer ces changements, on trouve dans la littérature deux principaux critères, "Modal Assurance Criterion" (MAC) (Allemang et Brown, 1982) [42] et "Coordinate Modal Assurance Criterion" (West, 1984) [43]. Si $\underline{\Phi}^a$ et $\underline{\Phi}^b$ sont deux ensembles des formes des modes mesurées à partir de la structure à des temps différents, ces deux critères sont définis par

$$MAC(j, k) = \frac{|\sum_{i=1}^{n_d} (\Phi_{ij}^a \Phi_{ik}^b)|^2}{(\sum_{i=1}^{n_d} |\Phi_{ij}^a|^2) (\sum_{i=1}^{n_d} |\Phi_{ik}^b|^2)} \quad (1.1)$$

Et

$$COMAC(i) = \frac{(\sum_{j=1}^{n_m} |\Phi_{ij}^a \Phi_{ik}^b|)^2}{(\sum_{j=1}^{n_m} |\Phi_{ij}^a|^2) (\sum_{j=1}^{n_m} |\Phi_{ik}^b|^2)} \quad (1.2)$$

Ces critères expriment la corrélation existante entre deux formes de modes mesurées. Les valeurs diagonales de la matrice MAC indiquent quels sont les modes les plus affectés par les endommagements. La valeur 1 représente une bonne corrélation entre deux modes.

En pratique, il est plus difficile d'identifier des formes de modes que des fréquences propres. Là où quelques capteurs suffisent, il est nécessaire d'utiliser plusieurs capteurs pour assurer un maillage fin de la structure, afin d'identifier les formes de modes.

(Pandey et Biswas, 1994) [44] ont conclu que les changements des formes des modes dus à des endommagements sont en général très faibles et fournissent rarement une indication claire sur les endommagements. Par rapport à la forme des modes, la courbure de forme des modes est plus sensible à un changement du moment d'inertie qui est lié à un changement de la raideur locale de la structure. Quand les endommagements se présentent dans une structure, la rigidité en flexion aux endroits des endommagements est réduite tandis qu'en même temps la courbure de forme de modes augmente.

(Pandey et al, 1991) [54] ont mis en évidence que la différence absolue entre la courbure des formes de mode de la structure saine $\underline{\Phi}_j''$ et de la structure endommagée $\underline{\Phi}_j^{''*}$ peut être un bon indicateur d'endommagement :

$$\underline{MSC} = \sum_{j=1}^{n_m} |\underline{\Phi}_j^{''*} - \underline{\Phi}_j''| \quad (1.3)$$

Plus la réduction de la rigidité en flexion est grande (correspondant à un niveau d'endommagement plus élevé), plus le changement de courbure sera grand. Donc, les valeurs des composantes de MSC sont élevées dans les régions où l'endommagement est présent et négligeables dans toutes les autres régions. La position d'endommagement est donnée par la plus grande valeur.

La courbure peut être calculée par l'intégration numérique de la forme du mode, par exemple en utilisant un schéma aux différences centrées :

$$\Phi_{ij}'' = \frac{\Phi_{(i+1)j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{(i-1)j}}{l_i^2} \quad (1.4)$$

Où, i est le numéro de nœud, j est le numéro de la forme du mode et l_i est la distance entre les nœuds $(i + 1)$ et $(i - 1)$.

Les simulations [35] montrent que les méthodes SHM à base de surveillance des courbures des formes des modes sont très sensibles au bruit de mesures. Ce qui limite leur utilisation dans la pratique. La précision de la détection des endommagements s'améliore, si les contraintes dynamiques sont mesurées directement.

(Ho et Ewins, 2000) [46] ont étudié d'autres variations des caractéristiques basées sur des formes de modes comme la pente de formes des modes et le carré de la courbure des formes des modes. Ils ont conclu que la caractéristique basée sur le carré de la courbure des formes des modes donne de meilleurs résultats.

(Lestari et al, 2006) [47] ont proposé Une nouvelle technique de localisation et d'estimation de la sévérité des endommagements dans les matériaux composites, stratifiés, cette méthode est basée sur des courbures des formes des modes. Un critère mathématique basé sur la perte de rigidité est donné pour estimer la sévérité des endommagements. La simulation numérique et la validation expérimentale montrent que ce critère donne une bonne approximation de la position des endommagements et leurs sévérités.

I.2.3. Indicateur base sur l'énergie de déformation :

Considérons dans un premier temps une poutre de type Euler-Bernoulli, élastique et linéaire, subdivisée en en n_e éléments et n_n nœuds sur sa longueur l . L'énergie de déformation s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (1.5)$$

Où w est le déplacement vertical et EI est la rigidité en flexion. Si la forme de mode Φ_i est considérée, l'expression de l'énergie de déformation modale est donnée par :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (1.6)$$

L'énergie de déformation modale de $i^{ème}$ mode de vibration et de $j^{ème}$ élément entre $x=a$ et b est exprimée par :

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \int_a^b EI_j \left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (1.7)$$

En 1993, (Kim et Stubbs, 1993) [48] ont proposé une démarche de détection et de localisation d'endommagement reposant sur le changement de l'énergie de déformation avant et après endommagement. L'un des avantages annoncés de cette méthode est que seul un petit nombre de modes de vibration peut être utilisé pour obtenir de bons résultats.

Ce changement, exprimé au moyen d'un rapport, permet de définir un indicateur qui, lorsqu'il reste négatif, indique l'absence de dommages ; lorsqu'il est positif, il indique la présence d'endommagement. Cette méthode est développée pour de faibles endommagements car elle repose sur une linéarisation des énergies de déformation après endommagement.

(Stubbs et al, 1995) [49] ont proposé un indicateur d'endommagement basé sur l'énergie de déformation modale pour l'estimation de la taille d'une fissure dans une poutre. Cet indicateur est basé sur le rapport entre l'énergie de déformation modale des éléments avant et après l'endommagement. Les formes des modes mesurées ont d'abord été différenciées pour obtenir des courbures des formes des modes et ensuite interpolées pour obtenir la courbure, afin de calculer l'énergie de déformation modale.

(Law et al, 1998) [50] ont proposé l'utilisation du quotient de l'énergie élémentaire (EEQ), défini comme le rapport entre l'énergie de déformation modale d'un élément et son énergie cinétique. Un résidu basé sur une mesure de la différence normalisée et moyennée entre l'EEQ de la structure saine et endommagée permet ainsi d'indiquer et de localiser les endommagements.

(Farrar et Doebling, 1999) [51] ont réussi à utiliser l'énergie de déformation modale pour localiser les endommagements d'un pont. Ils ont constaté que l'utilisation de cette caractéristique est meilleure que la comparaison directe des courbures des formes des modes pour la localisation des endommagements.

(Cornwell et al, 1999) [52] ont adopté cette caractéristique de structure 1-D pour une plaque 2-D en la divisant en plusieurs bandes et en traitant chaque bande individuellement, l'algorithme qui ont employer est capable de localisé des défauts de rigidité de (10 à 25) % sur la plaque en utilisant un nombre très réduits de mode (1,12), cependant l'utilisation de cette méthode nécessite le tracer d'une limite ou seuil de validation (dans le cas de cette plaque, seuil=2) de la localisation et aucune information n'est fourni sur la sévérité de celui-ci.

(Worden et al, 2000) [53] ont prouvé que les résultats de la localisation dépendent de l'emplacement des capteurs et l'échantillonnage des modes. Le point fort de cette méthode est que la détection et la localisation peuvent être obtenues avec un petit nombre de modes de vibration.

Dans un effort visant à comparer les différentes caractéristiques, (Kim et al, 2003) [54] ont appliqué les méthodes basées sur l'énergie de déformation modale et sur les fréquences propres pour la localisation d'un point d'endommagement et l'estimation de sa taille dans une poutre par simulation. Il a été constaté que l'énergie de déformation modale donne une estimation plus exacte que les fréquences pour la localisation d'endommagement.

(Tiachacht et Bouazzouni, 2007) [55] ont proposé une nouvelle forme d'écriture de l'indicateur d'endommagement proposé par [52], en second lieux ils ont élargie le concept de l'indicateur basé sur l'énergie de déformation vers l'exploitation de l'énergie cinétique des structure avant et après endommagement pour construire une base pour le recalage du model élément finis.

(Alvandi, 2003) [56] s'est intéressée aux paramètres modaux et à d'autres indicateurs (indicateur d'endommagement, méthodes de flexibilité, de courbure de flexibilité, de courbure de déformées propres, coefficients MAC et COMAC) pour détecter et localiser des endommagements sur des modèle en poutre. et conclue qu'il est très difficile d'utiliser les fréquences comme indicateurs d'endommagement pour les ponts pour de faibles endommagements ou variations, de même, les modes propres sont des vecteurs de mesures condensées et sont donc spatialement distribués, ce qui est particulièrement intéressant pour localiser des endommagements. Mais les deux méthodes présente une faible sensibilité aux faibles endommagements et variations, la méthode de l'indicateur d'endommagement est de loin la plus performante et présente le moins de variabilité par mode propre identifié et la meilleure stabilité par rapport à des bruits de mesure par apport aux autre, elle pose cependant le problème de la notion de seuil de détection, car cette méthode ne fournit pas d'indicateur absolu (comme les changements de courbures) pour classer un élément dans la catégorie endommagée.

I.2.4. Indicateur basées sur la matrice de flexibilité

[44] ont montré que des endommagements peuvent être détectés en mesurant la différence entre les matrices de flexibilité de la structure endommagée et saine. La matrice de flexibilité $\underline{\underline{F}}$ est l'inverse de la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}$ et elle est obtenue par :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{K}}^{-1} = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\Omega}}^{-2} \underline{\underline{\Phi}}^t = \sum_{i=1}^{n_d} \frac{1}{\omega_i^2} \underline{\underline{\Phi}}_i \underline{\underline{\Phi}}_i^t \quad (1.8)$$

En pratique, quelques modes en basse fréquence peuvent être mesurés. Dans ce cas, la matrice de flexibilité converge rapidement vers une bonne approximation. En outre, parce que de la relation (1.8) fait intervenir l'inverse du carré des fréquences modales, la matrice de flexibilité est très sensible aux changements des modes d'ordre inférieur. Pour cette raison, ici, l'utilisation d'un modèle analytique n'est pas nécessaire, si les formes de modes saines sont mesurées à partir de la structure de référence.

Toutefois, les formes de modes doivent être normalisées par rapport à la masse. Ce qui signifie que la matrice de masse doit être déterminée.

(Yan & Golinval, 2005) [57] proposent une méthode de détection et de localisation des endommagements basée sur la matrice de flexibilité et de la rigidité. Ils ont utilisé la matrice de flexibilité pour la détection de l'endommagement. Cette matrice est calculée à partir des formes de modes identifiées et la masse normalisée. Pour la matrice de rigidité ils ont utilisé le pseudo-inverse de la matrice de flexibilité pour son calcul. Les valeurs diagonales de la matrice de rigidité, indiquent l'endroit de l'endommagement.

I.2.5. Caractéristiques basées sur le Vecteur Résidu en Force

(Kashif SAEED, 2010) [58] En employant les modes de vibration mesurés, les fréquences propres et le modèle de structure saine, il est possible de calculer le Vecteur Résidu en Force (Residual Force Vector, RFV) qui peut être utilisé pour la détection, la localisation et l'estimation des endommagements. Pour chaque mode i la forme du mode et la fréquence propre doivent satisfaire à l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\left(\underline{\underline{K}}^* - \omega_i^{*2} \underline{\underline{M}}^* \right) \Phi_i^* = \underline{0} \quad (1.9)$$

En supposant que la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}^*$ et la masse $\underline{\underline{M}}^*$ de la structure endommagée peuvent être définies comme suit :

$$\underline{\underline{M}}^* = \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{\Delta M}} \quad (1.10)$$

$$\underline{\underline{K}}^* = \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{\Delta K}} \quad (1.11)$$

Substituons les équations (1.10) et (1.11) dans l'équation (1.9). Nous obtenons après réorganisation la définition de RFV :

$$\underline{RFV}_i = \left(\underline{\underline{K}}^* - \omega_i^{*2} \underline{\underline{M}}^* \right) \Phi_i^* = \underline{0} \quad (1.12)$$

Chaque mode i donne un RFV unique. Chaque ligne de la RFV représente un seul degré de liberté du modèle numérique de la structure. Un endommagement est matérialisé par un changement dans un élément et par conséquent une modification du degré de liberté associé. Cette modification va alors occasionner une augmentation significative de la valeur de ligne en question par rapport aux autres lignes supposées "saines". Cette relation fournit donc une méthode pour localiser l'endommagement.

La formulation de la RFV repose sur le nombre de points de mesure des modes de vibration. Si le nombre de points de mesure est petit par rapport au degré de liberté du système, la réduction des matrices de système ou/et l'extrapolation des formes de mode est nécessaire. La réduction des matrices du système détruit la structure de ces matrices et

par conséquent l'utilisation directe de RFV pour localiser l'endommagement n'est plus possible. L'extrapolation des formes de mode à partir de quelques points de mesure jette un doute sur la capacité à localiser précisément les endommagements.

Conclusion:

Cette étude bibliographique nous a permis de comparer les performances et les faiblesses de différentes méthodes de détection d'endommagement, le critère d'évaluation s'appuie sur le comportement vis-à-vis du bruit de mesure, le nombre de défaut détectable, la probabilité de détection, et les probabilités de fausses alarmes.

En premier lieu, la faible sensibilité des fréquences propres aux faibles endommagements couplée avec une variabilité notable liée au bruit de mesure confirme la non pertinence de cet indicateur.

Par contre, les déformées modales semblent assez peu sensibles aux effets de bruit, l'ensemble des études semble s'accorder sur ce point, pour la détection cette méthode n'est pas assez robuste même dans le cas d'un seul endommagement, cependant la méthode de flexibilité, de courbure de flexibilité sont performantes pour un endommagement, mais au-delà la probabilité de détection est très faible.

L'indicateur d'endommagement semble être performant pour la détection de plusieurs endommagements en présence de niveaux de bruit de mesures importants, et un nombre très réduit de modes suffit pour la mettre en œuvre. Cependant le tracer d'un seuil de validation s'impose. Ce seuil est établi sur la base d'un test statistique. Sachant que beaucoup de fausses alarmes sont données dans les éléments voisins de ceux endommagés, sans dégrader les résultats.

On peut ainsi faire remarquer que la méthode de l'indicateur d'endommagement présente la sensibilité la plus accrue pour localiser des endommagements, non pas par ce qu'elle est parfaite mais par ce qu'elle fournisse beaucoup plus d'assurance que les autres méthodes.

Chapitre II

Introduction a la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis (M.E.F.) est un des outils les plus efficaces et les plus généraux pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, automobile, nucléaire, génie civil, construction navale, mécanique, etc.

Dans le domaine du calcul des structures, la M.E.F. est une technique à caractère pluridisciplinaire qui met en œuvre des connaissances relevant de plusieurs disciplines de base telles que la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée. Les bases théoriques de la M.E.F. reposent d'une part sur les méthodes énergétiques de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation spatiale des fonctions (Ritz, Galerkin).

La M.E.F. est basée sur une décomposition du domaine dans lequel on désire effectuer la simulation en sous-domaines de forme géométrique simple appelés 'éléments finis' pour lesquels on procède à des approximations nodales des champs de déplacements ou de contraintes qui prennent en général la forme de fonctions polynomiales. L'ensemble de ces éléments constitue ce que l'on appelle le maillage du domaine. Ces éléments sont liés par un nombre fini de conditions de continuité, exprimées en certains points communs à plusieurs éléments appelés 'nœuds'.

Ce sont les méthodes classiques du calcul des structures, méthode des déplacements et méthode des forces, qui sont à la base de la M.E.F. (Krishnamoorthy, 1987) [59]. Selon que l'on approxime le champ des contraintes ou le champ des déplacements on crée le modèle contrainte ou le modèle déplacement. Le modèle déplacement semble plus commode à mettre en œuvre car il s'adapte généralement mieux aux problèmes de calcul des structures et sera adopté dans ce qui suit.

Dans la méthode des déplacements, la formulation du problème est faite en fonction des déplacements aux nœuds qui sont les inconnues cinématiques. La structure est préalablement discrétisée en éléments finis. Le calcul est conduit suivant deux niveaux de formulation : élémentaire au niveau de l'élément fini et globale au niveau de la structure complète.

a. La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini :

Pour chaque élément et dans un repère local, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux. Puis, on calcule pour chaque élément ses matrices de rigidité et de masse ainsi que son vecteur des forces. Ces caractéristiques élémentaires sont transformées par la suite dans le repère global de la structure.

b. La formulation globale au niveau de la structure complète :

Elle consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle de l'énergie potentielle en fonction des déplacements inconnus en tous les nœuds de la structure.

Cette étape nécessite l'assemblage des matrices de rigidité et de masse et les vecteurs forces et déplacements de la structure à partir des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité et de masse et vecteurs forces et déplacements de chaque élément).

II.1. Démarche de formulation éléments finis :

L'analyse des structures de type treillis ou portique peut s'effectuer en considérant d'abord le comportement de chaque partie (élément barre ou poutre) indépendamment puis en assemblant ces parties de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

Dans la suite, toutes les grandeurs vectorielles et matricielles relatives à la base locale de l'élément sont surlignées d'une barre.

II.1.1. Discrétisation de la structure en éléments finis :

C'est l'ensemble des opérations à effectuer pour établir le modèle mathématique de calculs représentant au mieux la structure réelle. Pratiquement cette idéalisation consiste du point de vue topologique, à ramener la structure à une géométrie simple ; c'est ainsi qu'on réduit les éléments unidimensionnels à leur axe et on définit les conditions d'appuis et les charges. Au point de vue rhéologique, elle consiste à choisir la loi constitutive du matériau et à déterminer les constantes qui définissent cette loi.

II.1.2. Construction de l'approximation nodale par sous domaines :

Pour chaque élément, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements $u^e(x,y,z)$ à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux $\bar{U}^e$. Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynomiale contenant un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté. Soit :

$$u^e(x,y,z) = N^t \bar{U}^e \quad (2.1)$$

Où N est la matrice d'interpolation reliant les déplacements d'un point intérieur de l'élément aux déplacements nodaux.

II.1.3. Etablissement de la relation entre déformations et déplacements :

Il s'agit ici de trouver la matrice B reliant les déformations ε de l'élément à ses déplacements nodaux $\bar{U}^e$. Cette relation est exprimée par :

$$\{\varepsilon\} = B\bar{U}^e \quad (2.2)$$

II.1.4. Etablissement de la relation entre contraintes et déformations :

Pour un matériau élastique linéaire, les contraintes σ sont des fonctions linéaires des déformations ε . Elles sont exprimées par l'expression :

$$\{\sigma\} = D\{\varepsilon\} \quad (2.3)$$

Où D est la matrice d'élasticité.

II.1.5. Calcul des matrices élémentaires :

Cette étape constitue la partie la plus importante du problème. Les déplacements $\bar{U}^e$ aux nœuds sont déterminés de telle façon que les contraintes engendrées dans l'élément équilibrent le chargement extérieur $\bar{F}^e$, c'est-à-dire que :

$$\bar{K}^e \bar{U}^e = \bar{F}^e \quad (2.4)$$

$\bar{K}^e$ Est la matrice de rigidité de l'élément exprimée dans le repère local. Elle est déduite de l'énergie de déformation de l'élément (ROCKY 1979) [60] et exprimée par :

$$\bar{K}^e = \int_0^V B^T D B dv \quad (2.5)$$

Il faut aussi calculer la matrice de masse $\bar{M}^e$ de chaque élément. Cette matrice est déduite de l'énergie cinétique de l'élément (ROCKY 1979) [60]. Dans le repère local de l'élément, cette matrice est donnée par l'expression :

$$\bar{M}^e = \int_0^V \rho N^T N dv \quad (2.6)$$

Où ρ est la masse volumique du matériau constituant l'élément.

Finalement, on exprime les matrices $\bar{K}^e$, $\bar{M}^e$, $\bar{U}^e$ et $\bar{F}^e$ dans le repère global défini pour toute la structure.

II.1.6. Assemblage des matrices élémentaires :

La phase de l'assemblage consiste à construire les matrices K , M et F de la structure complète à partir des matrices élémentaires K^e , M^e , U^e , F^e , exprimées dans le repère global, des différents éléments en sommant les énergies de déformation et cinétique de chaque élément.

Pour une structure formée de poutres, on ne peut pas sommer les matrices directement. Pour chaque élément, il faut localiser la position des variables nodales dans le vecteur des déplacements de l'ensemble des nœuds de la structure.

II.2. Élément fini barre :

II.2.1. Définition :

Géométriquement une barre correspond à un solide orienté dans la direction x (repère local). Les dimensions dans le plan (y - z) normal à x sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale (figure 2.5). Un élément fini barre (figure 2.6) schématise un composant d'une structure qui travaille uniquement en traction ou compression. C'est généralement un élément à 2 nœuds, qui comporte 3 inconnues ou degrés de liberté (d.d.l.) par nœud représentant les composantes de son déplacement dans l'espace.

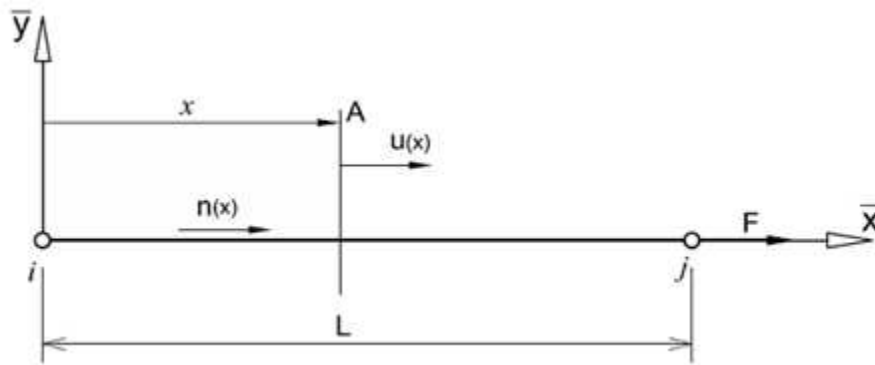


Fig. 2.1. Modélisation d'un élément barre

Les principales hypothèses pour un élément barre rectiligne qui ne travaille qu'en traction ou compression (ROCKY 1979) [60] sont :

- Petits déplacements :

$$\vec{U}_{(M,t)} = U_{(M,t)} \vec{X} \quad (2.7)$$

- Déformations en petits déplacements :

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.8)$$

- Loi de Hooke dans un milieu isotrope homogène élastique :

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.9)$$

Avec σ est la contrainte dans la barre et E est le module de Young du matériau.

En intégrant les contraintes sur la section A nous obtenons la loi de comportement intégrée des barres :

$$n(x) = EA \varepsilon \quad (2.10)$$

Où $n(x)$ est l'effort normal dans la barre dû à la force nodale F .

II.2.2. Formulation de l'élément barre dans le plan :

a. Identification du problème :

Considérons un élément barre dans le plan défini par deux nœuds i et j , de longueur L et de section uniforme A (figure 2.2).

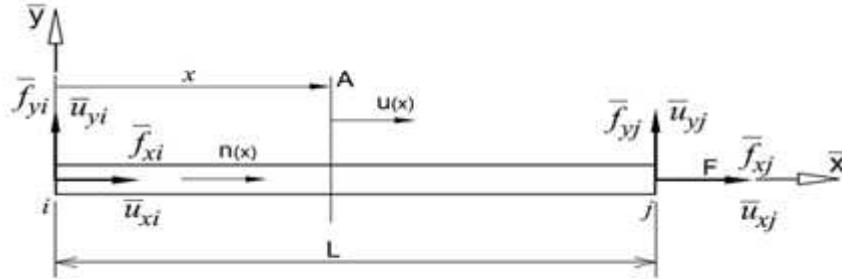


Fig. 2.2. Elément barre dans le repère local $(i, \bar{x}, \bar{y})$

Dans le repère local $(i, \bar{x}, \bar{y})$, on note par $\bar{U}_{xi}$ et $\bar{U}_{xj}$ les déplacements aux nœuds i et j , et par $\bar{f}_{xi}$ et $\bar{f}_{xj}$ les forces aux nœuds i et j .

Le vecteur force relatif à l'élément e est donné par :

$$\bar{F}^e = [\bar{f}_{xi} \bar{f}_{yi} \bar{f}_{xj} \bar{f}_{yj}]^t \quad (2.11)$$

Le vecteur déplacement est donné par:

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi} \bar{u}_{yi} \bar{u}_{xj} \bar{u}_{yj}]^t \quad (2.12)$$

Dans le cas qui nous occupe $\bar{f}_{xj} \bar{f}_{yj} \bar{u}_{xj} \bar{u}_{yj}$ sont nuls puisque l'élément barre ne travaille qu'en traction ou compression.

b. Fonction d'interpolation :

Pour un problème statique, lorsque l'élément est chargé au niveau de ses nœuds, l'effort normal est uniforme. Compte tenu des relations (2.8) et (2.10) la solution $u(x)$ sera linéaire. Pour chercher cette solution, nous allons utiliser une approximation polynomiale linéaire de la forme (Krishnamoorthy, 1987) [59] :

$$U(x) = N_1 \bar{u}_{xj} + N_2 \bar{u}_{xi} \quad (2.13)$$

Où N_1 et N_2 sont les coordonnées naturelles.

Nous identifions aux nœuds i ($x=0$) et j ($x=L$) la valeur de l'approximation des déplacements axiaux. Nous en déduisons :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad (2.14)$$

Sous forme matricielle nous écrivons :

$$U(x) = N^t \bar{U}^e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

La matrice N d'interpolation reliant les déplacements d'un point intérieur de l'élément aux déplacements nœdaux est donc :

$$N^t = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

c. Relation entre déformation et déplacement :

La déformation est déduite des expressions (2.8) et (2.13). Soit :

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{bmatrix} = B \bar{U}^e \quad (2.17)$$

La matrice B reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nœdaux est alors :

$$B = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

c. Matrice de rigidité d'une barre dans le repère local:

La forme de la matrice de rigidité $\bar{K}^e$ de l'élément dans le repère local est donnée par l'expression (2.5). La matrice d'élasticité D se réduit au scalaire E (module de Young du matériau). Soit, après intégration :

$$K^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

e. Matrice de masse d'une barre dans le repère local :

La matrice de masse $\bar{M}^e$ dans le repère local est déterminée à partir de l'expression (2.6). Soit, après intégration :

$$\bar{M}^e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

f. Transformation dans le repère global :

Soit u_{xi}, u_{yi}, u_{xj} et u_{yj} les déplacements aux nœuds i et j exprimés dans le repère global (figure 2.3). La relation entre les déplacements exprimés dans le repère local et ceux exprimés dans le repère global est donnée par :

$$\bar{u}_{xi} = u_{xi} c_x + u_{yi} c_y \quad (2.21)$$

$$\bar{u}_{xj} = u_{xj} c_x + u_{yj} c_y$$

Où c_x et c_y sont les cosinus directeurs définis par :

$$c_x = \frac{1}{L} (x_j - x_i) \quad \text{et} \quad c_y = \frac{1}{L} (y_j - y_i) \quad (2.22)$$

Avec L est la longueur de l'élément calculée à partir des coordonnées des nœuds. Soit :

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (2.23)$$

Sous forme matricielle, on écrit :

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_x & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

La matrice transformation du repère local au repère global est :

$$T = \begin{bmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_x & c_y \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

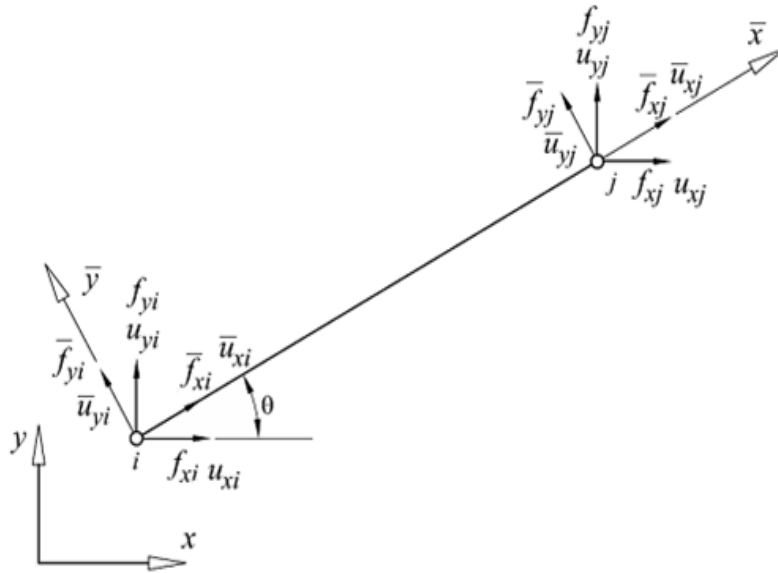


Fig. 2.3. Élément dans le repère global

La matrice de rigidité exprimée dans le repère global sera déduite de la matrice de rigidité exprimée dans le repère local par la relation :

$$K^e = T^t \bar{K}^e T \quad (2.26)$$

De même, la matrice de masse de l'élément barre dans le plan exprimée dans le repère global est :

$$M^e = T^t \bar{M}^e T \quad (2.27)$$

II.2.3. Formulation d'un élément barre tridimensionnelle

La figure (2.4) illustre un élément barre tridimensionnelle. Le vecteur force relatif à l'élément e est donné par :

$$\bar{\mathbf{F}}^e = [\bar{f}_{xi} \quad \bar{f}_{yi} \quad \bar{f}_{zi} \quad \bar{f}_{xj} \quad \bar{f}_{yj} \quad \bar{f}_{zj}]^t \quad (2.28)$$

Avec quatre composantes nulles.

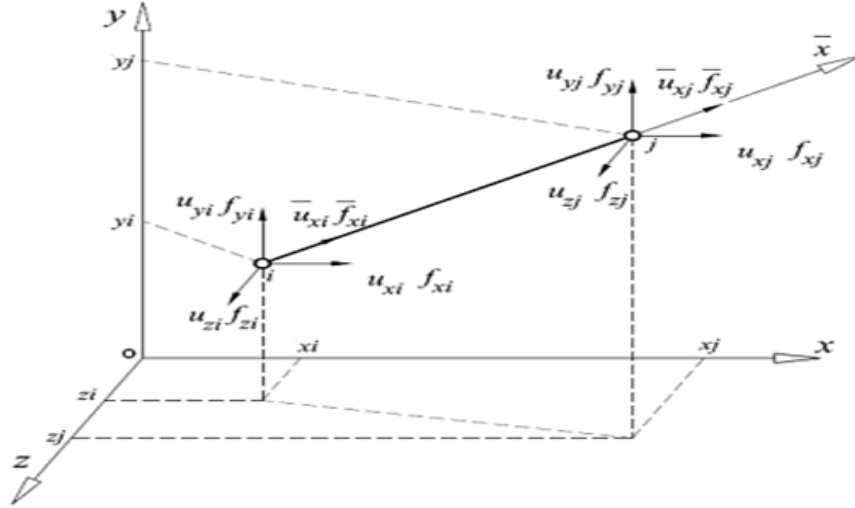


Fig. 2.4. Élément barre spatiale

Le vecteur déplacement est donné par :

$$\bar{\mathbf{U}}^e = [\bar{U}_{xi} \quad \bar{U}_{yi} \quad \bar{U}_{zi} \quad \bar{U}_{xj} \quad \bar{U}_{yj} \quad \bar{U}_{zj}]^t \quad (2.29)$$

Avec quatre composantes nulles.

De la même manière que pour un élément barre dans le plan, les relations entre les grandeurs mesurées dans le repère local et celles mesurées dans le repère global pour un élément barre tridimensionnelle sont données par :

$$\bar{u}_{xi} = c_x u_{xi} + c_y u_{yi} + c_z u_{zi} \quad (2.30)$$

$$\bar{u}_{xj} = c_x u_{xj} + c_y u_{yj} + c_z u_{zj}$$

Avec :

$$c_x = \frac{1}{L} (x_j - x_i) \quad c_y = \frac{1}{L} (y_j - y_i) \quad c_z = \frac{1}{L} (z_j - z_i) \quad (2.31)$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (2.32)$$

La matrice de transformation est donc :

$$T = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

La matrice de rigidité d'une barre tridimensionnelle exprimée dans le repère global est donnée par :

$$K^e = T^t \bar{K}^e T \quad (2.34)$$

$\bar{K}^e$ Est donnée par l'expression (2.19).

De même, la matrice de masse de l'élément barre tridimensionnelle exprimée dans le repère global est :

$$M^e = T^t \bar{M}^e T \quad (2.35)$$

$\bar{M}^e$ est donnée par l'expression (2.20).

II.3. Élément fini poutre :

II.3.1. Définition :

Un élément fini poutre est un élément dont le comportement est tridimensionnel. Ce comportement dans le cadre de la théorie linéaire est obtenu par superposition de trois modèles mathématiques : le modèle de traction, le modèle de torsion et le modèle de flexion (Krishnamoorthy, 1987) [59]. C'est généralement un élément à 2 nœuds, qui comporte 6 inconnues ou d.d.l. par nœud associés aux composantes de son déplacement et de sa rotation dans l'espace. Pour une poutre plane, chaque nœud possède trois degrés de liberté par nœud (deux déplacements et une rotation), alors que pour une poutre tridimensionnelle, le nombre de degrés de liberté par nœud est six : trois rotations et trois translations.

II.3.2. Formulation d'un élément poutre dans le plan

a. Identification du problème :

La figure (2.5) illustre un élément poutre dans le plan (x-y) orienté suivant son axe local $\bar{x}$

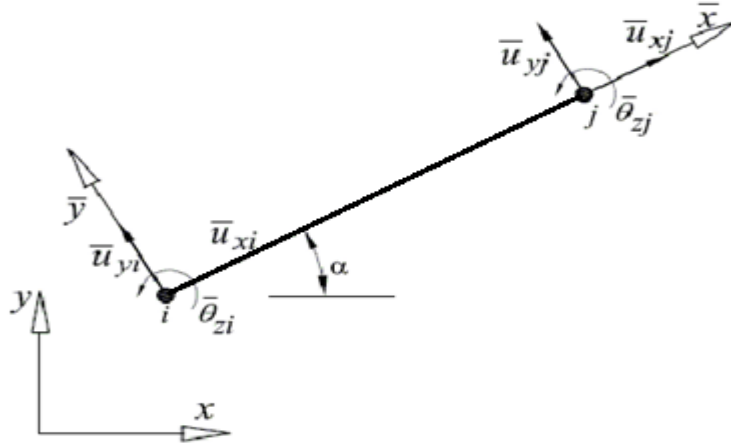


Fig. 2.5. Elément poutre dans le plan avec 6 degrés de liberté

Cet élément possède six degrés de liberté correspondant au vecteur déplacement suivant :

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi} \ \bar{u}_{yi} \ \bar{\theta}_{zi} \ \bar{u}_{xj} \ \bar{u}_{yj} \ \bar{\theta}_{zj}]^t \quad (2.36)$$

Où $\bar{u}_{xi}, \bar{u}_{yi}, \bar{u}_{xj}, \bar{u}_{yj}$ sont les déplacements aux nœuds i et j suivant $\bar{x}$ et $\bar{y}$; $\bar{\theta}_{zi}$ et $\bar{\theta}_{zj}$ sont les rotations aux nœuds i et j autour de l'axe $\bar{z}$.

Les coefficients de la matrice de rigidité de cet élément qui sont dus aux déplacements axiaux sont ceux définis pour un élément barre et n'influence pas le comportement de l'élément sous l'effet de

$\bar{u}_{yi}, \bar{u}_{yj}, \bar{\theta}_{zi}$ et $\bar{\theta}_{zj}$. Dans la suite nous cherchons à déterminer les coefficients de la matrice de rigidité relatifs aux déplacements $\bar{u}_{yi}, \bar{u}_{yj}, \bar{\theta}_{zi}$ et $\bar{\theta}_{zj}$.

b. Fonction d'interpolation

On choisit une fonction d'interpolation qui définit d'une façon approximative l'état de déplacement de tous les points de l'élément. Puisque l'élément possède quatre degrés de liberté ($\bar{u}_{yi}, \bar{u}_{yj}, \bar{\theta}_{zi}$ et $\bar{\theta}_{zj}$), quatre coefficients inconnus doivent apparaître dans le polynôme représentant le modèle du déplacement (Krishnamoorthy, 1987) [59]. Soit :

$$\bar{u}^e = a_1 N_1^3 + a_2 N_2^3 + a_3 N_1^2 N_2 + a_4 N_1 N_2^2 \quad (2.37)$$

Où N_1 et N_2 sont les coordonnées naturelles données par l'expression (2.14) et a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des coefficients à déterminer.

Sous forme matricielle l'expression (2.37) s'écrit :

$$\bar{u}_y = N^t \bar{U}^e \quad (2.38)$$

La rotation θ est liée au déplacement $\bar{u}_y$ par la relation :

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} = \frac{1}{L} [3a_2 N_2^2 + a_3 N_1^2 + 2a_4 N_1 N_2 - 3a_1 N_1^2 - 2a_3 N_1 N_3 - a_4 N_2^2] \quad (2.39)$$

$$N = [N_1^2(3 - 2N_1) \quad N_1^2 N_2 L \quad N_2^2(3 - 2N_2) \quad -N_1 N_2^2 L]^t \quad (2.40)$$

d. Relation entre les déplacements et les déformations

La seule déformation à considérer est la courbure autour de l'axe y . Le vecteur de déformation est donné par :

$$\varepsilon(x, y) = -y \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (2.41)$$

La contrainte σ et le moment m_z dus à la flexion dans le plan $(\bar{x}-\bar{y})$ sont (Kerguignas, 1977)[61] :

$$\sigma = -Ey \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (2.42)$$

$$m_z = -EI_z \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (2.43)$$

Si E est le module de Young du matériau et I_z est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe $\bar{z}$.

Compte tenu des expressions (2.38) et (2.40), on a :

$$m_z = [(6 - 12N_1) \quad L(2N_2 - 4N_1) \quad (6 - 12N_2) \quad L(4N_2 - 2N_1)] \bar{U}^e \quad (2.44)$$

Les contraintes σ et les déformations ε correspondant au moment interne dans la poutre sont reliées par la relation :

$$\sigma = D\{\varepsilon\} = DB\bar{U}^e \quad (2.45)$$

Dans ce cas particulier, la matrice D contient un seul terme correspondant à la rigidité de flexion EI_z . La matrice reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux est donc :

$$B = \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right] \quad (2.46)$$

d. matrice de rigidité d'un élément poutre dans le plan :

La matrice de rigidité de l'élément poutre à 4 d.d.l. dans le repère local est calculée à partir de l'expression (2.5). Soit :

$$\bar{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

En tenant compte du coefficient dû au déplacement suivant l'axe $\bar{x}$, la matrice de rigidité de l'élément poutre dans le plan (à 6 d.d.l.) exprimée dans le repère local de l'élément est :

$$\bar{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

e. Matrice de masse d'un élément poutre dans le plan :

En utilisant les expressions (2.6) et après intégration la matrice de masse pour un élément poutre à 4 d.d.l. exprimée dans le repère local est donnée par :

$$\bar{M}^e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & 13 \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ 13 & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Pour un élément poutre à 6 d.d.l. la matrice de masse est la superposition des deux matrices données par les expressions (2.20) et (2.49). Soit :

$$\bar{M}^e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & 13 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & 13 & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

f. Transformation dans le repère global :

On procède de la même façon que pour un élément barre tridimensionnelle, la matrice de transformation dans le repère global est :

$$T = \begin{bmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_y & c_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_y & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Où c_x et c_y sont les cosinus directeurs définis par l'expression (2.31).

II.3.3. Formulation d'un élément poutre tridimensionnelle :

a. La matrice de rigidité :

Considérons l'élément poutre tridimensionnelle représenté à la figure (2.6). L'axe $\bar{x}$ de la poutre coïncide avec l'axe neutre de cette dernière. Il est positif de i vers j . Les axes $\bar{y}$ et $\bar{z}$ sont choisis de telle sorte que les plans $(\bar{x} - \bar{y})$ et $(\bar{x} - \bar{z})$ soient les plans principaux de la flexion.

Notons par $\bar{u}_{xi}$, $\bar{u}_{yi}$ et $\bar{u}_{zi}$ les déplacements au nœud i et par $\bar{\theta}_{xi}$, $\bar{\theta}_{yi}$ et $\bar{\theta}_{zi}$ les rotations, respectivement, autour de $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$ au même nœud i . $\bar{f}_{xi}$, $\bar{f}_{yi}$, $\bar{f}_{zi}$, $\bar{m}_{xi}$, $\bar{m}_{yi}$ et $\bar{m}_{zi}$ sont les forces et les moments au nœud i .

Le vecteur force est donné par :

$$\bar{F}^e = [\bar{f}_{xi} \ \bar{f}_{yi} \ \bar{f}_{zi} \ \bar{m}_{xi} \ \bar{m}_{yi} \ \bar{m}_{zi} \ \bar{f}_{xj} \ \bar{f}_{yj} \ \bar{f}_{zj} \ \bar{m}_{xj} \ \bar{m}_{yj} \ \bar{m}_{zj}]^t \quad (2.52)$$

Le vecteur déplacement est donné par :

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi} \ \bar{u}_{yi} \ \bar{u}_{zi} \ \bar{\theta}_{xi} \ \bar{\theta}_{yi} \ \bar{\theta}_{zi} \ u_{xj} \ \bar{u}_{yj} \ u_{zj} \ \bar{\theta}_{xj} \ \bar{\theta}_{yj} \ \bar{\theta}_{zj}]^t \quad (2.53)$$

Cet élément est la superposition de quatre éléments dont les matrices de rigidité ont déjà été déterminées : élément barre, élément poutre en torsion, élément poutre fléchie autour de z dans le plan $(\bar{x} - \bar{y})$ et élément poutre fléchie autour de $\bar{y}$ dans le plan $(\bar{x} - \bar{z})$. La matrice de rigidité d'un élément poutre tridimensionnelle est donc :

$$\begin{aligned}
& \bar{K}^e \\
& = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.54}$$

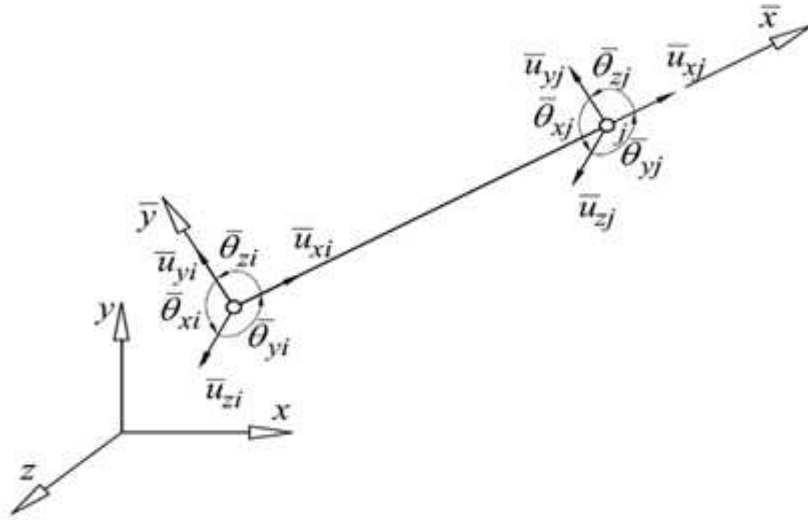


Fig. 2.6. Élément poutre tridimensionnelle

b. La matrice de masse :

La matrice de masse d'un élément poutre tridimensionnelle est obtenue par la superposition des matrices de masse des éléments poutres en traction, torsion et flexion dans les deux plans $(\bar{x} - \bar{y})$ et $(\bar{x} - \bar{z})$ Soit :

$$\begin{aligned}
& \bar{M}^e \\
& = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140I_t/A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70I_t/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70I_t/A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140I_t/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.55}$$

c. Transformation dans le repère global

Dans le cas d'un élément barre tridimensionnelle, la position des deux nœuds d'extrémités suffit pour définir son orientation dans l'espace. Pour un élément poutre, la ligne liant les nœuds i et j définit l'axe local $\bar{x}$ de la poutre. Un troisième nœud k est nécessaire pour définir les deux plans principaux de flexion $(\bar{x} - \bar{y})$ et $(\bar{x} - \bar{z})$ (figure 2.7).

Pour aboutir à la matrice de transformation, le repère global est amené à coïncider avec le repère local par une séquence de rotations d'angles β, γ et α respectivement autour des axes y, z et x (figure 2.8).

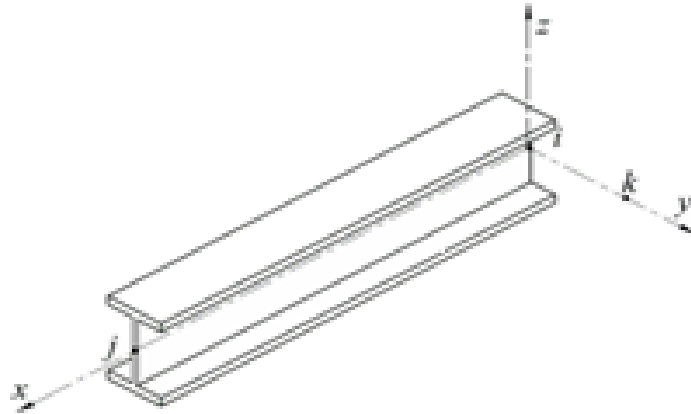


Fig. 2.7. Axes locaux d'un élément poutre

La première rotation autour de l'axe y avec un angle β place l'axe x en position x_β qui est la projection de l'axe $\bar{x}$ sur le plan $(x-z)$. L'axe z est placé en position z_β . La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$T_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}
\tag{2.56}$$

$$\text{Avec} \quad \cos \beta = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \quad \text{et} \quad \sin \beta = \frac{c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \quad (2.57)$$

où c_x , c_y et c_z sont les cosinus directeurs définis par l'expression (2.31).

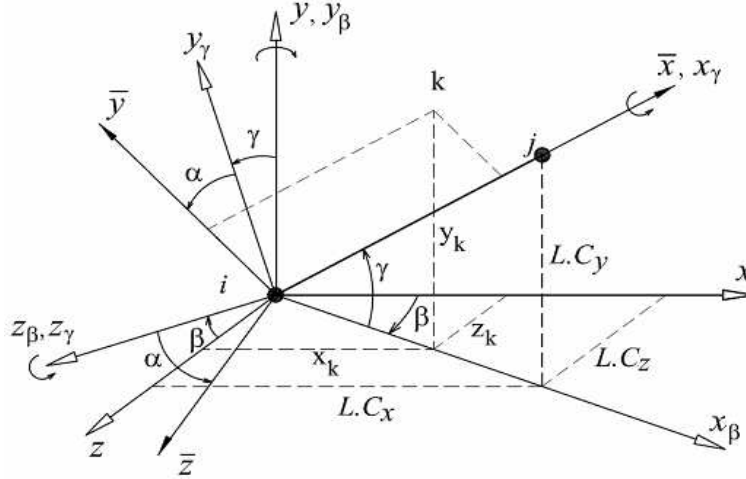


Fig. 2.8. Rotations des axes pour un élément poutre tridimensionnelle.

La deuxième transformation consiste à faire tourner le nouveau système d'axes $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$ autour de z_β d'un angle γ pour faire coïncider l'axe x_β avec l'axe $\bar{x}$. Nous obtenons un nouveau système d'axes $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$. La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$T_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\text{Avec} \quad \cos \gamma = \frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \quad \text{et} \quad \sin \gamma = c_z \quad (2.59)$$

Finalement, le système d'axes $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$ tourne d'un angle α autour de l'axe x_γ pour amener les axes y_γ et z_γ à se confondre avec les axes $\bar{y}$ et $\bar{z}$. La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Le nœud k est choisi sur l'axe principal $\bar{y}$ de la section (fig. 2.9). Les coordonnées de ce nœud par rapport à i exprimées dans le repère global sont :

$$x_{xi} = x_k - x_i$$

$$y_{xi} = y_k - y_i \quad (2.61)$$

$$z_{xi} = z_k - z_i$$

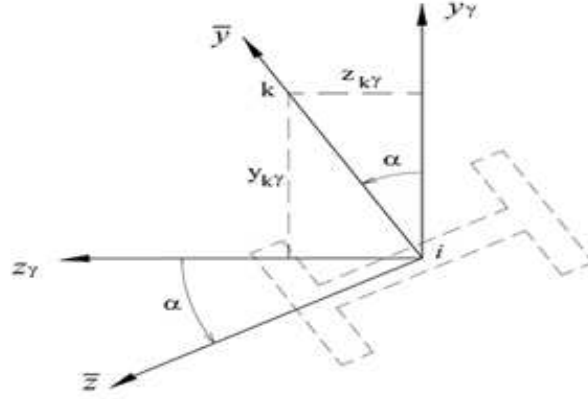


Fig. 2.9. Axes principaux d'un élément poutre

Les coordonnées du nœud k exprimées dans repère $(i, x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$ sont :

$$\begin{bmatrix} x_{k\gamma} \\ y_{k\gamma} \\ z_{k\gamma} \end{bmatrix} = T_\gamma T_\beta \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Après simplification nous obtenons :

$$x_{k\gamma} = c_x x_{ki} + c_y y_{ki} + c_z z_{ki}$$

$$y_{k\gamma} = -\frac{c_y c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} x_{ki} + \sqrt{c_x^2 + c_z^2} y_{ki} - \frac{c_y c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} z_{ki} \quad (2.63)$$

$$z_{k\gamma} = -\frac{c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} x_{ki} + \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} z_{ki}$$

Nous en déduisons l'angle α qui peut être calculé par ses lieux trigonométriques comme suit :

$$\sin \alpha = \frac{z_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{y_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \quad (2.64)$$

Finalement la transformation correspondant à l'ensemble des rotations d'angles β , γ et α est :

$$T = T_\alpha T_\beta T_\gamma \quad (2.65)$$

II.4. Charges appliquées sur les éléments

Dans le cas d'une charge répartie q sur un élément, celle-ci est rapportée aux nœuds d'extrémités (figure 2.10). Le vecteur de charge nodale correspondant est (Krishnamoorthy, 1987) [59]:

$$\bar{F}_r^e = \iint N^T q ds \quad (2.66)$$

Pour une charge uniformément répartie sur un élément poutre dans le plan (figure 2.10-a) le vecteur de charges nodales équivalent est :

$$\bar{F}_r^e = q \int_0^L N^T dl \quad (2.67)$$

Soit, donc, après intégration :

$$\bar{F}_r^e = \left[0 \quad \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad 0 \quad \frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12} \right]^t \quad (2.68)$$

Dans le cas d'une charge répartie qui varie linéairement le long de l'élément (figure 2.10-b) le vecteur de charges nodales équivalent est :

$$\bar{F}_r^e = \left[0 \quad \frac{(7q_1 + 3q_2)L}{20} \quad \frac{(3q_1 + 2q_2)L^2}{60} \quad 0 \quad \frac{(3q_1 + 7q_2)L}{20} \quad -\frac{(2q_1 + 3q_2)L^2}{60} \right]^t \quad (2.69)$$

Dans le cas d'une charge ponctuelle P appliquée sur l'élément (figure 2.10-c) le vecteur de charges nodales $\bar{F}_r^e$ prend la forme :

$$\bar{F}_r^e = \left[0 \quad \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b) \quad \frac{Pab^2}{L^2} \quad 0 \quad \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b) \quad -\frac{Pa^2b}{L^2} \right]^t \quad (2.70)$$

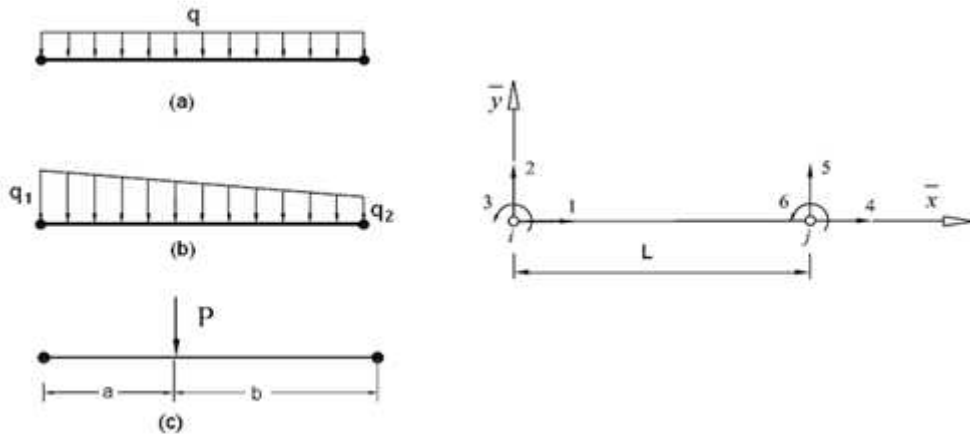


Fig. 2.10. Charges sur un élément

Pour une barre de treillis, la notion de charge répartie transversale n'est pas cohérente avec la théorie, la modélisation de type barre ne prenant pas en compte la raideur flexionnelle. Le poids propre d'une barre doit être modélisé par deux forces, concentrées aux nœuds d'extrémités, statiquement équivalentes au poids total de la barre (figure 2.11).



Fig. 2.11. Cas du poids propre d'une barre d'un treillis

II.5. Assemblage des matrices élémentaires

La phase de l'assemblage consiste à construire les matrices K , M et F de la structure complète à partir des matrices K^e , M^e et F^e des différents éléments tout en respectant la compatibilité des déplacements et l'équilibre des forces aux nœuds. Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle Π totale de la structure est obtenue par sommation des énergies potentielles Π^e des éléments (Imbert 1979)[62]. Si on a une structure formée de n_e éléments, cette énergie s'écrit, sous forme matricielle :

$$\Pi = \sum_1^{n_e} \Pi^e = \sum_1^{n_e} \left(\frac{1}{2} U^{et} K^e U^e + \frac{1}{2} U^{et} M^e \ddot{U}^e - U^{et} F^e \right) \quad (2.71)$$

Le premier terme de cette expression exprime l'énergie de déformation, le second correspond au travail des forces extérieures et le troisième traduit l'effet de l'inertie. La compatibilité des déplacements nodaux de la structure est obtenue en écrivant pour chaque élément une relation matricielle du type :

$$U^e = C^e \cdot U \quad (2.72)$$

C^e est la matrice de localisation ou de connectivité géométrique d'ordre $n \times m$ (n : nombre de d.d.l. de l'élément, m : nombre de d.d.l. de la structure). C'est une matrice booléenne dont les éléments sont des 0 ou des 1. Chaque terme dont le d.d.l. coïncide avec celui du système prend la valeur 1. Cette relation permet de localiser pour chaque élément ces d.d.l. dans l'ensemble des d.d.l. de la structure. En utilisant cette relation dans l'expression (2.71), on aura :

$$\Pi = \sum_1^{n_e} \left(\frac{1}{2} U^t C^{et} K^e C^e U + \frac{1}{2} U^t C^{et} M^e C^e \ddot{U} - U^t C^e F^e \right) \quad (2.73)$$

$$\text{Soit} \quad \Pi = \left(\frac{1}{2} U^t K U + \frac{1}{2} U^t K \ddot{U} - U^t F \right) \quad (2.74)$$

$$\text{Avec} \quad K = \sum_1^{n_e} C^{et} K^e C^e \quad (2.75)$$

$$M = \sum_1^{n_e} C^{et} M^e C^e \quad (2.76)$$

$$F = \sum_1^{n_e} C^e F^e \quad (2.77)$$

Les matrices M et K sont symétriques, définies positives et ne dépendent que du matériau et de la forme de la structure.

II.6. Etude des systèmes à n degrés de liberté

Dans cette partie nous présenterons les méthodes de résolution, dans le cas de plusieurs systèmes à n degrés de liberté, le système d'équations différentielles de mouvement peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[K]\{x\} + [C]\{\dot{x}\} + [M]\{\ddot{x}\} = f(t) \quad (2.78)$$

les matrices [M], [C] et [K] sont obtenues à partir de l'équation des forces (Newton) ou de l'écriture des énergies.

Dans le cas d'un système libre non amorti, l'équation (2.78) devient :

$$[K]\{x\} + [M]\{\ddot{x}\} = \{0\} \quad (2.79)$$

Les solutions recherchées pour l'équation (2.79) sont régies par une loi temporelle et, pour autant que la matrice de rigidité soit non singulière, sont de type harmonique

$$x(t) = \Phi a \cos(\omega t + p) \quad (2.80)$$

a, ω et p sont des nombres réels dénotant respectivement l'amplitude de référence, la pulsation et la phase de la fonction. Cette relation traduit physiquement que chaque d.d.l. de la structure suit un mouvement en phase avec tous les autres déplacements généralisés. Compte tenu de cette expression, l'équation (2.79) associée au régime libre devient :

$$([K] - \omega^2[M])\{\Phi\} = \{0\} \quad (2.81)$$

Ce système homogène de n équations linéaires admet n solutions non triviales Φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) telles que soit vérifiées les équations :

$$([K] - \omega_i^2[M])\Phi_i = \{0\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.82)$$

Alors que

$$x_i = \Phi_i a_i \cos(\omega_i t + p_i) \quad (2.83)$$

est le mode propre élastique de rang i à amplitude de référence a_i et de déphasage p_i .

En termes de mécanique des structures le vecteur Φ_i est le vecteur modal et ω_i

est la pulsation propre associée, mesurée en rd/s. Les grandeurs ω_i^2 sont les racines de

l'équation algébrique suivante :

$$\det([K] - \omega_i^2[M]) = 0 \quad (2.84)$$

Remarques :

-La contribution d'un mode au mouvement du système est représentée par des mouvements d'amplitudes $\Phi_{ik}a_k$. Pour un mode k , ces amplitudes vérifient les équations du mouvement quelle que soit la valeur a_k (en effet, ce facteur disparaît des équations). A ce stade du calcul, on ne détermine donc que des rapports d'amplitudes Φ_{ik}/Φ_{jk} . Autrement dit, une déformée modale n'a pas d'échelle. Elle est décrite par un vecteur Φ_k dont la norme est indéterminée. Pour donner des valeurs aux composantes Φ_{ik} , on sera amené à choisir une norme arbitraire.

On posera par exemple : $\forall k, \Phi_{1k} = 1$ (la première composante du vecteur est prise égale à un).

- Les participations de chacun des modes au mouvement libre du système seront déterminées par les conditions initiales de ce mouvement. Ces conditions fixeront les valeurs des amplitudes des contributions modales $\Phi_k a_k \cos(\omega_k t + p_k)$ ainsi celles de leurs phases respectives p_k .

Pour un mode k , le facteur d'échelle a_k sera déterminé en fonction de la norme du vecteur Φ_k de façon à adapter l'amplitude arbitraire de ce mode à celle qui vérifie les conditions initiales.

- L'expression (2.85) exprime la solution générale des n équations du mouvement d'un système à n degrés de liberté comme une combinaison linéaire de n solutions particulières représentées par n modes propres.

$$\forall i, x_i = \sum_{k=1}^n \Phi_{ik} a_k \cos(\omega_k t + p_k) \quad (2.85)$$

II.7. Notion d'amortissement mécanique

Le mouvement des structures soumises à des forces ou des mouvements imposés, variables au cours du temps, dépend, en particulier des propriétés d'amortissement, c'est-à-dire de la dissipation d'énergie dans les matériaux constitutifs de la structure et dans les liaisons des différents éléments de structure entre eux et avec le milieu environnant.

Les phénomènes physiques intervenant dans cette dissipation d'énergie sont nombreux frottements, interaction fluide-structure dans une lame fluide, chocs, viscosité et plasticité, rayonnement vibratoire aux appuis.

Les modèles de comportement représentant ces phénomènes sont souvent mal connus et il n'est pas possible de les décrire explicitement au niveau élémentaire. C'est pourquoi les modèles les plus utilisés sont les modèles simples qui permettent de reproduire à l'échelle macroscopique les principaux effets sur les structures (Françoise et al 1985,) [63],[64].

- l'amortissement visqueux : énergie dissipée proportionnelle à la vitesse du mouvement,
- l'amortissement hystérétique (dit aussi "amortissement structural") : énergie dissipée proportionnelle au déplacement telle que la force d'amortissement est de signe opposée à celui de la vitesse

II.7.1. Modèles d'amortissement visqueux

II.7.1.1 Définition physique de l'amortissement visqueux

Les dispositifs amortisseurs classiques (laminage d'un fluide visqueux à travers les orifices d'un piston entraîné par le mouvement vibratoire) délivrent des forces proportionnelles à la vitesse du mouvement et de signe opposé. Au cours d'un cycle, le travail de ces forces est positif : c'est l'amortissement visqueux.

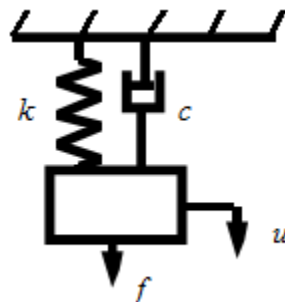


Fig. 2.12. Système dissipatif forcé a 1 ddl.

Pour un oscillateur simple de rigidité k , de masse m et d'amortissement visqueux c , la force extérieure appliquée équilibre les trois composantes : force de rappel

élastique ku , force d'amortissement $c\dot{u}$ et force d'inertie $m\ddot{u}$ d'où l'équation dynamique en mouvement absolu :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \quad (2.86)$$

Pour ce modèle d'amortissement visqueux l'énergie dissipée au cours d'un cycle de pulsation ω est proportionnelle à la vitesse vibratoire $-\omega u_0 \sin(\omega t)$ associée au déplacement $-u_0 \cos(\omega t)$ s'écrit :

$$E_{d \text{ par cycle}} = \int_0^{2\pi} -c\omega u_0 \sin \omega t d(u_0 \cos \omega t) = \pi c\omega u_0^2 \quad (2.87)$$

et l'énergie potentielle pour un déplacement sinusoïdal $u_0 \cos(\omega t)$ est :

$$E_{p \text{ max}} = \int_{\pi/2}^0 ku_0 \cos \omega t d(u_0 \cos \omega t) = \frac{1}{2} ku_0^2 \quad (2.88)$$

Pour un cycle de pulsation ω et de déplacement sinusoïdal $u_0 \cos(\omega t)$, le coefficient de perte est proportionnel à la fréquence du mouvement :

$$\eta = \frac{c\omega}{k} \quad (2.89)$$

η (coefficient de perte) est un coefficient adimensionnel caractéristique de l'effet amortisseur défini comme le rapport de l'énergie dissipée au cours d'un cycle à l'énergie potentielle maximum multipliée par 2π .

II.7.1.2 Oscillateur harmonique avec amortissement visqueux

L'analyse classique du modèle non amorti associé à l'équation (2.86), mise sous la forme

$$(k - m\omega^2)u = 0 \text{ nous donne } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ la pulsation propre.}$$

L'amortissement critique à partir duquel l'équation différentielle (2.86) n'a plus de solution oscillante est donné par les formules $c_{critique} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0 = \frac{2k}{\omega_0}$ ce qui permet de donner une interprétation numérique de l'amortissement réduit qui est souvent exprimé en pourcentage de l'amortissement critique :

$$\xi = \frac{\eta}{2} = \frac{c}{c_{critique}} = \frac{c}{2m\omega_0} \quad (2.90)$$

II.7.1.3. Amortissement visqueux proportionnel "global"

En l'absence d'informations suffisantes sur les composants et liaisons créant une dissipation d'énergie, une modélisation courante consiste à construire une matrice d'amortissement "global".

On se place dans le cadre des équations classiques de la dynamique des structures linéaires :

$$KU + C\dot{U} + M\ddot{U} = F(t) \quad (2.91)$$

La notion d'amortissement de RAYLEIGH permet de définir la matrice d'amortissement C comme combinaison linéaire des matrices de rigidité et de masse :

$$C = \alpha K + \beta M \quad (2.92)$$

Avantage :

- facile à mettre en œuvre, après avoir assemblé les matrices de rigidité et de masse à coefficients réels.
- utile pour la validation d'algorithmes de résolution ;
- historiquement, son succès est attaché aux méthodes d'analyse transitoire par recombinaison modale à partir d'une base de modes propres réels.
- Les propriétés d'orthogonalité des modes propres réels solution du problème aux valeurs Propres $(K - \omega^2 M)\varphi = 0$ se traduisent par la diagonalisation simultanée dans le passage en coordonnées modales généralisées de $\varphi^t K \varphi$ et $\varphi^t M \varphi$.

L'amortissement de RAYLEIGH est une condition suffisante pour diagonaliser $\varphi^t C \varphi$.

Inconvénients :

- Cette modélisation ne permet pas de représenter l'hétérogénéité de la structure par rapport à l'amortissement.
- L'amortissement effectivement introduit dans le modèle dépend fortement de l'identification des coefficients α et β .

II.7.1.4. Influence des coefficients d'amortissement proportionnel (Boyer, 2011) [65]

Trois cas d'identification simples sont présentés ici pour illustrer, les effets induits par cette modélisation :

- amortissement proportionnel aux caractéristiques d'inertie : $\alpha = 0, \beta = \beta_i$

Ce cas a été très utilisé en résolution transitoire directe : si la matrice de masse est diagonale, celle d'amortissement l'est encore et le gain en place mémoire est évident.

Le coefficient β peut être identifié à l'amortissement réduit expérimental ξ_i du mode propre (φ_i, ω_i) qui participe le plus à la réponse (2.90) d'où $\beta_i = 2\xi_i\omega_i$. Pour toute autre pulsation on obtient un amortissement modal réduit

$$\xi = \beta_i \frac{\omega_i}{\omega} \quad (2.93)$$

Les modes élevés $\omega \gg \omega_i$ seront très peu amortis et les modes basse fréquence $\omega < \omega_i$ trop amortis.

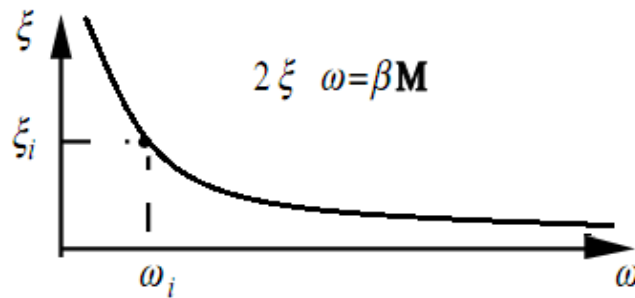


Fig. 2.13. évolution de l'amortissement modal réduit en fonction de la fréquence d'excitation, Cas d'un amortissement proportionnel aux caractéristiques d'inertie

- amortissement proportionnel aux caractéristiques de rigidité : $\alpha = \alpha_j, \beta = 0$

le coefficient α peut être identifié, comme précédemment à partir de ξ_j associé du mode (φ_j, ω_j) d'où $\alpha_j = 2\xi_j\omega_j$. Pour toute autre pulsation on obtient un amortissement modal réduit

$$\xi = \alpha_j \frac{\omega}{\omega_j} \quad (2.94)$$

Les modes élevés $\omega \gg \omega_j$ sont très amortis.

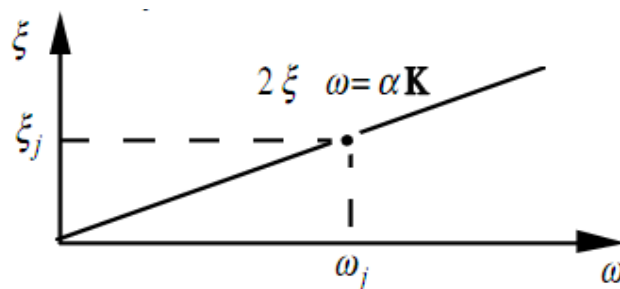


Fig.2.14. évolution de l'amortissement modal réduit en fonction de la fréquence d'excitation. Cas d'un amortissement proportionnel aux caractéristiques de rigidité

- amortissement proportionnel complet : $\alpha = \alpha_j, \beta = \beta_i$

A partir d'une identification sur deux modes indépendants (φ_i, ω_i) et (φ_j, ω_j) , nous obtiendrons pour toute autre pulsation un amortissement modal réduit

$$x = \alpha_j \frac{w}{w_j} + \beta_i \frac{w_i}{w} \quad (2.95)$$

Dans l'intervalle $[w_i, w_j]$, la variation de l'amortissement réduit est faible et en dehors on retrouve la combinaison des inconvénients précédents : les modes extérieurs à l'intervalle sont trop amortis.

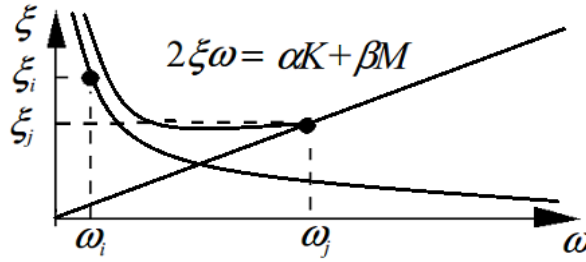


Fig. 2.15. Évolution de l'amortissement modal réduit en fonction de la fréquence d'excitation, Cas d'un amortissement proportionnel complet.

Dans aucun des cas précédents, on ne pourra reproduire une hypothèse d'amortissement modal égal pour tous les modes. Des méthodes ont été imaginées pour tendre vers cet objectif (Françoise et al 1985) [63].

II.7.2. Amortissement hystérétique "global"

[66] l'amortissement hystérétique n'est défini que dans le cas d'une loi du mouvement sinusoïdale : il correspond à un modèle d'amortissement visqueux dans lequel le rapport de proportionnalité entre forces et vitesses varie en proportion inverse de la pulsation ω du mouvement.

Le modèle d'amortissement hystérétique vise à traduire la dissipation d'énergie qui accompagne les déformations élastiques d'un matériau. Cette dissipation d'énergie est mise en évidence, et quantifiée, au moyen d'un essai de traction/compression.

Pour l'essentiel : lorsqu'on impose à une éprouvette une variation de longueur $x(t) = \alpha \cos \omega t$, on observe que la force $F(t)$ exercée sur l'éprouvette et la variation de longueur $x(t)$ sont des lois sinusoïdales déphasées.

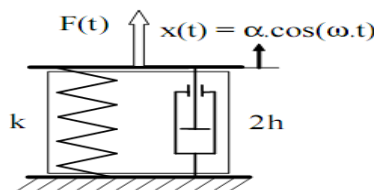


Fig. 2.16. Système dissipatif à 1ddl soumis à une force harmonique.

L'existence d'un déphasage conduit à exprimer une composante de la force F en fonction de la vitesse x' . Mais, d'après les mesures réalisées, l'amplitude de cette composante n'est pas en proportion de celle de la vitesse, elle est en proportion de celle du déplacement.

Les résultats de ces mesures sont finalement résumés en écrivant que les grandeurs $x(t)$ et $F(t)$ sont liées par une équation de la forme : $kx + cx' = F$ dans laquelle $c = \frac{h}{\omega}$

Dans cette équation k est une raideur qui est proportionnelle au module d'Young E du matériau et h est une constante d'amortissement structural. Lorsqu'on reporte dans l'équation : $x = \alpha e^{j\omega t}$ et $x' = j\omega \alpha e^{j\omega t} = j\omega x$

On obtient la relation $K(1 + j\eta)x = F$, avec $\eta = h / k$ un facteur d'amortissement (ou facteur de perte), sans dimension. Cette expression équivaut à remplacer le module d'Young E par un module complexe $E(1 + j\eta)$.

Remarque :

L'amortissement hystérétique ne correspond qu'à une des multiples formes que peut prendre l'amortissement dans les matériaux (la plus simple à modéliser parmi toutes celles observées). L'expérience montre que ce modèle d'amortissement est apte à traduire la dissipation d'énergie dans le cas de matériaux métalliques comme l'acier et l'aluminium. Pour ces matériaux, on admet donc que le module d'Young E et le facteur de perte η sont indépendants de la fréquence d'excitation et qu'ils dépendent peu de la température. Par contre, on ne peut formuler les mêmes hypothèses dans le cas de matériaux viscoélastiques, comme les polymères, car leurs capacités d'amortissement interne dépendent fortement de la fréquence et de la température.

II.7.3. Amortissement localisé

Pour les analyses nécessitant une modélisation représentant l'hétérogénéité de la structure, il est possible d'affecter des caractéristiques d'amortissement localisées sur les éléments de la structure.

II.8. Fonction de la réponse fréquentielle :

(Hwang, 2003) [67] Quand nous voulons employer ou commander un vrai système, nous devons savoir comment il se comporte lors de l'application de différents signaux à ce dernier. Ceci donnera une mesure de la réponse dynamique du système.

Une façon de trouver la réponse d'un système, on applique un signal d'essai à l'entrée et on mesure le signal de sortie du même système.

En mesurant l'amplitude du signal et la phase du système de sortie sur une gamme de fréquences sinusoïdales d'entrée ondulée, une variation particulière de la réponse dynamique est constatée, ceci s'appelle la réponse fréquentielle

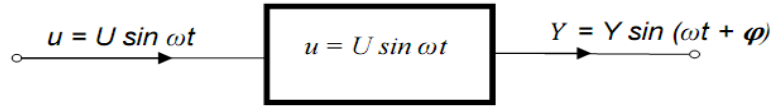


Fig. 2.17. Fonction linéaire de transfert avec une entrée sinusoïdale.

Dans le cas d'une structure mécanique a N degrés de liberté avec un amortissement visqueux, Les équations du mouvement peuvent être exprimé dans l'expression (2.78)

$$[K]\{x\} + [C]\{\dot{x}\} + [M]\{\ddot{x}\} = f(t)$$

Où, $[M]$ et $[C]$ représentent $[K]$ la matrice de masse, d'amortissement et de rigidité si nous considérons l'entrée harmonique, la force extérieure et le déplacement peuvent être exprimés comme

$$\{f(t)\} = \{F(\omega)\}e^{j\omega t} \text{ et } \{x(t)\} = \{X(\omega)\}e^{j\omega t}$$

En remplaçant dans l'équation (2.78)

$$(-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K])\{X(\omega)\} e^{j\omega t} = \{F(\omega)\}e^{j\omega t} \quad (2.96)$$

L'équation (2.97) définit la matrice de la fonction de la réponse fréquentielle $[Y(\omega)]$

$$[Y(\omega)] = (-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K])^{-1} \quad (2.97)$$

L'équation (2.96) peut être exprimée comme

$$\{X(\omega)\} = [Y(\omega)]\{F(\omega)\} \quad (2.98)$$

Dans l'équation (2.97), si on néglige la matrice d'amortissement, la fonction de réponse fréquentielle peut être exprimée comme suit :

$$[Y(\omega)] = (-\omega^2[M] + [K])^{-1} \quad (2.99)$$

Chapitre III

III. Identification paramétrique des structures mécaniques à partir des paramètres modaux observés :

Dans ce chapitre nous allons construire des indicateurs d'endommagements pour identifié des défauts de rigidité, masse et d'amortissement a partir des vecteurs et valeurs propres mesurés sur la structure réel, ces indicateurs seront marqués par le chiffre romain I, nous allons adopter l'écriture suivante pour chaque paramètre :

- indicateur Beta_I pour les défauts de rigidité
- indicateur Alpha_I pour les défauts de masse
- indicateur Gamma_I pour les défauts d'amortissement

III.1. Formulation de la théorie de l'indicateur d'endommagement

a. Indicateur de défaut de rigidité (beta_I):

Considérons dans un premier temps une poutre de type Euler-Bernoulli, élastique et linéaire, divisée par n_e éléments et n nœuds sur sa longueur.

L'énergie de déformation s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.1)$$

Où v est le déplacement vertical, EI la rigidité en flexion, l la longueur, A section droite et ρ la masse volumique du matériau de la poutre.

Si le mode propre $\Phi_i(x)$ est considéré, les expressions des énergies de déformation de la poutre et de l'élément j s'écrivent respectivement pour ce mode :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.2)$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \int_{a_j}^{a_{j+1}} EI_j(x) \left(\frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.3)$$

Où $EI(x)$ et $EI_j(x)$ sont respectivement les rigidités en flexion de la poutre et de l'élément a_j , et a_{j+1} , étant les nœuds définissant l'élément j .

En considérant l'énergie de déformation de chaque élément et l'énergie de déformation totale de la poutre, pour un mode propre donné, la fraction d'énergie de déformation FU_{ij} s'écrit :

$$FU_{ij} = \frac{U_{ij}}{U_i} \quad (3.4)$$

Des expressions identiques peuvent s'écrire pour le cas endommagé :

$$U_i^* = \frac{1}{2} \int_0^l EI^*(x) \left(\frac{\partial^2 \Phi_i^*(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.5)$$

$$U_{ij}^* = \frac{1}{2} \int_{a_j}^{a_{j+1}} EI_j^*(x) \left(\frac{\partial^2 \Phi_i^*(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.6)$$

$$FU_{ij}^* = U_{ij}^* / U_i^* \quad (3.7)$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^{n_e} FU_{ij}^* = \sum_{i=1}^{n_e} FU_{ij} = 1$$

Où $()^*$ désigne une quantité relative à la structure endommagée

On choisissant des éléments relativement petits, la rigidité à la flexion EI_j du j^{eme} élément est approximativement constante et FU_{ij}^* devient

$$FU_{ij}^* = EI_j^* \int_{a_j}^{a_{j+1}} \left(\frac{\partial^2 \Phi_i^*(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx / U_i^* \quad (3.8)$$

En supposant l'endommagement d'un seule élément, la fraction d'énergie reste relativement constante que celle de l'élément sain est $FU_{ij}^* = FU_{ij}$.

Pour un seul endommagement localisé au niveau de l'élément $j = k$ on a :

$$EI_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} \right)^2 dx / U_i = EI_k^* \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(\frac{\partial^2 \Phi_i^*}{\partial x^2} \right)^2 dx / U_i^* \quad (3.9)$$

De plus si la longueur des deux éléments poutre endommagement et sain sont égales l'expression précédente nous donne.

$$\frac{EI_k}{EI_k^*} = \frac{\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} \right)^2 dx / \int_0^l \left(\frac{\partial^2 \Phi_i^*}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} \right)^2 dx / \int_0^l \left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} \right)^2 dx} \equiv \frac{fu_{ik}^*}{fu_{ik}} \quad (3.10)$$

Afin de considérer tous les modes mesures n_p dans les calculs, l'indicateur d'endommagement pour l'élément k s'écrit

$$ZU_{I_k} = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} f u_{ik}^*}{\sum_{i=1}^{n_p} f u_{ik}} \quad (3.11)$$

Avec $k \in \{1, 2, \dots, n_e\}$

L'avantage que procure ces trois dernière formulation (3.10), (3.11) c'est que l'on n'a pas besoin de normalise les modes, et considéré la collection des indices d'endommagements ZU_{I_k} comme étant une population d'une variable aléatoire normalement distribué, l'indicateur d'endommagement normalisé s'écrit :

$$beta_{I_j} = \frac{ZU_{I_j} - \overline{ZU_I}}{\sigma_{ZU_I}} \quad (3.12)$$

Ou $\overline{ZU_I}$ et σ_{ZU_I} sont respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de ZU_I

Calcule des indicateurs d'endommagement en utilisant des méthodes matricielles :

Les indicateurs d'endommagements calculés précédemment peuvent être exprimés en utilisant des méthodes matricielles ainsi.

L'énergie de déformation de l'élément j pour le mode i s'écrit :

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \{\Phi_{ij}\}^t [k_j] \{\Phi_{ij}\} \quad (3.13)$$

L'énergie de déformation totale pour le mode i s'écrit

$$U_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} \{\Phi_{ij}\}^t [k_j] \{\Phi_{ij}\} \quad (3.14)$$

Avec

$\{\Phi\}$: Vecteur propre de la structure saine.

$[k_j]$: Matrices élémentaires de raideur du j^{eme} élément sain.

Pour un mode propre donné, la fraction d'énergie de déformation FU_{ij} s'écrit :

$$FU_{ij} = \frac{U_{ij}}{U_i} = \frac{\{\Phi_{ij}\}^t [k_j] \{\Phi_{ij}\}}{\sum_{j=1}^{n_e} \{\Phi_{ij}\}^t [k_j] \{\Phi_{ij}\}} \quad (3.15)$$

Dans le cas endommagé

$$U_{ij}^* = \frac{1}{2} \{\Phi_{ij}^*\}^t [k_j^*] \{\Phi_{ij}^*\} \quad (3.16)$$

$$U_i^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} \{\Phi_{ij}^*\}^t [k_j^*] \{\Phi_{ij}^*\} \quad (3.17)$$

$$FU_i^* = \frac{U_{ij}^*}{U_i^*} = \frac{\{\Phi_{ij}^*\}^t [k_j^*] \{\Phi_{ij}^*\}}{\sum_{j=1}^{n_e} \{\Phi_{ij}^*\}^t [k_j^*] \{\Phi_{ij}^*\}} \quad (3.18)$$

Avec

$\{\Phi^*\}$: Vecteur propre de la structure endommagée.

$[k_j^*]$: Matrice élémentaire de raideur du j^{eme} élément endommagé.

Ainsi l'écriture de l'indicateur d'endommagement $beta_I$ devient :

$$beta_I_j = \frac{ZU_I_j - \overline{ZU_I}}{\sigma_{ZU_I}} \quad (3.19)$$

Avec:

$$ZU_I_j \cong \frac{\sum_{i=1}^{np} \{\{\Phi_{ij}^*\}^t [k_j^*] \{\Phi_{ij}^*\} / \sum_{j=1}^{n_e} \{\Phi_{ij}^*\}^t [k_j^*] \{\Phi_{ij}^*\}\}}{\sum_{i=1}^{np} \{\{\Phi_{ij}^*\}^t [k_j] \{\Phi_{ij}^*\} / \sum_{j=1}^{n_e} \{\Phi_{ij}^*\}^t [k_j] \{\Phi_{ij}^*\}\}} = \frac{\sum_{i=1}^{np} FU_{ij}^*}{\sum_{i=1}^{np} FU_{ij}} \quad (3.20)$$

Où $\overline{ZU_I}$ et σ_{ZU_I} sont respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de ZU_I

Remarque :

Dans l'expression (3.20) nous allons utiliser les matrices $[k_j^*] = [k_j]$ puisque les matrices élémentaires de raideur ne sont pas disponibles.

b. Indicateur de défaut de masse (alpha_I):

Le calcul de l'indicateur de défaut de masse suit la même procédure que le calcul de l'indicateur de défaut de rigidité, nous allons construire un indicateur $alpha_I$ en exploitant la variation de l'énergie cinétique avant et après endommagement

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A(x) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.21)$$

Pour le mode propre $\Phi_i(x)$, les expressions de l'énergie cinétique de la poutre et de l'élément j

$$T_i = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A(x) \left(\frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.22)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \rho A(x)_j \left(\frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.23)$$

La fraction d'énergie est donné par

$$FT_{ij} = \frac{T_{ij}}{T_i} \quad (3.24)$$

On effectue les mêmes démarches pour la fraction des énergies cinétique pour le cas endommagé, ainsi :

$$T_i^* = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A^*(x) \left(\frac{\partial \Phi_i^*(x)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.25)$$

$$T_{ij}^* = \frac{1}{2} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \rho A(x)_j^* \left(\frac{\partial \Phi_i^*(x)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.26)$$

Rappelons que (*) désigne la structure endommager ainsi :

$$FT_{ij}^* = \frac{T_{ij}^*}{T_i^*} \quad (3.27)$$

Pour considérer tous les modes mesures n_p dans les calculs, l'indicateur d'endommagement non normalisé pour l'élément j s'écrit

$$ZT_I_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} FT_{ij}^*}{\sum_{i=1}^{n_p} FT_{ij}} \quad (3.28)$$

L'indicateur $alpha_I$ est normalisé par rapport à l'écart type s'écrit

$$alpha_I_j = \frac{ZT_I_j - \overline{ZT_I}}{\sigma_{ZT_I}} \quad (3.29)$$

Où $\overline{ZT_I}$ et σ_{ZT_I} sont respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de ZT_I .

Calcul des indicateurs d'endommagement en utilisant des méthodes matricielles :

Nous pouvons calculer les indicateurs de défauts de masse en utilisant des méthodes matricielles de la même manière que celle employer avec l'indicateur de défauts de rigidité. L'énergie cinétique de l'élément j pour le i^{eme} mode respectivement pour le cas sain est endommagé sont :

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \{ \Phi_{ij} \}^t [m_j] \{ \Phi_{ij} \} = -(\lambda_i)^2 \{ \Phi_{ij} \}^t [m_j] \{ \Phi_{ij} \} \quad (3.30)$$

$$T_{ij}^* = \frac{1}{2} \{\dot{\Phi}_{ij}^*\}^t [m_j^*] \{\dot{\Phi}_{ij}^*\} = -(\lambda_i^*)^2 \{\Phi_{ij}^*\}^t [m_j^*] \{\Phi_{ij}^*\} \quad (3.31)$$

L'énergie cinétique totale pour le i^{eme} mode respectivement pour les cas sain et endommagé s'écrivent :

$$T_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} \{\Phi_{ij}\}^t (-(\lambda_i)^2 [m_j]) \{\Phi_{ij}\} \quad (3.32)$$

$$T_i^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} \{\Phi_{ij}^*\}^t (-(\lambda_i^*)^2 [m_j^*]) \{\Phi_{ij}^*\} \quad (3.33)$$

Avec :

$[m_j]$ $[m_j^*]$ Respectivement les matrices élémentaires de masse des éléments sains et endommagés.

λ_i, λ_i^* sont respectivement les valeurs propre associées a la structure saine et endommagée

Les fractions d'énergie cinétique de chaque élément est donnée par les expressions (3.24) et (3.27)

L'écriture de l'indicateur d'endommagement non normalisés ZT_I est la même que celle de l'expression (3.28)

La formulation de l'indicateur d'endommagement normalisé $alpha_I$ est la suivante :

Normalisé par apport a l'ecart type

$$alpha_I_j = \frac{ZT_I_j - \overline{ZT_I}}{\sigma_{ZT_I}} \quad (3.34)$$

$$\text{Avec : } ZT_I_j = \frac{\sum_{i=1}^{np} \{ \{\Phi_{ij}^*\}^t (-(\lambda_i^*)^2 [m_j^*]) \{\Phi_{ij}^*\} / \sum_{j=1}^{n_e} \{ \{\Phi_{ij}^*\}^t (-(\lambda_i^*)^2 [m_j^*]) \{\Phi_{ij}^*\} \} }{\sum_{i=1}^{np} \{ \{\Phi_{ij}\}^t (-(\lambda_i)^2 [m_j]) \{\Phi_{ij}\} / \sum_{j=1}^{n_e} \{ \{\Phi_{ij}\}^t (-(\lambda_i)^2 [m_j]) \{\Phi_{ij}\} \} } \quad (3.35)$$

Ou $\overline{ZT_I}$ et σ_{ZT_I} sont respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de ZT_I .

Remarque : dans l'expression (3.35) nous allons travail avec $[m_j^*] = [m_j]$ puisque dans la réalité on ne dispose pas des matrices élémentaires de masse.

c. indicateur de défaut d'amortissement ($gamma_I$):

Nous pouvons calculer l'indicateur de défaut d'amortissement en utilisant des méthodes matricielles de la même manière que celle employer avec l'indicateur de défauts de rigidité et de masse, l'idée est de calculé les énergie de dissipation élémentaires de chaque élément dans les deux structures endommagées et saines, puis fractionné les énergies élémentaires par apport aux énergie totales des deux structures, on va répété cette

procédure pour tout les modes considérés, a la fin une valeur moyenne des fraction est calculer pour chaque élément .

L'énergie dissipative de l'élément j pour le i^{eme} mode respectivement pour le cas sain est endommagé est :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \{\dot{\Phi}_{ij}\}^t [C_j] \{\dot{\Phi}_{ij}\} = (\lambda_i) \{\Phi_{ij}\}^t [C_j] \{\Phi_{ij}\} \quad (3.36)$$

$$D_{ij}^* = \frac{1}{2} \{\dot{\Phi}_{ij}^*\}^t [C_j^*] \{\dot{\Phi}_{ij}^*\} = (\lambda_i^*) \{\Phi_{ij}^*\}^t [C_j^*] \{\Phi_{ij}^*\} \quad (3.37)$$

L'énergie dissipative totale pour le i^{eme} mode respectivement pour les cas sains et endommagés s'écrivent :

$$D_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} \{\Phi_{ij}\}^t ((\lambda_i)[C_j]) \{\Phi_{ij}\} \quad (3.38)$$

$$D_i^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} \{\Phi_{ij}^*\}^t ((\lambda_i^*)[C_j^*]) \{\Phi_{ij}^*\} \quad (3.39)$$

Avec :

$[C_j], [C_j^*]$ Respectivement les matrices élémentaires d'amortissement des éléments sains et endommagés.

λ_i, λ_i^* sont respectivement les valeurs propre associées a la structure saine et endommagée,

Les fractions d'énergie dissipative de chaque élément est donnée par les expressions

$$FD_{ij} = \frac{D_{ij}}{D_i} \quad (3.40)$$

Rappelons que (*) désigne la structure endommager

$$D'où : \quad FD_{ij}^* = \frac{D_{ij}^*}{D_i^*} \quad (3.41)$$

L'indicateur d'endommagement non normalisés ZD_I pour chaque élément j est :

$$ZD_I_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} \{ \{\Phi_{ij}^*\}^t ((\lambda_i^*)[C_j^*]) \{\Phi_{ij}^*\} / \sum_{j=1}^{n_e} \{ \{\Phi_{ij}^*\}^t ((\lambda_i^*)[C_j^*]) \{\Phi_{ij}^*\} \} }{\sum_{i=1}^{n_p} \{ \{\Phi_{ij}\}^t ((\lambda_i)[C_j]) \{\Phi_{ij}\} / \sum_{j=1}^{n_e} \{ \{\Phi_{ij}\}^t ((\lambda_i)[C_j]) \{\Phi_{ij}\} \} } \quad (4.42)$$

Remarque : dans l'expression (3.42) nous allons travail avec $[C_j^*] = [C]$ puisque dans la réalité on ne dispose pas des matrice élémentaire d'amortissement.

Une autre écriture de l'indicateur d'endommagement non normalisé.

$$ZD_I_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} FD_{ij}^*}{\sum_{i=1}^{n_p} FD_{ij}} \quad (3.43)$$

La formulation de l'indicateur d'endommagement normalisé γ_{I_j} est la suivante : (normalisé par rapport à l'écart type).

$$\gamma_{I_j} = \frac{ZD_I_j - \overline{ZD_I}}{\sigma_{ZD_I}} \quad (3.44)$$

Où $\overline{ZD_I}$ et σ_{ZD_I} sont respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de ZD_I .

III.2. Reconstitution des d.d.l non observées et introduction du bruit

Dans les expressions de calculs des indicateurs d'endommagements, les vecteurs et valeur propres sont supposé totalement observé, mais en pratique, cette hypothèse n'est pas réaliste. En effet, comme les temps d'expérimentation sont réduits, le nombre de d.d.l observés est généralement beaucoup plus petit que celui du modèle éléments finis et contiennent toujours des erreurs de mesures et d'application d'identification modale, et lorsque nous effectuons une reconstitution, les erreurs contenues dans le modèle éléments finis sont inconnues.

III.2.1. Reconstitution des d.d.l non observés :

S.J. HUANG [68] a exposé dans sa thèse trois méthodes de reconstitution des sous vecteurs propres non observés qui sont :

a- la première est une méthode de projection sur la sous-base modale du modèle éléments finis. Les sous vecteurs propres non observés sont reconstitués par une combinaison linéaire des vecteurs propres du modèle éléments finis.

b- La deuxième est une méthode de reconstitution séparative. Les d.d.l de déplacements (selon les directions x, y et z) sont reconstitués séparément par la méthode de projection sur la sous-base modale du modèle éléments finis. Les d.d.l de rotations sont ensuite reconstitués en utilisant tous les d.d.l de déplacement par la méthode de reconstitution dynamique.

c- La troisième méthode consiste en une minimisation globale des erreurs résiduelles. Le développement théorique montre que cette méthode conduit aux mêmes résultats de reconstitution que la première méthode.

Dans notre travail, pour la reconstitution des d.d.l non observés, nous allons utiliser la méthode de projection sur la sous-base modale du modèle éléments finis, vue quelle est d'emploi simple et relativement efficace.

Cette méthode est basée sur l'hypothèse selon laquelle les vecteurs propres de la structures peuvent être représentés par une combinaison linéaire des vecteurs propres du modèle éléments finis

$$y_v^{(m)} \approx Y^{(a)} c_v ; v = 1 \text{ à } n \quad (3.44)$$

Où : $y_v^{(m)} \in R^{N,1}$

$$Y^{(a)} \in R^{N,np}$$

Le vecteur de projection $c_v \in R^{np,1}$ est évalué, au sens des moindres carrés, à partir des seuls d.d.l observés :

$$c_v = [Y_c^{(a)}]^+ y_{cv}^{(m)} = \left[[Y_c^{(a)}]^t [Y_c^{(a)}] \right]^{-1} Y_c^{(a)} y_{cv}^{(m)} \quad (3.45)$$

où : $y_{cv}^{(m)} \in R^{c,1} : v^{\text{ème}}$ sous vecteur propre de la structure correspondant aux d.d.l observés.

$Y_c^{(a)} \in R^{c,np}$: Sous matrice modale du modèle du modèle éléments finis correspondant aux d.d.l observés.

Nous utilisons la sous matrice modale $Y^{(a)} \in R^{N,np}$ du modèle éléments finis pour reconstituer les d.d.l de la réponse fréquentielle expérimentale non observés.

Pour la reconstitution des sous vecteurs propres non observés, nous allons utilisés les quantités suivantes :

Pour le modèle éléments finis :

$$\left[K^{(a)} - \lambda_v^{(a)} M^{(a)} \right] y_v^{(a)} = 0 ; \quad v = 1 \text{ à } n \quad (3.46)$$

Les matrices $K^{(a)}; M^{(a)} \in R^{N,N}$ symétriques, respectivement positive définie et non négative sont connues.

Nous connaissons également n valeurs et vecteurs propres regroupés respectivement dans les matrices spectrale et modale :

$$\Lambda^{(a)} = \text{diag} \{ \lambda_v^{(a)} \} \in R^{N,n} \quad (3.47)$$

$$Y^{(a)} = [\dots, y_v^{(a)}, \dots] \in R^{N,n} \quad (3.48)$$

Telles que :

$$(Y^{(a)})^t K^{(a)} Y^{(a)} = \Lambda^{(a)} \quad (3.49)$$

$$(Y^{(a)})^t M^{(a)} Y^{(a)} = I_n \quad (3.50)$$

Pour la structure :

$$\left[K^{(m)} - \lambda_v^{(m)} M^{(m)} \right] y_v^{(m)} = 0 \quad ; \quad v = 1 \text{ à } m \quad (3.51)$$

Dans (4.51), les matrices $K^{(m)}$ et $M^{(m)}$ sont inconnues. Le vecteur propre $y_v^{(m)}$ est observé partiellement. La partie observée correspond aux d.d.l capteurs.

$$y_v^{(m)} = \begin{bmatrix} y_{cv}^{(m)} \\ y_{iv}^{(m)} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{partie observée; } y_{cv}^{(m)} \in R^{c,1} \\ \rightarrow \text{partie non observée; } y_{iv}^{(m)} \in R^{N-c,1} \end{array} \quad (3.52)$$

Les valeurs propres $\lambda_v^{(m)}$, $v = 1 \text{ à } m$ sont connues.

Les m valeurs $\lambda_v^{(m)}$ et vecteurs propres complets $y_v^{(m)}$ sont regroupés dans les matrices spectrale et modale :

$$\Lambda^{(m)} = \text{diag} \{ \lambda_v^{(m)} \} \in R^{m,m} \quad (3.53)$$

$$Y^{(m)} = [\dots, y_v^{(m)}, \dots] \in R^{N,m} \quad (3.54)$$

Satisfont :

$$(Y^{(m)})^t K^{(m)} Y^{(m)} = \Lambda^{(m)} \quad (3.55)$$

$$(Y^{(m)})^t M^{(m)} Y^{(m)} = I_m \quad (3.56)$$

A partir de ces deux types de quantités connues, nous cherchons à reconstituer les sous vecteurs propres non observés $y_{iv}^{(m)}$, $v = 1 \text{ à } m$

Après le calcul du vecteur de projection $c_v \in R^{np,1}$, nous pouvons écrire la partie non observée $y_{iv}^{(m)}$ comme suit :

$$y_{iv}^{(m)} = Y_i^{(a)} \left[\left[Y_c^{(a)} \right]^t \left[Y_c^{(a)} \right] \right]^{-1} \left[Y_c^{(a)} \right]^t y_{cv}^{(m)} \quad (3.57)$$

Avec : $Y_i^{(a)} \in R^{N-c,np}$: sous matrice modale du modèle éléments finis correspondant aux d.d.l non observés.

Donc nous pouvons écrire à la fin, les vecteurs propres après reconstitutions sous la forme suivante :

$$y_v^{(m)} = \begin{bmatrix} y_{cv}^{(m)} \\ y_{iv}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{cv}^{(m)} \\ Y_i^{(a)} \left[\left[Y_c^{(a)} \right]^t \left[Y_c^{(a)} \right] \right]^{-1} \left[Y_c^{(a)} \right]^t y_{cv}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

La précision de cette évaluation dépend du choix des positions et des directions des d.d.l observés. *G. Lallement et al* [69], proposent une méthode d'optimisation du maillage capteur vis-à-vis de la reconstitution.

Le principe de cette méthode consiste à sélectionner un par un les d.d.l capteurs de manière à construire pas à pas une matrice $Y_c^{(a)}$ de rang maximal et de nombre de conditionnement minimal.

III.2.2. Sélection des d.d.l observés :

a. Sélection des d.d.l potentiels :

Considérant les contraintes techniques et les applications de recalage paramétrique, on élimine :

- les d.d.l inaccessibles (d.d.l intérieurs ; d.d.l de rotation ...),
- les d.d.l à faibles déplacements pour np modes choisies,
- les d.d.l associés aux régions spatialement non significatives.

Les d.d.l restants après élimination sont les d.d.l candidats utilisés dans les sélections suivantes.

b. Choix du premier d.d.l capteur :

En l'absence de d.d.l imposés, le premier d.d.l i est sélectionné parmi tous les d.d.l potentiels par la condition :

$$\|z_i^{(a)}\| = \text{Max}_j \|z_j^{(a)}\|; \quad j = 1 (1) L \quad (3.59)$$

où : $z_j^{(a)} \in R^{1,np}$, ligne de $Y^{(a)}$ correspondant au $j^{\text{ème}}$ d.d.l potentiel.

L : nombre de d.d.l potentiels.

c. Choix du deuxième d.d.l capteur :

Nous formons les matrices telles que $z_{2j}^{(a)}$:

$$z_{2j}^{(a)} = \begin{bmatrix} z_i^{(a)} \\ z_j^{(a)} \end{bmatrix} \in R^{2,np} ; \quad j = 1 (1) L \quad \text{et} \quad j \neq i \quad (3.60)$$

puis nous évaluons le nombre de conditionnement et le rang de toutes les matrices $z_{2j}^{(a)}$. Le deuxième d.d.l j sélectionné est celui maximisant le rang de la matrice $z_{2j}^{(a)}$ et minimisant son nombre de conditionnement.

d. Choix du $p^{\text{ème}}$ d.d.l capteur :

Conservant tous les d.d.l sélectionnées, nous construisons les matrices $z_{pk}^{(a)}$:

$$z_{2j}^{(a)} = \begin{bmatrix} z_i^{(a)} \\ z_j^{(a)} \\ \vdots \\ z_k^{(a)} \end{bmatrix} \in R^{p,np} \quad ; \quad k \neq i \text{ et } k \neq j \quad (3.61)$$

Le $p^{\text{ème}}$ d.d.l sélectionné est celui tel que la matrice $z_{pk}^{(a)}$ soit de rang maximal et de nombre de conditionnement minimal.

e. Choix du nombre de d.d.l optimum c_o :

Au cours de la sélection précédente, nous évaluons à chaque étape le rang et le nombre de conditionnement en fonction du nombre de d.d.l sélectionnés. Les évolutions de ces deux quantités sont illustrées ci-dessous. Le nombre de d.d.l optimum c_o est celui pour lequel le nombre de conditionnement passe par un minimum local. Cette détermination de c_o permet simultanément d'obtenir une matrice $Y_c^{(a)}$ de rang le plus élevé et le nombre de conditionnement le plus faible.

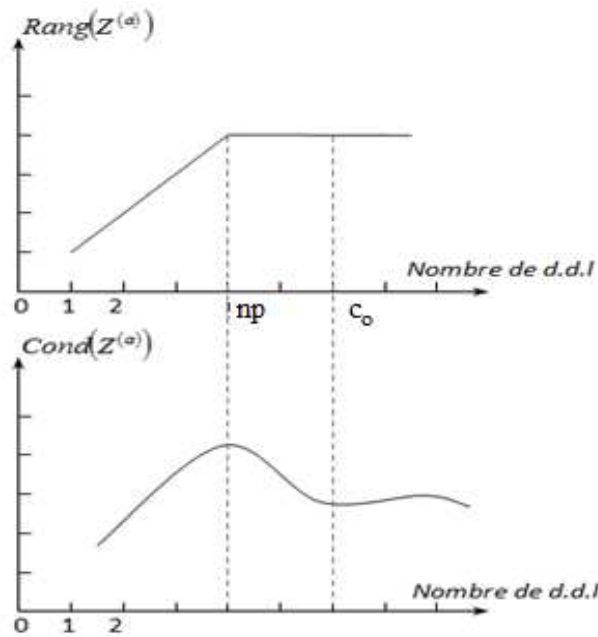


Fig.3.1.Evolution de rang et du conditionnement

III.2.3. Introductions du bruit (erreurs aléatoires) :

Pour des raisons de non fiabilité du matériel, d'appareillage et d'observation, nous sommes obligé de prendre en considération l'effet du bruit. Ces erreurs seront introduites de la façon suivante :

$$y_{vb} = y_v + gn \times \max(abs(y_v)) \times y_{vbt} \quad (3.62)$$

Avec :

y_{vb} : Vecteur déplacement bruité au $v^{ème}$ capteur.

y_v : Vecteur déplacement simulé au $v^{ème}$ capteur.

gn : Pourcentage de bruit aléatoire introduit.

$abs(y_v)$: Valeur absolue de vecteur y_v .

y_{vbt} : Vecteur contenant des valeurs aléatoires entre 0 et 1 uniformément distribuées et données par :

$$y_{vbt} = 2.rand(nn, 1) \quad (3.63)$$

Où :

nn : Dimension du vecteur y_v .

$rand(nn, 1)$: Vecteur de distribution uniforme de nombres aléatoire entre 0 et 1.

III.3. mise en œuvre et validation des méthodes :

III.3.1. présentation des structures :

Afin de pouvoir évaluer la fiabilité des méthodes proposées on a choisis deux cas tests d'applications, une structure poutre repliée (Fig.3.2) et une structure portique (Fig.3.3).

Description du Cas test 1

La structure poutre repliée (Fig.3.2), est discrétisée en 22 éléments finis et comporte 23 nœuds à 3 ddl chacun, soit 69 ddl total

Les caractéristiques mécaniques, géométrique et le maillage du cas test n°1 est présentées ci-dessous :

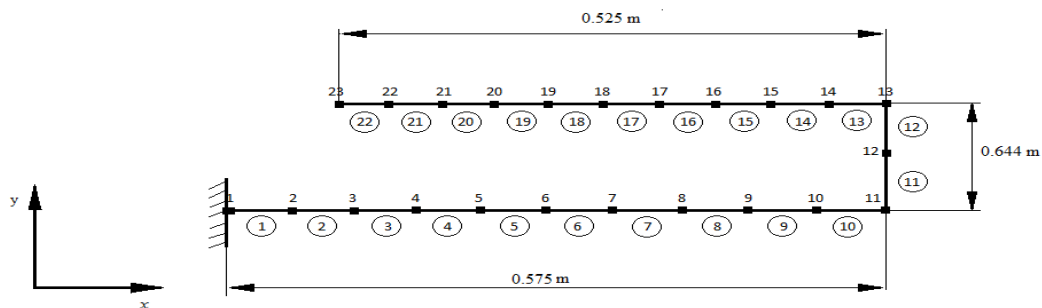


Fig.3.2. Cas test N°1

Module d'élasticité : $E = 2.907 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$;

Masse volumique : $\rho = 10796 \text{ Kg/m}^3$

Section : $3.9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$;

Moment d'inertie quadratique : $1.977 \cdot 10^{-09} \text{ m}^4$

Description du Cas test 2

La structure et un portique (Fig.3.3) est discrétisée en 22 éléments finis est comporte 22 nœuds a 3 d.d.l. chacun, soit 66 d.d.l. total.

Les caractéristiques mécaniques, géométrique et le maillage du cas test n°2 est présentées ci-dessous :

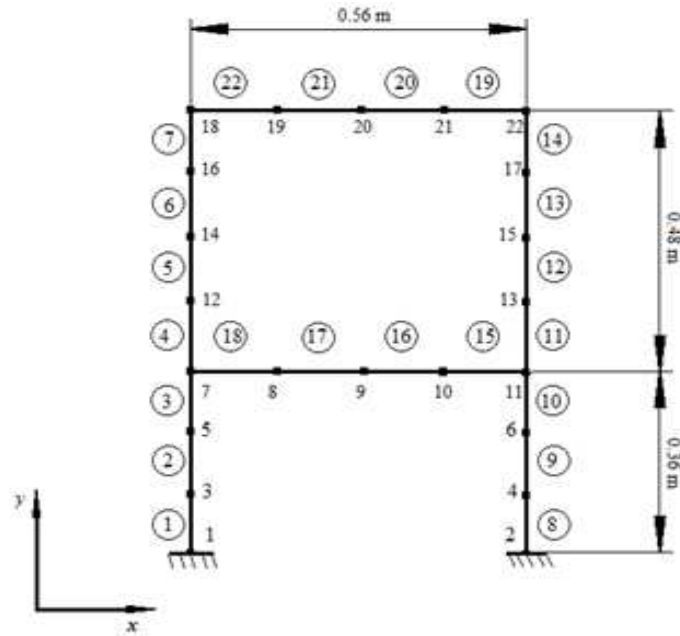


Fig.3.3. Cas test N°2

Module d'élasticité : $E=0.21 \cdot 10^{12} \text{ N/m}^2$;

Masse volumique : $\rho=7800 \text{ Kg/m}^3$

Section: $S=0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$;

Moment d'inertie quadratique $I=0.417 \cdot 10^{-08} \text{ m}^4$

III.3.3. Simulation numérique et validation de la méthode :

Nous allons traiter les cas avec reconstitution des d.d.l. non observés et introduction d'un bruit de mesure aléatoire sur les vecteurs propres de 10%.

Pour simuler le comportement de la structure réel on perturbera le module de Young E , la masse volumique ρ et les coefficients α , β pour l'amortissement dans les modèles éléments finis.

Le tableau (1) résume les différents scénarios d'endommagements en raideur, masse et amortissement, les différentes simulations sont exécutées sur logiciel Matlab annexe (A).

Pour le cas test 1 on va utiliser $n_p=14$ modes avec 24 d.d.l. capteurs. Et $n_p=16$ mode avec 26 d.d.l. capteurs. (Voir courbe de conditionnement Annexe B.1, B.2)

Tableau 1 : différents scénarios d'endommagements introduit dans les cas tests

Structure	Eléments perturbés	Perturbation(%)	Structure	Eléments perturbés	Perturbation(%)
Cas test 1 : Poutre repliée	4	$50 \times E$	Cas test 2 : Portique	4	$50 \times E$
	21	$30 \times \rho$		4	$60 \times \rho$
	3	$30 \times (\alpha, \beta)$		4	$40 \times (\alpha, \beta)$
	2-3	$45-30 \times E$		4-11	$40-70 \times E$
	10	$60 \times \rho$		5	$50 \times \rho$
	5	$40 \times (\alpha, \beta)$		7	$50 \times (\alpha, \beta)$
	1-5-8	$40-20-80 \times E$		2-9-19	$35-35-45 \times E$
Cas test 1 : Poutre repliée	12	$70 \times \rho$		19-3	$50 \times \rho$
	9	$50 \times (\alpha, \beta)$		14-11	$70-10 \times (\alpha, \beta)$
	11-14-18	$50 \times E$		5-6 -21	$30-80-10 \times E$
	15-22	$40-20 \times \rho$		13-17	$10-60 \times \rho$
	13-6	$60-10 \times (\alpha, \beta)$		5-12	$50-50 \times (\alpha, \beta)$
	1-10-13-19	$70 \times E$		13-1-15-20	$50-50-50-50 \times E$
	2-16-21	$55-45-65 \times \rho$		3-11-20	$50-55-40 \times \rho$
Cas test 1 : Poutre repliée	20-12	$70 \times (\alpha, \beta)$		17-4-1	$70-50-40 \times (\alpha, \beta)$
	10-2-16-14	$50 \times E$		7-14-19-22	$40 \times E$
	10-2-5-19	$50 \times \rho$		7-1-19-6	$40 \times \rho$
	10-2-22-17	$50 \times (\alpha, \beta)$		7-12-5-19	$40 \times (\alpha, \beta)$

III.3.3. Résultats de la simulation numérique :

Cas test N° 1 : Poutre repliée :

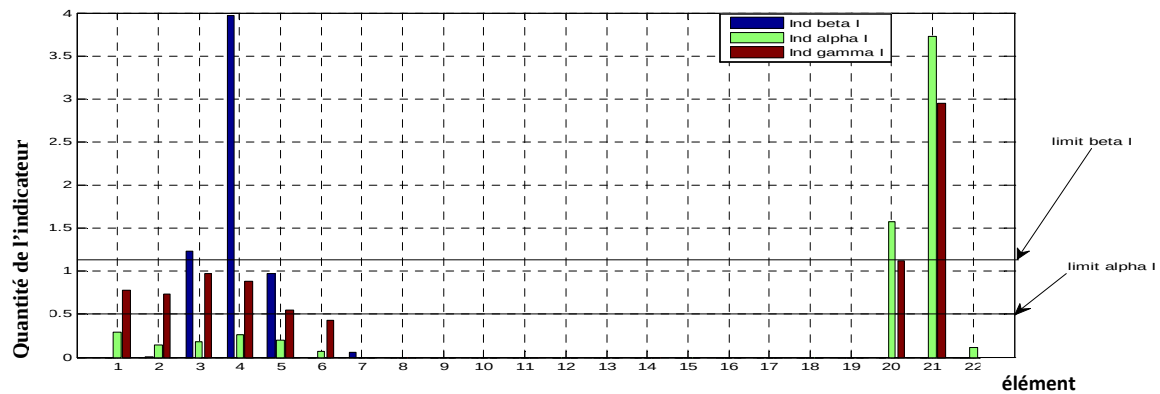


Fig.3.4.Cas test N°1.éléments endommagés
4 de $0.5 \times E$ / 21 de $0.3 \times \rho$ / 3 de $0.3 \times (\alpha, \beta)$

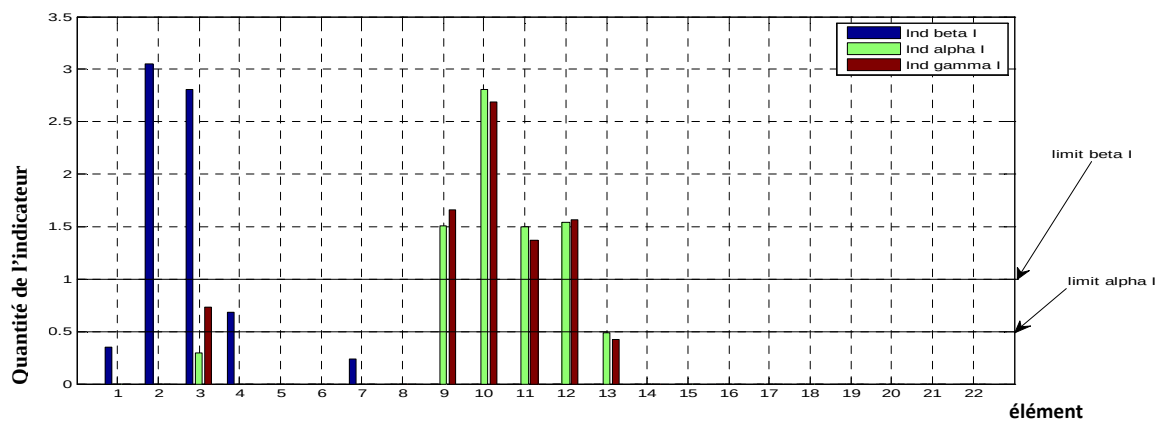


Fig.3.5.Cas test N°1.éléments endommagés
2-3 de $0.45-0.3 \times E$ // 10 de $0.6 \times \rho$ // 5 de $0.4 \times (\alpha, \beta)$

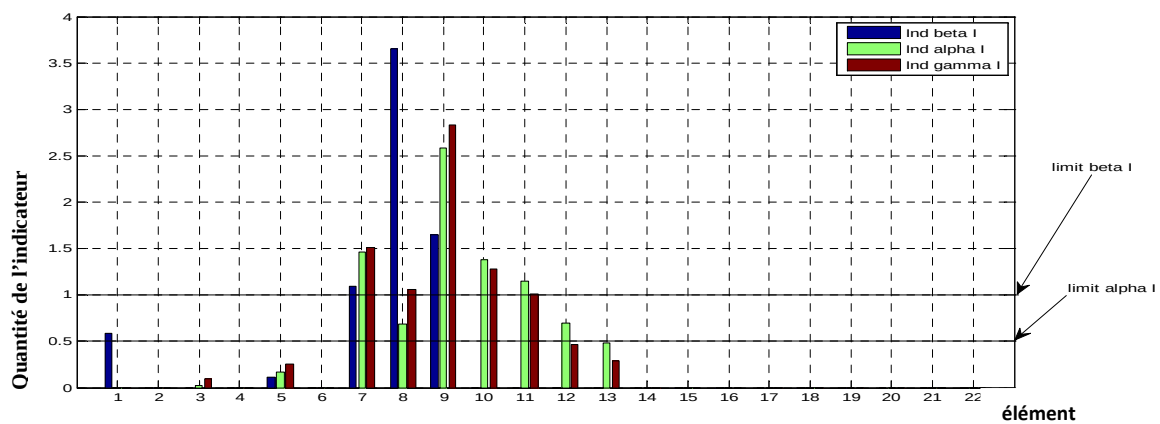


Fig.3.6.Cas test N°1.éléments endommagés
1-5-8 de $0.4-0.2-0.8 \times E$ // 12 de $0.70 \times \rho$ // 9 de $0.5 \times (\alpha, \beta)$

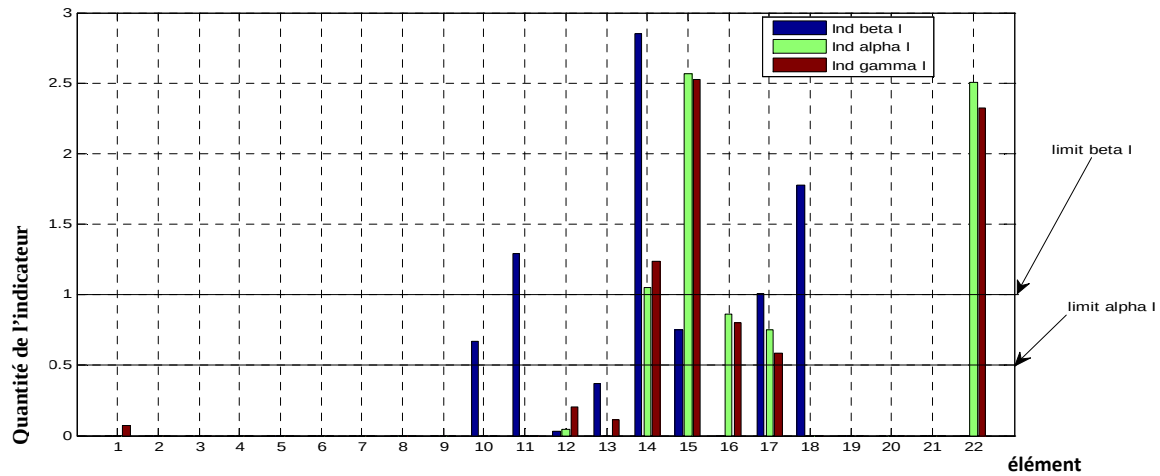


Fig.3.7.Cas test N°1.éléments endommagés
11-14-18 de $0.5 \times E$ // 15-22 de $0.4 - 0.2 \times \rho$ // 13-6 de $0.6 - 0.1 \times (\alpha, \beta)$

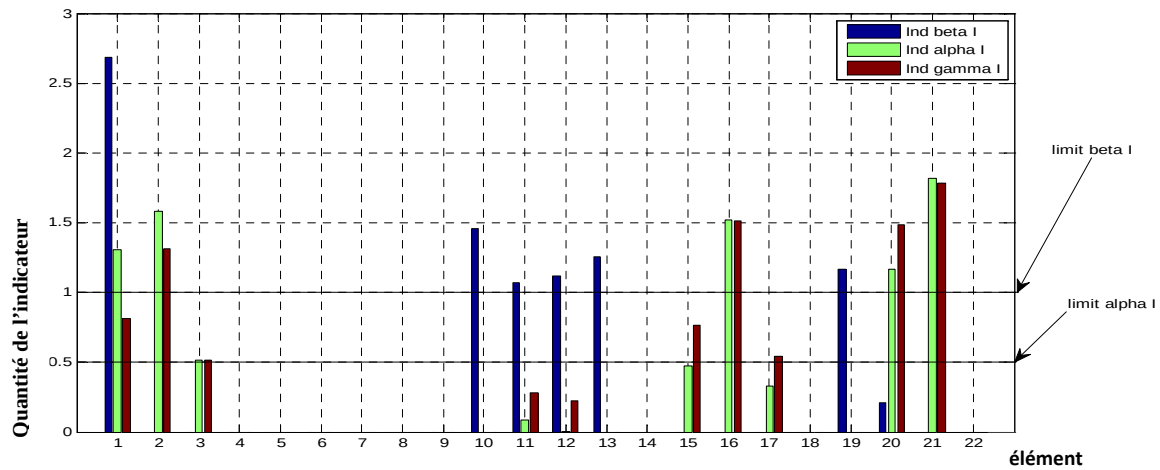


Fig.3.8.Cas test N°1.éléments endommagés
1-10-13-19 de $0.7 \times E$ // 2-16-21 de $0.55 - 0.45 - 0.65 \times \rho$ // 20-12 de $0.7 \times (\alpha, \beta)$

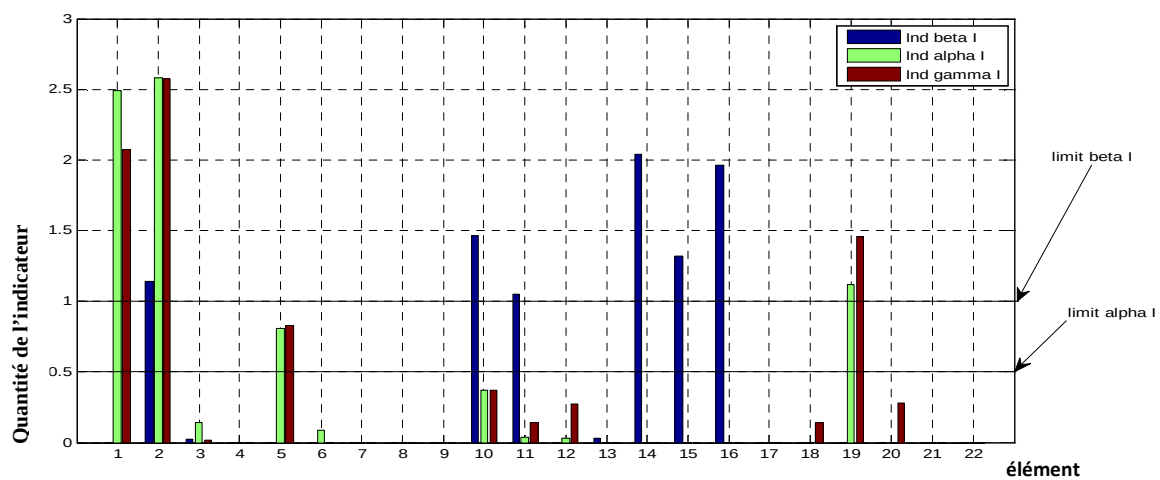


Fig.3.9.Cas test N°1.éléments endommagés
10-2-16-14 de $0.5 - 0.5 - 0.6 - 0.6 \times E$ // 10-2-5-19 de $0.5 - 0.5 - 0.6 - 0.6 \times \rho$ // 10-2-22-17 de $70 \times (\alpha, \beta)$

Cas test N° 2 : poutre en trie

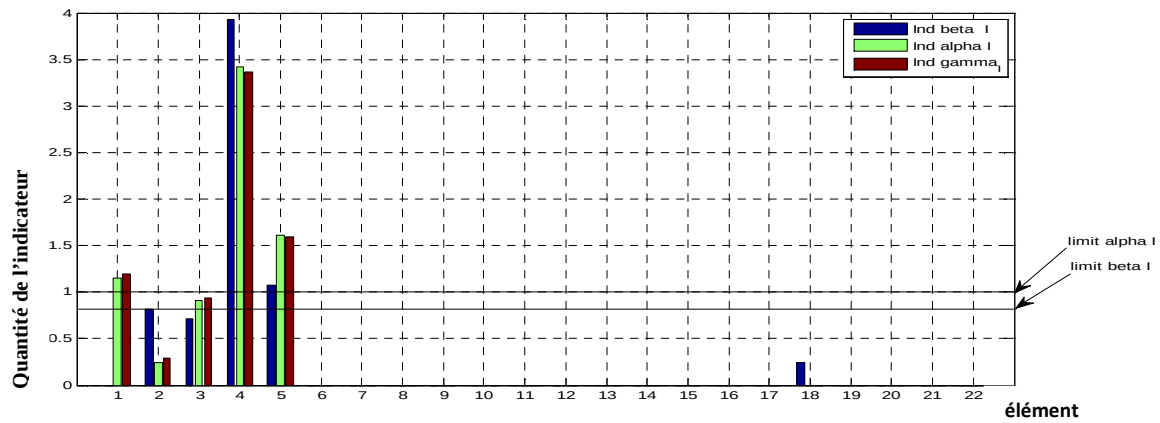


Fig.3.10.Cas test N°2.éléments endommagés
4 de $0.5 \times E // 4$ de $0.6 \times \rho // 4$ de $0.4 \times (\alpha, \beta)$

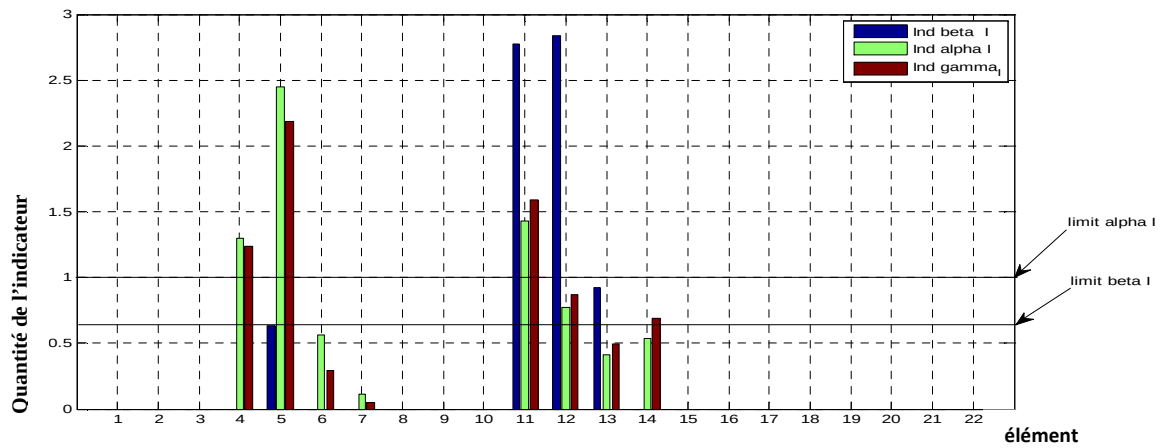


Fig.3.11.Cas test N°2.éléments endommagés
5-11 de $0.4-0.7 \times E // 5$ de $0.5 \times \rho // 7$ de $0.5 \times (\alpha, \beta)$

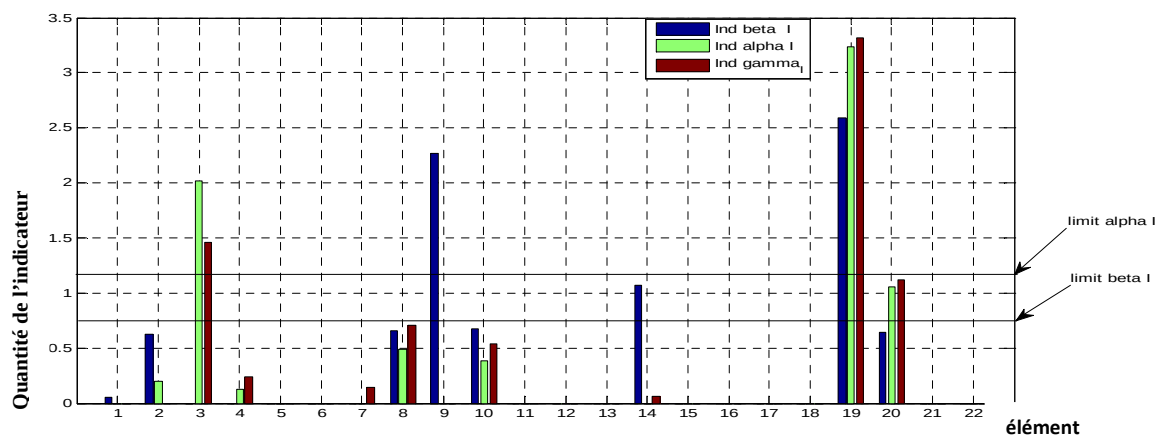


Fig.3.12.Cas test N°2.éléments endommagés
2-9-19 de $0.35-0.35-0.45 \times E // 19-3$ de $0.5 \times \rho // 14-11$ de $0.7-0.1 \times (\alpha, \beta)$

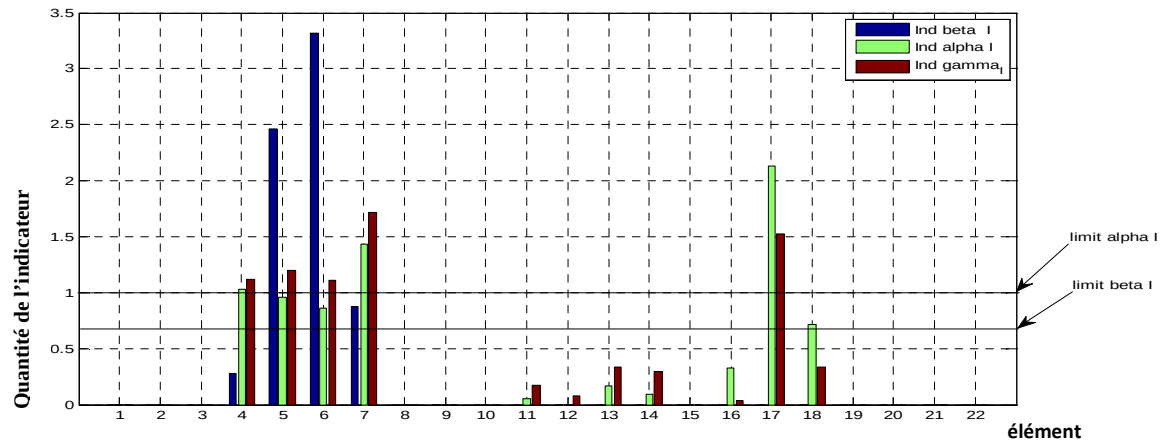


Fig.3.13.Cas test N°2.éléments endommagés
5-6-21 de $0.3-0.8-0.1 \times E$ // 13-17 de $0.1-0.6 \times \rho$ // 5-12 de $0.5 \times (\alpha, \beta)$

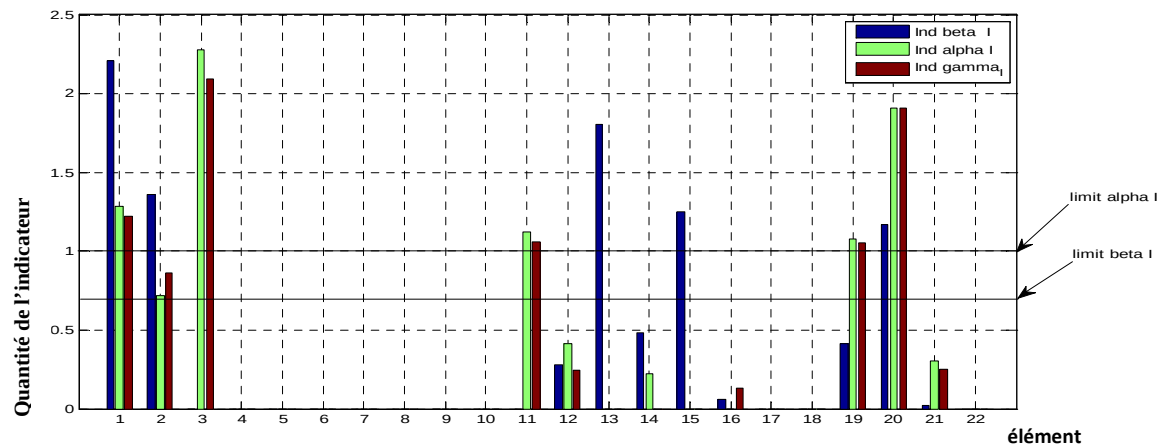


Fig.3.14.Cas test N°2.éléments endommagés
13-1-15-20 de $0.5 \times E$ // 3-11-20 de $0.5-0.55-0.4 \times \rho$ // 17-4-1 de $0.7 \ 0.5 \ 0.4 \times (\alpha, \beta)$

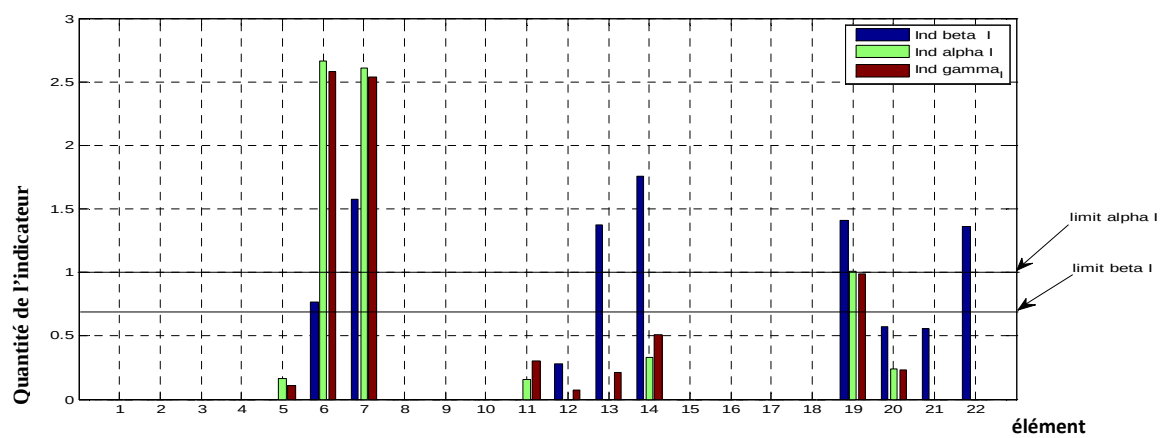


Fig.3.15.Cas test N°2.éléments endommagés
7-14-19-22 de $0.4 \times E$ // 7-1-19-6 de $0.4 \times \rho$ // 7-12-5-19 de $0.4 \times (\alpha, \beta)$

III.3.4. Interprétation des résultats :

Le premier constat qu'on fait, est que la méthode de l'indicateur d'endommagement est nettement plus efficace pour la détection de défaut de rigidité, et cela en terme de nombre de défaut détectable, en effet on peut localiser plusieurs endommagement avec un nombre de mode très réduit, voir huit modes pour un seul endommagement et 14 mode pour 4 endommagement figures (8 -9 -14-15), cependant si il se trouve qu'un défaut très important par rapport aux autres soit présent, alors les plus petits ne seront pas détectés, figure(6-13) et Annexe C, d'autre part la présence du bruit de mesure et la reconstitution des d.d.l. non observés diminue la qualité des informations que contiennent les vecteurs propres, ainsi des faux endommagements sont détectés Figure (7-8-9-11-13-14), par exemple la figure (11) est le résultat de la simulation de deux défauts (5 et 12) sur le cas test 2, on constate que l'élément (11) contient une quantité plus importante en β_I que l'élément (5) qui est réellement endommagé, notons aussi que les résultats obtenus dans les figures (4-6-8-12) confirment nettement les résultats obtenus par des auteurs antérieurs [52],[56], la présence d'un défaut sur un élément provoque de petites perturbations de l'indicateur β_I , et qui disparaissent dès qu'on s'éloigne de celui-ci.

Pour l'indicateur de défaut de masse α_I , les résultats obtenus sont très satisfaisants, avec quatorze modes on a pu localiser un à trois endommagements différents sur le cas test 2 Figure (10-12-14), mais au-delà de trois défauts la probabilité de détection diminue Figure(15), pour le cas test 1, détecter plus de trois défauts est plus favorable que sur le cas test 2, ce qui nous mène à dire que la fiabilité de l'indicateur α_I dépend de la complexité de la structure étudiée, si non l'indicateur α_I présente les mêmes inconvénients que l'indicateur β_I , en effet plus un élément contient un défaut de masse très important par rapport aux autres, plus α devient moins sensible aux plus petits défauts figure(13), et la présence d'un défaut au niveau d'un élément provoque de petites perturbations à son voisinage figure(6-8-10-11).

L'indicateur γ semble donner des résultats insignifiants en terme de défaut d'amortissement, le fait qu'on a pris comme modèle d'amortissement le modèle proportionnel, la matrice d'amortissement est donc une combinaison de la matrice de masse et celle de rigidité, c'est pour cela que lorsque on introduit un défaut d'amortissement sur un élément l'indicateur γ indique ceux de la rigidité et de masse Figure(7-9-12-13). les seuls cas où nous avons identifié des défauts d'amortissements, ce sont les cas où celui-ci coïncide ou voisine avec un défaut de masse ou de rigidité Figure(4-10-13-15).

III.3.5. Limite de validation d'un défaut :

Vu que les défauts perturbent les indicateurs alpha et beta a leurs voisinages, de fausse alerte sont fréquemment rencontrées, pour pallier a ce problème le tracer d'une ligne qui sépare les bonne et les mauvaises lectures de l'indicateur est nécessaire Figure(4 à 15), le but est de tracer une limite qui va supprimer les fausses détection et mis en évidence celles qui sont bonnes, pour chaque structure on devrai effectuer une analyse statistique judicieuse de chaque indicateur, en vu du nombre très important de possibilités aux quels on est confronté, donc se limité a des scenarios restreins sera un choix approprié.

Nous pouvons illustrer cette remarque par le cas de deux défauts de rigidité dans le cas test 1.

Si on suppose que chaque défaut peut prendre une des neuf valeurs (0.1, 0.2,...,0.9), et le fait que le cas test 1 compte 22 éléments, on sera ramené a l'analyse de 9^{22} scenario, qui est nombre impraticable.

Nous savons que le taux de différence entre les défauts introduit ne devrait pas être important, si non des éléments faiblement endommagés ne seront pas détecter, Annexe C,

En considérant cette condition, si chaque élément peut contenir le défaut (0,4 ou 0,5), le nombre total de scenarios descend jusqu'à 2^{22} . Mais malgré cela ce chiffre reste très important pour faire l'objet d'une analyse.

On est contraint donc de tracer cette limite en veillant à ce que la structure ne contient pas de défaut dominant, et on se contente d'analyser juste quelques scenarios pour tracer cette limite, ainsi si un élément contient une valeur supérieur a cette limite il sera considéré comme un élément endommager, si non il sera considéré comme sain.

L'avantage que procure cette procédure c'est qu'elle élimine la majorité des cas de fausses détections Figure (4 à 15), et on peut ajuster sa valeur selon le degré de confiance qu'on veut obtenir. Plus cette limite est grande, plus la possibilité de louper un élément endommagé s'agrandisse.

Cette approche n'est pas vraiment satisfaisante, des défauts existant vont être supprimés malgré que leurs indicateur est positif, c'est le cas de l'élément 2 dans la Figure (12), et de fausses détections vont être validées Figure (14), ou les éléments 2, 1 et 9 sont qualifiés d'éléments endommager alors qu'ils ne le sont pas réellement.

Chapitre IV

IV. identification paramétrique des structures mécaniques à partir des FRFs observées :

Dans ce chapitre nous allons introduire une nouvelle écriture des indicateurs d'endommagements employés dans le troisième chapitre on les adaptant aux réponses en fréquences, ces nouveaux indicateurs seront marqués par le chiffre romain II, nous allons adopter l'écriture suivante pour chaque paramètre :

- indicateur Beta_II pour les défauts de rigidité
- indicateur Alpha_II pour les défauts de masse
- indicateur Gamma_II pour les défauts d'amortissement

IV.1. Formulation de la théorie de l'indicateur d'endommagement

a. Indicateur de défaut de rigidité (Beta_II):

Considérons dans un premier temps une poutre de type Euler-Bernoulli, élastique et linéaire, divisée par n_e éléments et n nœuds sur sa longueur.

Les fonctions de réponses en fréquence d'une structure discrétisée en éléments finis conduit à la résolution du système d'équations (2.97).

$$\{y(\omega)\} = (-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K])^{-1}$$

Dans ce cas pour chaque fréquence d'excitation ω_i correspond à un vecteur réponse $y_i(\omega)$, ce vecteur comporte des valeurs de nombre complexe (partie réelle et une partie imaginaire),

Donc on va adopter une écriture séparée des énergies de déformations,

Une énergie de déformation réelle $^R U$.

Une énergie de déformation imaginaire $^I U$.

Pour la structure saine :

L'énergie de déformation élémentaire du la $i^{ème}$ réponse pour l'élément j s'écrit :

$$^R U_{ij} = \frac{1}{2} Re\{y_{ij}\}^t \cdot [k_j] \cdot Re\{y_{ij}\} \quad (4.1)$$

$$^I U_{ij} = \frac{1}{2} Im\{y_{ij}\}^t \cdot [k_j] \cdot Im\{y_{ij}\} \quad (4.2)$$

$$U_{ij} = \sqrt{(^R U_{ij})^2 + (^I U_{ij})^2} \quad (4.3)$$

L'énergie de déformations totale de la structure pour le $i^{ème}$ réponse s'écrit :

$${}^R U_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} Re \{y_{ij}\}^t \cdot [k_j] \cdot Re \{y_{ij}\} \quad (4.4)$$

$${}^I U_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} Im \{y_{ij}\}^t \cdot [k_j] \cdot Im \{y_{ij}\} \quad (4.5)$$

$$U_i = \sqrt{({}^R U_i)^2 + ({}^I U_i)^2} \quad (4.6)$$

Pour la structure endommagée :

L'énergie de déformation élémentaire de la $i^{ème}$ réponse pour l'élément j s'écrit :

$${}^R U_{ij}^* = \frac{1}{2} Re \{y_{ij}^*\}^t \cdot [k_j^*] \cdot Re \{y_{ij}^*\} \quad (4.7)$$

$${}^I U_{ij}^* = \frac{1}{2} Im \{y_{ij}^*\}^t \cdot [k_j^*] \cdot Im \{y_{ij}^*\} \quad (4.8)$$

$$U_{ij}^* = \sqrt{({}^R U_{ij}^*)^2 + ({}^I U_{ij}^*)^2} \quad (4.9)$$

L'énergie de déformations totale de la structure pour le $i^{ème}$ réponse s'écrit :

$${}^R U_i^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} Re \{y_{ij}^*\}^t \cdot [k_j^*] \cdot Re \{y_{ij}^*\} \quad (4.10)$$

$${}^I U_i^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} Im \{y_{ij}^*\}^t \cdot [k_j^*] \cdot Im \{y_{ij}^*\} \quad (4.11)$$

$$U_i^* = \sqrt{({}^R U_i^*)^2 + ({}^I U_i^*)^2} \quad (4.12)$$

En considérant l'énergie de déformation de chaque élément et l'énergie de déformation totale de la structure, pour une fréquence donnée, la fraction d'énergie de déformation FU_{ij} s'écrit :

$$FU_{ij} = \frac{U_{ij}}{U_i} \quad (4.13)$$

Des expressions identiques peuvent s'écrire pour le cas endommagé :

$$FU_{ij}^* = \frac{U_{ij}^*}{U_i^*} \quad (4.14)$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^{n_e} FU_{ij}^* = \sum_{i=1}^{n_e} FU_{ij} = 1$$

Ou $()^*$ désigne une quantité relative à la structure endommagée

Pour considérer tous les F.R.F. mesures n_p dans les calculs, l'écriture de l'indicateur d'endommagement non normalisé pour l'élément j s'écrit

$$ZU_II_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} FU_{ij}^*}{\sum_{i=1}^{n_p} FU_{ij}} \quad (4.15)$$

Avec $j \in \{1, 2, \dots, n_e\}$

ZU_II_j Étant une population d'une variable aléatoire normalement distribué, l'indicateur de défauts de rigidités normalisé s'écrit :

$$Beta_II_j = \frac{ZU_II_j - \overline{ZU_II}}{\sigma_{ZU_II}} \quad (4.16)$$

Ou $\overline{ZU_II}$ et σ_{ZU_II} sont respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de ZU_II

b. Indicateur de défaut de masse (alpha_II):

Le calcul de l'indicateur de défaut de masse suit la même procédure que le calcul de l'indicateur de défaut de rigidité, nous allons construire un indicateur $alpha_II$, en exploitant la variation de l'énergie cinétique avant et après endommagement.

De la même manière qu'avec l'énergie de déformation, on va adopter une écriture séparée des énergies cinétique,

Une énergie cinétique réelle ${}^RT$.

Une énergie cinétique imaginaire ${}^IT$.

Pour la structure saine :

Les expressions de l'énergie cinétique élémentaire de l'élément j pour la $i^{ème}$ réponse s'écrivent :

$${}^RT_{ij} = (\omega_i)^2 \cdot Re \{y_{ij}\}^t [m_j] \cdot Re \{y_{ij}\} \quad (4.17)$$

$${}^IT_{ij} = (\omega_i)^2 \cdot Im \{y_{ij}\}^t [m_j] \cdot Im \{y_{ij}\} \quad (4.18)$$

$$T_{ij} = \sqrt{({}^RT_{ij})^2 + ({}^IT_{ij})^2} \quad (4.19)$$

Pour la structure complète on écrit :

$${}^R T_i = \sum_{j=1}^{n_e} (\omega_i)^2 \cdot \text{Re} \{y_{ij}\}^t \cdot [m_j] \cdot \text{Re} \{y_{ij}\} \quad (4.20)$$

$${}^I T_i = \sum_{j=1}^{n_e} (\omega_i)^2 \cdot \text{Im} \{y_{ij}\}^t \cdot [m_j] \cdot \text{Im} \{y_{ij}\} \quad (4.21)$$

$$T_i = \sqrt{({}^R T_i)^2 + ({}^I T_i)^2} \quad (4.22)$$

Pour la structure endommagée :

L'énergie de cinétique élémentaire du $i^{\text{ème}}$ réponse pour l'élément j s'écrit :

$${}^R T_{ij}^* = \frac{1}{2} (\omega_i^*)^2 \cdot \text{Re} \{y_{ij}^*\}^t \cdot [m_j^*] \cdot \text{Re} \{y_{ij}^*\} \quad (4.23)$$

$${}^I T_{ij}^* = \frac{1}{2} (\omega_i^*)^2 \cdot \text{Im} \{y_{ij}^*\}^t \cdot [m_j^*] \cdot \text{Im} \{y_{ij}^*\} \quad (4.24)$$

$$T_{ij}^* = \sqrt{({}^R T_{ij}^*)^2 + ({}^I T_{ij}^*)^2} \quad (4.25)$$

L'énergie de cinétique totale de la structure pour la $i^{\text{ème}}$ réponse s'écrit :

$${}^R T_i^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} (\omega_i^*)^2 \cdot \text{Re} \{y_{ij}^*\}^t \cdot [m_j^*] \cdot \text{Re} \{y_{ij}^*\} \quad (4.26)$$

$${}^I T_i^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} (\omega_i^*)^2 \cdot \text{Im} \{y_{ij}^*\}^t \cdot [m_j^*] \cdot \text{Im} \{y_{ij}^*\} \quad (4.27)$$

$$T_i^* = \sqrt{({}^R T_i^*)^2 + ({}^I T_i^*)^2} \quad (4.28)$$

En considérant l'énergie de cinétique de chaque élément et l'énergie de cinétique totale de la structure, pour une fréquence donnée, la fraction d'énergie de cinétique FT_{ij} s'écrit :

$$FT_{ij} = \frac{T_{ij}}{T_i} \quad (4.29)$$

Des expressions identiques peuvent s'écrire pour le cas endommagé :

$$FT_{ij}^* = \frac{T_{ij}^*}{T_i^*} \quad (4.30)$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^{n_e} FT_{ij}^* = \sum_{i=1}^{n_e} FT_{ij} = 1$$

Ou $()^*$ désigne une quantité relative à la structure endommagée

Pour considérer tous les F.R.F.s mesures n_p dans les calculs, l'écriture de l'indicateur d'endommagement non normalisé pour l'élément j s'écrit

$$ZT_II_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} FT_{ij}^*}{\sum_{i=1}^{n_p} FT_{ij}} \quad (4.31)$$

Avec $j \in \{1, 2, \dots, n_e\}$

ZT_II_j Étant une population d'une variable aléatoire normalement distribuée, l'indicateur de défauts de masse normalisé s'écrit :

$$alpha_II_j = \frac{ZT_II_j - \overline{ZT_II}}{\sigma_{ZT_II}} \quad (4.32)$$

Ou $\overline{ZT_II}$ et σ_{ZT_II} sont respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de ZT_II

c. Indicateur de défaut d'amortissement (γ_{II}):

Le calcul de l'indicateur de défaut d'amortissement suit la même procédure que le calcul des deux premiers indicateurs, nous allons construire un indicateur γ_{II} en exploitant la variation de l'énergie dissipative avant et après endommagement

Et de la même manière, on va adopter une écriture séparée des énergies cinétique,

Une énergie dissipative réelle RD .

Une énergie dissipative imaginaire ^ID .

Pour la structure saine :

Les expressions de l'énergie dissipative élémentaire de l'élément j pour la $i^{\text{ème}}$ réponse s'écrivent :

$$^RD_{ij} = (\omega_i) \cdot \text{Re} \{y_{ij}\}^t [c_j] \cdot \text{Re} \{y_{ij}\} \quad (4.33)$$

$$^ID_{ij} = (\omega_i) \cdot \text{Im} \{y_{ij}\}^t [c_j] \cdot \text{Im} \{y_{ij}\} \quad (4.34)$$

$$D_{ij} = \sqrt{(^RD_{ij})^2 + (^ID_{ij})^2} \quad (4.35)$$

Pour la structure complète on écrit :

$$^RD_i = \sum_{j=1}^{n_e} (\omega_i) \cdot \text{Re} \{y_{ij}\}^t \cdot [c_j] \cdot \text{Re} \{y_{ij}\} \quad (4.36)$$

$${}^I D_i = \sum_{j=1}^{n_e} (\omega_i). \text{Im} \{y_{ij}\}^t \cdot [c_j]. \text{Im} \{y_{ij}\} \quad (4.27)$$

$$D_i = \sqrt{({}^R D_i)^2 + ({}^I D_i)^2} \quad (4.38)$$

Pour la structure endommagée :

L'énergie dissipative élémentaire du $i^{\text{ème}}$ réponse pour l'élément j s'écrit :

$${}^R D_{ij}^* = \frac{1}{2} (\omega_i^*). \text{Re} \{y_{ij}^*\}^t \cdot [m_j^*]. \text{Re} \{y_{ij}^*\} \quad (4.39)$$

$${}^I D_{ij}^* = \frac{1}{2} (\omega_i^*). \text{Im} \{y_{ij}^*\}^t \cdot [m_j^*]. \text{Im} \{y_{ij}^*\} \quad (4.40)$$

$$D_{ij}^* = \sqrt{({}^R D_{ij}^*)^2 + ({}^I D_{ij}^*)^2} \quad (4.41)$$

L'énergie dissipative totale de la structure pour la $i^{\text{ème}}$ réponse s'écrit :

$${}^R D_i^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} (\omega_i^*). \text{Re} \{y_{ij}^*\}^t \cdot [m_j^*]. \text{Re} \{y_{ij}^*\} \quad (4.42)$$

$${}^I D_i^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} (\omega_i^*). \text{Im} \{y_{ij}^*\}^t \cdot [m_j^*]. \text{Im} \{y_{ij}^*\} \quad (4.43)$$

$$D_i^* = \sqrt{({}^R D_i^*)^2 + ({}^I D_i^*)^2} \quad (4.44)$$

En considérant l'énergie dissipative de chaque élément et l'énergie dissipative totale de la structure, pour une fréquence donnée, la fraction d'énergie dissipative FD_{ij} s'écrit :

$$FD_{ij} = \frac{D_{ij}}{D_i} \quad (4.45)$$

Des expressions identiques peuvent s'écrire pour le cas endommagé :

$$FD_{ij}^* = \frac{D_{ij}^*}{D_i^*} \quad (4.46)$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^{n_e} FD_{ij}^* = \sum_{i=1}^{n_e} FD_{ij} = 1$$

Où $()^*$ désigne une quantité relative à la structure endommagée

Pour considérer tous les F.R.F. mesures n_p dans les calculs, l'indicateur d'endommagement non normalisé pour l'élément j s'écrit

$$ZD_II_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} FD_{ij}^*}{\sum_{i=1}^{n_p} FD_{ij}} \quad (4.47)$$

Avec $j \in \{1, 2, \dots, n_e\}$

ZD_II_j Étant une population d'une variable aléatoire normalement distribué, l'indicateur de défauts d'amortissement normalisé s'écrit :

$$gamma_II_j = \frac{ZD_II_j - \overline{ZD_II}}{\sigma_{ZD_II}} \quad (4.48)$$

Ou $\overline{ZD_II}$ et σ_{ZD_II} sont respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de ZD_II

IV.2. Mise en œuvre et validation de la méthode :

Pour validé et estimé la robustesse de la méthode proposé on va reprendre les même cas test employer dans la première partie, et afin de pouvoir comparer les deux méthodes on va reproduire les même conditions de simulation.

Bruit de mesure aléatoire affectant les FRF de 10%. Pour les deux cas test,

Nombre de fréquences à introduire, 14 pour le cas test 1, et 16 pour le cas test 2.

Les différents scenarios d'endommagement à simuler sont résumés dans le tableau 1.

IV.2.1. Choix des fréquences :

D'après Kye et Rong, [16] le choix des fréquences à introduire dans un algorithme d'identification d'endommagement ne doit pas contenir les fréquences de résonances, le choix approprié des fréquences sera de sélectionner quelques valeurs éloignées des bandes inter-résonances.

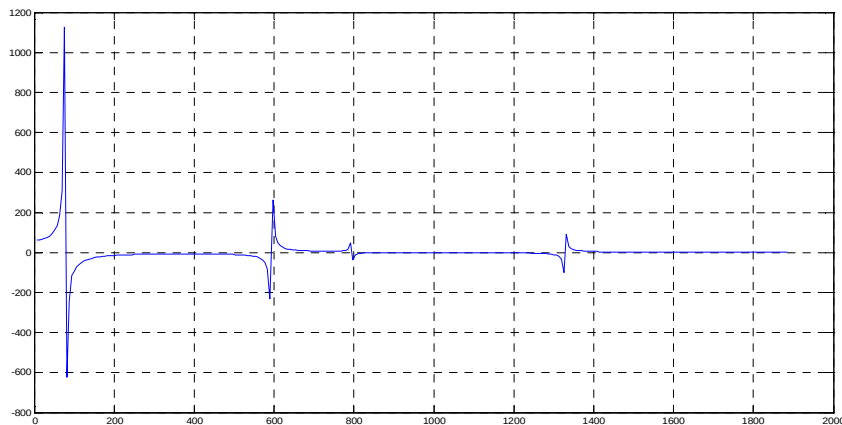
Choix de fréquences pour le cas test 1 :

Fig.4.1. : FRF du cinquième d.d.l. de la structure cas test 1.

Les premières fréquences de résonances du test 1 sont :

[12.36, 14.67, 94.53, 126.45, 211.47, 345.32, 450.98, 673.83, 830.46, 1112.47, 1340.84, 1662.52, 1971.49, 2202.36] (Hertz).

Les fréquences que nous avons sélectionnées pour le cas test 1 sont les suivantes :

Freq = [4, 5, 6, 7, 13, 35, 45, 50, 60, 70, 100, 105, 110, 115, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200, 220, 230, 235, 240, 250, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290] (Hertz).

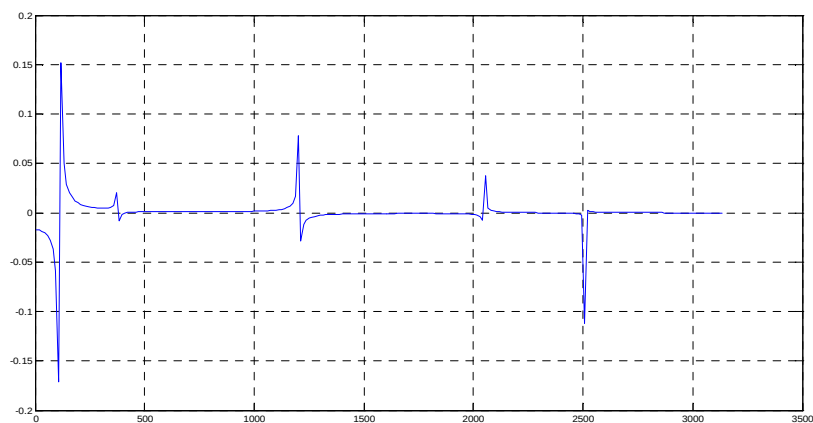
Choix des fréquences pour le cas test 2 :

Fig.4.2. : FRF du quinzième d.d.l. de la structure cas test 2.

Les premières fréquences de résonance du cas test 2 sont :

[17.96, 59.7, 97.56, 131.15, 191.53, 203.62, 326.67, 364.78, 399.04, 455.84, 524.47, 625.02, 779.11, 836.67] (Hertz).

Les fréquences que nous allons introduire pour le calcul des points FRFs sur la structure test 2 sont :

Freq = [5 10 25 30 40 50 60 70 60 105 110 120 140 150 170 180 210 220 230 240 250 260 270 280 290 300 310] (Hertz).

IV.2.2. Sélection du nombre de ddl capteur optimal:**Cas test 1 :**

A partir de l'évolution du rang et du conditionnement de la matrice des FRF dans l'annexe B.3, on peut tirer le nombre de ddl capteurs à employer sur le cas test 1, pour ($n_p=14$) on va installer 24 capteurs.

Cas test 2 :

A partir de l'évolution du rang et du conditionnement de la matrice des FRF dans l'annexe B.4, on peut tirer le nombre de ddl capteurs à employer sur le cas test 2, pour $n_p=16$, 26 d.d.l. capteur seront utilisés.

IV.2.3. Résultats de la simulation numérique :

Cas test N° 1 : Poutre repliée :

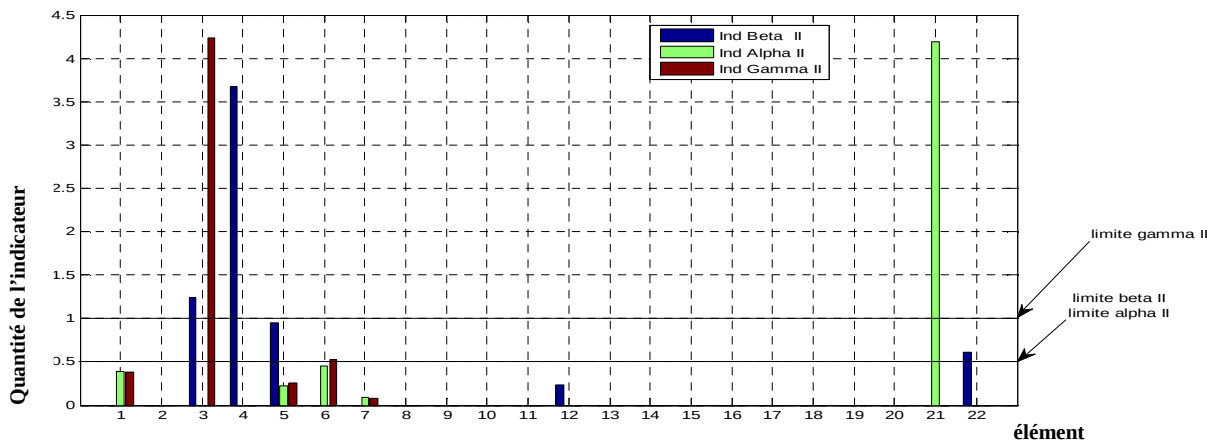


Fig.4.3.: Cas test N°1.éléments endommagés
4 de $0.5 \times E$ / 21 de $0.3 \times \rho$ / 3 de $0.3 \times (\alpha, \beta)$

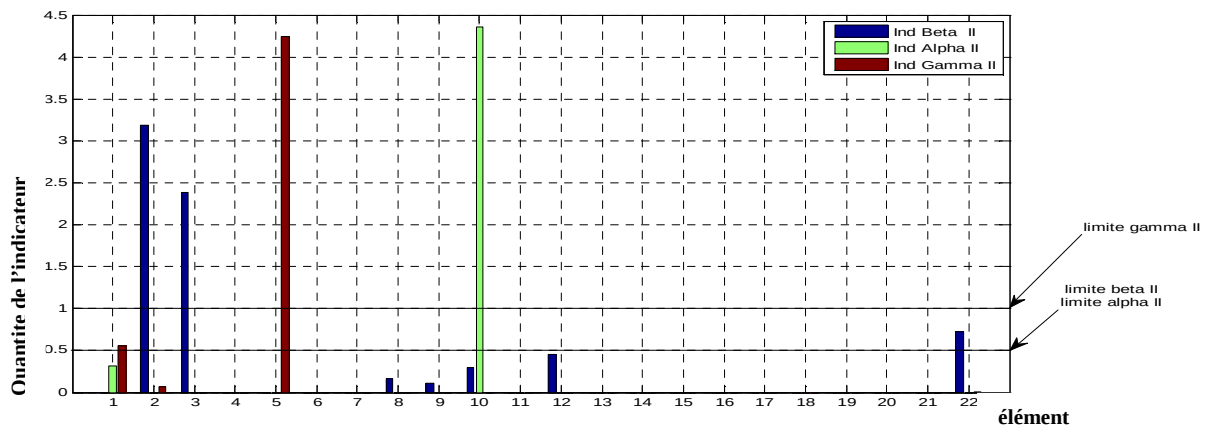


Fig.4.4.: Cas test N°1.éléments endommagés
2-3 de $0.45-0.3 \times E$ // 10 de $0.6 \times \rho$ // 5 de $0.4 \times (\alpha, \beta)$

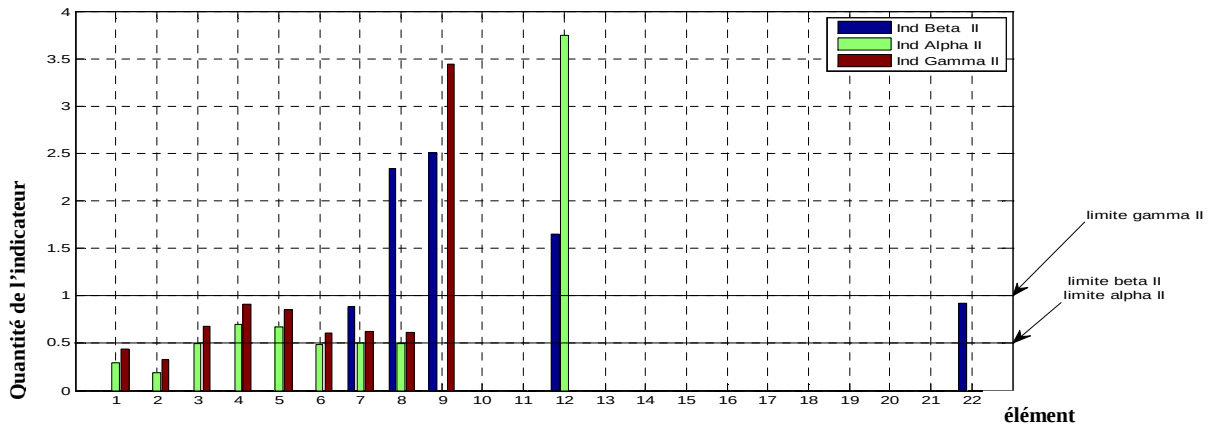


Fig.4.5.: Cas test N°1.éléments endommagés
1-5-8 de $0.4-0.2-0.8 \times E$ // 12 de $0.70 \times \rho$ // 9 de $0.5 \times (\alpha, \beta)$

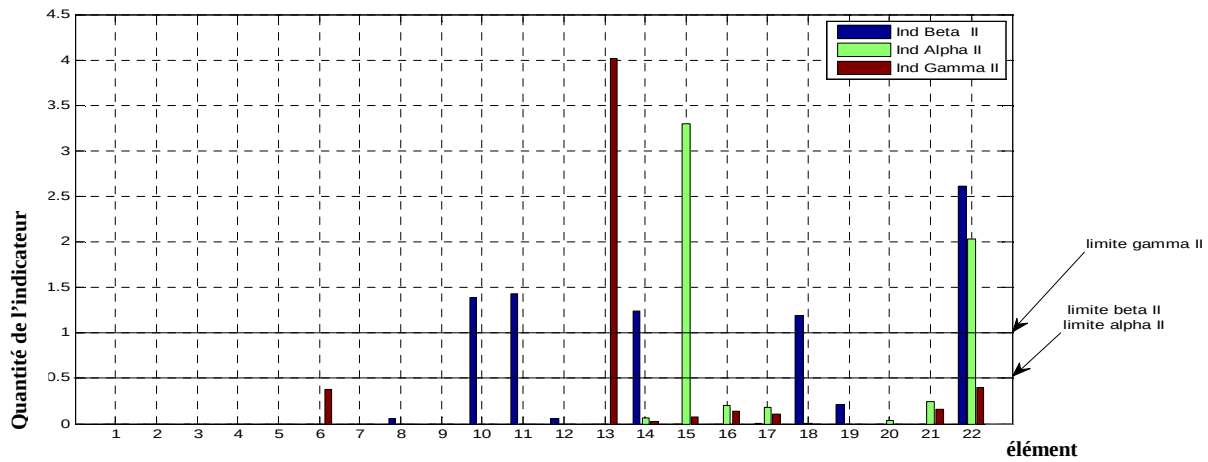


Fig.4.6.: Cas test N°1.éléments endommagés
11-14-18 de $0.5 \times E$ // 15-22 de $0.4-0.2 \times \rho$ // 13-6 de $0.6-0.1 \times (\alpha, \beta)$

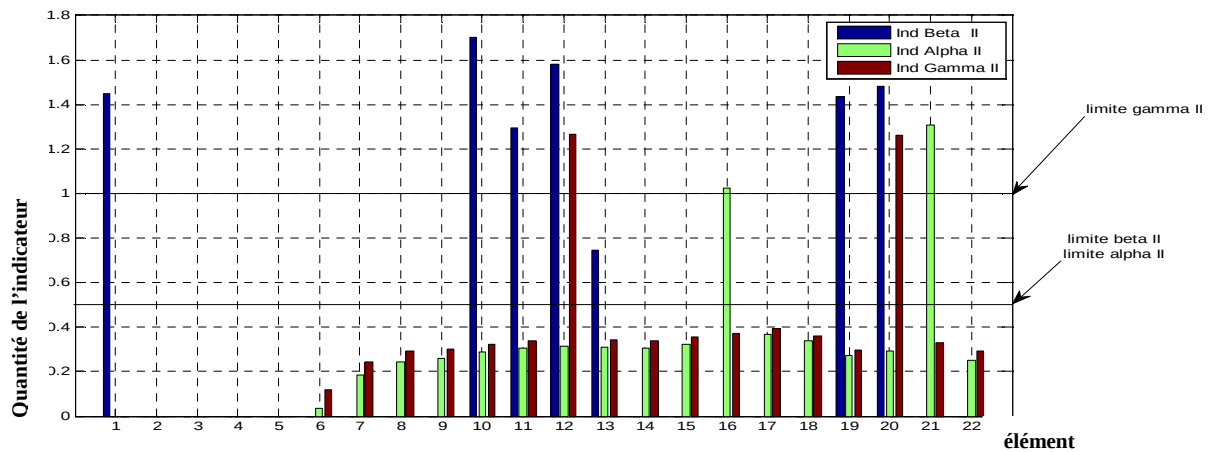


Fig.4.7. : Cas test N°1.éléments endommagés
1-10-13-19 de $0.7 \times E$ // 2-16-21 de $0.55-0.45-0.65 \times \rho$ // 20-12 de $0.7 \times (\alpha, \beta)$

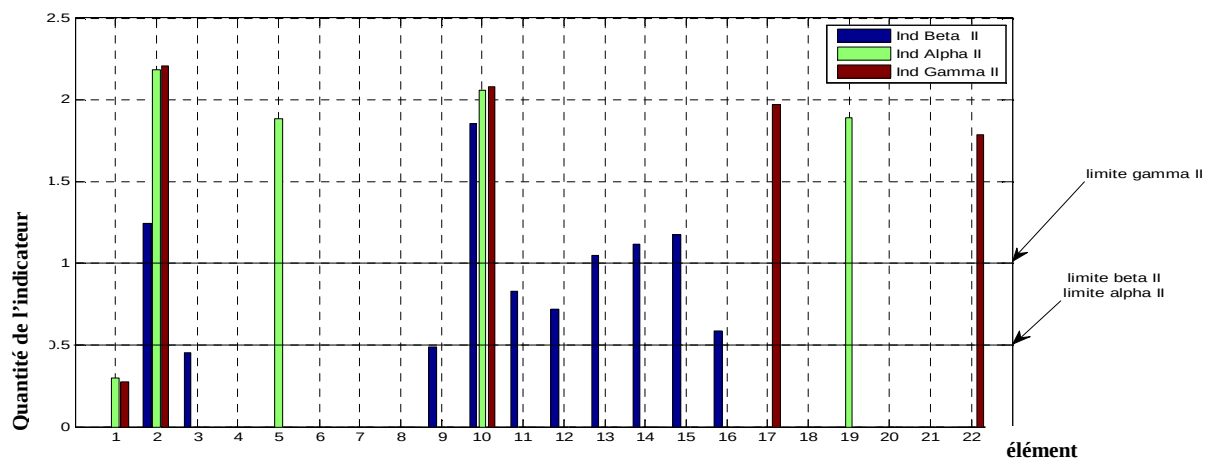


Fig.4.8.: Cas test N°1.éléments endommagés
10-2-16-14 de $0.5-0.5-0.6-0.6 \times E$ // 10-2-5-19 de $0.5-0.5-0.6-0.6 \times \rho$ // 10-2-22-17 de $70 \times (\alpha, \beta)$

Cas test N° 2 : poutre en trie

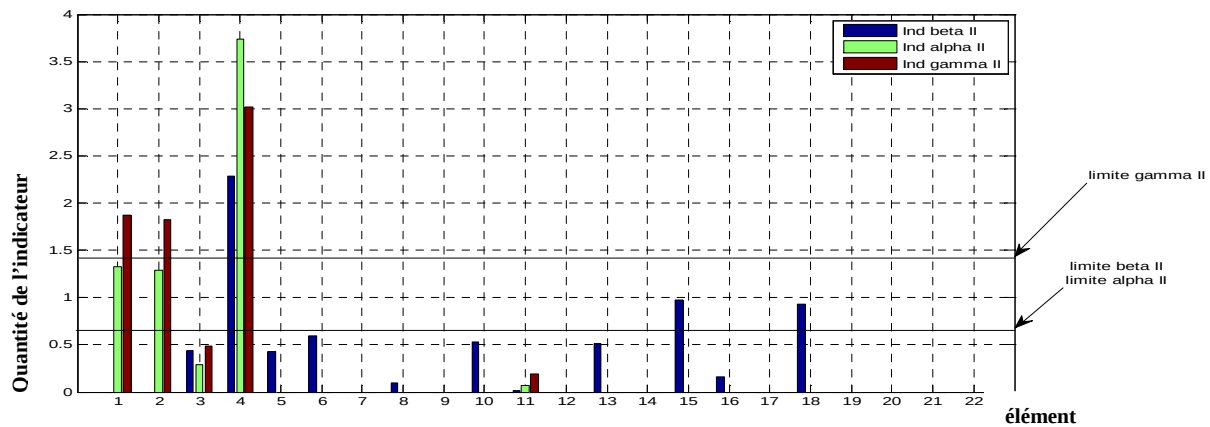


Fig.4.9.: Cas test N°2.éléments endommagés
4 de $0.5 \times E // 4$ de $0.6 \times \rho // 4$ de $0.4 \times (\alpha, \beta)$

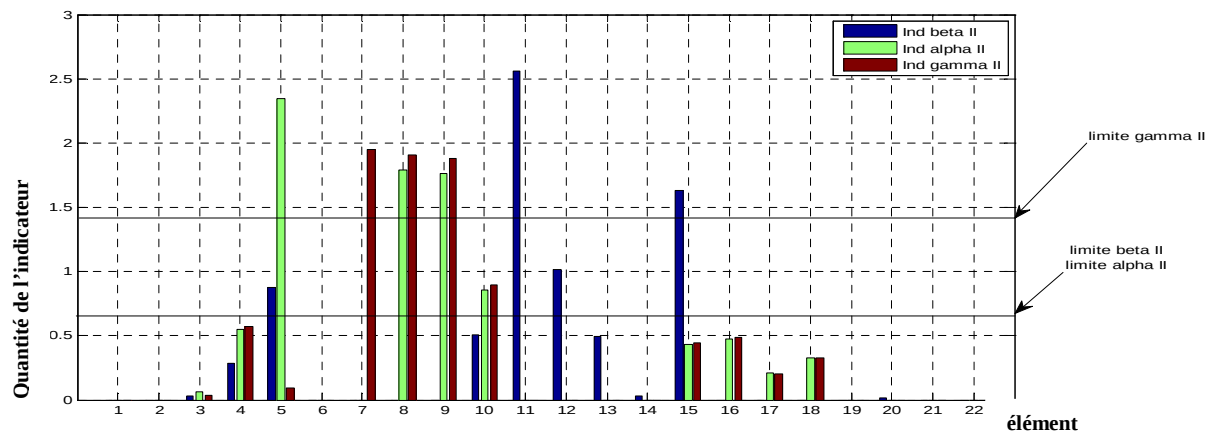


Fig.4.10.: Cas test N°2.éléments endommagés
5-11 de $0.4-0.7 \times E // 5$ de $0.5 \times \rho // 7$ de $0.5 \times (\alpha, \beta)$

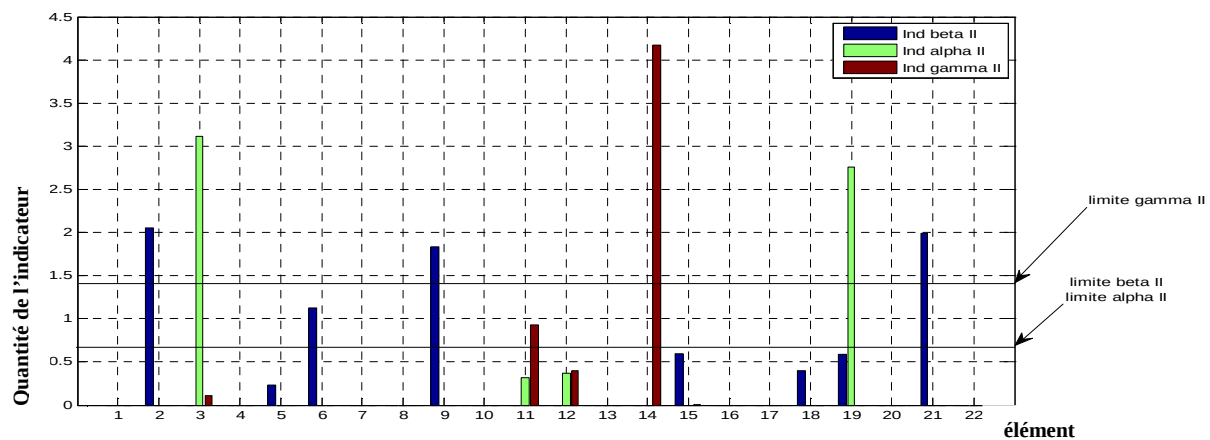


Fig.4.11.: Cas test N°2.éléments endommagés
2-9-19 de $0.35-0.35-0.45 \times E // 19-3$ de $0.5 \times \rho // 14-11$ de $0.7-0.1 \times (\alpha, \beta)$

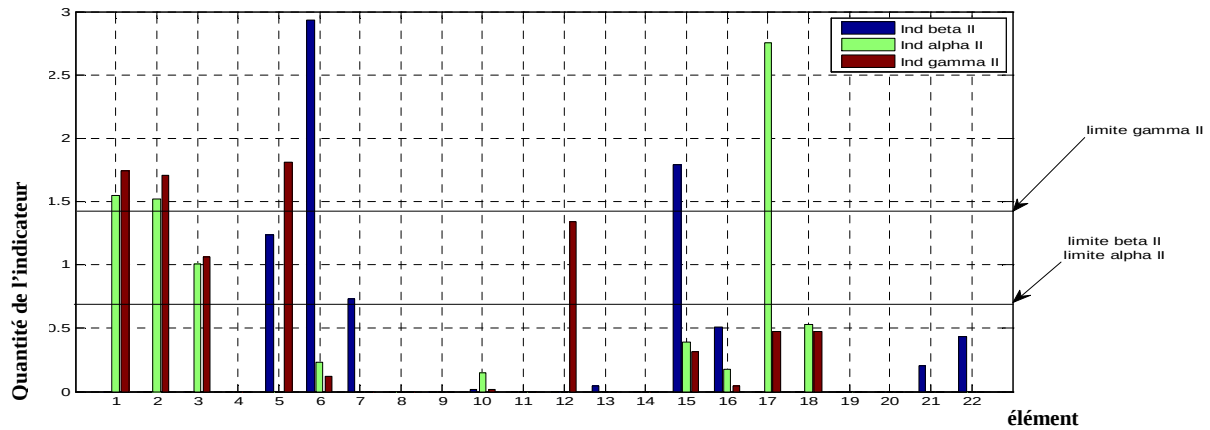


Fig.4.12.: Cas test N°2.éléments endommagés
5-6-21 de $0.3-0.8-0.1 \times E$ // 13-17 de $0.1-0.6 \times \rho$ // 5-12 de $0.5 \times (\alpha, \beta)$

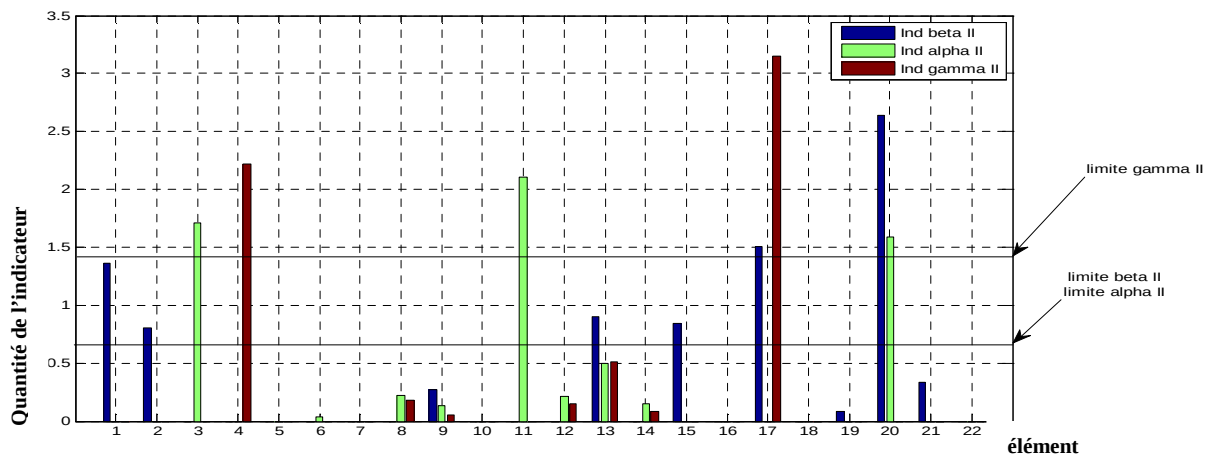


Fig.4.13.: Cas test N°2.éléments endommagés
13-1-15-20 de $0.5 \times E$ // 3-11-20 de $0.5-0.55-0.4 \times \rho$ // 17-4-1 de $0.7 \ 0.5 \ 0.4 \times (\alpha, \beta)$

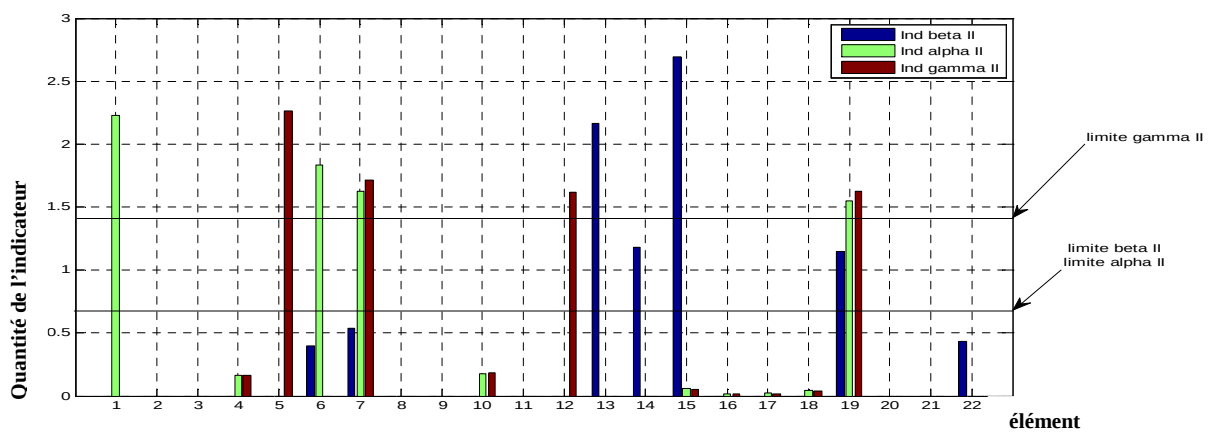


Fig.4.14.: Cas test N°2.éléments endommagés
7-14-19-22 de $0.4 \times E$ // 7-1-19-6 de $0.4 \times \rho$ // 7-12-5-19 de $0.4 \times (\alpha, \beta)$

IV.2.4. Interprétation des résultats :

Ce qui attire notre attention en premier lieu est que dans cette partie les défauts d'amortissement ont été appréhendés, la pluparts des scenarios d'endommagements introduit aux cas test 1 et 2 on été vérifié pour l'indicateur γ_{II} , cependant cet indicateur s'est montré plus efficace au niveau du test 1, figure (3 à 8). Le cas test 2 affiche fréquemment des résultats erronés. dans le cas de la figure(10) l'élément qui est réellement endommager est le septième élément mais l'élément qui contient la valeur maximal en indicateur γ_I est l'élément 8, ce qui nous mène a dire que l'efficacité de γ_{II} dépend de la complexité de la structure traitée, on note aussi que γ_I indique des petite perturbations aux niveau des élément non endommager dans tout les simulation pour les deux cas test, figure(3 à 14) ,la solution conventionnel a ce problème est de tracer une limite qui sépare les bonnes et les fausses lectures, une (limite=1) pour le cas test 1 et (limite=1.4) pour le cas test 2, cette procédure va supprimer un nombre important de fausses lectures mais ce n'est pas une solution complète au problème, comme dans le cas ou un endommagement est très important, les éléments qui sont faiblement endommager ne seront pas détecter Figure (6).

L'analyse des figures (3 à 14) selon l'indicateur α_{II} , nous mène aux mêmes remarques que l'indicateur γ_{II} , la présence d'un défaut très important gêne la détection des petit défauts figure (7,12),des petites perturbations de α_{II} aux voisinage d'un défaut sont fréquentent figure (6-7-11-12-14), donc on trace une limite de validation au niveau 0,5 pour le cas test 1 et 0,7 pour les cas test 2 .

Dans le cas de l'indicateurs β_{II} , la majorités des défauts de rigidités introduits aux cas test1 et 2 on été détecter, hormis les cas ou la structure contient un défaut important figure (5-12), la limite de validation du défaut de rigidité est de 0,5 pour le cas test 1et 0,7 pour le cas test 2, ainsi on va éliminé la plupart des fausses détections mais il y'aura toujours une probabilité de détecter des faux défauts figure (4-8-12-13). Si non l'indicateur β_{II} est fiable lorsqu'il est appliqué à une structure qui contient des défauts de même ampleur.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Dans le cadre de ce mémoire nous nous sommes focalisés sur les méthodes de détection et localisation d'endommagement dans les structures mécaniques, l'étude bibliographique que nous avons menée sur les méthodes vibratoires d'identification d'endommagement nous a guidée vers le choix de la méthode de l'indicateur d'endommagement, cette méthode a fait l'objet de beaucoup de travaux où les auteurs ont conclu sur ses avantages et ses inconvénients, et de même les travaux qu'on a menés dans cet axe nous ont permis de tirer les conclusions suivantes.

La méthode de l'indicateur d'endommagement, appliquée aux paramètres modaux et aux FRFs a manifesté une très bonne stabilité par rapport aux bruits de mesure, son application sur les deux cas test avec un taux de bruit de 10 % le confirme, de plus on peut la mettre en œuvre en sélectionnant un nombre très réduit de capteurs, 24 pour le cas test 1, et 26 pour le cas test 2, soit un taux de 30% de la totalité des d.d.l. de la structure, les d.d.l. non observés sont reconstruits en utilisant la projection sur la sous-base modale du modèle éléments finis, la sous-base modale de projection est évaluée au sens des moindres carrés, cette procédure est applicable aux FRFs ainsi qu'aux vecteurs propres.

L'indicateur γ_{II} qui exploite les FRFs affiche des résultats satisfaisants en supposant les matrices élémentaires d'amortissement connus, cependant l'indicateur γ_I qui exploite les paramètres modaux a échoué dans la détection de défauts d'amortissement, par contre il affiche ceux de la rigidité et de la masse, nous présumons que l'emploi du modèle proportionnel d'amortissement est à l'origine de ce fait.

L'utilisation des indicateurs β_I et β_{II} constitue un outil efficace pour l'identification des défauts de rigidité dans le cas où ces deux indicateurs sont combinés, c'est-à-dire dans le cas où les déformées propres sont reconstruites à partir des mesures de FRFs, nous identifions d'abord les endommagements avec l'indicateur β_{II} puis nous confirmons avec β_I , le fait que les deux convergent vers les mêmes défauts augmente le degré de confiance sur l'identification. Il faut noter que l'utilisation de l'indicateur β_{II} ne peut être employée avec des fréquences qui contiennent des résonances si non celui-ci affiche des résultats insatisfaisants.

Le fait que nous avons adopté le même concept pour l'indicateur de masse et celui de la rigidité, c'est-à-dire la comptabilisation des modes, les mêmes fractions d'énergies et la même normalisation, le comportement des indicateurs alpha est identique à ceux de β , les mêmes conclusions ont été tirées de l'étude des indicateurs α_I et α_{II} .

La méthode de l'indicateur d'endommagement fournit de bons résultats juste en utilisant les premiers modes propres de la structure ou bien quelques points FRFs, dans notre cas 14 parmi 66 modes et FRF ont été employés pour le cas test 1 et 16 sur 60 pour le cas test 2, ces caractéristiques donnent à cette méthode le privilège d'être classée parmi les méthodes les plus pratiques dans le domaine de l'identification paramétrique.

Conclusion générale

Cependant aucune information sur l'intensité de l'endommagement n'est fournie, la seule certitude que l'on peut tirer est que, tous les défauts que présente une structure (jusqu'à quatre défauts) peuvent être détectés, sauf dans le cas où un défaut est très important par rapport aux autres, ou bien le cas d'une structure complexe, est-ce que ces deux dernières remarques sont marquées plus le nombre de défauts détectables diminue.

À travers l'application de l'indicateur exploitant les FRFs et les paramètres modaux sur les différents scénarios d'endommagement, nous avons observé de petites perturbations aux voisinages de chaque défaut, la solution conventionnelle à ce problème est de tracer une limite, où les bonnes valeurs de l'indicateur sont celles qui dépassent cette limite, si non le défaut détecté ne sera pas validé malgré qu'il soit positif, et plus grande sera la valeur de cette limite, plus le risque de louper un défaut existant est grand, cette approche n'est pas vraiment satisfaisante car de faux défauts seront détectés. En vue de la nature de cet indicateur, le tracer d'une limite est évident et une étude statistique appropriée devrait être menée dans ce sens.

Annexe A : quelques commandes MATLAB

Tableau. A.1. Commandes Générales

Gestions des commandes et des fonctions	Gestion des variables et de l'espace de travail
help aide what listing du nom des M_files présents type impression d'un M_file lookfor recherche d'une entrée dans le help which localise les fonctions et fichiers demo lance la démonstration diary sauvegarde le texte d'une session MatLab	who affiche les variables courantes whos affiche les variables en format long save sauve l'espace de travail sur disque load charge l'espace de travail clear efface la mémoire quit quitter MatLab (aussi exit)

Tableau. A.2. Opérateurs

Opérateurs courants	Opérations sur les Tableaux	Opérateurs Relationnels	Opérateurs Logiques
+ addition \ division à gauche * multiplication ^ puissance / division à droite - soustraction ' transpose conjugué .' transpose	+ addition - soustraction .\ division à gauche .^ puissance ./ division à droite .* multiplication	.< inférieur à .> supérieur à .<= inférieur ou égal à .>= supérieur ou égal à .== égal à .~= différent	& et ou ~ non xor exclusif

Tableau. A.3. Instructions

Instruction de contrôle	Instructions spécifiques
if test conditionnel else complète if else if complète if end terminaison de if, for et while for instruction de répétition avec compteur while instruction de répétition avec test break interrompt une boucle for ou while return retour error affiche un message et interrompt l'exécution	input indicateur d'attente d'entrée menu génère un menu de choix pour l'utilisateur pause attente function définition de fonction global définit les variables comme globales = assignation . point décimal ... indique une ligne suite , séparateur d'arguments ou d'instructions ; fin de lignes (matrices) ou suppression de l'affichage % commentaires

Tableau. A.4. Noms réservés

- Instruction de contrôle	Instructions spécifiques
if test conditionnel else complète if Variables prédéfinies ans nom donné à l'évaluation d'une expression sans assignation realmax plus grand nombre flottant realmin plus petit nombre flottant positif pi , j [(-1)] inf NaN Not a Number etime durée d'exécution size renvoie la taille d'une matrice length renvoie la longueur d'un vecteur disp affiche une matrice de texte	input indicateur d'attente d'entrée menu génère un menu de choix pour l'utilisateur Matrices prédéfinies zéros matrice de 0 ones matrice de 1 eye matrice identité diag matrice diagonale rand nombres aléatoires (répartition uniforme) randn nombres aléatoires (répartition normale) Fonctions trigonométriques sin, asin, sinh, asinh cos, acos, cosh, acosh, tan, atan, tanh, atanh, cot, acot, coth, acoth

Tableau. A.5. Fonctions mathématiques élémentaires

abs valeur absolu ou module angle argument d'un complexe sqrt racine carrée real partie réelle imag partie imaginaire conj complexe conjugué round arrondi à l'entier le plus proche exp exponentiel log log népérien log10 log décimal	
--	--

Tableau. A.6. Matrices

Décompositions et factorisations de Matrices	Fonctions de Matrices
inv inversion lu décomposition LU qr décomposition QR nnls moindres carrés non-négatif orth orthogonalisation eig valeurs et vecteurs propres	logm logarithme sqrtm racine carrée funm ex: funm (A,'sin') donne sin(A) poly polynôme caractéristique det déterminant Conditionnement cond suivant norme L2 ([(max)/(min)]) rcond . 1 bon, 0 mauvais norm normes L1,L2,Lp et L rank rang

courbe de conditionnement pour le choix du nombre de ddl capteurs optimums

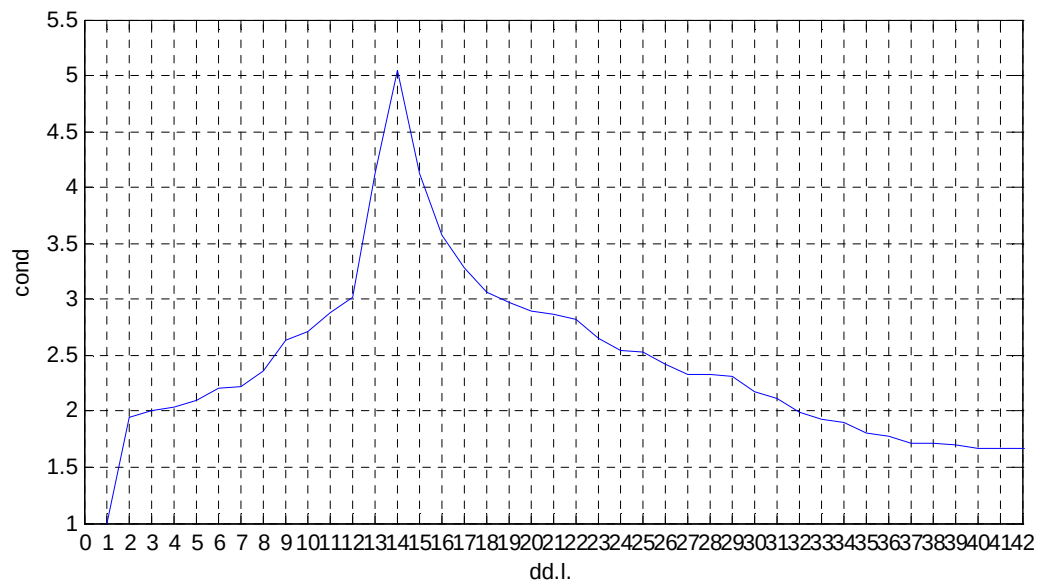


Fig. B.1. Evolution du conditionnement de la matrice $Y_c^{(a)}$ en fonction des d.d.l.

Cas test 1

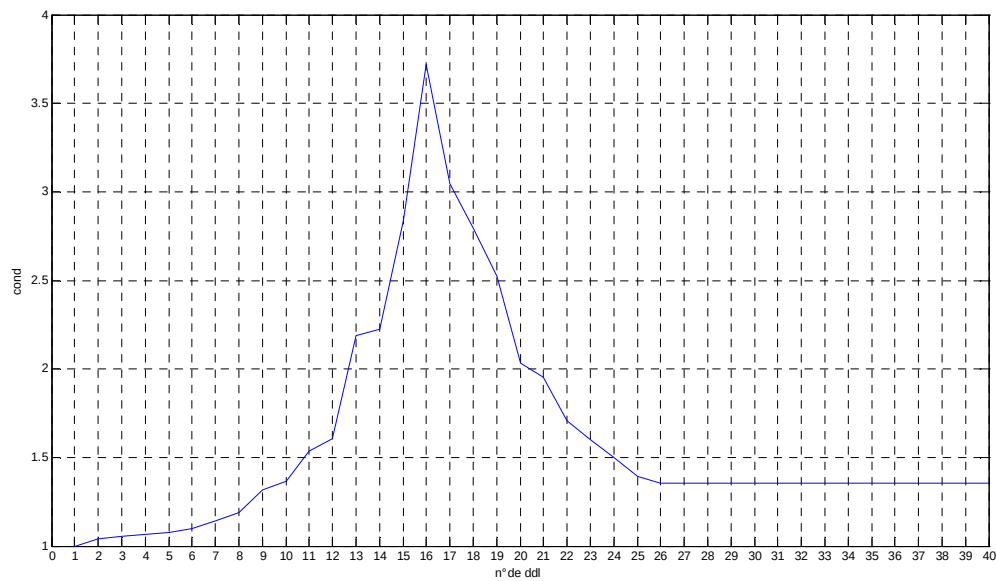


Fig. B.2. Evolution du conditionnement de la matrice des vecteurs propres $Y_c^{(a)}$ en fonction des d.d.l. Cas test 2

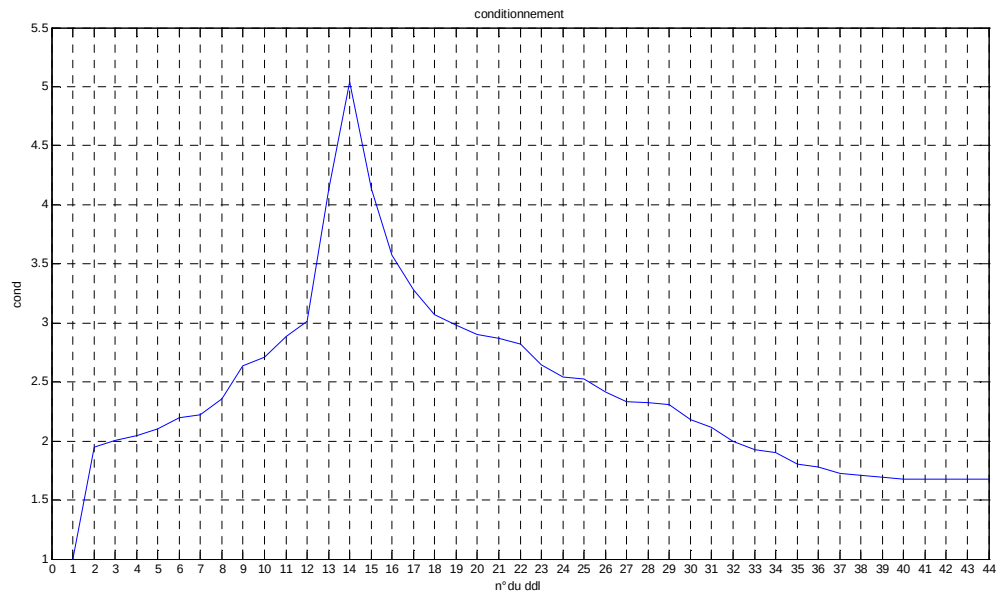


Fig. B.3. Evolution du conditionnement de la matrice des FRF $y_c^{(a)}$ en fonction des d.d.l.

Cas test 1

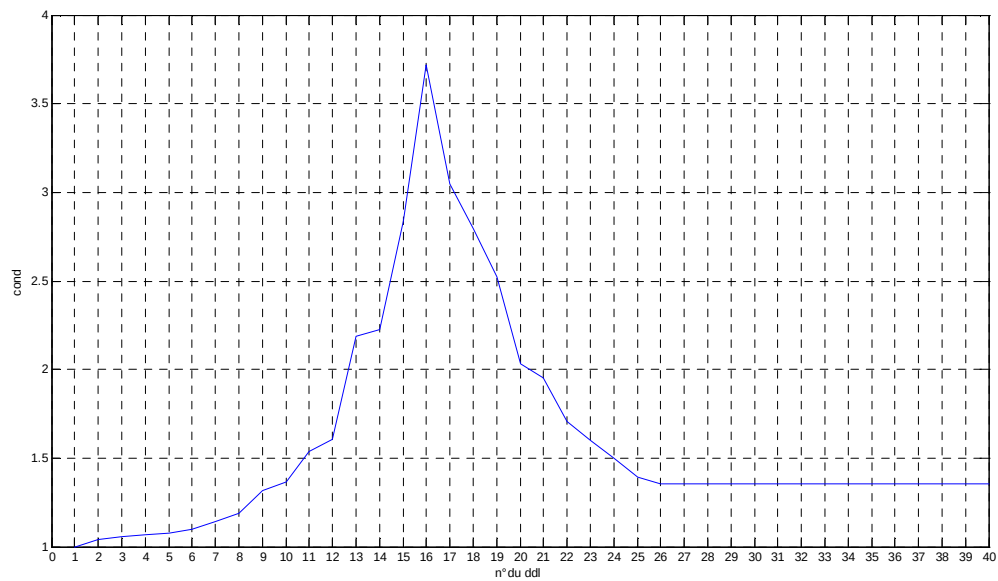


Fig. B.4. Evolution du conditionnement de la matrice des FRF $y_c^{(a)}$ en fonction des d.d.l.

Cas test 2

Annexe C : comportement de beta_I par apport a un défaut important :

Ces figures exposent l'influence d'un endommagement important dans une structure sur le comportement de l'indicateur beta vis-à-vis des petits défauts. Ces simulations sont faites sur le cas test 1, on fixe le taux d'endommagement de l'élément 7 à 10% (0,1) et on varie progressivement le taux d'endommagement de l'élément 16, une fois celui-ci atteint 90%, on fait l'inverse, on fixe le 16^{ème} et on varie le taux d'endommagement du 7^{ème} élément progressivement.

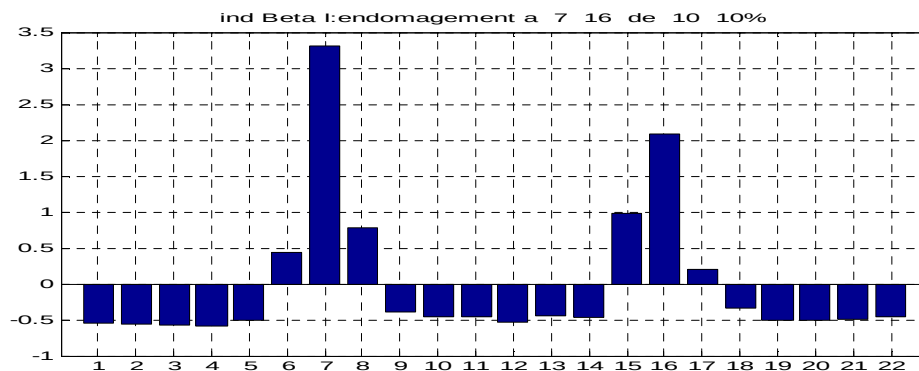


Fig. C.1.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.1-0.1

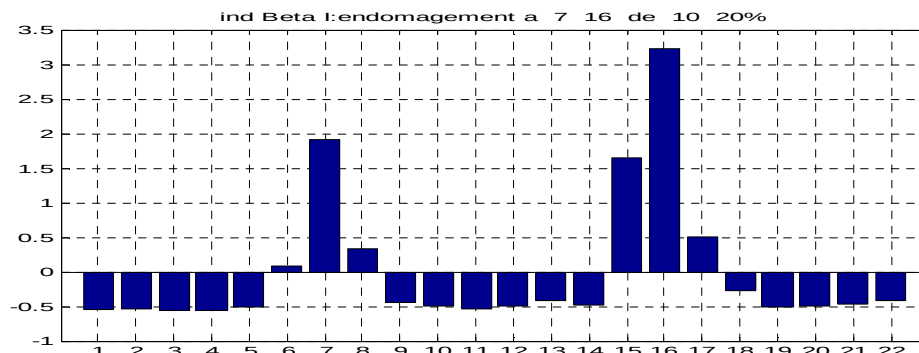


Fig. C.2.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.1-0.2

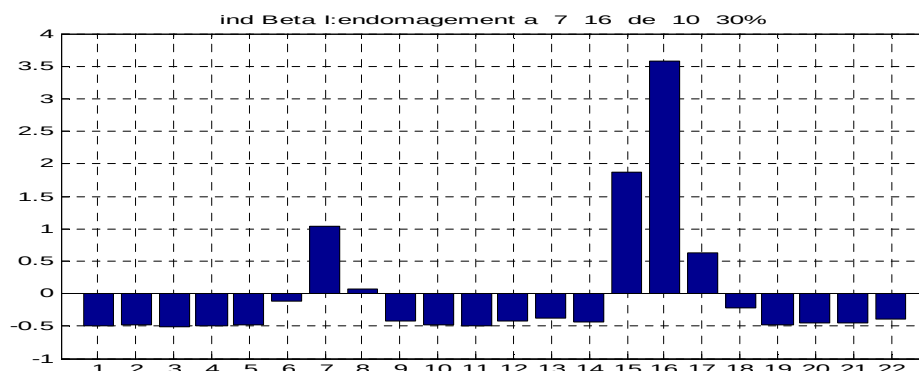


Fig. C.3.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.1-0.3

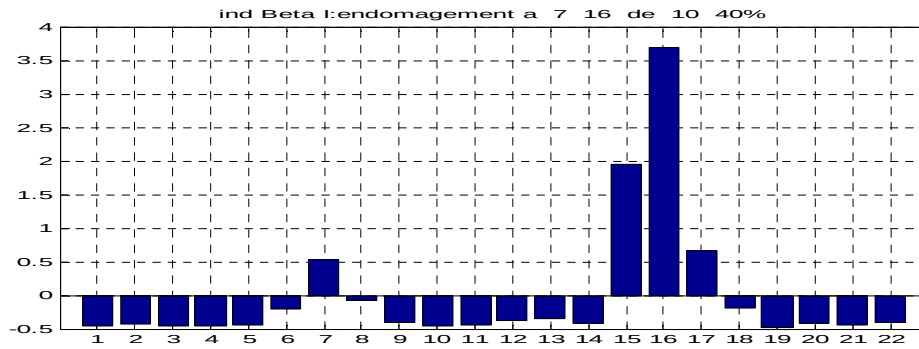


Fig. C.4.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.1-0.4

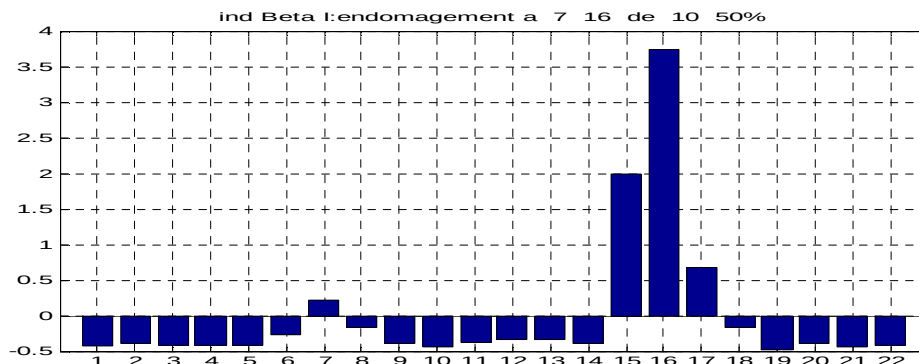


Fig. C.5.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.1-0.5

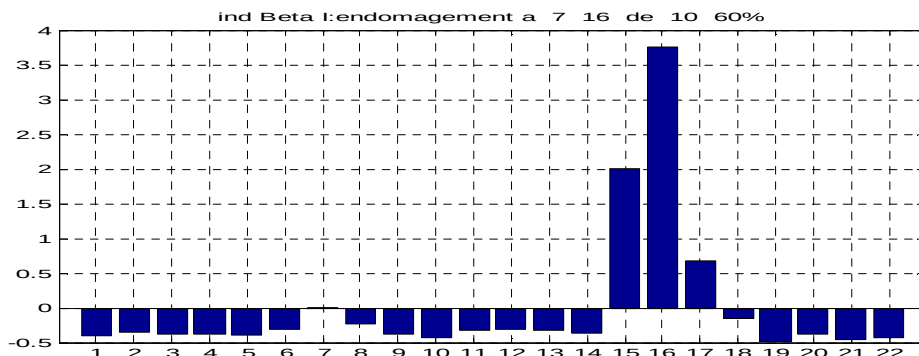


Fig. C.6.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.1-0.6

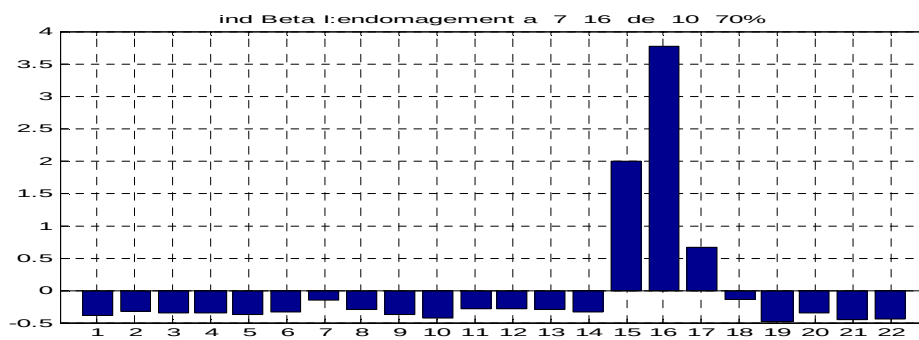


Fig. C.7.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.1-0.7

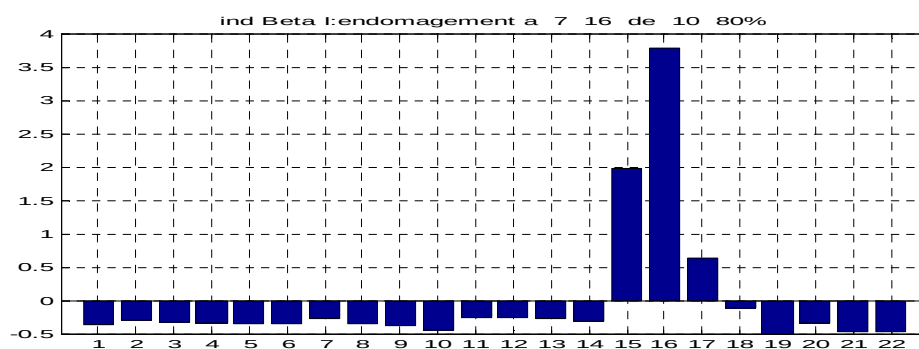


Fig. C.8.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.1-0.8

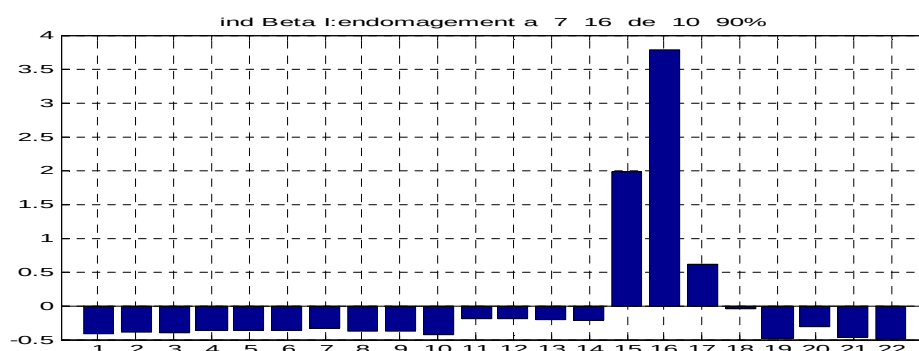


Fig. C.9.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.1-0.9

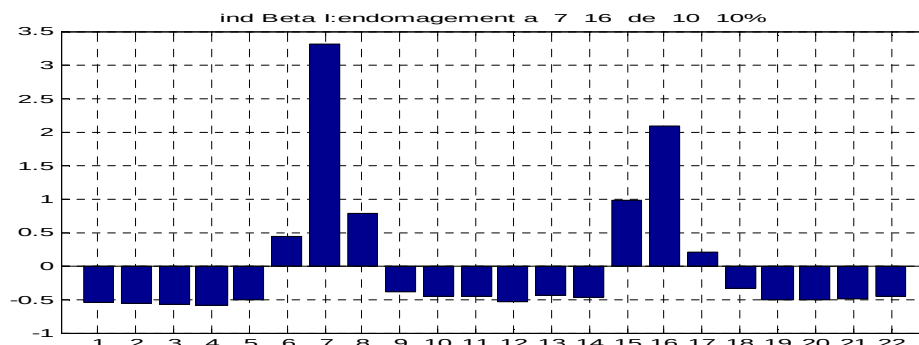


Fig. C.10.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.1-0.1

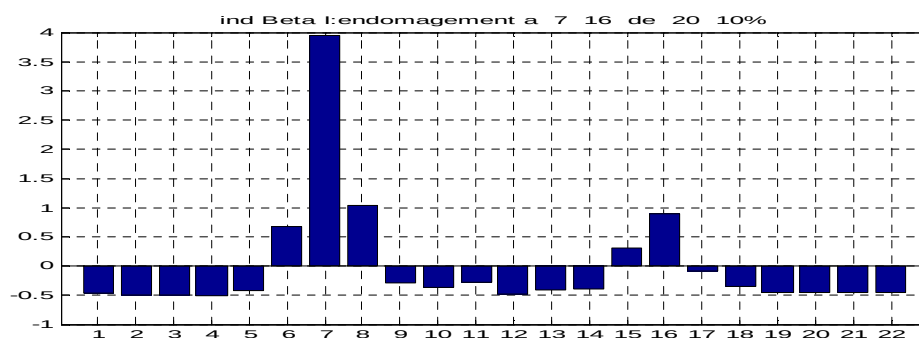


Fig. C.11.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.2-0.1

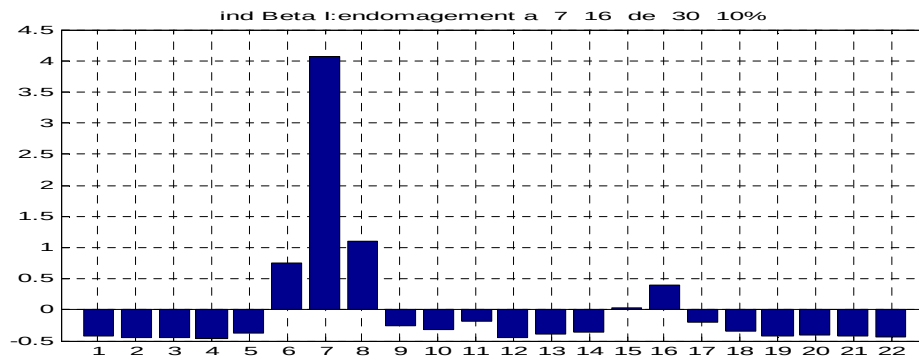


Fig. C.12.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.3-0.1

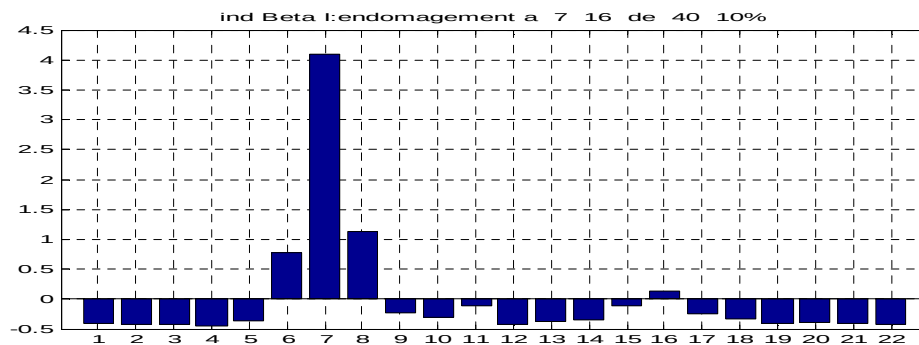


Fig. C.13.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.4-0.1

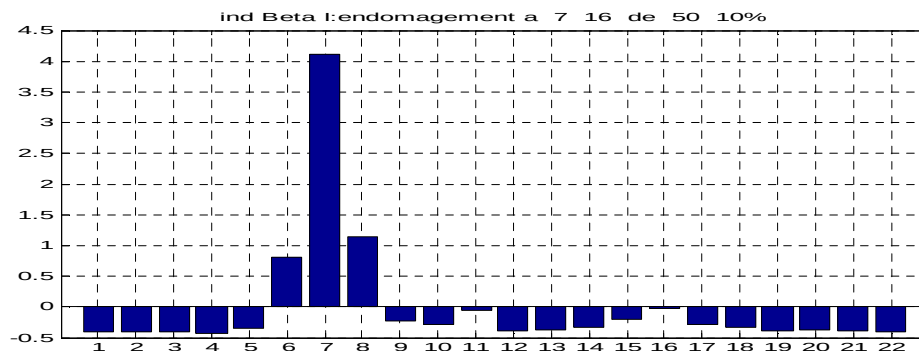


Fig. C.14.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.5-0.1

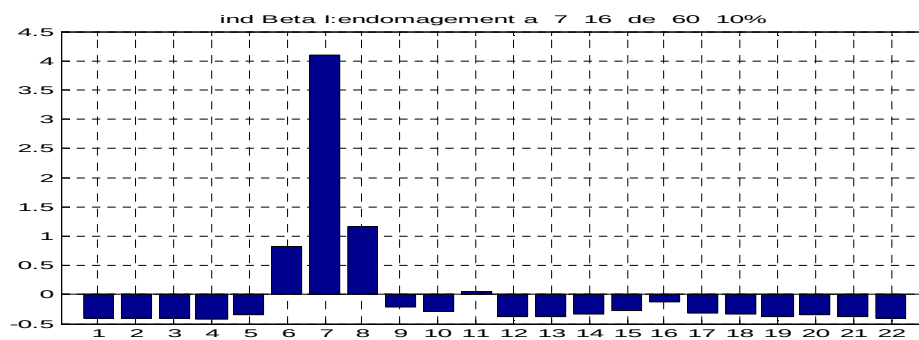


Fig. C.15.: endommagement de rigidité à l'élément 7-16 de 0.6-0.1

Références bibliographiques

- [1] - Berman, A. and Nagy, E. (1983). Improvement of a large analytical model using test data. *AIAA journal*, 21(8):1168–1173.
- [2] - Baruch, M. and Bar Itzhack, I. Y. (1978). Optimal weighted orthogonalization of measured modes. *AIAA Journal*, 16(4):346–351.
- [3] - Levin, R. and Lieven, N. (1998b). Required precision and valid methodologies for dynamic finite element model updating. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 120(3):733–741.
- [4] - Friswell, M. and Mottershead, J. (1995). *Finite element model updating in structural dynamics*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Netherlands, 1st edition.
- [5] - Link, M. (2000). *Structural Dynamics 2000*, chapter Updating of analytical models - Review of numerical procedures and applications aspects. Research Studies Press Ltd, Baldock, UK.
- [6] - Natke, H. (1998). Problems of model updating procedures: a perspective resumption. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):65–74.
- [7] - Morassi, A. and Rovere, N. (1997). Localizing a notch in a steel frame from frequency measurements. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(5):422–432.
- [8] - Maeck, J., Abdel Wahab, M., Peeters, B., De Roeck, G., De Visscher, J., De Wilde, W., Ndambi, J., and Vantomme, J. (2000). Damage identification in reinforced concrete structures by dynamic stiffness determination. *Engineering Structures*, 22(10):1339–1349.
- [9] - Jang, J., Yeo, I., Shin, S., and Chang, S. (2002). Experimental investigation of system-identification-based damage assessment on structures. *Journal of Structural Engineering*, 128(5):673–682.
- [10] - Hailing, M., Muhammad, I., and Womack, K. (2001). Dynamic field testing for condition assessment of bridge bents. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 127:126–135.
- [11] - Papadopoulos, L. and Garcia, E. (1998). Structural damage identification: A probabilistic approach. *AIAA Journal*, 36(11):2137–2145.
- [12] - Marwala, T. and Heyns, P. (1998). Multiple-criterion method for determining structural damage. *AIAA Journal*, 36(8):1494–1501.
- [13] - Cha, P. and Tuck-Lee, J. (2000). Updating structural system parameters using frequency response data. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(12):1240–1246.
- [14] - Lin, R. and Ewins, D. (1994). Analytical model improvement using frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8(4):437–458.
- [15] - Zang, C., Grafe, H., and Imregun, M. (2001). Frequency-domain criteria for correlating and updating dynamic finite element models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(1):139–155.
- [16] Kye-Si Kwon., Rong-Ming Lin., 2004., «Frequency selection method for FRF-based model updating», *Journal of Sound and Vibration*, 278(2004):285–306.
- [17] - Casas, J. and Aparicio, A. (1994). Structural damage identification from dynamic-test data. *Journal of structural engineering* New York, N.Y., 120(8):2437–2449.

- [18] - Gola, M., Somà, A., and Botto, D. (2001). On theoretical limits of dynamic model updating using a sensitivity-based approach. *Journal of Sound and Vibration*, 244(4):583–595.
- [19] - Fritzen, C. and Kiefer, T. (1992). Localization and correction of errors in finite-element-models based on experimental data. *Proceedings of the 17th International Seminar on Modal Analysis*, pages 1581–1596.
- [20] - Natke, H. and Cempel, C. (1991). Fault detection and localization in structures: A discussion. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 5(5):345–356.
- [21] - Fritzen, C., Kiefer, T., and Haenisch, K. (1993). Schadenserkennung mit hilfe von fehlerlokalisationsverfahren. *Proceedings 4 Tagung ueber Dynamische Probleme - Modellierung und Wirklichkeit, Schriftenreihe des Curt-Risch-instituts*, pages 287–307.
- [22] - Levin, R. and Lieven, N. (1998a). Dynamic finite element model updating using simulated annealing and genetic algorithms. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):91–120.
- [23] - Fritzen, C., Jennewein, D., and Kiefer, T. (1998). Damage detection based on model updating methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):163–186.
- [24] - Friswell, M., Penny, J., and Garvey, S. (1997). Parameter subset selection in damage location. *Inverse Problems in Engineering*, 5(3):189–215.
- [25] - Law, S., Chan, T., and Wu, D. (2001). Efficient numerical model for the damage detection of large scale structure. *Engineering Structures*, 23(5):436–451.
- [26] - Möller, P. and Friberg, O. (1998). Updating large finite element models in structural dynamics. *AIAA Journal*, 36(10):1861–1868.
- [27] - Berman, A. (2000). Inherently incomplete finite element model and its effects on model updating. *AIAA journal*, 38(11):2142–2146.
- [28] - Baruch, M. (1997). Modal data are insufficient for identification of both mass and stiffness matrices. *AIAA Journal*, 35(11):1797–1798.
- [29] - Coppolino R.N., Rubin S., 1980, «Detectability of structural failures in offshore platforms by ambient vibration monitoring», In *Proceedings of the 12th Annual Offshore Tech. Conf.*, 101-110.
- [30] - Salawu O.S., Williams C., 1995a, «Bridge Assessment Using Forced-Vibration Testing», *Journal of Structural Engineering*, 121(2), 161-173.
- [31] - Salawu O.S., Williams C., 1995b, «Review of full-scale dynamic testing of bridge structures», *Engineering structures* 17(2), 113-121.
- [32] - Rytter A., 1993, «Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures», PhD. Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark.
- [33] - Inman, D., Farrar, C., Lopes Junior, V., and Steffen Junior, V. (2005). *Damage prognosis: for aerospace, civil and mechanical systems*. John Wiley & Sons.

Références bibliographiques

- [34] - Kessler, S. (2002). Piezoelectric-based in-situ damage detection of composite materials for structural health monitoring systems. PhD thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, USA.
- [35] - Humar, J., Bagchi, A., and Xu, H. (2006). Performance of vibration-based techniques for the identification of structural damage. *Structural Health Monitoring*, 5(3):215–241.
- [36] - Kato M., Shimada S., 1986, «Vibration of PC Bridge During Failure Process», *ASCE Journal of Structural Engineering*, 112, 1692-1703
- [37] - Kirmser, P. (1944). The effects of discontinuities on the natural frequency of beams. In *Proceedings of American Society of Testing and Materials*, volume 44, pages 897–904.
- [38] - Fox C.H.J., 1992, «The Location of Defects in Structures: A Comparison of the Use of Natural Frequency and Mode Shape Data», In *Proceedings of IMAC 10*, 522-528.
- [39] - Gudmundson, P. (1982). Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 30(5):339–353.
- [40] - Zak, A., Krawczuk, M., and Ostachowicz, W. (1999). Vibration of a laminated composite plate with closing delamination. In *Structural damage assessment using advanced signal processing procedures*, *Proceedings of DAMAS '99*, University College, Dublin, Ireland.
- [41] - Zou, Y., Tong, L., and Steven, G. (2000). Vibration-based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures - a review. *Journal of Sound and Vibration*, 230(2):357–378.
- [42] - Allemang, R. and Brown, D. (1982). Correlation coefficient for modal vector analysis. In *Proceedings of the International Modal Analysis Conference & Exhibit*, pages 110-116.
- [43] - West, W. (1984). Illustration of the use of modal assurance criterion to detect structural changes in an orbiter test. In *Proceedings of Air Force Conference on Aircraft Structural Integrity*, pages 1–6.
- [44] - Pandey, A. and Biswas, M. (1994). Damage detection in structures using changes in flexibility. *Journal of Sound and Vibration*, 169(1):3–17.
- [45] - Pandey, A., Biswas, M., and Samman, M. (1991). Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of Sound and Vibration*, 145(2):321–332.
- [46] - Ho, Y. and Ewins, D. (2000). On the structural damage identification with mode shapes. In *Proceedings of the european COST F3 conference on system identification & structural health monitoring*, pages 677–684. Universidad Politecnica de Madrid, Spain.
- [47] - Lestari, W., Qiao, P., and Hanagud, S. (2006). Curvature mode shape-based damage assessment of carbon/epoxy composite beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, pages 1–20.
- [48] - Kim J.T., Stubbs N., 1993, «Assessment of the Relative Impact of Model Uncertainties on the Accuracy of Global Nondestructive Damage Detection in Structures», Report, New Mexico University.
- [49] - Stubbs, N., Kim, J., and Farrar, C. (1995). An efficient and robust algorithm for damage localization in offshore platforms. In *13th International Modal Analysis Conference*, pages 543–546.

Références bibliographiques

- [50] - Law, S., Shi, Z., and Zhang, L. (1998). Structural damage detection from incomplete and noisy modal test data. *Journal of Engineering Mechanics*, 124:1280–1288.
- [51] - Farrar, C. and Doebling, S. (1999). Modal analysis and testing, chapter Damage detection II: field applications to large structures. *Nato science series*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Netherlands.
- [52] - Cornwell, P., Doebling, S., and Farrar, C. (1999). Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures. *Journal of Sound and Vibration*, 224(2):359–374.
- [53] - Worden, K., Manson, G., and Allman, D. (2000). An experimental appraisal of the strain energy damage location method. In *Damage Assessment of structures, Proceedings of the 4th international conference of damage assessment of structures*, Wales, UK, volume 204-205, pages 35–46.
- [54] - Kim, J., Ryu, Y., Cho, H., and Stubbs, N. (2003). Damage identification in beam-type structures: frequency-based method vs mode-shape-based method. *Engineering Structures*, 25(1):57–67.
- [55] - [Samir TIACHACHT, Amar BOUAZZOUNI.] "Méthode d'identification d'endommagements dans les structures mécaniques par mesures vibratoires". Département de Génie Mécanique Université de Tizi-Ouzou 2007.
- [56] - ALVANDI, Alireza. (2003). Contribution à l'utilisation pratique de l'évaluation dynamique pour la détection d'endommagements dans les ponts. thèse doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- [57] - Yan, A. and Golinval, J. (2005). Structural damage localization by combining flexibility and stiffness methods. *Engineering Structures*, 27(12):1752–1761.
- [58] - Kashif SAEED, (2010). Contribution à la surveillance de l'intégrité de structures. thèse doctorat, l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Spécialité "Automatique et Traitement du Signal" Laboratoire des Procédés et Ingénierie en Mécanique et Matériaux
- [59] - [Krishnamoorthy, 1987]
- [60] - ROCKY, K.C., EVANS, H.R., GRIFFITHS, D.W., NETHERCOT D.A., *introduction à la méthode des éléments finis*, Eyrolles, Paris, 1979, 228 pages
- [61] - [Kerguignas, 1977]:
- [62] - [Imbert 1979]
- [63] - "Amortissement" : Françoise GANTENBEIN et Michel LIVOLANT (CEA-DMT) in "Génie Parasismique" Ouvrage collectif - Presses de l'E.N.P.C. (1985)
- [64] - "Amortissement dans les calculs de structures" : Forum IPSI - Φ^2 AS Volume XVIII N°2 (Juin 1994)
- [65] - Emmanuel BOYERE ; Code_Aster Version 10; titre "Modélisation de l'amortissement en dynamique linéaire" (2011)

Références bibliographiques

[66] - “Systèmes a N degrés de libertés –modes propres-analyse modale” : école d’ingénieurs ECAM.lyon

[67] - H.Y. Hwang « Damage detection in structures using a few frequency response Measurements » Department of Aerospace Engineering, Sejong University, Kwangjin-Gu, Kunja-dong, Seoul 143-747, South Korea, School of Mechanical Engineering, Kyungpook National University, Daegu 702-701, South Korea Received 22 January 2002; accepted 4 February 2003

[68] *S.J. HUANG*

[69] LALLEMENT G.,COGAN S.,ADRIAMBOLOLONA G « Optimal of selection eo the measure degrees of freedom and application to a method of parametric correction” proceedings of 9th international modal analysis conference, Florence,Italy,Apr.15-18-1991,pp.369-375.