

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU



Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Civil



MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Génie Civil

Option : Modélisation et Calcul Non Linéaire

Présentée par

ZARGA Djaloul

Thème :

Simulation de l'effet des fibres métalliques sur le module de cisaillement des poutres

Devant le jury composé de :

Mr BOUAFIA Youcef	Professeur	UMMTO Président
Mr KACHI Mohand Saïd	Professeur	UMMTO Rapporteur
Mr DAHMANI Lahlou	Professeur	UMMTO Examineur
Mr SAAD Mohammed	Maître de conférences(A)	UMMTO Examineur

Soutenue le : 13/06/ 2015

REMERCIEMENTS

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements au Professeur KACHI Mohand Saïd, Vice Doyen Chargé de la Post Graduation et de la Recherche Scientifique et les Relations Extérieures au faculté du Génie de la construction de l'Université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou, d'avoir bien voulu proposer et diriger ce mémoire et pour m'avoir permis de le réaliser dans d'excellentes conditions. Son appui, ses précieux conseils et orientations m'ont beaucoup apporté quant à la réalisation de ce travail.

Je remercie vivement Monsieur BOUAFIA Youcef, Professeur à l'UMMTO, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être président du jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Je remercie Mr DAHMANI Lahlou Professeur à l'UMMTO et Mr SAAD Mohammed Maître de conférences (A) à l'UMMTO, d'avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du corps enseignant qui a contribué à ma formation.

Mes remerciements vont également à l'ensemble de mes collègues des sections modélisation et calcul non linéaire et structures et matériaux, pour leur cordialité et leur agréable compagnie.

Enfin, je rends hommage à toute ma famille et à mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années d'études.

DÉDICACES

Je tiens à dédier ce travail à :

- ❖ Mes très chers parents
- ❖ Mes chères frères et sœurs.
- ❖ Tous mes amis (es) et toute la famille.

RÉSUMÉ

Plusieurs études expérimentales et théoriques ont été effectuées de part le monde sur le comportement des éléments en béton armé ou précontraint en cisaillement. Ainsi plusieurs études ont été orientées vers la construction d'un modèle général de comportement du béton armé en cisaillement. Il a été remarqué que l'angle d'inclinaison des directions principales des contraintes et des déformations n'est en fait qu'une condition parmi les conditions de compatibilité qui doit être satisfaite au même titre que les conditions d'équilibre. Dans le cas béton armé ou précontraint plusieurs études ont été menées au sein de notre département qui ont montré l'importance de la rigidité de cisaillement dans le calcul global des poutres.

Il s'agit dans cette étude d'introduire le comportement des fibres métalliques dans un modèle déjà développé pour l'analyse du comportement en cisaillement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et /ou précontraint, renforcées par des fibres métalliques, soumises à l'effet combiné d'un moment fléchissant, d'un effort normal, et d'un effort tranchant. Pour une section de poutre donnée, elle est définie par une succession de couches de béton et d'éléments longitudinaux d'acier. Chaque couche est définie par sa hauteur h_i , sa largeur b_i , et sa position par rapport à une extrémité de la section Y_i . Chaque élément longitudinal d'acier est également défini par sa section transversale, le seuil de plasticité, la déformation initiale de précontrainte, et sa position par rapport à une extrémité de la section. Enfin, les fibres métalliques seront quant à elles définies par un pourcentage en volume. Le modèle devra permettre alors l'analyse des poutres avec des formes de section et des détails de ferraillement variables. Il sera alors capable de prédire l'influence des fibres métalliques sur la rigidité de cisaillement de ce dernier en fonction du pourcentage de fibres injectées dans le béton. Chaque couche de béton et chaque élément longitudinal d'acier est alors analysé séparément mais la condition d'équilibre de la section est satisfaite globalement. Enfin le modèle est développé pour le cas de sollicitations planes $\sigma_z = 0$, on peut alors étudier des sections soumises à une flexion composée avec un effort tranchant.

Mots clés :

Effort tranchant, comportement bidimensionnel, béton de fibres, béton précontraint, rigidité de cisaillement.

ABSTRACT

Several experimental and theoretical studies have been conducted around the world on the behavior of reinforced and prestressed concrete shear elements. And several studies have summarized oriented construction of a general model of behavior of reinforced concrete shear. It was noted that the angle of inclination of the main directions of the stress and strain is actually a condition from the compatibility conditions which must be satisfied as well as the equilibrium conditions. Several studies have been conducted, in the case reinforced concrete or prestressed, in our department which show the importance of the shear stiffness in the overall calculation of the beams.

In this study we will introduce the behavior of metallic fiber model already developed for the analysis of shear behavior until failure of reinforced concrete beams and / or prestressed, reinforced with metal fibers, subject to the combined effect of bending moment, a normal force and a shear force. For a given beam section, it is defined by a layer of concrete of succession and of longitudinal steel elements. Each layer is defined by its height h , the width b_i , and its position relative to an end of the YGI section. Each steel longitudinal element is also defined by its cross-section, the yield stress, the initial deformation prestressing, and its position relative to an end of the last section, the metal fibers are in turn defined by a percentage volume. The model then has to allow analysis of beams with cross-sectional shapes and varying details as reinforcement. It will then be able to predict the influence of metal fibers at the shear rigidity of the latter based on the percentage of fibers in the concrete injected. Each layer of concrete and steel each longitudinal element is then analyzed separately but the equilibrium condition of the section is generally satisfied. Finally, the model is developed for the case of plane stress $\sigma_z = 0$, we can then study sections subjected to bending made with a sharp effort.

Keywords:

Shear loading, two-dimensional behavior, concrete fiber, prestressed concrete, shear stiffness.

LISTE DES FIGURES

Figure I.1	Rôle des fibres dans la matrice de béton.	4
Figure I.2	Encadrement d'un DEHOUSSE [DEH. 75].	5
Figure I.3	Effets des fibres sur l'affaissement du béton au cône d'Abrams [JEJ. 77].	8
Figure I.4	Distribution de la contrainte de cisaillement à la surface d'une fibre Droite LIM et al [LIM. 87].	10
Figure I.5	Diagramme contrainte - déformation des essais en compression avec asservissement, ZHAN [ZHA. 91].	11
Figure I.6	Courbe charge-déplacement diamétrale par fendage en fonction du pourcentage de fibres, NANNI [NAN.88].....	13
Figure I.7	Courbe charge-déplacement diamétral par fendage pour différents matériaux, ZHAN [ZHA. 91].	14
Figure I.8	Evolution de la résistance en flexion du béton de fibres et du béton témoin en fonction du temps(éprouvettes conservées dans l'eau ou dans différentes solutions de Na ₂ SO ₄), NEMERGEER [NEM. 91].	17
Figure I.9	Diagramme contrainte - déformation du béton en compression simple, SARGIN [SAR. 68].	21
Figure I.10	Diagramme contrainte - déformation en compression, ABSI et NAAMAN [ABS. 86].....	23
Figure I.11	Comportement du béton de fibres en traction, MAZARS [MAZ. 88].....	25
Figure I.12	Comportement du béton de fibres en traction, LIM [LIM. 87].....	26
Figure I.13	Diagramme contrainte-déformation simplifié du béton de fibres, LIM et al [LIM. 87].....	26
Figure I.14	Comportement du béton de fibres en traction, BOUAFIA [BOUA. 87]...29	
Figure I.15	Orientation bidimensionnelle des fibres, BOUAFIA [BOUA. 87].....	30
Figure I.16	Relation contrainte-déformation, ZHAN [ZHA. 91].	32
Figure I.17	Courbe effort -ouverture de fissure [BOUA. 98].....	34
Figure 1.18	Relation effort -ouverture de fissure [BOUA.02].....	36
Figure I.19	Loi de comportement en traction du béton armé de fibres d'acier [BOUA.02].....	37

Figure II.1	Diagramme représentant la loi de comportement du béton.	39
Figure II.2	Loi de comportement uniaxiale du béton en compression (Sargin).	40
Figure II.3	Comportement de béton ordinaire avant fissuration.	42
Figure II.4	Diagramme contrainte - déformation instantanée du béton sur le bord tendu, Grelat (1978).	42
Figure II.5	Loi de comportement en traction du béton armé de fibres d'acier [BOUA.02].	43
Figure II.6	Diagramme contrainte -déformation d'un acier naturel (Loi élasto-plastique parfaite).	45
Figure II.7	Comportement des aciers écrouis.	46
Figure II.8	Comportement des aciers précontraints.	46
Figure II.9	Section de béton découpée en tables trapézoïdales.	47
Figure II.10	Description d'une section typique d'une poutre en béton armé et précontraint.	49
Figure II.11	Organigramme simplifié de la recherche de l'équilibre de l'état d'équilibre d'une section.	60
Figure III.1	Section de poutre discrétisée en couches.	65
Figure III.2	Loi de comportement en traction du béton armé de fibres d'acier [BOUA.02].	69
Figure III.3	Forces agissant sur une couche de béton entre deux sections.	71
Figure III.4	Organigramme général de l'étude d'une section.	79
Figure IV.1	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SA3.	83
Figure IV.2	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SA4.	83
Figure IV.3	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre CF1.	84
Figure IV.4	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SK1.	84
Figure IV.5	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SK2.	85

Figure IV.6	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SK3.....	85
Figure IV.7	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SK4.....	86
Figure IV.8	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP1.	86
Figure IV.9	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP2.	87
Figure IV.10	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP3.	87
Figure IV.11	Courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA3 avec longueur de fibres $l_f=30\text{mm}$ et $\tau =7 \text{ Mpa}$	93
Figure IV.12	courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA4 avec longueur de fibres $l_f=30\text{mm}$ et $\tau =7 \text{ Mpa}$	94
Figure IV.13	courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA3 avec longueur de fibres $l_f=30 \text{ mm}$ et $\tau =10 \text{ Mpa}$	94
Figure IV.14	courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA4 avec longueur de fibres $l_f=30\text{mm}$ et $\tau =10 \text{ Mpa}$	95
Figure IV.15	courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA3 avec longueur de fibres $l_f=60\text{mm}$ et $\tau =10 \text{ Mpa}$	95
Figure IV.16	courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA4 avec longueur de fibres $l_f=60 \text{ mm}$ et $\tau =10 \text{ Mpa}$	96

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1	Caractéristiques des fibres couramment utilisées [BOUZ. 03].7
Tableau I.2	Quelques domaines d'utilisation du béton de fibres [CHE.10].18
Tableau IV.1	Propriétés des différentes poutres [VEC.82].82
Tableau IV.2	Propriétés des fibres.82
Tableau IV.3	Comparaison des valeurs ultimes de l'effort tranchant des poutres en BFM de précontraint et en béton précontraint.88
Tableau IV.4	Comparaison des valeurs ultimes de l'effort tranchant des poutres en BFM armé et en béton armé.89
Tableau IV.5	valeurs de module de cisaillement des poutres en BFM de précontraint et en béton précontraint.90
Tableau IV.6	valeurs de module de cisaillement des poutres en BFM armé et en béton armé.91
Tableau IV.7	variation des valeurs de l'effort tranchant ultime.97

NOTATIONS PRINCIPALES

A	:	section d'une fibre,
A_{eff}	:	section effective d'une fibre,
B	:	section de l'éprouvette,
E_f	:	module élastique de l'acier,
E_{b0}	:	module initial du béton en compression,
E_{ct}	:	module initial du composite en traction,
F_t	:	effort de traction,
f_{bt}	:	résistance à la traction du béton,
f_{ft}	:	résistance à la traction du composite,
f_{ar}	:	effort d'arrachement de la fibre,
l_f	:	longueur d'une fibre,
l_a	:	longueur adhérente d'une fibre,
l_c	:	longueur critique d'une fibre,
n	:	coefficient d'équivalence acier-béton,
w	:	ouverture des fissures,
w_u	:	ouverture ultime des fissures,
w_r	:	ouverture des fissures à la rupture totale du composite,
w_{rm}	:	ouverture moyenne des fissures à la rupture totale du composite,
ϕ	:	diamètre d'une fibre,
τ_u	:	contrainte d'adhérence ultime fibre-matrice béton,
σ_{fmax}	:	contrainte normale maximale dans la fibre moyenne,
σ_{uc}	:	contrainte maximale fictive du composite à l'état ultime,
σ_{um}	:	contrainte ultime moyenne dans une fibre,
σ_r	:	contrainte de rupture d'une fibre,
σ_{cr}	:	contrainte critique du composite, correspondant à la rupture des fibres,
ϖ	:	pourcentage en volume des fibres,
ϖ_{eff}	:	pourcentage effectif des fibres,
θ_0	:	facteur d'orientation des fibres,
θ_1	:	facteur d'efficacité de l'adhérence des fibres,
ε_{ft}	:	déformation de fissuration du béton,

ε_{rf}	:	déformation de rupture d'une fibre,
ε_u	:	déformation correspondant à la mobilisation totale de l'adhérence fibres-matrice,
ε_{cu}	:	déformation de rupture du béton en compression,
ε_r	:	déformation de rupture du composite,
ε_0	:	déformation du béton en compression correspondant au pic de contrainte (f_{cj}),
R_b et R_c	:	Paramètres adimensionnels, ajustent la branche ascendante et descendante respectivement de la loi de Sargin,
$\varphi(\varepsilon)$:	Définit le comportement réel des matériaux,
A_{pk}	:	section du câble d'ordre k,
A_{aj}	:	section d'une barre d'ordre j,
b_j	:	base inférieure du trapèze d'ordre i,
b_{j+1}	:	base supérieure du trapèze d'ordre i+1,
$b(y)$:	base de la section à une côte y,
n_s	:	nombre de barre,
n_p	:	nombre de câbles de précontrainte,
n	:	coefficient d'équivalence acier-béton,
S	:	aire de la section,
S_h	:	aire de la section homogénéisée,
y_{aj}	:	ordonnée de la barre d'ordre j,
Y_G	:	ordonnée du centre de gravité de la section ,
Y_j	:	ordonnée de la fibre inférieure du trapèze d'ordre i,
Y_{j+1}	:	ordonnée de la fibre inférieure du trapèze d'ordre i+1,
ε_i	:	déformation de la fibre inférieure du trapèze d'ordre i,
ε_{i+1}	:	déformation de la fibre supérieure du trapèze d'ordre i +1,
Y_{GH}	:	ordonnée du centre de gravité de la section homogénéisée,
ΔN	:	accroissement de l'effort normal,
ΔM	:	accroissement du moment fléchissant,
δu	:	déformation axiale d'une section,
δw	:	rotation différentielle d'une section,
ε_{p0}	:	déformation initiale des armatures de précontrainte.

SOMMAIRE

Résumé	III
Abstract	IV
Introduction général	1

CHAPITRE I : ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction.....	3
I.2 Définition du Béton armé de fibres et rôle des fibres	3
I.2.1 Définition	3
I.2.2 Rôle des fibres	3
I.3 Composition du béton de fibres	4
I.4 Différents types de fibres métalliques utilisées et leurs influences	6
I.4.1 Différents types de fibres métalliques utilisées	6
I.4.1.1 Dramix	6
I.4.1.2 Eurosteel	6
I.4.1.3 Pont à Mousson	6
I.4.1.4 Harex	7
I.4.2 Influence des fibres noyées dans le béton	8
I.4.2.1 Influence du pourcentage des fibres	8
I.4.2.2 Influence de l'orientation des fibres	8
I.4.2.3 Distribution des fibres	9
I.4.2.4 Influence de l'adhérence fibre-matrice de béton.....	9
I.5 Conclusion	10
I.6 Propriétés physiques et mécaniques des bétons armés de fibres	11
I.6.1 Résistance à la compression.....	11

I.6.2	Résistance à la traction	12
I.6.3	Résistance à la traction par flexion	12
I.6.4	Résistance à la traction par fendage	12
I.6.5	Résistance aux chocs	14
I.6.6	Résistance à la fatigue	15
I.6.7	Résistance à l'abrasion	15
I.6.8	Résistance au cisaillement	15
I.6.9	Perméabilité et résistance à la corrosion du béton de fibres	16
I.6.10	Résistance aux chocs thermiques	17
I.7	Utilisation pratique des bétons armés de fibres	17
I.8	Conclusion.....	19
I.9	Quelques modèles de comportement du béton de fibres	20
I.9.1	Introduction	20
I.9.2	Modélisation du comportement du béton de fibres en compression	20
I.9.2.1	Modèle de SARGIN	20
I.9.2.2	Modèle de FANELLA et NAAMAN [FAN. 85]	22
I.9.2.3	Modèle de ABSI et NAAMAN	22
I.9.3	Modélisation du comportement du béton de fibres en traction	24
I.9.3.1	Modèle de MAZARS	24
I.9.3.2	Modèle de LIM	25
I.9.3.3	Modèle de BOUAFIA	28
I.9.3.4	Modèle de ZHAN	31
I.9.3.5	Modèle de BOUAFIA, KACHI et FOURE	33
I.9.4	Conclusion	38

CHAPITRE II :
MÉTHODE DE CALCUL

II.1	Introduction	39
II.2	Modélisation des matériaux à comportement réels	39
II.2.1	Comportement du béton	39
II.2.1.1	Comportement du béton en compression selon Sargin (1968) .	40
II.2.1.2	Comportement du béton en traction selon Grelat (1978)	41
II.2.2.3	Comportement du béton de fibres en traction	43
II.2.2	Comportement des aciers	44
II.2.2.1	Comportement des aciers passifs	45
A)	Aciers naturels	45
B)	Aciers naturels	45
II.2.2.2	Comportement des aciers actifs	46
II.3	Modélisation des sections	47
II.3.1	Modélisation de la section de béton	47
II.3.2	Modélisation géométrique des armatures	48
II.3.2.1	Les armatures passives	48
II.3.2.2	Les armatures actives	48
II.4	Étude d'une section droite	49
II.4.1	Calcul des sollicitations internes	52
II.4.2	Déformation de la section à l'équilibre	56
II.4.3	Méthode itérative de résolution et critères de convergence.....	58
II.4.4	Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section	59
II.5	Conclusion	61

CHAPITRE III :
COMPORTEMENT À L'EFFORT TRANCHANT DU BÉTON
DE FIBRES

III.1	Introduction	62
III.2	Etude de l'équilibre d'une poutre en élasticité non linéaire	62
III.3	Exposé général de la modélisation	64
III.3.1	Domaine d'application	64
III.3.2	Discrétisation de la poutre	64
III.3.3	Principes de la modélisation et équations générales	65
III.3.3.1	Milieux continus équivalents	65
III.3.3.1.1	En déformations	65
III.3.3.1.2	En contraintes	66
III.3.3.2	Compatibilité partielle des déformations du béton avec les déformations moyennes	67
III.3.3.3	Equations d'équilibre	67
III.3.3.3.1	Equilibre local des couches	67
III.3.3.3.2	Equilibre global des sections	68
III.4	Lois de comportement des matériaux	68
III.4.1	Comportement du béton en compression dans la direction D_2	68
III.4.2	Comportement du béton en traction dans la direction D_1	69
III.4.3	Comportement de l'acier	70
III.5	Calculs spécifiques relatifs à l'effort tranchant	70
III.5.1	Calcul de la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$	70
III.5.2	Calcul de la distorsion moyenne	72
III.6	Résolution du problème	72
III.6.1	Transformation des équations générales	72
III.6.2	Algorithme de calcul	73
III.7	Conclusion	80

CHAPITRE IV :
CALCUL DE QUELQUES SECTIONS DES POUTRES

IV.1 Introduction	81
IV.2 Essais de l'Université de Toronto -Comportement de section	81
IV.3 poutres en béton armé et/ou précontraint de fibres soumis à une flexion composée	82
IV.4 Résultats et analyse	82
IV.5 L'influence des fibres métalliques sur la rigidité de cisaillement des poutres	90
IV.6 Étude paramétrique	93
IV.6.1 Influence de longueur de fibres et la contrainte d'adhérence fibres-matrice du béton	93
Conclusions générales	99
Références bibliographiques	100

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le béton est un matériau hétérogène qui présente une très bonne résistance à la compression, par contre, il a une très mauvaise résistance à la traction (fragile). Pour améliorer ces dernières, le béton a été renforcé avec des armatures en acier. Le composite qui en résulte est le béton armé. Ce matériau présente cependant, deux inconvénients :

- le matériau est fortement hétérogène et son comportement est toujours de type fragile, particulièrement en traction ;
- sa mise en œuvre est parfois difficile à cause de la complexité du ferrailage.

En vue de créer un matériau réellement composite de comportement ductile en traction, des études expérimentales et théoriques ont été menées afin de remplacer les armatures du béton armé par des fibres susceptibles de procurer au béton une bonne résistance à la traction, un bon comportement post-rupture et un caractère d'homogénéité. Ces fibres sont noyées dans le béton d'une manière plus ou moins aléatoire tant au niveau de l'orientation qu'au niveau de leur position.

En effet les fibres peuvent se substituer ou compléter les armatures traditionnelles selon les cas pratiques.

L'utilisation du béton de fibres est orientée principalement vers la réalisation de plaques minces telles que les dallages industriels, les routes, les pistes d'aéroport, les murs de soutènement, les pieux, les murs de façade...

Les fibres utilisées comme moyen de renforcement du béton sont les fibres d'acier, de verre, de fonte, de polypropylène et en matière plastique. Cependant, les plus utilisées sont les fibres métalliques.

Organisation du mémoire :

Le premier chapitre est une étude bibliographique sur le béton de fibres et la modélisation du comportement du béton de fibres.

Le second chapitre on s'intéresse à l'étude d'une section d'un élément de poutre en BFM armé et/ou précontraint. En présentant la méthode de calcul concernant l'étude de l'équilibre d'une section sous forme d'un algorithme et organigramme général de calcul. ce programme permet la modélisation numérique du comportement non linéaire, jusqu'à rupture des sections de poutre en béton arme, soumises à la flexion composée et à l'effort tranchant.

Le troisième chapitre est consacré au calcul de la rigidité et le comportement du béton de fibres à l'effort tranchant en présentant l'ensemble des paramètres liés à l'effort tranchant, l'inclinaison des bielles de béton et la distorsion.

Enfin, le dernier chapitre présente une série d'exemples d'applications et de comparaisons à des résultats numériques obtenus par KACHI et estimer l'influence de fibres sur la rigidité de cisaillement des poutres.

On termine par une conclusion générale.

I.ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1.Introduction

Depuis le début des années soixante beaucoup de recherches importantes ont été faites sur le béton de fibres. Plusieurs auteurs, dont on peut citer ([EDI. 72] ,[SWA. 75b], [JON. 80], [JIN. 81], [ROS. 84], [NAR. 87], [KRE. 87], [ELH. 90], [BER. 91]...), ont permis de mettre en évidence les performances de ce composite ; à savoir :

- une bonne résistance à la traction, à la fatigue et aux chocs,
- un comportement ductile après la première fissuration,
- mise en œuvre.

L'utilisation des fibres comme moyen de renforcement du béton ne s'est pas limitée uniquement au cas des fibres d'acier. Des fibres de verre, en matière plastique, de fonte et de polypropylène ont été utilisées, notamment pour renforcer les sols.

Dans cette présente étude, on se limitera au cas des fibres métalliques qui, sont les plus utilisées pour le renforcement du béton.

I.2. Définition du Béton armé de fibres et rôle des fibres

I.2.1. Définition

Un béton armé de fibres est un mélange contenant une répartition de fibres discontinues dans une matrice de béton traditionnel. L'ajout des fibres a pour objectif d'obtenir un matériau composite « isotrope » présentant une meilleure résistance à la traction, un meilleur comportement post-fissuration, de remédier ainsi à son inconvénient majeur qui est son comportement du type fragile vis-à-vis de la traction.

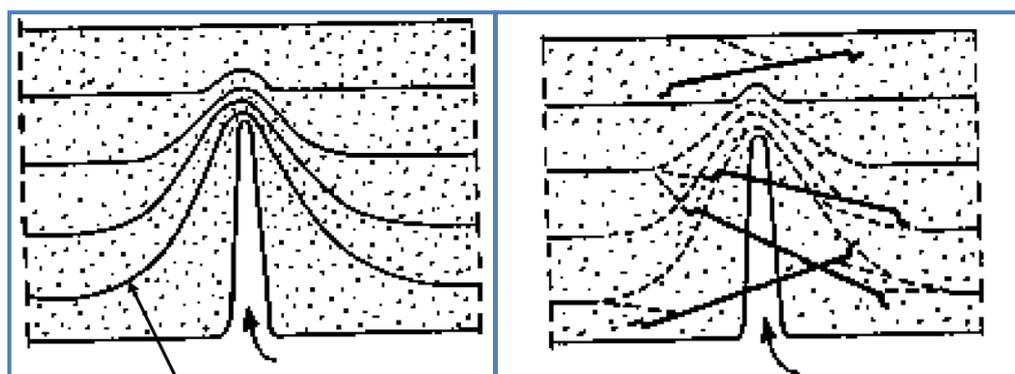
I.2.2. Rôle des fibres

Les fibres noyées dans le béton jouent le rôle de " couture " des fissures. En effet, la longueur maximale d'une microfissure est de l'ordre de la dimension du plus gros granulat ROSSI [ROS. 84]. La longueur moyenne des fibres utilisées est nettement supérieure à la dimension du plus gros granulat. Chaque microfissure se propageant dans la pâte, peut être "pontée" par une ou plusieurs fibres. Ainsi les fibres empêchent la propagation des microfissures qui ne peuvent de ce fait s'agrandir que par :

- allongement élastique ou plastique des fibres,
- effritement de la matrice de béton au voisinage de la fibre,

- glissement des fibres,
- rupture des fibres.

L'agrandissement des microfissures dans la direction principale de traction conduit à la localisation des macrofissures, alors les fibres qui relient les lèvres des macrofissures, (figure I-1), sont soumises à la traction et au cisaillement, elles sont ainsi sollicitées à l'arrachement. Ces fibres absorbent une partie de l'énergie nécessaire à la propagation des microfissures et évitent une propagation incontrôlée de la fissuration du béton. Il faudrait davantage d'énergie donc d'avantage d'effort pour propager cette fissuration.



Lignes de tension déviées Amorce de la fissure Fissure traversée par des fibres

Figure I-1 : Rôle des fibres dans la matrice de béton

I.3. Composition du béton de fibres

La mise en œuvre d'une composition optimale du béton de fibres est complexe car l'ouvrabilité et l'homogénéité du composite dépendent des trois facteurs suivants:

- La géométrie des fibres définie par le rapport (longueur / diamètre) de chaque fibre,
- Le volume des fibres utilisées dans la matrice de béton,
- La forme d'ancrage des fibres.

Les paramètres essentiels concernant la géométrie des fibres sont au fait la longueur, le diamètre et la forme d'ancrage des fibres. Les fibres ainsi noyées dans le béton doivent être suffisamment longues pour s'opposer à l'ouverture des fissures, elles doivent être équipées d'un système d'ancrage aux extrémités dans le cas des fibres droites. En revanche l'augmentation de la longueur des fibres et l'existence de systèmes d'ancrage spécifiques diminuent la maniabilité du mélange.

HUGHES et FATTUCHI [HUG. 81] ont montré que la maniabilité du mélange diminue en fonction de la croissance de l'élanement des fibres L/D , d'autre part, l'existence décroches aux extrémités des fibres diminue l'ouvrabilité du composite.

La granulométrie du matériau est étroitement liée à la dimension des fibres. Les granulats doivent avoir des dimensions tels que les fibres peuvent les encadrer DEHOUSSE [DEH. 75].

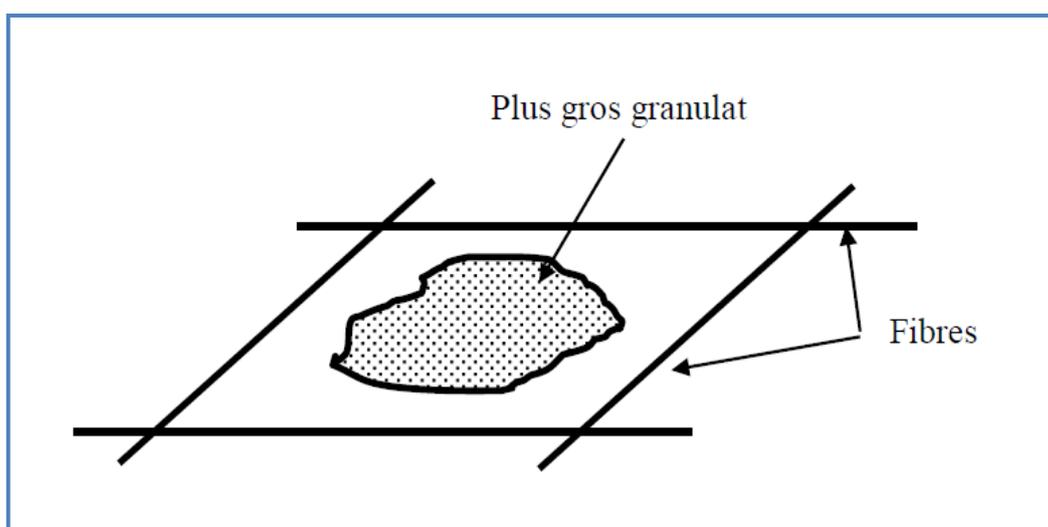


Figure I-2 : Encadrement d'un DEHOUSSE [DEH. 75].

Pour que les granulats soient bien encadrés par les fibres, il est nécessaire d'avoir une matrice de béton riche en éléments fins. Alors, une composition granulaire appropriée s'avère nécessaire pour le béton armé de fibres afin d'obtenir une distribution uniforme des fibres dans le béton et parer à la formation de « pelotes » de fibres.

En général, l'ajout des fibres est effectué lorsque le malaxage du béton est terminé.

Pour éviter la formation superficielle de rouille, le serrage par mise en vibration du coffrage ou table vibrante, est toujours conseillé. Les fibres s'orientent alors parallèlement au coffrage par effet de paroi et s'écartent légèrement de celle-ci de telle sorte qu'elles soient enrobées dans le béton, ce qui constitue une protection contre la corrosion en surface.

Pour augmenter l'ouvrabilité du béton de fibres on ajoute en général des plastifiants dans le mélange. La quantité de plastifiant à ajouter dépend de son efficacité [KACH. 97].

Il faut, dans ce cas là, un ajustement de la composition des granulats pour que l'adjuvant atteigne son maximum d'efficacité. La teneur en fibre est fixée par une relation empirique dite « limite de faisabilité » :

$$V_f \cdot L/D < 3$$

avec :

- L/D : élancement des fibres.

Le dosage limite couramment utilisé pour les bétons de fibres métalliques est de l'ordre de 2% [BER. 91].

I.4. Différents types de fibres métalliques utilisées et leurs influences

I.4.1. Différents types de fibres métalliques utilisées

Ces fibres sont surtout en acier, elles présentent de bonnes caractéristiques mécaniques une bonne résistance à la traction, une bonne adhérence avec le béton et sont surtout inertes aux attaques du ciment et autres composants du béton.

Les différents types de fibres couramment utilisées en Europe sont énumérés ci-après.

I.4.1.1. Dramix

Ce sont des fibres à crochets (Tableau I-1); elles sont fabriquées en fil d'acier étiré à froid et ont une résistance à la traction de 1100 MPa. Pour le type standard zc / 50 / 50, elles ont une longueur de 50 mm et un diamètre de 0.5 mm. Elles se présentent sous forme de plaquettes de 10 à 12 fibres accolées. Lorsqu'elles sont introduites dans le béton la colle se dissout et les fibres sont réparties d'une manière aléatoire.

I.4.1.2. Eurosteel

Ce sont des fibres ondulées sur toute leur longueur (Tableau 1-1), en acier tréfilé avec une teneur en carbone de 0.25%. Leur résistance à la traction est de 1400 MPa et leur élongation à la rupture est de l'ordre de 14%. Il existe deux types standards :

Eurosteel 60 / 100 (longueur 60 mm, diamètre 1 mm),

Eurosteel 50 / 80 (longueur 50 mm, diamètre 0.8 mm).

I.4.1.3. Pont à Mousson

Elles se présentent sous forme d'un ruban (Tableau 1-1), de 1.5 à 2 mm de largeur et 60 mm de longueur, leur épaisseur est de l'ordre de 30 microns. Elles sont en fonte amorphe, leur résistance en traction est de 2000 Mpa.

I.4.1.4. Harex

Les fibres Harex sont obtenues par fraisage de blocs d'acier (Tableau I-1), leurs dimensions sont de 32*2*0.25 mm. Elles ont une résistance de 700 MPa et un module de 200000 MPa.

Les fibres métalliques sont classées en deux catégories :

- Les fibres fonctionnant par adhérence, de forme généralement plate, ayant une surface spécifique importante. Elles sont peu ductiles. Leur principal apport est la limitation de l'ouverture des fissures.

- Les fibres fonctionnant par ancrage, de forme cylindrique en acier tréfilé, ayant un comportement ductile. L'ancrage est assuré par des crochets aux extrémités de la fibre ou par la forme ondulée de la fibre. Ces fibres confèrent une bonne ductilité au béton car elles ont une capacité de reprise d'efforts importante lorsque les fissures sont assez ouvertes.

Tableau I-1 : Caractéristiques des fibres couramment utilisées [BOUZ. 03].

Type de fibre	Forme / géométrie	Matière constituante	Rt X10 ² [Mpa]	E X10 ⁵ [Mp]	L [mm]	l [mm]	D [mm]	e [mm]
Bekaert Dramix ZC50/50		Fil d'acier étiré à froid	11	2	50	50
Eurosteel 50/80 60/100		Acier tréfilé Moins de 0.15% C	14	2	50 60		0.8 à 1
Pont à Mousson		Fonte amorphe à 5% de Cr	20	1.4	60	1.5 à 2	0.03
Harex		Obtenue par le fraisage de blocs d'acier	7	2	32	2	0.25

Rt : résistance à la traction du matériau de la fibre, E : module d'élasticité à la traction du matériau de la fibre, L : Longueur, l : Largeur, D : Diamètre, e : Epaisseur.

I.4.2. Influence des fibres noyées dans le béton

I.4.2.1. Influence du pourcentage des fibres

Les fibres noyées dans le béton jouent le rôle d'armature, contrôlent sa fissuration et lui confèrent une grande ténacité. Néanmoins l'ouvrabilité du mélange diminue avec la croissance de la teneur en fibres (figure I-3).

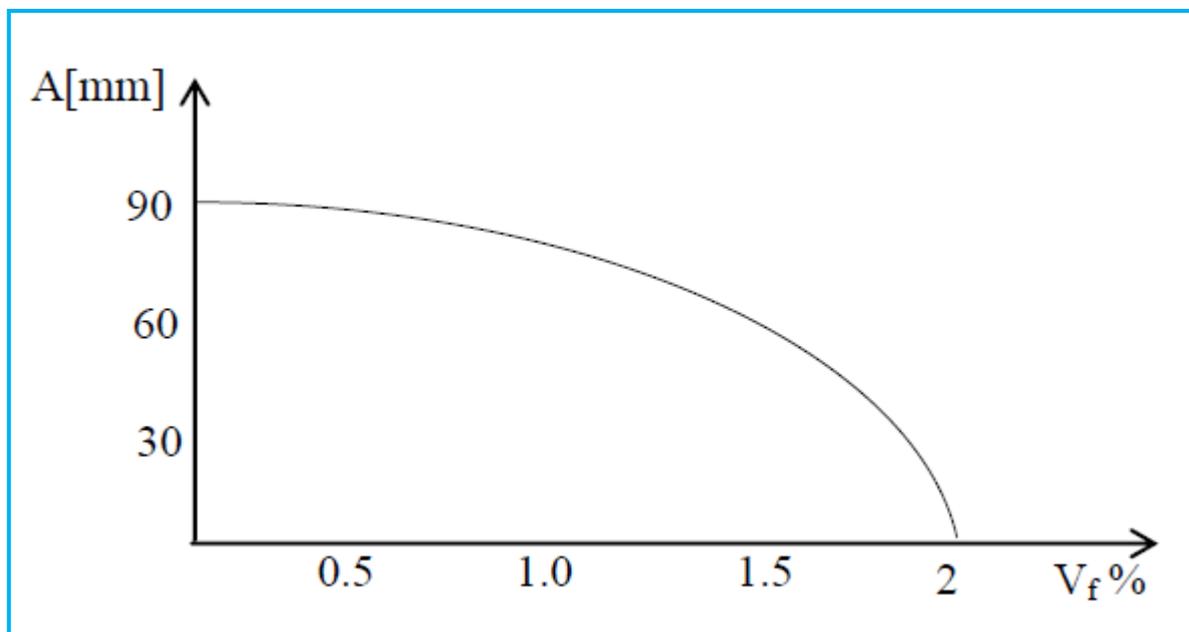


Figure I-3: Effets des fibres sur l'affaissement du béton au cône d'Abrams [JEJ. 77].

I.4.2.2. Influence de l'orientation des fibres

Une fibre orientée parallèlement à la direction d'application des contraintes et perpendiculairement à la direction de propagation des fissures joue l'effet le plus important, par contre une fibre perpendiculaire à celle-ci n'a aucun effet.

D'après EDINGTON et HANNANT [EDI. 72], la vibration du béton de fibres favorise une orientation bidimensionnelle des fibres, dans un plan horizontal, ce qui rend le matériau plus performant si cette orientation coïncide avec la direction des contraintes majeures. DEHOUSSE et al [DEH. 74] ont montré que l'utilisation de la table vibrante provoque une orientation préférentielle des fibres, perpendiculairement au sens de la vibration.

I.4.2.3. Distribution des fibres

Lors des applications industrielles, il convient de contrôler la distribution réelle des fibres dans le composite. On examine le nombre de fibres dans une section et on le compare au pourcentage théorique des fibres pour s'assurer de l'homogénéité de la distribution des fibres. Il est alors indispensable de connaître le nombre de fibres correspondant au pourcentage théorique des fibres que l'on donne au mélange.

Selon une analyse théorique, SOROUSHIAN [SOR. 90] propose une formule pour le calcul du nombre de fibres dans une section par unité de surface.

$$N = a \cdot w / A_f$$

a : facteur d'orientation des fibres,

w : pourcentage en volume des fibres,

A_f : surface de la section d'une fibre.

I.4.2.4. Influence de l'adhérence fibre-matrice de béton

L'adhérence fibre-matrice de béton est un facteur très important vis-à-vis de l'efficacité des fibres dans le béton.

D'après BARTOS [BAR. 81], elle est assurée par trois types de liaisons:

- une liaison élastique, collage entre fibres et matrice par les liants,
- une liaison due au frottement,
- une liaison due à l'ancrage mécanique dans le cas des fibres non rectilignes (crochets, ondulations ...).

Pour quantifier cette adhérence, l'essai d'arrachement des fibres est fréquemment utilisé. Cette résistance notée τ_u correspond à la contrainte maximale de cisaillement qui se développe à la surface de la fibre lors de l'arrachement de celle-ci (figure I-4), LIM et al [LIM. 87].

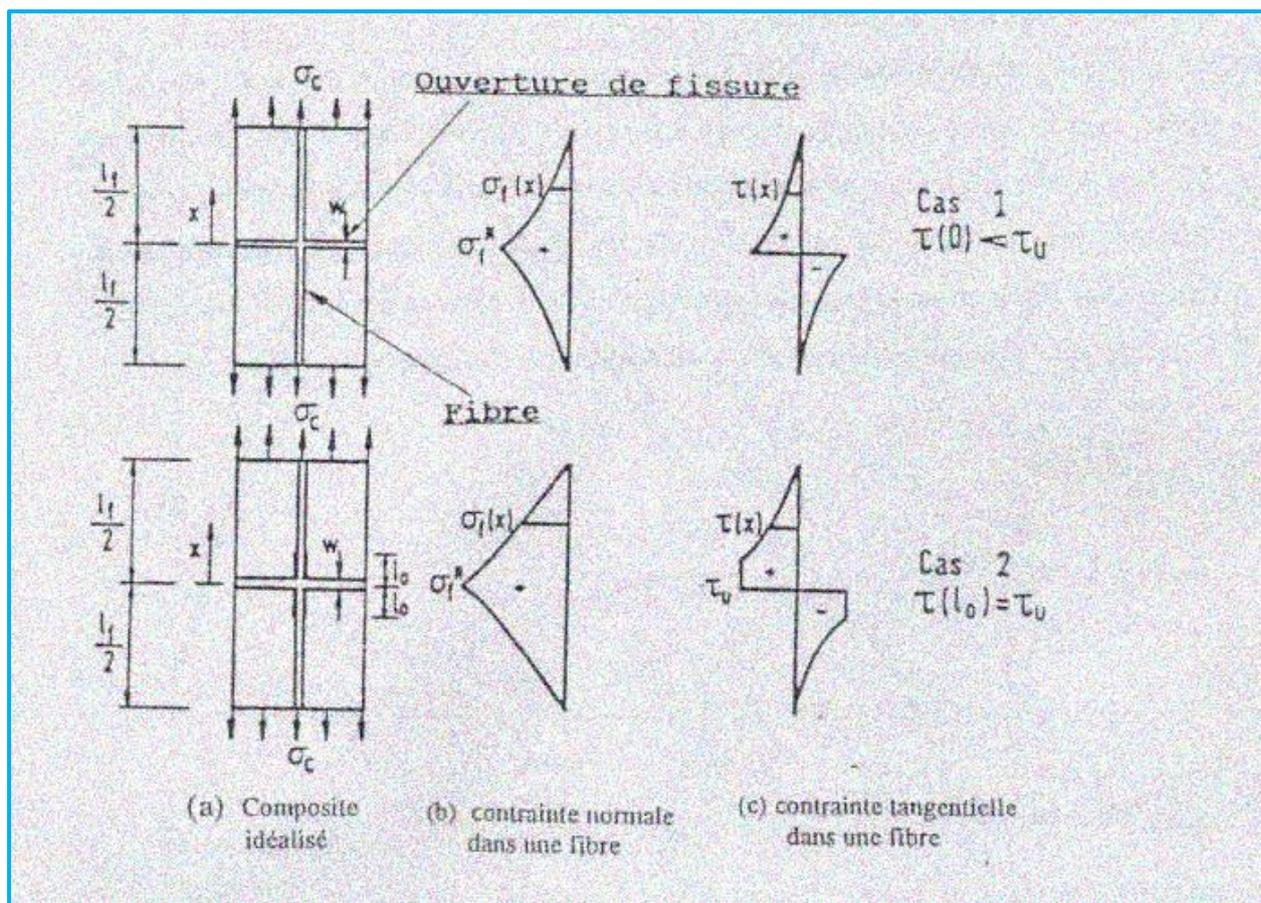


Figure I-4 : Distribution de la contrainte de cisaillement à la surface d'une fibre droite
LIM et al [LIM. 87].

Le même auteur remarque que la contrainte d'adhérence τ_u pour une fibre droite varie entre 2 et 3 MPa, par contre celle dans le cas d'une fibre à crochets aux extrémités elle peut atteindre 6 à 7 MPa.

I.5. Conclusion

La géométrie des fibres, leur adhérence avec la matrice de béton, leur pourcentage et leur orientation jouent un rôle important dans l'efficacité des fibres dans le béton. En effet, une bonne orientation des fibres optimise leur participation à la reprise des efforts.

I.6. Propriétés physiques et mécaniques des bétons armés de fibres

I.6.1. Résistance à la compression

Plusieurs études théoriques et expérimentales ont montré que la présence des fibres dans le béton influe peu sur sa résistance à la compression. L'ajout des fibres métalliques augmente la résistance à la compression du composite d'environ 20% ZHAN [ZHA. 91]. Selon SERNA ROSS [ROS. 84], la résistance ultime et le module d'élasticité du béton armé de fibres diffèrent peu de la résistance ultime et du module d'élasticité de la matrice de béton. Néanmoins, la présence des fibres dans le béton augmente la déformation à la rupture et confère ainsi une plus grande ductilité au composite.

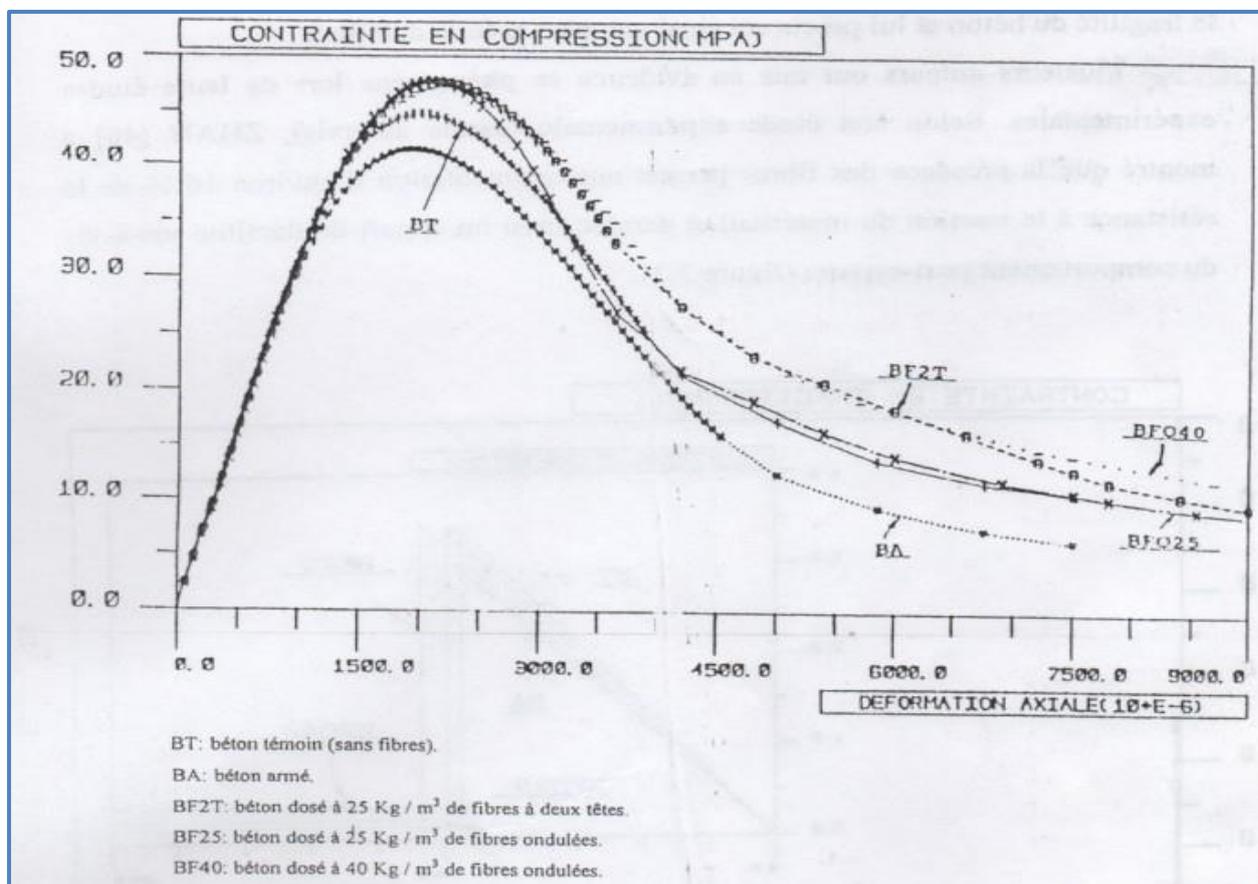


Figure I-5 : Diagramme contrainte - déformation des essais en compression avec asservissement, ZHAN [ZHA. 91].

I.6.2. Résistance à la traction

Comme la matrice de béton a un caractère fragile et une faible résistance à la traction, le comportement mécanique en traction est conditionné par la fissuration du béton.

La présence des fibres dans le béton joue un rôle important dans le en traction du composite. En effet, les fibres interviennent à deux échelles:

- à l'échelle du matériau en "cousant" les microfissures, elles retardent la localisation de la fissuration. Cette action peut provoquer une augmentation de la résistance à la traction, cette augmentation dépend de la teneur en fibres et de leur orientation dans la masse de béton.
- à l'échelle de la structure, en retenant les deux blocs de béton fissuré grâce à leur ancrage des deux côtés de la fissure. Les fibres permettent d'atténuer la fragilité du béton et lui procurent ainsi une plus grande ductilité.

I.6.3. Résistance à la traction par flexion

Le comportement du béton en flexion est conditionné par la fissuration de la zone tendue. Pour cela, la présence des fibres peut jouer un rôle de stabilisateur après rupture de la matrice de béton. En effet, alors que le béton sans fibres se désagrège rapidement après fissuration, les bétons de fibres d'acier continuent à reprendre des efforts même après que la charge maximale soit atteinte.

De nombreuses études ont montré une nette amélioration de la résistance à la traction par flexion. Pour SWAMY et al [SWA. 75b] la résistance à la traction par flexion des bétons de fibres est 2 à 6 fois plus grande que celle des bétons sans fibres, alors que pour ZHAN [ZHA. 91] elle n'augmente que de 40 à 50 %. MAMILLAN et al [MAM. 87] ont constaté que seules les fibres à crochets (DRAMIX) avec un pourcentage de 1% peuvent augmenter de façon significative la résistance ultime à la traction par flexion.

I.6.4. Résistance à la traction par fendage

L'essai de fendage (appelé essai brésilien) est une méthode pour déterminer la résistance à la traction. Il s'agit d'écraser une éprouvette cylindrique d'élancement 2, placée horizontalement entre les deux plateaux d'une presse. NANNI [NAN.88], par des essais de fendage, montre le comportement du composite en fonction du

pourcentage en fibre (figure I-6); les fibres utilisées sont des fibres à crochets aux extrémités.

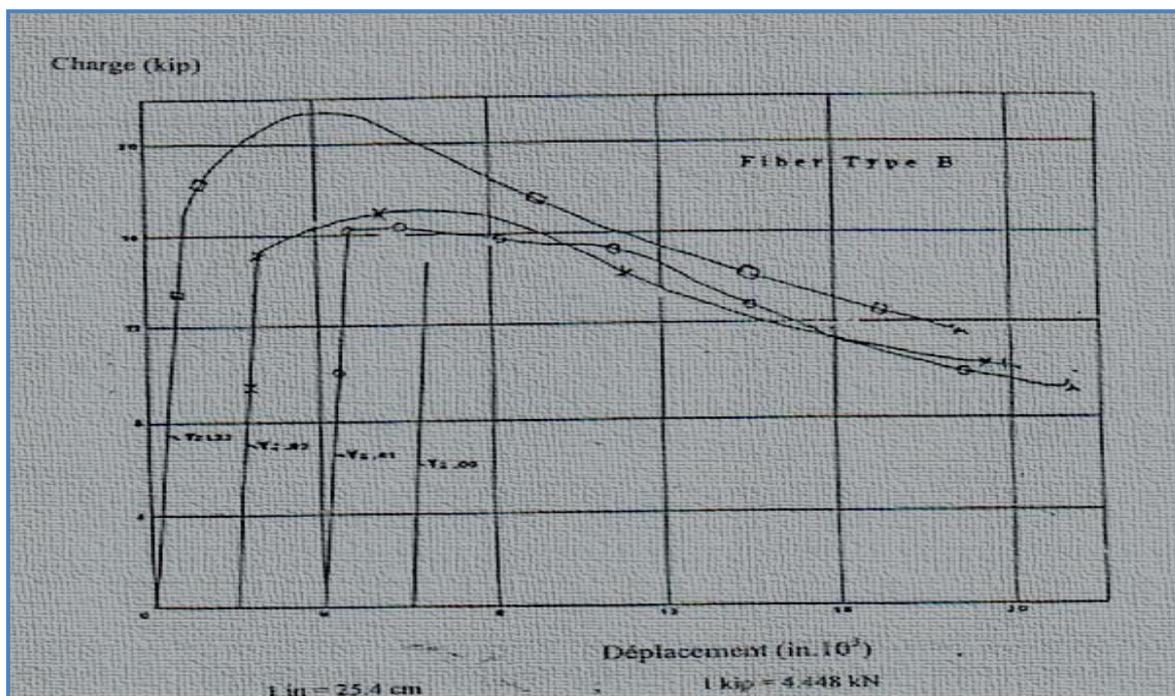
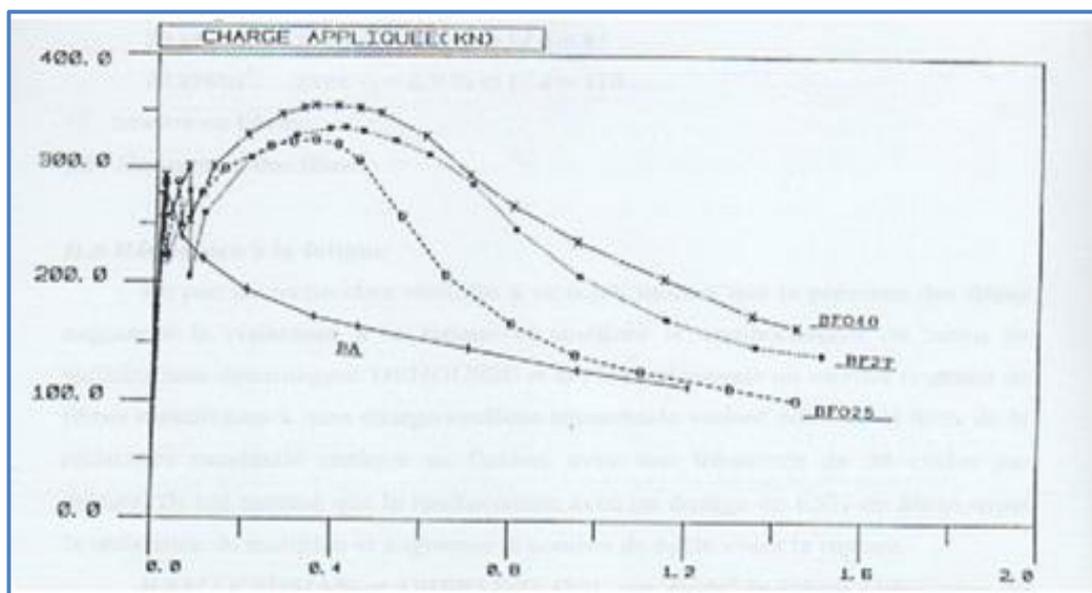


Figure I-6 : Courbe charge-déplacement diamétrale par fendage en fonction du pourcentage de fibres, NANNI [NAN.88].

Le même auteur remarque qu'avec un pourcentage de fibres relativement élevé (>0.8%) l'effort continue d'augmenter après la première fissure du matériau. ZHAN [ZHA. 91], par des essais de fendage non asservis, remarque une augmentation d'environ 34% de la résistance à la traction. L'augmentation de la quantité de ciment joue un rôle peu important concernant la résistance à la traction du béton (une augmentation de 8% au lieu de 30% en flexion). Avec des essais asservis, le même auteur montre que la présence des fibres permet au composite d'avoir une bonne ductilité et augmente la charge maximale dans le domaine post fissuration (figure I-7).



Déplacement diamétral

Figure I-7 : Courbe charge-déplacement diamétral par fendage pour différents matériaux, ZHAN [ZHA. 91].

D'après le même auteur, pour les essais non asservis, la résistance à la traction est, déterminée à partir de la formule suivante :

$$F_b = 2.P / \pi.\phi .L \text{ (kN/m}^2\text{)} \quad 2.2$$

P : charge maximale (kN)

ϕ : diamètre (160 mm)

L : longueur (320 mm)

I.6.5. Résistance aux chocs

Le caractère ductile des bétons armés de fibres leur procure une amélioration de leur résistance aux chocs. En effet dans le cas des chocs, les matériaux subissent des contraintes de traction. Or, la présence des fibres améliore cette résistance, elle permet alors une augmentation de sa résistance aux chocs.

C.D.JOHNSTON [JON. 80] a effectué des essais où il a constaté l'augmentation de la résistance aux chocs avec l'augmentation de la teneur en fibres.

H. KRENCHER [KRE. 87] a trouvé pour un béton, qui sans fibres avait une résistance aux chocs de 2.9 kN / m², devient après addition des fibres :

$$20 \text{ kN/m}^2 \quad \text{avec} \quad V_f = 0.2 \% \quad \text{et} \quad l/d = 85$$

$$30 \text{ kN/m}^2 \quad \text{avec} \quad V_f = 0.9 \% \quad \text{et} \quad l/d = 170$$

V_f : teneur en fibres

l/d : élancement des fibres

I.6.6. Résistance à la fatigue

Le peu de recherches réalisées à ce sujet, montre que la présence des fibres augmente la résistance à la fatigue et améliore le comportement du béton en sollicitations dynamiques. DEHOUSSE et al [DEH. 74] ont soumis un mortier renforcé de fibres métalliques à une charge cyclique sinusoïdale variant entre 25 et 60% de la résistance maximale statique en flexion, avec une fréquence de 30 cycles par minute. Ils ont montré que le renforcement avec un dosage de 1,5% de fibres triple la résistance du matériau et augmente le nombre de cycle avant la rupture.

RAMAKRISHAN et OBERLING [RAM. 87], ont étudié le même phénomène de fatigue en flexion des poutres à une fréquence de 20 HZ et une contrainte maximale de 70 à 80% de la résistance en flexion. Ils ont remarqué que les fibres augmentent les caractéristiques de fatigue de façon considérable. Après deux millions de cycles, certains bétons ont encore une endurance de l'ordre de 90%.

I.6.7. Résistance à l'abrasion

D'après T. CUYKENS et al [CUY. 77], les fibres en acier n'ont pas beaucoup d'influence en cas d'érosion uniquement superficielle. Quand l'érosion va de pair avec des sollicitations dues aux chocs et à l'écaillage du béton, les fibres peuvent augmenter fortement la durée de vie du béton en freinant la propagation des microfissures.

I.6.8. Résistance au cisaillement

Selon EL HACHEM [ELH. 90], JINDAL [JIN. 81] et VALADE [VAL. 87], la présence de fibres dans le béton augmente sa résistance au cisaillement. Ils ont montré aussi que la résistance au cisaillement augmente avec l'accroissement, jusqu'à 1%, de la teneur en fibres.

NARAYANAN et al [NAR. 87] lors d'essais sur des poutres armées traditionnellement (2 à 3% d'armatures), renforcées par des fibres métalliques, ont noté que :

- la résistance au cisaillement des bétons de fibres dépend de la géométrie, de la forme et du pourcentage de fibres. Ces paramètres peuvent être caractérisés par un facteur des fibres 'F' défini par la relation suivante :

$$F = V_f \cdot D_f \cdot l / d$$

avec :

- V_f : pourcentage des fibres,

- D_f : facteur de l'efficacité de l'adhérence fibre matrice,

- l / d : élancement de la fibre.

- l'augmentation du facteur F permet d'améliorer la ductilité du comportement du béton au cisaillement,

- l'augmentation du pourcentage de fibres peut changer le mode de rupture au cisaillement en un mode de rupture à la flexion.

La rupture par cisaillement peut intervenir aussi dans le cas d'une poutre soumise à la flexion si le rapport a/d est compris entre 3 et 7 ROBERTS [ROB.82]

(a : distance entre le point d'application de la charge et l'appui, d : hauteur efficace de la poutre).

I.6.9. Perméabilité et résistance à la corrosion du béton de fibres

La perméabilité est la propriété hydrodynamique d'un matériau poreux, elle est liée directement à la protection des fibres noyées dans le béton et influence la tenue à long terme des bétons de fibres.

Concernant les fibres en acier dans le béton, des examens faits sur le béton de fibres d'acier, dans divers milieux favorisant la corrosion, ont montré que ce dernier présente un bon comportement contre les risques de corrosion, les fibres superficielles rouillent rapidement, mais la discontinuité du renforcement empêche la propagation de la corrosion. Si des éventuelles taches de rouille sont gênantes, on peut imprégner la surface du béton avec des matières plastiques, ou la recouvrir d'une couche appropriée (béton projeté par exemple).

L'expérience de NEMEGEER [NEM. 91], basée sur l'observation de l'évolution de la résistance du béton de fibres et du même béton sans fibres dans une solution agressive est un bon exemple représentatif de ces résultats (figure I-8).

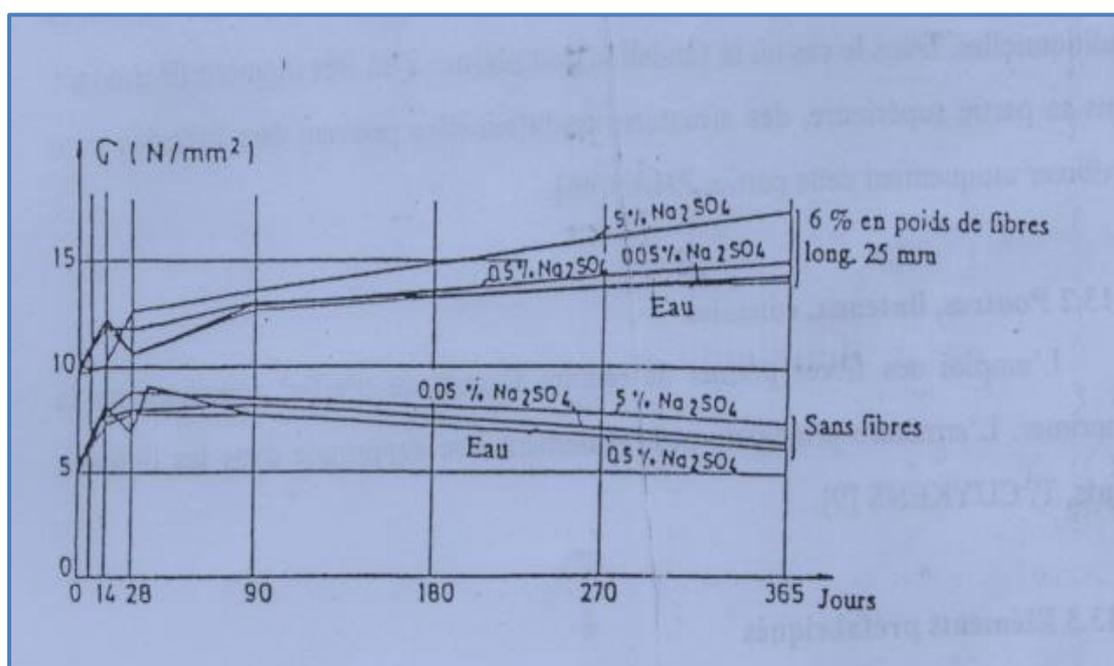


Figure I-8 : Evolution de la résistance en flexion du béton de fibres et du béton témoin en fonction du temps (échantillons conservés dans l'eau ou dans différentes solutions de Na_2SO_4), NEMERGEER [NEM. 91].

I.6.10. Résistance aux chocs thermiques

D'après T. CUYKENS [CUI. 77], l'adjonction des fibres d'acier étirées à des bétons réfractaires soumis à des températures élevées et surtout à des chocs thermiques peut prolonger sensiblement la durée de vie de ces bétons. On utilise actuellement pour ces applications des fibres en acier inoxydable, à des pourcentages allant de 0,5 à 1,5 %, ces fibres ne perdent leurs propriétés qu'à des températures très élevées.

I.7. Utilisation pratique des bétons armés de fibres

Depuis que le béton de fibres a été conçu, de nombreux travaux ont montré que l'insertion de fibres d'acier dans une matrice de béton permet d'augmenter les caractéristiques mécaniques, comme la résistance à la compression ou la résistance à la flexion, du composite résultant. Cependant, ce type de béton n'est pas considéré comme un substitut aux bétons traditionnels, mais comme un matériau nouveau qui devient intéressant pour la conception de structures performantes. Avec de faibles dosages en fibres d'acier (1% en volume) les bétons de fibres obtenus présentent des performances intéressantes (bonne maniabilité, bonnes caractéristiques mécaniques). De plus, leur coût est relativement bas au regard de certaines applications spécifiques. Dans le tableau I-2 ci-dessous, on indique quelques domaines d'utilisation du béton de fibres.

Tableau I-2 : Quelques domaines d'utilisation du béton de fibres [CHE.10].

Application	Intérêt apporté par l'adjonction des fibres dans le béton
Canalisation et coque minces faiblement sollicitées.	<ul style="list-style-type: none"> - Amélioration de la tenue des pièces au jeune âge. - Modification des variations dimensionnelles, lutte contre les fissurations.
Dallage, chaussées en béton, dallages manufacturés, et tous les éléments structuraux soumis à la flexion.	<ul style="list-style-type: none"> - Diminution de 40% de l'ouverture des fissures, - Augmentation de la rigidité après fissuration, - Augmentation de la résistance au cisaillement, - Augmentation de la résistance à l'usure.
Eléments structuraux soumis à la compression (poteaux, pieux, fondations...etc.).	<ul style="list-style-type: none"> - Amélioration de la charge ultime, - Pas de rupture catastrophique.
Structures soumises à des sollicitations pulsionnelles exemple, pistes d'aéroports.	<ul style="list-style-type: none"> - L'énergie absorbée est plus importante, - La durée de choc est augmentée, - La loi de comportement du matériau est fortement modifiée.
Réparation des revêtements routiers, tabliers de ponts.	<ul style="list-style-type: none"> - Amélioration de la résistance aux chocs, - Amélioration de la déformation.
Parties exposées aux fortes variations de température et même aux hautes températures.	<ul style="list-style-type: none"> - Remplacement avec succès du revêtement réfractaire, - Diminution du coût de réparation des éléments réfractaires
Stabilisation des parois rocheuses, les talus, les tunnels, les galeries souterraines.	<ul style="list-style-type: none"> - Evite le travail de fixation des grillages ordinairement employés, - Diminution du coût de réparation de stabilisation des parois rocheuses et les talus.
Fabrication des pieux, revêtement ignifuges isolants (constructions navales). Panneaux de revêtement de façade....etc.	<ul style="list-style-type: none"> - Augmentation de la résistance aux chocs, - Augmentation de la résistance à l'usure, - Augmentation de la durabilité de revêtement.

I.8. Conclusion

L'incorporation des fibres dans le béton trouve tout son intérêt dans l'apport en ductilité dans le comportement post-rupture du matériau aussi bien en compression qu'en traction. Par contre, elle a peu d'effet sur la résistance à la compression et le module initial du béton et augmente la résistance à la traction. Les essais sur des pieux en vraie grandeur, de différentes natures, ont montré un comportement équivalent entre les pieux classiques armés selon un minimum forfaitaire et les pieux renforcés par des fibres métalliques. Ces résultats [ZHA. 91] ont mis en évidence le caractère ductile des pieux en béton de fibres par rapport à ceux en béton armé.

Quant à la fabrication d'un béton armé de fibres, cela pose certains problèmes. Cependant, une diminution de la quantité des gros granulats, une limitation de la dimension du plus gros granulat (inférieure à la longueur de la fibre), une limitation du dosage en fibres (en effet les dosages en fibres utilisés dans les différentes applications des bétons armés de fibres reste inférieure à 2 %) et une séquence de malaxage adaptée permettent d'obtenir un béton de qualité.

La facilité de mise en œuvre du béton de fibres permet un gain de productivité et élimine les difficultés d'exécution dans le cas de certains éléments structuraux tels que les pieux, les éléments minces, les éléments exécutés sous l'eau.

I.9. Quelques modèles de comportement du béton de fibres

I.9.1. Introduction

La modélisation du comportement des structures en béton armé traditionnel est bien connue et les méthodes de calcul sont abondantes dans la littérature. Par contre, celle se rapportant aux structures en béton de fibres reste encore dans le domaine de la recherche. Pour modéliser le comportement de ces structures, il existe actuellement deux méthodes d'approches. La première, est une approche par éléments finis qui nécessite généralement des moyens de calcul très puissants. La seconde, est une approche par la théorie des poutres, en adoptant un comportement élastique non linéaire pour le béton de fibres. Cette dernière est relativement simple à mettre en œuvre, bien que la précision du calcul soit probablement moins satisfaisante dans certains cas.

I.9.2. Modélisation du comportement du béton de fibres en compression

Le comportement du béton sans fibres en compression est caractérisé par une phase élastique suivie d'une phase de microfissuration conduisant rapidement à la rupture fragile du matériau. L'ajout de fibres modifie légèrement ce comportement. Dans la partie ascendante, le comportement du béton de fibres en compression est similaire à celui du béton sans fibres, par contre dans la partie descendante la pente est moins raide que dans le cas du béton seul. Il existe peu de modèles décrivant le comportement dans ce domaine pour les bétons de fibres. Nous citerons les modèles qui sont couramment utilisés pour exprimer la loi de comportement de ce type de matériau.

I.9.2.1. Modèle de SARGIN

Le modèle de SARGIN est essentiellement utilisé dans le calcul des structures en béton armé et précontraint. Il présente l'avantage de la facilité de détermination de ses paramètres par des essais en laboratoire. En faisant varier le paramètre R_c , il est possible d'étendre ce modèle au béton de fibres. La variation de R_c permet de rendre compte de l'apport des fibres en ductilité. En effet, l'augmentation de R_c permet d'adoucir la pente descendante de la courbe contrainte - déformation, ce qui correspond à une certaine ductilité du matériau.

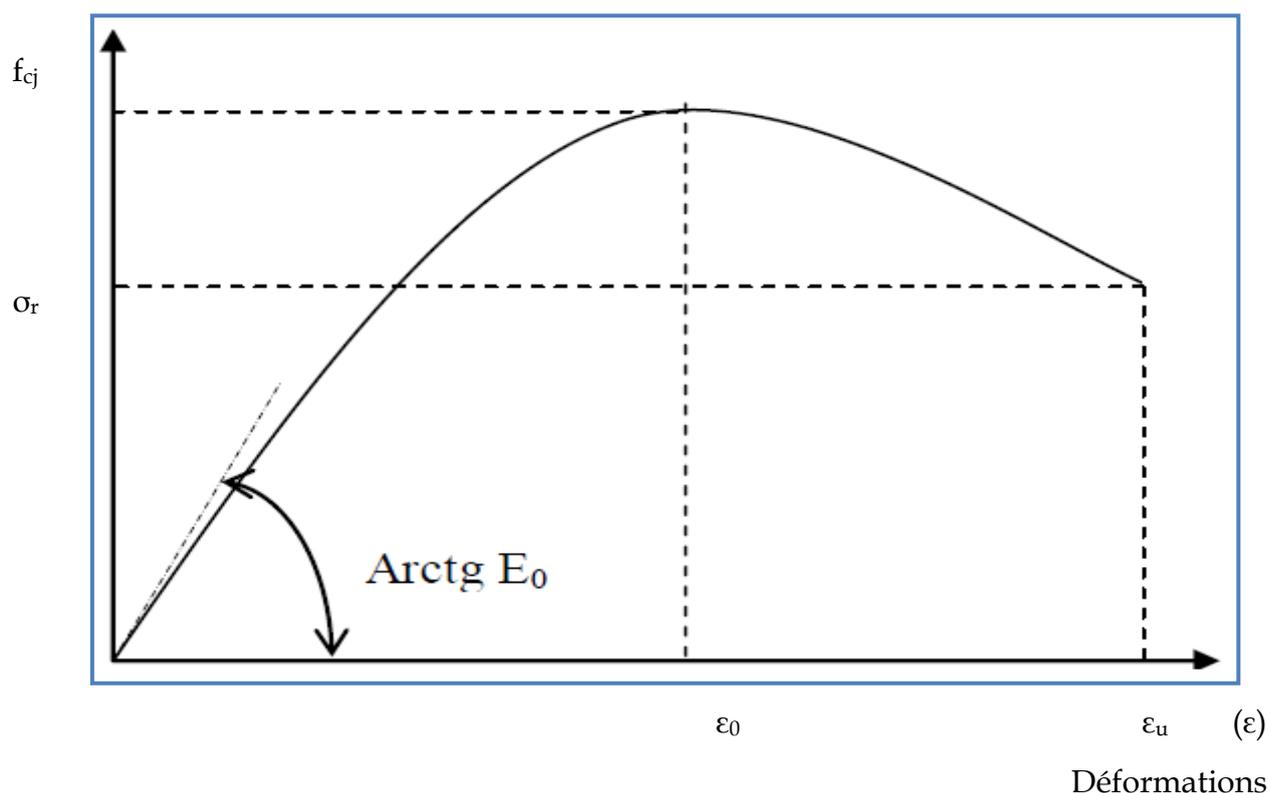
Contraintes (σ)

Figure I-9 : Diagramme contrainte - déformation du béton en compression simple, SARGIN [SAR. 68].

$$\sigma = f_{cj} \frac{R_b \cdot \bar{\epsilon} + (R_c - 1) \bar{\epsilon}^2}{1 + (R_b - 2) R_c \bar{\epsilon}^2}$$

avec :

$$\bar{\epsilon}_r = \epsilon / \epsilon_0$$

$$k_b = E_0 \epsilon_0 / f_{cj}$$

f_{cj} : résistance à la compression du composite,

E_0 : module élastique à l'origine du composite,

ϵ_0 : déformation correspondant au pic des contraintes,

$k'_b = k_b - 1$: bétons normaux,

$k'_b = 0$: bétons fragiles,

ϵ_{cu} : déformation de rupture.

σ_r : contrainte de rupture.

I.9.2.2. Modèle de FANELLA et NAAMAN [FAN. 85]

Ce modèle présente l'avantage de mieux représenter le comportement du composite dans la branche descendante par rapport à celui de SARGIN. Néanmoins, il présente de grandes difficultés pour le calcul des coefficients a, b, c et d, dans la mesure où cela nécessite la connaissance des diagrammes (σ - ε) complets. L'établissement des diagrammes (σ - ε) exige un grand soin lors de la réalisation des essais. Aussi, son utilisation manque de souplesse et peut conduire à des difficultés concernant la recherche du point d'inflexion. Ce modèle est décrit par l'expression suivante :

$$\sigma = (a\varepsilon + b\varepsilon^2) / (1 + c\varepsilon + d\varepsilon^2)$$

où a, b, c et d sont des coefficients déterminés à partir des conditions aux limites.

I.9.2.3. Modèle de ABSI et NAAMAN

Ce modèle décrit la branche descendante (branche II) relative à l'apparition de micro-fissures. Son expression est de la forme:

$$\sigma = ae^{-b(\varepsilon-\varepsilon_0)^m} + c$$

a, b, c, m : coefficients positifs ($m > 1$) déterminés par les conditions aux limites.

ε_0 : déformation correspondant à la contrainte maximale σ_0 .

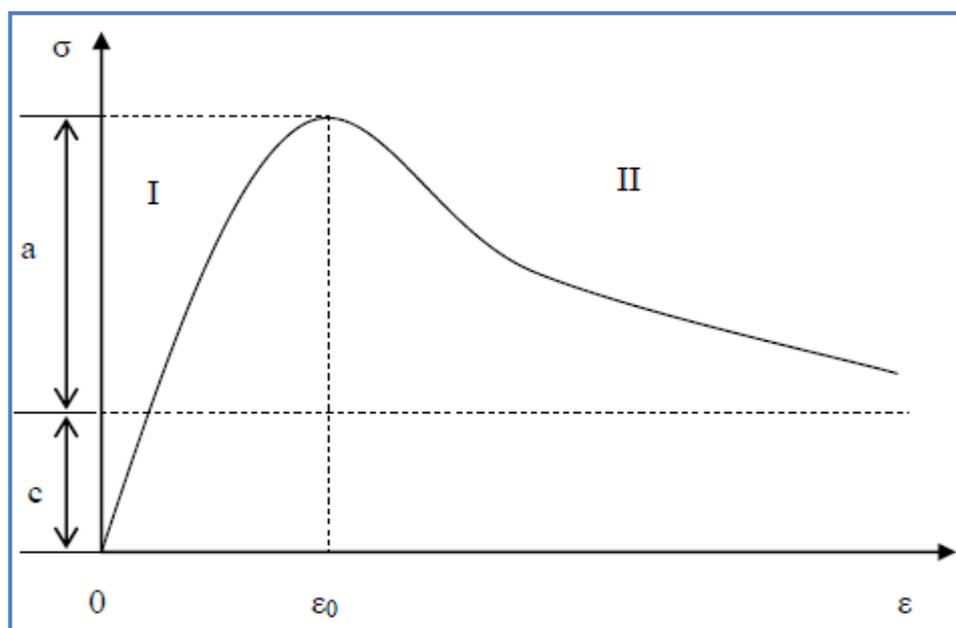


Figure I-10 : Diagramme contrainte - déformation en compression, ABSI et NAAMAN
[ABS. 86]

Nous pouvons noter que ce modèle présente les mêmes avantages et inconvénients que celui de FANELLA et NAAMAN [FAN. 85].

I.9.3. Modélisation du comportement du béton de fibres en traction

La présence des fibres modifie le comportement du béton en traction. Pour caractériser cette modification, peu de modèles sont actuellement proposés. Nous citerons dans cette étude cinq modèles proposés pour le calcul des sections en béton de fibres soumises à des chargements uniaxiaux.

I.9.3.1. Modèle de MAZARS

Ce modèle a été développé pour décrire le comportement du béton armé de fibres à partir de la théorie de l'endommagement MAZARS [MAZ. 88]. Cette théorie a été construite initialement pour modéliser le comportement vis à vis du fluage des métaux. MAZARS décrit le comportement non linéaire du béton de fibres en introduisant dans la relation contrainte - déformation élastique un facteur d'endommagement D .

La loi de comportement s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma = E_0 \cdot \varepsilon & \varepsilon < \varepsilon_0 \\ \sigma = E_0(1-D)\varepsilon & \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases}$$

avec :

$$D = 1 - \frac{A_t}{e^{B_t(\varepsilon - \varepsilon_0)}} - \frac{\varepsilon_0(1 - A_t)}{\varepsilon}$$

Où :

- D : facteur d'endommagement compris entre 0 et 1.
- E_0 : module élastique du béton à l'origine.
- ε_0 : déformation correspondant à la contrainte maximale de traction.
- A_t, B_t : coefficients positifs.

Selon les recommandations de l'auteur, il faut déterminer les paramètres A_t , B_t et ε_0 par des essais de flexion. D'après des essais en flexion réalisés sur des éléments en béton de fibres à crochets, VINCENT [VIN. 90] a obtenu les valeurs suivantes:

$$5.5 \cdot 10^{-5} < \varepsilon_0 < 8.9 \cdot 10^{-5} \quad , \text{ en moyenne} \quad \varepsilon_0 = 7.4 \cdot 10^{-5}$$

$$0.196 < A_t < 0.676 \quad , \text{ en moyenne} \quad A_t = 0.434$$

$$5000 < B_t < 10135 \quad , \text{ en moyenne} \quad B_t = 7205$$

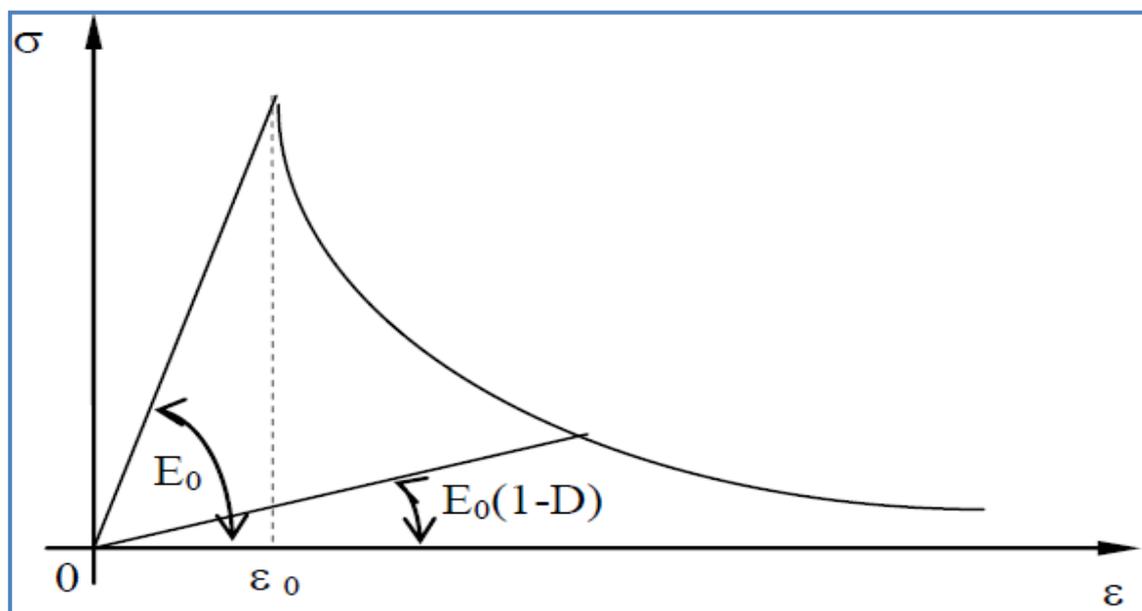


Figure I-11 : Comportement du béton de fibres en traction, MAZARS [MAZ. 88].

L'inconvénient majeur de ce modèle réside dans la difficulté de déterminer les paramètres A_t , B_t et ε_0 par des essais de flexion.

I.9.3.2. Modèle de LIM

Ce modèle est construit pour décrire le comportement d'un élément en béton armé de fibres. Il exprime la charge P en fonction de l'allongement ΔL de l'élément.

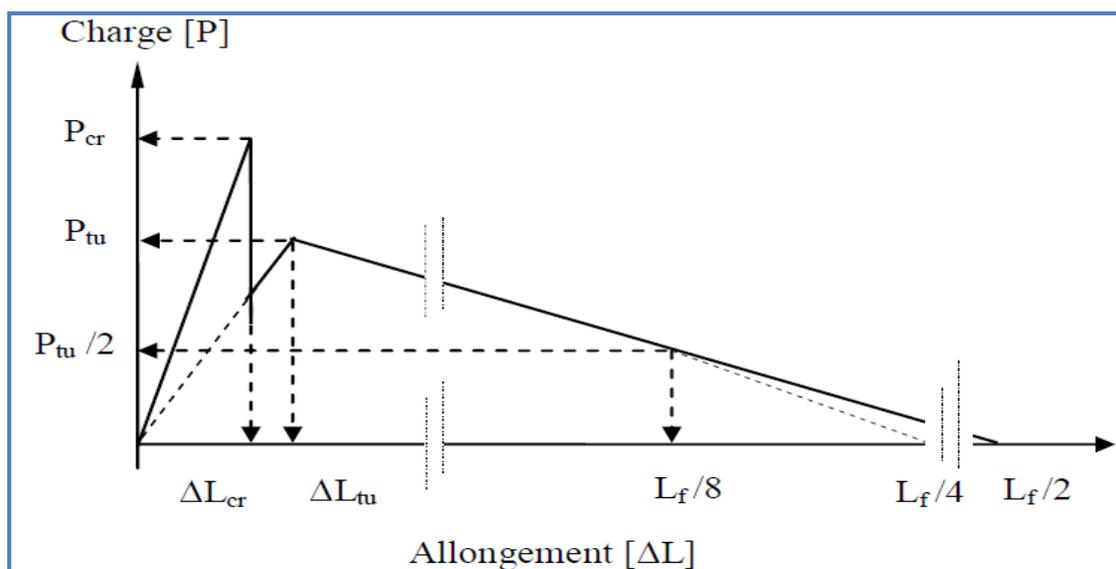


Figure I-12 : Comportement du béton de fibres en traction, LIM [LIM. 87].

Les paramètres de ce modèle peuvent être déterminés à partir des propriétés du béton et des fibres. En revanche, leur détermination reste relativement complexe. Ainsi, l'auteur propose un diagramme contraintes - déformations simplifié.

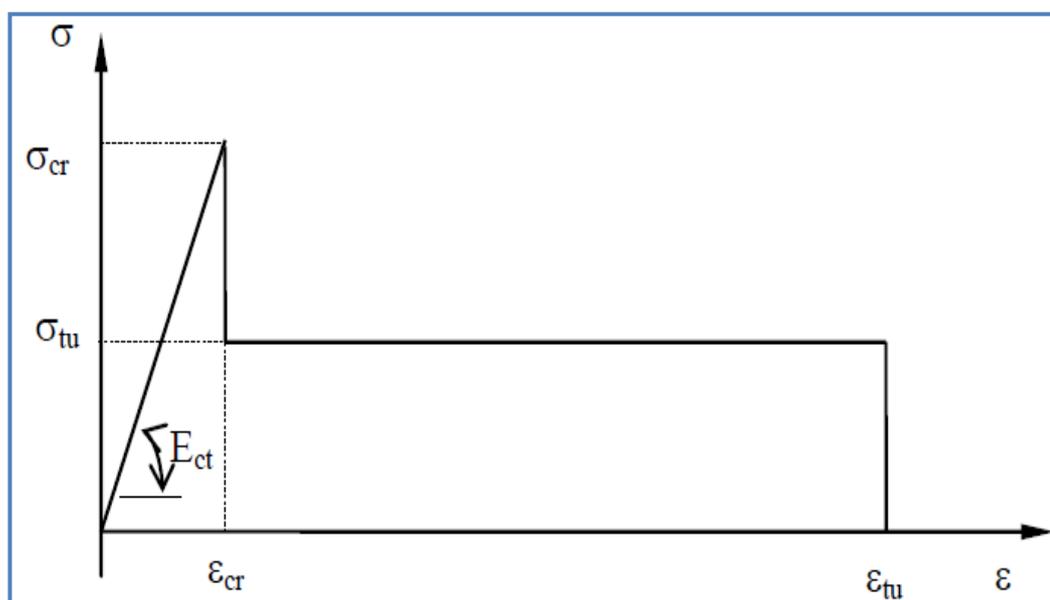


Figure I-13 : Diagramme contrainte-déformation simplifié du béton de fibres, LIM et al [LIM. 87].

E_{ct} : module élastique du composite,

$$E_{ct} = E_b V_b + 0.14 \Gamma_1 E_f V_f$$

σ_{tu} : résistance résiduelle,

$$\sigma_{tu} = \Gamma_1 \Gamma_0 V_f L_f \tau_u / (2.r)$$

f_{ct} : résistance à la traction du composite,

$$f_{ct} = E_{ct} \varepsilon_{cr}$$

ε_{tu} : déformation ultime,

$$\varepsilon_{tu} = L_f / 16 L$$

V_b : pourcentage en volume du béton,

V_f : pourcentage en volume des fibres,

E_f : module élastique des fibres,

Γ_1 : rapport entre la contrainte moyenne développée dans une fibre et la contrainte maximale,

L_f : longueur des fibres,

Γ_0 : facteur d'orientation ($\Gamma_0 = 0.405$, pour une orientation aléatoire supposée des fibres),

ε_{cr} : déformation à la rupture du composite,

$$\varepsilon_{cr} = \varepsilon_{bt} + \Gamma_1 \Gamma_0 V_f (\varepsilon_{ft} - \varepsilon_{bt})$$

ε_{ft} : déformation au seuil élastique des fibres,

ε_{bt} : déformation à la rupture du béton en traction,

τ_u : résistance d'adhérence fibres-matrice de béton,

r : rapport entre la surface de la fibre et son périmètre,

L : longueur de référence. Dans le cas de la flexion c'est l'espacement moyen entre deux fissures voisines.

Ce modèle présente l'avantage de prédire le comportement du composite à partir des propriétés du béton et des fibres. Cependant, Il ne peut décrire le comportement du composite dans le cas des forts dosages en fibres.

I.9.3.3. Modèle de BOUAFIA

Pour décrire le comportement des bétons de fibres en traction, Y. BOUAFIA a proposé un modèle basé sur les hypothèses suivantes :

- les fibres sont dispersées dans le béton de façon aléatoire ou plutôt uniforme,
 - ❖ avant fissuration :
 - le comportement est élastique linéaire, les fibres retardent la microfissuration ;
 - l'adhérence entre les fibres et le béton est parfaite,
 - ❖ après fissuration :
 - le comportement est élastique non linéaire ;
 - la rupture survient par arrachement des fibres ;
 - la contrainte de cisaillement à la surface des fibres atteint la résistance maximale τ_u tout au long de la fibre.

Ce modèle se présente sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma &= E_0 \cdot \varepsilon && \text{pour} && \varepsilon < \varepsilon_{cr} \\ \sigma &= f_t \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{cr}^2)}{2(\varepsilon - \varepsilon_u^2)} && \text{pour} && \varepsilon_{cr} > \varepsilon \quad \text{et} \quad V_f < V_{fc} \quad , \quad \text{courbe1} \\ \sigma &= f_t - A_t \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{cr}^2)}{2(\varepsilon - \varepsilon_u^2)} && \text{pour} && \varepsilon_{cr} > \varepsilon \quad \text{et} \quad V_f > V_{fc} \quad , \quad \text{courbe2} \end{aligned}$$

Avec :

- E_0 : module initial du composite,
- ε_{tu} : déformation correspondant à la contrainte maximale,
- ε_{ct} : déformation à la fissuration du béton,
- ε_u : déformation ultime ($\varepsilon_u = 0.5$),
- f_t : résistance de traction à la fissuration du composite,
- f_{tu} : résistance maximale,
- V_f : pourcentage en volume des fibres,

- V_{fc} : pourcentage volumique critique des fibres séparant les diagrammes contrainte-déformation en deux familles,

- A_t : paramètre du modèle:

$$A_t = 2 \frac{(f_{tu} - f_t)}{(\varepsilon_{tu} - \varepsilon_{cr})}$$

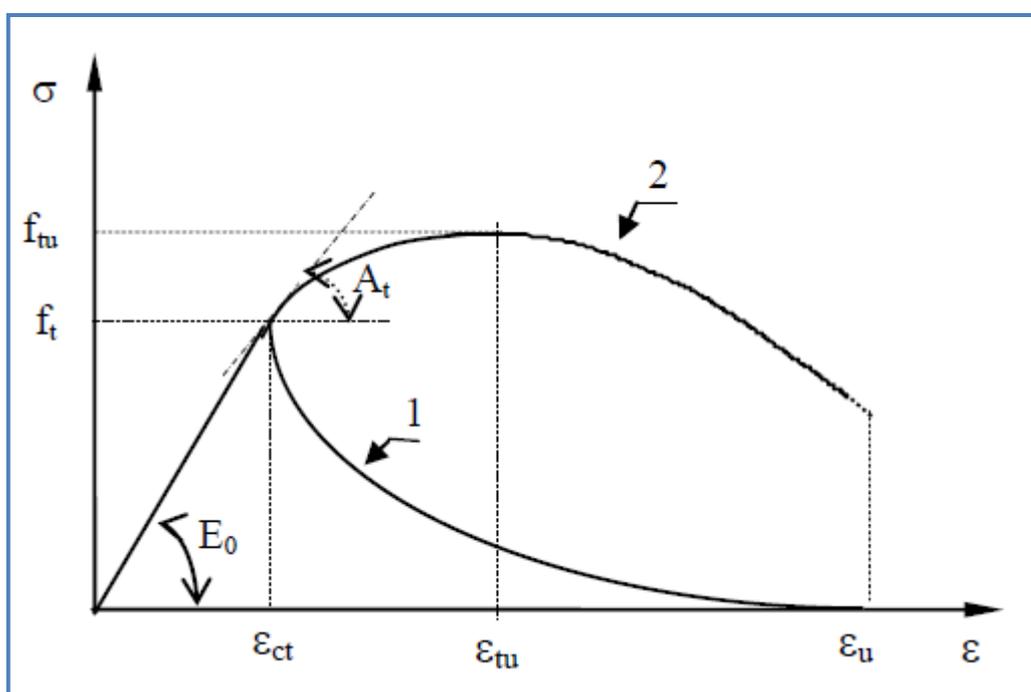


Figure I-14 : Comportement du béton de fibres en traction, BOUAFIA [BOUA. 87].

L'auteur classe le comportement du béton de fibres en deux familles.

Dans la première famille, l'effort repris par les fibres après fissuration du béton est inférieur à l'effort maximum repris par le béton seul. Ainsi, après fissuration du béton l'effort décroît (courbe 1).

Pour la seconde famille, au contraire, l'effort repris par les fibres après fissuration est supérieur à l'effort maximum repris par le béton seul. Après fissuration du béton, l'effort croît (courbe 2) jusqu'à un maximum correspondant à la mobilisation maximale de l'adhérence des fibres dans le béton.

Cette classification dépend essentiellement de la teneur en fibres. Un pourcentage volumique critique des fibres qui sépare les diagrammes contrainte-déformation en deux familles est défini, ce pourcentage est donné par :

$$V_{fc} = \frac{f_{tb}}{\Gamma_0 (l_f \tau_u / \phi - n f_{tb})}$$

Avec :

- f_{tb} : résistance à la traction du béton,
- Γ_0 : facteur d'orientation,
- l_f : longueur des fibres,
- ϕ_f : diamètre des fibres,
- τ_u : adhérence ultime fibre-matrice béton,
- n : coefficient d'équivalence acier-béton ($n = E_a / E_b$).

Le facteur d'orientation des fibres est défini par l'auteur en admettant une orientation bidimensionnelle (figure I-15).

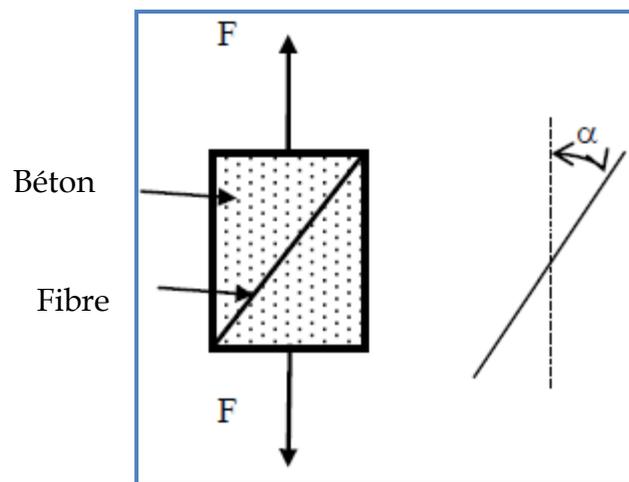


Figure I-15 : Orientation bidimensionnelle des fibres, BOUAFIA [BOUA. 87]

$$\Gamma_0 = (\cos \alpha)_{\text{moyen}} = 2/\pi \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha = 0.637$$

On peut noter que ce modèle présente l'avantage de prédire le comportement du composite à partir seulement des propriétés des fibres et du béton. De plus, il est élargi aux forts dosages en fibres. Néanmoins, au voisinage inférieur du volume critique des fibres, la branche descendante sous estime la résistance du composite.

Par contre, pour les faibles dosages en fibres, cette même branche donne des résultats satisfaisants.

I.9.3.4. Modèle de ZHAN

ZHAN [ZHA. 91] propose deux modèles de comportement post - fissuration en traction.

- *Modèle 1* : modèle élastoplastique réduit

$$\begin{cases} \sigma = f_{tu} & \text{pour } \varepsilon_t < \varepsilon < \varepsilon_{tu} \\ \sigma = 0 & \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_{tu} \end{cases}$$

Où :

- f_{tu} : résistance résiduelle de traction

- ε_{tu} : déformation ultime ($\varepsilon_{tu} = 10^{-2}$)

- *Modèle 2* : modèle élastoplastique radouci

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\alpha \varepsilon_r + 100}{\alpha \varepsilon_r^3 + 100} f_t + \frac{(\varepsilon_r - 1)^\beta}{(\varepsilon_r - 1)^\beta + 10^4} f_{tu} & \text{pour } \varepsilon_t < \varepsilon < \varepsilon_{tu} \\ \sigma = 0 & \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_{tu} \end{cases}$$

$$\text{avec } \varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_t$$

α et β : coefficient du modèle

Les paramètres du modèle sont obtenus à partir d'essais en traction, pour F_{ft} , et à partir de la formule proposée par LIM.

$$F_{tu} = \Gamma_0 V_f (l_f / \phi_f) \tau_{tu}$$

Γ_0 : facteur d'orientation des fibres,

V_f : pourcentage en volume des fibres,

l_f : longueur des fibres,

ϕ_f : diamètre des fibre,

τ_{tu} : adhérence ultime fibre - matrice.

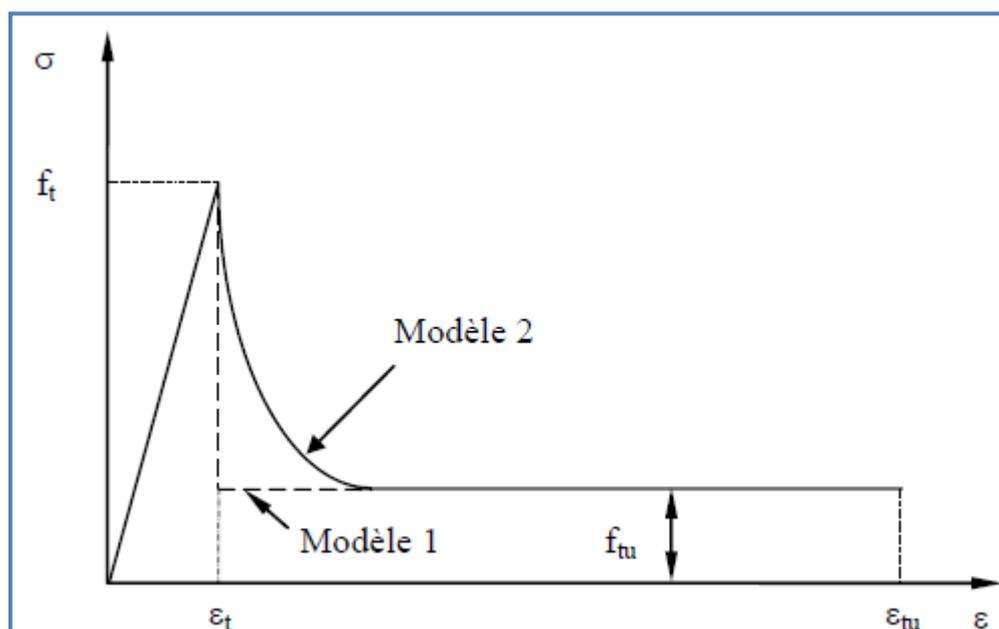


Figure I-16 : Relation contrainte-déformation, ZHAN [ZHA. 91].

On peut noter que ces deux modèles ont été confrontés aux résultats expérimentaux sur des pieux en vraie grandeur pour des dosages en fibres relativement faibles. Les résultats obtenus dans ce cas sont satisfaisants. Néanmoins, la difficulté que présente ce modèle réside dans l'ajustement des coefficients α , β qui ne sont pas fixés. De plus, il ne tient pas compte de la perte d'adhérence due au glissement des fibres pour les grandes déformations. Ce qui peut conduire à une nette différence avec le comportement réel dans le cas de dosages importants en fibres.

I.9.3.5. Modèle de BOUAFIA, KACHI et FOURE

Une loi effort - ouverture de fissure tenant compte de la géométrie et de la résistance des fibres, de la répartition et de l'orientation des fibres, de l'adhérence des fibres à la matrice et de la teneur en fibres a été proposée par les auteurs en 1998

[BOUA. 98]. Ce modèle s'écrit :

$$\begin{cases} F = BE_{ct}\varepsilon & \text{si } w = 0 \\ F = B\sigma_{uc} - B\left[\sigma_{uc} - (f_{ft} - f_{bt})\right] \frac{(w - w_u)^6}{w_u^6} & \text{si } 0 \leq w \leq w_u \\ F = B\sigma_{uc} \left[1 - \frac{(w - w_u)^6}{(w_r - w_u)^6}\right] & \text{si } w_u \leq w \leq w_r \end{cases}$$

Où :

- B : aire de la section de l'éprouvette,
- E_{ct} : module initiale du composite en traction,
- σ_{uc} : contrainte maximale fictive du composite à l'état ultime,
- ε : déformation,
- f_{bt} : résistance du béton à la traction,
- f_t : résistance du composite à la traction,
- w : ouverture des fissures,
- w_u : ouverture ultime des fissures,
- w_r : ouverture des fissures à la rupture totale du composite.

La représentation graphique de cette loi est illustrée sur la figure ci-dessous (Figure I-17).

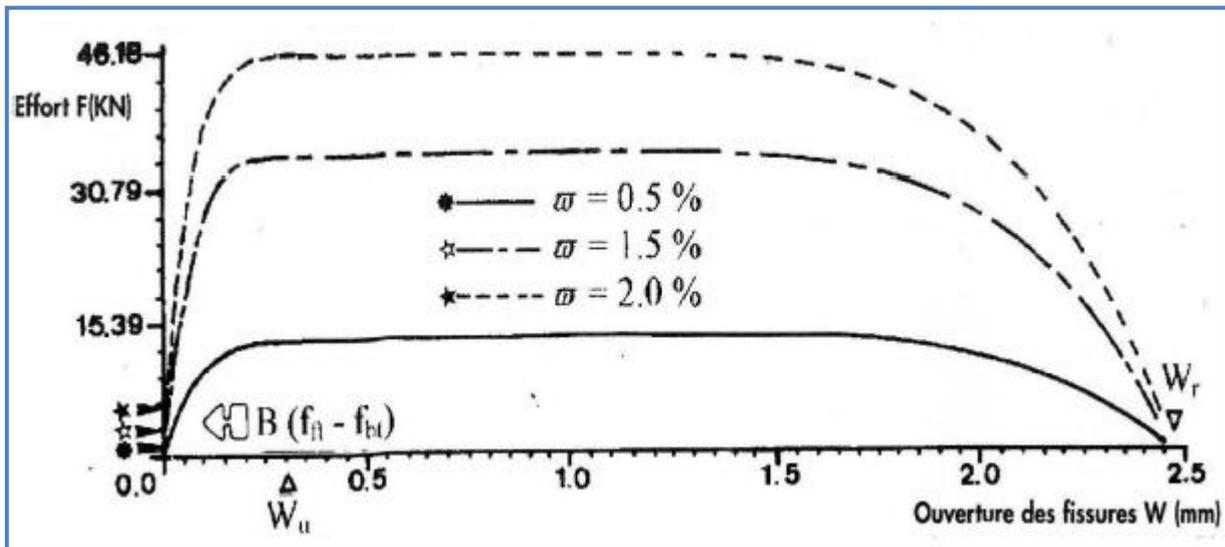


Figure I-17 : Courbe effort -ouverture de fissure [BOUA. 98].

Avant fissuration, le comportement est linéaire. La contrainte moyenne dans le composite et le module élastique du composite s'écrivent :

$$\sigma = f_{bt} (1 + n\varpi_{eff})$$

$$E_{cr} = E_{b0} (1 + n\theta_0\varpi)$$

Avec :

- E_{b0} : module initial du béton en compression,
- n : coefficient d'équivalence acier-béton,
- θ_0 : facteur d'orientation des fibres,
- ϖ : pourcentage en volume des fibres,
- ϖ_{eff} : pourcentage effectif des fibres.

Après fissuration, le comportement est élastique non linéaire. La rupture intervient soit par arrachement soit par rupture des fibres.

- Quand il y'a arrachement des fibres, la contrainte fictive maximale à l'état ultime du composite et l'ouverture des fissures s'écrivent :

$$\sigma_{uc} = \varpi \theta_0 \frac{l_f}{\phi} \tau_u$$

$$w_r = 1.2l_f (\varepsilon_{rf} - \varepsilon_{ft})$$

- Quand il y'a rupture des fibres, la contrainte à la rupture dans la fibre et l'ouverture des fissures s'écrivent :

$$\sigma_r = \frac{l_f \tau_u}{\phi}$$

$$w_r = l_f (\varepsilon_{rf} - \varepsilon_{ft})$$

Avec :

ε_{rf} : déformation de rupture d'une fibre,

ε_{ft} : déformation de fissuration du béton,

ϕ : diamètre d'une fibre,

τ_u : contrainte d'adhérence fibre-matrice béton.

Lors de la confrontation des résultats obtenus par calculs à ceux issus des essais, une divergence entre ces résultats est apparue. En effet, au début de la fissuration, les auteurs ont constaté que la chute de l'effort dans le composite après l'apparition des fissures est moins brutale que celle décrite par le modèle. Cela est lié à la non prise en compte de la contribution du béton tendu dans la reprise des efforts après fissuration. En tenant compte de l'évolution de la contrainte, après fissuration, dans le béton tendu, il a été proposé [BOUA. 02] la relation suivante :

$$F = BE_{cr} \varepsilon \quad \text{si } w = 0$$

$$F = B\sigma_{uc} - B \left[(\sigma_{uc} - f_{ft}) \right] \frac{(w - w_u)^6}{w_u^6} \quad \text{si } 0 \leq w \leq w_u$$

$$F = B\sigma_{uc} \left[1 - \frac{(w - w_u)^6}{(w_r - w_u)^6} \right] \quad \text{si } w_u \leq w \leq w_r$$

Dont la représentation graphique est donnée ci-dessous (Figure I-18).

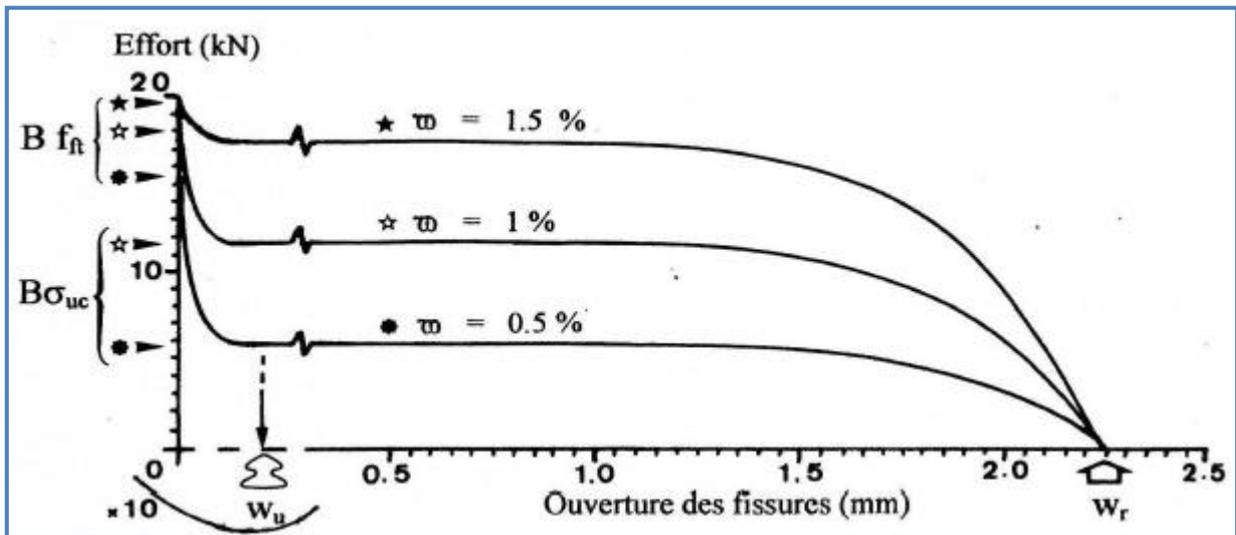


Figure I-18 : Relation effort -ouverture de fissure [BOUA.02].

Pour exprimer cette relation force-ouverture de fissure par une relation contrainte-déformation ils ont utilisé la notion de référence l_r . Cette longueur délimite la zone, autour de la fissure, perturbée par la localisation de la déformation résultant de l'ouverture de la fissure principale. Elle est liée à la hauteur de la section h de la poutre par la relation:

$$l_r = \beta h \quad \text{avec} \quad \beta : \text{constante du modèle.}$$

La déformation ultime correspondant à la mobilisation de la totalité de l'adhérence est donnée par :

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{ft} + \frac{w_u}{l_r} = \varepsilon_{ft} + \frac{\tau_u l_f^2}{3E_f \phi \beta h}$$

Pour limiter le risque de corrosion des fibres, cette déformation est limitée à la déformation de rupture des fibres :

$$\varepsilon_{rf} = \varepsilon_{ft}$$

et l'ouverture des fissures, à la rupture totale du composite, s'écrit :

$$w_r = l_r (\varepsilon_{rf} - \varepsilon_{ft})$$

La relation force - ouverture de fissure transformée en une relation contrainte-déformation s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma = E_{ct}\varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ft} \\ \sigma = \sigma_{uc} - [(\sigma_{uc} - f_{ft})] \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{ft} - \varepsilon_u)^6} & \text{si } \varepsilon_{ft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ \sigma = \sigma_{uc} \left[1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_u)^6} \right] & \text{si } \varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{rt} \end{cases}$$

et sa représentation graphique est donnée sur la figure ci-dessous :

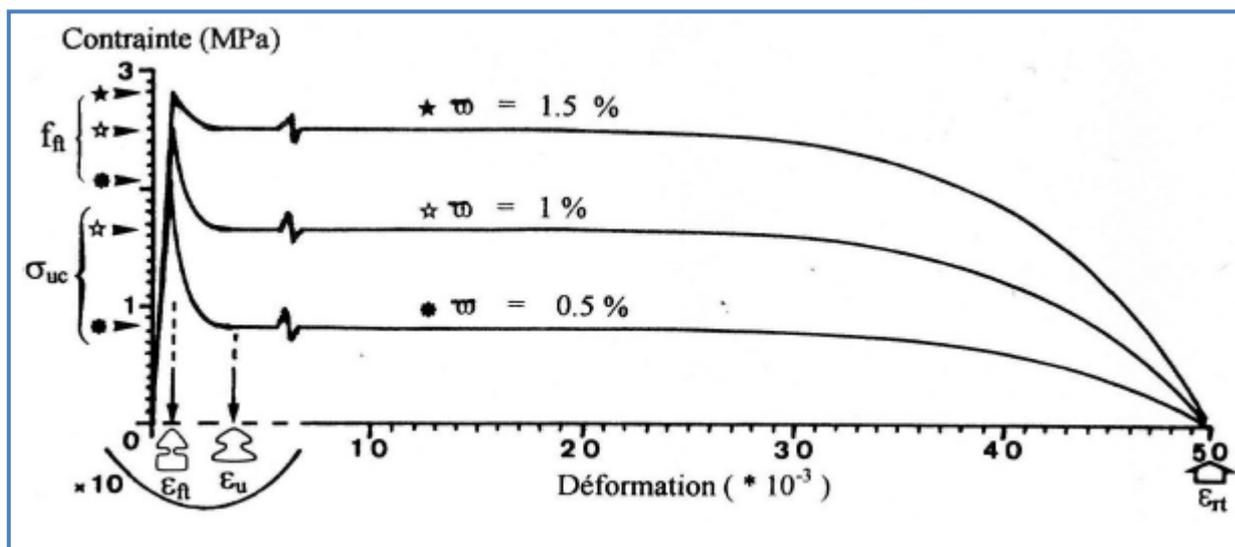


Figure I-19 : Loi de comportement en traction du béton armé de fibres d'acier
[BOUA.02].

I.10. Conclusion

La modélisation du comportement du béton de fibres est généralement établie à partir des résultats expérimentaux. Hormis les modèles de ZHAN [ZHA. 91] et BOUAFIA, FOURE et KACHI [BOUA.98, BOUA.02] aucun modèle n'a été validé par des essais en vraie grandeur, de plus, il convient de remarquer que :

- tous les modèles cités ne décrivent le comportement du béton de fibres en traction que pour les faibles pourcentages en fibres. A l'exception de celui de BOUAFIA qui distingue entre les bétons à faibles et forts pourcentages en fibres. Pour cela, il propose deux lois de comportement et définit un pourcentage critique des fibres pour le passage d'une loi à une autre.

- de plus tous les modèles sont basés sur l'hypothèse suivante : la rupture du composite n'intervient que par arrachement des fibres.

II. MÉTHODE DE CALCUL

II.1.Introduction

Sous des sollicitations proches des sollicitations ultimes, une section en BFM armé, béton armé et béton précontraint se plastifie et se fissure. Le calcul en élasticité linéaire ne permet pas d'évaluer le comportement réel de la section. On est alors amené à faire une étude en élasticité non linéaire. Cette question a fait l'objet de plusieurs études dont on peut citer [BOUA. 87], [KACH. 97] et [KACH. 06].

Dans cette étude, on présente l'étude d'une section droite en BFM armé, béton armé et béton précontraint.

II.2.Modélisation des matériaux à comportement réels

Nous allons donc présenter les lois des comportements réels retenus pour le béton et l'acier.

II.2.1.Comportement du béton

Le béton présente un comportement différent en traction et en compression. Une représentation de ce comportement est donnée par la courbe contrainte-déformation ci-dessous.

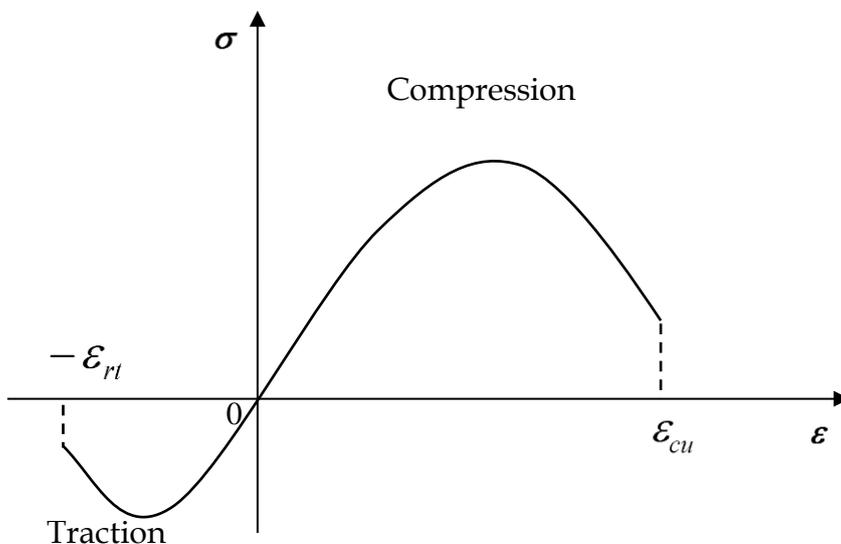


Figure II-1 : Diagramme représentant la loi de comportement du béton

Cette courbe se caractérise par la valeur de $\varphi(\varepsilon)$ qui est considéré comme nulle au-delà de la rupture du béton en compression et en traction (respectivement pour des déformations ε_{cu} et $-\varepsilon_{rt}$).

$\varphi(\varepsilon)$: définit le comportement réel des matériaux

Différents modèles existent pour représenter le comportement du béton.

Nous adoptons ici la loi de SARGIN pour le comportement du béton en compression, et le modèle de GRELAT pour le comportement du béton en traction.

II.2.1.1. Comportement du béton en compression selon Sargin [SAR.68]

Les relations qui lient les contraintes aux déformations des fibres de béton comprimé sont connues à l'âge j quelconque.

Ces lois sont définies en fonction des paramètres ; E_{b0} , f_{cj} , ε_{b0} , ε_{cu} .

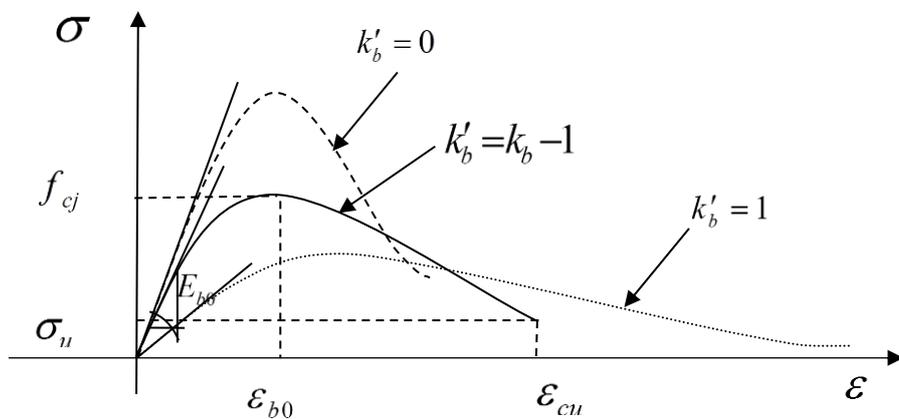


Figure II-2 : Loi de comportement uniaxiale du béton en compression (Sargin)

Caractéristiques de la courbe :

- Branche ascendante, à concavité vers le bas admettant un modèle tangent initial, et un maximum de contrainte qui correspond à la compression f_{cj} ;
- Branche descendante, commençant par le maximum de la branche ascendante et se termine par le point définissant la déformation ultime correspondante à la contrainte ultime du béton.

En admettant un comportement élastique non linéaire, la contrainte est décrite par la loi de SARGIN suivante :

$$\sigma = f_{cj} \cdot \frac{k_b \cdot \bar{\varepsilon} + (k'_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} + k'_b \bar{\varepsilon}^2} \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Avec : } \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad ; \quad k_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_0}{f_{cj}} \quad ; \quad E_{b0} = 11000 \sqrt[3]{f_{c0}}$$

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton,

ε_0 : Déformation de pic correspondant à f_{cj} ,

f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l'âge j.

k'_b et k_b : paramètres adimensionnels, ajustent la branche descendante et ascendante, respectivement, de la loi de Sargin.

Le paramètre k'_b influe essentiellement sur l'allure de la branche descendante.

$k'_b=0$: correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile, avec une descente brutale ;

$k'_b=1$: correspond à un béton ayant un comportement élastique ductile, plastique, correspond à un béton normal, de résistance moyenne.

Nous pourrions adopter d'après [MAIA.79] :

$$K'_b = \begin{cases} k_b - 1 & \text{pour } f_{cj} \leq 30 \text{ MPa} \\ (k_b - 1) \frac{(55 - f_{cj})}{25} & \text{pour } 30 \text{ MPa} < f_{cj} < 55 \text{ MPa} \\ 0 & \text{pour } f_{cj} \geq 55 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

II.2.1.2. Comportement du béton en traction selon GRELAT [GRE.78]

Bien que le béton soit principalement conçu pour résister à la compression, la connaissance de ses propriétés en traction est importante.

La formulation de Grelat [GRE.78] attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (Figure.II-3).

La résistance ne s'annule pas brusquement mais décroît plutôt progressivement jusqu'à plastification et rupture des aciers tendus.

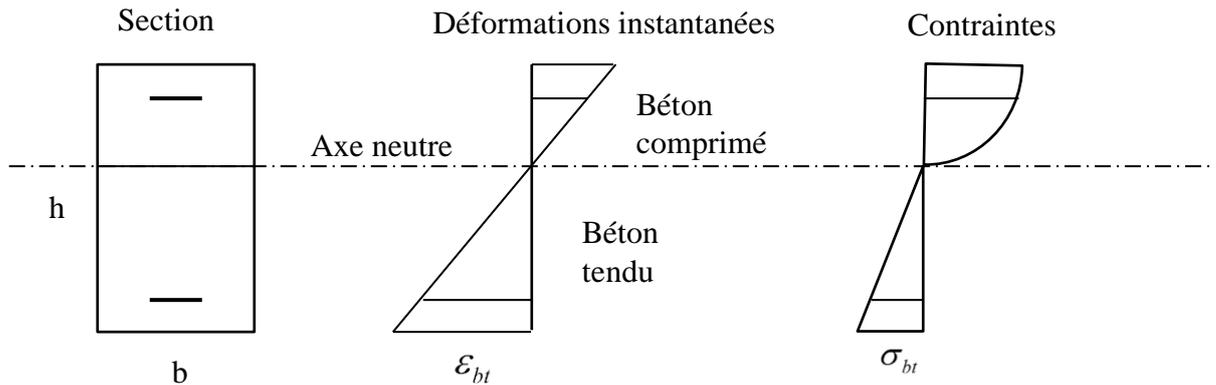


Figure II-3 : Comportement de béton ordinaire avant fissuration

Les fibres du béton tendu d'un module de déformation E_{bt} qui est défini par la contrainte et la déformation instantanée du bord tendu :
$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}} \quad (\text{II.3})$$

Au-delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives. La contrainte ne s'annule pas brusquement, elle décroît selon une loi parabolique (Figure. II-4). Dans ce cas, l'étude concerne le comportement moyen d'une section située entre deux fissures.

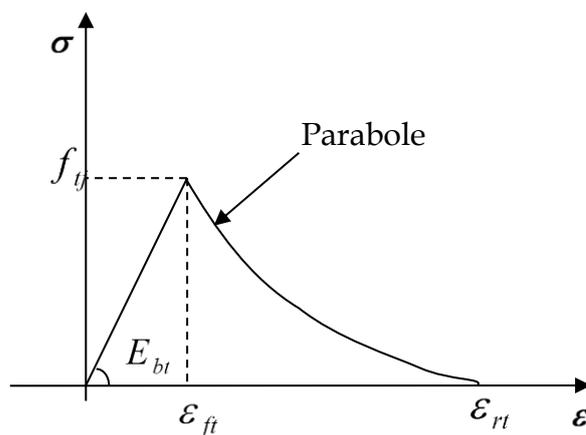


Figure II-4: Diagramme contrainte - déformation instantanée du béton sur le bord tendu (Grelat)

Les relations liant les contraintes aux déformations sont :

- Domaine élastique linéaire

$$\sigma_{bt} = E_{b0} \cdot \varepsilon_{bt} \quad \text{si} \quad |\varepsilon_{bt}| < \varepsilon_{ft}$$

- Fissuration avec participation du béton tendu

$$\sigma_{bt} = -f_{tj} \frac{(\varepsilon_{bt} - \varepsilon_{rt})^2}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2} \quad \text{si} \quad \varepsilon_{ft} < |\varepsilon_{bt}| < \varepsilon_{rt} \quad (\text{II.4})$$

- Fissuration sans participation du béton tendu :

$$\sigma_{bt} = 0 \quad \text{si} \quad |\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{rt}$$

f_{tj} : Résistance du béton a la traction,

ε_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{tj} ,

ε_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton.

II.2.1.3. Comportement du béton de fibres en traction

Plusieurs modèles expérimentales et théoriques pour prédire le comportement contrainte-déformation du béton de fibres ont été proposés.

Nous adoptons ici la loi BOUAFIA, KACHI et FOURE, pour le comportement du béton armé de fibres en traction.

La courbe définissant la relation contrainte-déformation du béton de fibres utilisé pour le modèle proposé par BOUAFIA [BOUA.02], est représentée dans la (figure II-5).

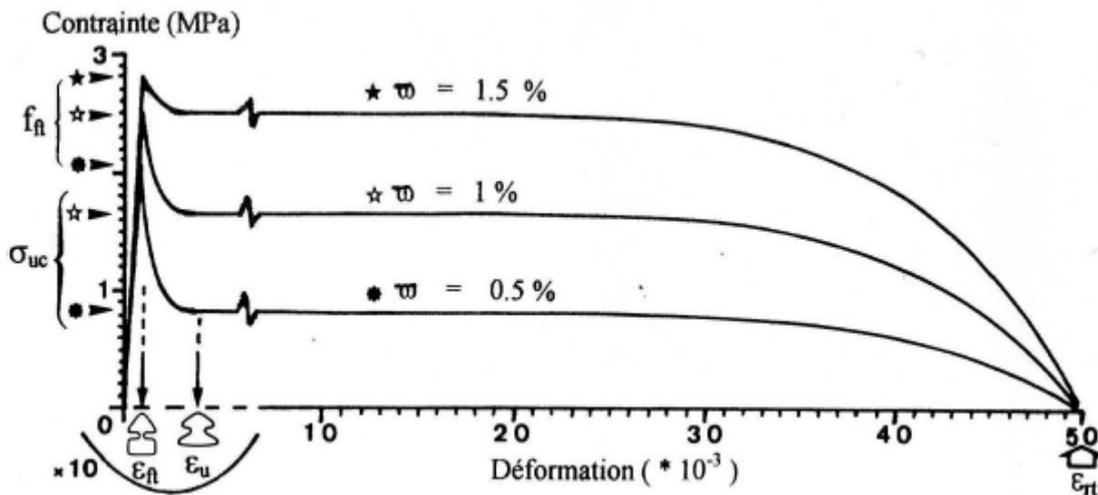


Figure II-5 : Loi de comportement en traction du béton armé de fibres d'acier [BOUA.02].

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = E_{ct} \varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ft} \\ \sigma = \sigma_{uc} - [(\sigma_{uc} - f_{ft})] \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{ft} - \varepsilon_u)^6} & \text{si } \varepsilon_{ft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ \sigma = \sigma_{uc} \left[1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_u)^6} \right] & \text{si } \varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{rt} \end{array} \right. \quad (\text{II.5})$$

Où :

- E_{ct} : module initiale du composite en traction,

$$E_{ct} = E_{b0} (1 + n \theta_0 \varpi) \quad (\text{II.6})$$

n : coefficient d'équivalence acier-béton,

θ_0 : facteur d'orientation des fibres,

ϖ : pourcentage en volume des fibres,

- σ_{uc} : contrainte maximale fictive du composite à l'état ultime,

$$\sigma_{uc} = \varpi \theta_0 \frac{l_f}{\phi} \tau_u \quad (\text{II.7})$$

l_f : longueur d'une fibre,

ϕ : diamètre d'une fibre,

- f_{ft} : résistance du composite à la traction,

$$f_{ft} = f_{bt} (1 + n \theta_0 \varpi) \quad (\text{II.8})$$

f_{bt} : Résistance du béton a la traction,

- τ_u : contrainte d'adhérence fibre-matrice béton

- ε_{ft} : déformation de fissuration du béton,

- ε_u : déformation correspondant à la mobilisation totale de l'adhérence fibres-matrice,

- ε_{rt} : déformation de rupture du composite en traction,

II.2.2. Comportement des aciers

La loi de comportement contrainte - déformation de l'acier sous chargement monotone est supposée identique en traction et en compression. Les différents types d'aciers utilisés dans la présente étude sont les aciers écrouis et les aciers naturels dont la loi de comportement contrainte - déformation en élasto-plastique parfaite est simplifiée.

II.2.2.1. Comportement des aciers passifs

On distingue les aciers naturels et les aciers écrouis.

A). Aciers naturels

Ils sont caractérisés par une loi élasto-plastique parfaite (Figure. II-6)

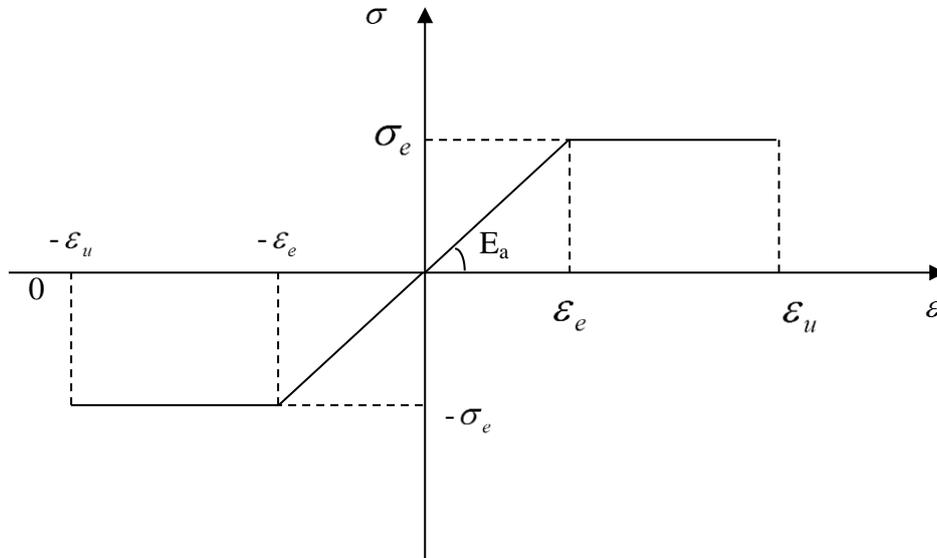


Figure II-6 : Diagramme contrainte -déformation d'un acier naturel
(Loi élasto-plastique parfaite)

$$\begin{cases} \sigma = E_a \varepsilon & \text{pour} & \varepsilon \leq \varepsilon_e \\ \sigma = \sigma_e & \text{pour} & \varepsilon_e < \varepsilon < \varepsilon_u \\ \sigma = 0 & \text{pour} & \varepsilon > \varepsilon_u \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Les déformations extrêmes sont fixées par le règlement BAEL (1991) à 10‰

E_a : Module longitudinal de l'acier,

ε_e : Déformation limite élastique de l'acier,

σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier,

ε_u : Déformation ultime de l'acier.

B). Aciers écrouis

Pour ce type d'acier, on adopte la loi préconisée par le règlement qui suppose un comportement élastique linéaire jusqu'à 70% de la limite élastique. Au-delà, on adopte une courbe de cinquième degré.

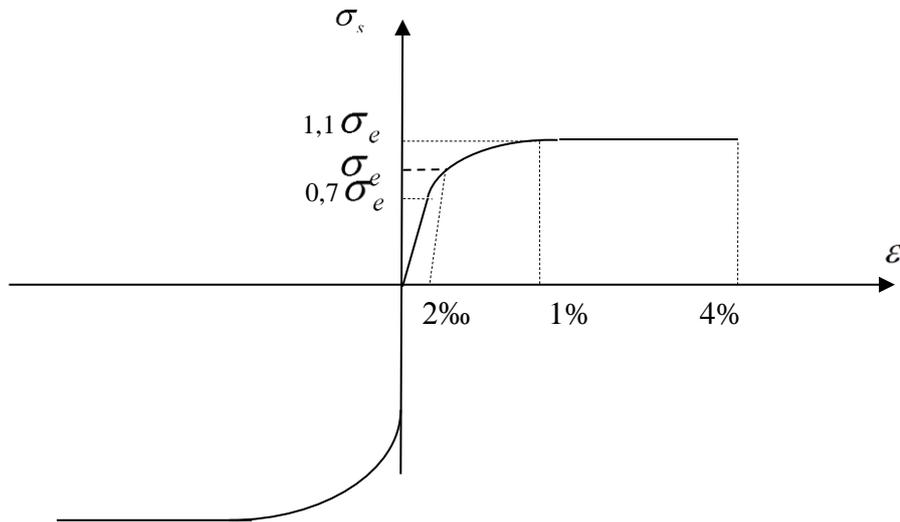


Figure II-7 : Comportement des aciers écrouis

$$\begin{cases} \sigma_s = E_a \varepsilon_s & \text{pour } \sigma_s \leq 0.7\sigma_e \\ \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_a} + 0.823 \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_e} - 0.7 \right)^5 & \text{pour } 0.7\sigma_e < \sigma_s < 1.1\sigma_e \\ \sigma_s = 1.1\sigma_e & \text{pour } 1\% < \varepsilon_s < \varepsilon_r \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

II.2.2.2. Comportement des aciers actifs

Le comportement des armatures de précontrainte (les fils tréfilés et les torons) est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis du béton armé, recommandée par le nouveau règlement BPEL91, (Figure. II-8).

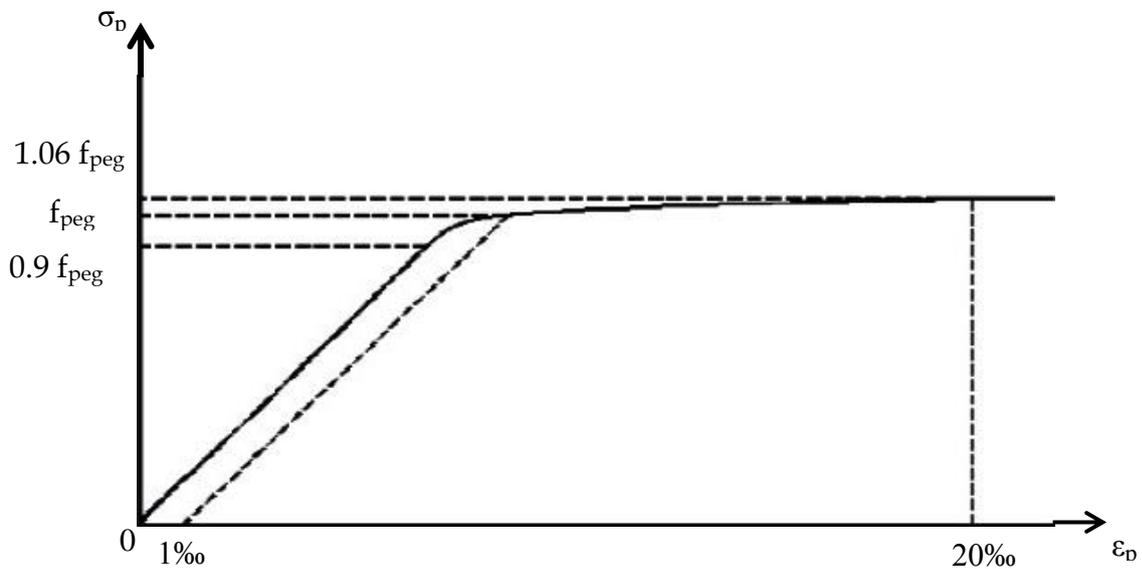


Figure II-8 : Comportement des aciers précontraint

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_p = E_p \varepsilon_p & \text{pour } 0 \leq \sigma_p < 0.9\sigma \\ \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \left(\frac{\sigma_p}{f_{peg}} - 0.9 \right)^5 & \text{pour } 0.9f_{peg} < \sigma_p < 1.06f_{peg} \\ \varepsilon_p = 1.06f_{peg} & \text{pour } \varepsilon_s \geq 2\% \end{array} \right. \quad (\text{II.11})$$

σ_p : Est la contrainte dans l'acier de précontrainte,

ε_p : Est la déformation dans l'acier de précontrainte,

E_p : Est le module d'Young à l'origine,

f_{peg} : Est la limite élastique conventionnelle à 0,1%,

$0.9 f_{peg}$: Est la contrainte où s'arrête le diagramme linéaire,

$1.06 f_{peg}$: Est la contrainte de rupture.

II.3. Modélisation des sections

II.3.1. Modélisation de la section de béton

Pour mieux approcher le domaine délimité par le contour d'une section transversale de forme quelconque, on définit la section de béton par une succession de tables trapézoïdales. Chaque table est définie par les largeurs des fibres extrêmes b_j , b_{j+1} et les ordonnées de ces fibres y_j , y_{j+1} par rapport à un axe de référence (Figure II-9).

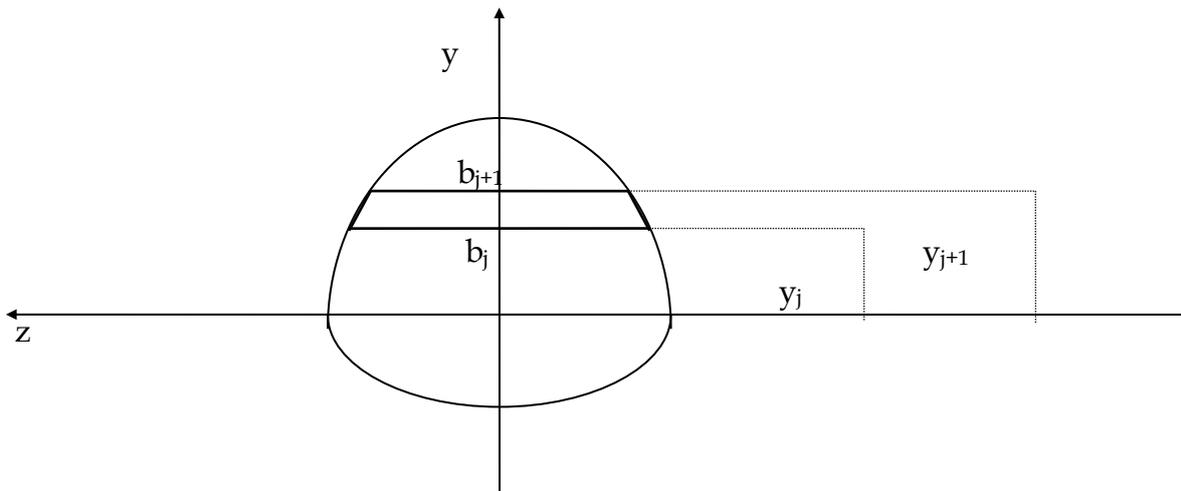


Figure II-9 : Section de béton découpée en tables trapézoïdales.

Le procédé d'intégration étant numérique, il est nécessaire d'exprimer la largeur du trapèze d'ordre j à une cote y par une relation compatible avec le calcul numérique.

$$B(y) = b_j + (b_{j+1} - b_j)(y - y_j) / (y_{j+1} - y_j) \quad (\text{II.12})$$

II.3.2. Modélisation géométrique des armatures

II.3.2.1. Les armatures passives

La section de chaque armature passive est concentrée en son centre de gravité. Les armatures passives sont donc définies comme une succession de lits d'armatures. Chaque lit est défini par son ordonnée y_{ai} et par l'aire totale des armatures situées à ce niveau A_{ai} avec i variant de 1 à n_s , où n_s est le nombre de lits d'armatures passives.

II.3.2.2. Les armatures actives

Les armatures actives sont définies par leur excentricité e_{pk} et leur aire A_{pk} , avec k variant de 1 à n_p où n_p est le nombre de câble de précontrainte.

A la mise en tension, les câbles subissent un allongement initial ε_{p0} . L'action de la précontrainte sur la section est un effort de compression, égal et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la ligne moyenne du câble au point où il traverse la section. Quand le câble est rendu solidaire de la poutre (ancrage, injection de la gaine) il subit les mêmes variations de déformation que le béton situé au même niveau. Il devient alors un élément résistant, et possède une pré-déformation par rapport à la section.

II.4. Étude d'une section droite

Nous nous intéressons à l'étude d'une section droite d'un élément de poutre en BFM armé et/ou précontraint, La section est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations et du comportement élastique non linéaire.

En admettant que les sections restent planes après déformation, que les aciers passifs et les câbles de précontrainte intérieurs après mise en tension, sont parfaitement solidaires au béton, que les aciers passifs et actifs ne reprennent que les efforts axiaux.

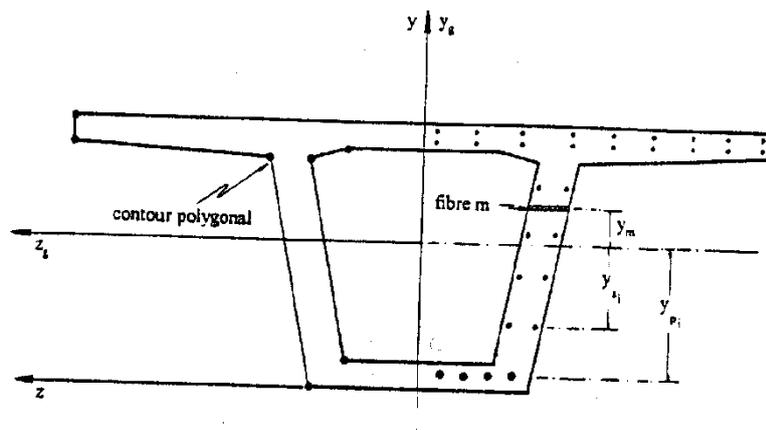


Figure II-10 : Description d'une section typique d'une poutre en béton armé et précontraint.

L'effet de la précontrainte est introduit en tenant compte du phasage éventuel sur la mise en tension des câbles. A la mise en tension, l'action de la précontrainte, sur la section, est un effort de compression, égal et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble, au point où il traverse la section.

Les câbles de précontrainte deviennent des éléments résistants, immédiatement après leur mise en tension, et possédant une pré-déformation par rapport à la section.

Dans le cadre de cette étude, l'analyse non-linéaire concerne aussi bien les sollicitations normales dues à un effort normal N et à un moment de flexion M , agissant dans le plan zy . Que la sollicitation tangente, dans le béton, due à l'effort tranchant T dans le plan zy . On admet que la distorsion due à l'effet de T influe peu sur les déformations normales de la section.

Compte tenu de l'hypothèse des sections planes et de l'adhérence parfaite entre les matériaux constituant la section et on négligeant l'influence de la distorsion sur les déformations normale de la section, la déformation longitudinale ε comptée positivement dans le sens des raccourcissements en un point courant de la section est donnée par :

$$\varepsilon = \varepsilon_g + y_m \cdot \phi_z \quad (\text{II.13})$$

Où :

ε_g : est l'allongement unitaire au centre de gravité de la section, on désigne par ϕ_z la rotation unitaire de flexion autour de l'axe Gy et y_m l'ordonnée du centre de gravité de la fibre d'ordre m.

La déformation tangente notée, γ_y , désigne la déformation de cisaillement de la section dans le plan xy.

Les déformations normales (ε_g, ϕ_z) peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\vec{\delta}_n$, défini par

$$\vec{\delta}_n = (\varepsilon_g, \phi_z)^T \quad (\text{II.14})$$

De plus, la déformation tangente peut s'écrire sous forme :

$$\vec{\delta}_t = \gamma_y \quad (\text{II.15})$$

Nous notons $\vec{\delta}_n$ le vecteur contenant l'accroissement de déformation de la section droite sous sollicitations normales et $\Delta\vec{\delta}_t$ la déformation de la section droite sous sollicitations tangentes.

$$\Delta\vec{\delta}_n = (\Delta\varepsilon_g, \Delta\phi_z)^T \quad (\text{II.16})$$

$$\Delta\vec{\delta}_t = \Delta\gamma_y \quad (\text{II.17})$$

a une déformation $\vec{\delta}_n$ et $\Delta\vec{\delta}_t$ de la section droite correspond, dans une armature adhérente et inclinée à la section, une déformation ε_{si} , défini par NAIT RABAH (1990).

Dans l'hypothèse des armatures passives et actives qui ne reprennent que les efforts axiaux son expression est :

$$\varepsilon_{si} = \cos^2 \alpha_i \{1, y_{si}\} \bar{\delta}_n \quad (\text{II.18})$$

où α est l'angle que fait la ligne moyenne du câble avec l'axe Gx normal à la section droite.

Dans le cas d'une armature active, la mise en tension produit sur chaque section de l'élément un effort de compression opposé à l'effort de traction du câble, appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble au point de passage de celui-ci dans la section. La relation (II.18) doit être corrigée pour tenir compte de la pré-déformation ε_p^* du câble par rapport à la section droite. La déformation ε_p^* dans le câble correspond à l'état de la décompression du béton. Elle exprime la différence entre la déformation du câble et celle de la section, dans la direction du câble, au moment de la mise en tension. La déformation dans l'armature de précontrainte d'ordre i s'écrit dans les hypothèses admises dans cette étude sous forme :

$$\varepsilon_{pi} = \cos^2 \alpha_i \{1, y_{pi}\} \bar{\delta}_n + \varepsilon_{pi}^* \quad (\text{II.19})$$

II.4.1. Calcul des sollicitations internes

Les sollicitations normales à la section droite dues aux matériaux constituant la section, peuvent s'écrire sous la forme d'un vecteur \vec{F}_n , défini dans le repère principal Gzy , lié à la section droite par :

$$\vec{F}_n = \begin{Bmatrix} N_m \\ M_m \end{Bmatrix} = \iint_A \begin{Bmatrix} I \\ y \end{Bmatrix} \sigma_m dydz \quad (\text{II.20})$$

où :

σ_m : est la contrainte normale en un point courant de la section transversale A de l'élément.

La section droite est composée généralement de béton et des armatures passives et actives. On peut écrire comme suit l'équation (II.20) en tenant compte de la contribution de chaque matériau constituant la section:

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{nb} + \vec{F}_{ns} + \vec{F}_{np} \quad (\text{II.21})$$

où :

\vec{F}_{nb} : représente la contribution du béton. Ce vecteur est donné par :

$$\vec{F}_{nb} = \iint_A \begin{Bmatrix} I \\ y_m \end{Bmatrix} \sigma_m dydz \quad (\text{II.22})$$

La contribution des armatures passives, considérées comme concentrées dans leur lit en leur centre de gravité, est donnée par le vecteur \vec{F}_{ns} défini par :

$$\vec{F}_{ns} = \sum_{i=1}^{nsi} \begin{Bmatrix} I \\ y_{si} \end{Bmatrix} \sigma_{si} A_{si} \quad (\text{II.23})$$

Où :

σ_{si} : est la contrainte normale au centre de gravité de la section de l'armature passive d'ordre i , A_{si} la section droite de l'armature et nsi le nombre d'armatures passives traversant la section droite.

La contribution des armatures actives, considérées comme concentrées dans leur lit en leur centre de gravité, est donnée par le vecteur \vec{F}_{np} défini par :

$$\vec{F}_{np} = \sum_{i=1}^{npi} \left\{ \begin{array}{c} I \\ y_{pi} \end{array} \right\} \sigma_{pi} A_{pi} \cos \alpha_i \quad (\text{II.24})$$

Où :

σ_{pi} : étant la contrainte normale au centre de gravité de la section de l'armature active d'ordre i , A_{pi} la section droite de l'armature, α_i l'angle que fait la ligne moyenne du câble d'ordre i avec l'axe x et n_{pi} le nombre d'armatures actives traversant la section droite.

La variation des déformations normales notée, $\Delta \bar{\delta}_n$ de la section droite, produit une variation de sollicitations normales dans les matériaux de la section.

La variation des sollicitations normales $\Delta \bar{F}_{nb}$ dans le béton est donnée par :

$$\Delta \bar{F}_{nb} = \iint_A E_m \begin{bmatrix} I & y_m \\ y_m & y_m^2 \end{bmatrix} dy dz \left\{ \begin{array}{c} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{array} \right\} \quad (\text{II.25})$$

Où :

E_m : désigne le Module élastique longitudinal en un point courant de la section du béton. Il relie l'accroissement de la contrainte normale $\Delta \sigma_m$ à l'accroissement de déformation longitudinale $\Delta \varepsilon_m$ correspondant au point courant.

$$\Delta \sigma_m = E_m \Delta \varepsilon_m \quad (\text{II.26})$$

La section A étant définie comme une succession de couches, les intégrales sur la section sont effectuées dans chaque couche en utilisant la formule de SIMPSON.

La variation de la sollicitation tangente due au béton est calculée en fonction des déformations correspondantes en supposant que le comportement est élastique non linéaire. Elles peuvent s'écrire sous forme :

$$\Delta T_{ym} = [K_{2b}] \Delta \gamma \quad (\text{II.27})$$

Où :

$\Delta \gamma$: est la déformation de la section sous sollicitations tangentes

$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$ est la rigidité de la section à l'effort tranchant dans le plan xz .

où le terme $\frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$ constitue le module corde de cisaillement de la section. La méthode de calcul de ce terme est exposée au chapitre III.

En tenant compte des relations (II.21) et (II.23), nous pouvons écrire sous forme matricielle la relation liant les accroissements de déformations dans une section droite, et les accroissements de sollicitations internes développés dans le béton :

$$\Delta \vec{F}_b = \begin{Bmatrix} \Delta \vec{F}_{nb} \\ \Delta T_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1b} & o \\ o^T & K_{2b} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

Avec

$$K_{1b} = \iint_A E_m \begin{bmatrix} I & y_m \\ y_m & y_m^2 \end{bmatrix} dydz$$

$$o = \begin{Bmatrix} o \\ o \end{Bmatrix}$$

$$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$$

La variation des déformations normales $\{\Delta \delta_n\}$ de la section droite produit une variation des sollicitations normales $\{\Delta F_{ns}\}$ dans les armatures passives donnée par :

$$\Delta F_{ns} = \sum_I^{ns} E_{si} A_{si} \begin{bmatrix} I & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

où E_{si} est le module élastique au niveau de l'armature passive d'ordre i . Il relie l'accroissement des contraintes à l'accroissement des déformations longitudinales correspondantes au niveau du centre de gravité de l'armature.

$$\Delta \sigma_{si} = E_{si} \Delta \varepsilon_{si} \quad (\text{II.30})$$

En négligeant la sollicitation tangente due aux armatures passives, la relation liant les accroissements des déformations aux accroissements des sollicitations internes développées dans les armatures passives s'écrit :

$$\Delta \vec{F}_s = \begin{Bmatrix} \Delta F_{ns} \\ \Delta T_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1s} & 0 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

où $[K_{1s}]$ est la matrice symétrique (2x2) définie par :

$$K_{1s} = \sum_1^{ns} E_{si} A_{si} \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix}$$

La variation des sollicitations normales à la section droite dues aux armatures de précontrainte adhérentes inclinées et supposées concentrées en leur centre de gravité, elle peut s'écrire sous la forme d'un vecteur ΔF_{np} , en négligeant l'influence de la distorsion sur les déformations longitudinales au niveau de l'armature de précontrainte, comme suit :

$$\Delta \vec{F}_{np} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \cos \alpha_i \begin{bmatrix} 1 & y_{pi} \\ y_{pi} & y_{pi}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta \vec{F}_{np} = K_{1p} \Delta \vec{\delta}_n \quad (\text{II.33})$$

avec

$$K_{1p} = \sum_1^{ns} E_{pi} A_{pi} \begin{bmatrix} 1 & y_{pi} \\ y_{pi} & y_{pi}^2 \end{bmatrix} \cos \alpha_i$$

La variation des sollicitations tangentes dans l'armature de précontrainte d'ordre i est donnée par :

$$\Delta \vec{F}_{np} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i \begin{Bmatrix} 1 & y_{pi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta \vec{F}_p = K_{12p} \Delta \vec{\delta}_n \quad (\text{II.35})$$

Avec

$$K_{2p} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \sin \alpha_i \cos \alpha_i^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{pi} \end{Bmatrix}$$

E_{pi} : Module élastique longitudinal de l'armature de précontrainte d'ordre i . Il relie l'accroissement de contrainte $\Delta\sigma_{pi}$ à l'accroissement de déformation $\Delta\varepsilon_{pi}$ au niveau de l'armature d'ordre i :

$$\Delta\sigma_{pi} = E_{pi} \Delta\varepsilon_{pi}$$

La relation matricielle liant les accroissements de déformations de la section aux accroissements de sollicitations internes développées dans les armatures de précontrainte s'écrit:

$$\Delta F_p = \begin{Bmatrix} \Delta F_{np} \\ \Delta F_{tp} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1p} & 0 \\ K_{2p}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\delta}_n \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

avec $\mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

II.4.2. Déformation de la section à l'équilibre

La section droite est supposée soumise :

- d'une part aux accroissements d'efforts sollicitant dus aux forces extérieures.

$$\Delta \bar{\mathbf{F}}_s = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_z \\ \Delta T_y \end{Bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

- d'autre part à l'action de la précontrainte, lors de la mise en tension des câbles :

$$\bar{\mathbf{P}}_s = - \sum_1^{np2} \sigma_{0i} A_{pi} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_i \\ y_{pi} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{Bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Où :

σ_{oi} est la contrainte initiale dans le câble d'ordre i après pertes instantanées, n_{p2} le nombre de câbles de précontraintes traversant la section concernés par la mise en tension

L'équilibre de la section droite se traduit par l'égalité des accroissements d'efforts sollicitant et les accroissements d'efforts internes.

$$\Delta\vec{F}_s + \Delta\vec{P}_s = \Delta\vec{F}_b + \Delta\vec{F}_a + \Delta\vec{F}_p \quad (\text{II.39})$$

Le vecteur $\Delta\vec{P}_s$ contenant l'action de la précontrainte à la mise en tension des câbles est non nul. Ces composantes sont définies par la relation (II.20). Après la mise en tension des câbles intérieurs ce vecteur devient nul et ne participe à l'équilibre de la section que si de nouveaux câbles sont mis en tension à une étape de calcul quelconque. Dans le cas où l'en tient compte des effets différés, le vecteur $\Delta\vec{P}_s$ est non nul. Ces composantes sont alors fonction des contraintes et du temps.

La condition d'équilibre de la section, tenant compte des relations (II.25), (II.27) et (II.29), peut être exprimée par la relation :

$$\Delta\vec{F}_s + \Delta\vec{P}_s = [\mathbf{K}_s] \Delta\vec{\delta} \quad (\text{II.40})$$

$[\mathbf{K}_s]$: Représente la matrice de rigidité de la section, donnée par :

$$[\mathbf{K}_s] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1b} + \mathbf{K}_{1s} + \mathbf{K}_{1p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{2p}^T & \mathbf{K}_{2b} \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

$$\Delta\vec{\delta} = \begin{Bmatrix} \Delta\delta_n \\ \Delta\gamma_y \end{Bmatrix}$$

Pour un accroissement donné d'efforts sollicitant, la résolution en déformation d'équations (II.32) est itérative. La solution peut s'exprimer par :

$$\Delta\vec{\delta} = [\mathbf{K}_s]^{-1} \{ \Delta F_s + \Delta P_s \} \quad (\text{II.42})$$

où $[K_s]^{-1}$ représente la matrice de souplesse de la section.

II.4.3. Méthode itérative de résolution et critères de convergence

En élasticité non-linéaire, il est facile de calculer les efforts développés par une déformation donnée. Cependant il n'existe pas de méthode directe permettant de calculer les déformations produites par des efforts donnés. On est donc contraint à utiliser une méthode itérative pour la recherche de la solution en déformation.

Considérons un état d'équilibre de la section soumise à des sollicitations extérieures, qui peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur \vec{F}_s , défini par :

$$\vec{F}_s = (N, M_z, T_y)^T \quad (\text{II.43})$$

On note par $\vec{\delta}_s$, le vecteur de déformation de la section correspondant. IL est donnée par :

$$\vec{\delta}_s = (\varepsilon_g, \phi, \gamma)^T \quad (\text{II.44})$$

Pour une variation des sollicitations extérieures $\Delta \vec{F}_s$, et sous l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles, l'accroissement de déformation $\Delta \vec{\delta}_s$ de la section est recherché, en utilisant la méthode des substitutions successives utilisant les matrices cordes.

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions, $\Delta \vec{\delta}_0, \Delta \vec{\delta}_1, \dots, \Delta \vec{\delta}_i$ $\Delta \vec{\delta}_i$ étant calculé à partir de $\Delta \vec{\delta}_{i-1}$, en résolvant le système linéaire :

$$\Delta \vec{F}_s + \Delta \vec{P}_s = [K_s]_{i-1} \Delta \vec{\delta}_i \quad (\text{II.45})$$

où $[K_s]_{i-1}$ est la matrice de rigidité de la section, à l'itération (i-1)

En partant de la solution initiale nulle, le schéma de résolution s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\delta}_0 &= \vec{0} \\ \Delta \vec{\delta}_i &= [K_s]_{i-1}^{-1} \{ \Delta \vec{F}_s + \Delta \vec{P}_s \} \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

De façon générale l'équilibre d'une section est défini par deux conditions :

- La limitation de la variation des déformations entre deux itérations successives à une tolérance fixée a priori. Cette variation est déterminée avec la norme euclidienne des déformations :

$$\eta = \left[\frac{\langle \Delta \delta_i - \Delta \delta_{i-1} \rangle \cdot (\{\Delta \delta\}_i - \{\Delta \delta\}_{i-1})}{\langle \delta_s + \Delta \delta_i \rangle \cdot (\{\delta_s\} + \{\Delta \delta\}_i)} \right]^{1/2} \langle Tu \quad (II.47)$$

Où $\{\delta_s\}$ est la déformation à l'étape équilibrée précédente.

Généralement une dizaine d'itérations suffisent pour assurer la convergence.

II.4.4. Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section

Nous définissons ici l'organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section transversale lors d'un accroissement de sollicitations extérieures $\Delta \vec{F}_s$ et de l'action due à la précontrainte \vec{P}_s à la mise en tension des Câbles.

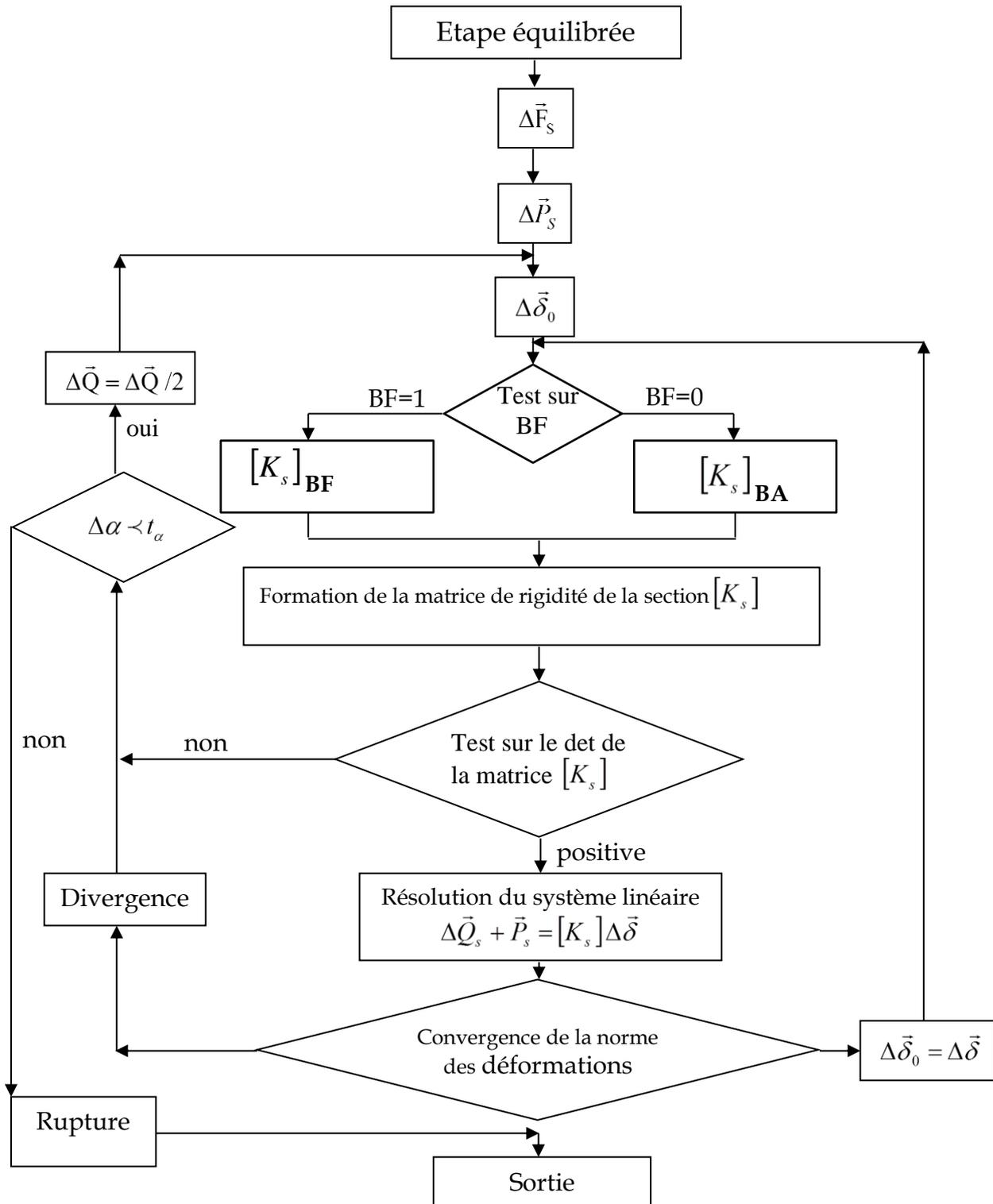


Figure II-11 : Organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section.

II.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons tout d'abord présenté la Modélisation des matériaux à comportement réels et l'étude d'une section droite. Enfin nous avons présenté organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section en BFM armé, béton armé et béton précontraint.

III. COMPORTEMENT À L'EFFORT TRANCHANT DU BÉTON DE FIBRES

III.1. Introduction

On présente dans le cadre de cette étude un modèle basé sur le modèle de KACHI [KACH. 06], ce modèle théorique permettant d'analyser le comportement jusqu'à rupture des poutres en BFM armé et/ou précontraint, soumises à l'effet combiné d'une flexion plane et d'un effort tranchant en élasticité non-linéaire. Il permet l'estimation de la rigidité de cisaillement des poutres avec des formes de section variée.

III.2. Etude de l'équilibre d'une poutre en élasticité non linéaire

En élasticité non linéaire, l'étude de l'équilibre d'une poutre en BFM armé et/ou précontraint passe par la résolution d'un système d'équations de la forme :

$$[\Delta P] = [K]. [\Delta U] \quad (\text{III.1})$$

où $[\Delta P]$ est le vecteur représentant l'accroissement du chargement appliqué à la poutre, $[\Delta U]$ est le vecteur représentant l'accroissement des déplacements des nœuds de la poutre et $[K]$ représente la matrice de rigidité globale de la poutre, qui est construite à partir des matrices de rigidité des sections $[K_s]$.

En élasticité linéaire (module de Young E), l'expression de cette matrice est :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} E.A & 0 & 0 \\ 0 & E.I & 0 \\ 0 & 0 & G.A_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

dans laquelle interviennent l'aire A et l'inertie de flexion I de la section, le module transversal $G = E / 2(1+\nu)$ et l'aire réduite A_1 pour l'effort tranchant. En élasticité non linéaire, pour une poutre en BFM armé et/ou précontraint, l'expression qui sera utilisée est :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta N}{\Delta \delta u} & \frac{\Delta N}{\Delta \delta w} & 0 \\ \frac{\Delta M}{\Delta \delta u} & \frac{\Delta M}{\Delta \delta w} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{moy}} \end{bmatrix} \quad (III.3)$$

où ΔN est l'accroissement de l'effort normal de la section, ΔM est l'accroissement du moment fléchissant de la section, $\Delta \delta u$ est l'accroissement de la déformation au niveau centre de gravité de la section et $\Delta \delta w$ est l'accroissement de la rotation différentielle (courbure) de la section.

Ces déformations répondent à l'hypothèse de planéité des sections (Navier-Bernoulli) ; la déformation longitudinale ε_x est une fonction linéaire de l'abscisse transversale y :

$$\varepsilon_x (y) = \delta u + \delta w \cdot y \quad (III.4)$$

ΔV est l'accroissement de l'effort tranchant de la section et $\Delta \gamma_{moy}$ est l'accroissement de la distorsion moyenne de la section .

Dans beaucoup de logiciels de calcul non linéaire du comportement des poutres en béton armé, le terme dû à l'effort tranchant est soit totalement ignoré - Grelat (1978) - soit pris égal à la valeur $G.A_1$ de l'élasticité linéaire - KACHI (2006). Dans cette étude, la rigidité à l'effort tranchant de chaque section :

$$\overline{GA_1} = \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{moy}} \quad [KACH.06] \quad (III.5)$$

L'algorithme développé simule le comportement en cisaillement jusqu'à rupture d'une section de poutre en élasticité non linéaire. La rigidité de cisaillement globale de la poutre est obtenue alors à partir de celles des sections par un processus d'intégration numérique. Il permet ainsi d'évaluer la rigidité à l'effort tranchant de la poutre à chaque étape du chargement et les flèches correspondantes.

L'expression adoptée ci-dessus pour $[K_s]$ est déjà une simplification. En effet, les termes de couplage entre ΔN et $\Delta \delta w$, et entre ΔM et $\Delta \delta u$, sont incontournables dans l'analyse de flexion composée, mais on a supposé que les termes de couplage entre ΔN

et $\Delta\gamma_{moy}$ (ou ΔV et $\Delta\delta u$), et entre ΔM et $\Delta\gamma_{moy}$ (ou ΔV et $\Delta\delta w$), étaient négligeables. Le couplage entre les déformations dues à V et celles dues à (N, M) évoqué dans l'introduction va se trouver dans la dépendance de $\Delta\gamma_{moy}$ avec les contraintes et déformations dues à N et M .

Pour les poutres en béton précontraint, la matrice $[Ks]$ est complétée par des termes dus à l'effet de la précontrainte, dans l'équilibre de flexion composée et dans l'équilibre d'une partie de l'effort tranchant par la composante transversale de l'effort des câbles inclinés – Nait-Rabah (1990).

III.3. Exposé général de la modélisation

III.3.1. Domaine d'application et hypothèses générales

L'étude porte sur des poutres assez élancées, soumises à une flexion plane avec effort tranchant. La section transversale est supposée constante par tronçons le long de la poutre. Elle présente une symétrie par rapport à l'axe y , ce qui permet sa décomposition en une succession de couches selon y . Le principe de Saint Venant est supposé applicable en toute section, la contrainte agissant dans le sens transversal y est alors nulle. L'hypothèse de Navier est appliquée aussi en toute section ; on ne peut donc pas traiter des poutres courtes.

Les poutres sont suffisamment armées pour être loin de la fragilité, donc présenter des fissures bien réparties.

III.3.2. Discrétisation de la poutre

La poutre est discrétisée en tronçons supposés suffisamment grands par rapport aux espacements des fissures. Les déformations dans une section droite sont alors exprimées par les valeurs moyennes représentatives du champ des déformations de l'élément de poutre. L'étude de l'équilibre d'un tronçon passe par l'étude de l'équilibre de plusieurs sections transversales. Chaque section transversale est discrétisée en une succession de couches de béton et d'éléments longitudinaux d'acier (figure 3-1). Les armatures transversales droites sont supposées constantes sur toute la hauteur de la section et réparties sur toute la longueur du tronçon ; leur aire est exprimée alors en pourcentage de l'aire du béton. Chaque couche de béton et chaque élément longitudinal

d'acier est analysé séparément mais la condition d'équilibre de la section est satisfaite globalement.

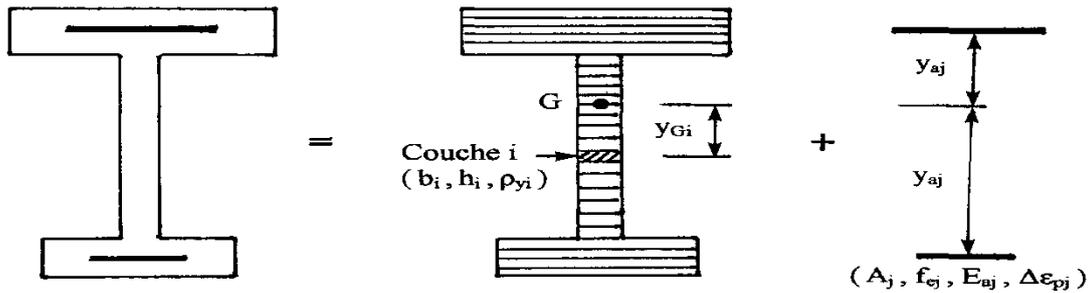


Figure III-1 : Section de poutre discrétisée en couches.

Les couches de béton sont caractérisées par : leur hauteur h_i , leur largeur b_i , leurs pourcentages de ferrailage longitudinal ρ_{xi} et transversal ρ_{yi} , leurs pourcentages de fibres w et la position de leur centre de gravité par rapport à un axe de référence y_{Gi} . Les armatures longitudinales sont définies par : leur section transversale A_j , la déformation initiale de précontrainte $\Delta\varepsilon_{pj}$, le seuil de plasticité f_e et leur position par rapport à un axe de référence y_{aj} . Les lois de comportement de l'acier et du béton sont des caractéristiques communes à toute la section.

III.3.3. Principes de la modélisation et équations générales

III.3.3.1. Milieux continus équivalents

III.3.3.1.1. En déformations

Seules les armatures sont réellement continues. On fait l'hypothèse que les déformations moyennes du milieu continu équivalent à l'association du béton fissuré et des armatures sont gouvernées par celles des armatures ε_{ax} et ε_{ay} . Les relations générales entre les déformations moyennes sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_2 \cos^2 \theta \quad (\text{III.6})$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \quad (\text{III.7})$$

$$\gamma = 2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \cos \theta \quad (\text{III.8})$$

La direction principale D_1 correspond à la plus grande déformation principale (valeur positive = allongement), la direction D_2 à la plus petite. L'angle de D_2 avec l'axe longitudinal x est :

$$\theta = (\vec{GD}_2, \vec{Gx}) \quad (\text{III.9})$$

La direction D_2 est aussi celle des fissures, du moins au début de la fissuration. Lorsque les sollicitations croissent, cette direction peut dévier de celle des fissures initiales, ce qui est physiquement admissible en raison des contraintes de cisaillement transmises par engrenement des lèvres des fissures. Ceci correspond aussi au concept des bielles d'inclinaison variable de l'Eurocode 2 (127), § 4.3.2.4.4 Effort tranchant - Méthode des bielles d'inclinaison variable.

Dans les directions particulières x et y , on a :

$$\varepsilon_{ax} = \varepsilon_x \quad (\text{III.10})$$

$$\varepsilon_{ay} = \varepsilon_y \quad (\text{III.11})$$

reliée aux déformations du béton tendu et fissuré, la déformation moyenne correspond à la somme de deux termes : la déformation moyenne propre du béton ε'_b , liée à sa contrainte moyenne σ_b , et l'effet réparti des fissures d'ouverture w espacées de s :

$$\varepsilon_b = \varepsilon'_b + \frac{w}{s} \quad (\text{III.12})$$

Mais on n'explique ni la déformation propre ε'_b , ni w et s .

La distorsion moyenne γ qui intervient en (III.8) résulte aussi de la distorsion propre du béton et de l'effet des fissures, mais on n'explique pas les deux termes.

III.3.3.1.2. En contraintes

Le béton doit équilibrer seul les contraintes de cisaillement τ parallèles à x et y (on néglige les contraintes qui seraient équilibrées par « l'effet de goujon » des armatures). On fait l'hypothèse d'un milieu continu équivalent pour le béton seul. Les relations générales entre les contraintes du béton sont donc :

$$\sigma_{bx} = \sigma_{b1} \sin^2 \theta_b + \sigma_{b2} \cos^2 \theta_b \quad (\text{III.13})$$

$$\sigma_{by} = \sigma_{b1} \cos^2 \theta_b + \sigma_{b2} \sin^2 \theta_b \quad (\text{III.14})$$

$$\tau_b = \tau = (\sigma_{b1} - \sigma_{b2}) \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (\text{III.15})$$

On fait de plus l'hypothèse de la coïncidence des directions principales des contraintes du béton avec les directions principales des déformations moyennes :

$$\theta_b = \theta \quad (\text{III.16})$$

III.3.3.2. Compatibilité partielle des déformations du béton avec les déformations moyennes

On fait l'hypothèse que les déformations du béton dans les directions principales ε_{b1} et ε_{b2} , qui sont liées aux contraintes principales σ_{b1} et σ_{b2} , sont égales aux déformations moyennes principales :

$$\varepsilon_{b1} = \varepsilon_1 \quad (\text{III.17})$$

$$\varepsilon_{b2} = \varepsilon_2 \quad (\text{III.18})$$

Dans la direction D_1 , qui est grosso modo perpendiculaire aux fissures, devraient intervenir les deux termes de déformation propre du béton et d'ouverture des fissures. On contourne la difficulté en faisant intervenir une loi de comportement conventionnelle qui relie la contrainte de traction σ_{b1} à la déformation ε_1 moyenne .

Dans la direction D_2 qui est grosso modo celle des bielles comprimées parallèles aux fissures, on a effectivement continuité du béton.

III.3.3.3. Equations d'équilibre

III.3.3.3.1. Equilibre local des couches

Dans les directions x et y , les contraintes σ_x et σ_y résultent de la somme des termes dus aux armatures et au béton, compte tenu des aires respectives :

$$\sigma_x = \rho_x \sigma_{ax} + \sigma_{bx} \quad (\text{III.19})$$

$$\sigma_y = \rho_y \sigma_{ay} + \sigma_{by} = 0 \quad (\text{III.20})$$

III.3.3.3.2. Equilibre global des sections

L'équilibre doit être assuré entre les sollicitations extérieures N , M , V et les résultantes des contraintes internes N_{int} , M_{int} , V_{int} . Pour la flexion composée, on fait la somme des contributions des contraintes longitudinales dans les armatures et dans le béton (ce qui est la traduction de l'équation (3.19)) :

$$N_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi} \quad (III.21)$$

$$M_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} y_{ai} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi} y_i \quad (III.22)$$

Pour l'effort tranchant, seules les contraintes de cisaillement dans le béton interviennent :

$$V_{int} = \sum_i b_i h_i \tau_{bi} \quad (III.23)$$

III.4. Lois de comportement des matériaux

III.4.1. Comportement du béton armé de fibres en compression dans la direction D_2

La contrainte principale σ_{b2} est une fonction des deux déformations principales ε_1 et ε_2 :

$$\sigma_{b2} = E_{b2}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2 \quad (III.24)$$

Pour le béton on utilise la relation contrainte-déformation uniaxiale de Sargin [SAR. 68].

$$\sigma = f_{cj} \cdot \frac{k_b \bar{\varepsilon} + (k'_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} + k'_b \bar{\varepsilon}^2} \quad \text{avec} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad k_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_0}{f_{cj}} \quad (III.25)$$

Le paramètre K_b caractérise la branche ascendante de la courbe. Le paramètre K'_b ajuste la branche descendante au-delà du pic de contrainte. Il caractérise la ductilité du matériau.

- $k'_b = k_b - 0.9$ Pour le béton de fibres [KACH.97]

- $k'_b = k_b - 1$ Pour le béton normal

On se base sur la relation contrainte-déformation uniaxiale de Sargin proposée à l'annexe 1 des Règles BPEL (1999) pour le béton armé qui fait intervenir la résistance f_c

et le raccourcissement correspondant ε_{b0} . On la transforme pour traduire le comportement du béton des bielles comprimées selon D_2 et tendu dans la direction D_1 . La résistance est modifiée selon la relation proposée par Vecchio et Collins (1986) en fonction de la déformation ε_1 mais en bornant le rapport f_{c2} / f_c :

$$\frac{f_{c2}}{f_c} = \frac{1}{0.8 - 0.34 \varepsilon_1 / \varepsilon_{b0}} \quad \text{avec} \quad 0.7 \leq \frac{f_{c2}}{f_c} \leq 1 \quad (\text{III.26})$$

III.4.2. Comportement du béton armé de fibres en traction dans la direction D_1

La loi contrainte-déformation du béton de fibres en traction est linéaire avant la fissuration du béton. Après fissuration, le comportement est élastique non linéaire.

et sa représentation graphique est donnée sur la figure (III-2).

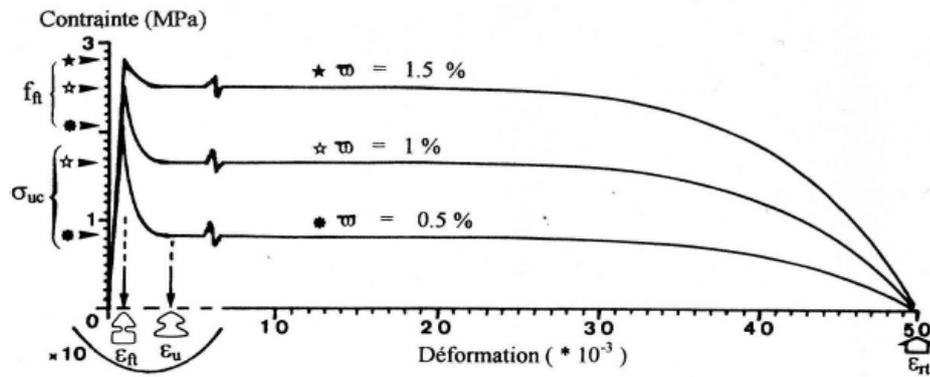


Figure III-2 : Loi de comportement en traction du béton armé de fibres d'acier [BOUA.02].

Avant fissuration du béton :

$$\sigma = E_{ct} \varepsilon_1 \quad \text{pour} \quad |\varepsilon_1| < \varepsilon_{ft} \quad (\text{III.27})$$

Après fissuration du béton :

$$\sigma = \sigma_{uc} - [(\sigma_{uc} - f_{ft})] \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{ft} - \varepsilon_u)^6} \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{ft} < |\varepsilon_1| < \varepsilon_u \quad (\text{III.28})$$

$$\sigma = \sigma_{uc} \left[1 - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_u)^6} \right] \quad \text{pour} \quad \varepsilon_u < |\varepsilon_1| < \varepsilon_{rt} \quad (\text{III.29})$$

$$\sigma = 0 \quad \text{pour} \quad |\varepsilon_1| > \varepsilon_{rt} \quad (\text{III.30})$$

$$\text{Où } \varepsilon_{ft} = \frac{f_{ft}}{E_{ct}}$$

F_{ft} : est la résistance du béton de fibres à la traction et ε_{ft} est la déformation de fissuration du béton.

III.4.3. Comportement de l'acier

Les comportements des aciers passifs et de précontrainte sont caractérisés par les types de relations admises par les règles BPEL 1999 :

$$\text{- armatures longitudinales} \quad \sigma_{ax} = E_a (\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x \quad (\text{III.31})$$

$$\text{- armatures transversales} \quad \sigma_{ay} = E_{at} (\varepsilon_y) \cdot \varepsilon_y \quad (\text{III.32})$$

$$\text{- armatures de précontrainte} \quad \sigma_{px} = E_{ap} (\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x \quad (\text{III.33})$$

III.5. Calculs spécifiques relatifs à l'effort tranchant

III.5.1. Calcul de la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$

Pour calculer la distribution des contraintes tangentielles sur la hauteur d'une section, on associe à chaque section de calcul une section voisine distante de d . Les contraintes tangentielles sont alors déduites de l'équilibre des couches comprises entre la section de calcul sous l'état de sollicitation (N, M, V) et la section voisine soumise aux efforts (N_1, M_1, V_1) tels que :

$$N_1 = N$$

$$M_1 = M - V \cdot d \quad (\text{III.34})$$

$$V_1 = V$$

La distance entre les deux sections est généralement prise égale à $h/6$ (où h est la hauteur totale de la poutre) (Vecchio et Collins, [VEC.82]). Une étude paramétrique permet de constater que la différence entre la valeur de l'effort tranchant extérieur et la résultante des $\tau(y)$ calculée avec cette distance reste inférieure à 1 %, ce qui est négligeable.

Les deux sections sont analysées de façon à satisfaire chacune aux deux équations d'équilibre. En appliquant la méthode classique de la RDM, on étudie l'équilibre de l'ensemble des forces agissant sur une couche d'ordre k présentée à la figure (III-3) :

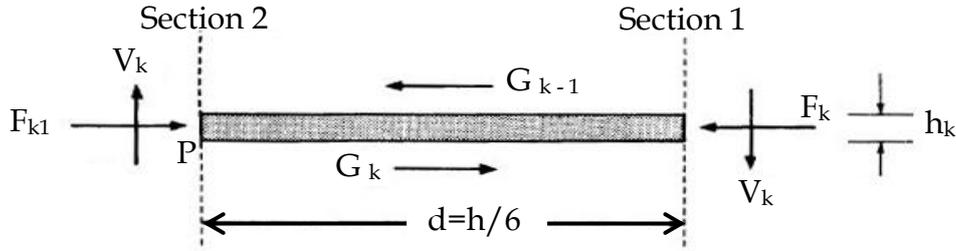


Figure III-3 : Forces agissant sur une couche de béton entre deux sections.

Où F_k et F_{k1} désignent les efforts normaux agissant sur la couche k dans les deux sections, G_{k-1} et G_k sont les efforts de glissement résultants sur les faces inférieure et supérieure de la couche k et V_k est la part de l'effort tranchant équilibrée par la couche k .

Ces efforts F_k sont déterminés à partir des contraintes normales longitudinales moyennes dans le béton et dans les armatures longitudinales s'il en existe dans la couche. Dans une couche quelconque i , on a :

$$F_i = \sigma_{bxi} b_i h_i + \sigma_{axi} A_{axi} \quad (\text{III.35})$$

Les efforts horizontaux agissant sur les faces supérieure et inférieure de la couche de béton d'ordre k sont alors calculés comme suit :

$$G_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (F_{i1} - F_i) \quad (\text{III.36})$$

$$G_k = G_{k-1} + F_{k1} - F_k$$

L'équilibre du tronçon permet de calculer la valeur de V_k , en écrivant que le moment des forces est nul au point P :

$$V_k = \frac{(G_{k-1} + G_k) h_k}{2 d} \quad (\text{III.37})$$

La valeur moyenne de la contrainte tangentielle de la couche k est alors donnée par :

$$\tau_k = \frac{V_k}{b_k h_k} = \frac{(G_{k-1} + G_k)}{2 d b_k} \quad (\text{III.38})$$

III.5.2. Calcul de la distorsion moyenne

La distorsion varie d'une couche de béton à une autre. On définit une distorsion moyenne de la section notée γ_{moy} . Son calcul est effectué en remarquant, d'après le théorème des travaux virtuels, que l'accroissement ΔW_e du travail de l'effort tranchant extérieur est égal à l'accroissement ΔW_i du travail des contraintes tangentielles τ_i . Ces derniers peuvent s'écrire :

$$\Delta W_e = \Delta V \cdot \Delta \gamma_{\text{moy}} \quad (\text{III.39})$$

$$\Delta W_i = b_i \cdot h_i \cdot \Delta \tau_i \cdot \Delta \gamma_i$$

On doit avoir, m étant le nombre des couches de béton :

$$\Delta W_e = \sum_1^m \Delta W_i$$

$$\text{D'où :} \quad \Delta \gamma_{\text{moy}} = \sum_1^m \frac{\Delta \tau_i \cdot b_i \cdot h_i \cdot \Delta \gamma_i}{\Delta V} \quad (\text{III.40})$$

III.6. Résolution du problème

III.6.1. Transformation des équations générales

Pour la résolution du problème on explicite certaines grandeurs à partir des équations générales précédentes. On tire de (3.6) :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x}{\sin^2 \theta} - \frac{\varepsilon_2}{\text{tg}^2 \theta} \quad (\text{III.41})$$

On réécrit aussi les équations (3.13), (3.14) et (3.15) entre les contraintes du béton sous la forme suivante (en tenant compte de (3.16)):

$$\sigma_{b_x} = \sigma_{b2} + \sigma_{b1} - \sigma_{b_y} \quad (\text{III.42})$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sigma_{b2} - \sigma_{b_x}}{\sigma_{b2} - \sigma_{b_y}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.43})$$

$$\sigma_{b2} = \sigma_{b_y} - \frac{\tau}{\text{tg} \theta} \quad (\text{III.44})$$

III.6.2. Algorithme de calcul

L'étude de l'équilibre d'une couche de béton armé ou béton armé de fibres où ε_x et τ sont connus fait appel à un système de 10 équations (III.20) (III.7) (III.8) (III.23) (III.27) ou (III.28) (III.32) (III.41) (III.42) (III.43) (III.44) à 10 inconnues : ε_y , ε_1 , ε_2 , γ , θ , σ_{ay} , σ_{bx} , σ_{by} , σ_{b1} , σ_{b2} . Pour le résoudre, on fait appel à une méthode itérative. Pour une distribution donnée des déformations longitudinales, on suppose connue la déformation principale ε_2 et on cherche la valeur de l'angle θ qui permet de satisfaire les conditions de compatibilité et d'équilibre de la couche.

Les contraintes tangentielles $\tau(y)$ sont calculées par l'équilibre de deux sections voisines (équation (III.38)). La déformation longitudinale ε_x est tirée de Navier (III.4), dans laquelle δu et δw résultent de l'équilibre global en flexion composée sous N , M selon (III.21) et (III.22), avec un couplage à l'effort tranchant V . Enfin, la distorsion moyenne de la section est calculée à partir des efforts dans les couches successives.

L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :

Première étape : choisir un accroissement d'effort appliqué à la section

Deuxième étape : choisir des valeurs de la courbure δw et de la déformation δu au niveau du CDG de la section.

Troisième étape : calculer la déformation longitudinale $\varepsilon_x(y) = \delta u + \delta w \cdot y$ conformément à l'hypothèse de planéité des sections (NAVIER-BERNOULLI).

Quatrième étape : calculer les contraintes du béton et de l'acier (σ_{ax} et σ_{bx} selon les lois de Comportement des matériaux

$$\sigma_{b2} = E_{b2}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2$$

$$\sigma_{ax} = E_a(\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_{px} = E_{ap}(\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$$

Cinquième étape : Calculer les efforts internes N_{int} et M_{int} de la section.

$$N_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi}$$

$$M_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} y_{ai} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi} y_i$$

Sixième étape : Vérifier l'équilibre des efforts (N,M) de la section :

$$N_{int}=N$$

$$M_{int}=M$$

-Si non, revenir à la deuxième étape et choisir d'autres valeurs de δu et δw .

-Si oui, passer à la septième étape.

Septième étape : Calculer la distribution des contraintes tangentes $\tau(y)$ qui vérifient l'équilibre de chaque couche de béton :

$$\tau_k = \frac{V_k}{b_k h_k} = \frac{(G_{K-1} + G_k)}{2db_k}$$

G_K et G_{K-1} sont les efforts de glissement résultants sur les faces inférieure et supérieure de la couche K.

V_k est la part de l'effort tranchant équilibré par la couche k.

Huitième étape : vérifier l'équilibre de la section à $\varepsilon(x)$ et $\tau(y)$ connus.

Neuvième étape : choisir une valeur de la déformation principale ε_2 et une valeur de l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de compression et l'axe longitudinal.

Dixième étape : déterminer les valeurs des déformations à partir du principe du milieu continu en déformations :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x}{\sin^2 \theta} - \frac{\varepsilon_2}{\tan^2 \theta} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta$$

Onzième étape : Choix de loi de comportement (béton armé ou béton armé de fibres) et détermination des contraintes principales de compression et de traction dans le béton :

$$\text{Si } |\varepsilon_x| \leq |\varepsilon_{ft}| \qquad \sigma_{b2} = E_{b2}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2$$

$$\text{Si } |\varepsilon_x| > |\varepsilon_{ft}| \qquad \sigma_{b2} = 0$$

$$\sigma_1 = E_{bo} \cdot \varepsilon_1$$

-La contrainte dans l'acier transversal est donnée par: $\sigma_{ay} = E_{at}(\varepsilon_y) \cdot \varepsilon_y$

-La contrainte transversal dans le béton est: $\sigma_{by} = -\rho_y \sigma_{ay}$ (l'équilibre dans le sens y).

Douzième étape : calculer la nouvelle valeur de l'angle θ déduite de la géométrie du cercle de MOHR pour les contraintes :

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sigma_{b2} - \sigma_{bx}}{\sigma_{b2} - \sigma_{by}} \right)^{1/2}$$

Treizième étape : calculer la nouvelle valeur de la contrainte principale de compression en fonction de τ :

$$\sigma_{b2} = \sigma_{by} - \frac{\tau}{\operatorname{tg}\theta}$$

Quatorzième étape : vérifier la compatibilité :

$$\theta' = \theta$$

$$\sigma'_{b2} = \sigma_{b2}$$

-Si Non revenir à la neuvième étape et prendre une autre valeur de θ et ε_2

-Si oui, passer à la quinzième étape.

Quinzième étape : calculer la distorsion $\gamma = 2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \cos \theta$

Seizième étape: Répéter l'ensemble des étapes pour l'ensemble des couches.

Dix-septième étape : chercher l'équilibre en flexion composée avec interaction de l'effort V

$$\text{Calculer les contraintes : } \sigma_{ax} = E_a (\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_{px} = E_{ap} (\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$$

σ_{bx} est connue d'après l'équilibre des couches.

Dix-huitième étape : vérifier l'équilibre des couches :

$$N_{\text{int}} = N$$

$$M_{\text{int}} = M$$

-Si non revenir à la huitième étape et donner d'autres valeurs de δu et δw .

-Si oui, passer à la dix-neuvième étape

Dix-neuvième étape : calculer le terme de la rigidité à l'effort tranchant

$$GA = \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{\text{moy}}}$$

Vingtième étape : choisir une valeur initiale nulle des déformations $\Delta \bar{\delta}_0 = 0$

Vingt-unième étape : faire un teste sur la déformation des armatures.

-si non (il ya rupture des armatures), on divise l'accroissement d'effort choisis sur deux

- si oui, on passe à la 22eme étape.

Vingt-deuxième étape : calculer la matrice de rigidité de la section :

$$[\mathbf{K}_s] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1b} + \mathbf{K}_{1s} + \mathbf{K}_{1p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{2p}^T & \mathbf{K}_{2b} \end{bmatrix}$$

Vingt-troisième étape : faire un teste sur le déterminant de la matrice $[\mathbf{K}_s]$.

- Si non, on divise l'incrément d'effort sur deux
- Si oui on passe à la 24eme étape

Vingt-quatrième étape : calcul de l'accroissement des déformations :

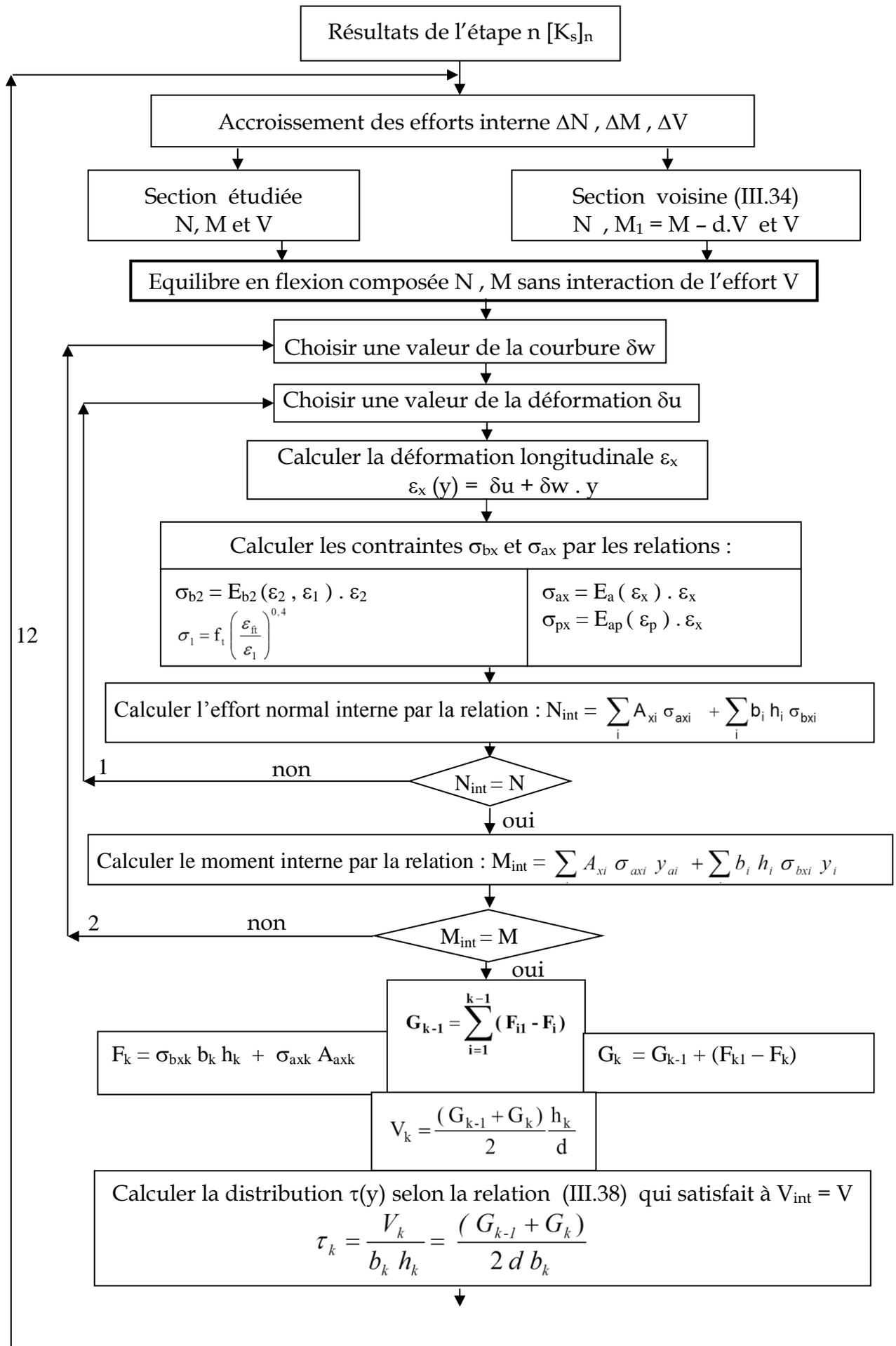
$$\Delta \bar{\delta}_i = [\mathbf{K}_s]_{i-1}^{-1} \{ \Delta \bar{\mathbf{F}}_s + \Delta \bar{\mathbf{P}}_s \}$$

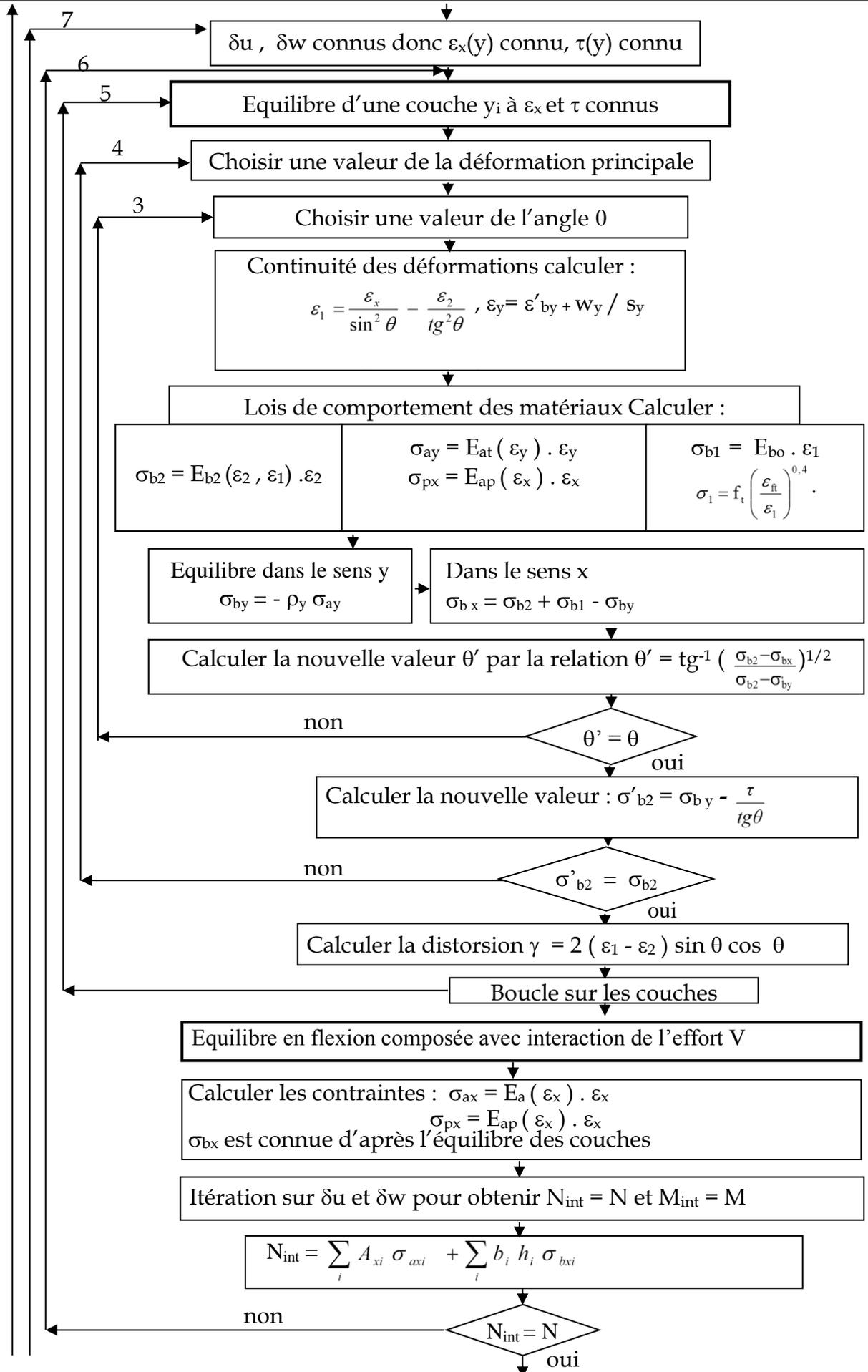
Vingt-cinquième étape : vérifier la convergence de la norme des déformations

$$\eta < Tu$$

- si non revenir à la vingtième étape et donner une autre valeur des déformations $\Delta \bar{\delta}_0$
- si oui, passer à la vingt-sixième étape

Vingt-sixième étape : cumuler les déformations et les efforts.





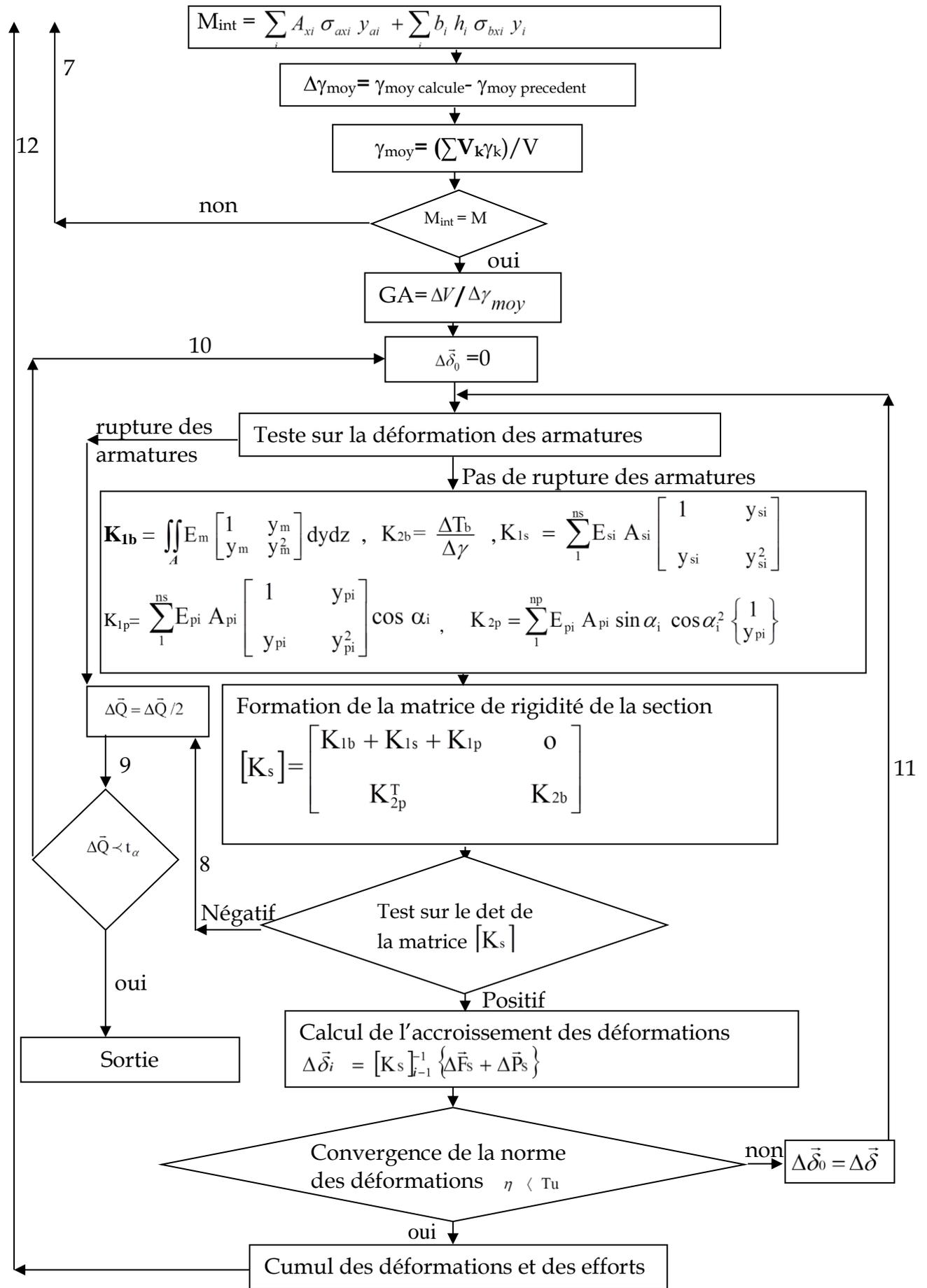


Figure III-4 : Organigramme général de l'étude d'une section.

III.7. Conclusion

Le modèle analytique présenté est basé sur l'analyse multicouche des sections et sur une procédure de résolution itérative pour chaque couche, dans un état de déformation longitudinale et de contrainte de cisaillement données. L'équilibre global des sections est analysé dans l'hypothèse de planéité des déformations longitudinales mais avec, en principe, une interdépendance des contraintes normales longitudinales et des contraintes tangentielles.

IV. CALCUL DE QUELQUES SECTIONS

DES POUTRES

IV.1. Introduction

On présente dans ce chapitre l'analyse de comportement jusqu'à rupture des poutres en BFM armé et/ou précontraint, soumises à l'effet combiné d'une flexion plane et d'un effort tranchant en élasticité non linéaire.

Nous avons effectué le calcul sur plusieurs sections de poutre avec des formes de section et des détails de ferrailage variés.

IV.2. Essais de l'Université de Toronto -Comportement de section

Le modèle a été utilisé pour simuler le comportement de plusieurs sections de poutre testées par différents chercheurs à l'Université de Toronto (Vecchio Collins, [VEC.82]). Les poutres ont une section transversale rectangulaire pleine ou creuse. Elles sont en béton armé ou précontraint. La précontrainte est soit adhérente soit non adhérente (dans ce dernier cas, elle est équivalente à une force axiale extérieure). Pour le calcul, les armatures passives sont concentrées en deux lits inférieur et supérieur ; il n'y a pas d'armatures longitudinales réparties. Différents modes de chargement ont été appliqués ; cependant, dans tous les cas, le moment fléchissant est nul dans la zone de poutre où se produit la rupture par effort tranchant et où on a mesuré la distorsion. Les caractéristiques géométriques et les propriétés des différents matériaux sont données au tableau IV-1.

Tableau IV-1: Propriétés des différentes poutres [VEC.82].

Repère de la poutre	Dimensions		Béton			Armatures transversales			Armatures longitudinales		Armatures de précontrainte		
	EXT mm	INT mm	f_c Mpa	f_t Mpa	ϵ_{b0} 10^{-3}	Barre ϕ (mm)	s_t mm	f_e Mpa	Nb.x ϕ (mm)	f_e Mpa	A_p mm ²	f_{pe} Mpa	$\Delta\epsilon_p$ 10^{-3}
SA3	305x610	152x406	40.0	2	2.8	9.5	72	373	12 x 29 4 x 22	345 462	-	-	-
SA4	305x610	152x406	40.0	1.9	2.8	9.5	72	373	12 x 29 4 x 22	345 462	-	-	-
SK1	305x610	-	26.9	1.7	2.25	9.5	100	400	8 x 25	442	1540	1450	4.82
SK2	305x610	121x381	26.9	1.75	2.25	9.5	100	400	8 x 25	442	1540	1450	4.82
SK3	305x610	-	28.2	1.65	2.2	9.5	100	400	8 x 25	442	-	-	-
SK4	305x610	121x381	28.2	1.75	2.2	9.5	100	400	16 x 25	442	-	-	-
SP1	305x610	152x406	33.5	2.40	2.3	9.5	150	373	12 x 22	421	510	1450	4.21
SP2	305x610	152x406	32.0	2.40	2.0	9.5	150	373	12 x 22	421	1010	1450	4.11
SP3	305x610	152x406	32.2	2.40	2.0	9.5	150	373	12 x 22	421	1520	1450	4.26
CF1	305x610	152x406	38.6	2.05	3.0	9.5	150	367	6 x 9.5	367	930	1450	5.17

IV.3. poutres en béton armé et/ou précontraint de fibres soumis à une flexion composée

Nous avons effectué le calcul avec le programme (FORTRANT 90) sur des poutres, est utilisée pour décrire le comportement du béton armé de fibres, en compression

$$R_c = R_b - 0,9 \quad [\text{KACH.97}].$$

Les poutres ont une section transversale rectangulaire pleine ou creuse et sont soumis à une flexion composée. Est renforcé par des fibres métalliques de pourcentage (0.5 à 2 % en volume). Les propriétés des fibres sont données au tableau IV-2.

Tableau IV-2 : Propriétés des fibres.

	E_a (MPa)	L_f (mm)	Φ (mm)	τ_u (MPa)	ϵ_u (‰)	θ_0
BFAC	$2 \cdot 10^5$	60	1	7	-0.74	0.405

IV.4. Résultats et analyse

Les résultats obtenus sont présentés sous forme de courbes comparatives qui représente l'influence des fibres métalliques des poutres en béton armé ou précontraint. Il faut bien noter qu'il s'agit de la relation effort tranchant V - distorsion γ_{moy} d'une zone de poutre soumise au cisaillement (éventuellement combiné à un effort normal).

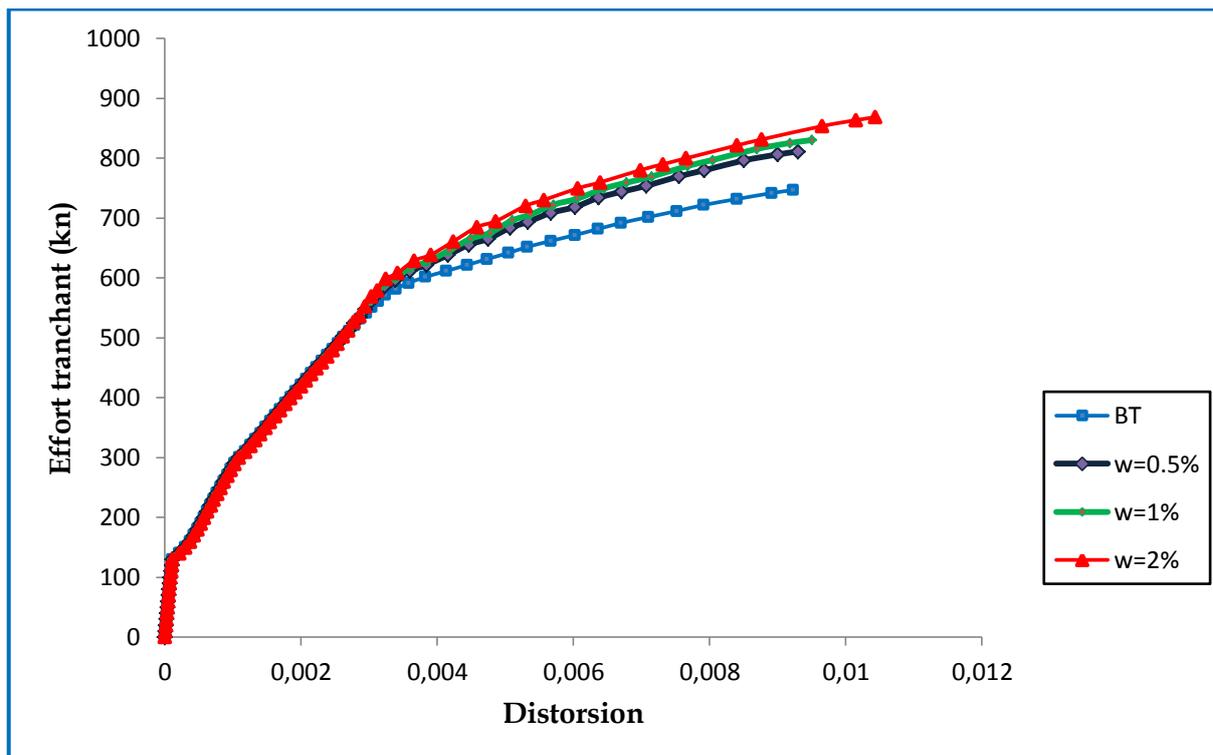


Figure IV-1 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SA3.

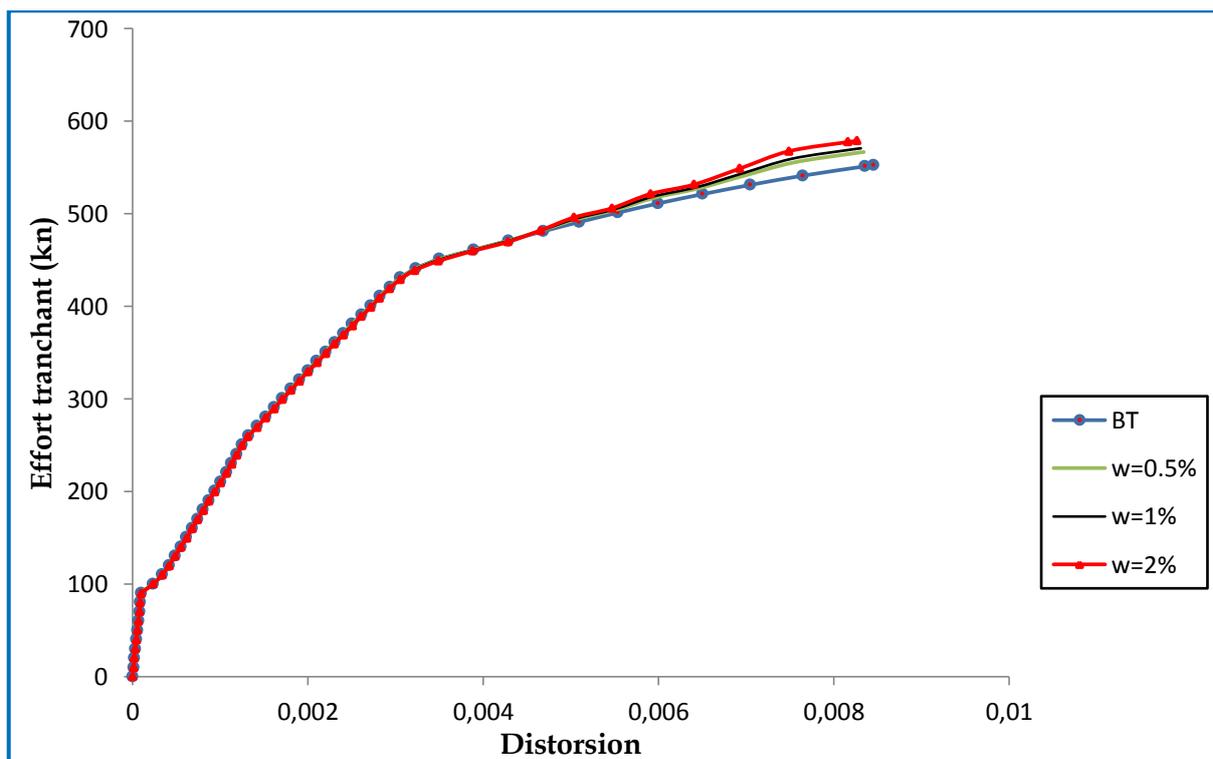


Figure IV-2 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SA4.

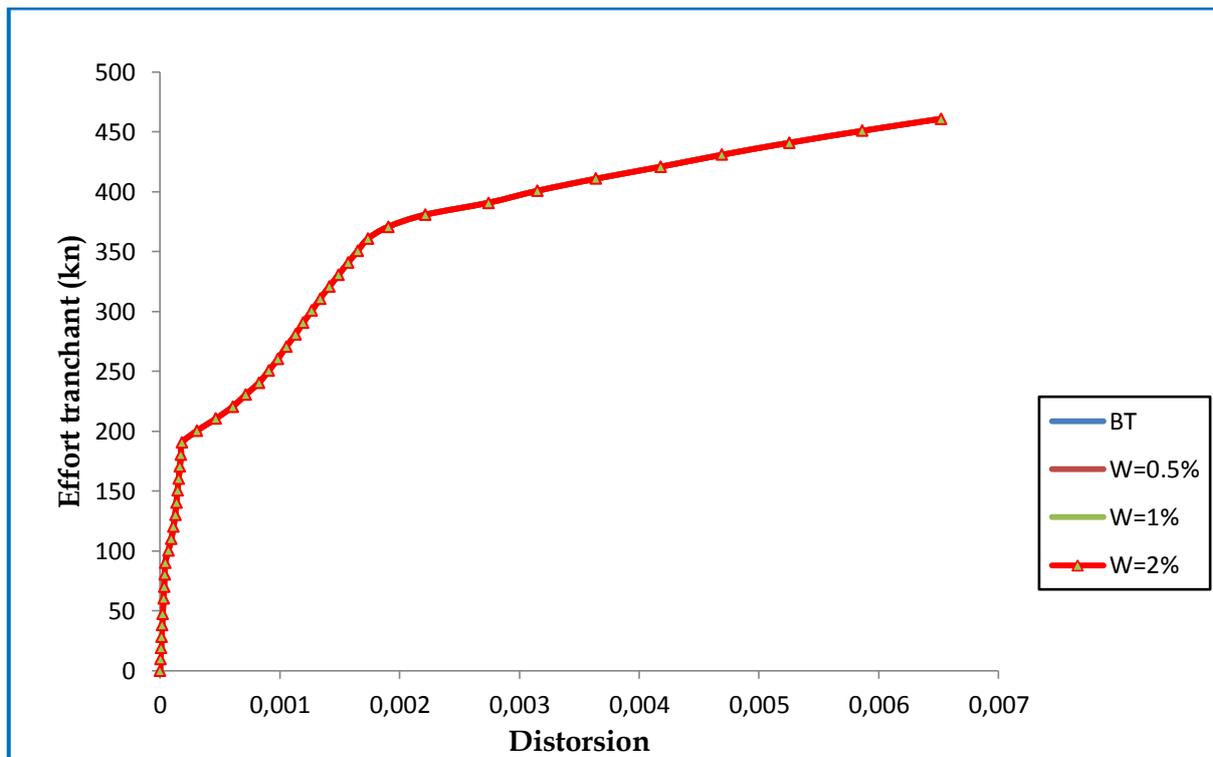


Figure IV-3 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre CF1.

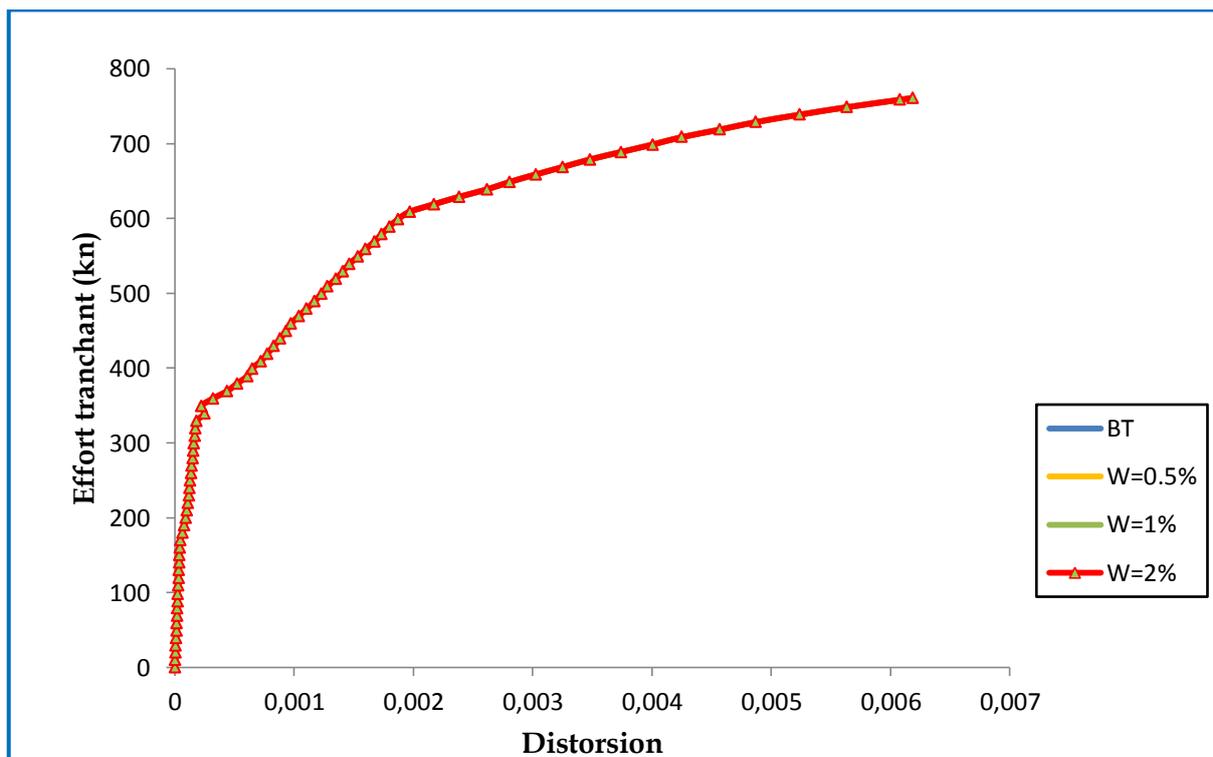


Figure IV-4 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SK1.

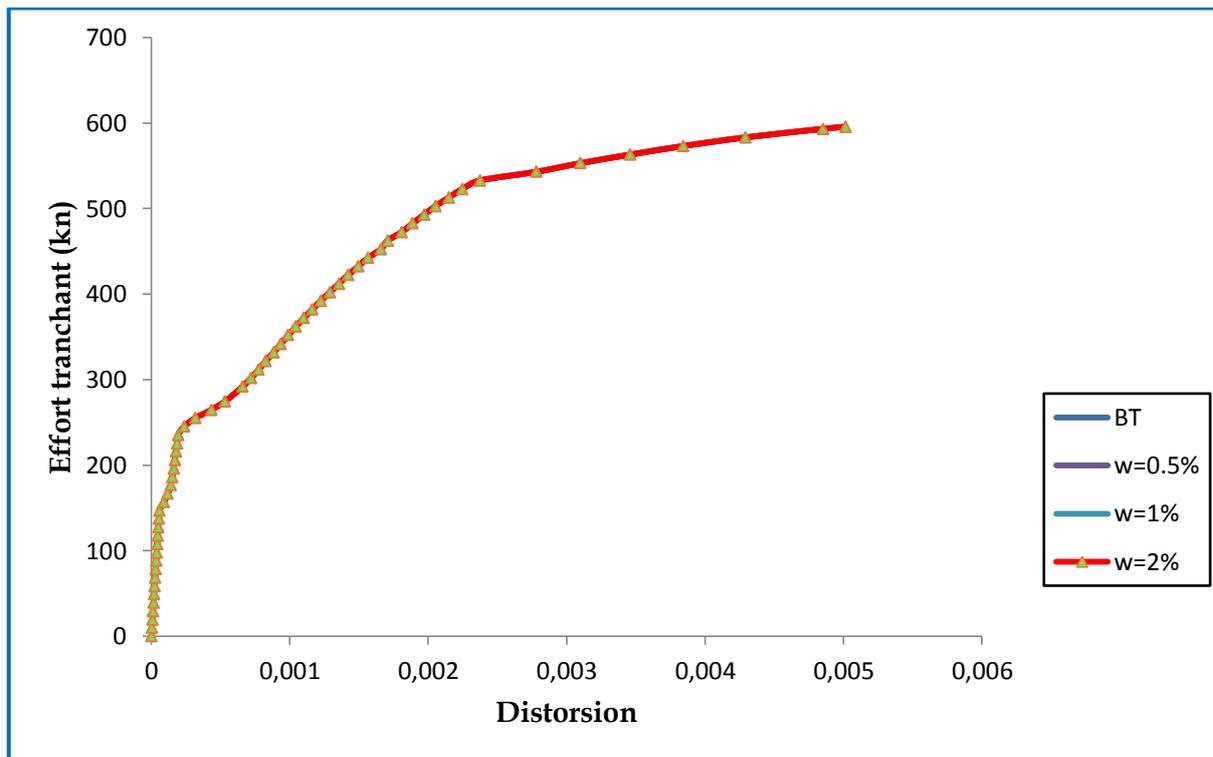


Figure IV-5 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SK2.

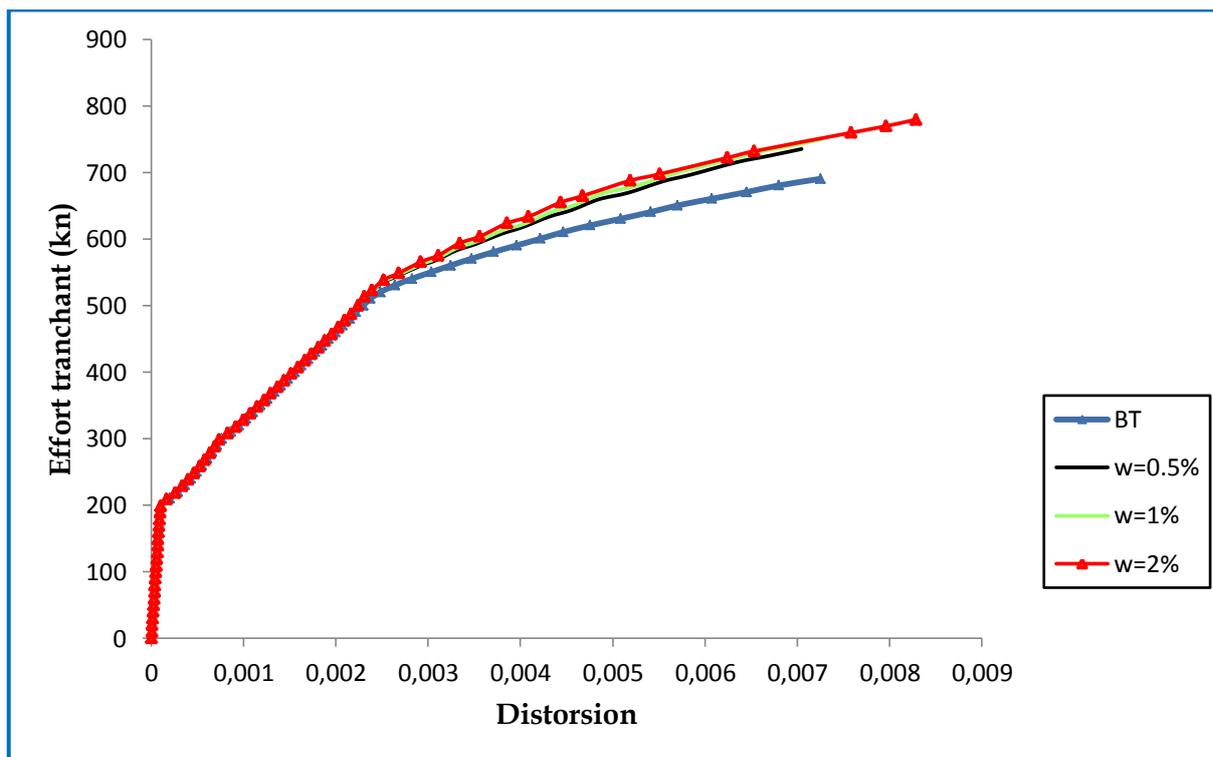


Figure IV-6 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SK3.

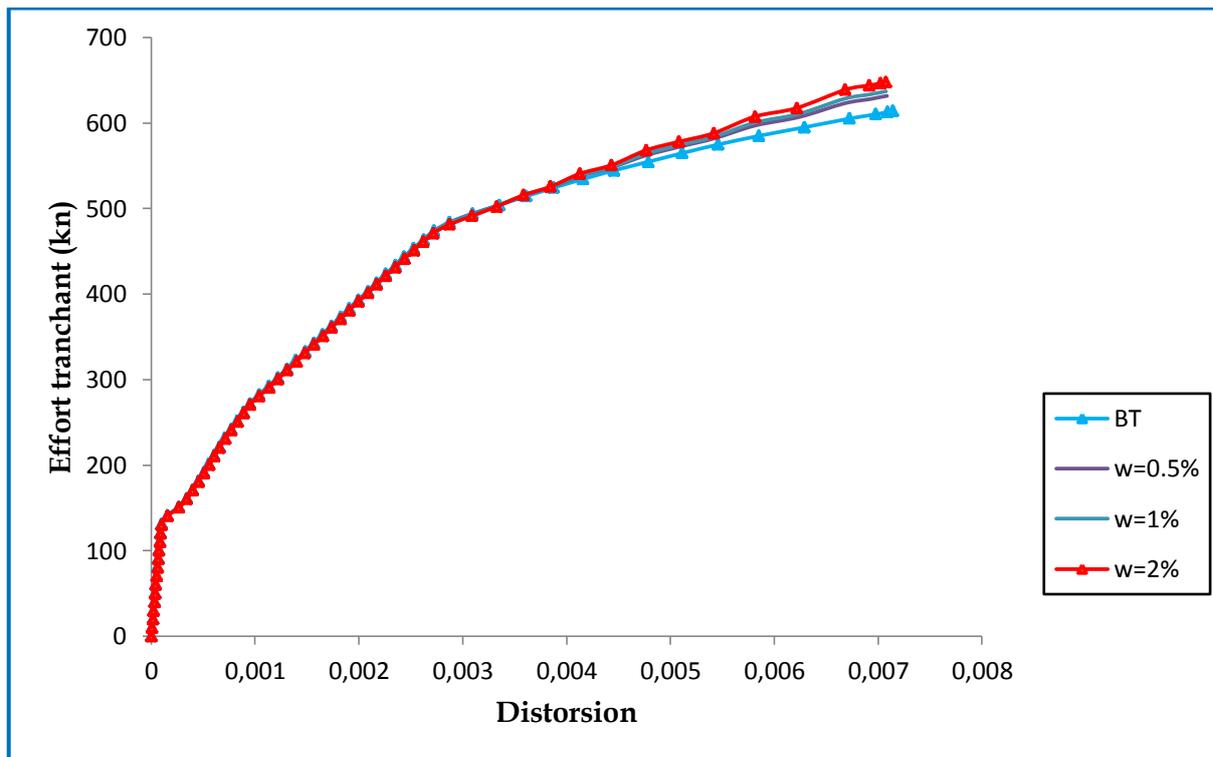


Figure IV-7 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SK4.

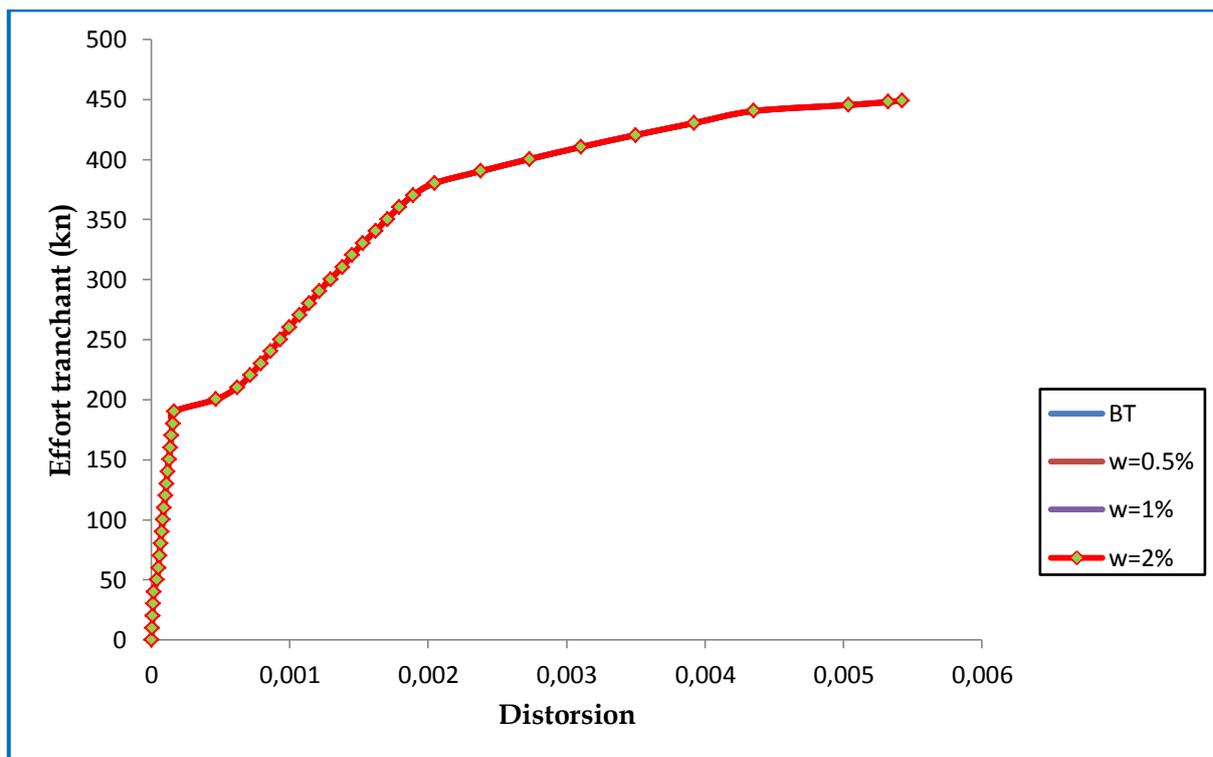


Figure IV-8 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP1.

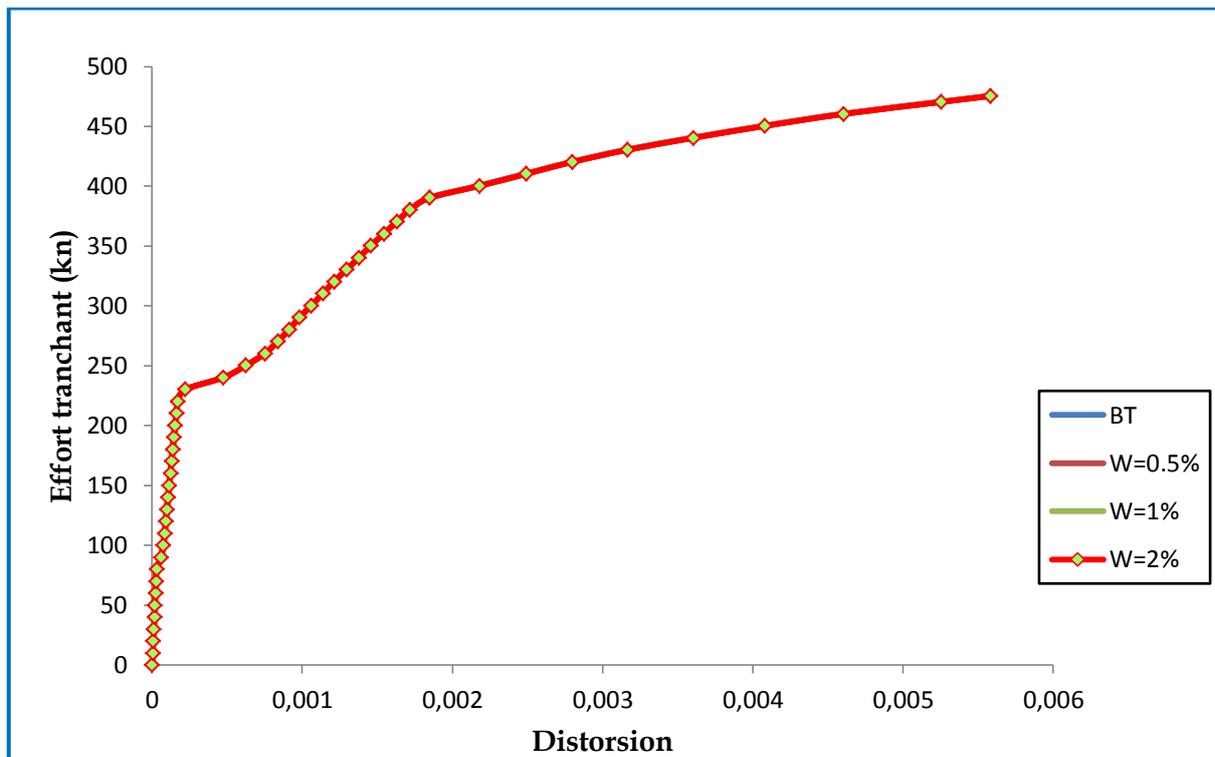


Figure IV-9 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP2.

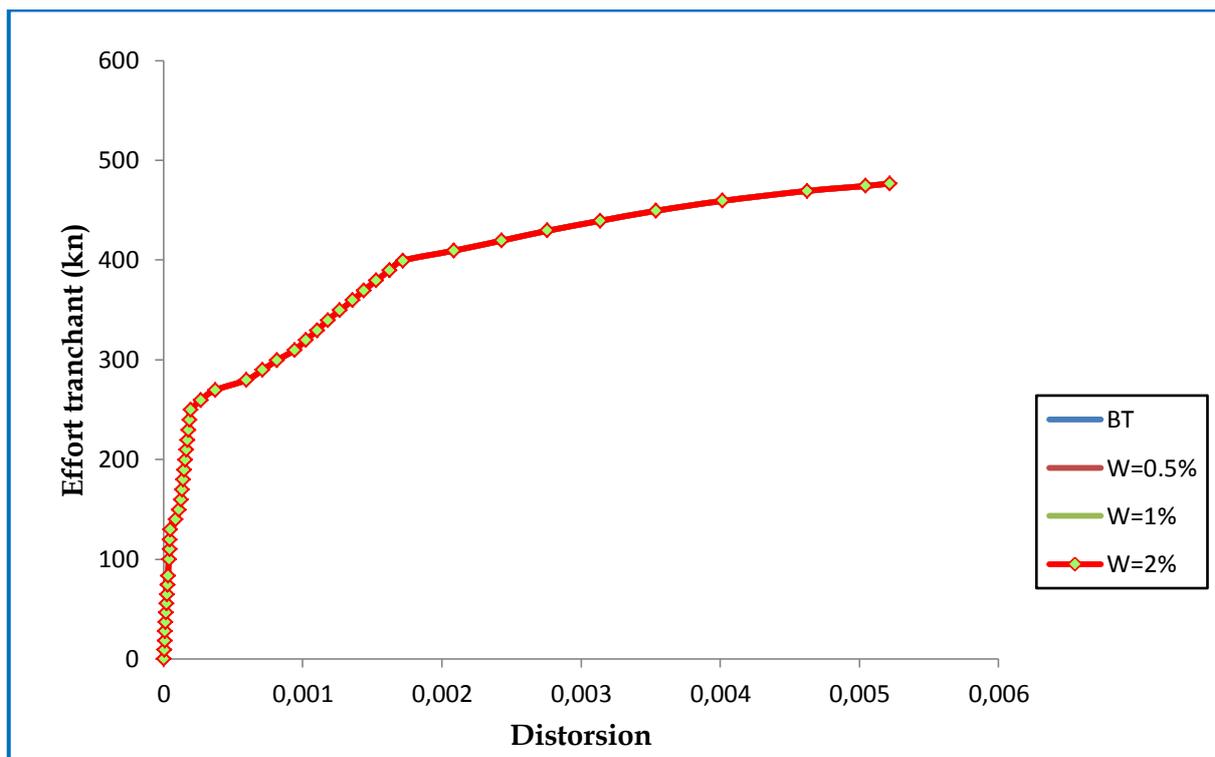


Figure IV-10 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP3.

Le tableau IV-3, compare les valeurs ultimes de l'effort tranchant des poutres en BFM de précontraint et en béton précontraint.

Tableau IV-3 : Comparaison des valeurs ultimes de l'effort tranchant des poutres en BFM de précontraint et en béton précontraint.

Pourcentage de fibres	Poutre	Valeur ultime de l'effort tranchant V_u (kn)		
		V_{BT} (KN)	V_{BF} (KN)	V_{BF}/V_{BT}
W = 0,5 %, 1 % et 2 %	SK1	760,949215	760,958378	1,000
	SK2	594,500028	595,778617	1,002
	SP1	449,185347	449,185347	1,000
	SP2	475,424074	475,431659	1,000
	SP3	476,784522	476,784522	1,000
	CF1	460,927969	460,921690	1,000

Le tableau IV-4, compare les valeurs ultimes de l'effort tranchant des poutres en BFM armé et en béton armé.

Tableau IV-4: Comparaison des valeurs ultimes de l'effort tranchant des poutres en BFM armé et en béton armé.

POUTRE	Pourcentage de fibres	Valeur ultime de l'effort tranchant V_u (KN)		
		V_{BT} (KN)	V_{BF} (KN)	V_{BF}/V_{BT}
SA3	0,50%	746,639716	811,013225	1,086
	1%	746,639716	830,094850	1,112
	2%	746,639716	868,258099	1,163
SA4	0,50%	552,539375	566,774907	1,026
	1%	552,539375	570,782541	1,033
	2%	552,539375	578,797808	1,048
SK3	0,50%	690,566155	735,444175	1,065
	1%	690,566155	750,151961	1,086
	2%	690,566155	779,567533	1,129
SK4	0,50%	614,022918	631,752476	1,029
	1%	614,022918	637,079130	1,038
	2%	614,022918	647,732437	1,055

L'interprétation des différents résultats, nous a permis de constater ce qui suit :

- les fibres métalliques améliorent le comportement au cisaillement dans les poutres en béton armé (SA3, SA4, SK3 et SK4).
- Concernant les poutres en précontrainte l'effet des fibres métallique est négligeable.

Analyse :

La comparaison de comportement en cisaillement des poutres de précontraint, et précontraint de fibres métalliques montre un comportement similaire, vu le rôle de la précontrainte qui a éliminer l'effet de traction dans la section en béton armé.

La présence des fibres métalliques, présente une influence certaine sur la rigidité de cisaillement des poutres en béton armé ainsi que sur la valeur ultime de l'effort tranchant et on l'absence d'un effort normal de compression.

Dans le cas des poutres précontraintes, l'effort de précontrainte qui est un effort de compression du béton. Contribue à limiter l'apparition les zones tendues du béton .ce qui influe sur le rôle des fibres. En effet on remarque que dans le cas des poutres précontraintes l'influence des fibres sur la valeur ultime de l'effort tranchant, de ces dernières est négligeables, et ce pour tous les pourcentages de fibres testés.

IV.5. L'influence des fibres métalliques sur la rigidité de cisaillement des poutres

Dans le calcul non linéaire du comportement des poutres en béton armé, le terme dû à l'effort tranchant est égal à la valeur $G.A_1$ de l'élasticité linéaire - KACHI (2006).

$$\overline{GA1} = \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{moy}}$$

Les valeurs de module de cisaillement sont données aux tableaux IV-5 et IV-6.

Tableau IV-5 : valeurs de module de cisaillement des poutres en BFM de précontraint et en béton précontraint.

Poutre	Avant fissuration du béton (Phase I)			Après fissuration du béton (Phase II)			Après plastification des armatures (Phase III)		
	G_{ABT} (Mpa)	G_{ABF} (Mpa)	G_{BF}/G_{BT}	G_{ABT} (Mpa)	G_{ABF} (Mpa)	G_{BF}/G_{BT}	G_{ABT} (Mpa)	G_{ABF} (Mpa)	G_{BF}/G_{BT}
Pourcentages des fibres 0,5 % , 1 % et 2 %									
SK1	1566,25	1566,25	1,000	148,445	148,445	1,000	36,092	36,0925	1,000
SK2	1056,681	1056,681	1,000	134,035	134,035	1,000	24,016	24,01629	1,000
SP1	1159,603	1159,603	1,000	104,269	104,269	1,000	22,328	22,32767	1,000
SP2	1046,461	1046,461	1,000	98,2993	98,2993	1,000	22,785	22,78539	1,000
SP3	1280,076	1280,076	1,000	98,1404	98,1404	1,000	22,101	22,10078	1,000
CF1	1034,677	1034,677	1,000	109,829	109,829	1,000	29,245	29,2445	1,000

Tableau IV-6 : valeurs de module de cisaillement des poutres en BFM armé et en béton armé.

(%) de FM	Avant fissuration du béton (Phase I)			Après fissuration du béton (Phase II)			Après plastification des armatures (Phase III)		
	G_{ABT} (Mpa)	G_{ABF} (Mpa)	G_{BF}/G_{BT}	G_{ABT} (Mpa)	G_{ABF} (Mpa)	G_{BF}/G_{BT}	G_{ABF} (Mpa)	G_{ABT} (Mpa)	G_{BF}/G_{BT}
SA3									
0,5%	1219,386	1219,512	1,000	154,104	154,328	1,001	34,266	44,66754	1,304
1%	1219,386	1219,512	1,000	154,104	154,988	1,005	34,266	46,61703	1,360
2%	1219,386	1219,512	1,000	154,104	155,057	1,006	34,266	47,73729	1,393
SA4									
0,5%	899,7027	899,7074	1,000	156,697	156,697	1,000	21,333	25,85516	1,212
1%	899,7027	899,7088	1,000	156,697	156,712	1,000	21,333	27,17594	1,274
2%	899,7027	899,7167	1,000	156,697	156,716	1,000	21,333	28,04876	1,315
SK3									
0,5%	1962,119	1962,119	1,000	135,612	135,69	1,001	31,584	41,15744	1,303
1%	1962,119	1962,197	1,000	135,612	135,692	1,001	31,584	42,17728	1,335
2%	1962,119	1962,43	1,000	135,612	135,79	1,001	31,115	43,33548	1,393
SK4									
0,5%	1315,515	1315,603	1,000	113,991	114,037	1,000	29,245	34,69511	1,186
1%	1315,515	1315,692	1,000	113,991	114,083	1,001	29,245	36,31448	1,242
2%	1315,515	1315,779	1,000	113,991	114,105	1,001	29,245	39,43758	1,349

Le comportement global au cisaillement d'une poutre en BFM armé et/ou précontraint peut se décomposer en trois phases.

❖ **Phase I : Élastique non fissurée (Avant fissuration du béton)**

La première phase (phase I) avant fissuration du béton. Cette phase correspond au module de cisaillement élevé. On remarque que dans cette phase, le module de cisaillement n'est pas influencé par la présence des fibres.

❖ **Phase II : Élastique fissurée (Après fissuration du béton)**

La deuxième phase est caractérisée par une diminution significative de la pente (module de cisaillement) de la courbe effort tranchant - distorsion due à l'apparition de la première fissure. La fissure de cisaillement apparaît lorsque la contrainte de traction dans la direction perpendiculaire aux bielles de béton comprimées atteint la résistance à la traction du béton. Dans cette phase on peut remarquer une influence minimum des fibres sur la rigidité de cisaillement des poutres.

❖ **Phase III : Rupture (Après la plastification des armatures)**

La troisième phase de ce comportement est la phase de rupture qui est atteinte juste après la plastification des armatures tendues. On peut noter, que dans cette phase, la présence des fibres métalliques améliore le module de cisaillement des poutres significatives dans le cas du béton armé. Cette amélioration peut atteindre les 39% voir les poutres SA3 et SK3 pour un pourcentage de fibres égal à 2%.

Par contre dans le cas de la précontrainte on remarque qu'il n'y a aucun apport des fibres sur le module de cisaillement.

IV.6. Étude paramétrique

IV.6.1. Influence de longueur de fibres et la contrainte d'adhérence fibres-matrice du béton

Nous avons étudié l'influence de longueur et la contrainte d'adhérence des fibres sur le comportement en cisaillement des poutres en BFM armé.

Cas 1 : $L_f = 30$ mm et $\tau = 7$ Mpa

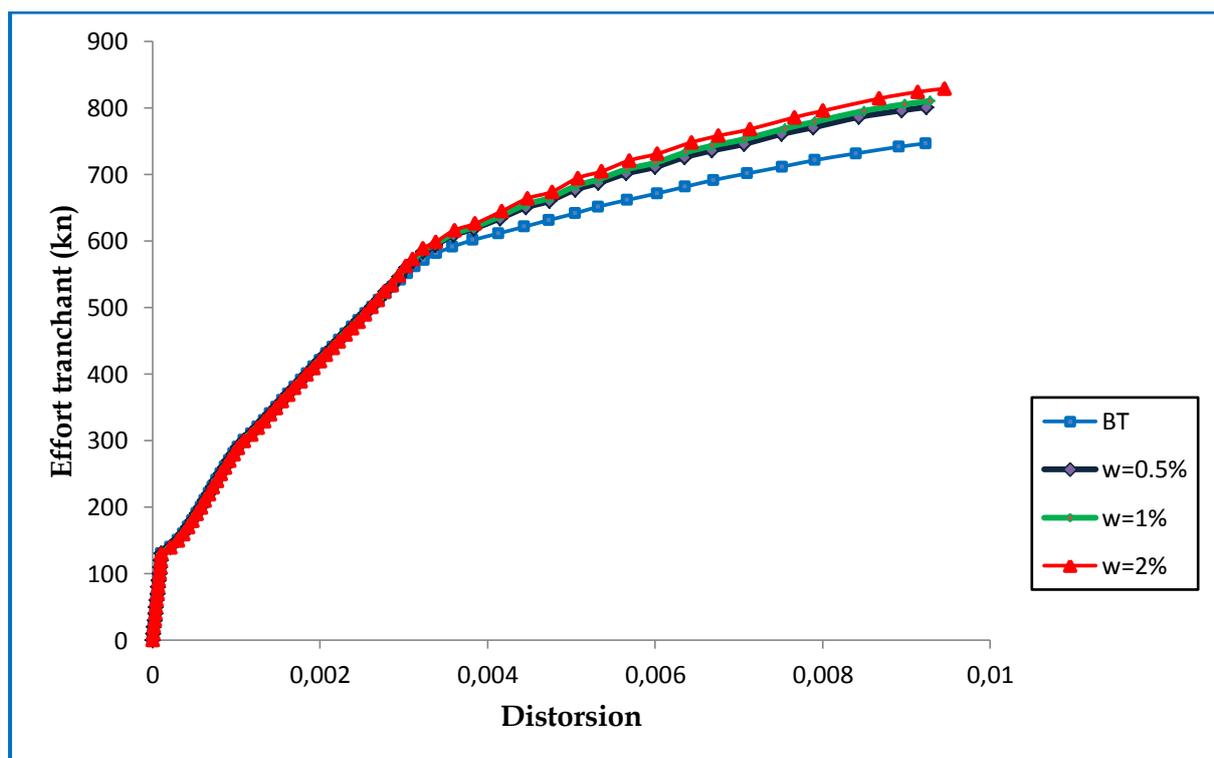


Figure IV-11 : Courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA3 avec longueur de fibres $l_f=30$ mm et $\tau =7$ Mpa.

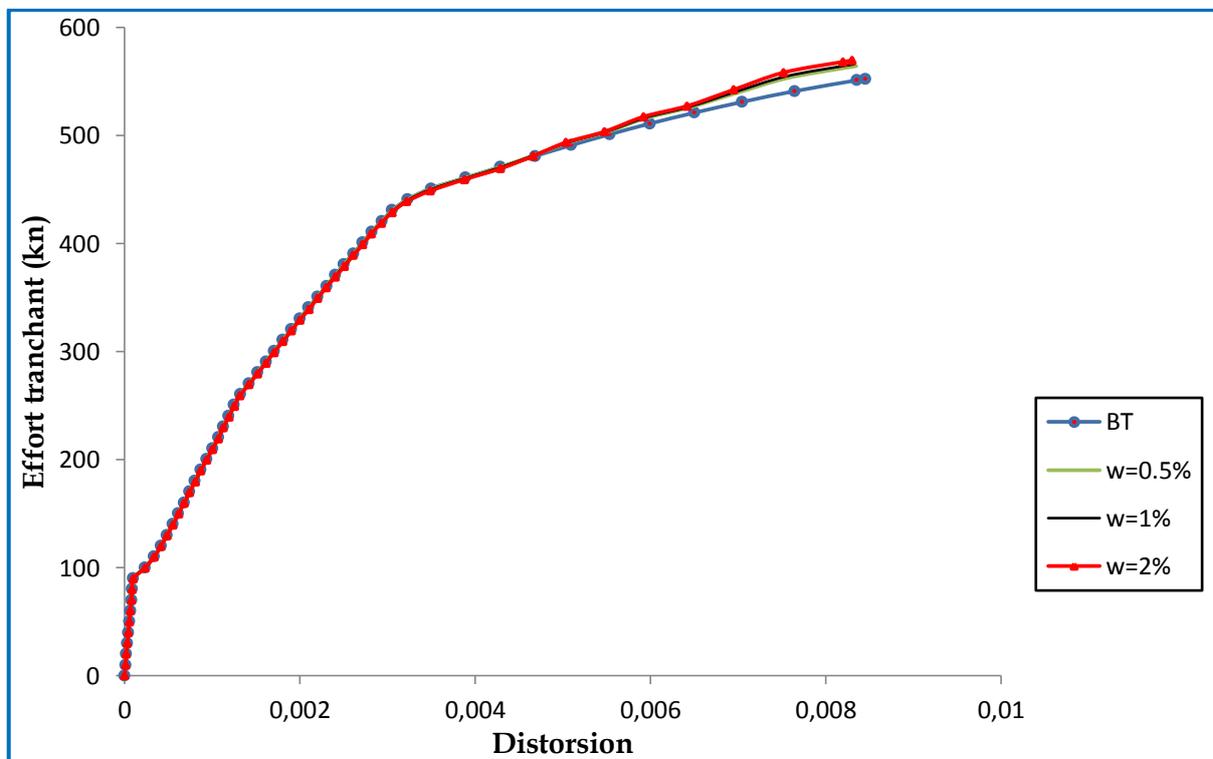


Figure IV-12 : courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA4 avec longueur de fibres $l_f=30\text{mm}$ et $\tau =7\text{ Mpa}$.

Cas 2 : $L_f = 30\text{ mm}$ et $\tau = 10\text{ Mpa}$

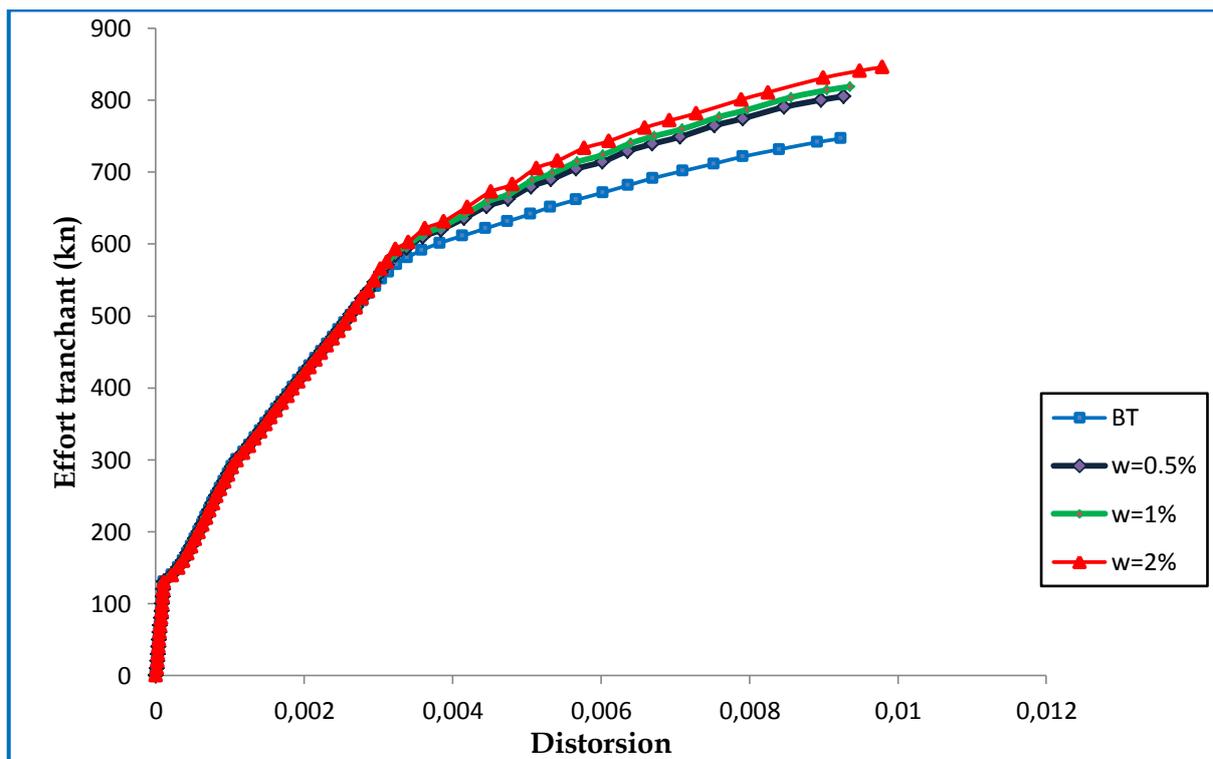


Figure IV-13 : courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA3 avec longueur de fibres $l_f=30\text{ mm}$ et $\tau =10\text{ Mpa}$.

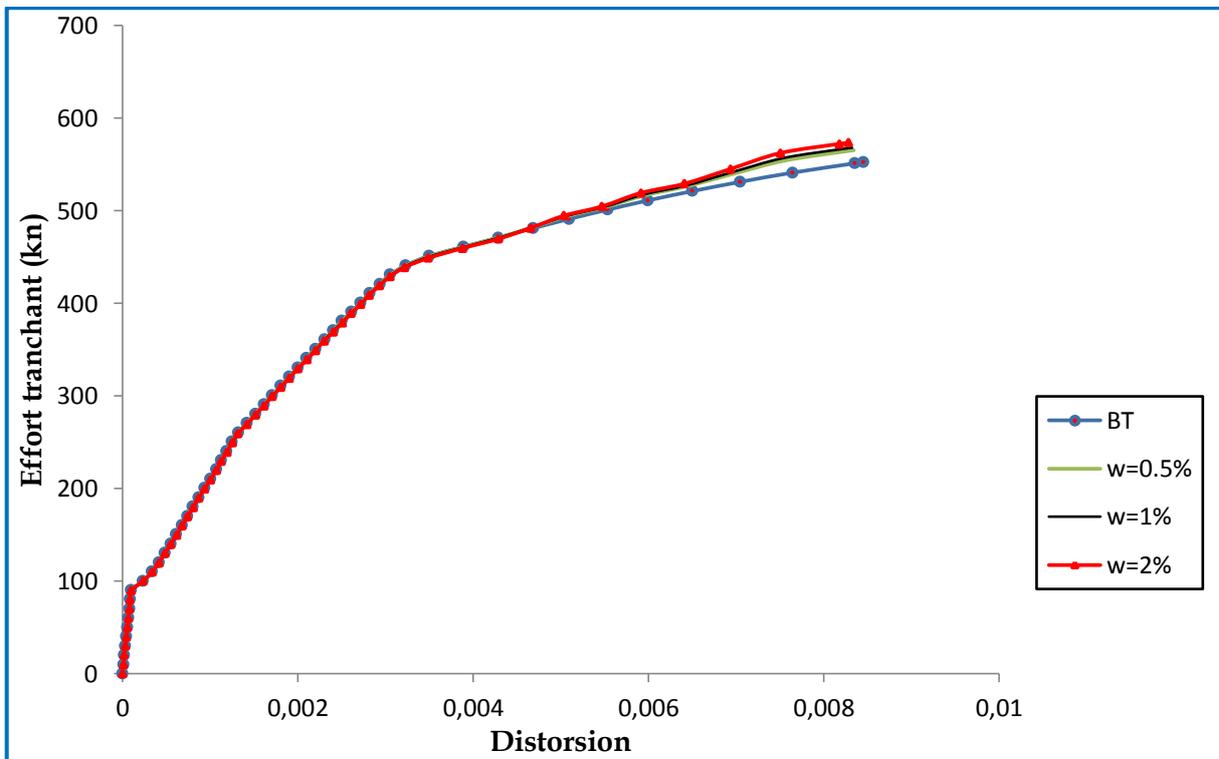


Figure IV-14 : courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA4 avec longueur de fibres $l_f=30\text{mm}$ et $\tau =10 \text{ Mpa}$.

Cas 3 : $L_f = 60 \text{ mm}$ et $\tau = 10 \text{ Mpa}$

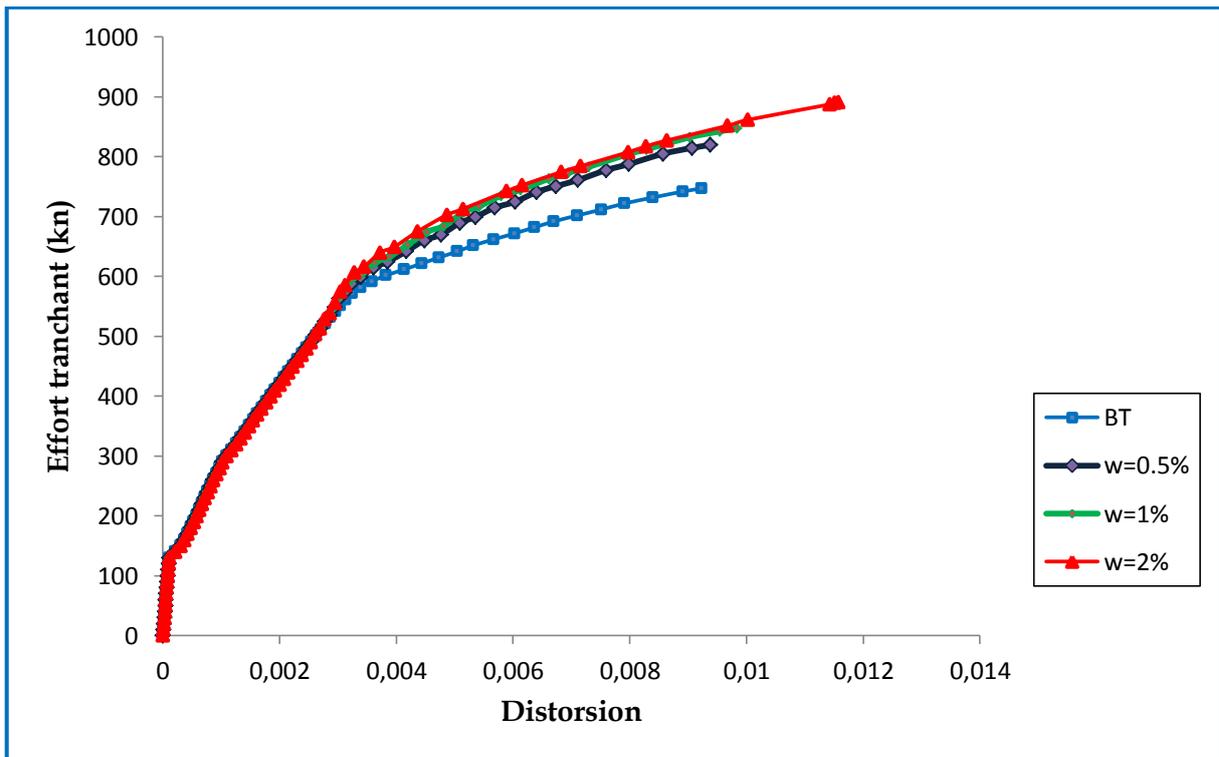


Figure IV-15 : courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA3 avec longueur de fibres $l_f=60\text{mm}$ et $\tau =10 \text{ Mpa}$.

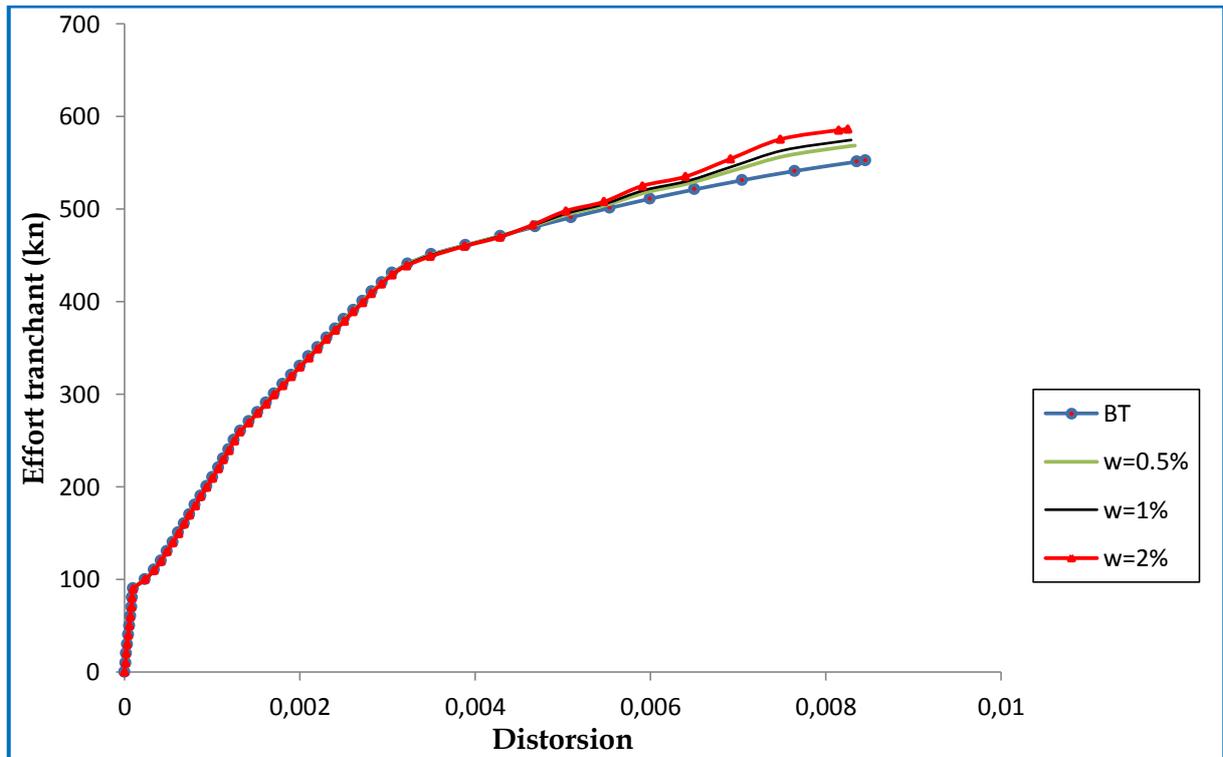


Figure IV-16 : courbe effort tranchant -distorsion de la poutre SA4 avec longueur de fibres $l_f=60$ mm et $\tau =10$ Mpa.

Le tableau IV-7, donne la variation des valeurs de l'effort tranchant ultime des poutres en BFM armé.

Tableau IV-7 : variation des valeurs de l'effort tranchant ultime.

POUTRE	L_f et τ_u des fibres	Pourcentage de fibres	Valeur ultime de l'effort tranchant V_u (kn)		
			V_{BT} (KN)	V_{BF} (KN)	V_{BF}/V_{BT}
SA3	$L_f = 30$ mm $\tau = 7$ Mpa	0,50%	746,639716	801,199135	1,073
		1%	746,639716	810,466670	1,085
		2%	746,639716	829,001741	1,110
	$L_f = 30$ mm $\tau = 10$ Mpa	0,50%	746,639716	805,405174	1,079
		1%	746,639716	818,878747	1,097
		2%	746,639716	845,825895	1,133
	$L_f = 60$ mm $\tau = 10$ Mpa	0,50%	746,639716	819,425302	1,097
		1%	746,639716	846,919003	1,134
		2%	746,639716	890,814800	1,193
SA4	$L_f = 30$ mm $\tau = 7$ Mpa	0,50%	552,539375	564,462386	1,022
		1%	552,539375	566,173740	1,025
		2%	552,539375	569,596448	1,031
	$L_f = 30$ mm $\tau = 10$ Mpa	0,50%	552,539375	565,446536	1,023
		1%	552,539375	568,142040	1,028
		2%	552,539375	573,533048	1,038
	$L_f = 60$ mm $\tau = 10$ Mpa	0,50%	552,539375	568,727036	1,029
		1%	552,539375	574,703040	1,040
		2%	552,539375	586,655048	1,062

Nous pouvons constater que la valeur de l'effort de cisaillement ultime augmente avec l'augmentation de la longueur des fibres d'une part .D'autre part, cette valeur augmente également avec l'augmentation de la contrainte d'adhérence fibres-matrice de béton.

L'amélioration de la rigidité de cisaillement est constatée dans l'ensemble des cas de figures, dans la dernière phase du comportement des poutres en béton armé, à savoir, après la plastification des armatures tendues voir figures IV-11 à IV-16.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Dans le cadre de cette étude un logiciel de calcul en élasticité non linéaire du comportement des sections jusqu'à rupture, en cisaillement a été élaboré. Il est basé sur le modèle de calcul développé par KACHI (2006). Il tient compte d'un module de cisaillement variable, et du comportement réel (non linéaire) des matériaux constituant la section.

On peut noter que le modèle développé est capable d'estimer le comportement des sections en cisaillement jusqu'à rupture. Il est aussi capable de simuler la rupture si bien en flexion qu'en cisaillement, et ce dans le cas du béton armé, du béton précontraint et du béton de fibres.

D'autre part, on peut noter que la présence des fibres permet d'améliorer la valeur de l'effort tranchant ultime dans le cas du béton armé, et en l'absence d'un effort normal de compression qui empêche l'apparition de zones tendues de la section.

Par contre, dans le cas de la précontrainte, l'effort de précontrainte centrée est un effort de compression qui mobilise des contraintes de compression importantes, dans toute la section. Ce qui empêche l'apparition de zones tendues, on observe dans ce cas que la présence des fibres n'apporte pas d'amélioration ni sur le module de cisaillement ni sur la valeur ultime de l'effort tranchant, ce qui est logique, puis que dans le comportement en compression du béton armé de fibres, l'influence des fibres est négligée.

Le comportement global au cisaillement d'une poutre en BFM armé et/ou précontraint peut se décomposer en trois phases :

La première phase (phase I) avant fissuration du béton. Cette phase correspond au module de cisaillement élevé. On remarque que dans cette phase, le module de cisaillement n'est pas influencé par la présence des fibres.

La deuxième phase (Après fissuration du béton) est caractérisée par une diminution significative de la pente (module de cisaillement) de la courbe effort tranchant - distorsion due à l'apparition de la première fissure. La fissure de cisaillement apparait lorsque la contrainte de traction dans la direction perpendiculaire aux bielles de béton comprimées atteint la résistance à la traction du béton. Dans cette phase on peut remarquer une influence minimum des fibres sur la rigidité de cisaillement des poutres.

La troisième phase de ce comportement est la phase de rupture qui est atteinte juste après la plastification des armatures tendues. On peut noter, que dans cette phase, la présence des fibres métalliques améliore le module de cisaillement des poutres significative dans le cas du béton armé. Cette amélioration peut atteindre les 39% voir la poutre SA3 et SK3 pour un pourcentage de fibres est égal à 2%.

Par contre dans le cas de la précontrainte on remarque qu'il n'y a aucun apport des fibres sur le module de cisaillement.

En fin, le logiciel développé pour le calcul des sections en béton armé de fibres peut intégrer un logiciel de calcul global de structure aisément, comme module de calcul de l'équilibre des sections, tenant compte du comportement réel des matériaux en élasticité non linéaire.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1-[ABS. 86] . ABSI, E., NAAMAN, A.E., (1986) Modèle rhéologique pour les bétons de fibres. 3^{ème} symposium international, Sheffield, 1986.
- 2-[BAR. 81] . BARTOS P., (1981) Review paper: Bond in fiber reinforced cements and concretes, International journal of cement composite and lightweight concrete, 1981, vol.3 n°3, p.31-37.
- 3-[BER. 91] . BERNIER, G. (1991) « Caractérisation et contrôle des bétons renforcés de fibres », Annales de l'ITBTP N°494, 1991
- 4-[BOUA. 87] . BOUAFIA, Y., (1987) Simulation numérique du comportement moyen jusqu'à rupture d'une zone de poutre. Application au béton armé, béton précontraint et/ou béton de fibres. Mémoire de DEA, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1987.
- 5-[BOUA. 98] . BOUAFIA, Y.; FOURE, B.; KACHI, M .S. (1998), "Relation effort-ouverture des fissures dans le cas du béton armé de fibres d'acier", Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, n°2, avril 1998.
- 6-[BOUA. 02] . BOUAFIA, Y., KACHI, M .S., FOURE, B., (2002), "Relation contrainte-déformation en traction du béton armé de fibres d'acier", Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, n°3, juin 2002.
- 7-[BOUZ. 03] . BOUZEROURA, M., (2003) Etude du comportement du béton de fibres ondulées. Proposition d'une relation simplifiée contrainte-déformation. Magister en génie civil- Université de Tizi-Ouzou, 2003.
- 8-[CHE. 10] . CHERGUI, N.,(2010), Caractérisation en statique du comportement en traction directe du béton armé de fibres en copeaux, Mémoire de magister en génie civil, Université M. MAMMARI de TIZI - OUZOU, 2010.
- 9-[CUY. 77] . CUYKENS T., VANSTERMANS J., (1977) « Bétons de fibres en acier », Extrait de C.S.T.C. Revue N°3, Septembre 1977.
- 10-[DEH. 74] . DEHOUSSE, N. ; LEJEUNE, A. ; KUYKENS, T., (1974) Les mortiers et bétons renforcés de fibres d'acier, Bruxelles, C.S.T.C. Revue n°2, 1974.
- 11-[DJEB. 13] . DJEBALI, S., (2013) . Caractérisation des éléments de structures en béton de fibres métalliques , Thèse de doctorat d'état, Université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou, juin 2013.
- 12-[EDI. 72]. EDINGTON, J. HANNANT, (1972) Steel fiber reinforced of compacting by vibration, mat. et const, 5, n°25, janvier - février 1972.

- 13-[ELH. 90] . ELHACHEM, M.,(1990) Etude de l'influence de la fibre de fonte sur le fluage et le retrait du béton. Thèse de docteur de l'E.C.P. février 1990.
- 14-[FAN. 85] . FANELLA, D.A.; NAAMAN, A.E.,(1985) Stress-strain properties of fiber reinforced mortar in compression. Journal of the American concrete institute, vol. 79, n°4, July-august 1985.
- 15-[GRE.78] . GRELAT A., Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé Thèse de doctorat Ingénieur-Université PARIS VI-1978.
- 16-[HUG. 81] . HUGHES, FATTUCHI, «The workability of steel fiber reinforced concrete» G.B. MAGAZINE of concrete research, vol. 28 N°96. 1981.
- 17-[JEJ. 77] . JEJCIC, O.; ZANGHLLINE, F., (1977), Mortier et ciment armé de fibres : une étude bibliographique, Annales de l'I.T.B.T.P., Suppl. n°347, Série matériaux 51, pp. 46-87, 1977.
- 18-[JIN. 81] . JINDAL, R.L., (1981), Shear and moment capacities of steel fiber reinforced concrete beams, USA, AM Concr. Inst, SP81.1, 1981.
- 19-[JON. 80] . JONSTON C.D Properties steel fiber reinforced porter and concret, Proceedings of the symposium on fibrous held .In LONDON, 1980.
- 20-[KACH. 97]. KACHI, M.S. (1997) « Calcul non linéaire jusqu'à rupture, d'une section en béton armée de fibres métalliques », Thèse de magister, université M. MAMMERI de Tizi-Ouzou, fév. 1997.
- 21-[KACH. 06]. KACHI. M.S., Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieure, Thèse de doctorat d'état, Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, novembre 2006.
- 22-[KACH. 06].KACHI, MS., FOURE, B., BOUAFIA, Y., MULLER, P., « L'effort tranchant dans la modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint ». Revue Européenne de Génie Civil, volume 10, n° 10/2006, déc.2006, ISSN 1774-7120, Ed. Lavoisier, France, pp. 1235 -1264.
- 23-[KACH. 08].KACHI M. S., BOUAFIA Y., MULLER P., FOURE B., " Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint en élasticité non linéaire". Colloque International - Caractérisation et Modélisation des matériaux et structures « CMMS08 », Université de Tizi-Ouzou en collaboration avec les universités de Paris 6 et de Cergy - Pontoise, Tizi Ouzou -Algérie, 16, 17 et 18 Nov. 2008.

- 24-[KAOU.11].Kaouane T. Modélisation du comportement en cisaillement jusqu'à rupture des sections de poutres en béton armé et précontraint. Thèse de magister, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, 2011.
- 25-[KRE. 87]. KRENCHER, H. (1987) Fiber reinforced brittle matrix materials, A.C.I. International symposium, sp 44. 3 USA 1987.
- 26-[LIM. 87] . LIM, T.Y., PARAMASIVAM, P., MANSUR, M.A., LEE, S.L., (1987) Analytical model for tensile behavior of steel fiber concrete, Journal of American concrete institute, materials, vol. 84, n°4 , 1987
- 27-[MAIA.79]. Maia ACF. Analyse non-linéaire des portiques en béton armé ou précontraint compte tenu du comportement rhéologique du béton. Thèse de Docteur Ingénieur, Université Pierre et Marie CURIE, Paris VI, 1979.
- 28-[MAM. 87]. MAMILLAN, M.; MINARD, J. (1987), Béton de fibres d'acier, Recherche n°91-1015, CEBTP, octobre 1987.
- 29-[MAZ. 88] . MAZARS, J., (1988), Nouveau concept dans la modélisation des comportements du béton composite. Application au calcul des structures. Annales de l'I.T.B.T.P. n°41, série béton. 1988.
- 30-[NAN.88] NANNI A. Splitting tension test for fiber reinforced concrete . ACI Journal,n°85-M27,PP229-233,July-August 1988.
- 31-[NAR. 87]. NARAYANAN, R., DARWISH, Y.S. (1987), Use of steel fiber as shear reinforcement. ACI structural journal, n°84, s23, pp 216-227, May-June 1987.
- 32-[NEM. 91]. NEMEGEER, D. DRAMIX, fibres d'acier pour le renforcement du béton. C.E.R.I.L., stage n°6, Fév.1991.
- 33-[RAM. 87] . RAMAKRISHAN, V. OBERLING, G., TATNAL, P.C., (1987), Flexural fatigue strength of steel fiber reinforced concrete. Rapport de recherché 1987.
- 34-[ROB.82] .ROBERTS T M ,N L HO . Shear failure of deep fiber reinforced concrete beams , G B ; Inst. J. Of Cem, Lightweight Concr , Vol 4 ; n°3 ; PP 145-152, 1982
- 35-[ROS. 84] . SERNA ROSS, (1984), Etude de la contribution des fibres métalliques à l'amélioration du comportement du béton au cisaillement. Thèse de doctorat de l'ENPC, 1984.
- 36-[SAR. 68] . SARGIN, M., (1968), Stress-strain relationship for concrete and the analysis of structural concrete sections. PhD thesis presented to the University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, March 1968, 334p.

37-[SOR. 90] .SOROSHIAN P, LEE C D. Distribution and orientation of fibres in steel fiber reinforced concrete . ACI Materials Journal, n°87 ,M 44,VOL 87, n°5 , pp 433-439 Sep-Oct 1990

38-[SAA.11]. SAAD M., Influence du pourcentage d'acier sur le comportement post-fissuration du béton armé en traction, thèse de doctorat d'état, université de Tizi-Ouzou, Algérie, 2011.

39-[SWA. 75b]. SWAMY, R.N., AL-NOURI, K., (1975), Flexural properties of steel fiber reinforced concrete, G.B.; concrete, vol9, n°6, p. 30-31, 1975.

40-[VAL. 87]. VALADE, TH. (1987), Comportement des bétons armés de fibres métalliques. Mémoire de recherche développement, ENS de CACHAN, Déc. 1987.

41-[VEC.82].VECCHIO F.J;COLLINS MP;The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses, University of Toronto, Department of Civil Engineering, Publication No.82-03, March 1982.

42-[ZHA. 91] . ZHAN, Z.« Contribution au dimensionnement des pieux en béton de fibre » Thèse de doctorat, université d'Orléans . NOV. 1991.