

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOULOD MAMMERI DE TIZI OUZOU
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme de Master 2
En Génie Mécanique
Option : Construction Mécanique

Thème

Instabilité des structures en
matériaux composites (flambement)

Proposé et dirigé par :

Mr: A.DJEBBAR

Réalisé par :

Mr: AMRANE Mourad

Promotion 2011

Remerciements

Je remercie le bon dieu pour m'avoir donné la force et le courage pour réaliser ce modeste travail et qui ma éclairé les chemins par la lumière de son immense savoir

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude aux personnels en particulier mon père et toute ma famille, qui grâce à leur aide, mon travail a vu le jour.

Je remercie profondément mon promoteur Monsieur A.DJEBBAR, d'avoir accepté de diriger mon travail, par son soutien et ces conseils judicieuses qui mon données le courage et l'espoir d'être excellé dans le domaine.

Je suis également reconnaissant aux personelles de la bibliothèque de Génie Mécanique pour leur aide.

Je tiens à remercier les membres de jury qui me font l'honneur d'examiner et de critiquer ce modeste travail.

Mes sincères remerciements vont à tous mes enseignants.

Mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui de, près ou de loin, mon porté aide et encouragement.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- mes très chers parents
- mes sœurs et à toutes ma famille
- ma sœur et sa petite famille
- tous qui me sont chers
- tous mes amis (es)

Sommaire

Chapitre I : les matériaux composites

Introduction.....	1
I.1.Définitions	1
I.2.Intérêt des matériaux composites	1
I.3 différents types de matériaux composites	1
I.3.1.Matériaux composites à grande diffusion.....	1
I.3.2. Matériaux composites à hautes performances	2
I.4. Classification des matériaux composites.....	2
I.4.1. Suivant la forme des constituants.....	2
I.4.1.1. composite à particules	2
I.4.1.2. composites à fibres	2
I.4.2. Suivant la nature des constituants	2
I.5. Les constituants des matériaux composites	2
I.5.1. Les renforts	2
I.5.1.1. Les fibres	3
I.5.1.1.1. Types de fibres	3
I.5.1.1.2. Architecture des renforts	4
I.5.1.3. Ensimage	6
I.5.1.4. Caractéristiques des fibres et renforts.....	6
I.5.2 : Les charges	7
I.5.2.1. Les différentes charges	8
I.5.2.1.1. les charges renforçantes	8
I.5.2.1.2. les charges non renforçantes	9
I.5.3. La matrice.....	10
I.5.3.1. Les différents types de matrices	11
I.5.3.1.1. Les matrices organiques	11
I.5.3.1.2. Les matrices carbonées.....	15
I.5.3.1.3. Les matrices métalliques	16
I.5.3.1.4. Les matrices céramiques	16
I.5.4. Les additifs	16
I.5.5. Interface	16
I.5.6. Les stratifiés	17
I.6. Les technologies de mise en œuvre.....	17
I.6.1. Moulage sans pression	17
I.6.1.1. Moulage au contact.....	17
I.6.1.2. moulage par projection simultanée.....	18
I.6.1.3 : Moulage sous vide.....	19
I.6.2. Moulage par compression	19
I.6.2.1. Moulage par injection basse pression de résine - RTM	19
I.6.3. procédés de fabrication de forme de révolution	20
I.6.3.1. Moulage par enroulement filamentaire.....	20
I.6.3.2. Moulage par centrifugation	21
I.6.4. Moulage en continu	22
I.6.4.1. Moulage par pultrusion.....	22
Conclusion	22

Chapitre II : les essais mécaniques

Introduction.....	23
II.1. Essais sur éprouvette modèle	23
II.1.1. Les techniques	23
II.1.1.1. Le test d'extraction.....	23
II.1.1.2 : Test d'indentation	24
II.1.1.3. Test de fragmentation.....	24
II.2 Essais sur produits finis	25
II.2.1 Traction	26
II.2.1.1. Traction longitudinale	26
II.2.1.2. Traction transversale	27
II.2.1.3. Traction hors axes	27
II.2.2. Essai de compression	28
II.2.3. Essais de flexion	29
II.2.3.1. Essai de flexion quatre points	29
II.2.3.2. Essai de flexion trois points	30
II.2.3.2.1. Principe de l'essai	30
II.2.3.2.2. Discussion	31
II.2.3.2.3. Evaluation des contraintes normales	33
II.2.3.2.4. Le cisaillement	33
Conclusion	35

Chapitre III : Etude du contact

Introduction	36
III.1. Etude théorique du contact	36
III.2. Contact d'Hertz	36
III.2.1. Les hypothèses reliées au contact d'Hertz	36
III.3. Les approches de la théorie	37
III.3.1. Approche géométrique	37
III.3.1.1. Description des surfaces en contact	37
III.3.2. Les déformations	38
III.3.3. Approche contraintes	39
III.4. Solution du problème d'Hertz	40
III.4.1. Cas d'un solide de révolution	40
III.4.2. Cas générale.....	41
III.4.3. Contact cylindrique	43
III.5. Alternatives à l'essai de flexion	45
III.5.1. modification du mode de chargement	45
III.5.1.1. Essai de flexion pure	45
III.5.1.2. Rotation d'encastrement	46
III.5.2 : Réduction des contraintes de contact	46
III.5.2.1. modification de la distance entre appuis	46

III.5.2.2. augmentation du rayon de la panne centrale	46
III.5.2.3. Introduction d'un clinquant	47
Conclusion	47

Chapitre IV : étude du flambement

Introduction.....	48
IV.1. Définition	48
IV.2. Mise en évidence du phénomène de flambement	48
IV.3. Détermination de la flèche $Y(x)$	49
IV.4. La charge critique d'Euler	52
IV.4.1. Détermination de la charge	52
IV.4.2. La charge critique pour les différents cas du flambement	54
IV.4.3. Etude des différents cas ou modes de fixations.....	55
IV.4.3.1. Cas où la poutre est articulée à ses deux extrémités, et soumise à un effort de compression F	55
IV.4.3.2. Cas où la poutre est encastree à une extrémité et libre à l'autre, soumise à un effort de compression F	56
IV.4.3.3. Cas d'une poutre encastree à ses deux extrémités, soumise à un effort de compression F et à deux moments de même valeur au niveau des deux encastrements	58
IV.4.3.4. Cas où la poutre est articulée à une extrémité et encastree à l'autre	60
IV.4.3. Détermination de la charge critique par les méthodes énergétiques.....	63
IV.4.3.1. Application des méthodes énergétiques	63
IV.4.3.2. étude des méthodes énergétique	64
IV.4.3.2.1. méthode de coefficient de Rayleigh.....	64
IV.4.3.2.2. méthode de Rayleigh-Ritz	66
IV.4.3.2.3. méthode de Galerkin	66
IV.4.4. Application des méthodes énergétiques	67
IV.5. réalité du phénomène du flambement.....	71
IV.5.1. excentricité de la charge.....	71
IV.5.2. poutre avec courbure initiale	72
IV.6. Résistance au flambement	74
IV.6.1. Elancement	74
IV.6.2. Elancement critique	74
IV.6.3. Formule d'Euler	74
IV.6.4. Formule de Rankine	75
IV.7. Principe de l'essai de flexion par flambement	75
IV.8. étude comparative de l'essai de flexion trois point par rapport à l'essai de flexion par flambement	76
IV.8.1. Comparaison des efforts intérieurs	76
IV.8.2. Comparaison des diagrammes des efforts intérieurs	77
Conclusion	78

Liste des symboles

r : rayon de la fibre (mm)

τ_c : Résistance interfaciale en cisaillement

τ : Contrainte de cisaillement

L : longueur de l'éprouvette

σ : Contrainte normale (MPa)

L_C : Longueur entourée de matrice (mm)

N : nombre de rupture de la fibre

b : longueur de l'éprouvette (mm)

h : épaisseur de l'éprouvette (mm)

G_M : Module de cisaillement de la matrice (MPa)

V_f : Taux de renfortsc (%)

r_1 : Rayon de la panne centrale (mm)

P : charge appliquée (N)

L : longueur entre appuis (mm)

L_0 : longueur de l'éprouvette (mm)

b : largeur de l'éprouvette (mm)

r_1 : rayon de la panne centrale

Y_{Max} : flèche maximale

I : moment quadratique (mm⁴)

E : module d'Yong (MPa)

Ω : section transversal de la pouter (mm²)

G : module de cisaillement en flexion (MPa)

E_{app} : Module apparent

ΔP : variation de la charge

Δy : Variation de la flèche

M_f : moment de flexion

T : effort tranchant

y_G : centre de gravité

ε : Déformation

α : Coefficient d'anisotropie

R', R'' : rayon de courbures

R: rayon équivalent

\bar{u}_z : déplacement après déformations

δ : Enfacement (mm)

a : rayon de contact

h: distance entre surfaces (mm)

P_m : pression moyenne (N/mm²)

P_{cr} : charge critique (N)

L_f : longueur fictive de flambement

a_{ij} : fonction multiplicateur

$\Delta\mu$: Énergie

$\Delta\Omega$: Énergie potentielle

λ : Élancement

λ_c : élancement critique

e : excentricité

Liste des figures

Figure I.1 : fibre de carbone	3
Figure I.2 : fibre de carbone	4
Figure I.3 : fibre de d'aramide.....	4
Figure I.4 : trame et chaine.....	5
Figure I.5 : Toile ou taffetas.....	6
Figure I.6 : Serge.....	6
Figure I.7 : Satin.....	6
Figure I.8 : tissu hybride carbone-aramide.....	6
Figure I.9 : Diagramme de température.....	12
Figure I.10 : Procédé de moulage au contact	18
Figure I.11 : Procédé de moulage par projection simultanée	18
Figure I.12 : moulage par injection de résine.....	20
Figure I.13 : moulage par enroulement filamentaire	21
Figure II.1 : test d'extraction.....	23
Figure II.2: courbe force déplacement.....	23
Figure II.3: schéma de l'essai d'indentation	24
Figure II.4 : Essai de fragmentation	24
Figure II.5 : traction longitudinale.....	26
Figure II.6 : traction transversale	27
Figure II.7 : Traction hors axes.....	27
Figure II.8 : modes de micro-flambement.....	28
Figure II.9 : Essai de flexion quatre points	29
Figure II.10 : Diagramme de l'effort tranchant	29
Figure II.11 : Diagramme du moment fléchissant	30
Figure II.12 : essai de flexion trois points.....	30
Figure II.13 : courbe de contrainte déformation pour un matériau ductile	31
Figure II.14 : Représentation des réactions d'appuis	31
Figure II.15 : Diagramme de l'effort tranchant	32
Figure II.16: Diagramme du moment fléchissant	32
Figure II.17: diagrammes des contraintes normales.....	33
Figure II.18: diagramme de la contrainte de cisaillement.....	33
Figure II.19: représentation d'YG et S.....	34

Figure III.1 : représentation du contact d’Hertz	38
Figure III.2 : Contact ponctuel.....	40
Figure III.3 : contact linéique	43
Figure III.4 : flexion pure.....	46
Figure III.5 : Essai de flexion par rotation d’encastrement	46
Figure III.6 : Augmentation du rayon de la panne	46
Figure III.7 : Insertion d’un clinquant.....	47
Figure IV.1 : poutre en compression	49
Figure IV.2 : cas général d’une poutre sollicité au flambement	49
Figure IV.3 : modélisation d’une poutre par sa ligne moyenne.....	52
Figure IV.4 : les modes de flambement.....	53
Figure IV.5 : Valeur de K pour le calcul de la longueur de flambement	54
Figure IV.6 : poutre articulée à ses deux extrémités	55
Figure IV.7 : poutre à une extrémité et libre à l’autre	56
Figure IV.8 : poutre encastree aux deux extrémités	58
Figure IV.9 : poutre est articulée à une extrémité et encastree à l’autre	60
Figure IV.10 : graphe de l’équation $\text{tg } \omega L = \omega L$	62
Figure IV.11 : récapitulatif des cas étudiés	62
Figure IV.12 : Poutre solliciter en flambement.....	68
Figure IV.13 : Poutre comprimée excentriquement.....	71
Figure IV.14 : Poutre comprimée avec courbure initiale	73
Figure IV.15 : Schémas du principe de l’essai de flexion par flambement.....	75
Figure IV.16 : Configuration du flambement.....	76
Figure IV.17 : Répartition des efforts sur section d’abscisse x.....	76
Figure IV.18 : Comparaison des diagrammes N, T et M_f entre l’essai de flexion trois points et par flambement.....	77

Liste des tableaux

Tableau I.1 : les caractéristique des fibres et renforts.....	7
Tableau I.2 : Caractéristiques des résines thermodurcissables.....	13
Tableau I.3 : Caractéristiques des résines thermoplastiques	15
Tableau I.4 : Les différences entre les résines thermodurcissables et thermoplastiques	15
Tableau IV.1 : récapitulatif des longueurs de flambement et les charges critiques	63

Introduction générale

L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques.

La construction moderne est caractérisée dans tous les domaines (génie civile, construction des machines, construction navale, automobile et aéronautique) par l'emploi de structures toujours plus grandes et par la réduction progressive des sections résistantes qui est exigé par l'économie et la légèreté. Elle est rendue possible par l'utilisation de matériaux à haute résistance tels que les aciers spéciaux, les alliages d'aluminium, de titane, notamment les matériaux composites à fibres de carbone d'aramide ou de verre, et par l'emploi de contraintes en service toujours plus élevées. C'est pourquoi le danger d'instabilité qui était inexistant au temps de la construction en pierre et en bois, devient de plus en plus menaçant.

L'étude sera consacrée plus sur les matériaux composites, vu que leur utilisation aujourd'hui est beaucoup plus grande et progresse d'une façon rapide dans pratiquement tous les domaines, et ce grâce à leur hautes performances mécaniques.

Ainsi le développement de l'utilisation des composites dans les structures, en remplaçant des matériaux métalliques nécessite de mettre en place les méthodes et les outils nécessaire à l'étude du comportement mécanique et à la caractérisation de ces matériaux.

L'objectif de notre travail est de présenter une étude détaillée du flambement et de montrer les aspects du choix de l'essai de flexion par flambement.

A cet effet, nous divisons ce travail comme suit :

Dans le premier chapitre nous avons présenté les matériaux composites, afin de donner une revue sur les constituants et les procédés de mise en œuvre de ces matériaux.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des principaux essais mécaniques, tel que les essais sur éprouvette modèle et essais sur produit finis, pour analyser le comportement des composites.

Le troisième chapitre porte une étude approfondie du contact mécanique générer lors des essais de flexion trois et quatre points.

Dans le quatrième chapitre nous décrivons le phénomène du flambement et le comportement des matériaux composites en flexion par flambement qui présente une alternative à l'essai de flexion trois points.

L'étude est terminée par une conclusion générale.

Introduction

Tous les matériaux ne présentent que quelques caractéristiques mécaniques, il y a toujours des propriétés qui manquent. A cet effet beaucoup de travaux sont effectués pour associer plusieurs propriétés, la solution est de réunir différents matériaux pour déboucher à une technologie spécifiques à des matériaux hétérogènes qu'on appelle matériaux composites qui apportent de nombreux avantages fonctionnels tels que : la légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme.

I.1 : Définition

Un matériau Composite est constitué par un assemblage de plusieurs matériaux qui diffèrent par leurs propriétés mécaniques et physiques, se combinent et se complètent en donnant un matériau hétérogène anisotrope dont les performances et les propriétés sont améliorées en comparaison à celles des éléments pris séparément.

Un matériau composite est formé essentiellement de matrice et de renfort, ses propriétés mécaniques et physiques se trouvent alors fortement influencées par:

- la nature des constituants et leurs propriétés,
- la géométrie du renfort et de sa distribution,
- le processus de fabrication, qui joue un rôle essentiel notamment sur l'interface renfort/matrice. [1]

I.2 : Intérêt des matériaux composites

L'utilisation des matériaux composites est générée par leurs principales caractéristiques :

- l'allègement des structures,
- La bonne tenue en fatigue,
- La résistance à la corrosion,
- L'insensibilité aux produits chimiques couramment utilisés dans la mécanique, une meilleure tenue au feu,

Par contre, les matériaux composites vieillissent sous l'action des agents extérieurs tels que l'humidité et la chaleur, et ont une tenue moyenne aux chocs et aux impacts.

I.3 : Différents types de matériaux composites

I.3.1 : Matériaux composites à grande diffusion

Ce sont des plastiques renforcés, constitués principalement de résines thermodurcissables avec des fibres en verre, utilisés dans l'industrie des transports automobile et ferroviaire.

I.3.2 : Matériaux composites à hautes performances

Ils sont constitués de résines époxydes renforcés par des fibres de verre longues, utilisés dans l'industrie aéronautique et spatiale.

I.4 : Classification des matériaux composites

Le classement est fait suivant la forme et la nature des constituants.

I.4.1 : Suivant la forme des constituants

I.4.1.1 : composite à particules : le renfort se trouve sous forme de particules

I.4.1.2 : composites à fibres : le renfort se trouve sous forme de fibres, qui à leurs tour se divisent en :

a-Composites à fibres longues : représentés par un ensemble de fibres continues alignées et immergées dans une matrice qui assure leur cohésion,

b-Composites à fibres courtes : le renfort se trouve sous forme de fibres discontinues disposées de façon aléatoire non orientée,

c-Composites à renfort tissu : un tissu est constitué de fils tissés dans deux directions perpendiculaires, qui sont la direction de chaîne (associée à la direction longitudinale de la couche composite) et la direction de trame (associée à la direction transversale de la couche composite). Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés et par le mode d'entrecroisement des fils de chaîne et de trame. [1]

I.4.2 : Suivant la nature des constituants

En se référant à la matrice, on trouve des matériaux composites à :

- matrice organique.
- matrice métallique.
- matrice de carbone.
- matrice céramique.

I.5 : Les constituants des matériaux composites

I.5.1 : Les renforts

Les renforts représentent la principale composante porteuse des matériaux composites, en lui apportant ses hautes performances (rigidité, résistance à la rupture, etc.)

Les qualités recherchées pour le renfort sont surtout des caractéristiques mécaniques élevées, une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec la résine ainsi qu'une facilité de mise en œuvre et un faible coût. La concentration du renfort est un paramètre déterminant pour les propriétés du matériau composite. Elle est mesurée par la fraction volumique ou par la fraction massique du renfort, et elle est généralement comprise entre 0,3 et 0,7.

L'anisotropie du matériau composite est une caractéristique fondamentale, elle est déterminée par l'orientation des fibres dans le cas où le renfort est constitué de fibres. Il faut cependant noter qu'au-delà de la concentration et de l'orientation des renforts, leurs distributions plus au moins homogène a une influence sur la résistance du composite. En effet pour une concentration donnée du renfort, une distribution uniforme assure une homogénéité du matériau, par contre une distribution non uniforme engendre l'initiation de la rupture dans les zones pauvres en renfort introduisant ainsi une diminution de la résistance du composite. les renforts se présentent sous forme de fibres. [2]

I.5.1.1: Les fibres : qui se présentent sous forme de centaines ou de milliers de filaments de diamètre compris entre 5 à 15 μm .

I.5.1.1.1 : Types de fibres [3]

Les fibres à hautes performances : des fibres de fonction mécanique prépondérante, de hautes performances et très utilisées, les principales fibres sont des fibres de verre, de carbone, de bore et de d'aramide.

Ø Fibre de verre (figure I.1)

Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion. Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore),

On distingue trois types de fibres :

- E : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;
- R : pour les composites hautes performances ;
- D : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques).



Figure I.1 : fibre de carbone

Ø Fibre de carbone (figure I.2)

C'est la fibre la plus utilisées dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile)

Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres :

- Fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 $^{\circ}\text{C}$;

-Fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.



Figure I.2 : fibre de carbone

Ø Fibre d'aramide

Souvent appelée KEVLAR, la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques dont la structure est composée de noyaux benzéniques reliés par des groupes Co et Hn. Fabriqués par synthèse à basse température (-10) et étiré pendant un traitement thermique. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes : la fibre basse module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ; la fibre haute module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances (figure I.3).



Figure I.3 : fibre de d'aramide

Ø Fibre de bore

Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.

Ø Fibre de silice (ou de quartz)

Elles sont produites comme le verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusée.

Ø Fibres de polyéthylène de haut module

Elles présentent une très bonne résistance à la traction mais une mauvaise mouillabilité. Pour des structures peu sollicités, on peut encore utiliser des fibres synthétiques courantes de polyamide ou polyester.

I.5.1.2 : Architecture des renforts :

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement. Il est

donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée.

Il existe différentes géométries et textures de renforts :

-Les unidirectionnels (UD) : les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Taux de déséquilibre très grand. (Figure I.4)

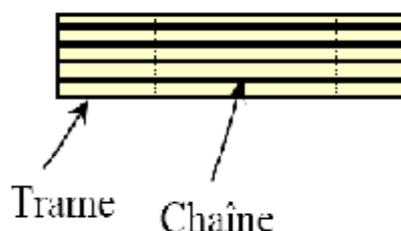


Figure I.4 : trame et chaîne

Les tissus se composent de fils de chaîne et de trame perpendiculaires entre eux. Le mode d'entrecroisement ou armure les caractérise.

-Toile ou taffetas

Chaque fil de chaîne passe dessus puis dessous chaque fil de trame, et réciproquement. Le tissu présente une bonne planéité et une relative rigidité, mais est peu déformable pour la mise en œuvre. Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques (Figure I.5).

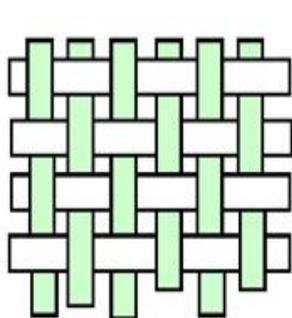
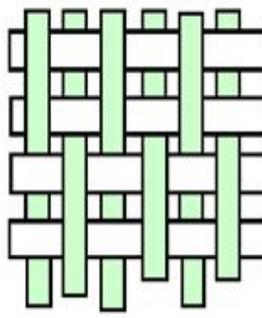
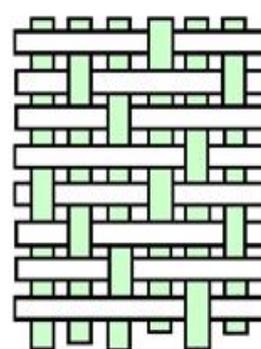
-Serge

Chaque fil de chaîne flotte au dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame flotte au dessus de (m) fils de chaîne. Armure de plus grande souplesse que le taffetas ayant une bonne densité de fils (Figure I.6).

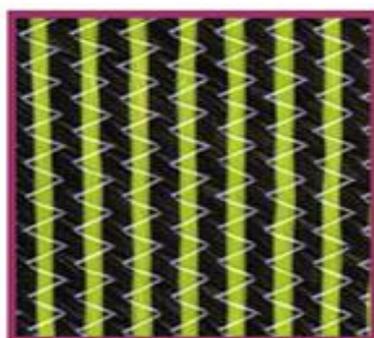
-Satin (Figure I.7)

Chaque fil de chaîne flotte au dessus de plusieurs (n-1) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissu présente une forte masse spécifique.

Comme un tissu est difficilement déformable sur une surface gauche, on réalise également pour des utilisations spécifiques de l'armure bi ou tridimensionnelle.

**Figure I.5** : Toile ou taffetas**Figure I.6** : Serge**Figure I.7** : Satin

Il est également possible de réaliser des structures de renforts hybrides en tissant des fibres de natures différentes ou, en superposant des tissus ou nappes de renforts de fibres différentes (figure I.8).

**Figure I.8** : tissu hybride carbone-aramide

I.5.1.3 : Ensimage [4]

Les renforts destinés à la fabrication des composites reçoivent un ensimage. L'ensimage est une dispersion aqueuse spécifique comportant un agent collant et des agents antistatiques, permettant d'assurer différents rôles :

- compatibilité de la liaison fibre - matrice ;
- cohésion interfilamentaire (raideur du fil) pour qu'il soit manipulable ;
- protection contre l'abrasion générée par la mise en œuvre (frottement contre pièces métalliques) ;
- élimination des charges électrostatiques dues aux frottements ;
- augmentation du mouillage de la fibre au cours de l'imprégnation.

Ce procédé est spécifique pour une résine et un procédé donné.

I.5.1.4 : Caractéristiques des fibres et renforts :

Les principales caractéristiques des fibres et renforts sont représentées dans le tableau I.1.

Renforts	Diamètre du filament (μm)	Masse volumique ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	Module de Yong (MPa)	Module de cisaillement (MPa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture en traction (MPa)	Allongement %	Coefficient de dilatation thermique $^{\circ}\text{C}^{-1}$
Verre E		2600	74000	30000	0.25	2500	3.5	$0.5 \cdot 10^{-5}$
Verre R	10	2500	86000		0.2	3200	4	$0.3 \cdot 10^{-5}$
Carbone HM	6.5	1800	390000	20000	0.35	2500	0.6	$0.08 \cdot 10^{-5}$
Carbone HR	7	1750	230000	50000	0.3	3200	1.3	$0.02 \cdot 10^{-5}$
Kevlar 49	12	1450	130000	12000	0.4	2900	2.3	$-0.2 \cdot 10^{-5}$
Bore	100	2600	400000			3400	0.8	$0.4 \cdot 10^{-5}$
Silicate d'alumine	10	2600	200000			3000	1.5	
Polyéthylène		960	100000			3000		

Tableau I.1 : les caractéristique des fibres et renforts [5]

I.5.2 : Les charges :

Le nom général charge désigne toute substance inerte, minérale ou végétale qui, incorporée dans un polymère de base, permet de modifier les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques, d'améliorer l'aspect de surface et aussi de réduire le prix de revient du matériau transformé.

Les matières thermodurcissables ont toujours contenues des charges de nature et de forme variées, à des taux souvent élevés pouvant atteindre 60 % en masse, à l'inverse des matières thermoplastiques,

Le choix d'une charge est déterminé en fonction des modifications recherchées pour l'objet fini. Mais, d'une manière générale, les substances utilisables comme charges des matières plastiques devront satisfaire à un certain nombre d'exigences :

-Compatibilité avec la résine de base ;

- Mouillabilité ;
- Uniformité de qualité;
- Faible action abrasive ;
- cout faible.

I.5.2.1 : Les différentes charges [6]

I.5.2.1.1 : les charges renforçantes : ont pour but amélioré les caractéristiques mécaniques de la résine, on peut citer :

-Craies et carbonates

La craie ou blanc de Champagne peut contenir jusqu'à 99 % de calcite, de la silice et d'autres corps minéraux. La taille moyenne de ses particules varie de 1 à 3 μm .

Le calcaire et le marbre contiennent 80 à 90 % de calcite et des quantités variables d'oxyde de magnésium et de silice. La taille des particules est comprise entre 0,5 et 30 μm .

Le carbonate de calcium-magnésium($\text{MgCO}_3 \cdot \text{CaCO}_3$) est préparé à partir des minerais de dolomite. On l'utilise comme charge et aussi comme retardateur de flamme.

Le carbonate de calcium précipité est un mélange pratiquement pur à 99,00 % de calcite, obtenu sous forme de particules très fines (0,05 à 16 μm).

Il est surtout utilisé avec le PVC et dans les matières thermodurcissables ainsi que les polyuréthanes (RIM) en raison de son caractère hydrophobe

-Les talcs

Ils sont utilisés pour améliorer l'isolation thermique et la résistance à l'eau, et faciliter l'opération de moulage.

Le talc est la charge la plus utilisée dans les thermoplastiques. Il leur confère une meilleure résistance au fluage ainsi qu'une plus grande rigidité. Ainsi que l'incorporation de talc facilite l'usinage des produits finis.

-Les argiles et aluminosilicates :

Des substances minérales, constituées en grande partie de la silice (42 à 70%) et d'alumine (14 à 45%).

Leur incorporation donne une meilleure résistance chimique électrique, et diminue l'absorption d'eau.

Ils sont utilisés dans les mélanges pour l'isolation des câbles.

Ils permettent également d'augmenter la stabilité dimensionnelle des pièces moulées.

-Alumine

On obtient l'alumine(Al_2O_3), anhydre ou hydratée, à partir de la bauxite. Cette charge apporte aux résines une meilleure résistivité électrique ainsi qu'une bonne conductivité

thermique ; elle diminue le coefficient de dilatation thermique linéique, augmente la rigidité ainsi que la résistance à l'abrasion et au feu.

-Les céramiques

Il existe des microsphères en céramique dont la densité varie entre 0,4 et 2,4 et les dimensions de 1 à 3 000 μm . Une microsphère de 70 μm comportant un revêtement permettant une meilleure dispersion a été mise au point. Conseillée dans les résines polyesters en combinaison avec CaCO_3 , elle apporte une réduction de masse de 15 à 25 % avec une amélioration des résistances à la compression et au choc.

I.5.2.1.2 : les charges non renforçantes : utilisées pour diminuer le prix de revient des résines, on peut citer :

Les charges organiques

Charges cellulosiques, utilisées en tant que charges des résines thermodurcissables, comme :

- Fibres végétales
- Pâtes de cellulose
- Amidons.

Oxydes et hydrates métalliques :

-Poudres et microsphères

Les oxydes de zinc, de magnésium, de titane sont utilisés sous forme de poudres fines comme charges du polypropylène, des compositions polyvinyliques, des résines époxydes, des polyesters insaturés, qui permettent aussi en plus de diminuer le cout d'augmenter la densité de la matière élastique.

L'oxyde de béryllium est utilisé sous forme de microsphères, qui sont des microsphères de densité voisine de 0,003 et d'un diamètre de l'ordre de 40 μm .

- hydrate d'aluminium

L'hydrate d'aluminium $\text{Al}(\text{OH})_3$ est une charge ignifugeante qui, du point de vue du prix, est concurrentielle ; elle réduit l'inflammabilité ainsi que l'émission des fumées de combustion car elle se décompose de façon endothermique (effet de refroidissement) en alumine et en eau, aux températures supérieures à 220° c.

-Oxyde d'antimoine

On chauffe de l'antimoine dans l'air pour obtenir Sb_2O_4 qui donne Sb_2O_3 par fusion et décomposition. Sa densité est de 4,2 et sa dureté comprise entre 6 et 7. Il apporte aux résines ignifugation et coloration blanche et on l'utilise en particulier dans les PVC plastifiés.

-Oxyde de béryllium

Utilisé sous forme de microsphères dans les résines époxydes, il augmente les conductivités électrique et thermique. Ces carbosphères sont aussi utilisées dans les mousses structurales à densité contrôlée, ainsi que pour la fabrication de pièces polyesters ultralégères.

-Les silices

La silice (SiO_2), à l'état pur ou combinée avec des oxydes métalliques, est utilisée comme charge sous différentes formes, suivant son origine, sa cristallinité, sa dureté et la taille des particules.

Son ajout dans la résine permet d'améliorer les propriétés diélectriques, la résistance à la chaleur et à l'humidité des objets moulés.

On remarque également l'augmentation de la température de transition vitreuse, du module d'Young et de la résistance en compression, ainsi que la réduction du gonflement dans les solvants.

Le verre

-Poudres de verre

Une nouvelle variété de poudre de verre de granulométrie $13 \mu\text{m}$ est apparue, et son incorporation confère aux thermodurcissables de meilleures résistances à l'abrasion et à la compression ; elle permet par ailleurs d'obtenir un retrait plus faible et plus homogène des pièces moulées.

-Billes de verre creuses

Les billes de verre creuses, de densité comprise entre 0,1 et 0,5, sont obtenues par chauffage de billes de verre contenant un agent gonflant. Elles améliorent les résistances à l'eau et au vieillissement du PMMA, et diminuent la friabilité des pièces phénoliques.

Les densités de ces microsphères creuses du type borosilicate de sodium et de calcium sont comprises entre 0,38 et 0,45 ; parallèlement, leur résistance à la compression varie de 1,7 à 31 MPa. Les applications sont nombreuses (bâtiment, automobile et aéronautique).

I.5.3 : La matrice

La matrice est constituée de résine mélangée, pour améliorer ses caractéristiques, à une charge qui facilite aussi la mise en œuvre et diminue le coût de la production. Le mélange est considéré mécaniquement comme une phase homogène, et nous obtenons ainsi un matériau composite formé d'un renfort et d'une matrice.

Le rôle de la matrice est d'assurer le lien entre les fibres et de transmettre les sollicitations.

Elle assure la résistance du matériau dans le sens transverse du renfort, ainsi qu'une protection physico-chimique des fibres contre les agents nocifs de l'environnement. De plus elle

conditionne directement la tenue thermique, et la résistance à la compression et au cisaillement inter-laminaire.

Les résines utilisées doivent être assez déformables et doivent présenter une bonne compatibilité avec les fibres. Elles doivent également avoir une masse volumique faible de manière à conserver au matériau composite des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

I.5.3.1 : Les différents types de matrices

I.5.3.1.1 : Les matrices organiques

La matrice organique est la partie polymère du système qui se divise en deux familles principales thermoplastiques et thermodurcissables.

Il est important de bien situer les différences fondamentales de ces deux types de matrices.

- La structure des TP se présente sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient alors), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent). Cette opération est réversible.

- La structure des TD a la forme d'un réseau tridimensionnel qui se ponte (double liaison de polymérisation) pour durcir en forme de façon définitive, lors d'un échauffement. La transformation est donc irréversible.

a : Les résines thermodurcissables :

Les résines TD sont exceptionnellement utilisées sans renforts, leurs caractéristiques intrinsèques ne le permettent pas.

Elles ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois.

Après la polymérisation par rapport à la chaleur en présence d'un catalyseur, elles conduisent à une structure géométrique qui ne peut pas être détruite que par un apport important d'énergie thermique.

Il existe plusieurs familles de résines TD, on peut citer :

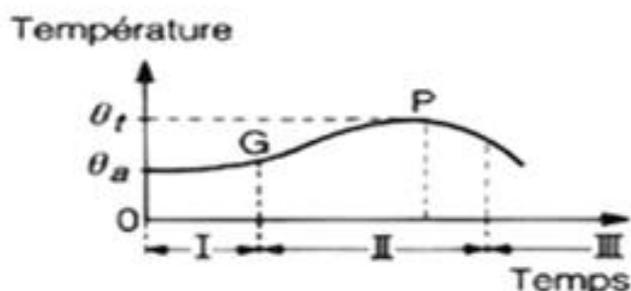
- Polyesters insaturés : C'est la résine la plus utilisée dans l'application composite de grande distribution.

Une résine de polyester insaturé contenant un monomère (généralement le styrène) est réticulée à température ambiante par addition d'un catalyseur de type peroxyde organique et d'un accélérateur.

Elle passe successivement de l'état liquide visqueux initial à l'état de gel, puis à l'état de solide infusible.

La réaction est exothermique et la température de la résine augmente progressivement depuis le gel jusqu'à un maximum pour redescendre ensuite lentement à la température ambiante (figure I.9)

La réaction de durcissement dépend de la réactivité de la résine de la forme de l'objet fabriqué (épaisseur, etc.), de la nature et du dosage du système catalytique.



I : mise en œuvre

II : moulage

III : démoulage

θ_t : Température du pic exothermique

G : point de gel

P : pic exothermique

θ_a : Température ambiante

Figure I.9 : Diagramme de température [5]

Elle a pour **avantages** :

Bonne accroche sur fibre de verre, translucidité.

Bonne résistance chimique, mise en œuvre facile et prix réduit.

Les inconvénients :

Inflammabilité, tenue vapeur et eau bouillante et émission de styrène.

-Phénoliques :

Elles sont issues de la polycondensation du phénol et du formol et se caractérisent par une bonne tenue au feu, sans fumée.

Elles restent fragiles, sensibles à l'humidité, difficiles à colorer et à mettre en œuvre.

- Epoxydes :

Elles résultent de la polyaddition de l'épichlorhydrine sur un polyalcool et constitue la résine type des composites hautes performances HP. On distingue deux classes de résines en fonction :

-du durcissement à chaud ou à froid ;

-de la tenue en température (120-130 °C, ou 180-200 °C).

Elle a pour avantages :

Tenue mécanique, thermique, chimique et fatigue, Faible retrait (1 à 2 %), Excellente adhérence sur fibres, Mise en œuvre facile, sans solvant.

Et pour inconvénient :

Prix élevé, Sensibilité à l'humidité et aux UV, Vieillessement sous température, Sensibilité aux chocs, Temps de polymérisation.

- Polyuréthanes et polyurées :

Dans la fabrication de pièces composites, on utilise surtout des formules élastomériques dont la faible viscosité permet un bon remplissage du moule.

Leurs **avantages** : Facilité de moulage, Tenue chimique

Leurs **inconvénients** : Résistance mécanique réduite, Combustibilité, Coloration en masse difficile : foncée.

-Polyamides :

Ces résines sont surtout utilisées dans les composites HP, lorsque l'on cherche une bonne stabilité sous hautes températures (> 250 °C). Elles restent toutefois très onéreuses et difficiles à mettre en œuvre.

-Vinylesters :

On peut la considérer comme une variante des polyesters produite à partir d'acides acryliques. Elles possèdent une bonne résistance à la fatigue et un excellent comportement à la corrosion, mais demeure combustible.

Les Caractéristiques des résines thermodurcissables sont résumées dans le tableau I.2 :

Matrice Thermodurcissable	Masse Volumique Kg.m ⁻³	Module de Yong MPa	Module de Cisaillement MPa	Coefficient de poisson	Contrainte de rupture en traction MPa	Allongement %	Coefficient de dilatation thermique °C ⁻¹
Epoxyde	1200	4500	1600	0.4	130	2	11. 10 ⁻³
Phénolique	1300	3000	1100	0.4	70	2.5	1. 10 ⁻³
Polyester	1200	4000	1400	0.4	80	2.5	8. 10 ⁻³
Polycarbonate	1200	2400		0.35	60		6. 10 ⁻³
Vinylester	1150	3300			75	4	5. 10 ⁻³
silicone	1100	2200		0.5	35		
Uréthane	1100	700 à 7000			30	100	
Polyimide	1400	4000 à 19000	1100	0.35	70	1	8.10 ⁻³

Tableau I.2 : Caractéristiques des résines thermodurcissables [5]

b : Les résines thermoplastiques :

Polymères linéaires ou ramifiés, qui peuvent être ramollis par chauffage et durcis par refroidissement plusieurs fois, elles sont fréquemment utilisées seules (sans renfort et sans charge), dans ce cas on peut plus les considérer comme matériaux composites, leurs propriétés intrinsèques sont suffisantes pour permettre la réalisation d'objets et de pièces à fonction diverses.

Les polymères utilisés sont essentiellement des thermoplastiques techniques qui présentent à l'état vierge de bonnes caractéristiques mécaniques. Un renforcement à l'aide de fibres courtes leur confère une tenue thermique et mécanique améliorée et une bonne stabilité dimensionnelle.

Les principales matrices TP utilisées (possédant toutes une tenue en température supérieure à 100 °C) sont les suivantes :

- Polyamide (PA) : tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures ;
- Polytéréphtalate éthylénique et butylénique (PET, PBT) : bonne rigidité, bonne ténacité ;
- Polycarbonate (PC) : tenue au choc ;
- Polysulfure de phénylène (PPS) : résistance à l'hydrolyse ;
- Polyoxyméthylène (POM) : bonne tenue à la fatigue ;
- Polysulfures (PSU et PPS) : bonne stabilité chimique et à l'hydrolyse, peu de fluage, tenue au chaud ;
- Polypropylène (PP) : peu onéreux et assez stable en température, mais combustible.

Il existe aussi deux autres types de résines dont leur emploi est limité qui sont :

- Résines thermostables (tenue en température > 200 °C et bonnes propriétés mécaniques), comme :
 - Polyamide-imide (PAI) ;
 - Polyéther-imide (PEI) ;
 - Polyéther-sulfone (PES) ;
 - Polyéther-éther-cétone (PEEK).
- les caoutchoucs et les élastomères, qui sont caractérisés par leur forte élasticité et un module de Young très faible.

Les caractéristiques des résines thermoplastiques sont résumées dans le tableau I.3 ci dessous :

Matrice thermoplastique	Masse volumique Kg.m^{-3}	Module de Yong MPa	Module de Cisaillement MPa	Coefficient de poisson	Contrainte de rupture en traction MPa	Allongement %	Coefficient de dilatation thermique $^{\circ}\text{C}^{-1}$
PP	900	1200		0.4	30	20 à 400	9.10^{-3}
PPS	1300	4000			65	100	5.10^{-3}
PA	1100	2000		0.35	70	200	8.10^{-3}
PES	1350	3000			85	60	6.10^{-3}
PEI	1150	3300			105	60	6.10^{-3}
PEEK	1300	4000			90	50	5.10^{-3}

Tableau I.3 : Caractéristiques des résines thermoplastiques [5]

Les principales différences entre les résines thermodurcissables et thermoplastiques données résumées dans le tableau I.4

Matrices	Thermoplastiques TP	Thermodurcissables TD
Etat de base	solide prêt à l'emploi	liquide visqueux à polymériser
Stockage	illimité	réduit
Mouillabilité renforts	difficile	aisée
Moulage	chauffage + refroidissement	chauffage continu
Cycle	court	long
Tenue au choc	assez bonne	limitée
Tenue thermique	réduite	bonne
Chutes et déchets	recyclables	perdus ou recyclés en charges
Conditions de travail	propreté	émanation pour "méthode humide"

Tableau I.4 : Les différences entre les résines thermodurcissables et thermoplastiques [5]

I.5.3.1.2 : Les matrices carbonées

Elles sont produites par le même principe que celui utilisé pour la production des fibres de carbones : carbonisation d'une matrice organique à haute température.

Elles sont constituées de grains de carbone pyrolytique qui se dépose à chaud sur les fibres, ce qui assure une liaison mécanique entre celle-ci et ferme les vides laissés entre elles.

On obtient ainsi un matériau composite dont la masse volumique se rapproche de celle du carbone massif.

I.5.3.1.3 : Les matrices métalliques

La température maximale d'utilisation des polymères étant peu élevée, et le carbone risque de s'oxyder à plus de 500°C, il faut donc par fois envisager d'utiliser des matrices dont l'inertie chimique est meilleure à plus haute température, comme certains métaux et alliages métalliques peuvent répondre à cette exigence, on a donc recours à des matrices métalliques dans certaines conditions :

- Des propriétés mécaniques supérieures,
- Résistance plus élevée à l'attaque de certains solvants,
- Tenue en température élevée,
- Comportement pas parfaitement élastique,
- Augmentation du poids du composite,

I.5.3.1.4 : Les matrices céramiques

Les propriétés intrinsèques des céramiques (réfractaire, rigidité, résistance et bonne stabilité chimique), leur permettent potentiellement de jouer le rôle de matrice dans des matériaux composites, dans ce cas le but des fibres de renfort est d'améliorer la ténacité de telles matrices, ainsi que la résistance aux chocs thermiques.

I.5.4 : Les additifs

Ils se trouvent en faible quantité, et interviennent comme :

- lubrifiant et agent de démoulage
- colorants
- agent anti-retraits
- agent anti-ultraviolets

I.5.5 : Interface

Au cours de l'élaboration du composite il se produit une interaction physico-chimique entre la matrice et la surface de la fibre. Cette interface "fibre-matrice" conditionne largement la résistance globale du matériau composite, notamment, la résistance au cisaillement interlaminaire, la résistance à la corrosion et au vieillissement, et la tenue en fatigue et aux chocs. La qualité et le type de l'interface dépendent essentiellement de la nature et de la morphologie du renfort et de la matrice, de la nature de l'agent de couplage de la fibre et des conditions de mise en œuvre.

I.5.6 : Les stratifiés

Les stratifiés résultent de la superposition de plusieurs couches ou plis, qui peuvent être des nappes unidirectionnelles, de tissus ou des mats, imprégnés de résine. Chaque couche peut avoir une orientation propre. Le choix de la nature et de la séquence d'empilement dépend de l'utilisation, en l'adoptant au mieux au champ de contraintes imposées, à savoir

- Les couches unidirectionnelles présentent une grande rigidité. Elles constituent un type de stratifié de base au quel peut se ramener, en principe, tout autre type de stratifié.
- Les mats sont peu résistants en traction.
- Une stratification croisée est sensible au délaminage inter-laminaire.

Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié.

En général on a tendance à utiliser une stratification symétrique afin de garantir une bonne planéité du stratifié après démoulage.

I.6 : Les technologies de mise en œuvre :

Les techniques de fabrications ont un grand impact aussi bien sur la géométrie que sur les caractéristiques des matériaux composites. Pour cela de nombreuses méthodes ont été élaborées pour répondre aux besoins.

Lors de la fabrication du matériau composites, trois opérations sont indispensables quelque soit la méthode retenue :

- Imprégnation du renfort par le système résineux.
- Mise en forme à la géométrie de l'élément à fabriquer.
- Le durcissement du système qui se fera soit :
 - Par polycondensation et réticulation pour les matrices thermodurcissables.
 - Par simple refroidissement pour les matrices thermoplastiques.

I.6.1 : Moulage sans pression :

C'est un procédé manuel de moulage ouvert à froid sans intervention d'une presse, utilisé dans la réalisation de pièces de grandes dimensions avec une seule surface lisse qui reproduise l'aspect du moule.

I.6.1.1 : Moulage au contact : le moule est revêtu d'un agent de démoulage et d'une fine couche de résine de surface appelé gelcoat, puis enduit d'une résine catalysée et accélérée, au rouleau, les renforts sont disposés sur le moule et imprégnés de résine liquide, le passage du rouleau canulé fait chasser l'air inclus et pénètre la matrice dans les mailles du renfort, le durcissement à température ambiante par étuvage à 80°C (figure I.10)

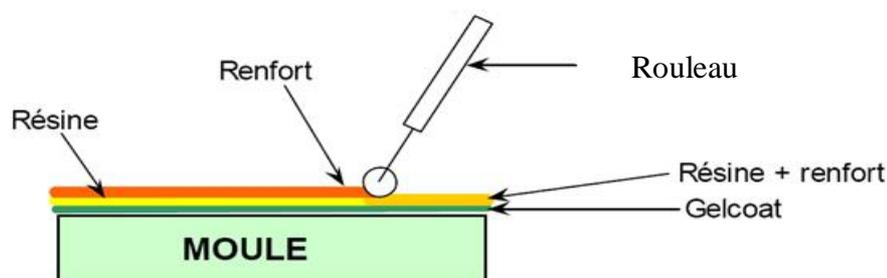


Figure I.10 : Procédé de moulage au contact [7]

Cas d'utilisation :

- Procédé pour petites séries : de 1 à 1000 pièces / an
- Pièces de grandes à très grandes dimensions
- Revêtement sur supports divers

- Avantages :

Très large possibilité de forme, moules simple, peu coûteux et rapide à réaliser.

-Inconvénients :

Une seule face lisse, nécessité de finition, espace de travail important et faible cadence de production en moule.

I.6.1.2 : moulage par projection simultanée : Procédé manuel ou robotisé permettant la réalisation de pièces à partir de résines thermodurcissables à température ambiante et sans pression. Les matières premières sont mises en œuvre à l'aide d'une machine dite "de projection" comprenant :

- un dispositif de coupe - projection du renfort (roving)
- un ou deux pistolets projetant simultanément la résine

Les fils coupés et la résine sont projetés sur la surface du moule puis compactés et ébullés à l'aide de rouleaux et d'ébulleurs. La résine préaccéléérée est catalysée en continu lors de sa projection. Le dispositif est représenté sur la figure (I.11) suivante :

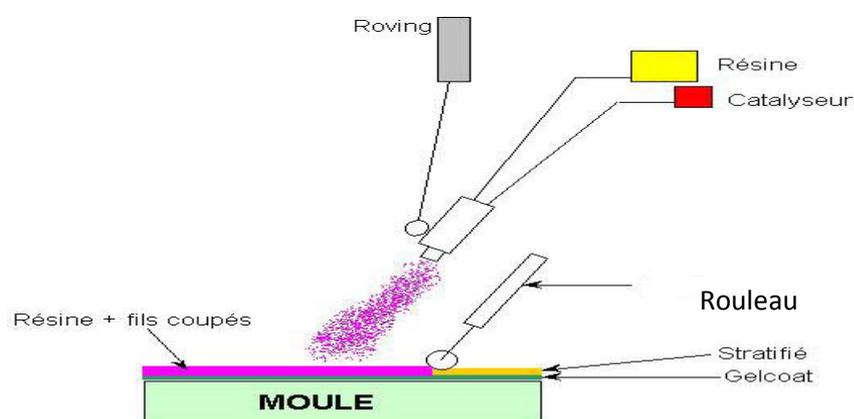


Figure I.11 : Procédé de moulage par projection simultanée [7]

Cas d'utilisation :

- Production de pièces de moyennes à grandes dimensions
- Recherche de réduction des coûts par rapport au contact
- Petite et moyenne série

- Avantages :

Très larges possibilités de forme, productivité plus élevée qu'au contact, suppression de la mise en forme obtenue directement par la projection peu onéreuse.

-inconvénients :

Propriétés mécaniques moyennes, une seule surface lisse et absence d'agencement nécessaire.

I.6.1.3 : Moulage sous vide

Le moulage sous vide s'effectue entre moule et contre-moule rigide, semi-rigide ou souple suivant la technologie de mise en œuvre.

Le renfort (mat, tissu, préforme) est placé à l'intérieur du moule ; la résine catalysée est versée sur le renfort. On utilise la pression qui s'exerce sur le moule lors de la mise sous vide pour répartir la résine et immerger le renfort.

La résine peut également être injectée par l'aspiration consécutive au vide.

Cas d'utilisation

- Production en petites séries de pièces nécessitant deux faces lisses
- Amélioration des conditions de travail et d'hygiène (réduction des émanations de styrène)

- Avantages :

Deux faces lisses, éventuellement gelcoatées

Qualité indépendante de la main d'œuvre

Bonne cadence de production

Nécessite peu de surface

Bonnes conditions de travail et d'hygiène

-inconvénients :

Possibilités de formes plus réduites qu'au contact

Mise au point parfois difficile

I.6.2 : Moulage par compression**I.6.2.1 : Moulage par injection basse pression de résine - RTM**

Le moulage par injection de résine liquide RTM (Résine Transfert Molding) s'effectue entre moule et contre-moule rigides. Le renfort (mats, préforme, éventuellement tissus) est disposé dans l'entrefer du moule. Une fois celui-ci solidement fermé, la résine, accélérée et catalysée, est injectée sous faible pression à travers le renfort jusqu'au

remplissage complet de l'empreinte. Après durcissement de la résine, le moule est ouvert et la pièce démoulée comme le montre la figure I.12

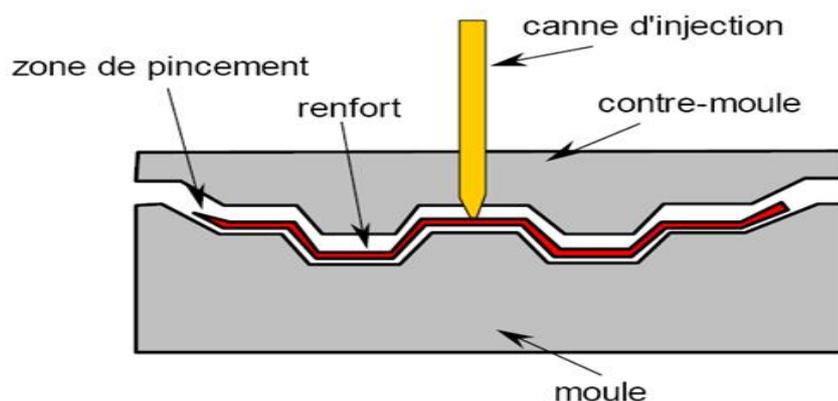


Figure I.12 : moulage par injection de résine. [4]

Cas d'utilisation

- Procédé pour moyennes séries : 1000 - 10000 pièces/an
- Pièces demandant une reproductibilité d'épaisseur

- Avantages :

- Deux faces lisses, éventuellement gelcoatées
- Dimensions jusqu'à 7 m²
- Qualité non tributaire de la main d'œuvre
- Cadence de production élevée
- Investissements très modérés

-inconvénients :

- Limité aux formes peu ou moyennement complexes
- Taux de renforcement et caractéristiques mécaniques moyennes à élevées
- Nécessité d'effectuer des finitions post moulage

I.6.3 : procédés de fabrication de forme de révolution

I.6.3.1 : Moulage par enroulement filamentaire

Procédé de moulage limité aux formes de révolution. Initialement, destiné à la réalisation d'enveloppes de révolution nécessitant de hautes performances mécaniques par enroulement progressif sur un mandrin, selon un angle déterminé de fils de verre imprégnés de résine.

Par la suite, le procédé a été étendu à des structures moins performantes en associant aux rovings bobinés d'autres types de renfort (fils coupés, mat, tissu) appliqués de façon adaptée (figure I.13).

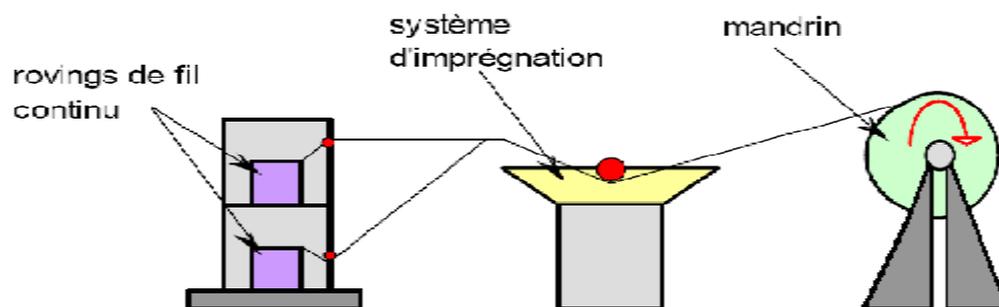


Figure I.13 : moulage par enroulement filamentaire. [4]

Cas d'utilisation

- Toutes pièces de révolution à produire en série
- Pièces nécessitant une résistance élevée

- Avantages :

Pièces à haute, voire très haute résistance

Très grande latitude dimensionnelle (de quelques mm à plusieurs mètres en diamètre et longueur)

Part de main d'œuvre réduite : mécanisation

Cadences de production élevées

-inconvénients :

Formes de révolution seulement

Une seule face lisse

Investissements assez élevés

I.6.3.2 : Moulage par centrifugation

Procédé de moulage limité aux enveloppes cylindriques. A l'intérieur d'un moule cylindrique en rotation à basse vitesse, on dépose des fils coupés à partir de roving (ou du mat), de la résine catalysée et accélérée et éventuellement des charges granulaires. Puis, on augmente la vitesse de rotation du moule pour densifier la matière. Après durcissement de la résine, on peut extraire très facilement la pièce du moule.

Cas d'utilisation

- Production de tuyau (écoulement gravitaire et basses pressions)
- Production de grandes viroles (moulage par rotation : centrifugation basse vitesse)

- Avantages :

Deux faces parfaitement lisses

Large possibilités dimensionnelles

Matériau de très bonne qualité (pas de bulles)

Aucune perte de matière

Haut niveau de mécanisation, possibilité d'automatisation complète

Bon niveau de productivité

-inconvénients :

Seulement les formes cylindriques (ou très faiblement coniques)

Pas de possibilité de variation d'épaisseur

Caractéristiques mécaniques moyennes

Investissements élevés

I.6.4 : Moulage en continu

I.6.4.1 : Moulage par pultrusion

Le procédé est destiné à la réalisation en continu de profilés de sections constantes.

Des renforts continus, ces profilés ont des caractéristiques mécaniques élevées.

Les renforts passent dans un bain de résine catalysée puis traversent une filière chauffée qui assure le durcissement.

Cas d'utilisation

-Réalisation de profilés en quantités significatives (plusieurs milliers de mètres linéaires).

- Avantages :

Toutes formes de sections, même creuses

Aspect de surface lisse

Très grande résistance mécanique, surtout longitudinale

Bonne productivité : 0,2 à 2,5 m/min selon résines et sections

Très faible part de main-d'œuvre

-inconvénients :

Pas de possibilité de variation de sections

Profilé nécessairement rectiligne

Investissement relativement élevé

Conclusion

Les matériaux composites sont fréquemment utilisés dans de divers domaines, il remplace presque tout les matériaux classiques, à cet effet la connaissance de leur comportement mécanique est plus que nécessaire et pour cela, on fait appel aux essais mécaniques qui sont l'objet du chapitre qui suit.

Introduction

Le facteur déterminant dans le choix des matériaux est la connaissance de leur comportement mécanique.

Les moyens qui permettent d'étudier le comportement mécanique et d'évaluer numériquement les propriétés des matériaux sont les essais mécaniques, ces essais se divisent en deux types qui sont :

- Essai sur éprouvette modèle
- Essai sur produits finis

II.1 : Essais sur éprouvette modèle

Se sont des essais dites micromécanique de fait qu'ils servent à caractériser les propriétés de l'interface fibre-matrice, la connaissance des propriétés de cette dernière est nécessaire car elle joue un rôle déterminant sur la performance des composites.

En effet plusieurs essais et technique ont été élaborés pour la mesure direct du déplacement de la fibre en fonction de l'effort appliquer.

II.1.1 : Les techniques [8]

II.1.1.1 : Le test d'extraction (traction sur une seule fibre afin de l'extraire de sa gaine matricielle)

Il consiste à soumettre une fibre qui a une partie entourée d'une matrice, à une contrainte de traction uniaxiale (figure II.1) jusqu'à provoquer une décohésion à l'interface, ensuite l'extraction complète de la fibre.

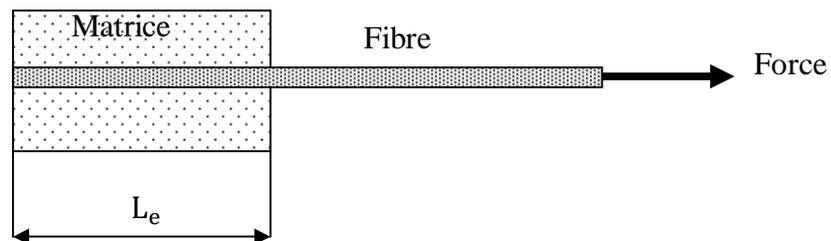


Figure II.1 : test d'extraction

Durant l'essai une courbe force déplacement est enregistrée (figure II.2)

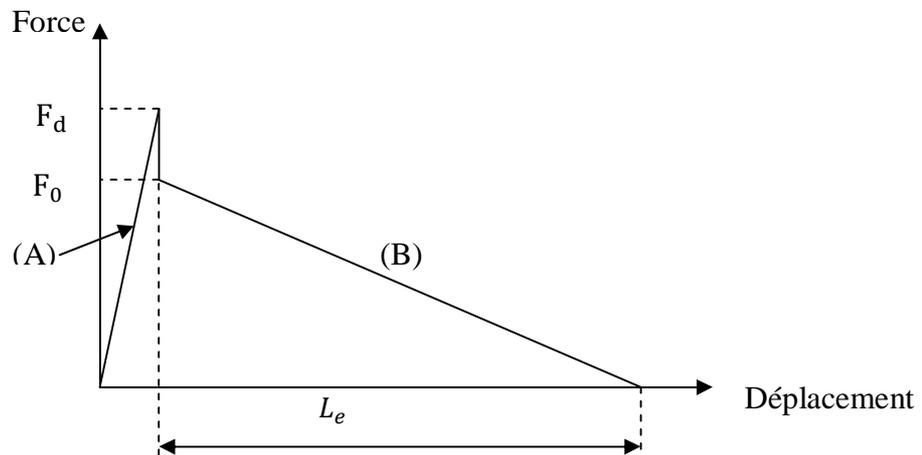


Figure II.2: courbe force déplacement

La courbe se décompose en :

(A) : correspond à la décohésion de la fibre, la charge maximale F_d représente la décohésion complète. La décohésion est suivie par une diminution de la force jusqu'à F_0 , ou l'extraction commence à apparaître.

(B) : glissement et extraction de la fibre.

La contrainte de cisaillement interrassiale est supposée constante tout le long de la fibre D'où la relation entre la force F_d et la contrainte de cisaillement est donné comme suit :

$$F_d = 2\pi.r.L_e.\tau_e \quad (II.1)$$

Avec : r : rayon de la fibre

L_e : longueur entourée de matrice

τ_e : résistance interfaciale en cisaillement

Cette technique n'est pas aussi simple à réaliser surtout avec des fibres de faible diamètre car les résultats présentent une dispersion importante, cependant ils permettent d'avoir de divers paramètres caractéristique de l'interface.

II.1.1.2 : Test d'indentation

Il consiste à appuyer au moyen d'un indenteur sur fibre qui est disposé perpendiculairement aux surfaces de l'échantillon d'épaisseurs mince, pour l'extraire de la matrice (figure II.3), la technique assure la décohésion totale sur l'interface. La vitesse de déplacement de l'indenteur est constante.

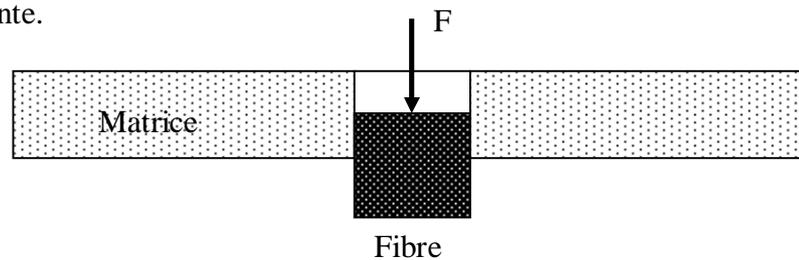


Figure II.3: schéma de l'essai d'indentation

Le raisonnement est le même que pour la méthode d'extraction.

II.1.1.3 : Test de fragmentation (figure II.4)

Il consiste à solliciter en traction une éprouvette de résine contenant une fibre unitaire. La fibre subit des ruptures successives jusqu'à ce que les morceaux qui restent atteignent une longueur critique.

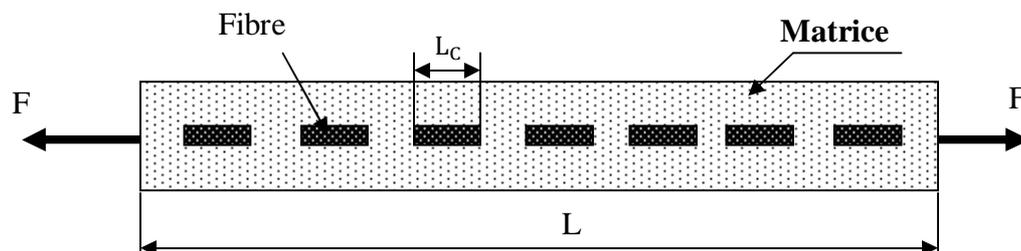


Figure II.4 : Essai de fragmentation

La résistance interfaciale au cisaillement est :

$$\tau_i = \frac{\sigma_{fR}(L_C)d}{L_C} \quad (\text{II.2})$$

$\sigma_{fR}(L_C)$: Est la contrainte de rupture.

- La contrainte à la rupture d'une fibre $\sigma_{fR}(L_C)$ peut être :
 - mesurée directement en utilisant une fibre de longueur l_c , qui est très délicat
 - déterminée par extrapolation à $l=l_c$ des mesures obtenues pour différentes longueurs ou encore approximée à partir de la distribution des résistances pour une longueur l donnée en appliquant la loi statique de Weibull.
- Le facteur de forme $\frac{d}{L_C}$ (diamètre / longueur critique de fibre) peut être :
 - déterminé à partir de la distribution des longueurs en utilisant une loi de Weibull, ou bien calculé - approximativement en utilisant la formule :

$$L_C = \frac{4L}{3(N+1)} \quad (\text{II.3})$$

Avec L : longueur de l'éprouvette ;

N : nombre de rupture de la fibre.

On peut obtenir N et L par :

- par émission acoustique (une rupture = un événement acoustique d'où N);
- par microscopie à transmission en lumière polarisée (observation à travers une matrice transparente d'où N et L).

Cette technique ne peut pas être utilisée qu'à avec des matrices fortement déformable, à cause des problèmes de fissuration de la matrice qui se constate durant l'essai.

Conclusion

Ces essais micromécaniques qui sont présentés, gardent une part de simplicité et de particularités spécifiques; tels que le type de sollicitation, les dimensions, la nature des éprouvettes et les conditions aux limites des sollicitations. Ces tests permettent de qualifier les caractéristiques de l'interface.

II.2 : Essais sur produits finis

Se sont des expériences faites sur des éprouvettes normalisées, dans le but de caractériser les lois de comportements des matériaux, c'est-à-dire établir des relations entre les contraintes (pression= force/surface) et les déformations (allongement unitaire).

Les résultats de ces essais permettent la classification des matériaux, et de les utilisés en toutes sécurité dans l'industrie.

II.2.1 : Traction [9]

L'essai de traction est le plus fondamentale parmi tous les essais mécaniques. Il sert à déterminer les principales caractéristiques mécaniques telles que le module d'élasticité, le coefficient de Poisson, la limite d'élasticité, la résistance à la rupture, l'allongement après rupture et le coefficient de striction.

Son exécution est facile et les résultats obtenus servent à dimensionner toutes sortes des pièces allant d'un pignon microscopique jusqu'à la structure métallique d'un grand hall. Dans la recherche on l'applique pour la caractérisation de nouveaux matériaux et dans industrie pour les contrôles périodiques servant à surveiller la qualité des alliages, des polymères et des céramiques.

Le principe de cette essai est de soumettre une éprouvette normalisées à une extension progressive dans le sens de la longueur jusqu'à obtention de la rupture.

L'essai de traction permet de d'établir la contrainte maximale de traction définit par la formule suivante :

$$\sigma = \frac{F}{bh} \quad (\text{II.4})$$

Avec : F : force maximale

b et h: longueur et épaisseur de l'éprouvette

La direction d'application de la l'effort permet d'avoir différent cas de traction :

II.2.1.1 : Traction longitudinale [8]

L'effort F_1 est appliqué dans la direction des fibres (composite unidirectionnel), comme le montre la figure II.5.

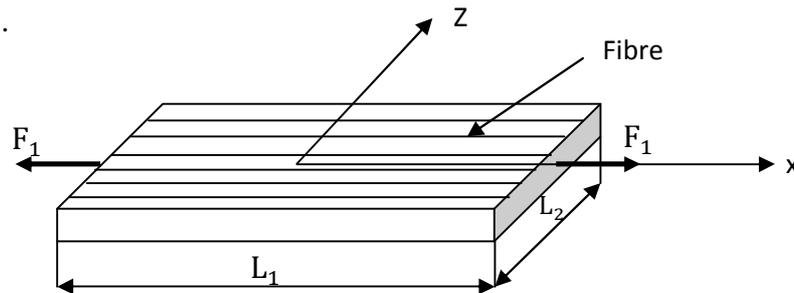


Figure II.5 : traction longitudinale

Les caractéristiques tirées sont :

La contrainte normale :

$$\sigma_{xx} = \frac{F_1}{S_1} \quad (\text{II.5})$$

Avec S_1 : section droite du matériau

Les déformations longitudinales et transversales :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L_1}{L_1} \tag{II.6}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta L_2}{L_2} \tag{II.7}$$

Le module de Yong E :

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} \tag{II.8}$$

Le coefficient de Poisson ν :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \tag{II.9}$$

II.1.1.2: Traction transversale (figure II.6)

L'effort F_2 est appliqué suivant le sens de trame (direction transverse aux fibres)

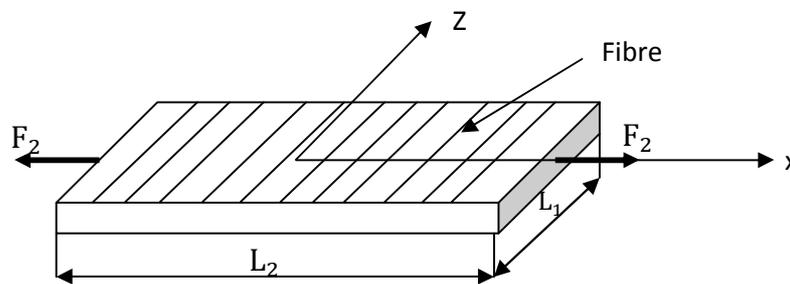


Figure II.6 : traction transversale

La contrainte normale est :

$$\sigma_{xx} = \frac{f_2}{S_2} \tag{II.10}$$

Avec S_2 : section droite du matériau sur laquelle s'exerce la charge

Le module de Yong et le coefficient de Poisson sont :

$$E = \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}} \tag{II.11}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \tag{II.12}$$

II.1.1.3 : Traction hors axe :

L'effort F est appliqué à un angle de 45° par rapport aux fibres (les fibres sont inclinées de 45°), cet essai est utilisé pour mesurer le module de cisaillement G (figure II.7)

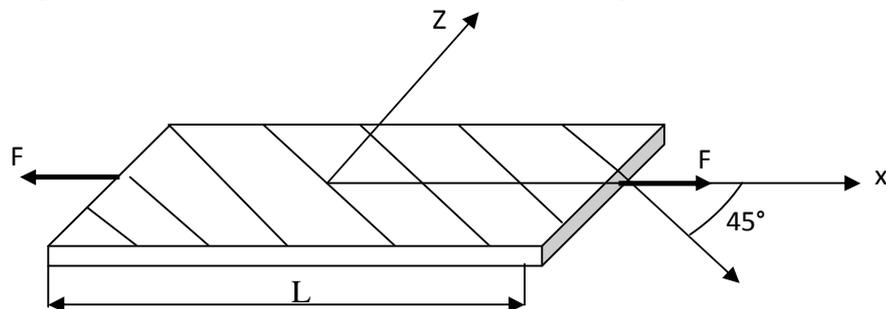


Figure II.7 : Traction hors axes

La contrainte normale est :

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{S} \quad (\text{II.13})$$

Le module de Yong est :

$$E_{45} = E_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} \quad (\text{II.14})$$

Le module de cisaillement est donné par :

$$\frac{1}{G} = \frac{4}{E_{45}} - \frac{1}{E_L} - \frac{1}{E_T} + 2 \frac{\nu}{E_L} \quad (\text{II.15})$$

L'essai de traction ne permet pas toujours d'avoir les caractéristiques exactes à cause de la présence des contraintes de contact qui sont dû à la fixation de l'éprouvette.

Lors de l'essai de traction, il faut y'avoir un désalignement entre la direction d'application de la charge et celle des fibres, sinon les valeurs mesurées seront nettement plus faibles que les valeurs réelles du module d'Yong (cas d'un composites unidirectionnel)

Un problème qui n'est pas aussi critique dans le cas d'un essai de traction transversale

II.2.2 : Essai de compression

Il consiste à appliquer à une vitesse constante un effort de compression parallèle au plan de stratification sur un barreau parallélépipédique rangé verticalement.

L'essai de compression sur des composites unidirectionnels, reste plus difficile car la résistance en compression dépend de plusieurs paramètres tels que la fibre, la matrice et la résistance de l'interface.

Durant cet essai il y a des pertes dans la résistance qui s'explique par l'apparition d'un phénomène d'instabilité locale appelé micro-flambement des fibres.

Ce phénomène se présente en deux modes illustré sur la figure II.8 ci-dessous.

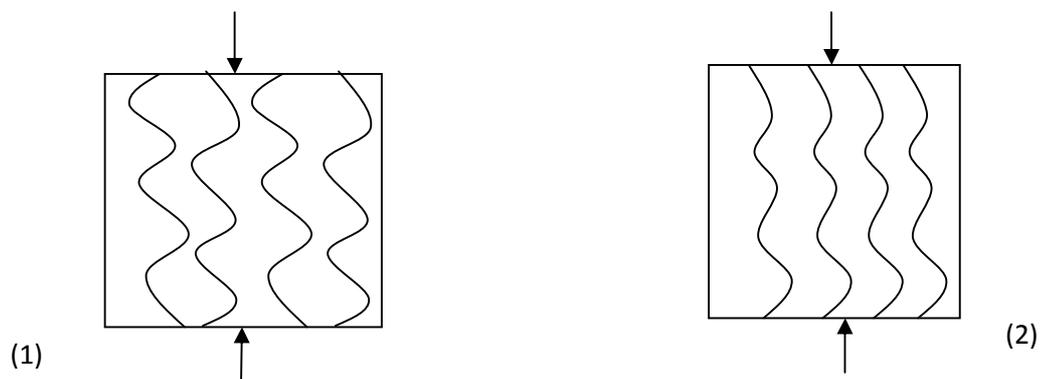


Figure II.8 : modes de micro-flambement

(1) : opposition de phase

(2) : en phase

Ce phénomène d'instabilité des fibres est limité par la matrice, ce qui veut dire que la contrainte à la rupture en compression est proportionnelle aux propriétés élastiques de la matrice.

La résistance en compression est donnée par :

$$\sigma_c = \frac{G_M}{1-V_f} \tag{II.16}$$

Avec G_M : module de cisaillement de la matrice

V_f : Taux de renforts

II.2.3 : Essais de flexion

Ils sont fréquemment utilisés pour la caractérisation des matériaux composites,.

II.2.3.1 : Essai de flexion quatre points :

Il consiste à appliquer deux charges identiques en deux points entre les appuis, distantes de l comme c'est représenté sur la figure II.9

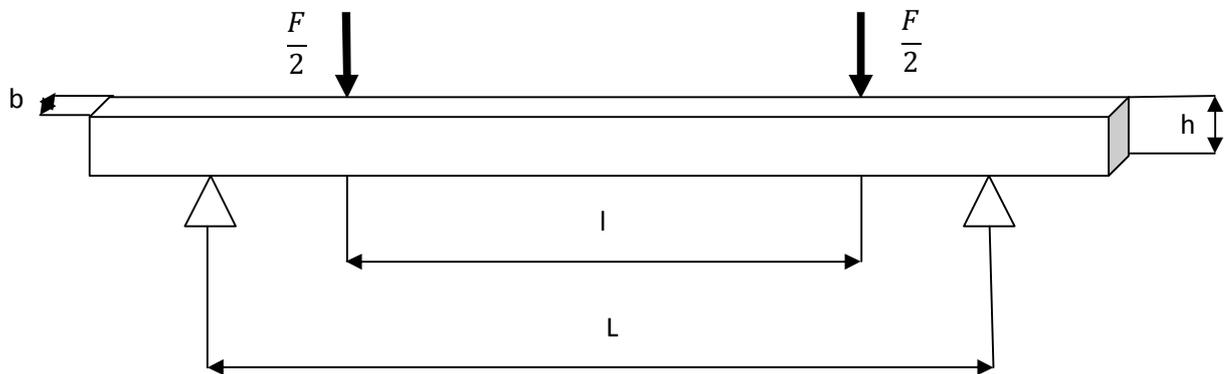


Figure II.9 : Essai de flexion quatre points

L'essai de flexion quatre points se caractérise par la répartition uniforme des contraintes le long de la distance l entre les deux points d'appuis du centre.

La valeur de la contrainte maximale en tout point de l'éprouvette est :

$$|\sigma_{max}| = \frac{3}{2} \left[\frac{F(L-l)}{bh^2} \right] \tag{II.17}$$

Les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant sont schématisés comme suit :

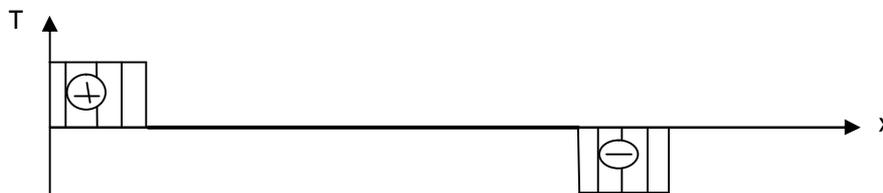


Figure II.10 : Diagramme de l'effort tranchant

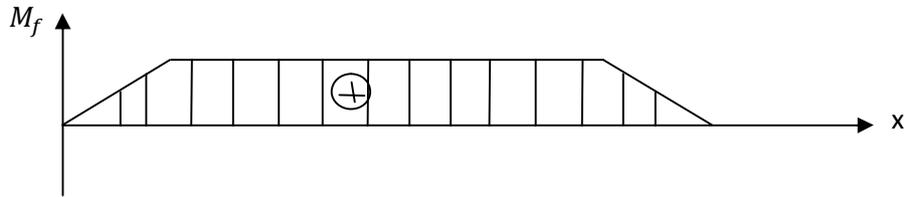


Figure II.11 : Diagramme du moment fléchissant

II.2.3.2: Essai de flexion trois points

C'est le plus utilisé pour déterminer la rigidité et la résistance en flexion des matériaux composites.

Un essai facile à réaliser et de bonne reproductibilité, en effet les problèmes de glissement dans les mors et d'alignement ne se posent plus.

II.2.3.2.1 : Principe de l'essai

Il consiste à déformer à une vitesse constante un barreau rectangulaire mis entre deux appuis et d'une panne située à égale distance des appuis.

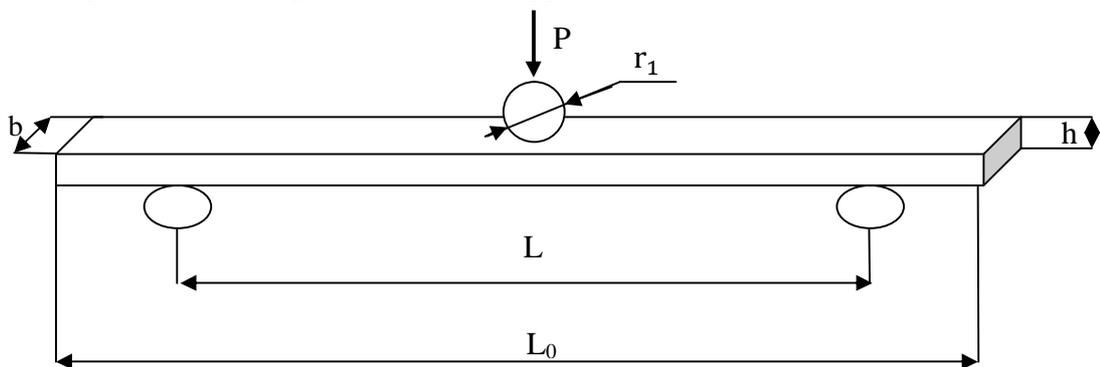


Figure II.12 : essai de flexion trois points

Avec :

P : charge appliquée, L longueur entre appuis ; L_0 : longueur de l'éprouvette ; h : hauteur de l'éprouvette.

b : largeur de l'éprouvette.

r : rayon de la panne centrale

La contrainte normale est nulle le long de l'axe neutre de l'éprouvette, alors elle va croissante en traction d'un côté de cette axe et croissante en compression de l'autre côté.

En d'autre terme les éléments de volume de l'éprouvette ne sont pas soumis à la même sollicitation mécanique contrairement à l'essai de traction et de compression

Il y a aussi une autre contrainte qui atteint le maximum au niveau de la fibre neutre dite contrainte de cisaillement.

On enregistre la courbe contrainte déformation :

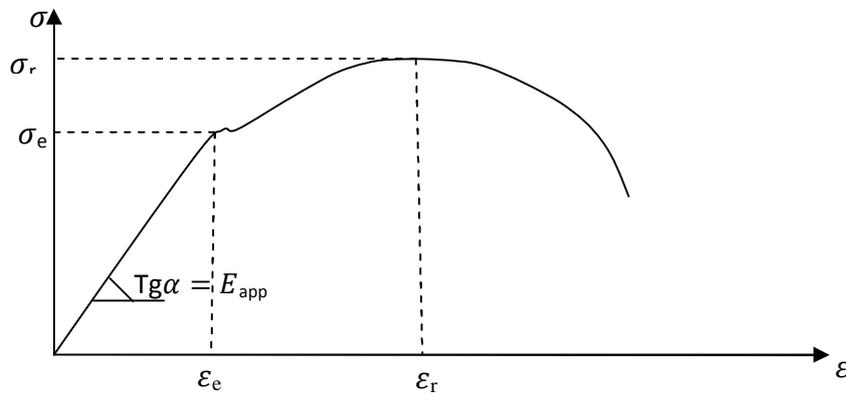


Figure II.13 : courbe de contrainte déformation pour un matériau ductile

L'analyse de cette courbe permet l'évaluation des caractéristiques principales du matériau:

Module apparent :

$$E_{App} = \frac{L^3 \Delta P}{4bh^3 \Delta y} \tag{II.18}$$

Avec ΔP : variation de la charge

Δy : Variation de la flèche

Contrainte à rupture :

$$\sigma_r = \frac{3P_{max} L}{2bh^2} \tag{II.19}$$

Déformation à rupture :

$$\epsilon_r = \frac{6hf}{l^2} \tag{II.20}$$

Contrainte de cisaillement :

$$\tau = \frac{3P}{4bh} \tag{II.21}$$

II.2.3.2.2: Discussion

1-sans tenir compte de la contrainte de cisaillement :

Puisque il y a une symétrie alors les réactions d'appuis sont égales

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

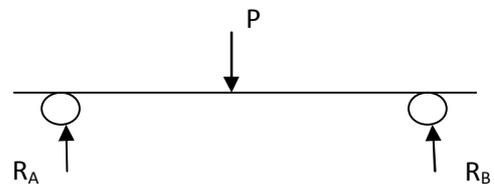


Figure II.14 : Représentation des réactions d'appuis

L'effort tranchant (figure II.15) :

$$T = \frac{P}{2} \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$T = -\frac{P}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

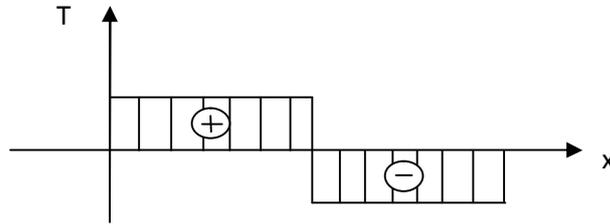


Figure II.15 : Diagramme de l'effort tranchant

Le moment fléchissant (figure II.16) :

$$M_f = \frac{P}{2} \cdot x \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$M_f = \frac{P}{2} (L - x) \quad \text{pour} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

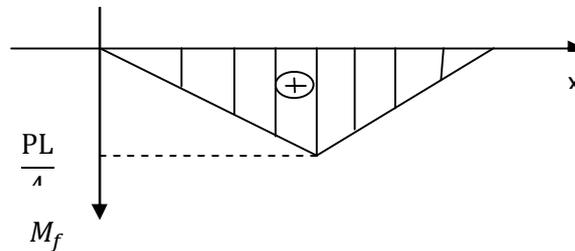


Figure II.16: Diagramme du moment fléchissant

Alors on peut déduire l'équation de la déformée :

$$Y'' = -\frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{P}{2} \cdot x\right) \quad (\text{II.22})$$

El : La rigidité à la flexion

La première intégration donne :

$$Y' = -\frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{P}{4} \cdot x^2 + C\right) \quad (\text{II.23})$$

Intégrant une deuxième fois, on aura :

$$Y = -\frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{P}{12} \cdot x^3 + C x + C_1\right) \quad (\text{II.24})$$

Les constantes C et C₁ sont déterminées on utilisant les conditions aux limites.

$$\text{A } x = 0, y = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\text{A } x = \frac{L}{2}, y' = 0 \Rightarrow C = -\frac{PL^2}{16}$$

L'équation de la flèche devient :

$$Y = -\frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{P}{12} \cdot x^3 - \frac{PL^2}{16} x\right) \quad (\text{II.25})$$

La flèche maximale se trouve au centre (à $x = \frac{L}{2}$)

Donc :

$$Y_{\text{Max}} = \frac{PL^3}{48EI} \tag{II.26}$$

Connaissant la flèche maximale, on peut déduire alors la formule du module de Yong :

$$E = \frac{PL^3}{48.I.Y_{\text{Max}}} \tag{II.27}$$

Remplaçant I par sa valeur qui est égale à $\frac{bh^3}{12}$, il vient :

$$E = \frac{PL^3}{4bh^3.Y_{\text{Max}}} \tag{II.28}$$

II.2.3.2.3: Evaluation des contraintes normales de traction et compression

Dans le cas ou l'éprouvette est constituée d'un matériau homogène isotrope, la contrainte normale de traction et de compression est :

$$\sigma = \frac{M_f Y}{I} \tag{II.29}$$

Avec : $M_f = \frac{PL}{4}$ le moment fléchissant maximal

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Les contraintes maximales se développent dans les fibres extrêmes, c'est-à-dire pour $Y = \pm \frac{h}{2}$

Donc : $\sigma_{\text{Max}} = \frac{3PL}{2bh^2}$ et $\sigma_{\text{Min}} = -\frac{3PL}{2bh^2}$ (II.30)

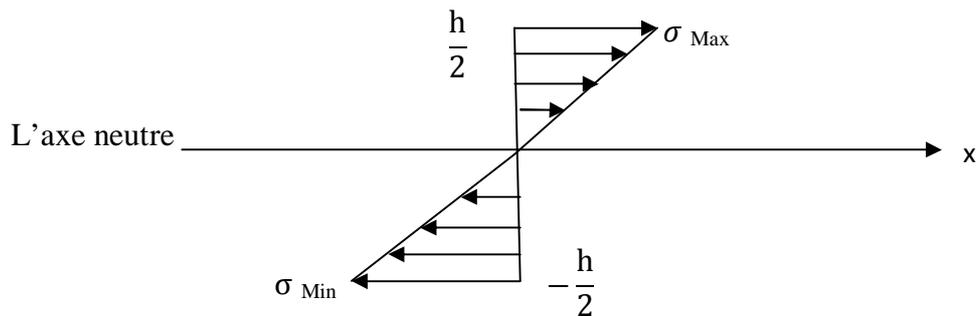


Figure II.17: diagrammes des contraintes normales

II.2.3.2.4: Le cisaillement

C'est une troisième contrainte qui se développe durant l'essai de flexion, de plus des contraintes de traction et de compression. Elle arrive à son maximum sur la fibre neutre comme l'illustre la figure ci-dessous.

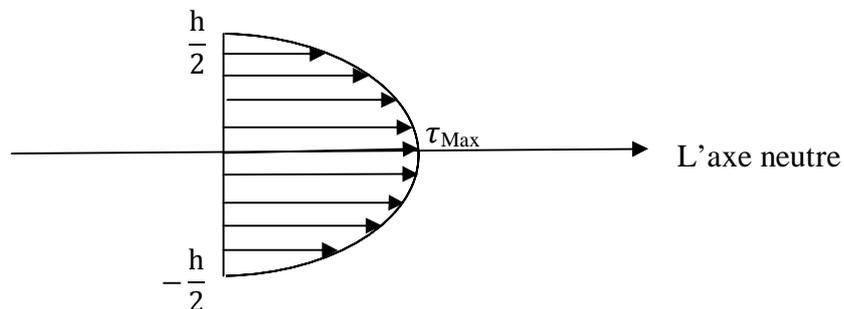


Figure II.18: diagramme de la contrainte de cisaillement

La contrainte de cisaillement est donnée par la formule, toujours cas d'un matériau homogène :

$$\tau = \Omega^* \cdot \frac{T}{Ib}$$

$$\Omega^* = S \cdot Y_G$$

$$= b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{\frac{h}{2} + y}{2}\right)$$

$$T = \frac{P}{2} \quad ; \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

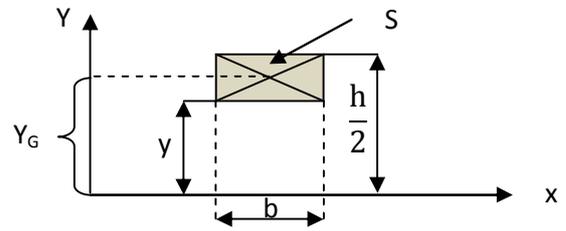


Figure II.19: représentation d'Y_G et S

On remplaçant par ces valeurs, la contrainte de cisaillement devient :

$$\tau = \frac{3P}{4bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \tag{II.31}$$

Pour $y = 0$ $\tau = \tau_{Max} = \frac{3P}{4bh}$

2-En tenant compte de cette contrainte de cisaillement :

Calculant la flèche totale, on utilisant la méthode énergétique

$$\omega = \frac{1}{2EI} \sum \int M_f^2 ds + \frac{1}{2G\Omega'} \sum \int T^2 ds \tag{II.32}$$

$$Y_T = \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$Y_T = \frac{1}{EI} \sum \int M_f M_f' ds + \frac{1}{G\Omega'} \sum \int T \cdot T' ds \tag{II.33}$$

En raison de symétrie, on fait l'étude sur $\left[0, \frac{L}{2}\right]$.

Sur cette partie de l'éprouvette :

$$M_f = \frac{P}{2} x$$

$$T = \frac{P}{2}$$

Substituant ces valeurs dans (II.32).

Après dérivation et intégration, on trouve :

$$Y_T = \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + \frac{12 \cdot EI}{G\Omega' L^2}\right) \tag{II.34}$$

On remplaçant $\Omega' = \beta \cdot \Omega$ et I par leur valeurs, il vient :

$$\begin{aligned} Y_T &= \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + \frac{Eh^2}{\beta \cdot G \cdot L^2}\right) \\ &= \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + \frac{1}{\beta} \frac{E}{G} \left(\frac{h}{L}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{II.35}$$

Le premier terme représente la déformée dû au moment fléchissant et le deuxième la déformée dû au cisaillement.

Soit :

$$Y_T = Y_F + Y_C$$

Donc la déformation maximale résulte des déformations provenant de la flexion et de cisaillement. De nombreuses études ont montré que la contribution du cisaillement transverse est inversement proportionnelle au rapport h/L et proportionnelle au rapport, E_L/G . Et de plus cette contribution est faible, le module de flexion apparent est d'autant plus proche du module E .

L'écart entre le module apparent E_{App} , et le module longitudinal E_L est estimé par:

$$\frac{E}{E_{app}} = 1 + \alpha \frac{E}{G} \left(\frac{h}{L}\right)^2 \quad (\text{II.36})$$

Avec :

$$\alpha = \frac{(12+11\nu)}{(10+10\nu)} \quad (\text{II.37})$$

α : est le coefficient d'anisotropie.

Conclusion :

La sollicitation en flexion induit des concentrations de contraintes dans les zones fortement sollicitées (au niveau de la panne centrale, qui sont dû au contact. Ces contraintes de contact peuvent causer une rupture prématurée en compression ce qui peut cacher les caractéristiques du matériau.

Donc durant l'essai, en plus des contraintes engendrées par la flexion il y a des contraintes de contact qui s'ajoutent qui seront l'objet d'étude du chapitre qui suit.

Introduction

Le contact se réfère aux contraintes localisées qui se développent lorsque deux surfaces se serrent et se déforment légèrement sous l'action des charges appliquées, le degré de déformation dépend de l'élasticité du matériau.

Les sollicitations mécaniques engendrées donnent lieu à des dégradations telles que l'amorçage, propagation de fissures et à des endommagements prématuré (rupture en compression lors de l'essai de flexion), ce qui fait que l'évaluation du type et de l'amplitude de ces contraintes soit indispensables.

III.1 : Etude théorique du contact

Les facteurs déterminants la surface de contact et la répartition des contraintes sur celle ci, sont la pression de contact, la géométrie et les caractéristiques des solides.

Selon la forme de la zone de contact on distingue trois types de contact, surfacique, ponctuel et linéique, les deux dernier s'appelle aussi contact Hertzien.

Dans le contact surfacique les efforts se répartissent sur toute la zone de contact et se définissent par la théorie linéaire de l'élasticité, dans les autres contacts ce n'est plus le cas, de fait que la surface de contact augmente en fonction de la charge.

III.2 : Contact d'Hertz

La théorie d'Hertz débute en 1881, elle permet de déterminer :

- les dimensions de la surface de contact.
- le rapprochement des deux solides en contact.
- la pression de contact maximale.

Une théorie qui n'est pas à l'abri des erreurs, mais ces résultats donnent un ordre d'idée qui permet non seulement de dimensionner les liaisons ponctuelles ou linéiques, mais aussi de choisir les matériaux et les traitements thermiques adaptés.

III.2.1 : Les hypothèses reliées au contact d'Hertz :

Pour qu'un problème de contact entre deux solides soit hertzien, il doit répondre aux hypothèses suivantes :

- les surfaces de contact sont continues et non conformes, donc initialement le contact se fait par un point ou une ligne.
- les déformations sont petites et concentrées dans une zone proche de contact.
- chaque solide est considéré comme un espace élastique semi-infini.
- l'aire de contact est très petite nécessairement devant les surfaces latérales des deux solides en contact pour que le champ de contrainte calculé ne soit pas perturbé par les conditions aux limites

sur les frontières du solide, et devant les courbures relatives des surfaces en contacts pour que ces dernières soient approximativement des plans.

-le frottement est négligé au contact car la pression générée est supposée normale au contact.

-les solides sont sans mouvement relatif et le chargement est appliqué lentement afin de négliger l'inertie des solides en contact.

III.3 : Les approches de la théorie

III.3.1 : Approche géométrique

III.3.1.1 : Description des surfaces en contact :

Lorsque deux solides (1) et (2) non conforme viennent en contact sous charge, ils se touchent initialement en un point O, puis sur une surface finie qui augmente à mesure que la charge augmente. La normale unitaire aux deux surfaces en contact est sur l'axe (Z), les repères $(o, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et $(o, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ sont placées dans le plan tangent aux surfaces en contact (figure III.1).

Du fait de la régularité de la surface de contact et on choisissant soigneusement (\vec{x}_1, \vec{y}_1) pour que le produit $(x_1 \cdot y_1)$ puisse s'annuler, la surface du corps (1) autour de O aura pour équation :

$$Z_1 = \frac{R_1}{2} x_1^2 + \frac{R_1}{2} y_1^2 \quad (\text{III.1})$$

Avec : R_1 et R_2 sont les courbures principales du corps (1)

De même, une expression similaire peut être écrite pour le corps (2) :

$$Z_2 = -\left(\frac{R_2}{2} x_2^2 + \frac{R_2}{2} y_2^2\right) \quad (\text{III.2})$$

A partir de (III.1) et (III.2) la distance entre les deux surfaces s'obtient comme suit :

$$h = Z_1 - Z_2 \quad (\text{III.3})$$

Un choix approprié d'une nouvelle paire d'axe permet d'écrire :

$$h = A x^2 + B y^2 \quad (\text{III.4})$$

Où A et B sont des constantes positives

Elles sont reliées comme suit :

$$A+B = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \right] \quad (\text{III.5})$$

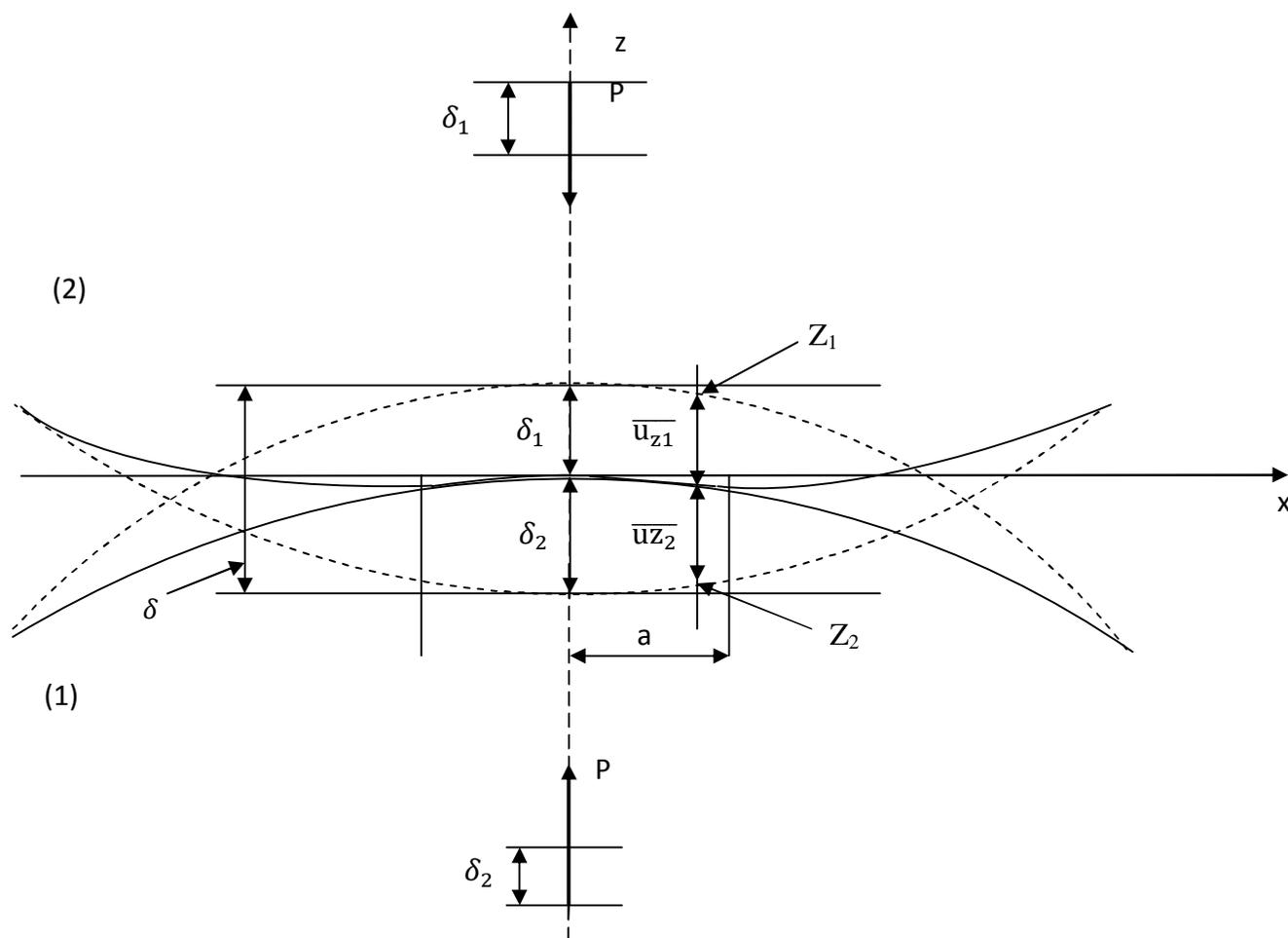


Figure III.1 : représentation du contact d'Hertz [10]

III.3.2 : Les déformations [10]

Les solides s'enfoncent après application de P . Soit deux points $S_1(x, y, z_1)$ et $S_2(x, y, z_2)$ de (1) et (2) qui ont la même projection sur (O, \vec{x}, \vec{y}) .

δ_1 et δ_2 Sont les translations de S_1 et S_2 respectivement dans le cas où les solides se déplacent sans déformations sur \vec{z}

S'il y a déformation pendant la compression donc il y aura des déplacements $\overline{u_{z1}}$ et $\overline{u_{z2}}$ suivant \vec{z} des solides S_1 et S_2 comme c'est illustré sur la figure (III.1)

Après déformation, si les surfaces coïncident c'est-à-dire $S_1 = S_2 = S$ alors :

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta = h + \overline{u_{z1}} + \overline{u_{z2}} \quad (\text{III.6})$$

Soit :

$$\overline{u_{z1}} + \overline{u_{z2}} = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (\text{III.7})$$

Sinon, si les solides ne se touchent pas en S alors :

$$\overline{u_{z1}} + \overline{u_{z2}} < \delta - Ax^2 - By^2 \quad (\text{III.8})$$

III.3.3 : Approche contraintes [10]

Avant de résoudre le problème d'Hertz on se propose de donner quelques ordres de grandeurs concernant la pression de contact ainsi que la taille de la surface de contact.

Pour simplifier le problème l'en regarde en 2D et on considère que les deux solides comme étant de révolution (rayon R_1 et R_2), la zone de contact a pour largeur $2a$.

On constate sur la figure (III.1) que :

$$\delta_1 = \overline{u_{z1}}(0) \text{ et } \delta_2 = \overline{u_{z2}}(0).$$

Donc (III.4) donne, on l'exprimant sous forme adimensionnée :

$$\left(\frac{\overline{u_{z1}}(0) - \overline{u_{z1}}(x)}{a} \right) + \left(\frac{\overline{u_{z2}}(0) - \overline{u_{z2}}(x)}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \frac{x^2}{a} \quad (\text{III.9})$$

Soit :

$$\left(\frac{\overline{u_{z1}}(0) - \overline{u_{z1}}(x)}{a} \right) + \left(\frac{\overline{u_{z2}}(0) - \overline{u_{z2}}(x)}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \frac{x^2}{a}$$

Posant $x = a$ et on introduisant une nouvelle variable $d = \overline{u_z}(0) - \overline{u_z}(x)$, il vient :

$$\left(\frac{d_1}{a} \right) + \left(\frac{d_2}{a} \right) = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{III.10})$$

On supposant que les déformations sont petites ($d \ll a$) donc les déformations dans chaque solide sont reliés à la variable $\frac{d}{a}$ dans ce cas $\frac{d}{a} = \frac{P_m}{E}$ où P_m est la pression moyenne.

L'équation (III.10) devient :

$$\frac{P_m}{E_1} + \frac{P_m}{E_2} = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{III.11})$$

$$P_m \cdot \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

D'où :

$$P_m = \frac{\frac{a}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \quad (\text{III.12})$$

Avec E_1 et E_2 sont les modules d'Yong des deux solides (1) et (2) respectivement.

Donc pour une géométrie donnée, la pression de contact et les déformations associées augmentent en proportion directe avec la zone de contact.

Selon la forme de la surface de contact, la pression moyenne est relié au chargement appliqué (P) comme suit :

Dans le cas de solides de révolution

$$P = \pi a^2 P_m \quad (\text{III.13})$$

Dans le cas de solides cylindriques

$$P = \pi a^2 P_m \quad (\text{III.14})$$

III.4 : Solution du problème d'Hertz [11]

III.4.1: Cas d'un solide de révolution

Les solides étant de révolution, la surface de contact est un cercle de rayon a comme le montre la figure (III.2). Les courbures peuvent être simplifiées comme suit :

$$R'_1 = R''_1 = R_1$$

$$R'_2 = R''_2 = R_2 \quad ; \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Ce qui donne pour les constantes A et B :

$$A = B = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

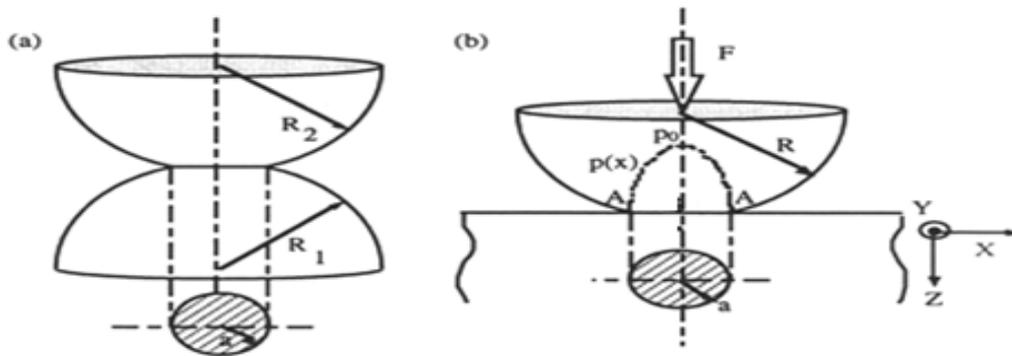


Figure III.2 : contact ponctuel a) contact sphère-sphère ; b) contact sphère-plan

Dans le cas d'un contact sphère-plan, il convient de prendre $R_1 = \infty$ et $R_2 = R$

On pose : $r^2 = x^2 + y^2$ pour donner la nouvelle expression du déplacement des surfaces dans la zone de contact

Substituant dans (III.7), on aura :

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - \frac{1}{2R} r^2 \quad (\text{III.15})$$

Hertz propose une répartition de pression pour donner lieu à ce type de déplacement :

$$P(r) = P_0 \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.16})$$

La résolution du problème élastique nous donne le déplacement normal sur la surface où s'applique la pression :

$$\bar{u}_z = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\pi P_0}{4} (2a^2 - r^2) \quad (\text{III.17})$$

Pour $r \leq a$

La pression étant opposée sur les deux surfaces en contact, donc et après avoir posé :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

En remplaçant dans (15) on aura :

$$\frac{\pi P_0}{4aE^*} (2a^2 - r^2) = \delta - \frac{1}{2R} r^2 \quad (\text{III.18})$$

L'équation (III.17) est une égalité en deux polynômes du second degré en r, par identification on trouve les formules de a et δ :

$$a = \frac{\pi P_0 R}{2E^*}$$

$$\delta = \frac{\pi a P_0}{2E^*}$$

Le chargement est relié à la pression de contact par :

$$P = \int_0^a P(r) \cdot 2\pi r \, dr = \frac{2}{3} P_0 \pi a^2 \quad (\text{III.19})$$

A partir de cette formule, on peut exprimer les différentes grandeurs du contact :

$$P_0 = \left(\frac{6 P E^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{III.20})$$

$$a = \left(\frac{3 P R}{4 E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{III.21})$$

$$\delta = \left(\frac{9 P^2}{16 E^{*2}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{III.22})$$

À l'intérieure du solide la contrainte maximale a une valeur de $0.31P_0$ à une profondeur de $0.48a$.

III.4 .2 : Cas générale

Dans le cas général la forme de la surface de contact n'est pas vraiment connue (pas de certitude), alors on suppose qu'elle soit elliptique de demi-axe a et b. Par analogie avec le cas des solides de révolution Hertz propose la répartition de pression suivante :

$$P = P_0 \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.23})$$

Cette répartition de pression donne lieu à un déplacement normal des surfaces au niveau du contact ci-dessous :

$$\bar{u}_z = \frac{1-\nu^2}{E} (L - Mx^2 - Ny^2) \quad (\text{III.24})$$

Pour les deux solides

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \frac{(L - Mx^2 - Ny^2)}{\pi E^*} \quad (\text{III.25})$$

Les déplacements vérifient la relation géométrique du contact d'Hertz

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - Ax^2 + By^2$$

Ce qui permet la déduction des relations suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \frac{M}{\pi E^*} = \left(\frac{P_0}{E^*}\right) \left(\frac{b}{e^2 a^2}\right) (K(e) - E(e)) \\ B &= \frac{N}{\pi E^*} = \left(\frac{P_0}{E^*}\right) \left(\frac{b}{e^2 a^2}\right) \left(\frac{a^2}{b^2} E(e) - K(e)\right) \\ \delta &= \frac{L}{\pi E^*} = \left(\frac{P_0}{E^*}\right) b K(e) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Avec $K(e)$ et $E(e)$ sont des intégrales de l'excentricité e .

e ne dépend que du rapport $\frac{b}{a}$

Soit :

$$\begin{aligned} e &= \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ K(e) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \\ E(e) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

L'intégration de la distribution de pression donne le chargement P :

$$P = \frac{2}{3} P_0 \pi \cdot a \cdot b \quad (\text{III.28})$$

On a vu dans la description des surfaces que :

$$(AB)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'R''}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2R_e}$$

En remplaçant A et B par leur expression donner en (III.24), on trouve :

$$(AB)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{P_0}{E^*}\right) \left(\frac{b}{e^2 a^2}\right) \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 E(e) - K(e)\right] (K(e) - E(e)) \quad (\text{III.29})$$

Une approximation du rapport $\left(\frac{a}{b}\right)$ est donner par :

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{-2}{3}} \quad (\text{III.30})$$

Pour $1 \leq \frac{b}{a} \leq 5$

En remplaçant P_0 par le chargement total, l'aire de contact sera :

$$c = (ab)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3PR_e}{4E^*}\right) \frac{4}{\pi e^2} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} [((a \cdot b)^2 E(e) - K(e))(K(e) - E(e))] \quad (\text{III.31})$$

c peut être exprimer en fonction du chargement et de la géométrie du problème comme suit :

$$c = (ab)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3PR_e}{4E^*}\right)^{\frac{1}{3}} F_1(e) \quad (\text{III.32})$$

De plus :

$$\frac{B}{A} = \frac{R'}{R''} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 E(e) - K(e)}{K(e) - E(e)} \quad (\text{III.33})$$

Ces expressions permettent de trouver le déplacement δ et la pression maximale P_0 :

D'après (III.24) :

$$\delta = \frac{L}{\pi E^*} = \left(\frac{P_0}{E^*}\right) bK(e)$$

Exprimant ce déplacement en fonction du rapport $\left(\frac{a}{b}\right)$, il vient :

$$\delta = \left(\frac{9P^2}{16E^*}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(F_1(e)^{\frac{1}{3}} K(e)\right)$$

$$\delta = \left(\frac{9P^2}{16E^*}\right)^{\frac{1}{3}} F_2(e) \quad (III.34)$$

On fait de même pour P_0 :

$$P_0 = \frac{3P}{2\pi ab} = \left(\frac{6PE^{*2}}{\pi^3 R_e^2}\right)^{\frac{1}{3}} (F_1(e))^{-\frac{2}{3}} \quad (III.35)$$

En comparant les expressions de δ et p_0 ci dessus à celle trouvées dans le cas des solides de révolution, on peut dire que les termes $F_1(e)$ et $F_2(e)$ peuvent être considérer comme des facteurs correctifs. Ces facteurs sont calculés numériquement à l'aide des abaques.

III.4.3 : Contact cylindrique :

En considère deux corps cylindriques en contact le long d'une ligne.les axes de révolution sont parallèle, le problème devient alors plan (bidimensionnel).

Les deux solides sont mis en contact sous chargement total P exprimé par unité de longueur.

Le contact initial est suivant une ligne parallèle aux axes des cylindres, donc la surface de contact est une bande de largeur 2a (figure III.3)

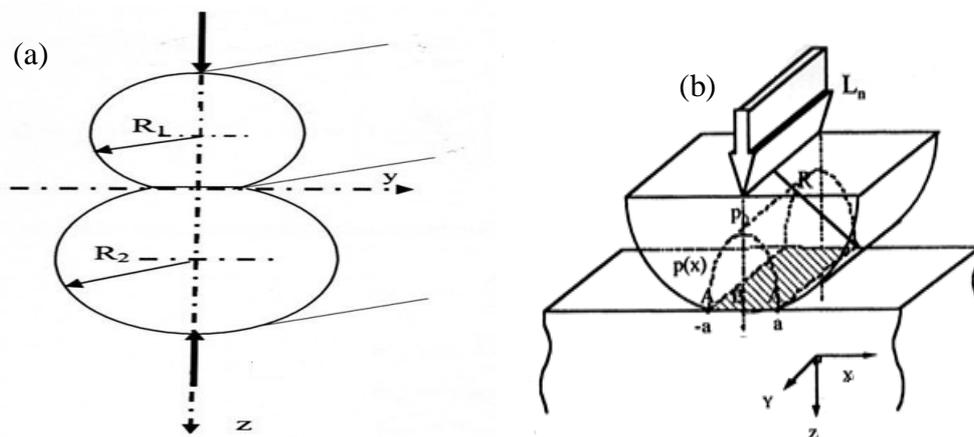


Figure III.3 : contact linéique : a) cylindre-cylindre, b) cylindre-plan

L'équation (III.4) du déplacement normale des surfaces de contact devient :

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - Ax = \delta - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R}\right) x^2 \quad (III.36)$$

Dans le cas d'un contact cylindre-plan, il convient de prendre :

$$R_1 = \infty$$

$$R_2 = R$$

On dérivant par rapport à x , on trouve :

$$\frac{\partial \bar{u}_{z1}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_{z2}}{\partial x} = -\left(\frac{1}{R}\right)x \quad (\text{III.37})$$

Exprimant ce gradient en fonction de la répartition de pression sur la surface de contact (même surface pour les deux solides), l'équation (III.36) devient :

$$\frac{\partial \bar{u}_{z1}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_{z2}}{\partial x} = -\frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^a \frac{P(s)}{x-s} ds \quad (\text{III.38})$$

En substituant dans l'équation précédente :

$$\int_{-a}^a \frac{P(s)}{x-s} ds = \frac{2E^*}{2R} x \quad (\text{III.39})$$

L'équation aura pour solution :

$$P(x) = -\frac{\pi E^*}{2R} \frac{(x^2 - \frac{a^2}{2})}{\pi(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{P}{\pi(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{III.40})$$

Cette expression fait intervenir directement le chargement total (P). Pour avoir une relation entre P et la largeur de la surface de contact, on note que la pression doit être positive ce qui fait :

$$P \geq \frac{\pi E^* a^2}{4R} \quad (\text{III.41})$$

D'autre part, on remarque que pour une valeur supérieure à celle donnée par (III.40) de la charge, la pression devient infinie à la limite de la surface chargée ($x = \pm a$), le résultat est alors :

$$P = \frac{\pi E^* a^2}{4R} \quad (\text{III.42})$$

On obtient donc la valeur de a et la répartition de la pression suivantes :

$$a^2 = \frac{4PR}{\pi E^*} \quad (\text{III.43})$$

$$P(x) = \frac{2P}{\pi a^2} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.44})$$

La pression maximale est :

$$P_0 = \frac{2P}{\pi a^2} = \frac{4}{\pi} P_m = \left(\frac{PE^*}{\pi R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.45})$$

La contrainte maximale à l'intérieur du solide a une valeur de $0.30P_0$ à une profondeur de $0.78a$.

Pour décrire l'état de contrainte dans le plan (X, Y), on retient les expressions données par [JOHNSON, 1985] :

$$\sigma_x = P_0 \frac{z}{a} \left[2 - \frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}} - \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{s} - \frac{x^2 s^2 a^2}{(a^2 - s^2)^{\frac{3}{2}} (s^4 + z^2 a^2)} \right]$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= -P_0 \cdot \frac{z^2 a \sqrt{a^2 - s^2}}{s(s^4 + z^2 a^2)} \\
\tau_{xz} &= -P_0 \cdot \frac{xz^2 sa}{\sqrt{a^2 - s^2} (s^4 + z^2 a^2)} \\
\sigma_y &= \nu [\sigma_x + \sigma_z] \\
\tau_{xy} &= \tau_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{III.46}$$

Avec :

$$s = (A^2 + 4a^2 z^2), \quad A = x^2 + z^2 - a^2$$

Suivant l'axe (OZ), le l'état de contrainte est :

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{P_0}{a} \left[(a^2 + 2z^2)(a^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - 2z \right] \\
\sigma_z &= -P_0 \cdot \frac{a}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \\
\sigma_y &= \nu [\sigma_x + \sigma_z] \\
\tau_{xy} &= \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0
\end{aligned} \tag{III.47}$$

σ_x et σ_z étant les contraintes principales, donc :

$$\begin{aligned}
\tau_{Max} &= \frac{\sigma_{Max} - \sigma_{Min}}{2} \\
&= \frac{P_0}{a} \left(z - \frac{z^2}{(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \right)
\end{aligned} \tag{III.48}$$

Les contraintes de contact influent négativement sur les résultats des essais mécaniques, notamment dans l'essai de flexion trois points où leur présence provoque une rupture prématuré.

III.5 : Alternatives à l'essai de flexion :

La rupture durant l'essai de flexion trois points n'est pas seulement dû à la traction ou à la compression, mais aussi et de façon étroite à la nature des contraintes de contact qui se développe lors de l'application de la charge. C'est pourquoi de différentes alternatives à l'essai ont été envisagées dans le but soit de réduire ces contraintes de contact, ou de modifier le mode de chargement.

III.5.1 : modification du mode de chargement [12]

III.5.1.1 : Essai de flexion pure

Il consiste à appliquer un moment de flexion constant sur toute la longueur de l'éprouvette aux extrémités libres en rotation (figure III.4).

Cependant le problème lié à la présence des mors subsiste.

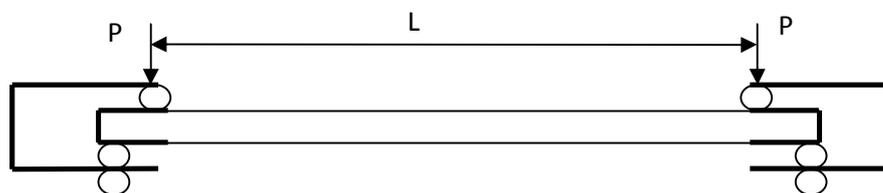


Figure III.4 : flexion pure

III.5.1.2 : Rotation d'encastrement

Dans cet essai l'appui central est suspendu comme y représenter sur la figure (III.5), mais la présence du moment lié à l'encastrement exige d'utiliser des éprouvettes de section variables de manière à avoir des contraintes maximales dans une zone précise. Cette technique n'est pas efficace pour des raisons liées à la mise en œuvre des éprouvettes.

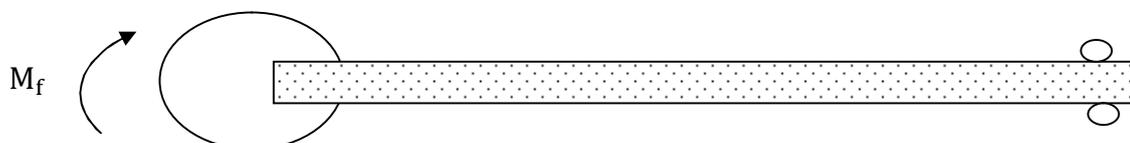


Figure III.5 : Essai de flexion par rotation d'encastrement

III.5.2 : Réduction des contraintes de contact

III.5.2.1 : modification de la distance entre appuis

L'augmentation de la portée des éprouvettes réduit le phénomène de poinçonnement est donc des contraintes de contact, mais cette solution engendre les problèmes suivant :

- la nécessité de grandes portées ($L \geq 150$).
- enregistrement de grands déplacements.

III.5.2.2 : augmentation du rayon de la panne centrale (Figure III.6)

L'augmentation de la surface de contact limite le choix de l'appui, ce rayon est normalisé à 5mm. Cette technique n'élimine pas tout à fait les contraintes de contact.

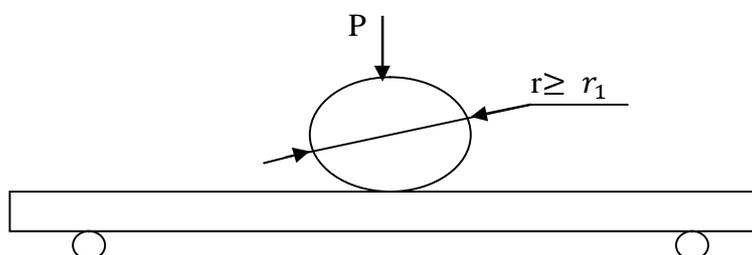


Figure III.6 : Augmentation du rayon de la panne

III.5.2.3 : Introduction d'un clinquant :

Un film métallique d'épaisseur optimisée est inséré entre la panne centrale et l'éprouvette (figure III.7). Cette solution assure l'augmentation de la résistance à la flexion et la réduction partielle des contraintes de contact, mais elle n'est plus adaptée à la caractérisation des composites ductiles à cause du déplacement du clinquant.

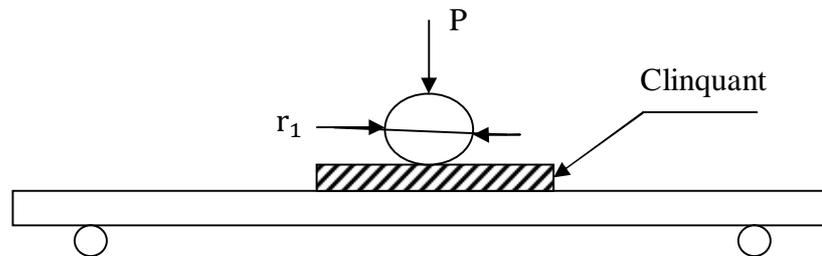


Figure III.7 : Insertion d'un clinquant

Conclusion

Les essais mécaniques qu'on a vu présentent pratiquement tous des effets parasites, notamment l'essai de flexion qui engendre des contraintes de contact durant son application, de plus les alternatives à ce dernier ne donnent pas des résultats satisfaisant ce qui nous a conduit à choisir l'essai de flambement.

Introduction

Les structures chargées sont toujours exposées à des phénomènes d'instabilité, notamment le flambement ou parfois flambage qui provoque des déplacements considérables.

La perte de stabilité ou le flambement d'un élément étant lié aux dimensionnements de cet élément.

On dit que le flambement est l'instabilité de forme.

IV.1: Définition

Le terme de flambement désigne un phénomène bien connu, que ce soit en mécanique ou en bâtiment, Le flambement est une instabilité et un mode de ruine prépondérant très dangereux qui peut apparaître pour les éléments élancés (la longueur est très supérieure à la plus grande dimension transversale), et des structures en compression. Il se manifeste par une déformation de flexion brutale à partir d'un seuil donné d'effort de compression nommée charge critique de flambement ou effort de flambement

Le flambage se produit d'autant plus facilement que l'élément est long et de faible section. Le flambage dépend aussi du type de liaisons des extrémités de l'élément (les conditions d'appuis).ce qui nous donne différentes cas du flambement :

Cas d'une poutre encastré à ses deux extrémités.

Cas d'une poutre rotulée aux deux bouts.

Cas d'une poutre encastré-libre.

Cas d'une poutre encastré-rotulée.

En général le flambement élastique n'est que le début d'un comportement non linéaire bien plus complexe qui une fois amorcé conduit à des déformations plastiques dans le matériau puis à la ruine de la poutre.

IV.2: Mise en évidence du phénomène de flambement

Considérant un élément de ligne moyenne rectiligne, et de section droite constante, soumis à un effort de compression (figure IV.1)

Deux cas se présentent :

Pour un effort F inférieure à une limite F_c , l'élément est comprimé, il reste rectiligne et se raccourcit.

Lorsque F atteint F_c , l'élément fléchit brusquement et se rompt très vite. On observe que la flexion se produit dans le plan perpendiculaire à la direction de plus faible moment quadratique de la section de l'élément.

Dans le schéma La flexion se produit dans le plan (A, X, Y) perpendiculaire à (G, Z)

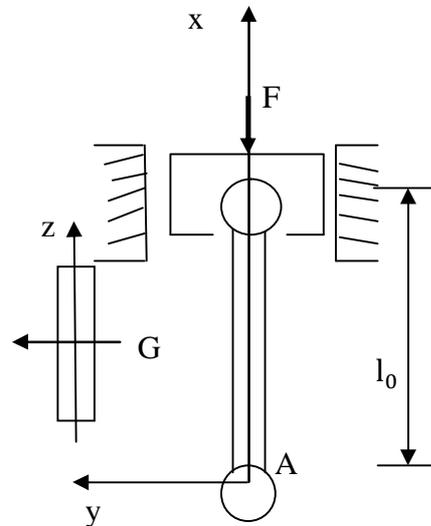


Figure IV.1 : poutre en compression

IV.3: Détermination de la flèche Y(x) (la ligne élastique) [12]

Considérent une poutre droite de longueur L, soumise à un effort normale de compression F, supporte une charge uniformément répartie et on lui impose des moments M_0, M_1 comme le montre la figure (IV.2)

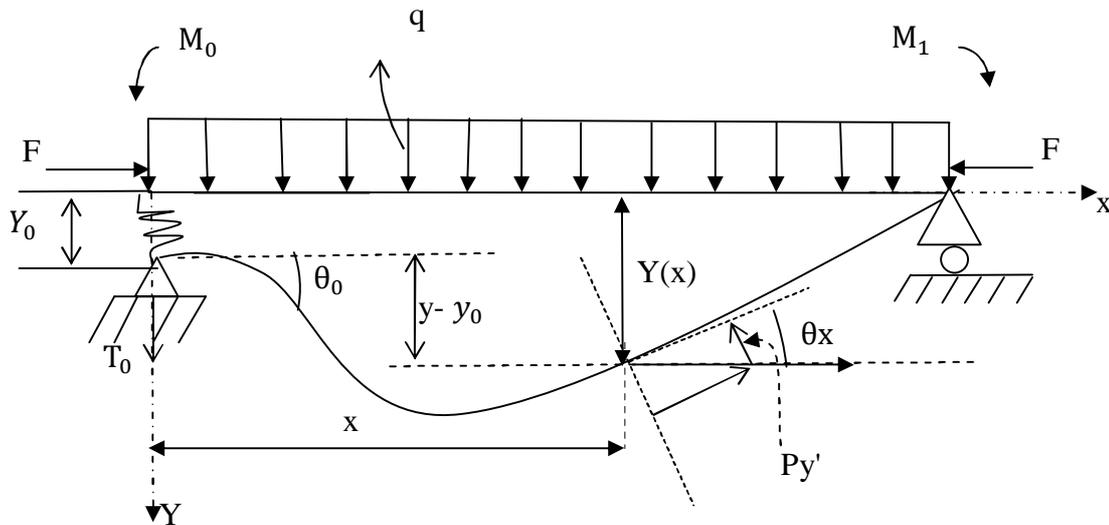


Figure IV.2 : cas général d'une poutre sollicité au flambement

L'équation de la déformée est :

$$EI \cdot y''(x) = M_x \tag{IV.1}$$

EI : est la rigidité de la poutre.

M_x :est le moment fléchissant qui a pour valeur :

$$M_x = M_0 + T_0 \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2} - F \cdot (y - y_0) \tag{IV.2}$$

Ou bien :

$$M_x = M_{0x} + M_F \tag{IV.3}$$

Avec :

$$M_F = -F \cdot (y - y_0)$$

M_F : Le moment fléchissant dû à l'effort normal de compression.

$$M_{0x} = M_0 + T_0 \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2}$$

M_{0x} : Le moment fléchissant dû à la charge transversale q , dans la section d'abscisse x .

L'effort tranchant T_x dans la section d'abscisse x vaut :

$$T_x = \frac{dM_x}{dx} = T_0 + q \cdot x - F \cdot y \quad (\text{IV.4})$$

Ou

$$T_x = T_{0x} + T_F \quad (\text{IV.5})$$

Tel que :

$$T_{0x} = \frac{dM_{0x}}{dx}$$

T_{0x} : est l'effort tranchant dû à la charge transversale q dans la section d'abscisse x .

$$T_F = \frac{dM_F}{dx}$$

T_F : est l'effort tranchant dû à l'effort normal de compression dans la section d'abscisse x .

L'équation de la déformée devient :

$$Y''(x) = \frac{M_0}{EI} + \frac{T_0}{EI} \cdot x + \frac{q}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{F}{EI} \cdot (y - y_0) \quad (\text{IV.6})$$

Posant:

$$\frac{M_0}{EI} = \overline{M_0}; \quad \frac{T_0}{EI} = \overline{T_0}; \quad \frac{q}{EI} = \overline{q} \quad \text{et} \quad \frac{F}{EI} = \omega^2$$

Alors :

$$Y''(x) = \overline{M_0} + \overline{T_0} \cdot x + \overline{q} \cdot \frac{x^2}{2} - \omega^2 \cdot (y - y_0). \quad (\text{IV.7})$$

L'intégration après le développement en série de Maclaurin:

Série de Maclaurin est sous forme :

$$y(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + y''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + y'''(0) \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Si on calcule les dérivées et intégrant les valeurs initiales dans leurs expressions on trouve le système suivant :

$$y(0) = y_0$$

$$y'(0) = \theta_0$$

$$y''(0) = \overline{M_0}$$

$$y'''(0) = \overline{T_0} - \omega^2 \cdot \theta_0$$

$$y^4(0) = \overline{q} - \omega^2 M_0$$

$$y^5(0) = -\omega^2 \overline{T_0} + \omega^4 \theta_0$$

$$y^6(0) = -\omega^2 \overline{q} + \omega^4 M_0$$

On substituant ces valeurs dans la série de Maclaurin, on aura :

$$Y(x) = y_0 + \theta_0 \left[\frac{x}{1!} - \frac{\omega^2 x^3}{3!} + \frac{\omega^4 x^5}{5!} \dots \right] + \overline{M_0} \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{\omega^2 x^4}{4!} + \frac{\omega^4 x^6}{6!} - \dots \right] + \overline{T_0} \cdot \left[\frac{x^3}{3!} - \frac{\omega^2 x^5}{5!} + \frac{\omega^4 x^7}{7!} - \dots \right] + \overline{q} \cdot \left[\frac{x^4}{4!} - \frac{\omega^2 x^6}{6!} + \frac{\omega^4 x^8}{8!} - \dots \right]$$

On pose:

$$A = \left[\frac{x}{1!} - \frac{\omega^2 x^3}{3!} + \frac{\omega^4 x^5}{5!} \dots \right]$$

$$B = \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{\omega^2 x^4}{4!} + \frac{\omega^4 x^6}{6!} - \dots \right]$$

$$C = \left[\frac{x^3}{3!} - \frac{\omega^2 x^5}{5!} + \frac{\omega^4 x^7}{7!} - \dots \right]$$

$$D = \left[\frac{x^4}{4!} - \frac{\omega^2 x^6}{6!} + \frac{\omega^4 x^8}{8!} - \dots \right]$$

Donc :

$$Y(x) = y_0 + \theta_0 \cdot A + \overline{M_0} \cdot B + \overline{T_0} \cdot C + \overline{q} \cdot D \quad (IV.8)$$

Le développement des fonctions sinus et cosinus en série de Maclaurin est comme suit:

$$\cos \omega x = 1 - \frac{(\omega x)^2}{2!} + \frac{(\omega x)^4}{4!} - \frac{(\omega x)^6}{6!} + \dots$$

$$\sin \omega x = \frac{\omega x}{1!} - \frac{\omega^3 x^3}{3!} + \frac{\omega^5 x^5}{5!} - \dots$$

Finalement et compte tenu de ces expressions on obtient l'équation générale de la déformée comme suit :

$$Y(x) = y_0 + \theta_0 \cdot \frac{\sin \omega x}{\omega} + \overline{M_0} \cdot \frac{1 - \cos \omega x}{\omega^2} + \overline{T_0} \cdot \frac{\omega x - \sin \omega x}{\omega^3} + \overline{q} \cdot \frac{\cos \omega x - 1 + \frac{\omega^2 x^2}{2}}{\omega^4} \quad (IV.9)$$

L'expression de l'angle de la poutre est :

$$\theta(x) = y' = \theta_0 \cos \omega x + \overline{M_0} \cdot \frac{\sin \omega x}{\omega} + \overline{T_0} \cdot \frac{1 - \cos \omega x}{\omega^2} + \overline{q} \cdot \frac{\omega x - \sin \omega x}{\omega^3} \quad (IV.10)$$

L'expression du moment fléchissant est :

$$M_x = EI y'' = -\omega EI \theta_0 \cdot \sin \omega x + \overline{M_0} \cdot \cos \omega x + \overline{T_0} \cdot \frac{\sin \omega x}{\omega} + \overline{q} \cdot \frac{1 - \cos \omega x}{\omega^2} \quad (IV.11)$$

L'expression de l'effort tranchant est :

$$T_x = \frac{dM_x}{dx} = -\omega EI \theta_0 \cdot \cos \omega x - \omega \overline{M_0} \cdot \sin \omega x + \overline{T_0} \cdot \cos \omega x + \overline{q} \cdot \frac{\sin \omega x}{\omega} \quad (IV.12)$$

IV.4 : La charge critique d'Euler

La charge critique constitue un seuil au-delà duquel un système se ruine inévitablement, Elle définit le passage de l'état stable à l'état instable.

IV.4.1: Détermination de la charge

Considérant une poutre modélisée par sa ligne moyenne AB, soumise à un effort de compression de valeur F de part et d'autre.

À cet effet, cette ligne prend une légère courbure comme le montre schémas (figure IV.3).

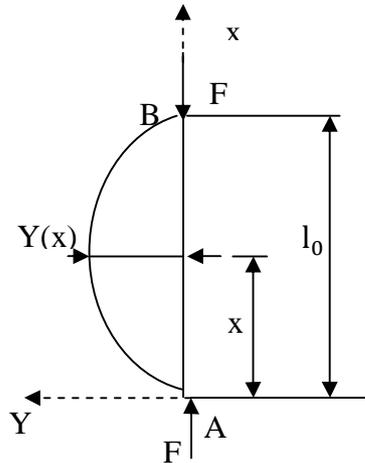


Figure IV.3 : modélisation d'une poutre par sa ligne moyenne

Dans le cas d'équilibre statique, on considère que les déformations sont Petite et que la fibre moyenne n'a pas bougé, mais ici nous allons prendre en compte l'influence des déformations sur l'équilibre statique et considérer le moment qu'elles provoquent, c'est un moment de flexion qui vaut :

$$M_z(x) = -M_f$$

$$M_z(x) = -F \cdot Y$$

α étant petit donc :

$$N = F \cos \alpha \approx F,$$

$$T = F \sin \alpha \approx 0,$$

$$M = F \cdot Y(x),$$

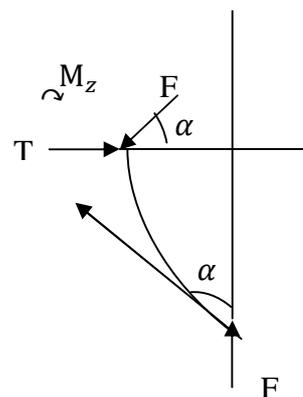
En utilisant les relations de la RDM, les formules déjà vue dans l'étude de la flexion plus précisément:

$$EI \cdot Y'' = M_z(x) \tag{IV.13}$$

$$\Leftrightarrow EI \cdot Y'' - M_z(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow EI \cdot Y'' + F \cdot Y = 0$$

$$\Leftrightarrow Y'' + \frac{F}{EI} \cdot Y = 0$$



Equation différentielle du deuxième ordre de forme

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - \omega^2 \cdot U = 0 \quad (\text{IV.14})$$

Par identification $\omega^2 = \frac{F}{EI}$

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$Y = A \cos \omega X + B \sin \omega X \quad (\text{IV.15})$$

Détermination des constantes A et B par application des conditions aux limites:

Pour $X=0$, $Y(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = A \cos 0 + B \sin 0$.

$$\Leftrightarrow A = 0$$

Pour $X=l_0$, $Y(l_0) = 0 \Leftrightarrow 0 = B \sin \omega l_0$

B doit être différent de zéro sinon y'a pas de déformation donc pas de flambement.

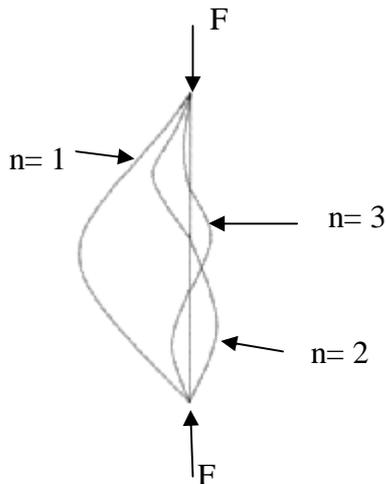
D'où :

$$\sin \omega l_0 = 0$$

$$\omega l_0 = n \pi$$

Avec $n = 1, 2, 3, \dots$;

n détermine le mode de flambement et combien de fois la poutre flambe :



$n=1$ la poutre flambe une seul fois,

$n=2$ la poutre flambe 2 fois,

$n=3$ la poutre flambe 3 fois

Figure IV.4 : les modes de flambement

Pour le premier mode de flambement $n = 1 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{l_0}$.

On remplace la valeur de ω dans l'équation de la déformée $Y(x)$ on trouve :

$$Y(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{l_0}\right) \quad (\text{IV.16})$$

Donc $\omega^2 = \frac{\pi^2}{l_0^2} = \frac{F}{EI}$

Tel que :

EI est la rigidité à la flexion.

La résolution de cette équation donne F qui provoque la déformée, c'est-à-dire la charge ou l'effort critique d'Euler F_{cr} au delà de laquelle le flambement se produit :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l_f^2} \tag{IV.17}$$

Tel que l_f : est la longueur de flambement

Dans cette situation, plusieurs cas sont possibles :

$F < F_{cr}$: compression simple, la fibre reste droite. C'est l'équilibre stable.

$F = F_{cr}$: apparition d'une petite flèche, équilibre neutre.

$F > F_{cr}$: la poutre flambe c'est-à-dire entre dans un état instable (équilibre instable), il y aura de la ruine avec un léger accroissement de F

IV.4.2: La charge critique pour les différents cas du flambement

Les cas du flambement sont accentués par les différentes conditions d'appuis.

Pour des conditions aux limites quelconques la charge critique s'écrit :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l_f^2}$$

Ou :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{K l_0^2}$$

Avec : K facteur de longueur de flambement équivalente à celle d'une poutre simplement appuyée.

La figure ci-dessous récapitule les longueurs de flambement.

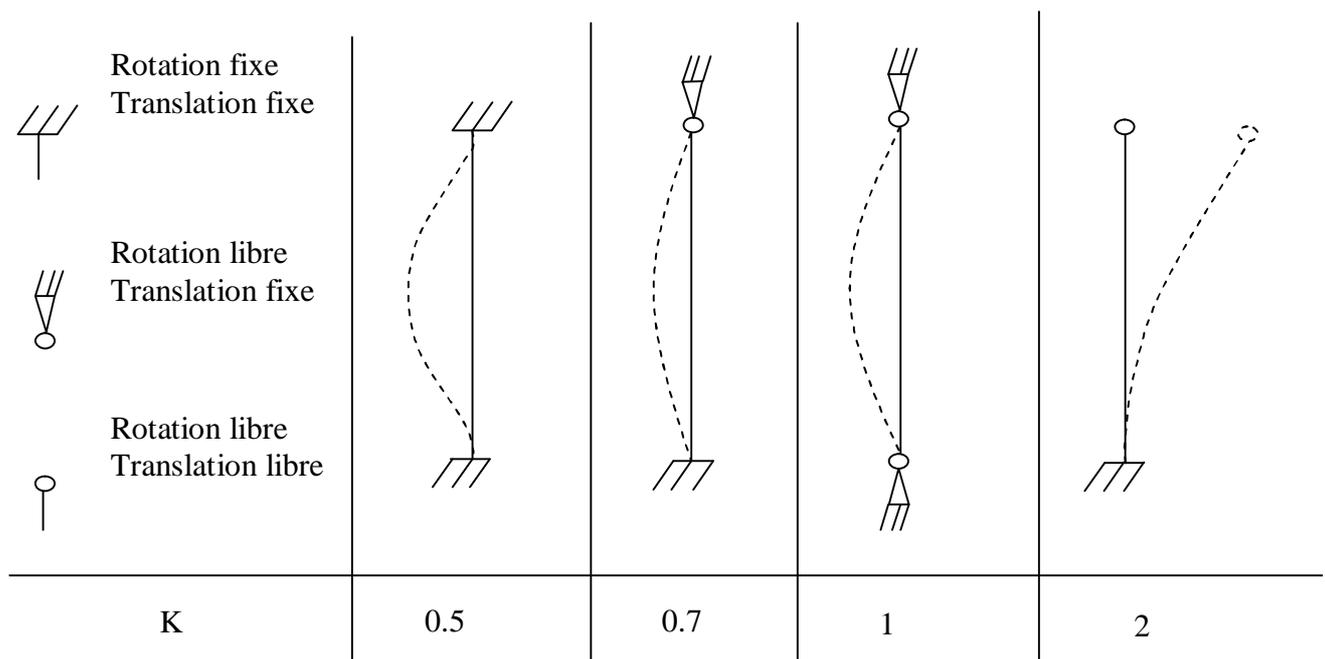


Figure IV.5 : Valeur de K pour le calcul de la longueur de flambement

IV.4.3: Etude des différents cas ou modes de fixations :**IV.4.3.1 : Cas où la poutre est articulée à ses deux extrémités, et soumise à un effort de compression F (figure IV.6).**

L'expression de la déformée est :

$$Y(x) = \theta_0 \cdot \sin \omega x$$

Expression des sollicitations :

$$M_{(x)} = \theta_0 \cdot F \sin \omega x$$

$$T_x = \frac{dM(x)}{dx} \cdot \theta_0 \cdot \omega \cdot F \cos \omega x$$

$$\text{Avec } \omega = \frac{\pi}{L}$$

Expression de la déformée de flexion

$$Y'' = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{\theta_0}{EI} \cdot F \sin \frac{\pi x}{L}$$

Intégrant une fois on trouve :

$$Y'(x) = \frac{\theta_0 L}{EI \pi} \cdot F \cos \frac{\pi x}{L} + C$$

Intégrant une deuxième fois :

$$Y(x) = \frac{\theta_0 L^2}{EI \pi^2} \cdot F \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C \cdot x + C_1$$

Les constantes C et C₁ sont déterminées en appliquant les conditions aux limites :

Pour x=0, y₀=0 donc C=0

Pour x=L, y_L=0 donc C₁=0

D'où l'expression de la déformée de flexion devient :

$$Y(x) = \frac{\theta_0 L^2}{EI \pi^2} \cdot F \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (\text{IV.18})$$

Expression de la déformée d'effort tranchant :

L'expression générale est :

$$\begin{aligned} Y_{T(x)} &= \frac{1}{G\Omega} \int_{x=0}^x \left[\theta_0 F \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \right] \cdot dx \\ &= \frac{\theta_0 F}{G \Omega} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A \end{aligned}$$

Les conditions aux limites donnent la constante A

Pour x=0, Y₍₀₎=0 ⇒ A=0

Donc :

$$Y_{(x)} = \frac{\theta_0 F}{G \Omega} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (\text{IV.19})$$

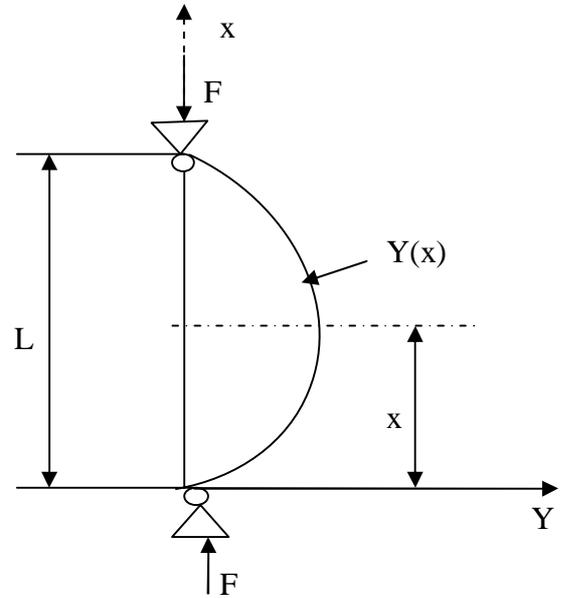


Figure IV.6 : poutre articulée à ses deux extrémités

On sommant les deux expressions précédentes on trouve la déformée totale :

$$Y(x) = \frac{\theta_0 L^2}{EI \pi^2} \cdot F \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{\theta_0 F}{G \Omega} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (\text{IV.20})$$

La charge critique de flambement :

On obtient cette charge F_c en exprimant la flèche au milieu, à $x = L/2$

$$(\text{IV.19}) \Rightarrow Y_{(x=L/2)} = \theta_0$$

$$(\text{IV.20}) \Rightarrow Y_{(x=L/2)} = \theta_0 \cdot F \left[\frac{L^2}{EI \cdot \pi^2} + \frac{1}{G \Omega} \right].$$

On égalant ces deux expressions on aura :

$$\begin{aligned} F_c &= \frac{1}{\left[\frac{L^2}{EI \cdot \pi^2} + \frac{1}{G \Omega} \right]} \\ &= \frac{EI \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{EI \cdot \pi^2}{L^2 \cdot G \Omega}} \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

Le premier terme dû à la flexion et le deuxième à l'effort tranchant.

IV.4.3.2 : Cas où la poutre est encastree à une extrémité et libre à l'autre, soumise à un effort de compression F (figure IV.7).

Le moment fléchissant à pour expression :

$$M(x) = -F(Y_L - Y(x))$$

On divise sur la rigidité :

$$\frac{M(x)}{EI} = -\frac{F}{EI}(Y_L - Y(x)).$$

On tenant pas compte de l'effort tranchant :

$$EIY'' = -M(x)$$

$$EIY'' = F(Y_L - Y(x))$$

On divisant sur EI on trouve :

$$Y'' + \frac{F}{EI}Y(x) - \frac{F}{EI}Y_L = 0 \quad (\text{IV.22})$$

L'expression (IV.22) est une équation différentielle de deuxième ordre avec second membre de solution particulière :

$$Y(x) = Y_L$$

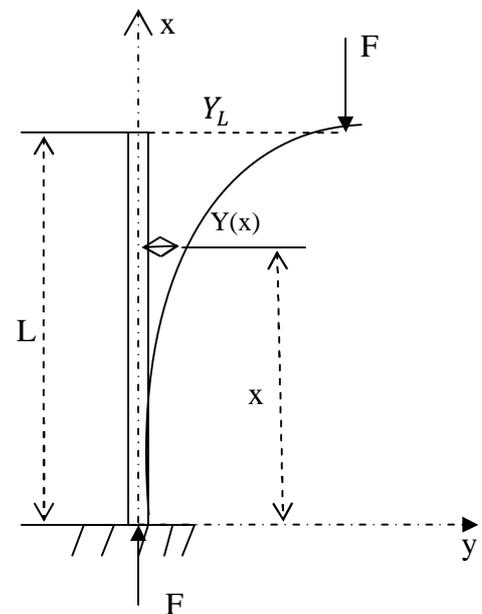


Figure IV.7: poutre à une extrémité et libre à l'autre

La solution générale avec le second membre est

$$Y_{(x)} = A \cos \omega X + B \sin \omega X .$$

La solution de l'équation différentielle est donc :

$$Y_{(x)} = A \cos \omega X + B \sin \omega X + Y_L \quad (\text{IV.23})$$

Application des conditions aux limites :

$$\text{Pour } x=0, Y_{(0)} = 0 \Rightarrow A = -Y_L$$

$$\text{Pour } x=L, Y_{(L)} = Y_L \Rightarrow A \cos \omega L + B \sin \omega L = 0 \quad (\text{IV.24})$$

La rotation est nulle au niveau de l'encastrement donc :

$$\frac{dY_{(x)}}{dx} = -A \sin \omega X + B \cos \omega X$$

$$Y'_{(0)} = 0 \Rightarrow B \cos \omega \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

On remplaçant la valeur de B dans (IV.25) :

$$A \cos \omega L = 0$$

$A=0$ n'a pas d'intérêt donc

$$\cos \omega L = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2L} \Rightarrow \omega^2 = \frac{\pi^2}{4L^2}$$

$$\text{D'autre part } \omega^2 = \frac{F}{EI}$$

On égalant ces deux expressions on trouve :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (\text{IV.25})$$

On tenant compte de l'effort tranchant :

L'expression de la déformée de l'effort tranchant est :

$$\begin{aligned} Y_{T(x)} &= \frac{1}{G\Omega} \int_{x=0}^x T(x) dx = \frac{M(x)}{G\Omega} \\ &= -\frac{F}{G\Omega} (Y_L - Y_{(x)}) \end{aligned}$$

La première dérivée est :

$$Y'_{T(x)} = \frac{1}{G\Omega} \left(\frac{FY'_{(x)}}{dx} \right)$$

La deuxième dérivée est :

$$Y''_{T(x)} = \frac{1}{G\Omega} \left(\frac{Fd^2Y_{(x)}}{dx^2} \right)$$

La sommation des deux déformées (de flexion et de l'effort tranchant) donne :

$$Y'' = -\frac{F}{EI} Y_{(x)} + \frac{F}{EI} Y_L + \frac{F}{G\Omega} Y'' \quad (\text{IV.26})$$

$$Y'' \left(1 - \frac{F}{G\Omega}\right) + \frac{F}{EI} Y(x) - \frac{F}{EI} Y_L = 0$$

On divise sur $\left(1 - \frac{F}{G\Omega}\right)$

L'équation devient :

$$Y'' + \frac{F}{EI \cdot \left(1 - \frac{F}{G\Omega}\right)} Y(x) - \frac{F}{EI \cdot \left(1 - \frac{F}{G\Omega}\right)} Y_L = 0 \quad (\text{IV.27})$$

On pose $\omega^2 = \left(\frac{\frac{F}{EI}}{1 - \frac{F}{G\Omega}}\right)$

Donc :

$$Y'' + \omega^2 Y(x) - \omega^2 Y_L = 0 \quad (\text{IV.28})$$

La résolution de cette équation différentielle et l'application des conditions aux limites donne la charge critique de flambement comme suit :

$$F_c = \frac{\pi^2 \cdot EI}{4L^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \cdot EI}{4L^2 G\Omega}} \right]. \quad (\text{IV.29})$$

IV.4.3.3 : Cas d'une poutre encastree à ses deux extrémités, soumise à un effort de compression F et à deux moments de même valeur au niveau des deux encastremets (figure IV.8).

L'expression du moment fléchissant est:

$$M_x = F Y(x) - M_0$$

Divisant sur la rigidité :

$$\frac{M_x}{EI} = \frac{F}{EI} Y(x) - \frac{M_0}{EI}$$

L'équation de la déformée est :

$$y''(x) = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{F}{EI} Y(x) + \frac{M_0}{EI}$$

Posant :

$$\frac{F}{EI} = \omega^2$$

L'équation de vient

$$y''(x) = -\omega^2 Y(x) + \frac{\omega^2}{F} M_0$$

$$y''(x) + \omega^2 Y(x) - \frac{\omega^2}{F} M_0 = 0 \quad (\text{IV.30})$$

L'expression (IV.30) est une équation différentielle de deuxième ordre, avec second membre.

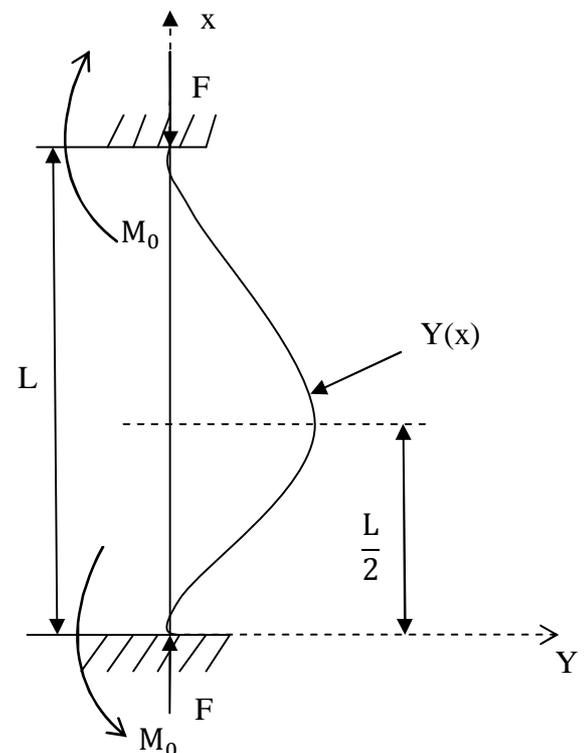


Figure IV.8 : poutre encastree aux deux extrémités

La solution particulière est :

$$Y(x) = \frac{M_0}{F}$$

La solution générale sans second membre est :

$$Y(x) = A \cos \omega X + B \sin \omega X .$$

La solution de l'équation différentielle est donc :

$$Y(x) = A \cos \omega X + B \sin \omega X + \frac{M_0}{F} \quad (\text{IV.31})$$

Les constantes A et B sont déterminé en appliquant les conditions aux limites :

Pour $x=0 \Rightarrow y(0) = 0$

$$\Rightarrow A + 0 + \frac{M_0}{F} = 0$$

$$\Rightarrow A = -\frac{M_0}{F}$$

Pour $x=L \Rightarrow y(L) = 0$

$$\Rightarrow A \cos \omega L + B \sin \omega L + \frac{M_0}{F} = 0$$

La rotation au niveau de l'encastrement est nulle :

$$y'(x) = -A \sin \omega x + B \cos \omega X$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow -A \sin \omega \cdot 0 + B \cos \omega \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$$y'(L) = 0 \Rightarrow -A \sin \omega \cdot L = 0$$

A est différent de zéro donc :

$$-\sin \omega \cdot L = 0$$

$$\text{Soit } \omega \cdot L = 2\pi \Rightarrow \omega^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \quad (\text{IV.32})$$

$$\text{D'autre part } \frac{F}{EI} = \omega^2$$

En égalant les deux expressions on trouve :

$$F_c = \frac{4\pi^2 \cdot EI}{L^2} \quad (\text{IV.33})$$

Si on tient compte de l'effort tranchant :

L'expression de la déformé d'effort tranchant est :

$$\begin{aligned} Y_{T(x)} &= \frac{1}{G\Omega} \int_{x=0}^x T(x) dx = \frac{M(x)}{G\Omega} \\ &= \frac{F Y(x) - M_0}{G\Omega} \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

En dérivant une fois :

$$Y'_{T(x)} = \frac{F Y'(x)}{G\Omega}$$

En dérivant une seconde fois :

$$Y''_{T(x)} = \frac{F Y''(x)}{G\Omega}$$

L'équation différentielle totale :

$$Y''(x) \left(1 - \frac{F}{G\Omega}\right) + \frac{F}{EI} Y(x) = \frac{M_0}{EI} \quad (\text{IV.35})$$

Divisant l'équation sur $\left(1 - \frac{F}{G\Omega}\right)$

$$\text{On pose : } \omega^2 = \left(\frac{\frac{F}{EI}}{\left(1 - \frac{F}{G\Omega}\right)}\right)$$

Donc : (IV.36)

$$Y''(x) + \omega^2 Y(x) = \frac{\omega^2 M_0}{F}$$

On refait la même procédure, on aura à la fin :

$$F_c = \frac{4\pi^2 \cdot EI}{L^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 EI}{L^2 G\Omega}} \right] \quad (\text{IV.37})$$

IV.4.3.4 : Cas où la poutre est articulée à une extrémité et encastée à l'autre (Figure IV.9)

R_{By} et R_{Ay} sont des réactions d'appuis, de valeur :

$$\frac{M_0}{L} .$$

L'expression du moment fléchissant est :

$$\begin{aligned} M_{(x)} &= Fy(x) - \frac{M_0}{L} (L - x) \\ &= Fy(x) - M_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right). \end{aligned}$$

Divisant sur EI :

$$\frac{M_{(x)}}{EI} = \frac{F}{EI} y(x) - \frac{M_0}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

L'équation différentielle est :

$$Y''(x) = -\frac{M_{(x)}}{EI} = -\frac{F}{EI} y(x) + \frac{M_0}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Ou :

$$y''(x) + \frac{F}{EI} y(x) - \frac{M_0}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) = 0$$

$$\text{posant } \omega^2 = \frac{F}{EI}$$

donc :

$$Y''(x) + \omega^2 y(x) - \frac{M_0 \omega^2}{F} \left(1 - \frac{x}{L}\right) = 0 \quad (\text{IV.38})$$

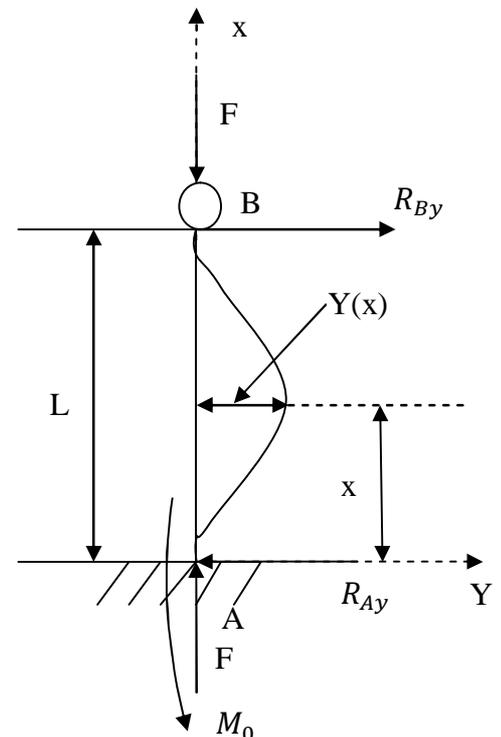


Figure IV.9 : poutre est articulée à une extrémité et encastée à l'autre.

(IV.38) est une équation différentielle de deuxième ordre avec second membre.

La solution particulière est :

$$Y(x) = \frac{M_0}{F} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

La solution générale sans second membre est :

$$Y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x .$$

La solution de l'équation différentielle est donc :

$$Y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x + \frac{M_0}{F} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (\text{IV.39})$$

Les constantes A et B sont déterminées en appliquant les conditions aux limites.

$$\text{Pour } x=0 ; y(0) = 0 \Rightarrow A + \frac{M_0}{F} = 0$$

$$\Rightarrow A = - \frac{M_0}{F}$$

$$\text{pour } x = L \Rightarrow y(L) = 0$$

$$\Rightarrow A \cos \omega L + B \sin \omega L = 0 \quad (\text{IV.40})$$

de plus la rotation au niveau de l'encastrement est nulle :

$$\frac{dy(x)}{dx} = -A \omega \sin \omega x + B \omega \cos \omega x - \frac{M_0}{LF}$$

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow B \omega - \frac{M_0}{LF} = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{M_0}{L.F.\omega}$$

En remplace les valeurs de A et B dans (IV.41) :

$$(\text{IV.41}) \Rightarrow - \frac{M_0}{F} \cdot \cos \omega L + \frac{M_0}{L.F.\omega} \cdot \sin \omega L = 0$$

$$\Rightarrow - \cos \omega L + \frac{1}{L.\omega} \cdot \sin \omega L = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega.L} \cdot \sin \omega L = \cos \omega L$$

$$\Rightarrow \sin \omega L = \omega . L . \cos \omega L$$

$$\text{D'où: } \omega . L = \frac{\sin \omega L}{\cos \omega L} = \text{tg } \omega L$$

Donc :

$$\text{tg } \omega L = \omega . L \quad (\text{IV.41})$$

En résolvant l'équation graphiquement :

On pose :

$$y_1 = \text{tg } \omega L$$

$$y_2 = \omega . L$$

La solution de l'équation est le point d'intersection entre les deux droites y_1 et y_2

$$\omega . L = 1.41\pi$$

$$\omega^2 = \frac{2\pi^2}{L^2}$$

et d'autre part $\omega^2 = \frac{F}{EI}$

en égalant ces deux expressions on aura :

$$F_c = \frac{2\pi^2 EI}{L^2} \tag{IV.42}$$

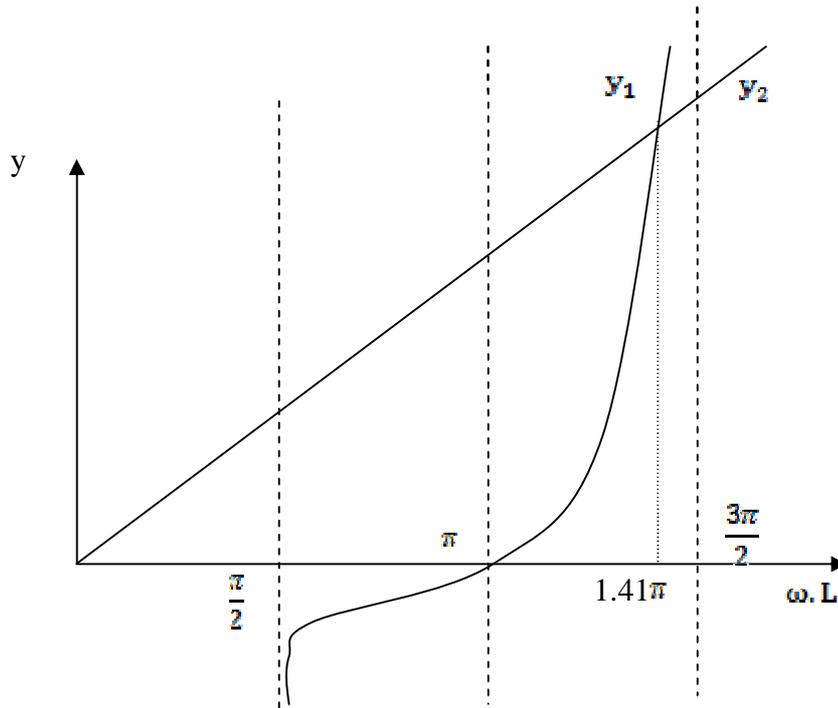


Figure IV.10 : graphe de l'équation $\text{tg } \omega L = \omega L$

Enfin :

Les schémas ci-dessous représente un récapitulatif des cas étudiés

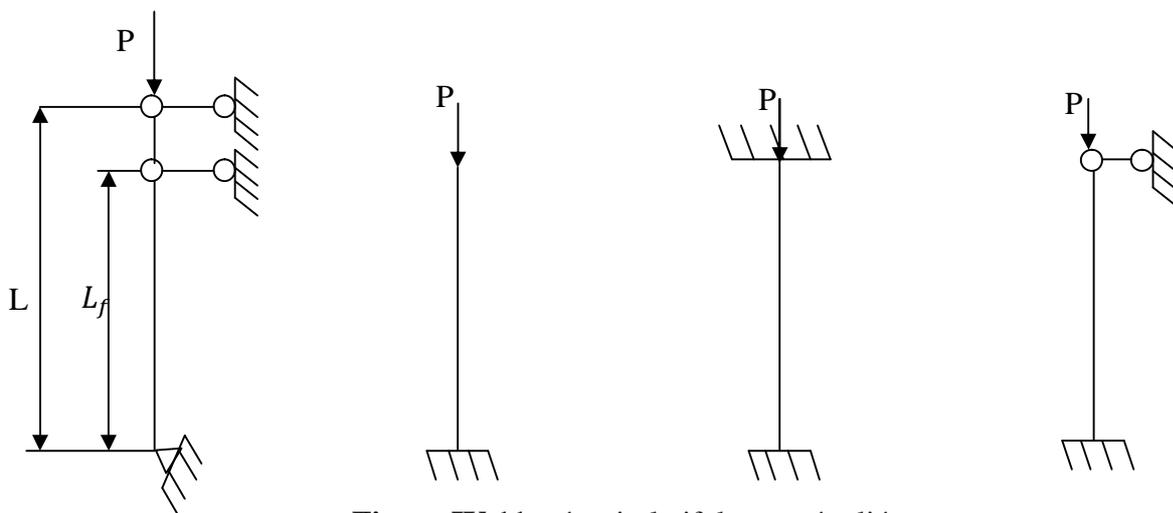


Figure IV.11: récapitulatif des cas étudiés

Le tableau IV.1 : représente les longueurs de flambement et les charges critiques associées aux figures précédentes

$L_f = L$	$L_f = 2L$	$L_f = \frac{L}{2}$	$L_f = \frac{2}{3}L$
$F_c = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2}$	$F_c = \frac{\pi^2 \cdot EI}{4L^2}$	$F_c = \frac{4\pi^2 \cdot EI}{L^2}$	$F_c = \frac{2\pi^2 \cdot EI}{L^2}$

Tableau IV.1 : récapitulatif des longueurs de flambement et les charges critiques

Il existe aussi des méthodes différentes de celles vues précédemment et qui se base sur l'énergie de déformation, elles sont appelées les méthodes énergétiques.

IV.4.3 : Détermination de la charge critique par les méthodes énergétiques [13]

La résolution des équations différentielles de l'équilibre, afin de satisfaire les conditions aux limites présente beaucoup de difficultés et ne peut être réalisée que pour des problèmes simples de flambement, pour des structures dont le nombre de degrés de liberté est faible ; c'est le cas des problèmes présentés et résolus, de cette manière, précédemment. Ce n'est plus cette approche, cependant qui sera prise en compte dans ce qui suit, celui-ci se base plutôt sur des méthodes énergétiques alternatives.

Quand on fait certaines hypothèses sur la nature de la déformation d'un système élastique pendant le changement de configuration associé à l'équilibre neutre (mode de flambement), le système élastique peut être approché en utilisant des paramètres adéquats et modifiables ou des coordonnées généralisées, déterminées de manière à remplir les conditions d'équilibre neutre. Cette idée est à la base des méthodes approchées, on présentera ici les plus connues de ces méthodes, à savoir les coefficients de Rayleigh, la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Galerkin.

IV.4.3.1 : Application des méthodes énergétiques :

Les méthodes énergétiques de résolution des problèmes de stabilité élastique sont basées sur le principe de l'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale à l'équilibre neutre.

Il est établi que : si on considère le changement ΔV de l'énergie totale V d'un système, d'une configuration d'équilibre de départ à une configuration voisine définie par un déplacement virtuel infiniment petit et cinématiquement admissible, alors la condition d'équilibre neutre est gouvernée par la deuxième variation $\delta^2 V$ de l'incrément V ,

C'est-à-dire :

$$\delta^2V = 0 = \text{minimum} \quad (\text{IV.43})$$

Généralement, quand on considère des structures en acier, on étudie la stabilité d'une structure sous un ensemble de charges extérieures en prenant en compte une déformation de flambement, f , depuis une configuration de départ et en faisant les calculs conformément à l'équation (IV.43), soit pour vérifier la stabilité de la configuration de départ, soit pour déterminer les valeurs critiques des charges extérieures conduisant à l'instabilité. La déformation f est exprimée comme une fonction d'une ou plusieurs variables indépendantes (généralement les coordonnées cartésiennes) ; par exemple, $f(x)$ en tant que déformée d'une poutre. Le changement de déformation d'un système à l'équilibre neutre (la déformation de flambement ou le mode de flambement) sera noté $f(X)$, où X représente le champ de coordonnées du système de référence utilisé (une, deux ou trois dimensions).

la fonction f peut être continue si le système est continu ou peut être définie par morceaux si le système est discret.

La résolution de l'équation (IV.43) nécessite l'évaluation de la fonction potentiel δ^2V par rapport à la fonction f , à l'intérieur d'un domaine d'intégration noté D (longueur, pour une poutre, surface, par exemple). Généralement δ^2V comprend des quantités quadratiques et homogènes de la déformation de flambement $f(X)$ et ses dérivées constitue une fonction linéaire des charges extérieures appliquées.

Si l'on introduit un coefficient multiplicateur de charge commun α , pour toutes les composantes du chargement et si on définit un chargement de référence $S1$ (correspondant à $\alpha = 1$), la charge à chaque instant est égale à :

$$S = \alpha S1 \quad (\text{IV.44})$$

Alors, d'une manière générale, la fonction δ^2V peut être évaluée par :

$$\delta^2V(f) = \int_D f(\alpha, X, f, f', f'') dD = 0 \quad (\text{IV.45})$$

La résolution de l'équation (IV.45) par rapport à f conduit à la détermination des valeurs des charges (par α) à l'équilibre neutre (qui sont les valeurs critiques des charges à partir desquelles la configuration du système devient instable).

IV.4.3.2: étude des méthodes énergétique :

IV.4.3.2.1 : méthode de coefficient de Rayleigh

Elle découle directement de l'équation (IV.43) ; la seconde variation δ^2V de l'énergie potentielle totale peut être exprimée de la manière suivante :

$$\Delta^2 V = \Delta^2 u(f) + \Delta^2 \Omega(f, S) \quad (\text{IV.46})$$

tel que :

$\Delta^2 u(f)$: énergie de déformation correspondant au mode de flambement (fonction homogène et quadratique de f).

$\Delta^2 \Omega(F, S)$: énergie potentielle due aux charges extérieures S (fonction linéaire de S et fonction quadratique et homogène de f). Elle est l'opposé du travail des forces extérieures correspondant au mode de flambement.

A l'équilibre neutre $\alpha = \alpha_{cr}$

L'équation (IV.44) devient $S = \alpha_{cr} S_1$; en remplace dans (IV.46) on trouve :

$$\Delta^2 V = \Delta^2 u(f) + \alpha_{cr} \cdot \Delta^2 \Omega(f, S_1) = 0 \quad \text{minimum} \quad (\text{IV.47})$$

Si la déformation de flambement f est connue alors le facteur multiplicateur de charge critique est donné par la relation suivante :

$$\alpha_{cr} = - \frac{\Delta^2 u(f)}{\Delta^2 \Omega(f, S_1)} \quad (\text{IV.48})$$

Considérant une approximation f_1 de f tel que f_1 est différente de f , le coefficient de charge critique α_{cr} est connue, on aura alors de la condition de minimum :

$$\Delta^2 V(f_1) = \Delta^2 u(f_1) + \alpha_{cr} \cdot \Delta^2 \Omega(f_1, S_1) > 0 \quad (\text{IV.49})$$

A partir des équations (IV.47) et (IV.49), on aura :

$$\alpha_{cr} = - \frac{\Delta^2 u(f)}{\Delta^2 \Omega(f, S_1)} < - \frac{\Delta^2 u(f_1)}{\Delta^2 \Omega(f_1, S_1)} \quad (\text{IV.50})$$

Donc :

$$\alpha_{cr} < \text{Min} \left[- \frac{\Delta^2 u(f_1)}{\Delta^2 \Omega(f_1, S_1)} \right] \quad (\text{IV.51})$$

Avec : $f_1 \neq f$

Le principe est que α_{cr} calculée en (IV.48) avec un déplacement différent de la vraie déformation de flambement, donnera une valeur supérieure à la valeur exacte.

Supposant que $f_1 = f + \varepsilon f_2$

Tel que f_2 un déplacement quelconque admissible et ε est une constante, on a :

$$\alpha_{cr} = - \frac{\Delta^2 u(f + \varepsilon f_2)}{\Delta^2 \Omega(f + \varepsilon f_2, S_1)} = - \frac{\Delta^2 u(f)}{\Delta^2 \Omega(f, S_1)} + 0(\varepsilon^2) \quad (\text{IV.52})$$

Où la quantité en $\varepsilon^2(0(\varepsilon^2))$ représente une erreur, ceci implique que une erreur du premier ordre de f donne une erreur de second ordre pour α_{cr} .

IV.4.3.2.2 : méthode de Rayleigh-Ritz :

La méthode de Rayleigh-Ritz suppose que la solution exacte $f(X)$ du problème décrit par l'équation (IV.45) peut être approchée par une combinaison linéaire de fonction correctement choisies $\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_n(X)$,

$$\Rightarrow f_n(X) = q_1 \phi_1(X) + q_2 \phi_2(X) + \dots + q_n \phi_n(X), \quad (\text{IV.53})$$

q : étant des constantes à déterminer et qui sont considérées comme les coordonnées généralisées (degrés de liberté) du système.

Quand $f(X)$ est approchée ainsi par $f_n(X)$, la fonction $\Delta^2 V$, devient une fonction quadratique de q ; l'équation (IV.45) peut alors s'écrire comme suit :

$$\Delta^2 V = \{q\}^T [a] \{q\} = 0 \quad (\text{IV.54})$$

$\{q\}$: étant le vecteur des q

$[a]$ une matrice dont les coefficients a_{ij} sont :

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (\text{IV.55})$$

Les coefficients a_{ij} sont des fonctions du facteur multiplicateur de charge α et des propriétés du système.

Si on prend le cas de configurations $[q] \neq 0$.

L'équation (IV.54) de l'équilibre neutre nécessite que $[a]$ soit singulière,

$$\Rightarrow \text{Det } [a] = 0$$

Cette condition donne une équation en α , de degré n , et la valeur positive la plus petite peut représenter le facteur multiplicateur de charge critique α_{cr} .

Choix des ϕ_i :

Elles sont choisies selon la connaissance et les hypothèses faites sur la nature de la déformation. Il faut qu'elles satisfassent les conditions aux limites forcées (géométrique) pour chaque q .

Si de plus les conditions aux limites naturelles (mécanique) par exemple la courbure, sont satisfaites, la méthode soit améliorée.

IV.4.3.2.3 : méthode de Galerkin :

Cette méthode nécessite pas d'écrire la forme variationnelle du problème en comparaison à celle de Rayleigh-Ritz. La méthode de Galerkin donne directement les solutions approchées des équations différentielles, c'est pour cela qu'elle est largement appliquée et est plus attractive en pratique.

L'équation différentielle d'un problème de flambement peut s'écrire :

$$L [f(X)] = 0 \quad (\text{IV.56})$$

Où : $f(X)$ représente la déformation de flambement et L un opérateur différentiel linéaire et homogène.

Supposons que la solution exacte $f(X)$ de l'équation (IV.56) est :

$$F(X) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \phi_j(X) \quad (\text{IV.57})$$

Elle est sous forme d'une série de fonction complète, et elle satisfait toutes les conditions aux limites.

Cette solution est exacte si $L [f(X)]$ est orthogonale à chaque terme de l'équation (IV.57), soit

$$\int_D L[f(X)] \phi_j(X) dD = 0 \quad j= 1,2,\dots \quad (\text{IV.58})$$

Supposons que la série de l'équation (IV.57) soit tronquée à un nombre fini de termes, n ,

on peut imposer n conditions d'orthogonalité, de la manière suivante :

$$\int_D L[\sum_{j=1}^n q_j \phi_j(X)] \phi_i(X) dD = 0 \quad (\text{IV.59})$$

$$i=1,2,\dots$$

L est un opérateur linéaires donc on peut écrire :

$$\sum_{j=1}^n q_j \int_D L[\phi_j(X)] \phi_i(X) dD = 0 \quad (\text{IV.60})$$

$$i=1,2,\dots$$

Ce qui donne :

$$f_n(X) = \sum_{j=1}^n q_j \phi_j(X) \quad (\text{IV.61})$$

(IV.61) est une solution approchée de l'équation différentielle.

La partie gauche de l'équation (IV.59) comprend les propriétés du système et les charges extérieures, est quadratique et homogène en q . Elle peut s'écrire sous la forme de l'équation (IV.53), de la méthode de Rayleigh-Ritz, et Les charges critiques, sont trouvées de la même manière que cette dernière.

IV.4.4 : Application des méthodes énergétiques :

Soit une poutre, encastree et articulée comme le montre le schéma (IV.12)

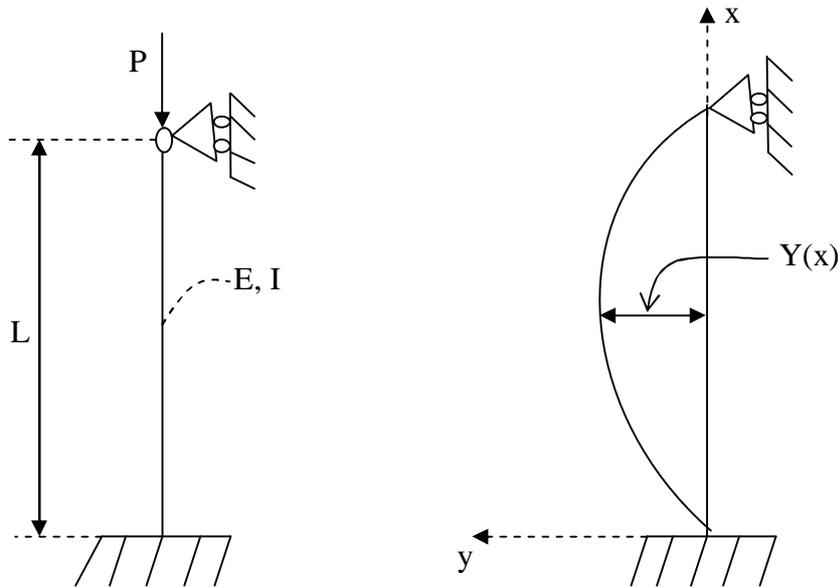


Figure IV.12 : Poutre sollicitée en flambement

-méthode de Rayleigh :

On choisit l'équation de la déformée satisfaisant les conditions aux limites suivantes :

$$Y(x) = a(X^2 - XL) \quad (\text{IV.65})$$

a: étant une constante non nulle.

La première dérivée :

$$y'(x) = a(2X - L)$$

La deuxième dérivée

$$y''(x) = 2a$$

L'intégration selon l'équation suivante :

$$\delta^2 \mu = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{d^2 y(x)}{dX} \right]^2 dX$$

Donne la variation de l'énergie de déformation

$$\delta^2 \mu = EIa^2L \quad (\text{IV.66})$$

La variation de l'énergie potentielle est l'opposé du travail de P.

Le déplacement vertical du point d'application de P est :

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2 y(x)}{dX} \right]^2 dX \quad (\text{IV.67})$$

La multiplication par P après l'intégration de cette équation donne la variation de l'énergie potentielle :

$$-P \varepsilon = -\frac{P a^2 L^3}{6} \quad (\text{IV.68})$$

Le coefficient multiplicateur de charge critique est :

$$\alpha_{cr} = \frac{2.a^2.EI.L}{\frac{P.a^2.L^3}{6}} = \frac{12.EI}{PL^2} \quad (IV.69)$$

On a $S = \alpha S_1$

Pour α_{cr} , la valeur de la charge critique est :

$$P_{cr} = \frac{12.EI}{L^2} \quad (IV.70)$$

Le déplacement de flambement exact vaut :

$$Y(x) = \theta_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

Et la charge critique correspondante est :

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} = 9.8696 \frac{EI}{L^2} \quad (IV.71)$$

En comparant les deux valeurs, on constate que, le déplacement de flambement parabolique n'est pas une bonne approximation du mode de flambement.

Par contre, si on choisit comme approximation la déformée d'une poutre simplement appuyée sous charge uniformément répartie :

$$Y(x) = a(x^4 - 2x^3L + xL) \quad (IV.72)$$

La charge critique aura pour valeur :

$$P_{cr} = 9.88 \frac{EI}{L^2} \quad (IV.73)$$

Ce qui est une valeur très proche de la valeur exact.

-méthode de Rayleigh-Ritz :

Choisir deux fonctions qui satisfassent les conditions aux limites, de coordonnées suivantes :

$$\phi_1(X) = X^2 - \frac{L^2}{4} \quad (IV.74)$$

$$\phi_2(X) = X^4 - \frac{L^4}{16}$$

La combinaison de ces deux fonctions donne le déplacement de flambement :

$$\begin{aligned} Y(X) &= a. \phi_1(X) + b. \phi_2(X) \\ &= a. \left[X^2 - \frac{L^2}{4} \right] + b. \left[X^4 - \frac{L^4}{16} \right] \end{aligned} \quad (IV.75)$$

La variation de l'énergie de déformation est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta^2 \mu &= 2. \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right]^2 dx \\ \delta^2 \mu &= EI \left(2 a^2 L + \frac{9}{10} b^2 L^5 + 2 a b L^3 \right) \end{aligned} \quad (IV.76)$$

La variation de l'énergie potentielle due à la charge de compression est :

$$\begin{aligned}\Delta^2 \Omega &= -2 \cdot \frac{1}{2} P \int_0^L \left[\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right]^2 dx \\ &= -P \left(\frac{1}{6} a^2 L^3 + \frac{1}{56} b^2 L^7 + \frac{1}{10} a b L^5 \right)\end{aligned}\quad (\text{IV.77})$$

De ces équations on aura :

$$\delta^2 V = a^2 (2EIL - \frac{PL^3}{6}) + b^2 (\frac{9EI L^5}{10} - \frac{PL^7}{56}) + ab (2EIL^3 - \frac{PL^5}{10}) \quad (\text{IV.78})$$

La matrice [a] est :

$$\begin{bmatrix} 4EIL - \frac{PL^3}{3} & 2EIL^3 - \frac{PL^5}{10} \\ 2EIL^3 - \frac{PL^5}{10} & \frac{9EI L^5}{5} - \frac{PL^7}{28} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de [a] est donnée par :

$$\text{Dét [a]} = (4EIL - \frac{PL^3}{3}) (\frac{9EI L^5}{5} - \frac{PL^7}{28}) - (2EIL^3 - \frac{PL^5}{10})^2.$$

La solution de l'équation $\text{dét [a]} = 0$, représente la charge critique :

$$P_{cr} = 9.875 \frac{EI}{L^2} \quad (\text{IV.79})$$

Qui est une valeur proche de la valeur exacte.

-La méthode de Galerkin :

L'approximation de la déformation de flambement et la convention de signe pour les coordonnées sont les mêmes que dans la méthode de Rayleigh-Ritz.

$$Y(X) = a \cdot \phi_1(X) + b \cdot \phi_2(X)$$

Tel que :

$$\phi_1(X) = X^2 - \frac{L^2}{4} \quad (\text{IV.80})$$

$$\phi_2(X) = X^4 - \frac{L^4}{16}$$

Ces deux approximations satisfassent les conditions aux limites qui sont :

$$Y = 0 \text{ pour } x = -\frac{L}{2} \text{ et } x = \frac{L}{2}$$

Pas de conditions imposées aux rotations des extrémités.

L'équation différentielle géant le flambement d'un élément en compression est donnée par :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0$$

De l'équation (IV.62), on obtient le système d'équation suivant et cela après la substitution des deux approximations :

$$\begin{aligned}2a \int_0^{\frac{L}{2}} (EI \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + P \phi_1) \phi_1 dx + 2b \int_0^{\frac{L}{2}} (EI \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} + P \phi_2) \phi_1 dx \\ 2a \int_0^{\frac{L}{2}} (EI \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + P \phi_1) \phi_2 dx + 2b \int_0^{\frac{L}{2}} (EI \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} + P \phi_2) \phi_2 dx\end{aligned}\quad (\text{IV.81})$$

On intégrant, on aura le système suivant :

$$a \left[\frac{PL^5}{30} - \frac{EIL^3}{3} \right] + b \left[\frac{PL^7}{105} - \frac{EIL^5}{10} \right]$$

$$a \left[\frac{PL^7}{105} - \frac{EIL^5}{10} \right] + b \left[\frac{PL^9}{360} - \frac{EIL^7}{28} \right]$$

On les met sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{PL^5}{30} - \frac{EIL^3}{3} & \frac{PL^7}{105} - \frac{EIL^5}{10} \\ \frac{PL^7}{105} - \frac{EIL^5}{10} & \frac{PL^9}{360} - \frac{EIL^7}{28} \end{bmatrix}$$

Si le déterminant de cette matrice est égal à zéro, soit :

$$\left(\frac{PL^5}{30} - \frac{EIL^3}{3} \right) \left(\frac{PL^9}{360} - \frac{EIL^7}{28} \right) - \left(\frac{PL^7}{105} - \frac{EIL^5}{10} \right)^2 = 0.$$

La solution la plus petite donne la charge critique :

$$P_{cr} = 9.8697 \frac{EI}{L^2} \quad (\text{IV.82})$$

Une valeur presque égale à la valeur exacte.

Les méthodes énergétiques fournissent des moyens pratiques de déterminer des chargements critiques pour la majorité des problèmes de stabilité. Les méthodes étudiées tel que le coefficient de Rayleigh, la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Galerkin, sont des méthodes connues qui peuvent généralement être appliquées manuellement à des problèmes simples de flambement.

IV.5 : réalité du phénomène du flambement [14]

Le flambement peut être dû à la présence des défauts reliés soit à l'application de la charge soit à l'existence des courbures initiales.

IV.5.1 : excentricité de la charge (figure IV.13)

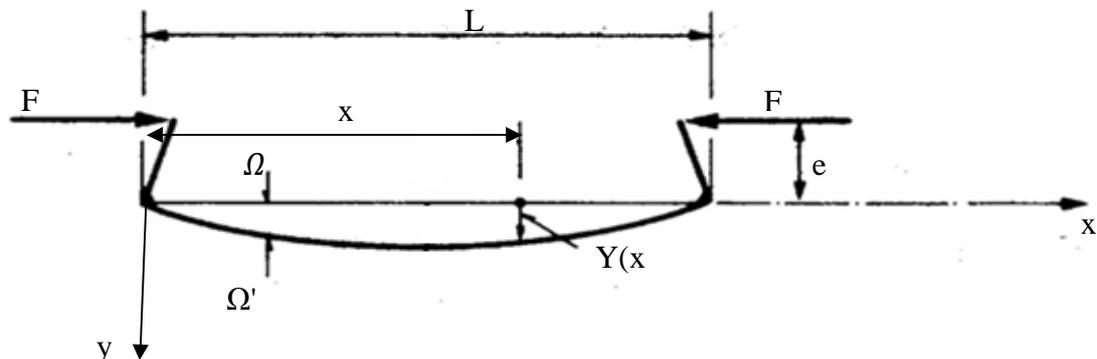


Figure IV.13 : Poutre comprimée excentriquement

Le moment fléchissant est :

$$M_f = F (y+e) \quad (\text{IV.83})$$

Equation de la déformée :

$$\begin{aligned} Y'' &= -\frac{Mf}{EI} \\ &= -\frac{F}{EI}(y + e) \end{aligned} \quad (\text{IV.84})$$

Posant $\omega^2 = \frac{F}{EI}$

L'équation (IV.84) devient :

$$Y'' + \omega^2 y + \omega^2 e = 0 \quad (\text{IV.85})$$

(IV.85) est une équation différentielle de deuxième ordre avec le second membre

La solution particulière est :

$$Y_1 = -e$$

La solution générale est :

$$Y = A \sin \omega x + \cos \omega x - e$$

A et B sont des constantes déterminées par l'application des conditions aux limites

$$Y(0) = 0 \Rightarrow A = -e$$

$$Y(L) = 0 \Rightarrow B = \frac{e(1 - \cos \omega L)}{\sin \omega L}$$

L'équation de la déformée devient alors :

$$Y(x) = e \left(1 - \frac{\cos \omega \left(\frac{L}{2} - x \right)}{\cos \omega \frac{L}{2}} \right) \quad (\text{IV.86})$$

La flèche est maximale au centre de la poutre :

$$Y_{\text{Max}} = e \cdot \left(\frac{1}{\cos \omega \frac{L}{2}} - 1 \right)$$

Le moment maximal est :

$$M_{\text{Max}} = \frac{Fe}{\cos \omega \frac{L}{2}}$$

D'après les équations précédentes, on remarque que le comportement du système n'est pas linéaire. La solution est croissante de ω

IV.5.2 : poutre avec courbure initiale

Considérant une poutre avec une flèche initiale, sollicitée à la compression comme le montre la figure IV.14

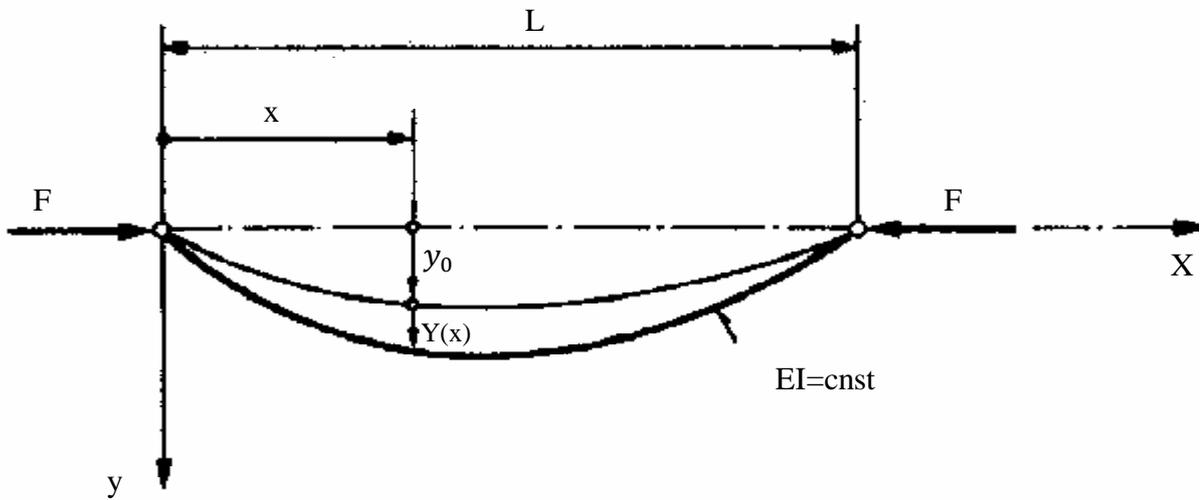


Figure IV.14 : Poutre comprimée avec courbure initiale

Le moment fléchissant est :

$$M_f = F (y + y_0). \quad (IV.87)$$

Equation de la déformée :

$$\begin{aligned} Y'' &= -\frac{M_f}{EI} \\ &= -\frac{F}{EI} (y + y_0) \end{aligned} \quad (IV.88)$$

Posant $\omega^2 = \frac{F}{EI}$

L'équation (IV.84) devient :

$$Y'' + \omega^2 y + \omega^2 y_0 = 0 \quad (IV.89)$$

La déformée initiale est :

$$Y_0(x) = a_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (IV.90)$$

L'équation (IV.88) devient :

$$Y'' + \omega^2 y + \omega^2 a_0 \sin \frac{\pi x}{L} = 0 \quad (IV.91)$$

De la même façon que précédemment, l'équation de la déformée est :

$$Y = \frac{a_0}{\frac{\pi^2}{\omega^2 L^2} - 1} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (IV.92)$$

La flèche maximale se trouve à $x = L/2$

$$Y(L/2) = \frac{a_0 \frac{F}{F_{Cr}}}{1 - \frac{F}{F_{Cr}}}$$

On remarque que la déformée dépend de la flèche initiale.

On conclut que quel que soit le défaut et quel que soit son amplitude provoque une augmentation de la solution lorsque la charge atteint la charge critique.

IV.6 : Résistance au flambement [12]

Se sont des formules basée sur l'élancement et l'élancement critique, certaines sont théoriques et d'autre expérimentales.

IV.6.1 : Elancement :

Le rapport entre la longueur et le rayon de giration, son importance est qu'il détermine si on doit calculer la structure en flambement ou en compression.

$$\lambda = \frac{L}{\rho} \quad (\text{IV.94})$$

Avec : $\rho = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{S}}$ est le rayon de giration de la section droite de surface S et du moment quadratique I_{Gz}

IV.6.2 : Elancement critique :

La charge critique d'Euler F_C est une limite à ne pas atteindre en aucun cas, alors un coefficient de sécurité a été définit pour que la charge axiale reste inférieure à F_C .

$$S_f = \frac{F_C}{F} \quad (\text{IV.95})$$

Ce coefficient dépend des conditions d'utilisation et du type de construction. En générale S_f est le double du coefficient de sécurité ordinaire

$$S = \frac{\sigma_e}{\sigma_{pc}} \quad (\text{IV.96})$$

σ_e : La limite élastique

σ_{pc} : Contrainte pratique de compression

$$\text{Donc : } S_f = 2s \implies F = \frac{\sigma_e}{2\sigma_{pc}} F_C \quad (\text{IV.97})$$

La combinaison des formules précédentes donne l'élancement critique :

$$\lambda_C = \sqrt{\frac{\pi E^2}{\sigma_e}} \quad (\text{IV.98})$$

La formule indique que l'élancement critique dépend que des caractéristiques mécaniques du matériau.

Ainsi pour un effort de compression donné, une pièce peut être menée à la ruine de deux manières différentes (en fonction de ses caractéristiques géométriques):

$\lambda < \lambda_C$: Ruine par compression

$\lambda > \lambda_C$: Ruine par flambement

IV.6.3 : Formule d'Euler :

La charge critique d'Euler est

$$F_C = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

La substitution de cette valeur dans (IV.86) donne :

$$F = \frac{\sigma_{pc} \cdot S}{2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2} \quad (\text{IV.99})$$

Où F est la charge limite admissible d'Euler

Cette expression est intéressante, car elle fait apparaître au numérateur la force axiale que l'on pourrait appliquer en compression simple et le dénominateur apparaît alors comme un terme correctif tenant compte de l'élanement λ de la poutre.

IV.6.4 : Formule de Rankine :

C'est une formule expérimentale qui a la forme suivante:

$$F = \frac{\sigma_{pc} \cdot S}{1 + 2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2} \quad (\text{IV.100})$$

IV.7 : Principe de l'essai de flexion par flambement

L'essai est de plus en plus utilisé pour la caractérisation du comportement en flexion des matériaux composites par rapport à celui de flexion trois et quatre points de fait qu'il ne présente pas des contraintes de contact dans la zone où la flexion est maximale.

L'essai consiste à imposer à une éprouvette parallélépipédique articulée à ses deux extrémités une sollicitation de compression axiale (figure IV.15).

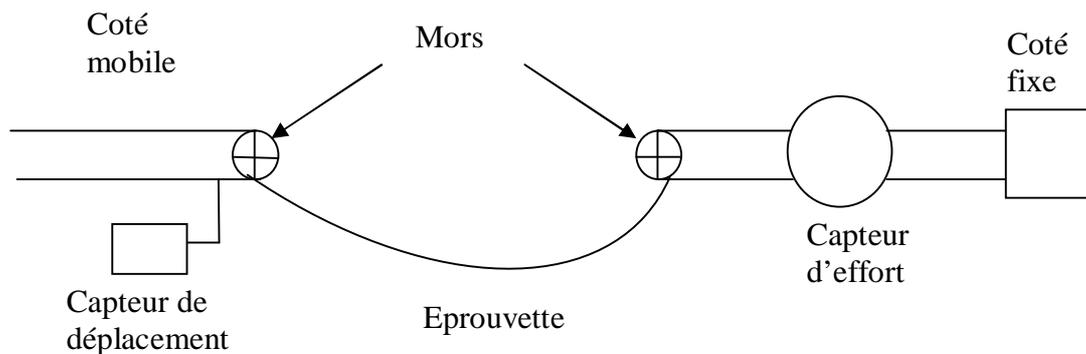


Figure IV.15 : Schémas du principe de l'essai de flexion par flambement

Pour une éprouvette élancée l'instabilité élastique se produit bien avant qu'une dégradation sous l'effet des contraintes de compression n'apparaisse.

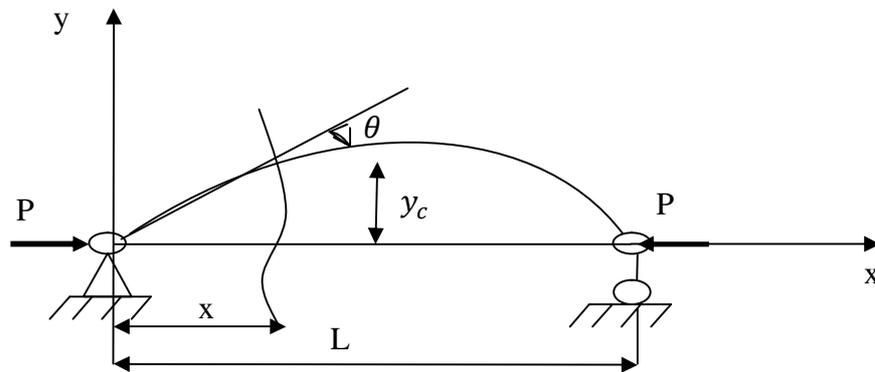


Figure IV.16 : Configuration du flambement

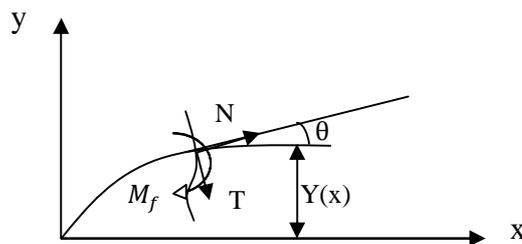


Figure IV.17 : Répartition des efforts sur section d'abscisse x

Dans cette configuration la charge appliquée crée au centre de l'éprouvette un moment fléchissant d'autant plus important que la courbure est grande, d'où la présence d'un phénomène d'instabilité élastique qui a une limite caractérisée par la charge critique d'Euler :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

IV.8 : étude comparative de l'essai de flexion trois point par rapport à l'essai de flexion par flambement

IV.8.1 : Comparaison des efforts intérieurs

Flexion par flambement :

Ils sont déterminés dans la configuration déformée.

$$N = P \cos \theta$$

$$T = P \sin \theta$$

$$M_f(x) = P \cdot y(x)$$

Flexion trois point :

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} \Rightarrow M_f = \frac{P}{2} x$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L \Rightarrow M_f = \frac{P}{2} x - P \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

Effort tranchant

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} \Rightarrow T = \frac{P}{2}$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{P}{2}$$

En flexion trois points la section où la flèche est maximale, il y a des contraintes de contact et de cisaillement qui s'ajoute.

En flambement l'effort normal est uniforme sur toute la structure et l'effort tranchant est nul

IV.8.2 : Comparaison des diagrammes des efforts intérieurs

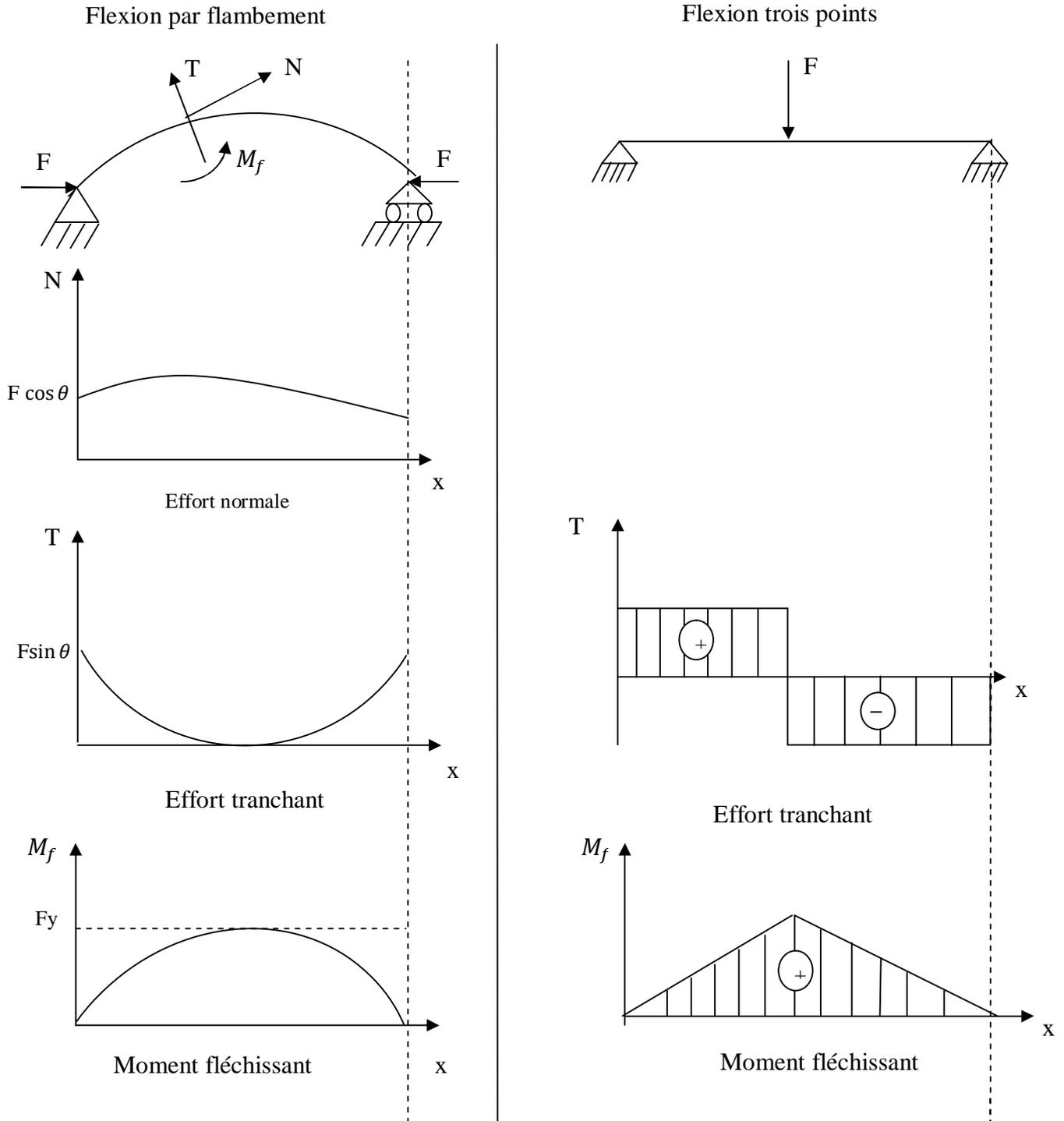


Figure IV.18 : Comparaison des diagrammes N, T et M_f entre l'essai de flexion trois points et par flambement

Conclusion

L'analyse de la répartition des efforts intérieurs de l'essai de flambement en comparaison à la flexion trois points montre les avantages d'utilisation de cette méthode:

- la section centrale de l'éprouvette est la plus fortement sollicitée en flexion. Elle est dégagée de sollicitation de cisaillement liée à l'effort tranchant,
- le moment de flexion est nul aux extrémités de l'éprouvette. Il n'y a donc pas de risque de rupture liée à un moment d'encastrement.
- Disparition des contraintes de contact

Conclusion générale

L'objectif présenté dans ce mémoire est de faire une analyse du flambement pour avoir des informations sur la réalité de ce dangereux phénomène et de dégager des formules pour la vérification des structures en flambement.

L'étude est focalisée sur les matériaux composites, introduits d'une manière générale dans le but de nos familiariser avec ces matériaux.

De plus on a énuméré les différents essais mécaniques tels que la traction, la compression, flexion trois et quatre points afin de caractériser ces matériaux et connaître leur comportement mécanique, mais on a remarqué que ces essais présentent des défauts et des effets indésirables, notamment la rupture prématurée en compression durant l'essai de flexion trois points en présence des contraintes de contact.

La détermination de la tenue en service d'un matériau composite à matrice ductile est délicate en flexion trois points. Les contraintes de contact générées peuvent masquer le comportement réel des matériaux.

A travers les alternatives présentées, l'essai de flexion par flambement permet de contourner les problèmes posés en flexion trois points.

Bibliographie

[1] Pierre Jacquinet

Utilisation des matériaux composites

Edition Hermès, Paris, 1991

[2] JEAN -PAUL BAÏLON et JEAN-MARIE DORLOT

Des matériaux

3^{ème} Edition, Ecole de Montréal, 2000.

[3] Stephan VACHER

Capteur fibre optique pour le contrôle de l'élaboration et la caractérisation mécanique des matériaux composites, Thèse

[4] Claude Bathias et Coll.

Matériaux composites. Dunod, Paris 2005

[5] Glossaire des matériaux composites

Carma, 2006

[6] Maurice REYNE

Technologie des composites

Edition HERMES, Paris, 1990

[7] DANIEL GAY

Matériaux composites

3^{ème} Edition revue et augmentée, HERMES 1991.

[8] IBRAHIM Mohamed Haisam

Elaboration des matériaux composites modèles unifilamentaire à fibres longues et matrice silice sil-gel et caractérisations micromécaniques de l'interface, Thèse de doctorat

Lyon 1997.

[9] Jean-Marie BERTHLOT

Matériaux composites, Comportement mécanique et analyse des structures

4^{ème} édition, Ed TEC&DOC, Lavoisier, 2005.

[10] Vincent Acary et Bernard Brogliato

Coefficients de restitution et efforts aux impacts

Revue et comparaison des estimations analytiques

Rapport de recherche, 2004

[11] Gérald Zambelli et léo Vincent

Matériaux et contact

Presses polytechniques et universitaire ramandes, 1998.

[12] H.NAILI et H.S.DIF

Caractérisation mécanique d'un matériau composite par flambement

Mémoire de fin d'étude

Promotion 2006, département de génie mécanique

[13] cours de stabilité appliquée

Ecole Nationale Supérieure d'arts et métiers

Centre régional de Cluny

[14] Bernard ETIENNE

Flambement

Version 3.0.01

22 septembre 2008