MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI TIZI-OUZOU
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : GENIE CIVIL

Option: Structures et Matériaux

THEME :

Localisation de l'endommagement dans un modèle élastique couplé à un second gradient de dommage

ETUDIE PAR M^ME^.TIACHACHT neé FERRAH Dehbia

Devant le jury composé de:

Mr :	ABED	Ahmed	Maitre de Conférences A U.M.M.T.O.	Président
Mr :	HANNACHI	Naceur Addine	Professeur U.M.M.T.O.	Rapporteur
Mr :	BALI	Abderrahim	Professeur ENP	Examinateur
Mr :	AIT TAHAR	Kamel	Professeur U.M.M.T.O.	Examinateur
Mr :	OULD OUALI	Mohand	Maitre de Conférences A U.M.M.T.O.	Examinateur

Soutenu le : 02 /05 /2012 .

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au laboratoire LAMOMS de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou,

Je tiens à remercier monsieur HANNACHI Naceur Eddine, professeur à l'université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou de m'avoir proposé ce sujet, de m'y avoir accueilli dans son Laboratoire.

Ma gratitude et mes sincères remerciements à monsieur M.ALMANSBA Maitre de conférences à l'université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou de m'avoir orienté, suivi de près et de loin jusqu'a la finalisation de ce travaille

Je présente mes sincères remerciements à messieurs les membres de jurys qui ont accepté de disposer de leurs temps pour pouvoir juger ce travail

Mes remerciements s'adressent aussi à toutes personnes ayant contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail, à ma grande famille, mon mari, et tous mes amis.

SOMMAIRE

Page

Introduction Générale 1

CHAPITRE I : COMPORTEMENT EXPERIMENTAL DU BETON

I.1. Introduction 3
I.2. Constitution du béton 3
I.3. Comportement en compression 4
I.4. Comportement en traction 5
  I.4.1. Essais de tractions indirectes 5
  I.4.2. Essais de tractions directes 6
I.5. Chargement cyclique de traction – compression 8
I.6. Effet d'échelle dans les structures en béton 9
I.7. Conclusion 10

CHAPITRE II : LA MECANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT

II.1. Introduction 11
II.2. Définition de la variable d'endommagement 12
  II.2.1. Endommagement isotrope 13
  II.2.2. Concept De Contrainte Effective 13
  II.2.3. Hypothèse d'équivalence en déformation 14
  II.2.4. Hypothèse d'équivalence en énergie élastique 15
  II.2.5. Hypothèse d'équivalence en énergie totale 16
II.3. Formulation thermodynamique de l'endommagement 18
    II.3.1. Choix des variables 18
    II.3.2. Potentiel thermodynamique loi d'état 19
    II.3.3. Potentiel de dissipation -loi d'évolution de l'endommagement 21
II.4. Modèle élastique endommageable de MAZARS (1984) 22
II.5. Conclusion 26

CHAPITRE III : APPROCHE NON LOCALE

III.1. Introduction 27
III.2. Limite de l'approche locale 27
  III.2. 1 Effets d'échelle 28
  III.2.2.Dégradations mécaniques et localisation des déformations 29
  III.2.3. Les matériaux quasi-fragiles (roches, bétons) 30
  III.2.4. Sensibilité des résultats au maillage 31
III.3. Extension des modèles locaux 33
    III.3.1. Base des modèles non locaux 33
    III.3.2. Théories non locales 33
III4. Modèle d'endommagement non-local de Pijaudier-Cabot et Bazant (1987) 35
III.5. Modèle non local intégral 36
III.6. Modèles avec effet du gradient 38
  III.6.1. Formulation explicite 38
  III.6.2. Formulation implicite 39
  III.6.2. Calcul du laplacien d'endommagement 41
III.9. Conclusion 42

CHAPITRE IV *:* METHODE DES ELEMENTS FINIS

IV.1. Introduction.. 43
IV.2. Aspects généraux de la méthode des éléments finis... 43
IV.2.1. Discrétisation géométrique 43
IV.2.2. Discrétisation de la forme variationnelle... 44
IV.3. Evaluation de la matrice de rigidité et du vecteur force élémentaire 46
IV.4. Assemblage et résolution.. 47
IV.5. Stratégie de résolution... 48
IV.6.Teste de convergence... 49
IV.7. Traitement numérique 49
IV.8. Élaboration du programme de calcul.. 50
IV.9. Conclusion..

CHAPITRE V : VALIDATIONS ET APPLICATIONS NUMERIQUES

V.1. Introduction.. 53
V.2. Le modèle de Mazars.. 53
V.3. Endommagement non-local.. 55
V.4. Application de la variable non-locale.. 56
V.5. Réponse d'un élément de volume sollicité en traction 59
V.5.1.Premier exemple.. 59
V.6. Application à une éprouvette en traction.. 63
V.6.1. Etude selon les différentes valeurs de la longueur interne *R*.. 64
V.6.2.Etude selon les differents maillages... 68
V.6.2.1.Etude selon les différents pas d'allongements.. 68
V.6.2.2.Rupture de la plaque pour les differents maillages dans le cas non local.... 72
V.7. Conclusion.. 74

CONCLUSION GENERALE.. 75

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I : COMPORTEMENT EXPERIMENTAL DU BETON		Page
Figure I.1	Courbe contrainte-déformation longitudinale.	4
Figure I.2	Courbe déformation longitudinale Ej - déformation transversale E2	5
Figure I.3	Essai de traction indirecte par flexion.	6
Figure I.4	Essai de traction indirecte par fendage.	6
Figure I.5	Comportement du béton en traction directe.	6
Figure I.6	Principe de l'essai P.I.E.D	7
Figure I.7	Traction uniaxiale du béton donnée par l'essai P.I.E.D	8
Figure I.8	Essai P.I.E.D : Comportement du béton sous chargement cyclique de traction Compression	8
Figure I.9	Géométries des éprouvettes prismatiques.	9
Figure I.10	Réponses contrainte-déformation en compression pour les différentes géométries	10
CHAPITRE II : LA MECANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT		
Figure II.1	Représentation de l'élément de volume endommagé	11
Figure II.2	Principe d'équivalence en déformation	15
Figure II.3	Modèle de Mazars, tracé de la surface seuil dans le plan des contraintes σ_1, σ_2	24
Figure II.4	Evolution des variables d'endommagement en traction et en Compression....	25
Figure II.5	Modèle de Mazars, comportement en traction et en compression,	26
CHAPITRE III : APPROCHE NON LOCALE		
Figure III.1	Géométries des éprouvettes et caractéristiques mécaniques du béton lors des expériences	28
Figure III.2	Flexion trois points. Réponses globales "force-déplacement.	29
Figure III.3	Essai de traction d'un béton	30
Figure III.4	a)Courbes force déplacement d'une éprouvette entaillé. b) évolution de la zone endommagée pour trois maillages différents	31
Figure III.5	Effet du raffinement du maillage au cours de la simulation d'un essai D'arrachement sur une éprouvette en Béton	32
Figure III.6	Influence du nombre d'élément sur l'épaisseur de la zone endommagée autour de l'armature	32
Figure III.7	Profil de déformation obtenu analytiquement avec le modèle non local intégral	37
Figure III.8	Zone d'influence de l'approximation diffuse	42
CHAPITRE IV : METHODE DES ELEMENTS FINIS		
Figure III.1.	Organigramme général du programme	52

CHAPITRE V : **Validations et applications numériques**

Figure V.1	Modèle de Mazars, comportement en traction et en compression...........	**55**
Figure V.2	Illustration géométrique du calcul de la variable non-local	**57**
Figure V.3	Exemple de distribution de la fonction de Gauss ψ.......................................	**58**
Figure V.4	Géométrie et chargement..	**59**
Figure V.5	Réponse globale Force- Déplacement au nœud n°4..	**60**
Figure V.6	Evolution de dommage en fonction de la déformation au P.G n°4	**60**
Figure V.7	Influences du paramètre A_t dans le cas local..	**61**
Figure V.8	Influences du paramètre A_t dans le cas non local..	**61**
Figure V.9	Influences du paramètre Bt dans le cas local...	**62**
Figure V.10	Influences du paramètre Bt dans le cas non local..	**62**
Figure V.11	La réponse local et globale du l'essai de traction et compression............	**63**
Figure V.12	Les conditions aux limites et les dimensions..	**64**
Figure V.13	Distribution du dommage local, de la déformation et de la contrainte de Von-Mises	**65**
Figure V.14	Distribution du dommage non local, de la déformation et de la contrainte de Von-Mises R=0.03...	**65**
Figure V.15	Distribution du dommage non local, de la déformation et de la contrainte de Von-Mises R=0.04...	**66**
Figure V.16	Distribution du dommage non local, de la déformation et de la contrainte de Von-MisesR=0.05..	**66**
Figure V.17	Courbe Force-Déplacement pour différentes valeurs de *R*................................	**67**
Figure V.18	Les différents maillages	**68**
Figure V.19	les isovaleurs pour le maillage M1 à 102 éléments	**69**
Figure V.20	les isovaleurs pour le maillage M2 à 210 éléments	**70**
Figure V.21	les isovaleurs pour le maillage M2 à 302 éléments...	**71**
Figure V.22	Distribution du dommage non local, de la déformation et de la contrainte de Von-Mises pour le maillage les différents maillages......................................	**72**
Figure V.23	Courbe force –déplacement local selon les différents maillages M1, M2 et M3..	**73**
Figure V.24	Courbe force –déplacement non local selon les différents maillages M1, M2 et M3...	**74**

NOTATIONS ET SYMBOLES

$\vec{n}$: La normale à la surface

ρ : La masse volumique

V : le volume du domaine

$\vec{V}$: La vitesse

f_v : Force volumique

f_S : Forces surfacique

$\vec{q}$: Vecteur courant de chaleur

σ : Contrainte

$\tilde{\sigma}$: Contraintes effectives

ε : Déformation totale

$\tilde{\varepsilon}$: Déformation équivalente

ε_{D_0} : Seuil initial de l'endommagement

S : L'entropie du système

s **:** Densité d'entropie spécifique

T **:** Température

ψ **:** Énergie libre spécifique

ε_e : Déformation élastique

ε_p : Déformation plastique

φ : Potentiel de dissipation

λ : Coefficient de lame

E : Le module de Young

$\tilde{E}$: Module d'élasticité du matériau endommagé

ν : Coefficient de poisson

D : variable d'endommagement

$\tilde{S}$: L'aire résistante effective

Y : Variable des forces thermodynamique

W : Energie élastique associée à la variation de l'endommagement

$\underline{\underline{\Lambda}}$: le tenseur de rigidité élastique

$\underline{\underline{\widetilde{\Lambda}}}$: Le tenseur de rigidité affecté par l'endommagement

$f(\tilde{\varepsilon}$,D) :fonction de seuil d'endommagement

$\{U\}$: Vecteur déplacement globale

(ξ,η) : Coordonnées paramétriques dans le référentiel local

(x,y) : Coordonnées paramétriques dans le référentiel réel

$[K^e]$: Matrice élémentaire de rigidité

$\{F\}$: Vecteur force

$[B(x,y)]$: Matrice des dérivées des fonctions de forme

t : L'épaisseur de la structure

[J] : Matrice de passage

N_{pg} : Nombre de point de gauss

W_p : Poids des points de gauss

N_i : Fonction d'interpolation

τ : Transformation géométrique

(ξ_p,η_q) : Coordonnées des points de gauss

R (U) : Le résidu global

λ_j : Facteur de charge

α : Fonction de l'état de contrainte

L(u), C(u) : opérateurs différentiels

{} : Vecteur

[] : Matrice

(:) : produit contracté deux fois Ω volume de la structure,

Résumé:

L'objet de ce travail est de présenter un modèle élastique à gradient d'endommagement. Une variable d'endommagement non local est développée pour permettre d'étudier et comparer la localisation de l'endommagement (éventuellement de la déformation et des contraintes sur des éprouvettes en chargement monotone). Un couplage fort comportement-endommagement basé sur l'hypothèse d'équivalence en énergie totale est utilisé pour décrire le comportement à écrouissage positif puis négatif (adoucissement). Le modèle est écrit dans un cadre thermodynamique, toutes les variables internes sont affectées par cette variable non locale d'endommagement$\overline{\mathrm{D}}$. Une application dans le cas d'une sollicitation simple en traction unidirectionnelle est étudiée afin de rendre compte l'effet de la longueur interne sur l'évolution de l'endommagement du matériau et la dépendance du maillage sur la réponse globale du comportement. Grâce à cette méthode de régularisation nous allons montrer que les valeurs non nulles de la longueur interne assurent l'indépendance de la solution vis-à-vis de la taille des éléments. Les différences entre approches locale et non locale sont discutées.

Abstract

The purpose of this paper is to present an elastic model gradient of damage. A non local damage variable is developed to allow study and compare the location of damage (possibly of the deformation and stresses on specimens loaded monotonically). Strong coupling behavior-damage based on the equivalence hypothesis in total energy is used to describe the hardening behavior positive and negative (softening). The model is written in a thermodynamics point of view, all internal variables are affected by this non-local damage variable$\overline{D}$. The case of a simple unidirectional tensile stress is studied to reflect the effect of the internal length on the evolution of the damage and the dependence of the mesh on the global response behavior. With this regularization method we show that the non-zero values of the internal length ensures the independence of the solution in comparison with the size of element. The differences between local and nonlocal approaches are discussed.

INTRODUCTION GENERALE

La simulation numérique du comportement des matériaux prend de plus en plus une grande place dans la recherche. Celle-ci par l'utilisation de logiciels de calculs qui permettent de mettre en place coté fixe de virtualisation des cas réels. L'efficacité de ces logiciels est caractérisée par le choix des méthodes utilisées. Le développement de ces méthodes de calcul est un domaine des sciences de l'ingénieur qui connaît de nombreuses applications . Leurs précisions et leurs fiabilités sont conditionnées par la validité des lois de comportement introduites pour décrire le comportement du matériau. A cet effet, il est souhaitable de disposer de lois physiquement justifiées et modélisant correctement les le comportement des matériaux pour l'utilisation de La mécanique de l'endommagement , qui s'inscrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (Lemaître et Chaboche, 1985), a ouvert une nouvelle voie de recherche pour résoudre ce type de problème, La mécanique continue de l'endommagement a en effet acquis de plus en plus d'intérêts et est devenue un outil prometteur pour la description de la dégradation et de prévoir aussi le comportement des matériaux jusqu'a la rupture. L'endommagement y est représenté par des variables d'état internes, scalaires ou tensorielles selon l'objectif à atteindre lors de la modélisation

Dans ce travail, nous proposons d'étudier et simuler le comportement du béton. Un couplage de comportement élastique endommagement non local est fait afin de prédire où et quand un endommagement significatif va avoir lieu. Les aspects théoriques et numériques liés à ce modèle seront traités.

Ce mémoire s'articule en cinq chapitres :

Le premier chapitre parcourt brièvement les principaux résultats d'expériences sur le comportement du béton rencontrés dans la littérature. Nous présentons les réponses obtenues en laboratoire pour des sollicitations telles que la compression et la traction. Quelques résultats d'essais sur l'étude de l'effet d'échelle sont également présentés.

Dans le deuxième chapitre, nous utilisons la mécanique de l'endommagement continu pour décrire la dégradation du milieu .cette approche associe aux phénomènes de dégradation une variable continue D sa force thermodynamique associe y traduit le taux de restitution de l'énergie élastique.

Le troisième chapitre fait état de quelques travaux sur la modélisation du comportement des matériaux endommageables en général et du béton en particulier. Nous passons en revue quelques difficultés liées à la numérisation des comportements adoucissants qui conduisent à des problèmes de dépendance du maillage lors de la discrétisation. Enfin nous présentons quelques propositions qui permettent de surmonter, totalement ou en partie, ces difficultés. Nous nous intéressons particulièrement au concept de formulation non locale en second gradient .La variable choisie ici est la variable d'endommagement non locale obtenue par une procédure d'intégration sur un volume élémentaire représentatif.

Dans le quatrième chapitre nous rappelons les équations constitutives du problème qui seront discrétisées par la suite, par la méthode des éléments finis ; nous obtenons un système d'équations qu'on résout par la méthode incrémentale pas à pas de Newton Raphson en déplacement impose

Dans le cinquième chapitre, nous proposons un exemple d'application pour la modélisation du comportement des structures. Nous mettons en évidence différentes propriétés des modèles issus de la formulation de l'endommagement avec gradient en calcul de structures.

CHAPITRE I

COMPORTEMENT EXPERIMENTAL DU BETON

I.1. Introduction

L'une des caractéristiques du béton est son comportement dissymétrique en traction et en compression .Ce comportement est fortement influencé par les mécanismes internes de fissuration qui conduisent à une perte de la raideur et à l'apparition des déformations permanentes.

Il serait intéressant de passer en revue quelques résultats tirés de l'abondante littérature qui traite les principaux aspects du comportement mécanique de ce matériau [1], [2], [3].

Une autre propriété du béton qui est essentielle en génie civil ; est l'effet d'échelle. Celui-ci se manifeste par une dépendance de la contrainte nominale maximale couramment évaluée à partir de la charge maximale supportée par une structure.Les observations expérimentales montrent que cette contrainte diminue avec la taille de la structure [4],

I.2. Constitution du béton

Ce matériau est constitué de :

- Granulats de différentes dimensions.
- La pâte de ciment liée aux granulats.
- Des défauts de liaisons pâte grains constitués par des microfissures dues au retrait et des cavités provenant des bulles d'air emprisonnées lors du moulage.

Le béton se fissure principalement par décohésion intra granulaire.

Cependant il est à constater que, sous pression hydrostatique élevée, une fissuration permet l'analyse aux rayons X et l'utilisation de méthodes acoustique permettent d'obtenir une vue d'ensemble du réseau de microfissuration. Ces études montent l'orientation du réseau de défauts selon les directions principales de sollicitation, cette constatation est faite tout particulièrement au voisinage de la rupture.

I.3. Comportement en compression

L'essai de compression uniaxiale du béton est un essai qui a largement été étudié afin de connaître la résistance maximale en compressionσ_c. Cette résistance maximale est en effet la caractéristique fondamentale de ce matériau sur le plan industriel.

Cet essai bénéficie d'une facilité de mise en œuvre expérimentale.

L'allure générale des courbes "contrainte-déformation" est similaire à celle présentée par l'exemple de la figure (1.1) [2]

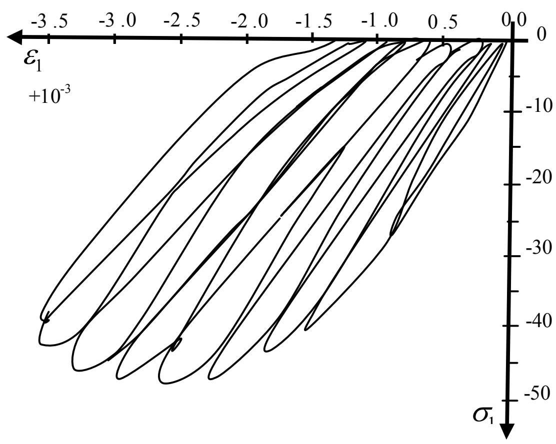


Figure I.1 : Courbe contrainte-déformation longitudinale (D'après Ramtani).

On peut constater sur cette courbe montre le comportement non linéaire du béton au-delà d'un certain seuil.

Les essais cycliques de charge-décharge à déplacement imposé figure(I.1), permettent d'obtenir d'autres renseignements pour chaque niveau de sollicitation : la variation de la raideur avec la charge, la variation du coefficient de Poisson ainsi que la mesure des déformations anélastiques permanentes (figure 1.2). Lors de la phase adoucissante du comportement du béton, on observe généralement l'apparition d'un réseau de microfissures sensiblement parallèles à la sollicitation en compression jusqu'à apparition de fissures macroscopiques [5], [6], [7].

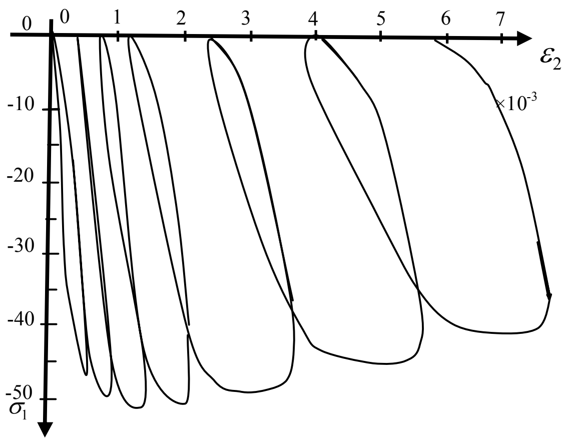


Figure I.2 : Courbe déformation longitudinale E1 - déformation transversale E2 (D'après Ramtani 90).

I.4. Comportement en traction

Le béton a une très faible résistance en traction. Ceci est d'ailleurs la raison pour laquelle il est considéré comme ayant une résistance nulle en traction lors des calculs réglementaires. Cependant, l'étude de ce comportement est nécessaire afin d'approfondir la connaissance de ce matériau en vue de sa modélisation.

Contrairement à l'essai de compression, la mise en œuvre d'un essai de traction directe est difficile. Le recours à des procédés d'évaluation indirecte de la résistance en traction devient alors nécessaire.

I.4.1. Essais de traction indirecte

Les essais permettant de mesurer la résistance en traction de façon indirecte sont le plus souvent l'essai de flexion et l'essai de fendage. **[8]**

Dans ces deux cas de chargement, des zones de traction créées sont confinées à l'intérieur des éprouvettes. L'hypothèse d'un comportement élastique jusqu'à la charge maximale supportée par une éprouvette permet, à l'aide de la théorie d'élasticité linéaire, d'évaluer la contrainte maximale en traction pouvant être supportée par le matériau **[5]**.

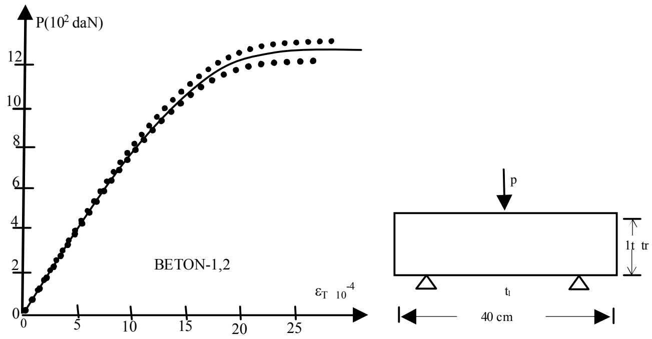


Figure I.3 : Essai de traction indirecte par flexion (d'après Saouridis 88).

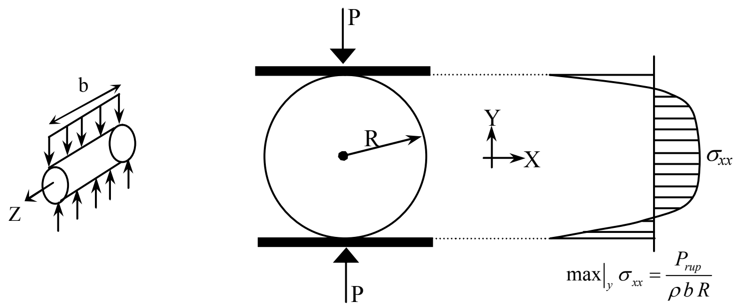


Figure I.4 : Essai de traction indirecte par fendage (d'après Davenne 89).

I.4.2. Essais de tractions directes

Ces essais sont difficiles à mettre en œuvre. C'est pour cela qu'il existe peu d'études réalisées sur ce mode de chargement. Toutefois, la réponse est en générale semblable à celle donnée par la figure (I.5) [3].

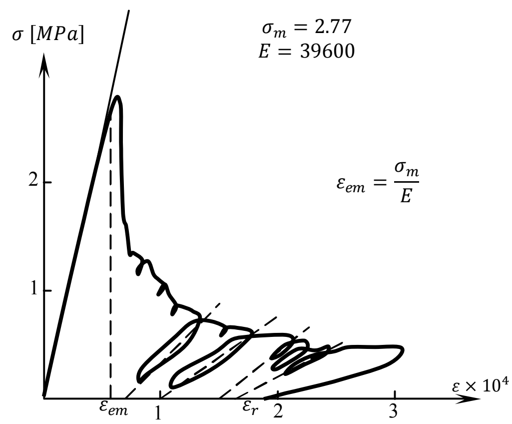


Figure I.5 : Comportement du béton en traction directe D'après (Terrien80).

Ce résultat nous permet de distinguer deux phases importantes du comportement du bêton

- dans la première phase, le comportement est élastique linéaire avec une légère perte de raideur juste avant d'atteindre la contrainte maximale *ft* ;
- dans la deuxième phase (phase adoucissante), après atteinte de la contrainte maximale, il est observé une chute presque brutale de la contrainte pouvant être supportée par l'éprouvette. Cette chute se prolonge ensuite d'une façon moins accentuée.

Les cycles de charge-décharge mettent en évidence, à chaque décharge, les déformations anélastiques ainsi que la perte de raideur du matériau.

Le comportement adoucissant du béton en traction peut également être obtenu grâce à un autre type d'essai. Cet essai est appelé "essai P.I.E.D" (Pour Identifier l'Endommagement Diffus). Il est réalisé de façon à maintenir un champ de déformations uniforme dans l'éprouvette. L'idée de base est due à L'Hermite [9], améliorée par Bazant et Pijaudier-Cabot [10].

L'effort est transmis au matériau testé en traction par des barrettes métalliques collées le long des faces latérales d'une éprouvette prismatique. Les principes de l'essai sont donnés sur la figure (I.6) Le comportement obtenu en traction est illustré sur la figure(I.7).

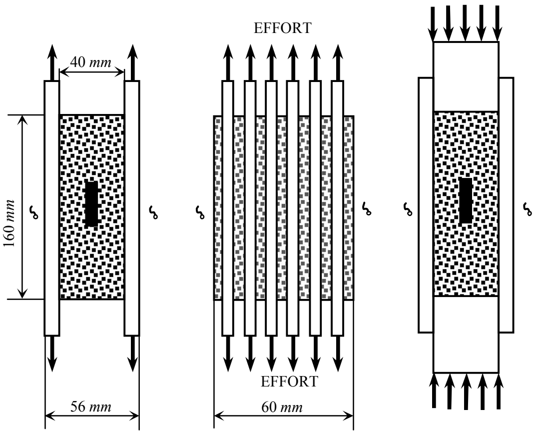


Figure I.6 : Principe de l'essai P.I.E.D (d'après Ramtani 90)

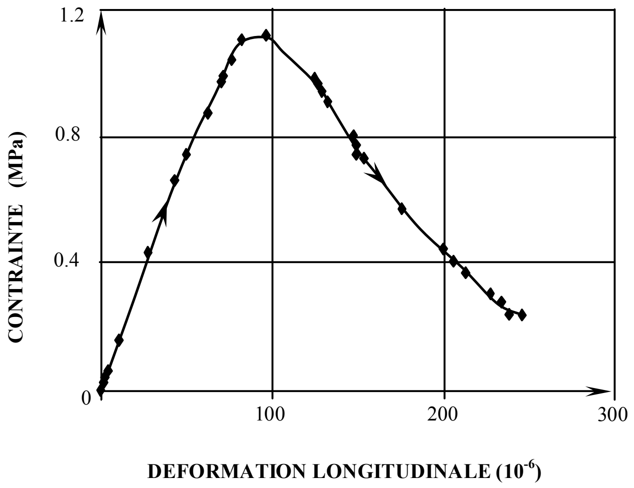


Figure I.7 : Traction uniaxiale du béton donnée par l'essai P.I.E.D (Ramtani 90)

Les mêmes constatations que celle de la figure (I.5) quant au comportement mécanique du béton en traction sont à faire pour le cas de l'essai P.I.E.D. On retrouve en effet les deux phases du comportement : dans la première, le comportement est quasi-linéaire et dans la deuxième, le comportement est adoucissant.

I.5. Chargement cyclique de traction - compression

Les essais cycliques de traction - compression (voir par exemple l'essai P.I.E.D - Pour Identifier l'Endommagement Diffus, [11], [2], [12] permettent de mettre en évidence le caractère unilatéral du comportement du béton.

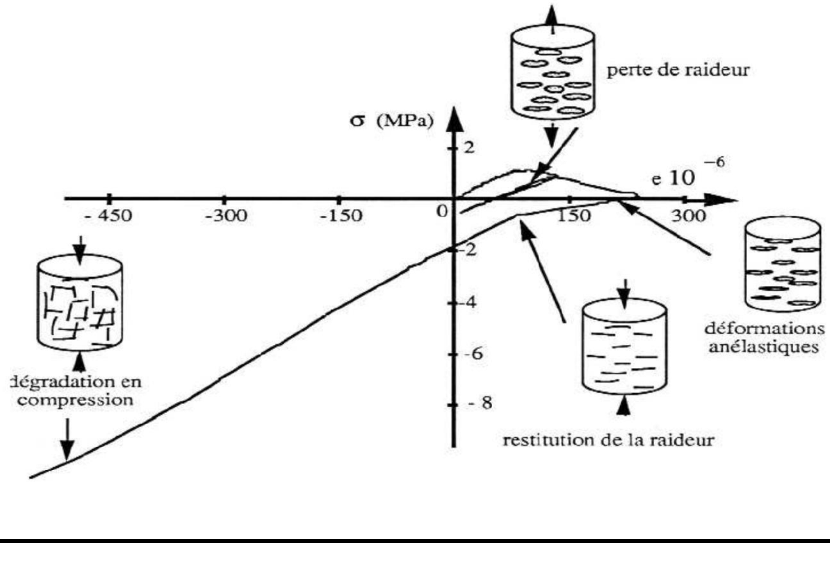


Figure I.8 :Essai P.I.E.D : Comportement du béton sous chargement cyclique de traction - Compression(Ramtani 90)

Il consiste en une restauration de la raideur lors du passage d'un chargement en traction, où cette raideur est initialement endommagée du fait de la fissuration, à un chargement en compression.Le béton retrouve sa raideur initiale grâce à la fermeture des fissures. [7]

I.6. Effet d'échelle dans les structures en béton

On pourrait penser que la connaissance des caractéristiques du béton au niveau des essais de laboratoire sur des éprouvettes de taille relativement faible par rapport aux tailles réelles, mènerait à une bonne évaluation du comportement des ouvrages. Or il se trouve que certaines caractéristiques mécaniques des structures changent quand les tailles de ces structures changent. Ceci est notamment le cas pour les contraintes nominales maximales ; c'est l'effet d'échelle [7].

La contrainte nominale maximale d'une structure en béton est la contrainte maximale dans cette structure calculée en supposant un comportement élastique linéaire. Elle est évaluée à partir de la charge maximale pouvant être supportée par la structure.

L'effet d'échelle est mis en évidence par divers types de sollicitation sur des éprouvettes et des structures en béton. A titre d'exemple la figure (I.9) représente les géométries d'éprouvettes prismatiques soumise à des compressions uniaxiales. Les résultats de ces essais sont donnés sur la figure

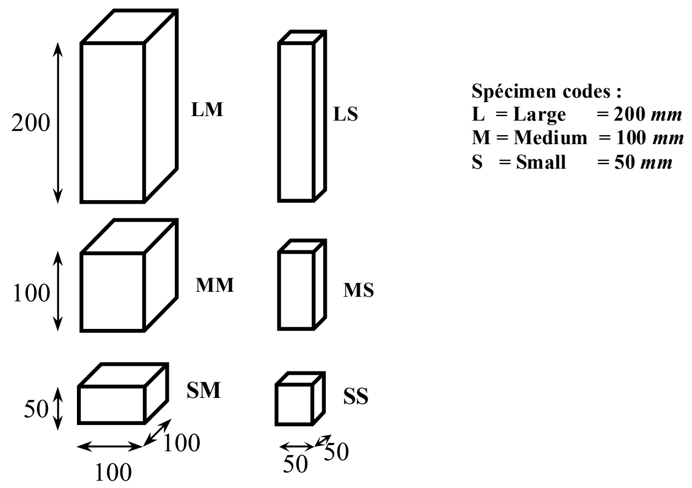


Figure I.9 : Géométries des éprouvettes prismatiques.

Lors d'essais uniaxiaux sur des éprouvettes en béton, il apparaît que la contrainte maximale supportée diminue quand la taille de l'éprouvette augmente **[13].** Ce cas particulier d'effet d'échelle, où les sollicitations sont uniformes dans toutes les éprouvettes, est aussi appelé effet de volume. [7]

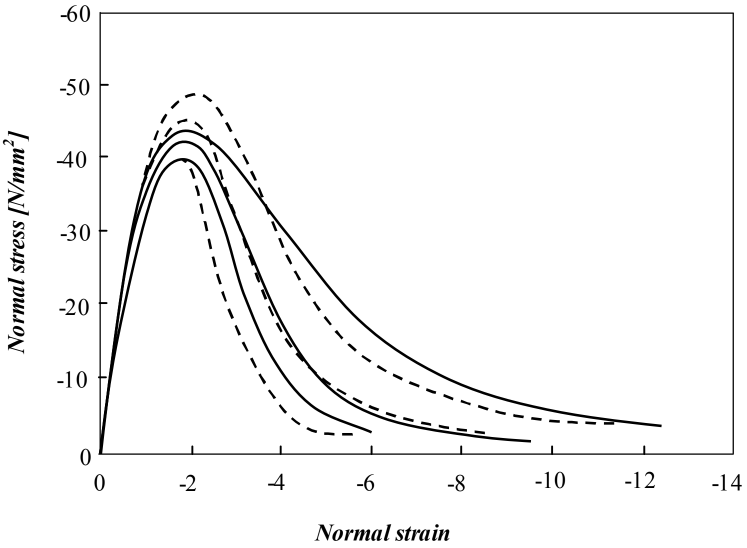


Figure I.10 : Réponses contrainte-déformation en compression pour les différentes géométries (Vonk93)

L'effet d'échelle peut être expliqué de la façon suivante : A l'échelle des granulats, l'hétérogénéité du béton par la présence de micro-défauts et de micro-vides d'orientation quelconques. Sous l'effet de chargement, les déformations se localisent rapidement dans les zones où il y a ces défauts. Plus les dimensions d'une structure sont grandes, plus il y est probable d'avoir la présence d'une importante proportion de défauts.

I.7. Conclusion

Le béton est, un matériau qui demeure très complexe, ce qui rend sa modélisation difficile, a l'issue de cette étude expérimentale, nous retenons essentiellement comme hypothèse de travail que, un comportement adoucissant en traction et en compression dû à la présence des micros défauts qui évoluent et coalescent, provoque une non linéarité du comportement.

CHAPITRE II

MECANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT

II.1. Introduction

Les modèles d'endommagement sont développes pour modéliser l'évolution des propriétés d'un matériau entre son état sain (initial) et l'amorçage d'une microfissure ayant la taille d'un volume élémentaire représentatif (V.E.R). En 1958, le premier modèle d'endommagement a été proposé par Kachanov, [17] .Il a décrit la détérioration des matériaux en introduisant une variable cachée continue d'endommagement. Cette notion a été reprise dans les années 70, principalement en France par P. Bažant [15]. Elle a été généralisée au cas tridimensionnel isotrope dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Sur la base de cette théorie, de nombreux modèles d'endommagement associés avec d'autres Phénomènes comme la plasticité ont été développés. Parmi ces modèles on peut citer ceux de Mazars [16], Kachanov, [17] Chaboche et Lemaitre [14], C.Saouridis [5].

Dans ce chapitre, nous abordons la mécanique de l'endommagement sur le plan macroscopique en considérant le milieu endommagé, comme un milieu globalement homogène et continu ,un rappele sur les concepts de base, les notions de contrainte effective et le principe d'équivalence en déformation, et enfin, nous allons écrire la formulation thermodynamique dans le cas d'un matériau élastique, homogène et isotope.

II.2. Définition de la variable d'endommagement

La définition d'une variable d'endommagement est nécessaire, ceci afin de pouvoir l'utiliser dans une loi de comportement. Cette variable doit représenter l'état de détérioration du matériau. **Kachanov (1958)** a considéré une structure endommagée dans laquelle il isole l'élément de volume auquel il appliquera la mécanique de l'endommagement

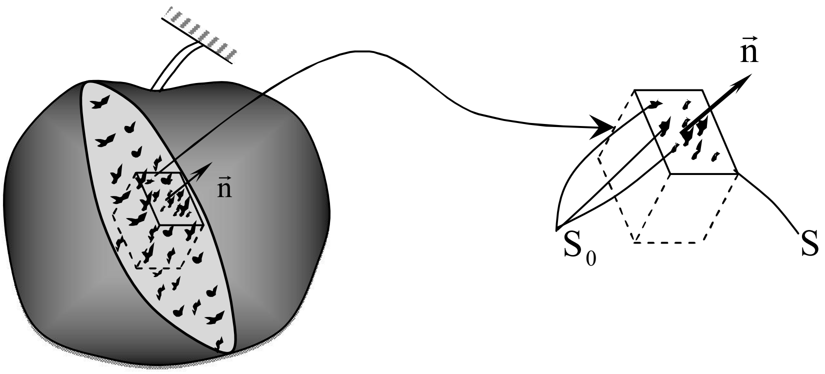


Figure II.1 : Représentation de l'élément de volume endommagé

Nous écrivons

$$S_D = S - \tilde{S} \qquad \text{[II.1]}$$

S_D : : L'aire totale de l'ensemble des traces des défauts

$\tilde{S}$: L'aire résistante.

S : L'aire du solide.

L'endommagement D_n en un point M dans une direction $\vec{n}$, est défini par le rapport de la surface S_D de la trace des défauts dans le plan perpendiculaire à $\vec{n}$ sur la surface S dans laquelle ces défauts se trouvent

$$D_n = \frac{S_D}{S} \qquad \text{[II.2]}$$

D'un point de vue physique la variable endommagement D_n est donc l'aire relative (corrige) des fissures et cavités coupées par le plan normal à la direction $\vec{n}$

D'un point de vue mathématique, en faisant tendre S vers 0, la variable D_n est la densité surfacique (corrigée) des discontinuités de la matière dans le plan normal à $\vec{n}$

Par conséquent :

$D_n = 0$ Correspond à l'état vierge (sain).

$D_n = 1$ Correspond à l'élément de volume rompu selon le plan normal à $\vec{n}$.

$0 \leq D_n \leq 1$ Caractérise l'état de l'endommagement.

II.2.1. Endommagement isotrope

Un endommagement isotrope est constitué de fissures et cavités dont l'orientation est distribuée uniformément dans toutes les directions. Dans ce cas la variable D_n ne dépend pas de l'orientation de $\vec{n}$.

On écrit que :

$$D_n = D \quad , \quad \forall \ \vec{n} \qquad \text{[II.3]}$$

II.2.2. Concept de contrainte effective

Kachanov [17] et Rabotnov [18] ont introduit le concept de la contrainte effective en 1968. Cette hypothèse implique que toute loi de comportement d'un matériau endommagé s'écrit de la même manière que pour ce matériau vierge en remplaçant la contrainte usuelle par la contrainte effective.

Dans le cas particulier d'un élément de volume soumis à un état de traction pure par un effort F la contrainte usuelle est celle qui satisfait les équations d'équilibre

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad \text{[II.4]}$$

En présence d'un endommagement isotrope de mesure D, la section résistante effective est :

$$\tilde{S} = S - S_D = S(1-D). \qquad \text{[II.5]}$$

Par définition de la contrainte effective $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} = \frac{F}{S(1-D)} \Rightarrow \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)} \qquad \text{[II.6]}$$

On a évidemment $\tilde{\sigma} \geq \sigma$.

Si $\tilde{\sigma} = \sigma$ le matériau est à l'état vierge $(D = 0)$.

Si $\tilde{\sigma} \to \infty$ le matériau est rompu $(D = 1)$.

Le tenseur de contrainte effective $\tilde{\sigma}$ est celui qu'il faudra appliquer à l'E.V.R vierge afin d'obtenir la même déformation que dans l'EVR endommagé soumis à la contrainte actuelle σ. En élasticité, la fonctionnelle donnant la déformation en fonction des contraintes est définie par :

$$\underline{\sigma} = \Im(\underline{\varepsilon}) \Rightarrow \underline{\sigma} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\varepsilon}^e \qquad \text{[II.7]}$$

Tandis que celle du milieu endommagé est donnée par :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} : \underline{\varepsilon}^{e} \qquad \textbf{[II.8]}$$

Où

$\underline{\underline{\Lambda}}$:le tenseur de rigidité d'ordre "4" d'un milieu sain

$\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} = \underline{\underline{\Lambda}}(D)$: Le tenseur de rigidité d'ordre "4" d'un milieu endommagé.

En éliminant la déformation élastique $\underline{\varepsilon}^{e}$ des deux équations, on obtient la relation :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{M}}^{-1} : \underline{\sigma} \qquad \textbf{[II.9]}$$

Avec : $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} : \underline{\underline{\Lambda}}^{-1}$

Où : M est l'opérateur d'effet du dommage d'ordre quatre qui permet de passer du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ au tenseur des contraintes effectives $\underline{\tilde{\sigma}}$, dans le cas où l'endommagement est nul, on retrouve

$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}}$

Avec la définition $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} : \underline{\underline{\Lambda}}^{-1}$du tenseur M, il faut veiller à la symétrie de l'opérateur d'élasticité du milieu endommagé $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}$. On est souvent conduit, dans le cadre de l'hypothèse de l'équivalence en déformation à symétriser. **[19]**

$$\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Lambda}} + \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{M}}^{T}\right) \qquad \textbf{[II.10]}$$

II.2.3. Hypothèse d'équivalence en déformation

Le principe d'équivalence en déformation traduit le fait que l'on obtient la même déformation sur le matériau en lui appliquant la contrainte effective $\tilde{\sigma}$ et celle du matériau endommagé en lui appliquant la contrainte usuelle. Si bien que la déformation de l'élément endommager est :

$$\varepsilon = \Lambda^{-1} : \tilde{\sigma} = \Lambda^{-1} : \frac{\sigma}{(1-D)} = \left[\tilde{\Lambda}^{-1}\right] : \sigma \qquad \textbf{[II.11]}$$

où

$\tilde{\Lambda} : (1-D)\Lambda$ est le tenseur de rigidité d'ordre quatre du milieu endommage

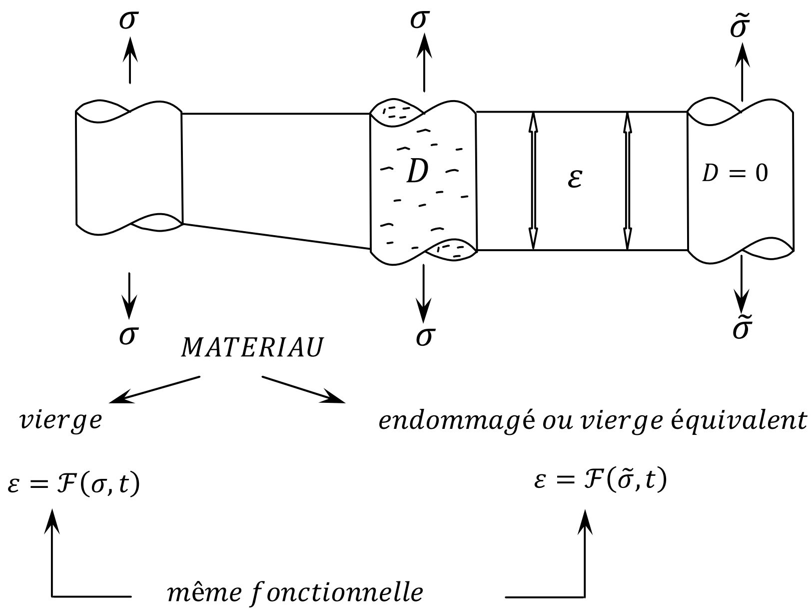


Figure II.2 : Principe d'équivalence en déformation

II.2.4. Hypothèse d'équivalence en énergie élastique

L'hypothèse d'équivalence en énergie élastique de la quelle dérive la déformation élastique est donnée par :

$$W_e = \frac{1}{2}\underline{\sigma} : \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\sigma} = \frac{1}{2}\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^e \qquad \textbf{[II.12]}$$

$$\underline{\varepsilon}^e = \frac{\partial W_e}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\sigma} \qquad \textbf{[II.13]}$$

La déformation de l'élément endommagé est donnée par le même potentiel, mais écrit en fonction de la contrainte effective :

$$\tilde{W}_e = \frac{1}{2}\underline{\tilde{\sigma}} : \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{2}\underline{\tilde{\sigma}} : \underline{\varepsilon}^e \qquad \textbf{[II.14]}$$

$$\underline{\varepsilon}^{e} = \frac{\partial \tilde{W}_e}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^{-1} : \underline{\sigma} \qquad \textbf{[II.15]}$$

Cette inégalité est satisfaite dés que l'on choisi

$$\begin{cases} \underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{M}}^{-1} : \underline{\sigma} \\ \underline{\varepsilon}^{e} = \underline{\underline{M}}^{T} : \underline{\varepsilon}^{e} \end{cases} \qquad \textbf{[II.16]}$$

L'exploitation de l'équation **[II.14]** passe par la donnée de la contrainte effective $\underline{\tilde{\sigma}}$ en fonction d'un tenseur de dommage et du tenseur des contraintes du milieu sain.

II.2.5.Hypothèse d'équivalence en énergie totale

L'équivalence en énergie élastique conduit à écrire :

$$W_e = \frac{1}{2}\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^{e} = \frac{1}{2}\underline{\tilde{\sigma}} : \underline{\tilde{\varepsilon}}^{e} \qquad \textbf{[II.17]}$$

Cette égalité est satisfaite dès que l'on écrit la contrainte effective sous la forme

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{M}}^{-1} : \underline{\sigma} \qquad \textbf{[II.18]}$$

Et nécessairement la déformation effective sous la forme:

$$\underline{\tilde{\varepsilon}}^{e} = \underline{\underline{M}}^{-T} : \underline{\varepsilon}^{e} \qquad \textbf{[II.19]}$$

Où :

$\underline{\underline{M}}$ s'appelle le tenseur d'effet du dommage.

La rigidité $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}$ et la souplesse $\underline{\underline{\tilde{S}}}$ du milieu endommagé s'écrivent alors sous la forme :

$$\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{M}}^T \qquad \text{[II.20]}$$

$$\underline{\underline{\tilde{S}}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \underline{\underline{M}}^{-T} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{M}}^{-1} \qquad \text{[II.21]}$$

Cette approche d'équivalence en énergie surtout utilisée avec un tenseur d'endommagement "D" d'ordre « 2 » D définit directement le tenseur d'effet du dommage. $\underline{\underline{M}}(D)$. Du fait de sa Simplicité mathématique, le tenseur "D" est largement utilisé pour l'étude des problèmes d'endommagement incluant l'élasticité **[20], directions** principales orthogonales et ses valeurs principales correspondantes.
On écrira par exemple le principe d'équivalence, en énergie irréversible bloquée dans le milieu vierge sous la forme. **[19]**

$$W_{cir}^b = \sum \frac{1}{2} \underline{\alpha} : \underline{c} : \underline{\alpha} = \frac{1}{2} \underline{X} : \underline{\alpha} \qquad \text{[II.22]}$$

et dans le milieu endommagé :

$$\begin{aligned} W_{cir}^b &= \sum \frac{1}{2}\ \underline{\alpha} : \underline{c} : \underline{\alpha} = \frac{1}{2} \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{N}}^T : \underline{\alpha} \\ &= \sum \frac{1}{2}\ \underline{\tilde{\alpha}} : \underline{c} : \underline{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{2} \underline{\tilde{X}} : \underline{\tilde{\alpha}} \end{aligned} \qquad \text{[II.23]}$$

Ce qui entraîne les relations:

$$\tilde{X} = \underline{\underline{N}}^{-1} : \underline{X}$$

$$\underline{\tilde{\alpha}} = \underline{\underline{N}}^T : \underline{\alpha}$$

[II.24]

Où : les opérateurs $\underline{\underline{\tilde{C}}}$et $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}$ seront définis plus tard lorsque le tenseur (ou scalaire) du dommage aura été défini. l'anisotropie de l'écrouissage cinématique est défini alors par :

$$\underline{\underline{\tilde{C}}} = \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{N}}^T$$

[II.25]

N : étant l'opérateur d'effet du dommage pour l'écrouissage cinématique. Par simplification pour la suite on considérera que M et N sont égaux.

Pour l'écrouissage isotrope, l'équivalence en énergie bloquée donne :

$$W_{iso}^{b} = \frac{1}{2}Rr = \frac{1}{2}r.Q.r = \frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{r} = \frac{1}{2}\tilde{r}.Q.\tilde{r} = \frac{1}{2}r.\tilde{Q}.r = W_{iso}^{b} \qquad [II.26]$$

Entraînant les relations :

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \frac{R}{\sqrt{1-\|D\|r}} \\ \tilde{r} &= \sqrt{1-\|D\|r} \\ \tilde{Q} &= \sqrt{1-\|D\|Q} \end{aligned} \qquad [II.27]$$

Où : $\tilde{Q}$ et Qsont respectivement les modules d'écrouissage du milieu endommagé et du milieu sain, D définissant une norme appropriée du tenseur d'endommagement (dans le cas où D est un tenseur d'ordre un ou plus). Dans la suite, on écrira que :

$$L(D) = \sqrt{1-\|D\|} \qquad [II.28]$$

II.3. Formulation thermodynamique de l'endommagement

Le comportement élastique endommagé est décrit par des variables d'état. Celles-ci comprennent la variable observable, la déformation et la variable interne choisie pour représente le phénomène dissipatif, l'endommagement D

II.3.1. Choix des variables

Les variables d'état sont les variables dont les valeurs définissent à chaque instant l'état de la matière pour les phénomènes étudiés. Elles comprennent les variables observables et les variables internes.

- La variable observable est la déformation élastique « ε^{e} »
- La variable interne choisie pour représenter les phénomènes dissipatifs est l'endommagement « D »

II.3.2. Potentiel thermodynamique loi d'état

L'inégalité de CLAUSIUS dans le cas général s'écrit :

$$\left[\sigma-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right]\dot{\varepsilon}-\rho\left[S+\frac{\partial\psi}{\partial T}\right]\dot{T}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial D}\dot{D}-\frac{\vec{q}}{T}\overrightarrow{gradT}\geq 0 \qquad \textbf{[II.29]}$$

Avec

ψ : L'énergie libre spécifique

Les hypothèses de Collemann [21] permettent d'annuler indépendamment certains termes de cette inégalité. Soit une transformation isotherme ($\dot{T}$ = 0) et uniforme ($\overrightarrow{gradT}$ = 0) qui ne modifie en rien les variables internes ($\dot{D}=0$).

L'inégalité de CLAUSIUS doit être vérifiée quel que soit $\dot{\varepsilon}$; cela implique

$$\sigma=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} \qquad \textbf{[II.30]}$$

Soit une transformation thermique de dilatation telle que $\dot{\varepsilon}$= 0, $\dot{D}=0$, $\overrightarrow{gradT}$ = 0 qui impose à l'inégalité de n'être vérifiée que si :

$$S=-\frac{\partial\psi}{\partial T}$$

[II.31]

Ces deux expressions définissent les lois fondamentales de la thermoélectricité

Par analogie avec les relations précédentes, on définit la variable thermodynamique associée à la variable interne d'endommagement par :

$$Y=\rho\frac{\partial\psi}{\partial D} \qquad \textbf{[II.32]}$$

L'hypothèse d'un potentiel thermodynamique fonction des variables d'état précitées permet de définir les variables associées à celle-ci. On choisit comme potentiel thermodynamique l'énergie libre spécifique $\psi(\varepsilon, D)$. [14]

$$\psi = \frac{1}{2\rho}(1 - D)\Lambda : \varepsilon : \varepsilon$$

[II.33]

ρ : étant constante dans une transformation isotherme.

La donnée de ce potentiel thermodynamique fournit la loi de l'élasticité du matériau endommagé. Donc de la relation **(II.9)** et **(II.12)** on aura :

$$\sigma = (1-D)\Lambda : \varepsilon = \tilde{\Lambda} : \varepsilon \qquad \text{[II.34]}$$

Qui est bien de la forme

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} = \Lambda : \varepsilon \qquad \text{[II.35]}$$

La variable thermodynamique associée à l'endommagement dans le cas de l'élasticité parfaite est donnée par :

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{1}{2}\Lambda : \varepsilon : \varepsilon$$

[II.36]

Nous pouvons montrer facilement que Y est aussi égal à la moitié de la variation de l'énergie élastique *W* associée à la variable d'endommagement, à température et à contrainte constante. Pour cela nous écrirons d'abord l'expression de la contrainte donnée par :

$$\sigma = (1 - D)\Lambda : \varepsilon \qquad \text{[II.37]}$$

Sachant que $d\sigma = 0$; on peut déduire que :

$$d\varepsilon = \varepsilon \frac{dD}{1-D}$$ [II.38]

Or on a:

$$dW_e = \sigma : d\varepsilon$$ [II.39]

$$\Rightarrow \left.\frac{dW_e}{dD}\right]_{\sigma,T=cte} = \Lambda : \varepsilon : \varepsilon$$ [II.40]

On remarque que ceci n'est rien d'autre que 2Y d'où :

$$Y = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial W_e}{\partial D}\right]_{\sigma,T}$$ [II.41]

Y : étant dit taux de restitution de l'énergie élastique.

II.3.3.Potentiel de dissipation - loi d'évolution de l'endommagement :

L'inégalité de Clausius-Duhem dans le cas générale s'écrit :

$$\left[\sigma - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right]\dot{\varepsilon} - \rho\left[S + \frac{\partial\psi}{\partial T}\right]\dot{T} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial D}\dot{D} - \frac{\vec{q}}{T}\overrightarrow{gradT} \geq 0$$ [II.42]

En se limitant aux transformations isothermes, où la température est uniforme

($\overrightarrow{gradT}$ =0), et en tenant compte des équations (II.9) et (II.10) l'inégalité va se réduire à :

$$-\rho\frac{\partial\psi}{\partial D}\dot{D} \geq 0$$ [II.43]

Avec

$$Y = \rho\frac{\partial\psi}{\partial D}$$

On aura

$$Y.\dot{D} \geq 0$$ [II.44]

$(-Y)$ Étant une forme quadratique définit positive ceci impose que

$$\dot{D} \geq 0 \qquad \text{[II.45]}$$

⇒L'endommagement ne peut donc que croître ou rester constant.

L'hypothèse du potentiel de dissipation, fonction convexe de la variable associée à la variable flux (Y) et les variables d'état (ε, D) conduit à la loi d'évolution de l'endommagement.

$$\dot{D} = -\dot{\lambda}\frac{d\varphi}{dY} \qquad \text{[II.46]}$$

$\dot{\lambda}$: étant un multiplicateur scalaire de l'endommagement.

Dans le cas des hypothèses introduites, la forme la plus générale de loi de comportement de l'endommagement est :

$$\dot{D} = f(Y, \varepsilon, D) \qquad \text{[II.47]}$$

La question qui se pose alors est de savoir quand et comment évolue l'endommagement ?

Pour cela, plusieurs modèles élastique endommageables ont été proposés en fonction du phénomène à modéliser, nous présentons le modèle de MAZARS.

II.4. Modèle élastique endommageable de MAZARS (1984)

C'est le premier modèle 3D de comportement du béton dans le cadre de la mécanique de l'endommagement [16]. Le point particulier de ce modèle est d'utiliser un critère en déformation en introduisant la notion de déformation équivalente $\tilde{\varepsilon}$ et un scalaire pour la variable de l'endommagement D (comportement isotrope). Le modèle s'appuie sur un couplage élasticité et endommagement, il ne prend donc pas en compte l'irréversibilité des déformations, l'anisotropie et l'effet unilatéral.

L'expression de l'énergie spécifique est de la forme :

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(1-D)\Lambda : \varepsilon : \varepsilon \qquad \text{[II.48]}$$

L'endommagement agit directement sur la raideur du matériau de la façon suivante

$$\sigma = \frac{E(1-D)}{1+\nu}\left[\varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} tr(\varepsilon) I\right] \Rightarrow \sigma = (1-D)\Lambda : \varepsilon \qquad \textbf{[II.49]}$$

Où

ν : est le coefficient de Poisson

I : est la matrice d'unité

σ et ε : sont respectivement les composantes des tenseurs des contraintes et de déformations

Λ : Tenseur d'élasticité initiale

D : la variable de l'endommagement

On considère que les extensions suivant les directions principales du tenseur des déformations sont à l'origine de l'endommagement, MAZARS a introduit la notion de la déformation équivalente. La progression de l'endommagement est guidée par l'évolution de la déformation équivalente $\tilde{\varepsilon}$ .Le modèle admet que ce sont les déformations d'extension qui sont à l'origine de l'endommagement.

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle\varepsilon_1\rangle^2 + \langle\varepsilon_2\rangle^2 + \langle\varepsilon_3\rangle^2} \qquad \textbf{[II.50]}$$

$\langle\varepsilon_i\rangle = \varepsilon_i \quad \text{si} \quad \varepsilon > 0$

$\langle\varepsilon_i\rangle = 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon \le 0$

ε_i : représente la déformation principale dans la direction I

L'évolution de l'endommagement scalaire est définie à partir d'une fonction seuil :

$$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - K(D) \qquad \textbf{[II.51]}$$

Où $k(D)$ est un paramètre contenant l'histoire du chargement. Initialement $k(D) = \varepsilon_{D_0}$, une fois ce seuil dépassé $k(D)$ prend en chaque point la plus grande valeur de $\tilde{\varepsilon}_{\max}$ atteinte pour toute l'histoire du chargement (déformation équivalente maximale atteinte).

- le domaine élastique est caractérisé par :

$$\begin{cases} f(\tilde{\varepsilon}, D) < 0 \quad \text{et}\, \dot{f}(\tilde{\varepsilon}, D) < 0 \\ D = 0 \quad \text{et}\ \sigma = \Lambda : \varepsilon \end{cases} \qquad \text{[II.52]}$$

- le domaine élastique endommageable est caractérisé par :

$$\begin{cases} f(\tilde{\varepsilon}, D) = 0 \quad \text{et}\, \dot{f}(\tilde{\varepsilon}, D) = 0 \\ D \in [0.1] \quad \text{et}\ \sigma = (1\text{-D})\, \Lambda : \varepsilon \end{cases} \qquad \text{[II.53]}$$

. Ce seuil évolue avec la progression de l'endommagement.

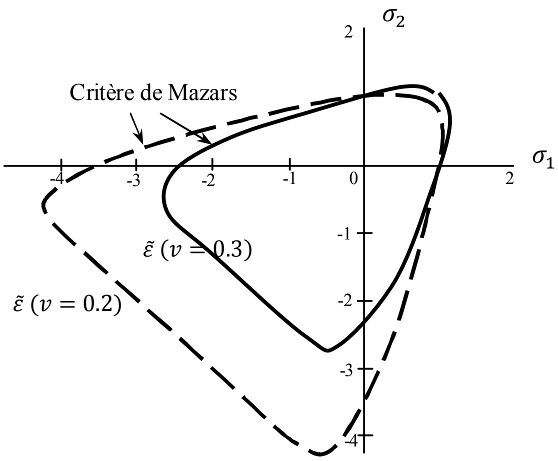


Figure II.3 – Modèle de Mazars, tracé de la surface seuil dans le plan des contraintes σ_1, σ_2

Pour représenter le comportement dissymétrique du béton, Mazars [16] propose deux modes d'endommagement, D_t en traction et D_c en compression. La combinaison linéaire de ces deux endommagements donne l'endommagement global isotrope :

$$D = \alpha_c D_c + \alpha_t D_t \qquad \text{[II.54]}$$

$$D_{t,c} = 1 - \frac{1 - A_{t,c}}{\varepsilon_{eq}} + \frac{A_{t,c}}{\exp(B_{t,c}(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{D_0}))}$$

[II.55]

$$\alpha_{t,c} = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\langle \varepsilon_i^{t,c} \rangle \langle \varepsilon_i \rangle}{\varepsilon_{eq}} \right)^{\beta} \qquad \text{[II.56]}$$

α : est définit comme une fonction de l'état de contrainte.

A_t, B_t, A_c *et* B_c Sont quatre paramètres du modèle.

Les coefficients α_t et α_c représentent respectivement le couplage traction endommagement et compression endommagement.

- En traction pure $\alpha_t = 1$ *et* $\alpha_c = 0$
- En compression pure $\alpha_c = 1$ *et* $\alpha_t = 0$

L'exposant β est introduit pour diminuer la valeur de l'endommagement, lorsque le matériau est soumis au cisaillement. Les déformations $\langle \varepsilon_i^c \rangle$ et $\langle \varepsilon_i^t \rangle$i sont respectivement calculés à partir des contraintes principales de traction et de compression.

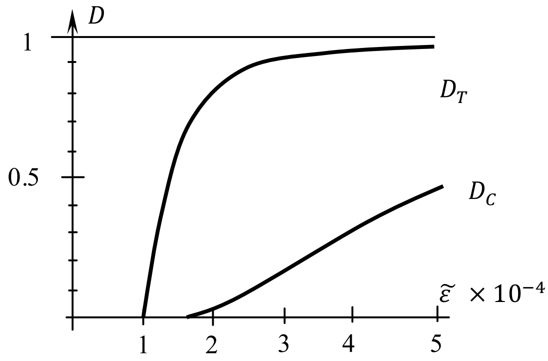


Figure II.4 : Evolution des variables d'endommagement en traction et en compression

Pour rendre compte du comportement dissymétrique du béton, l'endommagement D est exprimé sous forme d'une partition entre : un endommagement de traction D_t et un endommagement de compression D_c. La combinaison linéaire entre les deux endommagements donne l'endommagement global isotrope :

$$D = \alpha_t D_t + (1 - \alpha_c) D_c \qquad \text{[II.57]}$$

α est défini comme une fonction de l'état de contrainte,

- en traction pure $\alpha = 1$

- en compression pure $\alpha = 0$

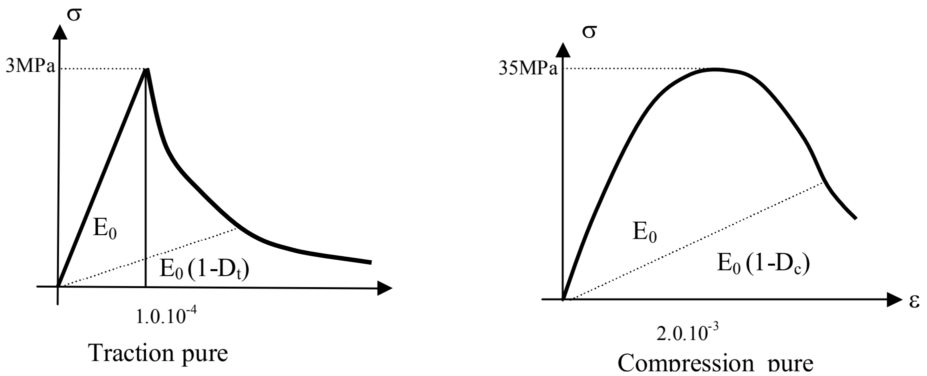


Figure II.5 –Modèle de Mazars, comportement en traction et en compression,

II.5. Conclusion

Nous venons de voir, à travers ces brèves descriptions, l'étendue du cadre de la modélisation en mécanique continue de l'endommagement qui offre un large champ d'action et un outil commode pour décrire la dégradation et l'altération des matériaux endommageables, nous nous sommes intéresser particulièrement au modèle de Mazars qui déduit la dégradation du béton

Dans le chapitre suivant nous présentons quelques résultats numériques issus de la littérature et nous présentant quelque problème rencontré lors de la mise en œuvre sur des codes de calcul.

CHAPITRE III

APPROCHE NON LOCALE

III.1. Introduction

Les recherches menées durant les vingt dernières années permettent de mieux décrire le comportement des matériaux fragiles. De nouvelles lois de comportements permettent de prendre en compte l'évolution de l'endommagement dans les structures industrielles et donc de prévoir leurs défaillances.

Malheureusement, l'utilisation de ces lois lors de simulations par éléments finis induit un grand nombre de problèmes numériques. Par exemple, des instabilités et des localisations apparaissent, ce qui entraîne une divergence du solveur ou une perte de signification des résultats.

De plus, ces lois nécessitent des maillages plus raffinés pour assurer une bonne qualité des résultats. Ces maillages amplifient très fortement les coûts de calcul et les ressources informatiques nécessaires à leur exécution.

Afin de résoudre ces difficultés, un modèle non local est proposé. Celui-ci repose sur l'utilisation d'une formulation non locale des équations de la mécanique ainsi que sur l'utilisation d'une méthode de pilotage des conditions aux limites. La réduction des coûts de simulation passe quant à elle par la parallélisassions des différents outils nécessaires aux calculs par éléments finis

III.2. Limite de l'approche locale

Les descriptions locales des matériaux entrent dans la classe des « milieux matériellement simples », c'est-à-dire en reprenant la définition de Truesdell [1974], des matériaux pour lesquels les valeurs en un point x et à un instant t des champs de contraintes, d'entropie spécifique, d'énergie libre spécifique et de courant de chaleur sont déterminées par la connaissance en x seulement de l'histoire jusqu'à l'instant t de la température et du gradient du mouvement, ainsi que la valeur à l'instant t du gradient thermique. De telles modélisations (élasticité, plasticité, etc.) sont maintenant couramment employées dans le domaine industriel et donnent des résultats très satisfaisants.

Toutefois, il existe un certain nombre d'observations dont elles ne rendent pas compte ou Seulement de manière imparfaite. Nous nous proposons de présenter quelques une de ces limites.

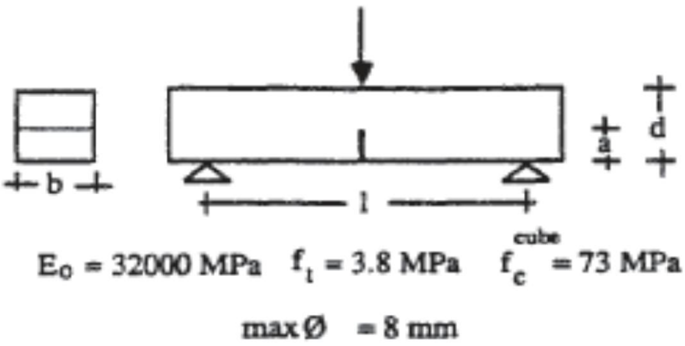
III.2.1.Effets d'échelle

A petite échelle spatiale, les résultats prédits par les théories locales peuvent s'écarter des mesures expérimentales, écarts qui s'estompent à plus grande échelle. Ainsi, Lakes [22] recense quelques observations :

- la charge limite de plaques trouées en graphite époxy dépend de la taille des trous.
- la distribution des déformations autour de cavités dans un matériau composite à fibres correspond bien aux prédictions pour de grandes cavités mais s'en écarte pour de petites cavités.

Dans chacun de ces cas, une microstructure sous-jacente au point matériel semble interagir avec les sollicitations qui s'exercent à la même échelle spatiale.les théories locales ne suffisent plus à décrire quantitativement la réponse du matériau.

L'exemple de simulation consiste en une flexion trois points sur trois poutres entaillées de dimensions différentes. Les caractéristiques géométriques de ces poutres sont présentées sur la figure (III.1).



	l	b	d	
P	80	10	10	
M	113	10	20	a / d = 0.5
G	138	10	30	

Figure III.1 : Géométries des éprouvettes et caractéristiques mécaniques du béton lors des expériences (Saouridis et Mazars, 1988*).*

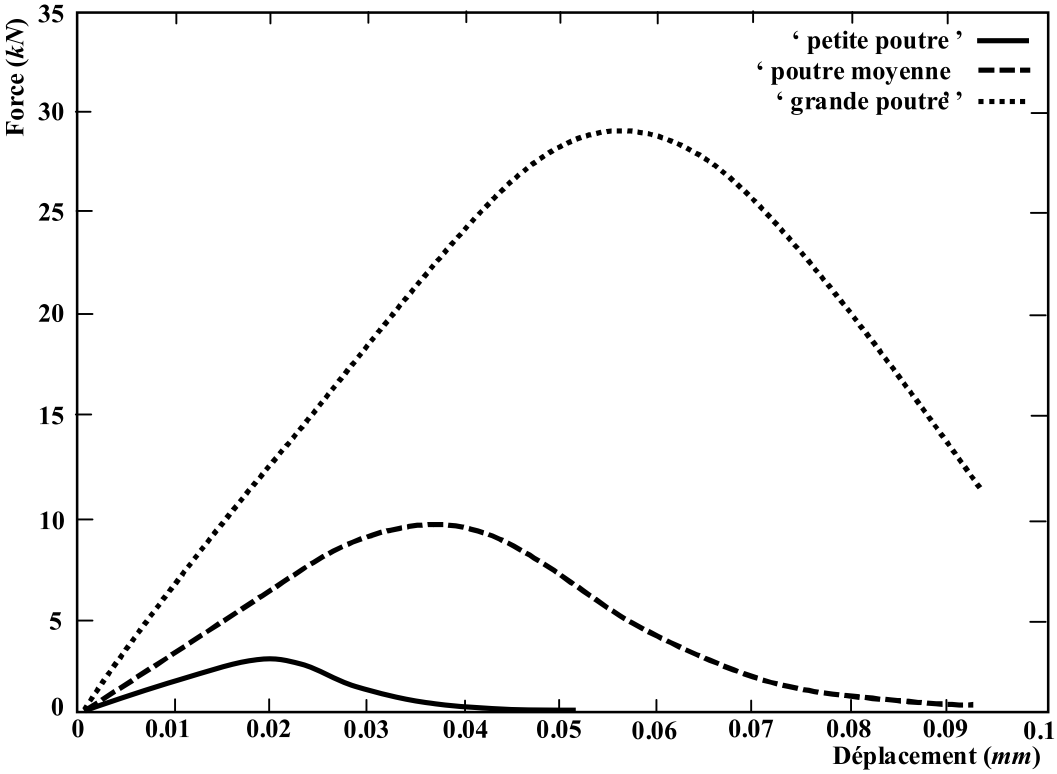


Figure III.2 : Flexion trois points. Réponses globales "force-déplacement.

Les réponses globales "force-déplacement" correspondant aux trois poutres en flexion sont présentées sur la figure (III.2).

III.2.2.Dégradations mécaniques et localisation des déformations

Sous fortes sollicitations, les propriétés mécaniques d'un matériau peuvent se dégrader. Ces dégradations se manifestent à l'échelle du point matériel sous des formes diverses comme en témoigne l'essai de traction d'un béton représenté sur la figure(III.3).

En particulier, on peut relever quatre types de phénomènes au cours du chargement :

- Perte de rigidité du matériau,
- Apparition de déformation irréversible,
- Présence de boucles hystérétiques lors des cycles traction compression,
- Diminution de la limite d'élasticité.

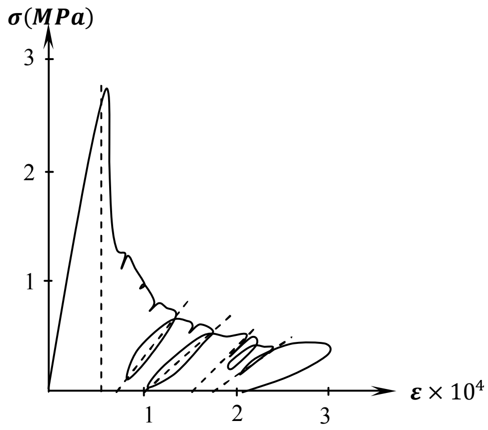


Figure III.3 : Essai de traction d'un béton, Terrier [1980]

La modélisation de ces phénomènes a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, le lecteur peut consulter par exemple **[23]**, **[7]**, **[24]** qui proposent des synthèses sur les modèles utilisés. De manière générale, la perte de rigidité est modélisée par une diminution des propriétés élastiques, les déformations irréversibles relèvent des théories de plasticité **[19]**

III.2.3.Les matériaux quasi-fragiles (roches, bétons,..;)

Les bandes de localisation y sont le fait d'une forte concentration de microfissures. Là encore d'après **Berthaud et al. [25],** la largeur des bandes dépend de la taille des agrégats (del'ordre de 2 à 10 diamètres d'agrégats). Des auteurs ont aussi étudié l'orientation des microfissures et concluent qu'en dehors des bandes de localisation, les **microfissures** s'orientent dans des directions privilégiées selon la direction du chargement, en revanche, dans les bandes, elles observent une anisotropie des fissures avec tout de même une tendance à se développer dans la direction de la bande. **[19]**

III.2.4.Sensibilité des résultats au maillage

Comme nous l'avons montré dans le premier chapitre, l'implémentation numérique des modèles locaux montre une grande sensibilité au maillage. Ce point a fait l'objet de plusieurs études [26], [27], [5], [28].

Saouridis [5] a simulé l'essai de traction d'une éprouvette entaillée avec trois maillages différents. Avant le pic, les courbes force-déplacement se superposent parfaitement. A partir du pic, les résultats sont très différents, figure (III.4-a). Il en est de même des zones complètement endommagées. Quand le maillage est raffiné (Voir figure (III.4-b)) l'épaisseur de la fissure diminue également, ce qui va à l'encontre des résultats expérimentaux [5].

a)

b)

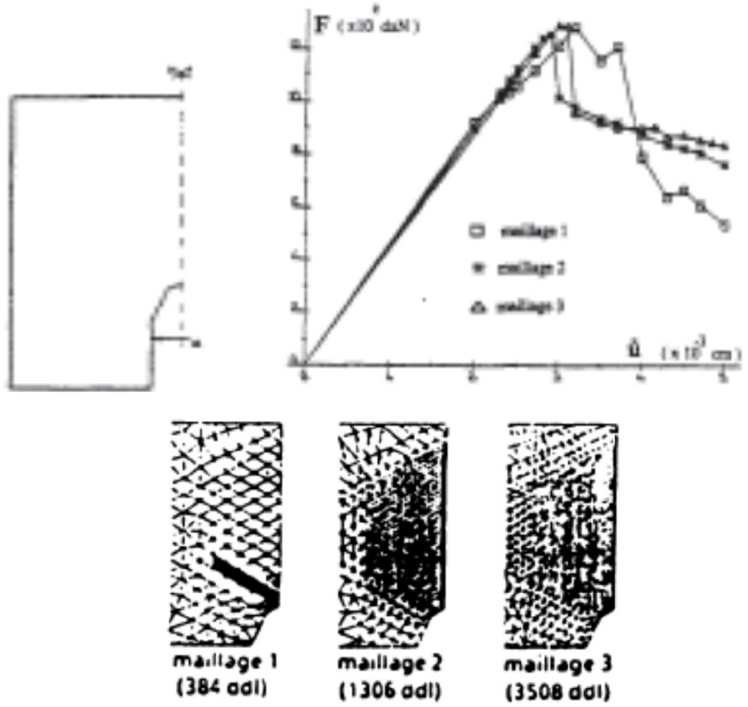


Figure III.4 : a)Courbes force déplacement d'une éprouvette entaillé.

b) évolution de la zone endommagée pour trois maillages différents

(D'après Saouridis 88)

Pijaudier-Cabot et Mazars [28] ont simulé l'essai d'arrachement d'une armature d'un cylindre en béton, comme le montre la figure (III-5). Dans cet essai, un effort de traction est appliqué à l'armature, et le bloc de béton est maintenu immobile à sa périphérie.

L'interface acier-béton est considérée comme parfaite. Ils ont constaté que les courbes force déplacement sont très différentes selon les maillages utilisés. Dans cet essai, l'endommagement du béton est concentré exclusivement au voisinage de l'armature.

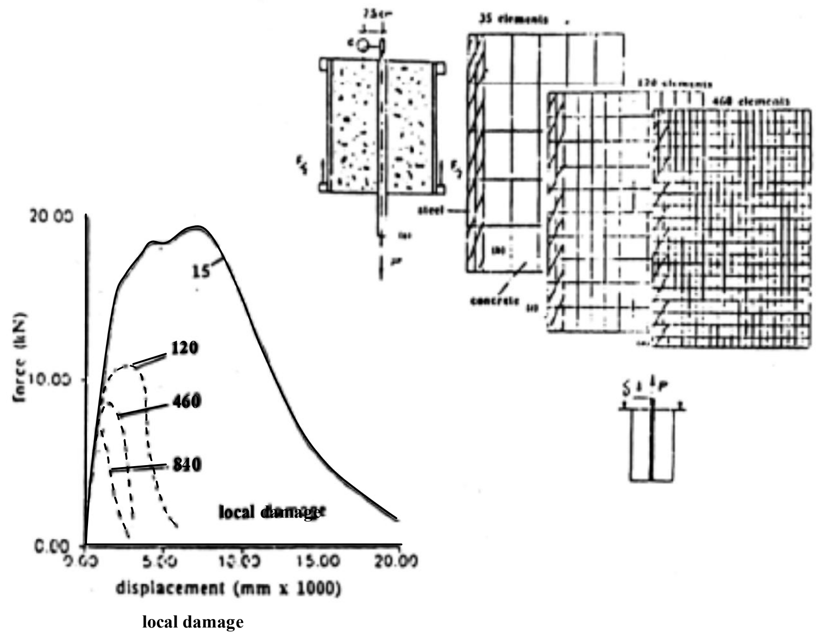


Figure III.5 : Effet du raffinement du maillage au cours de la simulation d'un essai D'arrachement sur une éprouvette en Béton. (D'après Pijaudier-cabot 91)

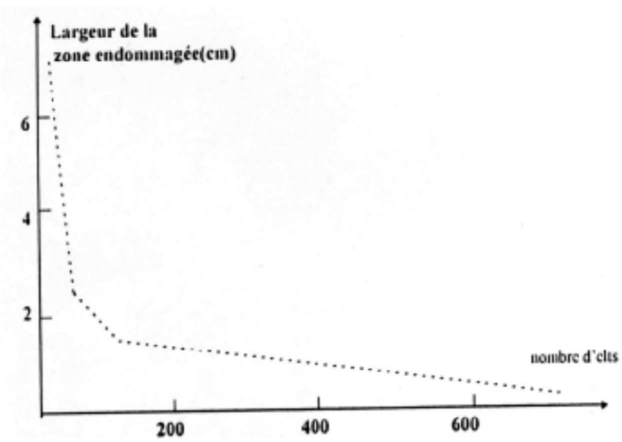


Figure III.6 : Influence du nombre d'élément sur l'épaisseur de la zone endommagée autour de l'armature (D'après Pijaudier-cabot 91)

La figure (III. 6) montre la variation de l'épaisseur minimale de cette zone en fonction du nombre d'éléments du maillage **[28].** Cette zone tend vers zéro quand le nombre d'éléments du maillage augmente. C'est donc le nombre d'éléments qui contrôle la taille de la zone de localisation du dommage Cette zone tend vers zéro quand le nombre d'éléments du maillage augmente. C'est donc le nombre d'éléments qui contrôle la taille de la zone de localisation du dommage.

III.3.Extension des modèles locaux

III.3.1. Base des modèles non locaux

La motivation première de ce travail de thèse concerne l'étude de la propagation d'une zone endommagée dans un matériau. Comme nous l'avons vu précédemment, les modèles locaux ne décrivent pas en général la formation de ces zones. Il est donc nécessaire de se placer dans le cadre d'une formulation non locale

III.3.2. Théories non locales

Les théories non locales contrairement aux théories locales considèrent que l'état de contrainte en un point matériel dépend de l'histoire de la déformation de tous les autres points matériels du milieu considéré. L'idée donc des modèles non locaux consiste à prendre en compte un effet de voisinage spatial pour décrire le comportement d'un point matériel : il y a interaction à distance entre les points de la structure. Ces interactions ont lieu au minimum dans un voisinage de taille fixée, du point matériel considéré. L'influence d'un point sur un autre est d'autant plus faible que le point considéré est éloigné. Les premières théories non locales, proposées pour des matériaux élastiques granuleux, sont basées sur des considérations purement heuristiques [29]. En utilisant le cadre thermodynamique des milieux continus, **Eringen** [30] a proposé une théorie non locale pour les milieux élastiques dans laquelle la théorie classique est un cas particulier. [19].

Du point de vue formulation théorique, la différence fondamentale entre les théories locale et non locale réside dans le passage de la forme intégrale (globale) à la forme locale des lois de conservation. En effet, pour les théories non locales, le passage de la forme intégrale à la forme locale des lois de conservation donne lieu à des termes appelés "termes résiduels de localisation" [30]. En un point matériel donné, ces termes représentent l'effet du voisinage de ce point. Par conséquent, ils figureront comme variable nouvelle dans l'expression du potentiel thermodynamique, ce qui traduira la non localité de la loi de comportement. Pour éclairer la théorie d'**Eringen [30]**, écrivons les lois de conservation pour un milieu non local **[19]**.

Conservation de la masse :

$$\begin{aligned} &\frac{\delta\rho}{\delta t}div\left(\rho\vec{v}\right)=\hat{\rho} \quad \text{avec} \int_{\Omega}\hat{\rho}dv=0 \\ &\rho\overrightarrow{W}=\vec{\hat{R}} \qquad\qquad \text{avec} \int_{\Omega_S}\vec{\hat{R}}ds=0 \end{aligned} \qquad [III.58]$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} &div\left(\underline{\sigma}\right)+\rho\vec{f}\text{-}\rho\vec{\gamma}=\hat{\rho}\vec{V}\text{-}\rho\vec{\hat{f}} \qquad \text{avec} \int_{\Omega}\rho\vec{\hat{f}}dv=0 \\ &\rho\overrightarrow{W}.\vec{V}-t=\rho\vec{\hat{F}} \qquad\qquad \text{avec} \int_{\Omega_S}\vec{\hat{F}}ds=0 \end{aligned} \qquad [III.59]$$

Conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} &\rho\frac{de}{dt}+\left(e-c\right)+\ \rho\vec{V}\vec{\hat{f}}=\sigma\!:\!\varepsilon\ \text{- div}\left(\vec{\mathrm{q}}\right)\ +\rho\left(\mathrm{r}+\hat{\mathrm{r}}\right) \qquad \text{avec} \int_{\Omega}\rho\vec{\hat{r}}dv=0 \\ &\rho\vec{V}\left(e-c\right)-\vec{t}\overrightarrow{W}+\vec{q}\vec{n}=\vec{\hat{\mathrm{Q}}} \qquad\qquad \text{avec} \int_{\Omega_S}\vec{\hat{\mathrm{Q}}}ds=0 \end{aligned} \qquad [III.60]$$

Inégalités fondamentales :

$$\begin{aligned} &\underline{\sigma}\!:\!\underline{\dot{\varepsilon}}\ \text{-}\rho\left[\frac{d\psi}{dt}+s\frac{dT}{dt}\right]-\vec{\mathrm{q}}\frac{\nabla T}{T}-\rho\left(\psi-C\right)\text{-}\ \hat{r}\overrightarrow{W}\vec{f}\ \text{-}\ \rho\left(T\hat{s}-\hat{r}\right)\ \geq 0 \qquad \text{et}\ \rho\hat{s}\overrightarrow{W}+\frac{\vec{\mathrm{q}}}{T}\geq\hat{B} \\ &\int_{\Omega}\rho\hat{s}dv=0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_S}\vec{\hat{B}}ds=0 \end{aligned} \qquad [III.61]$$

Remarquons que si toutes ces variables non-locales sont nulles, on retrouve bien les équations de conservation et de discontinuité de la théorie classique des milieux continus. Des méthodes plus récentes de non-localité en déplacement ou en déformation totale ont été introduites via l'écriture d'un déplacement ou d'une rotation non-locale.

Une loi d'interdépendance des déplacements à l'intérieur d'un voisinage peut être définie comme :

$$\overline{V}_{i(x)} = \frac{1}{V_{r(x)}} \int_{v} \alpha(s-x) V_i(s) \, dV(s) \quad \text{avec} \quad V_{r(x)} \int_{v} \alpha(s-x) \, dV(s) \qquad \text{[III.62]}$$

III.4. Modèle d'endommagement non-local de Pijaudier-Cabot et Bazant (1987)

La localisation de la déformation et de l'endommagement est un phénomène observé pour le béton dans la phase adoucissante. Afin de surmonter les difficultés liées au comportement adoucissant, des recherches ont mène à un enrichissement des relations de comportement.

Cette enrichissement a été effectué soit en introduisant une longueur interne (ou longueur caractéristique), soit en introduisant les gradients des déformations plastiques dans le cas des modèles plastiques. Une approche non locale consiste à considérer que dans les relations de comportement, les quantités gouvernant le mouvement et l'évolution dans un solide dépendent de la moyenne de leurs quantités duales sur un certain volume représentatif du matériau centré au point matériel considère.

Ainsi, dans la théorie non locale de l'endommagement, l'idée est d'utiliser le concept non local uniquement pour les variables que contrôlent l'endommagement et non pour les contraintes et les déformations dans les relations de comportement **[5].**

Dans la formulation non locale adoptée Saanouni, **[5],[31].**

La fonction d'évolution de l'endommagement $f(\hat{\varepsilon},K)=\hat{\varepsilon}-K(d)$ du modèle de Mazars a été remplacée par :

$$f(\hat{\hat{\varepsilon}},K)=\hat{\hat{\varepsilon}}-K(d) \qquad \text{[III.63]}$$

Ou la quantité $\hat{\hat{\varepsilon}}$ qui est une déformation équivalente moyenne s'écrit sous la forme :

$$\hat{\hat{\varepsilon}} = \frac{\int_{\Omega} g\hat{\varepsilon}d\Omega}{\int_{\Omega} gd\Omega} \qquad [III.64]$$

ou g est une fonction de Gauss définie par :

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp\left(\frac{-2x}{l_d}\right)^2 \quad \text{si } x \le 2l_d \\ g(x) &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{si } x \ge 2l_d \end{aligned} \qquad [III.65]$$

L'échelle du volume représentatif est limitée par $2l_d$, ou l_d est la longueur caractéristique qui est évaluée à trois fois le diamètre maximum de l'agrégat dans le béton

III.5. Modèle non local intégral

Un milieu non local est un milieu dans lequel au moins un champ de variable est sujet à une moyenne spatiale dans un voisinage fini d'un point [32] L'avantage d'un tel concept est qu'il est applicable à tout type de modèle continu : modèles diffus [33], modèles d'endommagement [34] , [35]

Seule la variable responsable de l'adoucissement est considérée comme non locale, c'est-à-dire, selon le modèle utilisé, l'endommagement, la déformation plastique, etc.

Par conséquent, la contrainte en un point d'intégration ne dépend pas seulement de la déformation au même point, mais également de la déformation dans un certain voisinage décrit par un volume représentatif défini par une longueur caractéristique.

Pour les modèles d'endommagement défini par une déformation équivalente, la déformation équivalente non locale ε_{eq} ne s'écrit en tout point x de la structure :

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{V_{r(x)}} \int_{\Omega} \Psi(x-s)\varepsilon_{eq}(s)d\Omega \qquad [III.66]$$

où Ω est le volume de la structure, et $V_{r(x)}$ est le volume représentatif au point x défini par :

$$V_{r(x)} = \int_{\Omega} \Psi(x-s)d\Omega \qquad [III.67]$$

$\Psi(x-s)$ est une fonction de pondération non locale. Celle-ci peut être choisie arbitrairement mais la forme la plus répandue est une Gaussienne :

$$\Psi\left(x-s\right)=exp\left(\frac{-4x-s^{2}}{L_{c}}\right) \qquad \textbf{[III.68]}$$

L_c est la longueur caractéristique du matériau, appelée plus généralement longueur interne pour un milieu non local. **[7]** ont lié la longueur interne à la zone de microfissuration (figure III.7). Si nous considérons que l'aire sous la courbe de "a" est le même que l'aire sous la courbe de "b" sur cette figure, la relation suivante peut être établie

$$\mathrm{L}_{FRZ}=\alpha l_{c} \qquad \textbf{[III.69]}$$

avec : $\alpha=1,93$

L_{FPZ} : est la largeur de la zone de microfissuration.

Bažant et Pijaudier-Cabot **[10]**, ont alors proposé une méthode permettant de déterminer la longueur interne expérimentalement en délocalisant l'endommagement.

Ils ont déterminé ainsi la relation :

$$l_{c}=3.d_{a} \qquad \textbf{[III.70]}$$

Où d_a est le diamètre du plus gros granulat présent dans le béton.

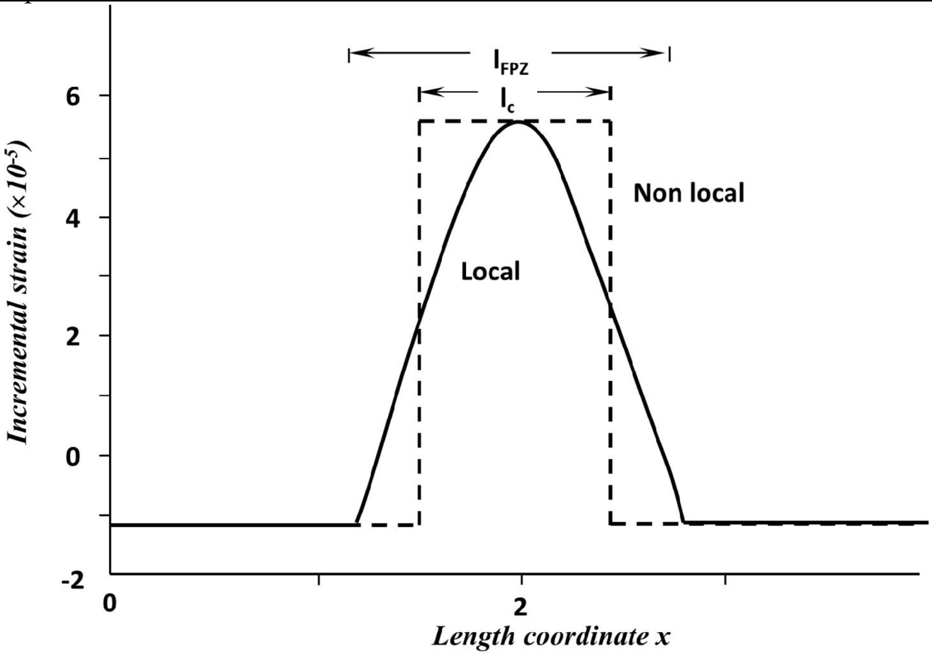


Figure III.7 – Profil de déformation obtenu analytiquement Avec le modèle non local intégral (d'après Pijaudier-Cabot87)

Comme la fonction poids est indépendante des conditions aux limites, les poids peuvent être calculés, une seule fois pour chaque maillage, en chaque point de Gauss avant de commencer le calcul.

III.6. Modèles avec effet du gradient

III.6.1. Formulation explicite

L'idée de ces modèles est d'augmenter l'ordre du développement limité permettant de calculer la déformation ou la déformation équivalente **[36]** ainsi, la localisation est évitée en générant un champ de déformations régularisées.

La déformation équivalente non locale est liée à la déformation locale et à son laplacien par la relation :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq} + c\nabla^2\varepsilon_{eq} \qquad \text{[III.71]}$$

Où le paramètre c à la dimension d'une longueur au carré caractérisant le milieu hétérogène.

Cette relation peut être déduite de la formulation intégrale :

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{V_{r(x)}} \int_{\Omega} \Psi(x-s)\,\varepsilon_{eq}(s)\,d\Omega \qquad \text{[III.72]}$$

Par une décomposition en série de Taylor de la déformation équivalente ε_{eq} en négligeant les termes d'ordre 4 et plus **[37]** .Le calcul utilisant cette formulation conduit à une instabilité mécanique dans la phase d'écrouissage positive **[38]**, C'est pour cette raison qu'on lui préfère généralement une formulation implicite.

III.6.2. Formulation implicite

La forme implicite du modèle gradient peut être déduite de l'équation (III .70). En supposant

$$\nabla^2 \bar{\varepsilon}_{eq} \approx \nabla^2 \varepsilon_{eq} \qquad \text{[III.73]}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{eq} = \bar{\varepsilon}_{eq} + c\nabla^2 \bar{\varepsilon}_{eq} \quad \text{sur} \quad \Omega \\ &\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{eq}}{\partial n} = n\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{eq}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{aligned} \qquad \text{[III.74]}$$

Avec n le vecteur normal sortant sur ∂. Cette condition permet de retrouver la solution des problèmes homogènes où $\bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq}$ [39]

Une alternative pour cette formulation consiste à appliquer le même raisonnement, mais sous forme tensorielle, afin d'obtenir le tenseur des déformations non locales $\bar{\varepsilon}_{ij}$ au lieu de la déformation non locale scalaire $\bar{\varepsilon}_{eq}$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + c\nabla^2 \bar{\varepsilon}_{ij} \quad \text{sur} \quad \Omega \\ &\nabla \vec{\varepsilon}.\vec{n} \quad \text{sur} \quad d\Omega \end{aligned} \qquad \text{[III.75]}$$

Cette approche est ensuite adaptée au modèle d'endommagement isotrope en remplaçant la déformation équivalente locale par sa version non locale :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\left\langle \bar{\varepsilon}_i \right\rangle\right)^2} \qquad [III.76]$$

Ainsi, de façon identique au modèle d'endommagement scalaire, une surface de charge est donnée par la fonction :

$$g\left(\bar{\varepsilon}, k_d\right) = \bar{\varepsilon}_{eq}\left(\bar{\varepsilon}\right) - k_d \qquad [III.77]$$

Il est notable que les deux formulations non locales, l'une basée sur l'approche intégrale, l'autre sur l'approche en gradient, sont exactement équivalentes dans le cas du milieu infini et pour une fonction de pondération spécifique [40].

La relation entre la longueur interne l_c pour le modèle non local intégral et c pour les approches en gradient a été discutée par plusieurs auteurs.

Jason [41] a comparé les courbes force-déplacement, obtenues avec le modèle non local intégral et l'approche en gradient, sur les tests en flexion trois points. Il a trouvé :

$$\sqrt{c} \approx \frac{lc}{4} \qquad [III.78]$$

Par contre, Dufour et al [42] ont déterminé les deux longueurs internes sur la largeur de la zone de microfissuration d'une barre en traction et ont obtenu :

$$\sqrt{c} \approx \frac{l_c}{2{,}55} \qquad [III.79]$$

Les modèles non locaux permettent de réaliser une modélisation cohérente de la rupture et du comportement adoucissant des matériaux cimentaires [39] et[43] Cette équivalence ainsi que la notion de relation explicite et implicite est largement discutée dans Engelen[44].Par exemple avec :

$$\alpha(x) = \exp\left[-\left(\frac{2\|x\|^2}{l}\right)\right] \qquad \text{[III.80]}$$

On définit ici le rayon d'action de la fonction de pondération. Le développement de Taylor au point "x" conduit à :

$$\bar{V}_i = V_I + \frac{l^2\partial^2 V_i}{16\partial x \partial x} + \varepsilon \qquad \text{[III.81]}$$

Par soustraction de cette relation au développement de Taylor de $\nabla^2 v_i(x)$ et en négligeant Les termes d'ordre excédant 2 on aboutit à l'expression implicite suivante :

$$\bar{V}_i - \frac{l^2\partial^2 V_i}{16\partial x \partial x} = V_I + \varepsilon \qquad \text{[III.82]}$$

Cette expression de non localité est dite "implicite" car le second gradient s'applique à la variable non locale $\bar{V}_i$ et non à la variable elle même "vi". Askes[45] montre que les modèles non-locaux intégraux et les modèles à second gradient implicites ou explicites sont issus de la même approche [16]

III.7. Calcul du laplacien d'endommagement

Le laplacien est calculé à partir des valeurs aux points de Gauss de la variable d'endommagement. Une méthode d'approximation calcule le laplacien, comme la dérivée seconde d'un polynôme du second degré, interpolant selon le critère des moindres carres le champ physique [46] , [47].

Une fonction gaussienne permet la pondération relativement a la distance au point considère. La fonction de pondération est ici sous la forme d'un polynôme de degrés 2 ou 3, Les deux exemples donnes ci-dessous ont fournis des résultats similaires

$$\omega(r)=\begin{cases}1-3r^2+2r^3\, ou\, 1-2r+r^2 & pour\ r<1\\ 0 & pour\ r\geq 1\end{cases}\qquad \textbf{[III.83]}$$

$$avec \qquad r=\frac{r}{r_{max}}$$

Ou r_{max} définis le rayon d'influence de la fonction de pondération (Figure III.8).

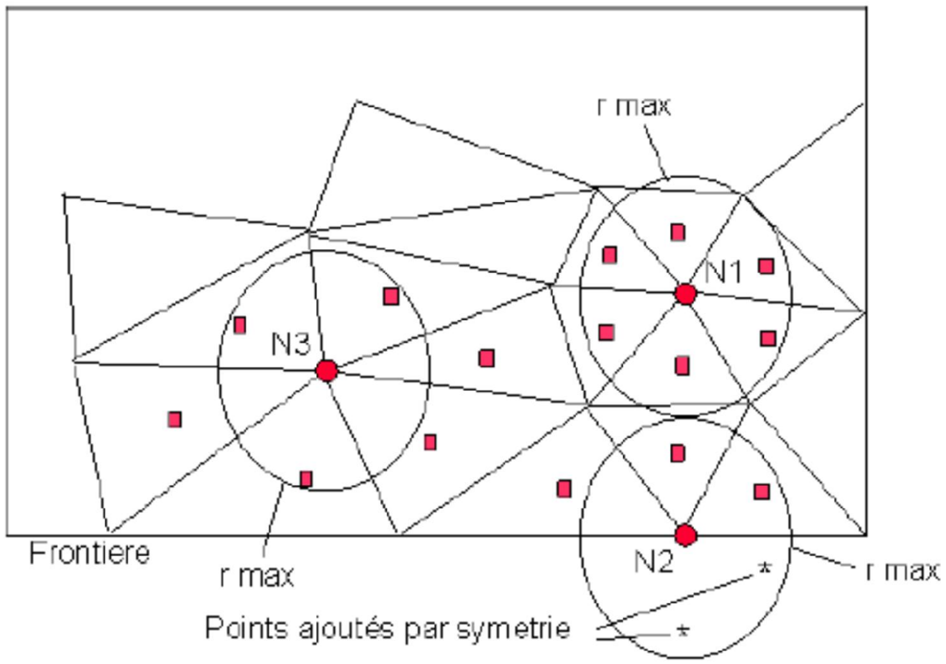


Figure III.8-Zone d'influence de l'approximation diffuse (d'après Sorin05).

Les études de sensibilité au paramètre r_{max} montrent que pour $r_{max} \gg lcar$ les résultats sont sensiblement équivalents au modelé local (Lcar longueur caractéristique des éléments). Les meilleurs résultats sont obtenus pour $r_{max} \approx lcar$, Seul les points de Gauss appartenant à la zone d'influence $r_{max} < lcar$ sont pris en compte pour le calcul du laplacien (Figure III.8), le résultat est donc fortement dépendant du maillage initial

III.8. Conclusion

Ce chapitre a pour but de donner les principaux éléments pour la suite du travail. Nous avons présenté dans ce chapitre les différentes approches visant à modéliser le comportement des matériaux quasi fragiles.

Les modèles d'endommagement isotrope sont adaptés aux comportements fondamentaux du béton (traction, compression...).

La nécessité d'introduire une technique de régularisation pour éviter le phénomène de localisation de variables ainsi que le choix de l'approche pour l'obtention d'une réponse numériquement acceptable (dépendance au maillage) ont été discutés,

CHAPITRE IV

METHODE DES ELEMENTS FINIS

IV.1. Introduction

La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles, son principe consiste à subdiviser le continu (structure) en sous-domaines de forme relativement simple appelés « éléments finis », ce qui conduit à définir une approximation de la solution non pas pour l'ensemble de la structure mais pour chacun de ses éléments constitutifs. Le choix des coordonnées généralisées de paramètres physiques, permet alors d'exprimer simplement les conditions de continuité de la solution entre éléments adjacents ainsi que les conditions d'équilibre inter-éléments et finalement de résoudre le problème à l'aide de la méthode des déplacements

IV.2. Aspects généraux de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation par éléments finis des fonctions inconnues (u) pour discrétiser une forme intégrale (W), puis résoudre le système d'équations algébriques ainsi obtenu

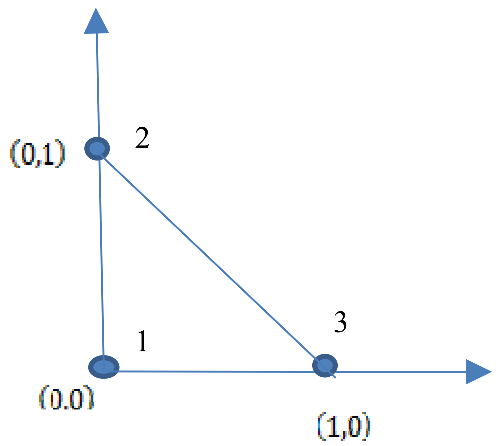
IV.2.1. Discrétisation géométrique

Le domaine Ω est divisé en sou domaine Ω^e appelé élément.

Nous présentons les éléments utilisés dans notre étude et leurs fonctions d'interpolations dans le repère local (ξ, η)

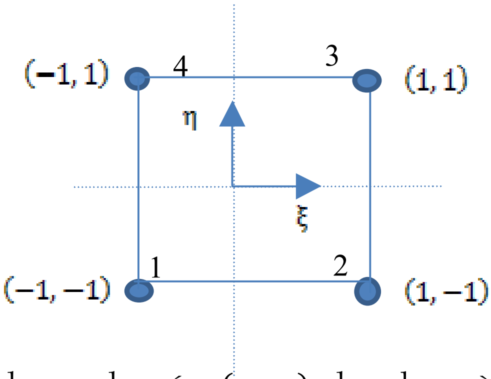
Elément de référence triangulaire à trois nœuds

$N = 1 - \xi - \eta \qquad \xi, \; \eta$



Elément de référence quadratique à *quatre nœuds (Q4):*

$\mathrm{N} = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$ i=1,2,3,4



Où N_i est la fonction de forme par raport au nœud de coordonnées (x_i, y_i) dans le repère globale (x, y) et les coordonnées (ξ_i, η_i) dans le repere local (ξ, η)

les deplacementsdans un element s'ecrivent :

$$\begin{cases} U_1^e = \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y) U_{1i}^e \\ U_2^e = \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y) U_{2i}^e \end{cases} \quad [IV.84]$$

N : est le nombre de noued dans l'elèment

IV.2.2. Discrétisation de la forme variationelle.

L'expression précédente est une fonctionnelle, sa discrétisation se fait généralement par éléments finis car la géométrie du domaine est souvent complexe. Le domaine 'W' est divisé en sous domaines 'We'. Les déplacements et les déformations réels et virtuels sont approchés sous la forme [11,22]:

$$\{U(x,y)\} = [N_i] U_i \quad [IV.85]$$

$$\{U^*(x,y)\} = [N_i]\{U_i^*\} \quad [IV.86]$$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [B_i]\{U_i\} \quad [V.87]$$

$$\{\varepsilon^*(x,y)\} = [B_i]\{U_i^*\} \quad [IV.88]$$

$[\mathrm{N_i}]$: matrice de fonction de forme associée à l'élément.

$[B_i]$: est la matrice des dérivées des fonctions de forme. Dans le cas des problèmes plans, elle s'écrit sous la forme:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dy} \\ \frac{dN_i}{dy} & \frac{dN_i}{dx} \end{bmatrix} \quad \textbf{[IV.89]}$$

En substituant les relations (17) dans l'équation (16) on obtient :

$$\int_{\Omega e} [B_i]^T \left[\Lambda^s\right] [B_i] \{U_n\} d\Omega - \int_{\Omega e} [N_i]^T \left\{f_s^e\right\} d\Gamma_1 - \int_{\Omega e} [N_i]^T \left\{f_s^e\right\} d\Omega \quad \textbf{[IV.90]}$$

soit finalement :

$$[K_e]\{U_n\} = \left\{f^e\right\} \quad \textbf{[IV.91]}$$

$$[K_e] = \int_{\Omega e} [B_i]^T \left[\Lambda^s\right] \left[B^e\right] d\Omega^e \quad \textbf{[IV.92]}$$

$$\left\{f^e\right\} = \int_{\Gamma 1} [N\ ]^T \left\{f_s^e\right\} d\Gamma_1 + \int_{\Omega e} [N_i]^T \left\{f_v^e\right\} d\Omega^e \quad \textbf{[IV.93]}$$

$[K_e]$: Est la matrice de rigidité élémentaire

$\{f^e\}$: Est le vecteur force élémentaire

Il est à noter que :

$d\Omega^e = dxdy$: en déformations planes

$d\Omega^e = t.dxdy$: en contraintes planes

avec t : épaisseur de la structure

IV.3. Evaluation de la matrice de rigidité et du vecteur force élémentaire :

La matrice de rigidité et le vecteur force élémentaires sont évalués dans le repère local (ξ, η) et s'écrivent sous la forme :

$$[K_e] = \iint_{-1}^{+1} [B^e]^T [B^e]^T \, t \det J d\xi \mathrm{d}\eta \qquad \text{[IV.94]}$$

$$\{f^e\} = \iint_{-1}^{+1} [N^e] \{f_v^e\} t^e \, \det J \, d\xi \mathrm{d}\eta \qquad \text{[IV.95]}$$

J est la matrice Jacobienne et la matrice de passage du repère global au repère local ,elle s'écrit :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_8 & Y_8 \end{bmatrix} \qquad \text{[IV.96]}$$

et

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_2}{d\xi} \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{dN_8}{d\xi} \\ \frac{dN_1}{d\eta} & \frac{dN_2}{d\eta} \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{dN_8}{d\eta} \end{bmatrix} \qquad \text{[IV.97]}$$

Le schéma d'intégration de Gauss dans le cas d'un élément de référence à deux dimensions permet d'évaluer la matrice $[K_e]$ et le vecteur $\{f^e\}$ sou la forme générale suivante :

$$[K_e] = \sum_{p=1}^{Npg} \sum_{p=1}^{Npg} [B^e]^T \left[\check{\Lambda}\right] [B^e] t^e \, \det J(\xi_p, \eta_p) W_p W_q \qquad \text{[IV.98]}$$

$$\{f^e\} = \sum_{p=1}^{Npg} \sum_{p=1}^{Npg} [N^e]^T \{f_v^e\} t^e \, \det J(\xi_p, \eta_p) W_p W_q \qquad \text{[IV.99]}$$

Où

N_{pg} : est le nombre de points d'intégration de Gauss de coordonnées (ξ_p, η_p)

$W_p W_q$: sont les poids d'intégration

ξ_p, η_p : sont les coordonnées du point Gauss.

IV.4. Assemblage et résolution :

Dans la méthode des éléments finis l'expression de $R(\Omega)$ est la somme des contributions élémentaires $R^e(\Omega^e)$.l'étape d'assemblage correspond à la construction de la matrice globale $[K]$ et le vecteur sollicitation globale $\{F\}$ a partir des matrices et vecteurs élémentaire $[K^e]$ et$\{F_v^e\}$.

$$\{R\} = \sum_e \{R^e\} = 0$$

[IV.100]

avec

$$\{R^e\} = [K^e]\{U_n\} - \{f_v^e\} \qquad \textbf{[IV.101]}$$

Et

$$R(\Omega) = ([K]\{U\} - \{F\}) = 0 \qquad \textbf{[IV.102]}$$

Alors

$$R(\Omega) = ([K]\{U\} - \{F\}) = 0 \qquad \textbf{[IV.103]}$$

ou :

$[K]$: la matrice de rigiditeglobale.

$\{F\}$: le vecteur de force global

IV.5. Stratégie de résolution

Pour résoudre le problème de non linéarité, on utilise la méthode de Newton Raphson qui consiste à calculé, la raideur à chaque incrément de chargement et chaque itération.

Soit pour notre cas, la méthode pas à pas de Newton-Raphson qui tient compte du fait que le problème est fortement non linéaire. Elle consiste à introduire une nouvelle variable scalaire λ_1 appelée facteur de charge.

La résolution du système d'équations algébriques

$$\left[K(U)\right]\{U\}=\lambda\{F_0\}=\{F\} \qquad \textbf{[IV.104]}$$

Peut alors être remplacée par la résolution successive:

$$[K(U_j)]\{U_j\}=\lambda\{F_0\} \qquad \textbf{[IV.105]}$$

Où:

$\lambda_j=\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda$: Facteurs de charges (la charge est appliquée en plusieurs incréments)

$\{F_0\}$: Charge globale à appliquer à la structure

La solution initiale utilisée pour calculer U $_j$ est la solution U_{j-1} obtenue à l'étape précédente. Chaque étape constitue un problème non linéaire qui se résout avec une ou plusieurs itérations de la méthode de Newton-Raphson La méthode incrémentale, utilisant plusieurs itérations de Newton-Raphson s'écrit pour un niveau donné de sollicitationsλ_j.

$$\{R_j^{i-1}\}=\lambda_j\{F_0\}-[K(U_j^{i-1})]\{U_j^{i-1}\} \qquad \textbf{[IV.106]}$$

$$[K(U_j^{i-1})]\{\Delta U_j^{i-1}\}=R(U_j^{i-1})+(\lambda_j-\lambda_{j-1})\{F_0\} \qquad \textbf{[IV.107]}$$

$$\{U_j^i\}=\{U_j^{i-1}\}+\{\Delta U_j^i\} \qquad \textbf{[IV.108]}$$

On obtient ainsi, à chaque itération, un système d'équations linéaires que l'on résout par la méthode frontale

IV.6.Test De Convergence

Le processus de Newton-Raphson converge lorsque la condition suivante est satisfaite:

À l'itération "i" (i>1), on calcule les résidus {R}

On estime que l'on a raisonnablement convergé vers la solution lorsque le test suivant est vérifié :

$$\sqrt{\frac{\{R\}_i^T\{R\}_j}{\{F\}_i^T\{F\}_j}}\times 100 \leq \eta \qquad \textbf{[IV.109]}$$

ou : $\{F\}_i^T$: résulte de l'assemblage des vecteurs élémentaires suivants:

$$\{f^e\}^i = \int_{\Omega^e}[B]^T\{\sigma\}^i \, d\Omega^e \qquad \textbf{[IV.110]}$$

η: est une tolérance choisie par l'opérateur (0.001 par exemple).

IV.7. Traitement numérique

L'analyse faite jusqu'à maintenant concerne le problème d'évolution jusqu'à la phase d'amorçage .lorsqu'un point de Gauss de la structure attient la valeur critique d'endommagement ; $D_c = 1$, il faudra préciser sa gestion pour toute poursuite des calculs. Le problème qui se pose à partir de cet instant $(D_c = 1)$, concerne principalement le suivi de la zone endommagée. Une solution simple, et qui est retenue dans le présent travail, consiste à prendre comme critère de rupture D=Dc1, avec Dc1 proche mais différent de 1 pour éviter les problèmes numériques. A cet instant, le tenseur de contrainte devient presque nul et le point de Gauss en question n'intervient plus ni dans le calcul du résidu ni dans le calcul de la matrice de rigidité. La zone endommagée lors de processus de chargement, est donc définie comme l'ensemble des points de Gauss où l'endommagement a atteint cette valeur critique.

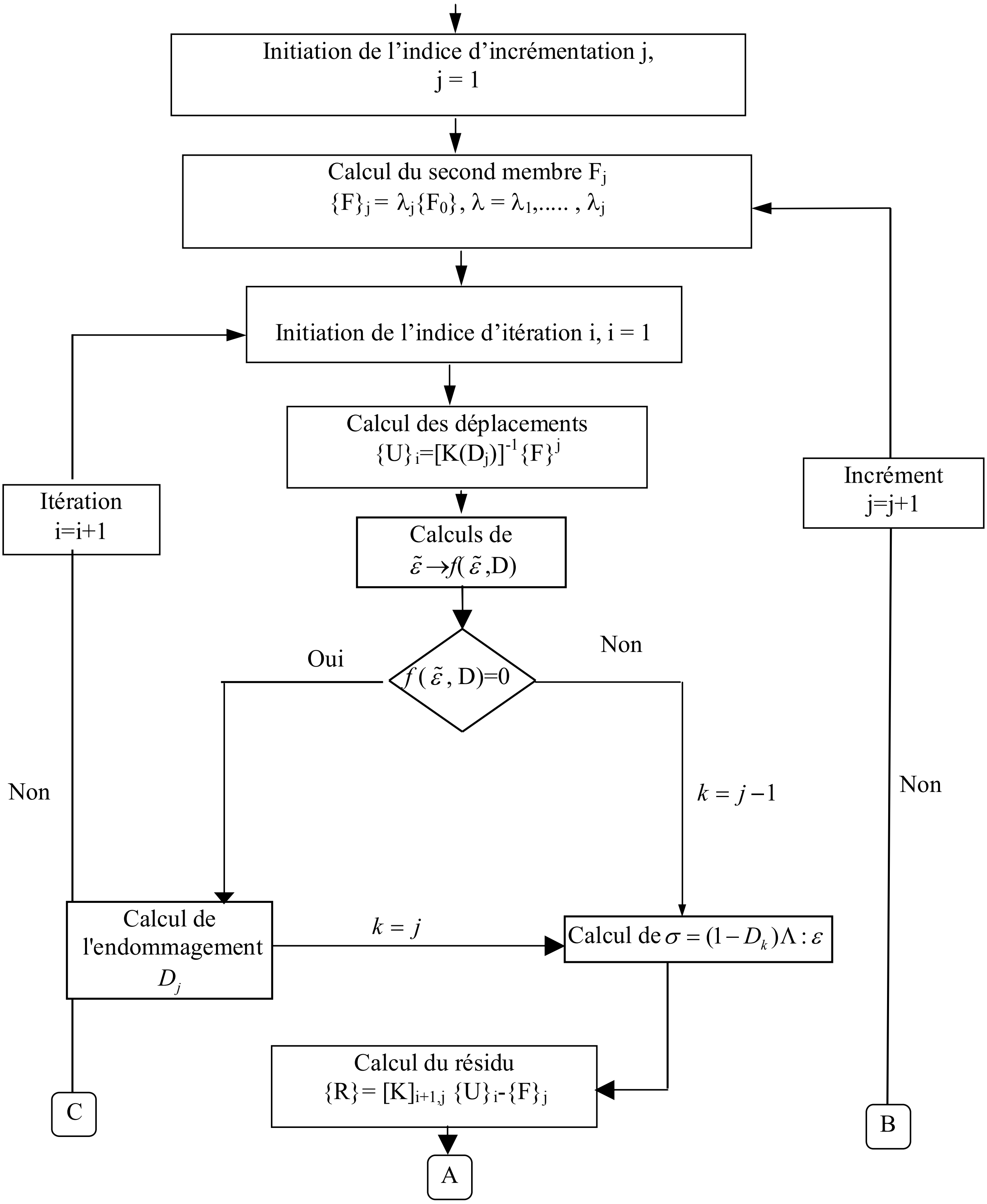
IV.8. Elaboration du programme de calcul

Nous avons utilisé initialement le programme de calcul développé par Owen [48], que nous avons modifié ensuite pour l'implémentation de notre modèle élastique endommageable isotrope.Ceci a été fait par l'ajout de "blocs" indépendants en se conformant aux notices de programmation et en respectant l'architecture du programme. La figure(IV.1) représente l'organigramme schématique du programme réalisé.

IV.9.CONCLUSION

La modélisation, par éléments finis, d'un problème d'élasticité-endommagement nous conduit à un système d'équations algébriques non-linéaires. L'endommagement est à tout instant du processus, interprété comme une variation des caractéristiques mécaniques de la structure. La linéarisation de ces équations se fait par la méthode incrémentale pas à pas de Newton-Raphson. On peut résoudre, par la suite, ces équations linéaires par la méthode frontale. Le test de convergence du processus itératif se fais en utilisant une norme du rapport des forces résiduelles et des forces imposées.

Dans le chapitre suivant nous procédons à la validation du programme de calcul ainsi élaboré puis nous l'appliquons aux différentes structures.


Initiation de l'indice d'incrémentation j,
j = 1
Calcul du second membre F_j
$\{F\}_j = \lambda_j\{F_0\}, \lambda = \lambda_1,\ldots, \lambda_j$
Initiation de l'indice d'itération i, i = 1
Calcul des déplacements
$\{U\}_i=[K(D_j)]^{-1}\{F\}^j$
Calculs de
$\tilde{\varepsilon} \to f(\tilde{\varepsilon},D)$
$f(\tilde{\varepsilon}, D)=0$
Oui
Non
Itération
i=i+1
Incrément
j=j+1
Non
$k = j - 1$
Non
Calcul de l'endommagement
D_j
$k = j$
Calcul de $\sigma = (1 - D_k)\Lambda : \varepsilon$
Calcul du résidu
$\{R\}= [K]_{i+1,j} \{U\}_i-\{F\}_j$
C
A
B

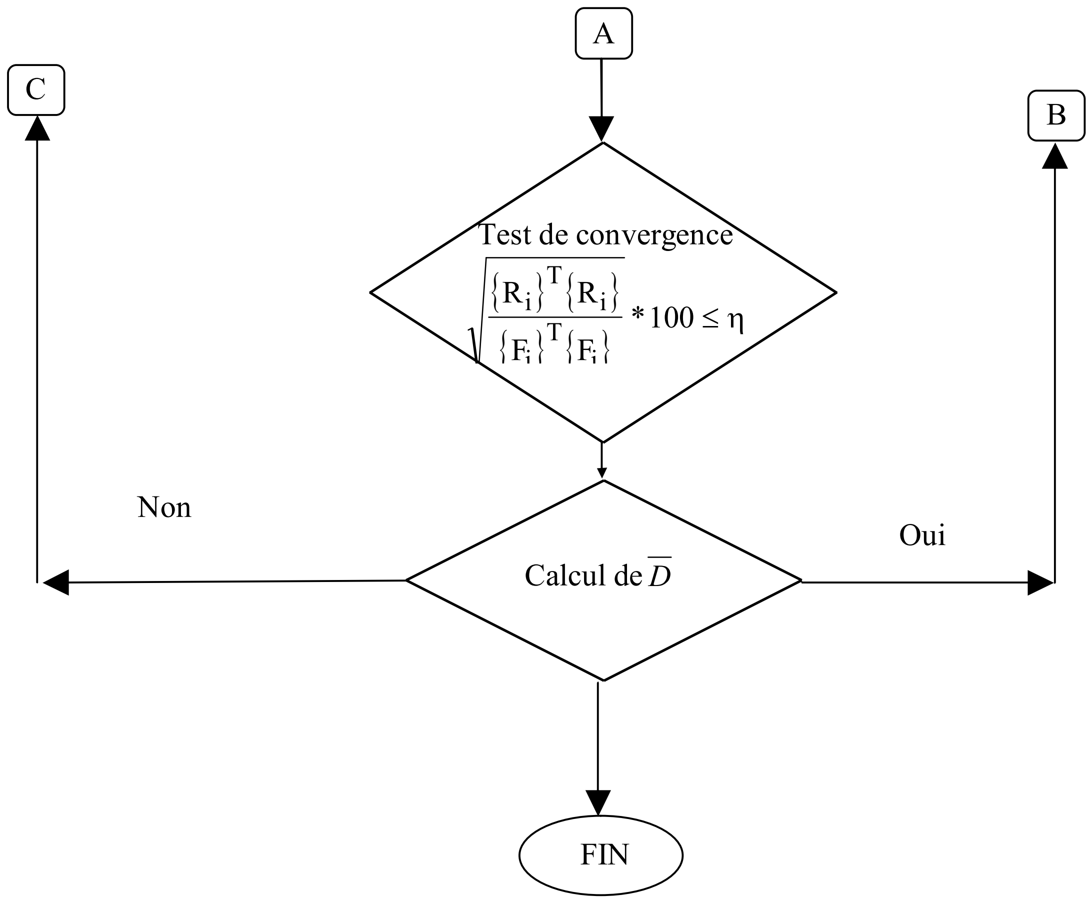


Figure* IV.*1* - *Organigramme général du programme.

CHAPITRE V

VALIDATIONS ET APPLICATIONS NUMERIQUES

V.1. Introduction

La théorie d'endommagement non locale proposée par (Saanouni et al) [49] utilise le concept de non localité pour les variables qui contrôlent le radoucissement de déformation, et de traiter la partie élastique de déformation de façon locale. Le concept de non localité est donc appliqué à la variable d'endommagement et non pas pour les déformations ou les contraintes.

Nous avons employé une procédure d'analyse en utilisant le calcul par éléments finis afin d'identifier les paramètres du modèle d'endommagement de Mazars en non local à partir des essais de traction. Nous rappelons le modèle de Mazars avant d'exposer la procédure d'identification.

V.2. Le modèle de Mazars

Mazars [16] a proposé l'application des modèles d'endommagement, Le comportement du béton est modélisé par la mécanique de l'endommagement à l'aide d'une variable continue (interne) décrivant l'endommagement noté D. D varie entre 0 (pour un matériau sain) et 1 (pour un matériau rompu). Cette variable D, est expérimentalement déterminée comme une fonction de la déformation [14], Ce concept décrit directement la perte de rigidité et le comportement adoucissant. La contrainte est déterminée par la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = (1-d)\,C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad \text{[V.111]}$$

Où σ_{ij} et ε_{kl} sont respectivement les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations, $(i,j,k \in [1,3])\, i,j,k,l$ sont les composantes du module d'Young initial et D la variable d'endommagement.

Le matériau est supposé élastique endommageable isotrope, Dest un scalaire. La notion de déformation équivalente traduit l'intensité des déformations locales :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum \langle \varepsilon_i \rangle^2} \quad \text{avec} \begin{cases} \langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0 \ \text{ si } \varepsilon_i < 0 \\ \langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i \ \text{ si } \varepsilon_i \geq 0 \end{cases} \qquad \text{[V.112]}$$

ε_i Représente la déformation principale dans la direction i. L'évolution de l'endommagement scalaire est définie à partir d'une fonction seuil

$$f\left(\tilde{\varepsilon}, d\right) = \tilde{\varepsilon} - K(d) \qquad \text{[V.113]}$$

K(d=0) = K0 est le seuil initial d'endommagement

Deux lois d'évolution distinctes sont proposées pour le développement de l'endommagement en chargement de traction et de compression. L'endommagement global est donné par une relation linéaire entre ces deux endommagements

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c \qquad \text{[V.114]}$$

Où D_t et D_c sont les contributions à d des mécanismes d'endommagement par traction directe (D_t) et les mécanismes induits sous sollicitations de compression (D_c). *t* est défini comme une fonction de l'état de contrainte. En traction pure $\alpha_t = 1,\ \alpha_c = 0$ et en compression pure $\alpha_t = 0,\ \alpha_c = 1$ [50]

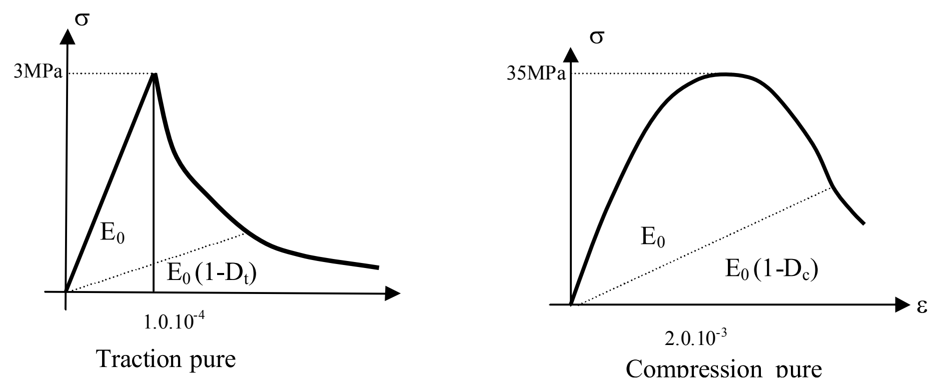


Figure V.1 : Modèle de Mazars, comportement en traction et en compression,

V.3. Endommagement non local

La formulation non-locale est appliquée à l'évolution de l'endommagement. La variable choisie ici est la force motrice contrôlant l'évolution de l'endommagement. Ainsi, la variable d'endommagement $d_m(\vec{x})$ sur un point matériel dépendra de la force motrice non-locale $\bar{\xi}_d(\vec{x})$ à la place de la force motrice locale $\xi_d(\vec{x})$ [51] .La force motrice d'endommagement non-locale est obtenue par une procédure de moyenne des valeurs locales sur un volume élémentaire représentatif V_r autour du point considéré. La force motrice non locale $\bar{\xi}_d$ est ainsi définie par:

$$\bar{\xi}_d(\vec{x}) = \frac{\int_{V_r} \xi_d(\vec{y})\,dV}{V_r} \qquad [V.115]$$

Une fonction de pondération $\psi(\vec{y},\vec{x})$ peut être introduite pour généraliser l'intégrale sur tous les domaines Ω de la structure étudiée:

$$\bar{\xi}_d(\vec{x}) = \frac{1}{\psi(\vec{x})}\int_{\Omega} \psi(\vec{y},\vec{x})\,\xi_d(\vec{y})\,d\Omega \qquad [V.116]$$

Le facteur de normalisation $\psi(\vec{x})$ est donné par:

$$\psi(\vec{x}) = \int_{\Omega} \psi(\vec{y},\vec{x})\,d\Omega \qquad [V.117]$$

La fonction de pondération $\psi(\vec{y},\vec{x})$ est supposée homogène et isotrope; elle dépend seulement de la distance $r = \|\vec{x}-\vec{y}\|$ entre le point source $\vec{x}$ et le point de réception $\vec{y}$.

Plusieurs fonctions de pondération sont disponibles. Dans notre étude, une distribution de type Gauss est utilisée pour calculer la valeur non locale de la force motrice d'endommagement. Cette fonction de distribution est exprimée par:

$$\psi(\vec{y},\vec{x}) = \left(\frac{1}{l\sqrt{2\pi}}\right)^{N_{\dim}} \exp\left(-\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{2l^2}\right) \qquad \text{[V.118]}$$

Le coefficient N_{dim} est le nombre des dimensions spatiales. Le paramètre l est la longueur caractéristique du matériau. Le facteur $\left(\frac{1}{l\sqrt{2\pi}}\right)^{N_{\dim}}$ est utilisé pour normaliser la fonction de pondération su rRN$_{\text{dim}}$ tel que:

$$\int_{R^{N\dim}} \psi(\vec{y},\vec{x})\ d\Omega = 1 \quad , \ \forall \vec{x} \in \Omega \qquad \text{[V.119]}$$

V.4. Application de la variable non locale:

La force motrice d'endommagement non-locale, peut être calculée par une méthode d'intégration numérique, par exemple, la méthode de Gauss dans le cadre de la méthode des éléments finis. Dans ce cadre, la valeur $\bar{\xi}_d$ sur un point géométrique $\vec{x}_i$ est calculée par :

$$\bar{\xi}_d(\vec{x}_i) = \frac{\sum_{N=1}^{N_e}\sum_{N=1}^{N_g} w_g \psi(\vec{y}_g,\vec{x}_i)\, \xi_d(\vec{y}_g) \det(J)_g}{\sum_{N=1}^{N_e}\sum_{N=1}^{N_g} w_g \psi(\vec{y}_g,\vec{x}_i) \det(J)_g} \qquad \text{[V.120]}$$

Où N_e est le nombre total d'éléments, N_g est le nombre des points de Gauss dans un élément, $\vec{y}_g$ est le vecteur de position du point d'intégration et W_g le coefficient de poids associé.

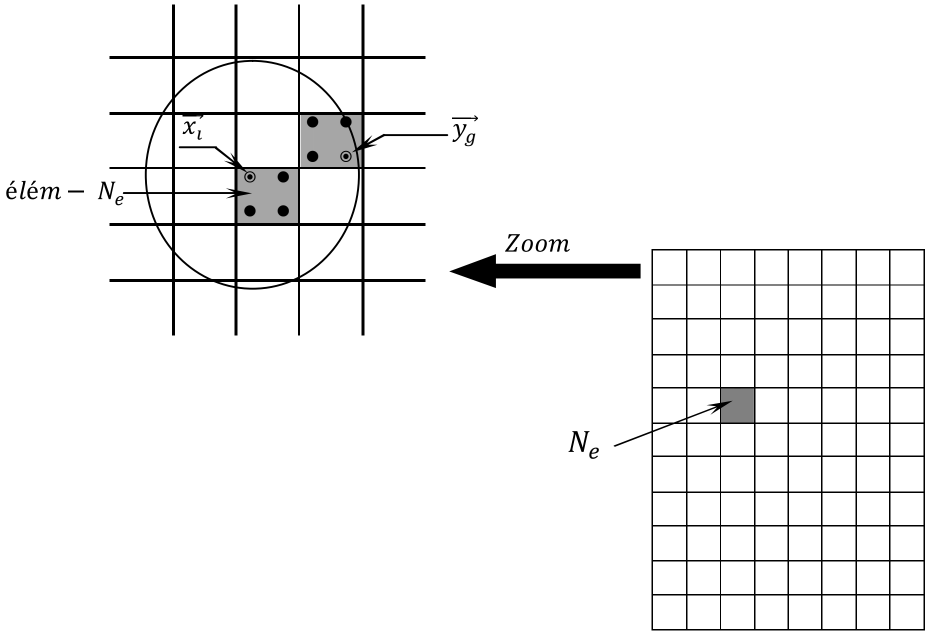


Figure V.2 : Illustration géométrique du calcul de la variable non-local, (D'après ASSEF Mohamad-Hussein)

La longueur caractéristique *l* détermine la dimension de la zone d'interaction qui influence la grandeur non-locale du point considéré $\vec{x}_i$. D'une manière générale, la fonction de Gauss ψ s'atténue assez rapidement au-delà d'une distance équivaut à quelques fois la longueur caractéristique *l*. On montre dans la Figure (V.3) un exemple de distribution de la fonction de Gauss avec la distance par rapport au point considéré. On constate que la région qui influence l'état physique du point considéré est d'environ 3 fois la longueur caractéristique ($r \leq 3l$).[Ass07]

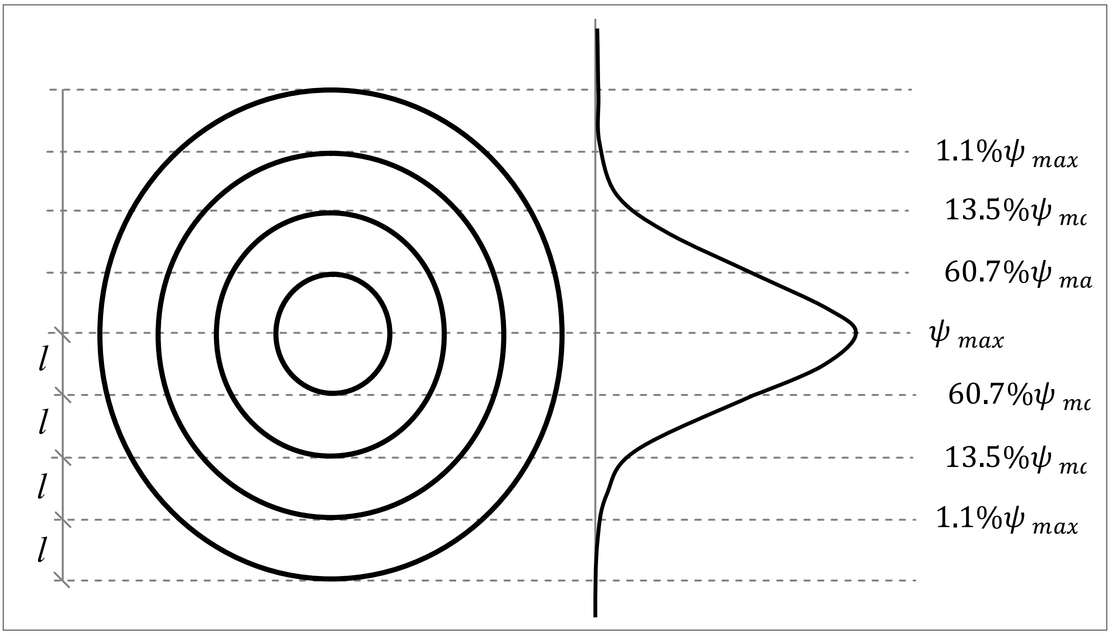


Figure V.3 : Exemple de distribution de la fonction de Gauss
(D'après ASSEF Mohamad-Hussein)

V.5. Réponse d'un élément de volume sollicité en traction

Un élément de volume est sollicité en traction uni axiale .le chargement se fait à déplacement imposé sur la figure nous présentons la géométrie et le chargement utilise.

V.5.1. Premier exemple

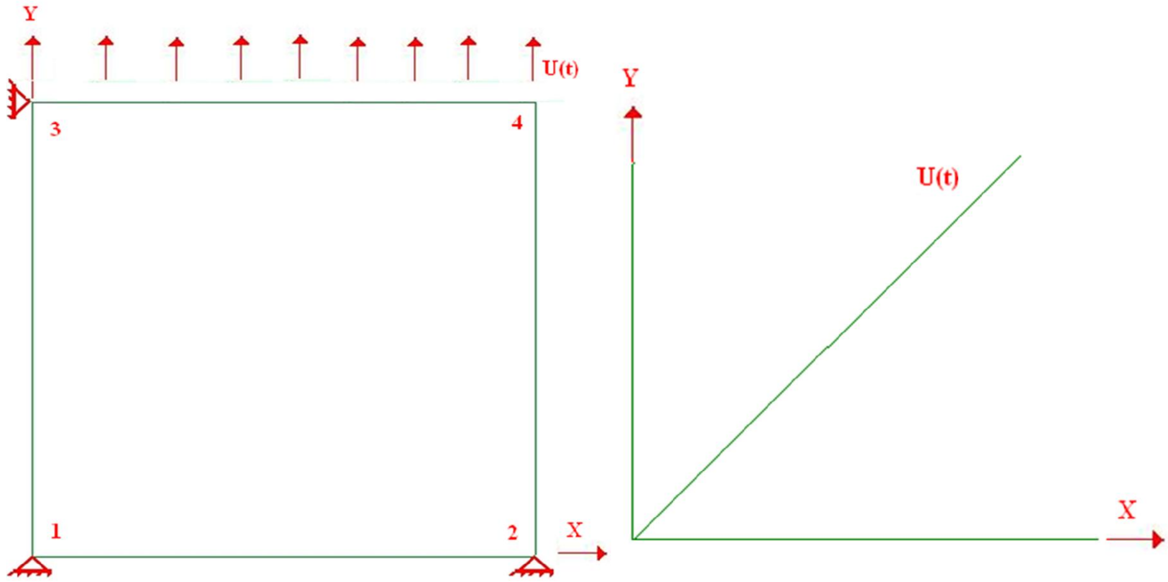


Figure V.4 : Géométrie et chargement

Les caractéristiques du modèle

E(MPa)	ν	e	A_t	B_t	ε_D	A_c	B_c	L
25000	0.2	1.0	0.8	20000	0.0001	1.4	1800	1

La figure ci-dessous présente la réponse locale et globale de cet essai ainsi que l'influence des paramètres At et Bt

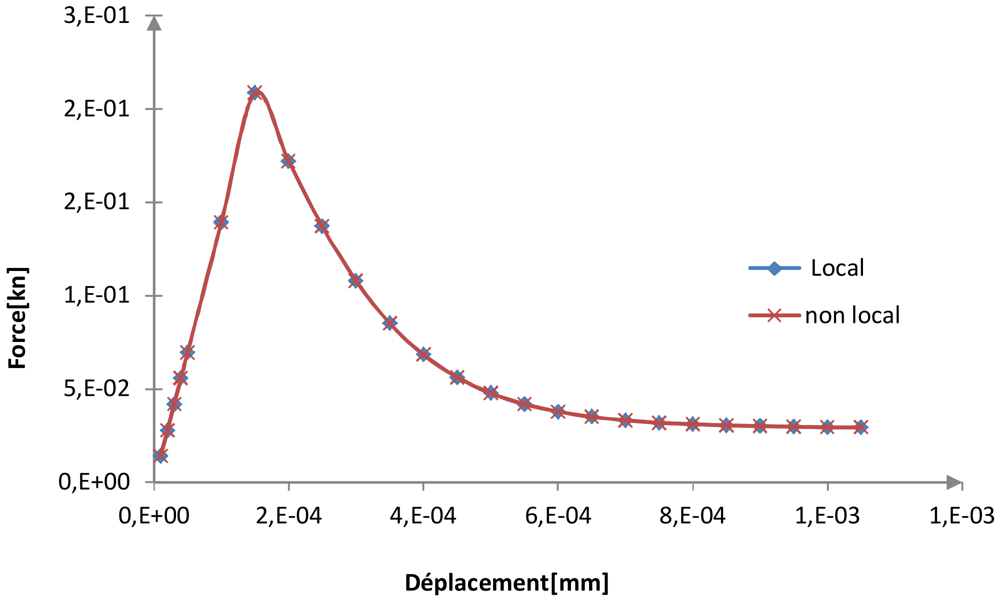


Figure V.5 - Réponse globale Force- Déplacement au nœud n°4

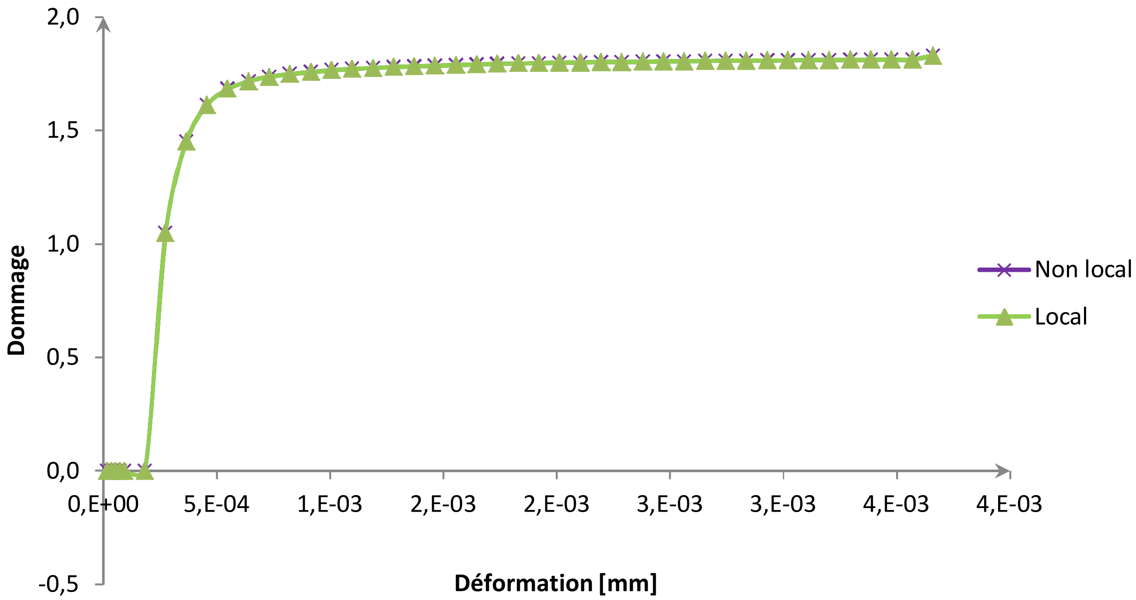


Figure V.6 - Evolution de dommage en fonction de la déformation au P.G n°4

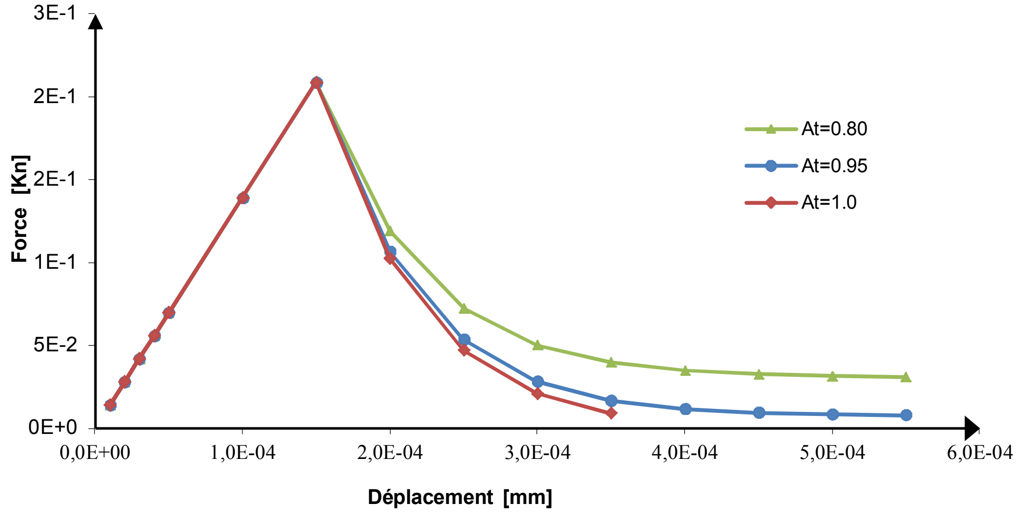


Figure V.7 : Influences du paramètre At dans le cas local

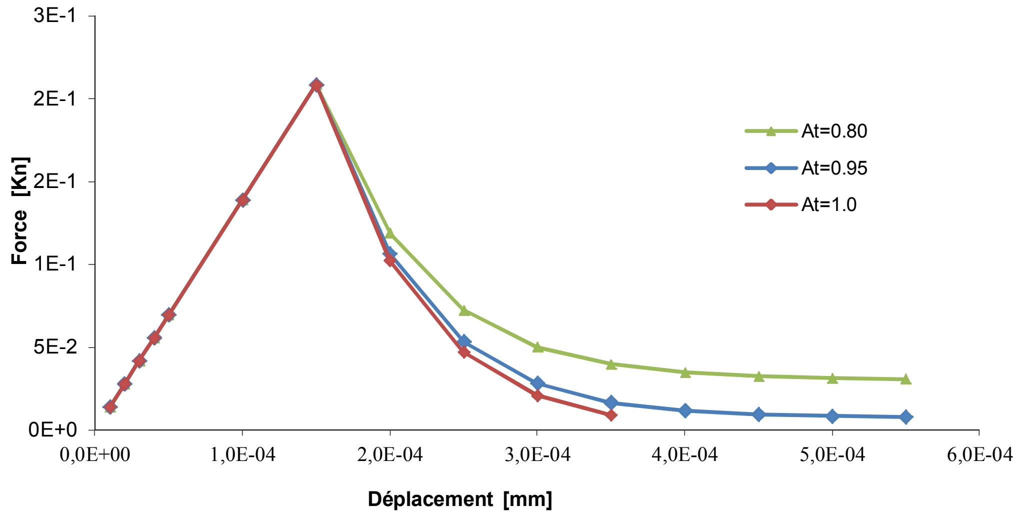


Figure V.8 - Influences du paramètre At dans le cas non local

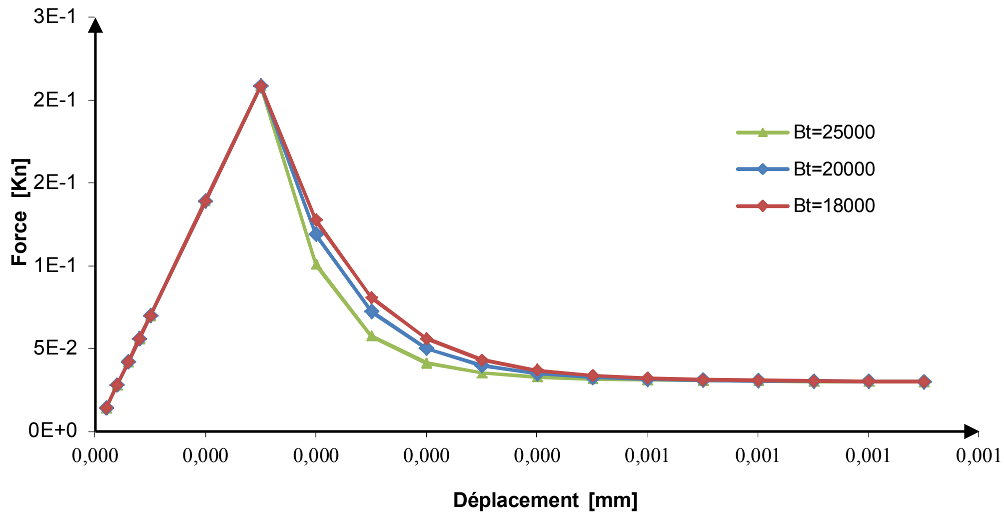


Figure V.9 : Influences du paramètre Bt dans le cas local

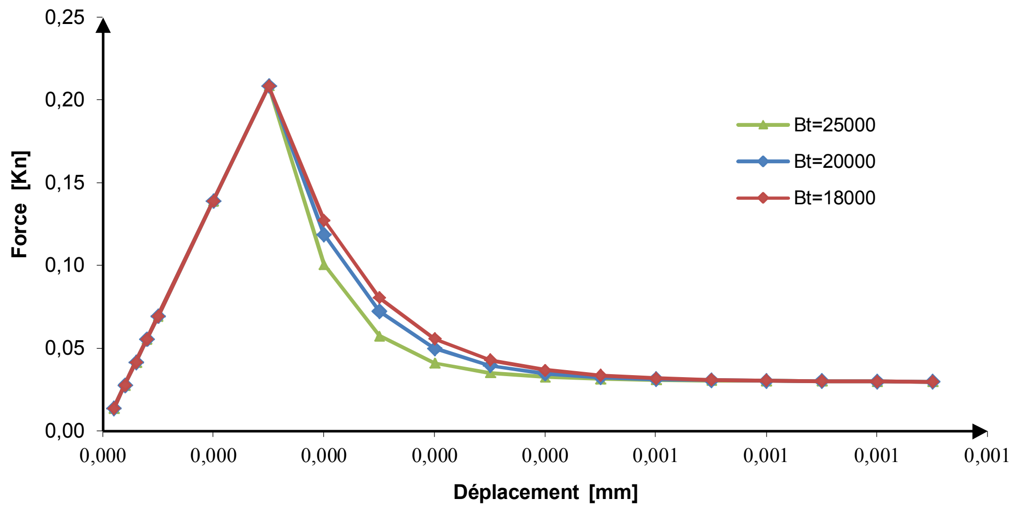


Figure V.10 : Influences du paramètre Bt dans le cas non local

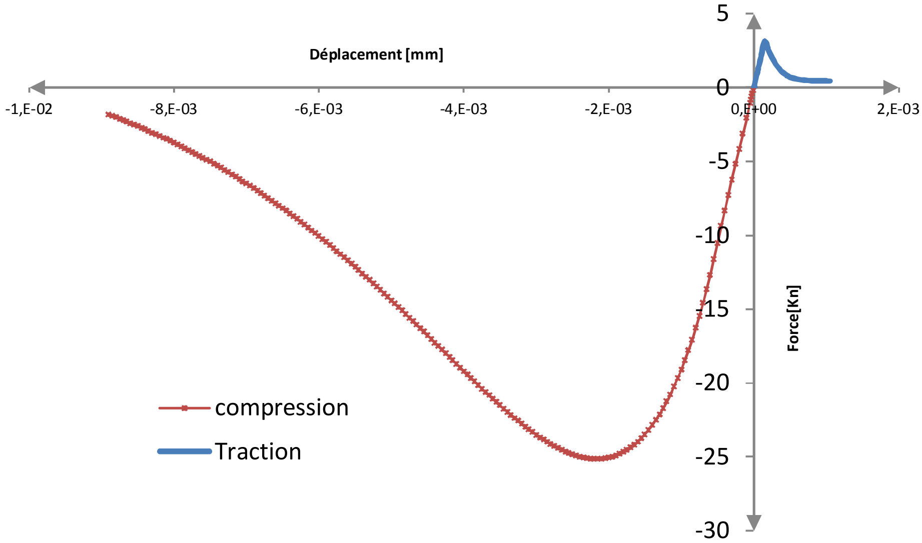


Figure V.11 : La réponse local et globale du l'essai de traction et compression

V.6. Application à une éprouvette en traction

Dans cette seconde partie, nous exposons les résultats obtenus de la simulation d'une plaque à deux entailles de dimension 0.18X0.06 sollicitée en traction fig. (V.12). Nous simulons cet essai avec un maillage triangulaire à trois nœuds avec un point d'intégration de Gauss. Au début, nous utilisons un seul maillage pour trois valeurs de R la longueur interne.

Le cas d'une éprouvette 2D en traction est traité avec le modèle non local. Les paramètres du matériau sont définis dans le tableau suivant

E(MPa)	ν	e	A_t	B_t	ε_D	A_c	B_c	R
21000	0.2	0.06	0.8	20000	0.0001	1.4	1800	0.03

Une condition limite d'encastrement est appliquée d'un côté et un déplacement est imposé de l'autre pour cela nous avons repris l'exemple fait par Nedjar[7]

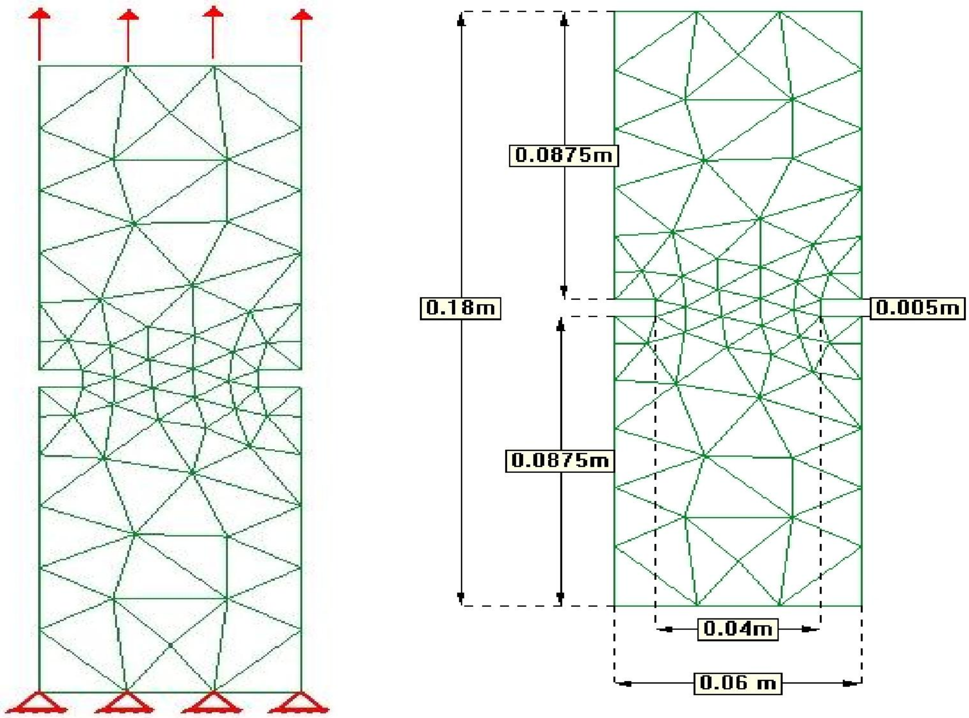
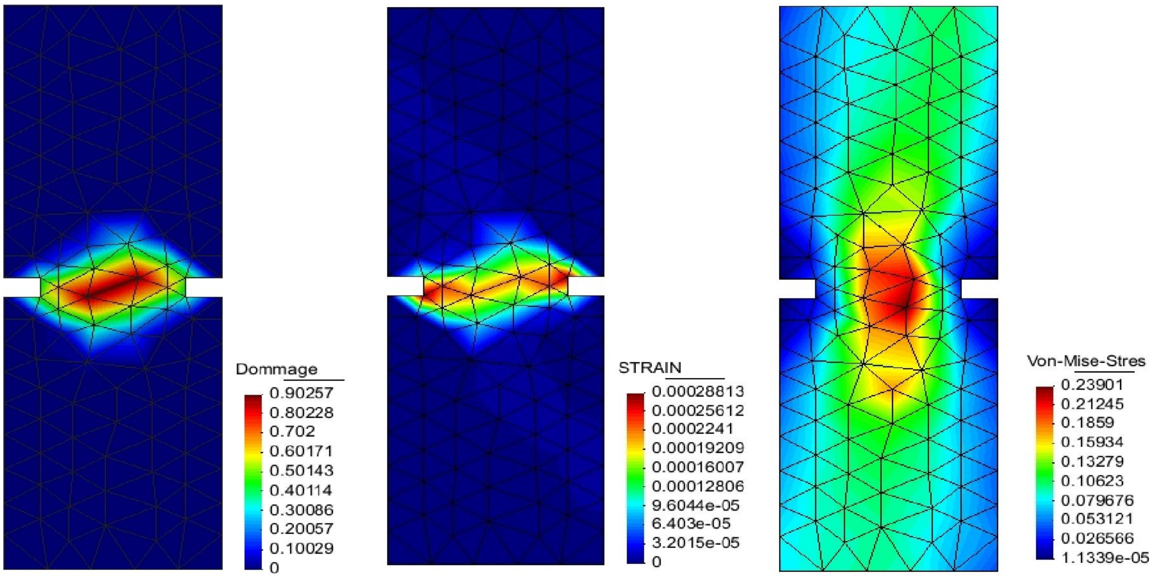


Figure V.12 : Les conditions aux limites et les dimensions

V.6.1 : Etude selon les differents valeurs de la longueur interne

Un maillage est utilisé avec une taille d'élément h=0.011m. Le calcul non local est réalisé pour trois valeurs de R=0.03 R=0.04 et R=0.05, alors que le calcul local est obtenu a l=0

On montre sur les figures (V.13) la distribution du dommage D, de la déformation et de la contrainte de Von-Mises respectivement dans le cas local et sur les figures (V.14), (V.15) et (V.16) pour les différentes valeurs de R(R=0 .03, R=0.04 et R= 0.05) respectivement dans le cas non local.



Dommage Déformation équivalente Contraintes de Von Mises

Figure V.13 : Distribution du dommage local, de la déformation et de la contrainte de von-Mises

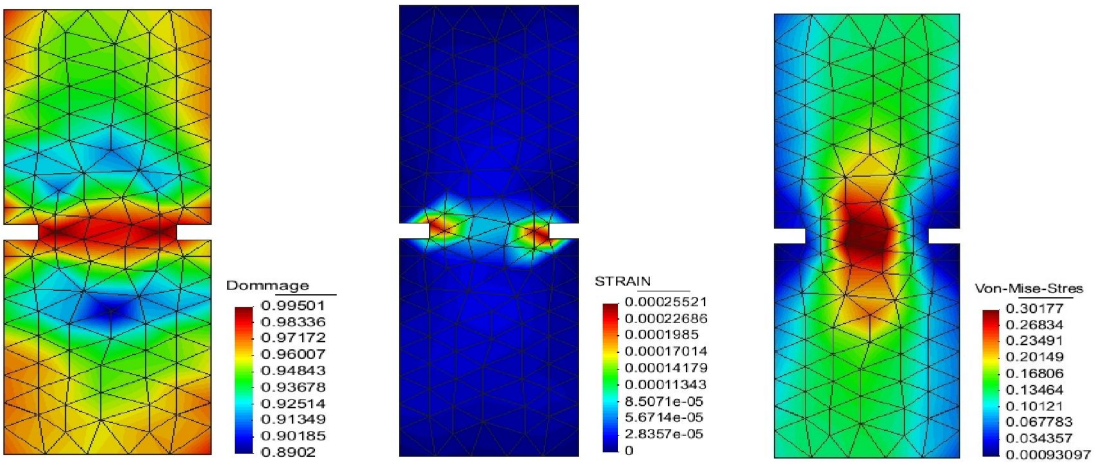


Figure V.14 : Distribution du dommage non local, de la déformation et de la contrainte de von-Mises R=0,03 mm

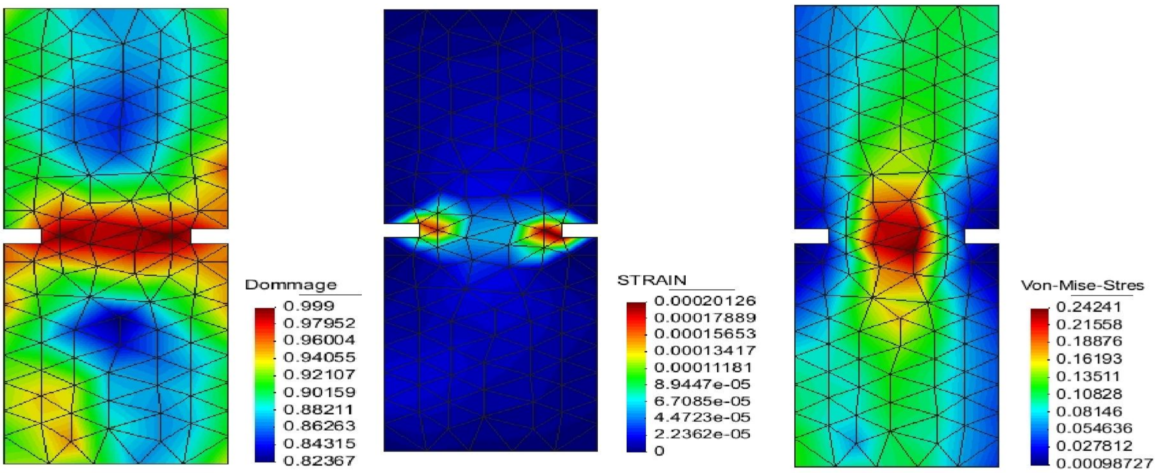


Figure V.15 : Distribution du dommage non local, de la déformation et de la contrainte de von-Mises *R*=0,04 mm

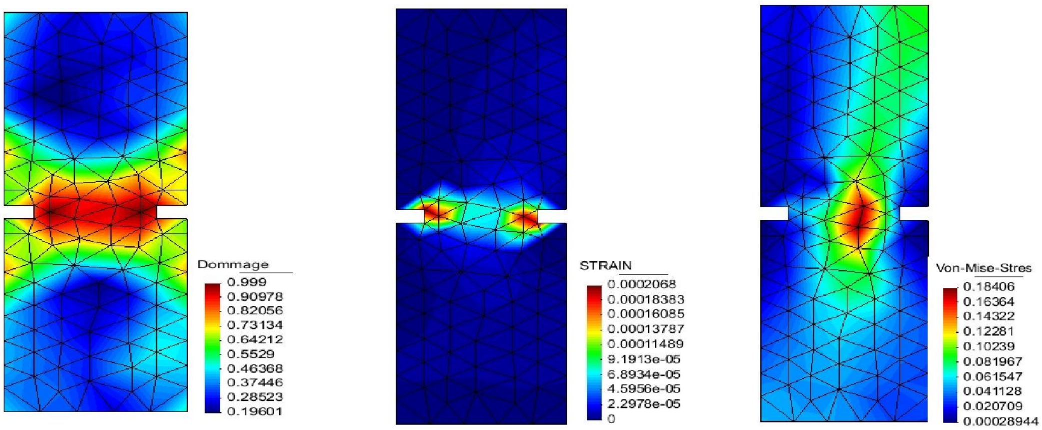


Figure V.16 : Distribution du dommage non local, de la déformation et de la contrainte de von-Mises *R*=0,05 mm

L'analyse des iso valeurs montre que l'étendue et la forme de la zone de localisation dans le cas local (*R*=0), se fait toujours sur une rangée d'éléments par contre, dans le cas non local *R* (*R*=0.03, *R* = 0.04 et *R* = 0.05), on constate que l'étendue et la forme de la zone de localisation forme un nuage de points autour de la partie centrale de la plaque. Le volume de la zone de localisation dépend donc de la longueur interne *R*.

En augmentant la valeur de *R*, on constate que l'étendue de la zone de localisation augmente. La figure (V.17) présente la courbe force-déplacement selon les différentes valeurs de *R*

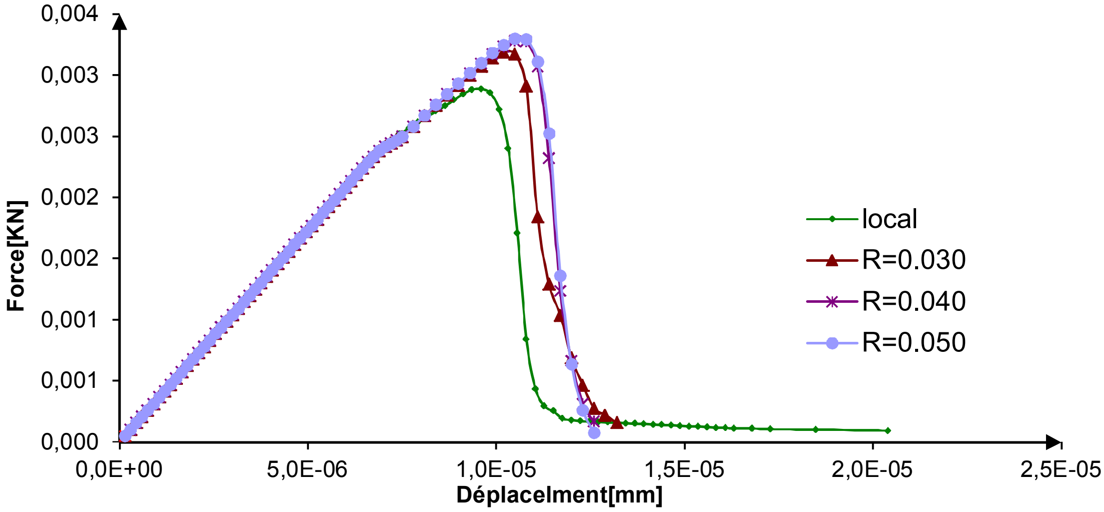
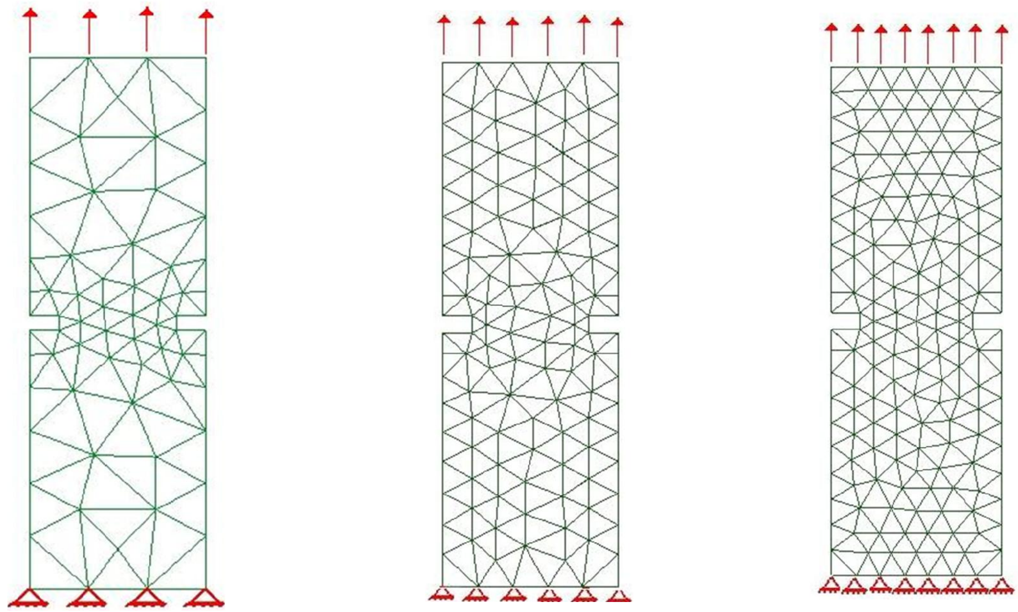


Figure V.17 : Courbe Force-Déplacement pour différentes valeurs de "*R*"

Nous constatons que la déformation à rupture (ductilité) est d'autant plus grande que la valeur de *R* est élevée. Nous remarquons aussi que durant la phase d'adoucissement, les courbes forces-déplacements se superposent d'autant mieux que la valeur de *R* est élevée. Ceci montre que les valeurs non nulles de *R* assurent l'indépendance de la solution vis-à-vis de la taille des éléments.

V.6.2 : Etude selon les differents maillages

Trois maillages réguliers sont utilisés avec une taille d'élément h=0.019 m pour le maillage M1, h=0.011m pour le maillage M2 et h=0.088 m pour le maillage M3. Le calcul non local est réalisé pour une seule valeur de *R*=0.05



M1 : 102 Elerments *M2 : 210 Elerments* *M3 : 302 Elerments*

Figure V.18 : Les différents maillages

V.6.2.1.Etude selon les differents pas d'allongements

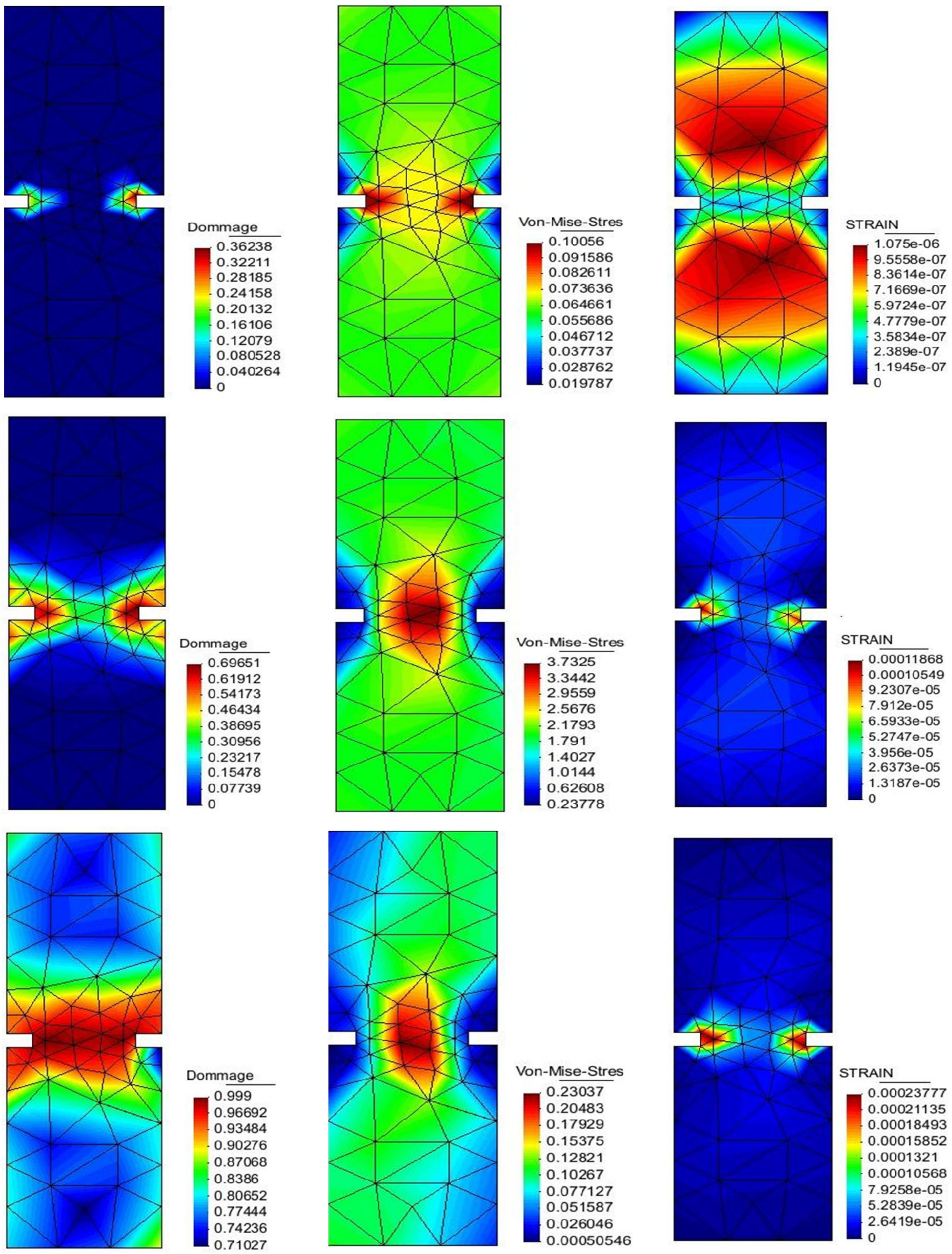
La distribution de la contrainte et de la déformation de Von Mises, ainsi que l'endommagement sont illustrées sur les figures (V.19), (V.20), (V.21), pour les différents types de maillages M2, M3 et M4 respectivement, pour trois pas d'allongements correspondants à l'initiation du dommage, propagation du dommage et la rupture de la plaque.

Au cours de la phase de propagation, nous constatons que le dommage évolue d'une dans la partie centrale de l'éprouvettes. La rupture de la plaque se traduit par l'incapacité de la plaque a supporté des contraintes, on remarque l'apparition d'une bonde de plus en plus fine du dommage correspondant aux différents types du maillage M1, M2 et M3, on remarque aussi que la rupture s'annonce à un déplacement (U=1,76x 10^{-5}mm) pour le maillage M1, un déplacement ($U=1,53x\ 10^{-5}$mm) pour le maillage M2 et un déplacement ($U=1,65x\ 10^{-5}$mm) pour le maillage M3.

$U=3,2x\ 10^{-7}$
Initiation du dommage

$U=7,3x\ 10^{-6}$
Propagation du dommage

$U=1,76x\ 10^{-5}$
Rupture de la plaque



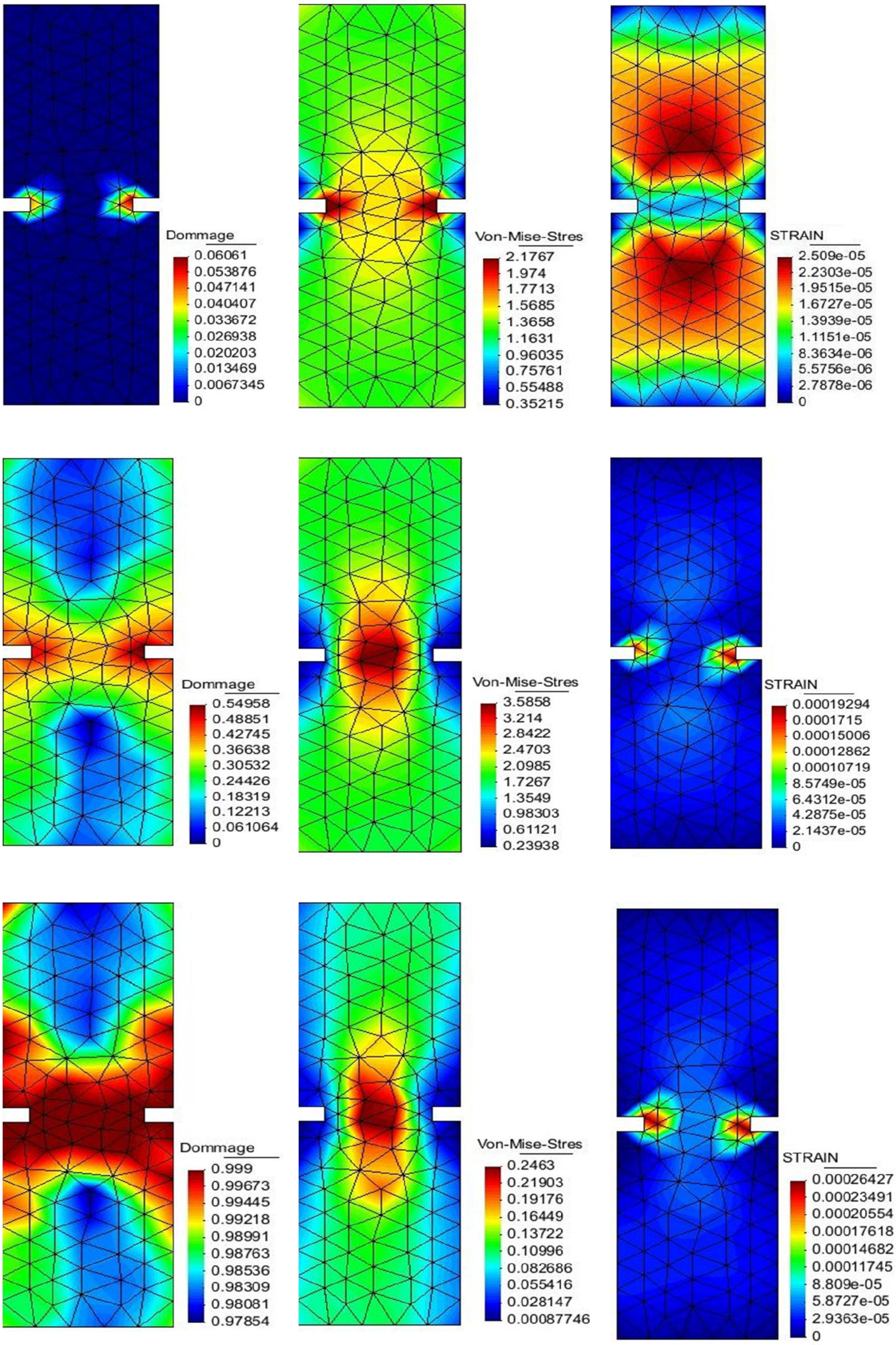
Dommage Contraintes de Von Mises Déformation équivalente

Figure V.19 : les isovaleurs pour le maillage M1 à 102 éléments

$U=3,0x\,10^{-7}$
Initiation du dommage

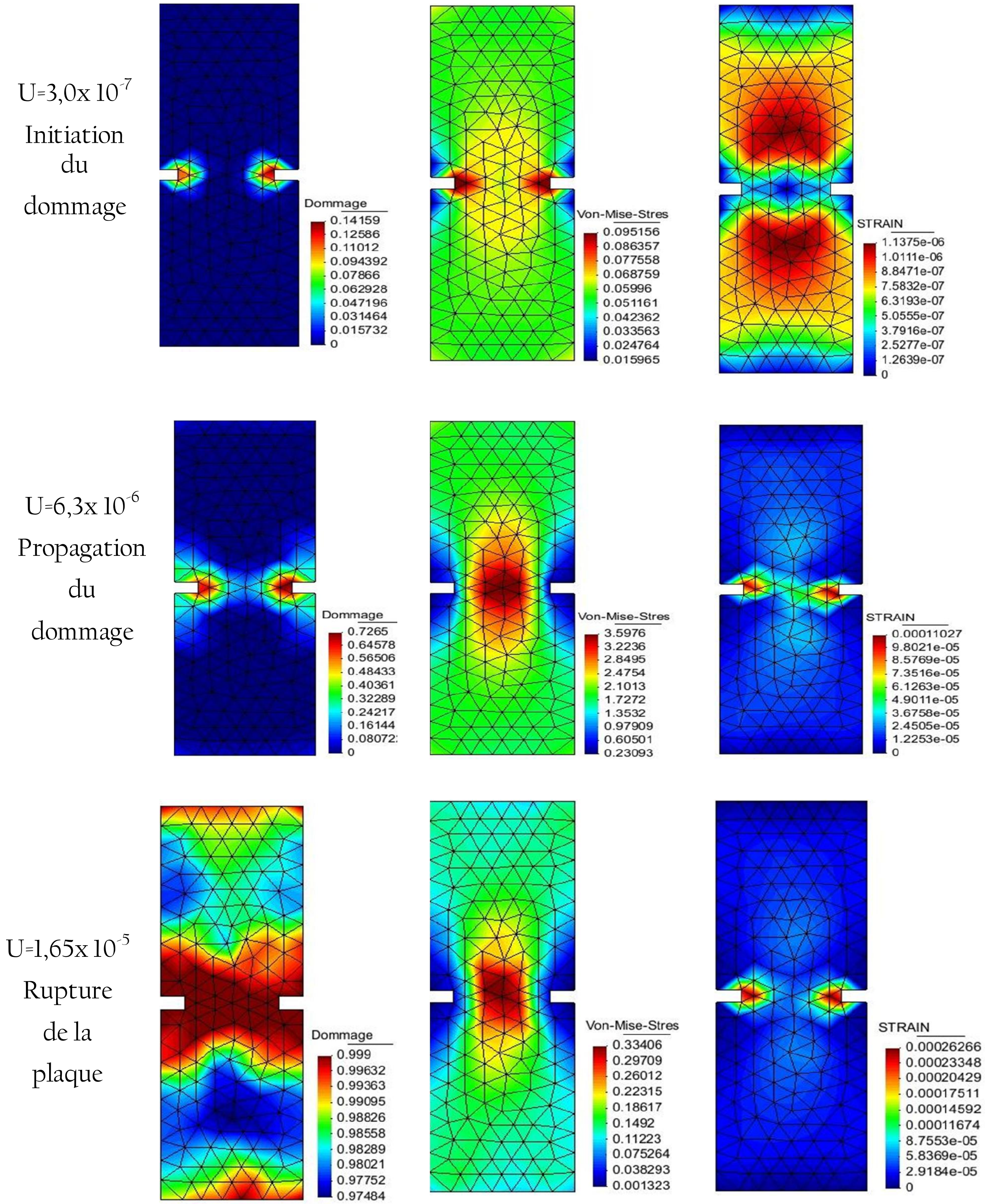
$U=8,6x\,10^{-6}$
Propagation du dommage

$U=1,53x\,10^{-5}$
Rupture de la plaque



Dommage　　Contraintes de Von Mises　　Déformation équivalente

Figure V.20 : les isovaleurs pour le maillage M2 à 210 éléments

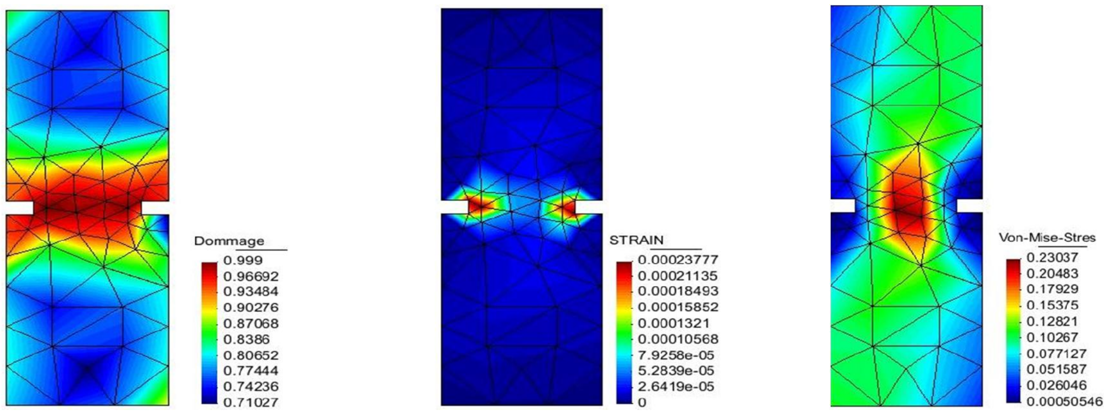


Dommage Contraintes de Von Mises Déformation équivalente

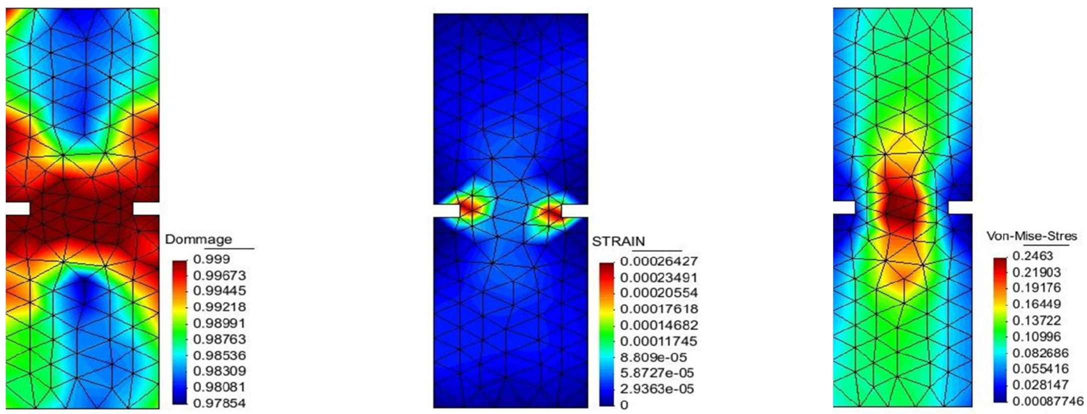
Figure V.21 : les isolateurs pour le maillage M3 à 302 éléments

V.6.2.2.Rupture de la plaque pour les differents maillages dans le cas non local.

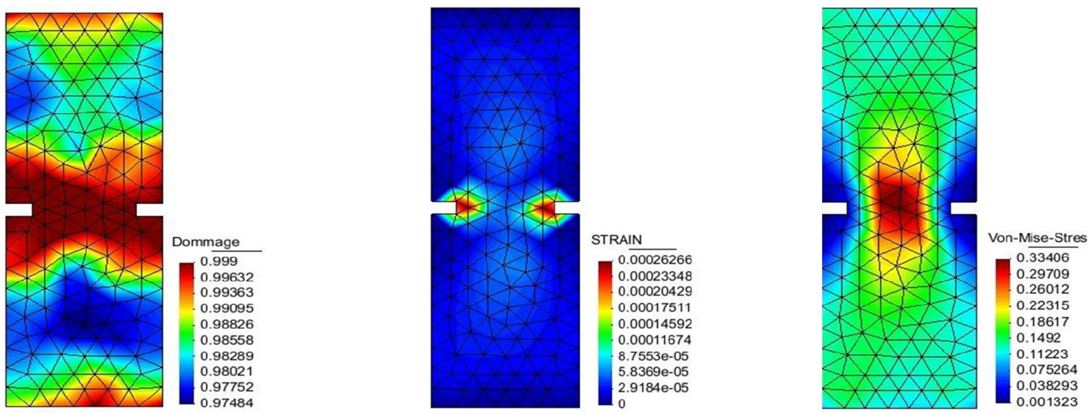
On montre sur la figure (V.22) la distribution du dommage *D*, de la déformation et de la contrainte de Von-Mises respectivement pour les différents maillages M1, M2 et M3



M1= 102 éléments



M2= 210 éléments



M3=302 éléments

Figure V.22 : Distribution du dommage non local, de la déformation et de la contrainte de Von-Mises pour les différents maillages

L'analyse des isovaleurs montre que l'étendue et la forme de la zone de localisation dans le cas local (*R*=0), se fait toujours sur une rangée d'éléments et ceci quel que soit le maillage considéré.

Nous constatons que dans le cas local ,la taille de la zone de localisation est directement lié à la taille du maillage ,la localisation se fait comme observé précédemment ,toujours sur une range d'éléments, la largeur de cette bande est liée directement à la discrétisation spatiale ce qui nous ramène à dire que si on prend des pas de h très faible , on aura une largeur de bande presque nulle par contre le cas non local pour une valeur de *R* donnée, on remarque que la zone de localisation est quasiment identique sur les trois maillage

La figure (V.23) présente la courbe force-déplacement dans le cas local selon les différents maillages M1, M2 et M3

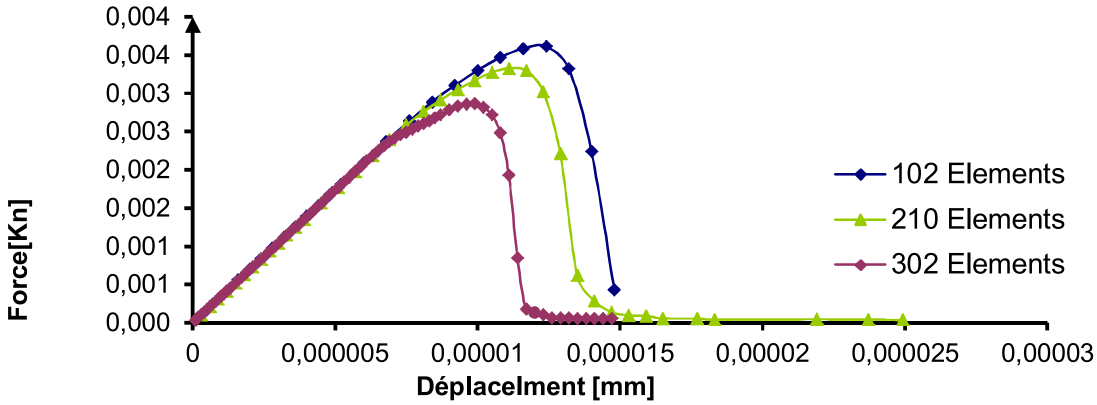


Figure V.23 : Courbe force –déplacement local selon les différents maillages M1, M2 et M3

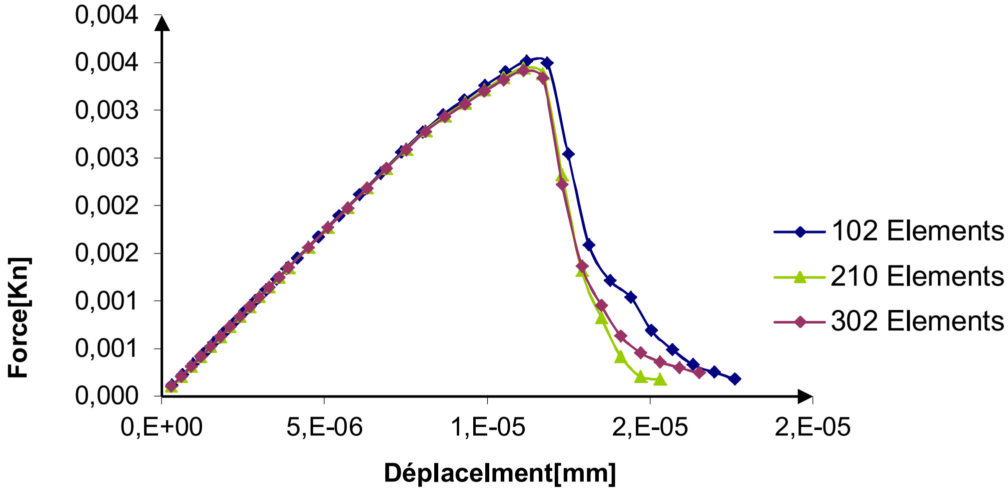


Figure V.24 : Courbe force- déformation dans le cas local selon les différents maillages M1, M2 et M3

Cette figure montre la superposition de La réponse globale pour les trois maillages, On peut noter l'objectivité de ces résultats. Il n'y a pas d'influence du maillage sur la réponse globale de la structure. On peut aussi noter la bonne prédiction de la résistance maximale de la plaque Afin d'illustrer la non dépendance au maillage de la réponse.

V.6. Conclusion :

Cette formulation non locale à gradient d'endommagement assure bien l'indépendance de la solution vis-à-vis de la taille des éléments du maillage dans le stade post critique. Ceci est dû au fait que la localisation de l'endommagement est gouvernée par la valeur de la longueur interne *R*, si *R*=0 on retrouve une formulation locale qui donne une localisation dépendante du maillage. Pour des valeurs de *R* plus grande que la taille des éléments (h) alors l'endommagement est homogénéisé sur plusieurs éléments, assurant ainsi (pour *R* fixé) une solution indépendante du maillage tant que $R \geq h$.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Conclusion Générale

Au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés au comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles en terme d'endommagement, les formulations classiques sont fortement dépendantes des paramètres de discrétisation dans la phase poste critique, l'hypothèse de la mécanique local est remise en cause.

L'objectif de ce travail est de disposer de justification physique permettant de modéliser où et quand un endommagement apparait au sien du matériau.

Le modèle décrit la dégradation d'un milieu, supposé initialement vierge de tous défauts, nous avons retenu la notion de dommage introduite par Kachanov avec une variable d'endommagement, homogène et isotrope, ce modèle tient compte des caractéristiques mécaniques uniquement au point choisi sans prendre en considération les points voisins. Ce qui engendre une sous-estimation de la résistance ultime du matériau, pour essai de résoudre ce problème, nous avons cherché une technique qui nous permit d'affronté ce problème, pour ce faire nous nous somme focaliser sur un modèle on y introduisant une formulation non locale pour l'évolution de l'endommagement.

.

La pertinence de cette approche est testée à travers différents cas de configurations, Grâce à cette méthode de régularisation nous avons éliminé quelques problèmes de convergence et de stabilité dans le calcul, Nous avons proposé modèle d'endommagement non local, afin de prendre en compte l'effet de l'évolution de la longueur interne avec l'évolution de l'état d'endommagement du matériau.

Il a été clairement montré que l'approche non locale utilisée permet de corriger la dépendance des résultats du maillage et de maîtriser le processus de rupture par formation des bandes de localisation.

Comme perspective de ce travail :

- nous envisageons une confrontation des résultats obtenus a des résultats expérimentaux même dans les cas simples de sollicitations.

- Afin d'appliquer le modèle à des calculs de structures réelles une implémentation dans un code de calcul industriel est nécessaire.

- L'usage d'un adaptif pour le quel une taille caractéristique de l'épaisseur de la fissure définit la taille minimal qui pourrait être satisfaisante. une méthode de partition proposé par Simone associe au modelé non local pourrait fournir une réponse acceptable au problème de la fissuration.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1]. Mazars, J. et Bazant, Z. P. Eds., Cracking and damage, Strain localization and Size effect, Elsevier Pubs(1988)

[2]. Ramtani, S. “contribution a la modélisation du comportement multiaxial du béton avec description du caractère unilatéral” thèse de doctorat de l'université de paris 6. (1990).

[3]. Terrien, m. “émission acoustique et comportement mécanique postcritique d'un béton sollicite en traction” bull, de liaison lab. des ponts et chaussées, 105, ref. 2398. 1980.

[4]. Mazars J, Pijaudier-Cabot G, Saouridis C “ size effect and continous damage in cementations materials ” Int. Jour, of Fracture, 51, p. 159-173. (1991)..

[5]. C.Saouridis,“ identification et numérisation objective des comportements adoucissants : une approche multi échelle de l'endommagement du béton” thèse de doctorat de l'université de paris 6. 1988

[6]. Hordijk, d. A. “tensile and tensile fatigue behaviour of concrete: experiments,modelling and analyses”,heron, delft univ. of tech., the netherland, 37, n° 1. 1992.

[7]. Nedjar. B “ mécanique de l’endommagement. théorie du premier gradient et application au béton ” thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2002

[8]. Davenne L, Saouridis C. Diau J.M “ un code de calcul par la prévision du comportement de structures endommageables en , béton arme, ou en béton de fibres ” ann. itbt, n° 478, 1989

[9]. L'hermite, R. “influence de la dimension absolue sur la résistance a la flexion, annales” itbtp, n° 309-310, p. 39-41. 1973.

[10]. Z. P. Bažant et G. Pijaudier-Cabot, “ measurement of the characteristic length of nonlocal continuum ”. journal of engineering mechanics, 115:755–767, 1989.

[11]. Mazars J., Berthaud Y., Ratami S., “The unilateral behaviour of damage concrete”,Journal of Engineering Fracture Mechanics”. Vol. 35, 4-5, pp. 629-635. 1990

[12]. Nguyen Xuan Huy “ vulnérabilité des structures en béton arme a voiles porteurs: expérimentation et modélisation ”, thèse de doctorat de l’institut national polytechnique de Grenoble. 2006

[13]. Vonk, R. A. “A micromechanical investigation of softening of concrete loaded in Compression”Heron Publication, Delft University of Technology, The netherland,vol.38, n°3. (1993).

[14]. Chaboche J.L et Lemaitre J., “mécanique des matériaux solides ”, édition dunod , 1985

[15]. P. Bažant, “ instability, ductility and size effect in strain-softening concrete “. journal of engineering mechanics, 105:331–344, 1976.

[16]. Mazars J., “application de la mecanique de l’endommagement au comportement non lineaire et a la rupture du bêton de structure ”, these de doctorat, universite pierre et marie curie, paris 6, 1984

[17]. Kachanov, L.M, « Time of rupture process under creep condition » TVZ Akad Nauk. SSR otd tech Vol 8. pp 26-31, 1958

[18]. Rabotnov Y.N., creep rupture of (proc.Xll Int.cong.Appl.Mech., 1968, Stanfor-Springer, 1969).

[19]. Almansba. M. “Modélisation des structures élastoplastiques généralisées (Approches locale et non locale appliquées aux matériaux élastoplastiques endommageables) ”. thèse de doctorat, université Mouloud Mammeri de tizi-ouzou

[20]. Cordebois J. P. and Sidoroff F., “Damage Induced Elastic Anisotropy”, Eudomech 115, Villard de Lens. 1982

[21]. Colleman B.O., et Noll W.,«on the thermostatic of continous media», Arch.Rat.Mech Vol.A,PP.:97-128,1959

[22]. Lakes R., "experimental methods for study of cosserat elastic solids and other generalized elastic continua". In Mühlhaus, Continuum models for materials with microstructure, wiley,PP. / 1-25. 1995.

[23]. Lemaître J., Chaboche J. L., "Mécanique des matériaux solides", Ed. : Dunod Paris, 1988

[24]. C.Comi. Computational modelling of gradient-enhanced damage in quasi-brittle materials Vol 4, PP 17–36, 1999.

[25]. Berthaud Y. Torrenti J.M Benaija E.H., “Experimental investigations of the localization zones in quasi-brittle materials”, In bazant, Fracture and damage in quasi brittle structures , E and FN SPON, PP419-426

[26]. Billardon R.,"Mesh sensitivity of fully coupled strain and damage finite element analysis","High temperature fracture-mechanisms and mechanics", Ed. Bensussan and mascarell, Mech. Eng. Pub. Lim., 1990

[27]. Ortiz M., Leroy Y. And Needleman A.; "A finite element method for localised failure analysis". Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. Vol. 61 PP. : 189-214, 1987

[28]. Pijaudier-cabot G., Mazars J. Et Pulikowski J.,"Steel concrete bond analysis with non local continuous damage" J. Of D. tr. Engrg. Comp., Vol. 5, PP. : 141-150, 1991

[29]. I.Kunin. Mechanics of generalised continuum. Springer Verlag, 1968

[30]. A.Eringen and D.Edelen. On non-local elasticity. Int. J. of Eng. Sci, Vol 10 N 3, 1972.

[31]. G. Pijaudier-Cabot et Z. Bažant "non local damage theory. Journal of engineering mechanic», 113:1512–1533, 1987.

[32]. Almansba M, Saanouni K. et Hannachi N. E., "formulation d'un modèle élastoplastique en gradient d'endommagement " 3ieme congres international conception et modélisation des systèmes mécaniques cmsm'2009, du 16 au 18 mars, 2009, Tunisie

[33]. Jirasek M. et T. Zimmermann : Rotating crack model with transition to scalar damage. Journalof Engineering Mechanics, 124(3):277–284, 1998

[34]. G. Pijaudier-Cabot et Z. Bažant : Nonlocal damage theory. Journal of Engineering Mechanics,113:1512–1533, 1987.

[35]. Z. P. Bažant et G. Pijaudier-Cabot, " nonlocal continuum damage, localization instability and convergence ". journal of applied mechanics asme, 55:287–294, 1988

[36]. R. H. J. PEERLINGS : *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven, 1999

[37]. R. H. J. Peerlings, R. De Borst, W. A. M. Brekelmans, J. H. P. De Vree et I. Spee "some observations on localisation in non-local and gradient damage models". european journal of mechanics a/solids, 15(6):937–953, 1996b

[38]. Askes.H et l. J. Sluys "explicit and implicit gradient series in damage mechanics "european journal of mechanics a/solids, 21:379–390, 2000

[39]. R. H. J. Peerlings, R. De Borst,w. A. M. Brekelmans et J. H. P. De Vree ," gradient enhanced damage for quasi-brittle materials", international journal for numerical methods in engineering, 39:937–953, 1996a

[40]. R. H. J. Peerlings, M.G.d. Geers, R. De Borst et W. A. M. Brekelmans " a critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softenig continua damage modelling of concrete fracture" international journal of solids and structures, 38:7723–7746, 2001

[41]. L. Jason " relation endomanagement-perméabilité pour les bétons. application au calcul de structures".these de doctorat, ecole centrale de nantes, 2004.

[42]. Dufour, G. Pijaudier-Cabot, M. Choinska et A. Huerta " extraction of a crack openingfrom a continuous approach using regularized damage models". 2008

[43]. H.Borouchaki, P.Laug, A.Cherouat, and K.Saanouni. Adaptive remeshing for ductil fracture prediction in metal forming. C.R.Academ. Sciences, Vol 330 No 10, PP 709–716, 2002

[44]. R.A.B.Engelen. Plasticity-induced Damage in Metals. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2005

[45]. H.Askes.and,L.J.Sluys."Explicit and implicit gradient series in damage mechanics"European Journal of Mechanics A/Solids, Vol 21, PP 379–390, 2002

[46]. Shen X. and k.Saanouni, " a gradient-dependent nonlocal constitutive formulation for thermo-elasto-plasticity coupled with isotropic damage " tech. report, university of technologyof troyes, 2002

[47]. D.Sornin and K.Saanouni. Formulation élastoplastique non locale en gradient d'endommagement.17iem Congrés Français de Mécanique, 2005.

[48]. Owen D. R. J. and Hinton E., «Finite elements in plasticity, theory and practice", ed.Pineridge Press Limited.1980.

[49]. Saanouni .k., Almansba .M , Hannachi N.E "damage-gradient based non local Formulations revisited ", 7th euromech solid mechanics conference (esmc2009), du 07 au 11 septembre 2009, lisbon, portugal

[50]. Haidar.Kh "modélisation de l'endommagement des structures en béton approches numeriques et effet de la microstructure sur les propriétés de rupture " thèse de doctorat université de Nantes 2002.

[51]. Mohamad-Hussein Assef "modélisation du comportement mécanique des géométraux semi- fragiles soumis a des sollicitations mécaniques et a la dégradation chimique" universite des sciences et technologies de Lille

[52]. Almansba. M, Hannachi N. E., "régularisation d'un modèle élastoplastique par introduction d'un gradient d'endommagement", xix^{eme} congres français de mécanique, cfm'09, du 24 au 28 aout 2009. France

[53]. M .almansba, N.E. Hannachi, O.Belaidi, "formulation d'un modèle élastoplastique couple a l'endommagement non local ", vi ^{emes} journees d'etudes techniques 2010 the international congress for applied mechanics, du 05 au 07 mai 2010, marrakech – maroc

[54]. M Almansba, N.E. Hannachi, « présentation d'un modèle élastoplastique couple a un endommagement non local », congres cima2010 du 23, 24 et 25 mai 2010, annaba algerie.

[55]. M. Almansba [1-2], K. Saanouni [1] and N. E. Hannachi , "isotropic elastoplasticity fully coupled with non-local damage", scientific research engineering, volume 2 number 6 pp : 421-431 ; juin 2010