

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etude
de MASTER ACADEMIQUE**
Filière : Automatique
Spécialité : Commande des systèmes

Présenté par
Gheddache Rebiha

Mémoire dirigé par **Mme NAIT ABDESSELAM Aldjia**

Thème

**Estimation d'état par étoile de Kleene
des graphes d'événements P-temporel**

Mémoire soutenu publiquement le 30/09/2015 devant le jury composé de :

Mr Kara Redouane
MAA, UMMTO, Président

Mme Nait abdesselam Aldjia
MAA, UMMTO, Rapporteur

Mme Kharaz Khedoudja
MAA, UMMTO, Examineur

Mme Yousfi Safia
MAA, UMMTO, Examineur

Remerciements

Je tiens particulièrement à témoigner ma toute gratitude et à exprimer ma considération à Mme A.Nait Abdesselam pour avoir bien voulu accepter de m'encadrer, et pour m'avoir guidé tout au long de ce travail.

Je remercie les membres du JURY pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je remercie vivement mes très chère amies Sihem Bouroubi et Lynda Maguemoun qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Gheddache

Rebiha

Je dédie ce travail

A

La mémoire de mon père

Table des matières

Introduction générale	1
CHAPITRE 1 : Outils algébriques	
Introduction	3
1. Les ensembles ordonnés	3
1.1 Relation d'ordre et structures ordonnées.....	3
1.2. Demi -treillis et treillis	4
2. Dioïdes et structures ordonnées.....	5
2.1. Notions de base sur les dioïdes	5
2.2. Relation d'ordre dans un dioïde	6
2.3. Dioïdes et treillis	6
2.4. Applications définies sur des dioïdes	7
3. Dioïdes matriciels.....	9
3.1. Propriétés spectrales des matrices définies dans un dioïde	10
4. Résolution d'équation dans un dioïde	12
4.1. Théorie de la résiduation	12
4.2. Applications résiduables sur les dioïdes complets (Résolution de $ax \preceq b$ et $xa \preceq b$)	12
4.3. Extension aux dioïdes de matrices : $\mathbf{AX} \preceq \mathbf{B}$ et $\mathbf{XA} \preceq \mathbf{B}$	13
4.4. Equations aux points fixes.....	14
4.5. Résolution d'équation par étoile de Kleene	15
4.6. Fonctions (min, max, +)	17
4.6.1. Définitions	17
Conclusion.....	17
CHAPITRE 2: Systèmes à événements discret	
Introduction	19
1. Modélisation des système à événement discret.....	19
2. Les Réseaux de Petri (RDP)	19
2.1. Rappels et notions de base	20
2.2. Marquage d'un RDP	20
2.3 Tir des transitions	21
2.4. Quelques propriétés des RDPs	22
2.5. Les Classes des Réseaux de Petri	23

Table des matières

3. Les Graphes d'événements temporisés	24
3.1. Modèles algébriques des graphes d'événements temporisés	25
3.1.1. Modèles en équation aux dateurs (domaine événementiel)	25
3.1.2. Modèles en équation aux compteurs (domaine temporel).....	27
4. Graphes d'événements P-temporels	29
4.1. Règles de franchissement pour les GEP-temporel	29
4.2. Condition de franchissement d'une transition.....	30
4.2.1. Etat d'un jeton	30
4.3. Propriétés des Graphes d'événement P-temporel.....	31
5. Modèle de GE P-temporels dans l'algèbre (Max, +)	32
Conclusion	34
CHAPITRE 3 : Estimation d'états par étoile de Kleene	
Introduction	35
1. Rappels sur les observateurs	36
1.1 Observateurs en continu	37
1.2 Observateur dans l'algèbre max-plus	37
1.2.1 Observabilité des graphes d'événements temporisés	37
2. Estimation d'état par étoile de kleene	38
2.1 Principe de la méthode d'estimation par étoile de kleene	38
3. Développement de la méthode de résolution par étoile de Kleene	39
3.1. Formulation du système d'inéquation	39
3.2. Construction d'un système d'inéquations particulières en introduisant les CBDs	40
3.3. Résolution du système par étoile de kleene.....	41
4. Exemple d'application d'une cellule de production de pots de peintre	41
Conclusion.....	
Conclusion générale	53

Table des figures

Figure 1.1. Graphe orienté et valué	11
Figure 2.1 : Représentation graphique d'un RdP	20
Figure 2.2 : Exemple d'un RDP marqué	21
Figure 2.3 : Évolution du marquage d'un réseau de Petri.....	22
Figure 2.4 : Exemple d'un graphe d'événement	23
Figure 2.5 : graphe d'état marqué	23
Figure 2.6: Réseaux de Petri à choix libres	24
Figure 2.7: Réseau de Petri simple.....	24
Figure 2.8 : Exemple d'un graphe d'événements temporisés	25
Figure 2.9 : Un graphe d'événements temporisé	25
Figure 2.10 : Graphe d'événement temporisé étendu	27
Figure 2.11 : Graphe d'événement temporisé étendu	28
Figure 2.12 : un graphe d'événement P-temporel	29
Figure 2.13 : Règle de franchissement d'une transition dans un graphe d'événements P-temporel	30
Figure 2.14 : Différents état d'un jeton dans un RdP P-temporel	30
Figure 2.15 : Vivacité des marques	32
Figure 2.16 : Parties d'un graphe d'événements p-temporel	32
Figure 2.17 : Exemple d'application	33
Figure 3.1 : Reconstruction d'état à partir de l'entrée et de la sortie	36
Figure 3.2 : Graphe d'événements P-temporel qui représente le système.....	42

Liste des Tableaux

Tableau3.1 les valeurs des entrées et leurs sortie correspondantes.....	46
Tableau3.2 les résultats de calcul du vecteur d'état sur l'horizon $k \in [0,10]$	53
Tableau3.3 les résultats de calcul du vecteur d'état estimé sur l'horizon $k \in [0,10]$	53

Liste des symboles

\oplus : Addition dans un dioïde.

\otimes : Multiplication dans un dioïde.

ε : Élément neutre pour la loi \oplus .

e : Élément neutre pour la loi \otimes .

\oslash : Soustraction à gauche dans un dioïde.

\oslash : Soustraction à droite dans un dioïde.

\top : Plus grande élément dans un dioïde.

A^* : Etoile de Kleene de la matrice A ($A = E \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots$).

a^* : Etoile de Kleene d'un scalaire ($a = e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots$).

a^+ : Dérivée de l'étoile de Kleene ($a^+ = a \oplus a^2 \oplus \dots$).

D : Dioïde.

$D^{n \times n}$: Dioïde matriciel.

\wedge : Borne supérieur dans un dioïde.

\vee : Borne supérieur dans un dioïde

\mathbb{Q}_{max} : Dioïde complet $\mathbb{Q} \cup - , + , max, +$, appelé aussi algèbre $(max, +)$.

\mathbb{Q}_{min} : Dioïde complet $\mathbb{Q} \cup - , + , min, +$, appelé aussi algèbre $(min, +)$.

L_a : Produit a gauche par a , $L_a x = a \otimes x$.

R_a : Produit a droite par a , $R_a x = x \otimes a$.

$L_a^\#$: Résidué de l'application L_a .

$R_a^\#$: Résidué de l'application R_a .

$a \oslash b$: Notion utilisée pour représenter $L_a^\#(b)$.

$b \oslash a$: Notion utilisée pour représenter $R_a^\#(b)$.

P : Ensemble des places $P = \{p_1, p_2, p_3 \dots\}$.

T : Ensemble des transitions $T = \{t_1, t_2, t_3 \dots\}$.

p_{ij} : La place qui relie la transition t_j à t_i .

τ_{ij} : la temporisation de la place p_{ij} .

m_{ij} : Le marquage de la place p_{ij} .

Introduction générale

Introduction générale

La théorie classique des systèmes continus (y compris en temps discret) et de l'automatique s'intéresse à des systèmes obéissant essentiellement aux lois de la physique, et descriptibles par des équations différentielles ou aux dérivées partielles (ou leur discrétisation approchée en temps). Le vocable systèmes à événements discrets (SED) recouvre des systèmes également dynamiques, mais dont la dynamique échappe totalement à ce genre de description. En réalité, au lieu de s'intéresser au déroulement continu des phénomènes, on ne se soucie que des "début" et des "fin" de ces phénomènes (les événements discrets) et de leur enchaînement dynamique, logique ou temporel. Les modèles SED sont utilisés dans le domaine de la production manufacturière, la robotique, les trafics des véhicules, la logistique, les réseaux de communications,...etc. L'étude des systèmes à événements discrets peut être menée avec différents outils tels que la simulation sur ordinateur, réseaux de files d'attente, les langages de programmation parallèle/temps réel, des modèles dynamiques algébriques, comme l'algèbre "Max Plus", et finalement les réseaux de Petri, les automates et les langages qui reposent sur l'ordre exact d'occurrence des événements.

Parmi les différents formalismes, Les réseaux de Petri, représentent un formalisme puissant et reconnu pour la modélisation et l'analyse des systèmes à événements discrets. Dans un souci de tenir compte de manière efficace aussi bien des différentes fonctionnalités du système, que de ses caractéristiques temporelles de manière explicite, de nombreuses extensions des réseaux de Petri ont été proposées dans la littérature. Les extensions déterministes peuvent se regrouper en deux grandes classes distinctes : les modèles temporisés, où les attributs temporels sont des valeurs ponctuelles, et les modèles temporels où ces derniers attributs prennent la forme d'intervalles de temps pouvant traduire des plages de faisabilité aussi bien que des incertitudes sur le procédé.

Indépendamment du domaine des réseaux de Petri, une théorie a considéré les structures des semi-anneaux au début des années 80. La structure la plus connue est celle des semi-anneaux idempotents également appelés dioïdes qui permettent de décrire et d'analyser différents problèmes traités par la théorie des graphes de manière unifiée. Appliquée aux graphes d'événements temporisés et temporel, l'évolution de l'état est représentée sous la forme d'équations de récurrence qui utilisent des opérateurs $(\max, +)$ ou alors $(\min, +)$ et qui sont donc non-linéaires. Mais traduite dans cette structure de dioïde, cette représentation devient linéaire. La représentation est alors dite $(\max, +)$ -linéaire, dans le cas du dioïde $(\max, +)$. L'algèbre des dioïdes est donc apparue comme une structure mathématique adéquate pour modéliser et étudier cette classe de systèmes.

Introduction générale

En dehors du cadre des systèmes linéaires, peu de résultats sont connus pour l'estimation des variables d'états dans un système à événements discrets. Les premiers résultats concernant les problèmes d'observation des systèmes à événements discrets, obtenus par une approche $(max, +)$, ont été développés en Mars 2004 par Laurent Hardouin et Carlos Maia, il s'agit d'un résultat inspiré de Luenberger.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la théorie de l'observation des systèmes à événements discrets dans les dioïdes. La conception d'un tel observateur nécessite la connaissance du modèle et les conditions initiales qui permettent de caractériser le vecteur d'état par une itération directe de l'équation d'état. L'objectif de notre mémoire est d'appliquer cette approche basée sur le calcul d'une borne supérieure de l'état en utilisant l'étoile de Kleene, sur un graphe d'événement P-temporel représentant une cellule de Production des pots de peinture.

Les lignes directrices des trois chapitres de ce mémoire, ainsi que son organisation sont Présentés de la manière suivante :

- Dans le premier chapitre, nous exposons un ensemble de concepts et d'outils mathématiques importants pour le traitement du problème posés dans ce mémoire. Dans une première partie, sont passés en revue les concepts et les fondements de base des treillis et des dioïdes. Ensuite les méthodes de résolution d'équations dans les dioïdes, qui permet d'obtenir des modèles des systèmes sous forme canonique.
- Le deuxième chapitre est dédié à la modélisation dans ces nouvelles structures algébriques, de différents graphes d'événements temporisés et temporels. La première partie regroupe des résultats bien connus sur les propriétés des réseaux de Petri. Quelques résultats classiques sur la modélisation des graphes d'événements temporisés dans l'algèbre des dioïdes, sont également exposés. Dans la deuxième partie, nous abordons la modélisation des graphes d'événements temporels (du type intervalle) dans l'algèbre des dioïdes, et c'est cette catégorie des GDE qui va être étudié dans le prochain chapitre.
- Dans le troisième chapitre, on traite le problème de l'estimation du plus grand état possible. Nous rappelons d'abord les modèles des observateurs dans le cas des systèmes continus et discret. Nous introduisons ensuite la méthode d'estimation par l'étoile de Kleene appliquer sur les graphes d'événement P-temporel, et on applique cette estimation sur une cellule de production.
- Enfin on termine ce travail par une conclusion générale.

Introduction

Ce premier chapitre a pour objectif d'explicitier les outils algébriques utilisés dans ce mémoire. Dans un premier temps, nous introduirons les notions de base relatives aux ensembles ordonnés la théorie des treillis. Ensuite, nous présenterons les dioïdes qui sont liés à la théorie des treillis. Cela, vient du fait, comme nous allons le voir, qu'un dioïde peut être considéré comme un sup-demi-treillis. Enfin nous présentant les techniques propres aux dioïdes permettant de résoudre des équations. La première est la théorie de la résiduation qui est une alternative aux problèmes d'inversion d'application isotones définie sur les dioïdes. La seconde est l'étoile de Kleene qui concerne les équations au point fixe et qui nous intéresse dans la suite de notre travail.

1. Les ensembles ordonnés

L'association d'une relation d'ordre avec un ensemble (ou sous ensemble) définit un ensemble ordonné qui à son tour introduit un treillis. Nous rappelons brièvement dans cette partie un ensemble de notions, de définitions et de propriétés sur les ensembles ordonnés et les treillis.

1.1. Relation d'ordre et structures ordonnées

On peut définir sur l'ensemble des entiers naturels les deux relations binaires suivantes :

$a \leq b$: la relation d'ordre habituelle.

$a \text{ div } b$: a divise b (ou b est un multiple de a).

Ces deux relations possèdent des propriétés communes. Elles sont à la fois :

➤ **Réflexives** : $\forall a \in \mathbb{N}, a \leq a \text{ et } a \text{ div } a$.

➤ **Antisymétriques** :

$$a \leq b \text{ et } b \leq a \Rightarrow a = b$$

$$a \text{ div } b \text{ et } b \text{ div } a \Rightarrow a = b \quad , \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

➤ **Transitives** :

$$a \leq b \text{ et } b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

$$a \text{ div } b \text{ et } b \text{ div } c \Rightarrow a \text{ div } c \quad , \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

On dit alors que ce sont des relations d'ordre.

- **Définition 1.1. (Ensemble ordonné).** Un ensemble E est ordonné, s'il est muni d'une relation d'ordre \preceq . On le notera (E, \preceq) .

On dit que deux éléments x et y dans E sont non-comparables, si aucune des relations suivantes $x \preceq y$ et $y \preceq x$ n'est vérifiée.

- **Définition 1.2. (Ordre partiel).** Soit un ensemble ordonné (E, \preceq) . S'il existe deux éléments $x, y \in E$ tels que x et y sont non-comparables, alors la relation d'ordre \preceq est partielle. On dit aussi que (E, \preceq) est partiellement ordonnée.

Exemple 1.1 :

Soit l'ensemble des entiers naturels N^* . La relation d'ordre \preceq est définie comme suit : $x \preceq y$ si et seulement si, x divise y .

Il est clair alors que (E, \preceq) est partiel ($3 \not\preceq 5$) car 3 n'est pas divisible par 5 dans N^* et inversement)

- **Définition 1.3. (Ordre total).** Soit E, \preceq , si $\forall x, y \in E$ tels que $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. On dit que l'on a un ordre total et E est appelé un ensemble totalement ordonné.
- **Définition 1.4. (Majorant, minorant)** Soit S un ensemble muni d'une relation d'ordre \preceq et U un sous ensemble de S .

On appelle minorant de U tout élément s de S tel que $\forall u \in U, s \preceq u$.

On appelle majorant de U tout élément s' de S tel que $\forall u \in U, u \preceq s'$.

- **Définition 1.5. (Bornes d'un ensemble).** Un sous-ensemble $U \subset S$ est dit borné s'il admet un majorant et un minorant. Lorsque l'ensemble des majorants de U a un plus petit élément, ce plus petit élément est appelé borne supérieure de U . On le note $sup(U)$ ou $\bigvee U$. De même lorsque l'ensemble des minorants de U a un plus grand élément, on l'appelle borne inférieure de U (notée $inf(U)$ ou $\bigwedge U$).

1.2. Demi-treillis et treillis

- **Définition 1.5. (Demi-treillis).** Un *sup-demi-treillis* est un ensemble S ordonné, dans lequel tout couple d'éléments (s, s') admet une borne supérieure (plus petit majorant) notée $sup(s, s')$ ou $s \vee s'$. De même, un *inf-demi-treillis* est un ensemble S ordonné, dans lequel tout couple d'éléments (s, s') admet une borne inférieure notée $inf(s, s')$ ou $s \wedge s'$.
- **Définition 1.6. (Treillis).** Un treillis est un ensemble ordonné (S, \preceq) qui est à la fois un *sup-demi-treillis* et un *inf-demi-treillis* ; autrement dit, un treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments admet un plus petit majorant et un plus grand minorant.

Exemple 1.2: l'ensemble des intervalles de \mathbb{R} ordonné par l'inclusion a une structure de treillis, ou la borne supérieure (respectivement inférieure) est donné par $A \vee B = A \cup B$ (respectivement $A \wedge B = A \cap B$) avec l'ensemble vide comme plus petit sous-ensemble.

- **Définition 1.7. (Demi-treillis complet et treillis complet).** Un sup-demi-treillis (resp. inf-demi-treillis) S est dit sup-complet (resp. inf-complet) si tout sous-ensemble (fini ou infini) de S admet un plus petit majorant (resp. un plus grand minorant) dans S . Un treillis est dit complet s'il est à la fois inf-complet et sup-complet.

2. Dioïdes et structures ordonnées

Le concept de dioïde, ou demi-anneau idempotent, a été formalisé dans les années 70 et a depuis suscité des études et des applications de plus en plus poussées.

2.1. Notion de base sur les dioïdes [8]

- **Définition 1.8. (Monoïde)** Un monoïde notée (M, \oplus) est une structure algébrique basée sur un ensemble d'éléments M et munie d'une loi de composition interne notée \oplus telle que :
 - La loi \oplus est associative : $\forall a, b, c \in M, a \oplus b \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.
 - M possède un élément neutre ε tel que, $\forall a \in D, a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$.

Le monoïde est dit commutatif si la loi \oplus est commutative c'est-à-dire : $\forall a, b \in M, a \oplus b = b \oplus a$.

- **Définition 1.9. (Monoïde idempotent).** Un monoïde (E, \oplus) est dit idempotent si la loi \oplus est commutative, associative et idempotente, c'est-à-dire, si elle vérifie :

$$\forall a \in E, a \oplus a = a.$$

- **Définition 1.10. (Demi-anneau).** Un demi-anneau (D, \oplus, \otimes) est une structure algébrique basée sur un ensemble S muni de deux lois de composition internes notées \oplus (la somme) et \otimes (le produit) telles que :

- (D, \oplus) est un monoïde commutatif dont l'élément neutre est ε .
- (D, \otimes) est un monoïde ayant pour élément neutre e .
- ε est absorbant pour le produit, c'est-à-dire :

$$\forall a \in D, \varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon.$$

- Le produit est distributif sur la somme à gauche et à droite :

$$\forall a, b, c \in D, a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c \text{ et } (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c).$$

- **Définition 1.11. (dioïde).** Un dioïde (D, \oplus, \otimes) est un demi-anneau pour lequel le monoïde (D, \oplus) est également idempotent. On se permettra donc d'utiliser aussi

l'appellation « demi-anneau idempotent », pour parler d'une structure algébrique de type dioïde.

Exemple 1.3

- L'ensemble $R \cup \{-\infty\}$, muni de \oplus et \otimes qui correspondent respectivement à l'opération max et à l'addition usuelle, est un dioïde noté R_{max} . Classiquement, ce dioïde est appelé algèbre $(max, +)$ avec $e = 0$ et $\varepsilon = -\infty$.
- De même, on définit l'algèbre $(min, +)$ comme un dioïde $(\cup \{+\infty\})$ dans lequel \oplus coïncide avec l'opérateur min et $\varepsilon = +\infty$.

2.2. Relation d'ordre dans un dioïde

Dans un dioïde D donné, la propriété d'idempotence de la loi additive \oplus induit une relation d'ordre, notée \preceq , définie par: $\forall a, b \in D^2, a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$. De plus cette relation d'ordre est compatible avec les lois de structure de D , c'est-à-dire :

$$\forall a, b, c \in D^3, a \preceq b \Rightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c,$$

$$a \preceq b \Rightarrow a \otimes c \preceq b \otimes c.$$

Remarque. L'ordre \preceq défini dans \mathbb{Z}_{max} est total et coïncide avec l'ordre usuel \leq .

En revanche, l'ordre total \preceq défini dans \mathbb{Z}_{min} est l'inverse de l'ordre usuel.

Exemple 1.4. La relation \preceq , associée à l'application max est une relation d'ordre qui correspond à l'ordre usuel \leq .

$$1 \preceq 3 \Leftrightarrow 3 = \max 1,3 \Leftrightarrow a \preceq b \Leftrightarrow b = \max a,b \Leftrightarrow a \leq b, 1 \leq 3$$

La relation \preceq , associée à l'application min est une relation d'ordre qui correspond à l'inverse de l'ordre usuel \geq , $a \preceq b \Leftrightarrow b = \min a,b \Leftrightarrow a \geq b$.

$$3 \preceq 1 \Leftrightarrow 1 = \min 1,3 \Leftrightarrow 3 \geq 1.$$

2.3. Dioïdes et treillis

L'idempotence de la somme dans un dioïde induit une structure de *sup-demi-treillis*, pour lequel la borne supérieure, noté \vee , correspond à la loi additive \oplus du dioïde, $(a \oplus b)$ est le plus petit majorant de a et b .

De même en considérant la définition algébrique d'un *sup-demi-treillis*, on peut noter que la loi \vee d'un *sup-demi-treillis* est associative, commutative et idempotente, c'est-à-dire que \vee possède les mêmes axiomes que la loi additive \oplus d'un dioïde. De plus on sait qu'un dioïde possède un élément minimum ε (le plus petit que tous les autres éléments du dioïde), ce qui confère au dioïde une structure de treillis.

▪ **Définition 1.12. (Dioïde complet)[3]**

Un dioïde D est dit complet si, dans ce dioïde, toute somme finie ou infinie d'éléments est définie et telle que la distributivité (à droite et à gauche) de \otimes par rapport à \oplus s'étende aux sommes infinies. $\forall A \subset D, \forall B \subset D$ et $\forall b \in D$, on a :

$$b \otimes \left(\bigoplus_{a \in A} a \right) = \bigoplus_{a \in A} (b \otimes a),$$

$$\left(\bigoplus_{a \in A} a \right) \otimes b = \bigoplus_{a \in A} (a \otimes b).$$

Dans un dioïde complet D , le plus grand élément existe et noté T . Correspondant à la somme de tous les éléments du dioïde, on écrit alors $T = \bigoplus_{x \in D} x$. L'élément T est absorbant pour la loi \oplus , $\forall a \in D, T \oplus a = T$.

▪ **Définition 1.13. (Sous-dioïde). [1]**

Soit (D, \oplus, \otimes) un dioïde. Un sous-ensemble $C \subset D$ est un sous-dioïde de (D, \oplus, \otimes) si et seulement si :

- $\varepsilon \in C$ et $e \in C$,
- C est fermé pour les lois \oplus et \otimes .

Le second point signifie que $\forall a, b \in C, a \oplus b \in C$ et $a \otimes b \in C$.

2.4. Applications définies sur les dioïde

- **Définition 1.14 (isotonie, antitonie).** soit f une application définie d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes)

f est dite isotone si :

$$\forall a, b \in D, a \leq b \Rightarrow f a \leq f b .$$

f est dite antitone si :

$$\forall a, b \in D, a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b).$$

Remarque : une application f est dite **monotone** si elle est **isotone** ou **antitone**. L'isotonie et l'antitonie sont des notions utilisées pour caractériser les applications respectivement croissantes et décroissantes, définie sur des ensembles ordonnées.

- **Définition 1.15 (application injective, surjective et bijective).** Soit f une application définie d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) .

- f est injective si $\forall a, b \in D, f a = f b \Leftrightarrow a = b$.
- f est surjective si $\forall b \in C, \exists a \in D, f a = b$.
- f est bijective si elle à a fois injective et surjective.

- **Définition 1.16. (Homomorphisme).** Une application f définie d'un dioïde D vers un dioïde C est un homomorphisme si :

Chapitre 1 - Outils algébriques

$$\forall a, b \in D: f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \text{ et } f(\varepsilon) = \varepsilon \quad (1.1)$$

$$f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \text{ et } f(e) = e \quad (1.2)$$

Notons que chaque application qui vérifie la propriété (1.1) sera appelée \oplus -morphisme.

Aussi, une application qui ne vérifie que la propriété (1.2) sera appelée \otimes -morphisme. Un homomorphisme est donc \oplus -morphisme et \otimes -morphisme.

- **Définition 1.17. (Isomorphisme).** Une application f est dite isomorphisme si et seulement si : l'application f est un **homomorphisme** et f est **bijective**.
- **Définition 1.18 (continuité).** Soient (D, \oplus, \otimes) et (C, \oplus, \otimes) deux dioïde complets. Une application f de D dans C est dite semi-continue inférieurement (s.c.i), si, pour tout sous-ensemble $B \subset D$,

$$f(\bigvee_{x \in B} x) = \bigvee_{x \in B} f(x)$$

et semi-continue supérieurement (s.c.s.), si :

$$f(\bigwedge_{x \in B} x) = \bigwedge_{x \in B} f(x)$$

Remarque : Une application **s.c.s** ou **s.c.i** est nécessairement isotone puisque

$$a \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \oplus b \Rightarrow f(a) = f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \Leftrightarrow f(a) \geq f(b) \\ b = a \wedge b \Rightarrow f(b) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \Leftrightarrow f(b) \leq f(a) \end{cases}$$

- **Définition 1.19 (Linéarité).** Une application f d'un dioïde (D, \oplus, \otimes) dans un dioïde (C, \oplus, \otimes) est dite linéaire si elle satisfait les propriétés d'additivité et d'homogénéité :

$$\forall a, b \in D, \forall \alpha \in D, f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \quad (\text{Additivité})$$

$$f(\alpha a) = \alpha f(a) \quad (\text{Homogénéité})$$

La combinaison des deux conditions mentionnées est connue sous le nom de principe de superposition, soit :

$$\forall a, b \in D, \forall \alpha \beta \in D, f(\alpha a \oplus \beta b) = \alpha f(a) \oplus \beta f(b).$$

3. Dioïdes matriciels [3]

Soit (D, \oplus, \otimes) un dioïde, soit $A \in D^{m \times p}$, $B \in D^{p \times n}$ et $C \in D^{m \times n}$ des matrices à coefficients dans D . La somme et le produit des matrices sont définis de la façon suivante :

$$A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij},$$

$$A \otimes B : (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

On peut montrer que l'ensemble D muni de ces deux opérations est un dioïde matriciel, dont l'élément nul noté ε , est la matrice composée exclusivement de ε . L'élément unité est la matrice notée Id_n composée de e sur la diagonale et de ε partout ailleurs

Chapitre 1 - Outils algébriques

Exemple 1.5. : Nous donnons ici un exemple d'un produit et une somme de deux matrices carrées dans l'algèbre $(max, +)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max[3,1] & \max[7,6] \\ \max[4,2] & \max[5,8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max[3+1, 7+2] & \max[3+6, 7+8] \\ \max[4+1, 5+2] & \max[4+6, 5+8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

On peut définir la multiplication d'une matrice A par une constante α :

$$(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij} = \alpha + A_{ij}$$

En général, la multiplication des matrices dans $D^{n \times n}$ n'est pas commutative, même si (D, \oplus, \otimes) est commutative. $D^{n \times n}$ est distributif si D l'est. $A \succcurlyeq B$ dans $D^{n \times n} \Leftrightarrow$

$$\{A_{ij} \succcurlyeq B_{ij} \text{ dans } D, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n\}.$$

Exemple 1.6. : Exemple d'un produit et une somme de deux matrices carrées dans l'algèbre $(min, +)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \min[3,1] & \min[7,6] \\ \min[4,2] & \min[5,8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \min[3+1, 7+2] & \min[3+6, 7+8] \\ \min[4+1, 5+2] & \min[4+6, 5+8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

3.1. Propriétés spectrales des matrices définies dans un dioïde [5]

Les matrices carrées à coefficients dans un dioïde présentent certaines propriétés spectrales intéressantes qui permettent notamment d'étudier le comportement asymptotique de certains systèmes dynamiques. Plus particulièrement, pour chaque matrice carrée, on peut lui associer un graphe valué orienté, appelé graphe de précédence. Si un graphe de précédence est fortement connexe, alors la matrice qui lui correspond est dite irréductible.

- **Définition 1.20. (Graphe valué orienté).** Un graphe orienté est défini par un ensemble de nœuds interconnectés par des arcs orientés. Un graphe est dit valué, si des poids positifs sont associés aux arcs qui relient les nœuds j et les nœuds i , Ces poids correspondent aux termes notés A_{ij} , de la matrice A .

- **Définition 1.21 (Graphe de précédence).** On appelle graphe de précédence d'une matrice $A \in D^{n \times n}$ noté $G(A)$, le graphe qui est composé de n nœud et des arcs, notés (j, i) , qui sont pondérée par le coefficient A_{ij} . Si $A_{ij} \neq \varepsilon$, alors il existe un arc qui relie le nœud j au nœud i , Sinon l'arc j, i , n'existe pas. Dualement, pour tous graphe orientés valué composés de n nœud, on peut associer une matrice carrée de dimension $n \times n$, telle que les coefficients de cette matrice correspondent aux poids des arcs du graphe.
- **Définition 1.22 (Graphe fortement connexe).** Un graphe est dit fortement connexe si pour deux nœuds i et j quelconques il existe un chemin allant de i à j .
- **Définition 1.23. (Matrice irréductible).** Une matrice $A \in D^{n \times n}$ est dite irréductible si pour toute paire de nœuds (j, i) , il existe un entier k tel que $(A^k)_{ij} \neq \varepsilon$. Cette matrice admet une unique valeur propre notée $\lambda \in D$, et donnée par : $\lambda = \bigoplus_{k=1}^n (\text{trace} A^k)^{1/k}$.

Avec :

$$\text{trace} A^k = \bigoplus_{i=1}^n (A^k)_{ii} \text{ et } n \text{ désigne l'ordre de la matrice } A.$$

Dans l'algèbre usuelle, l'expression de la valeur propre λ s'écrit comme suit :

$$\lambda = \max_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} \max_{i=1}^n (A^k)_{ii} \right].$$

Cette valeur propre correspond au maximum des poids moyens des circuits élémentaires du graphe de précédence $G(A)$.

Le graphe de précédence associé à une matrice réductible n'est pas fortement connexe. Il est décomposable, dans ce cas, en plusieurs sous graphes fortement connexe. Cette matrice réductible, peut avoir plusieurs valeurs propres, en la décomposant en blocs irréductibles.

La détermination des vecteurs propres d'une matrice A définie sur un dioïde, revient à résoudre l'équation suivante : $Au = \lambda u$.

On appelle u le vecteur propre associé à la valeur propre λ . Le vecteur propre associé à cette unique valeur propre, ne contient pas de ε . Si une composante du vecteur u est égale à ε , il faut que la matrice A contiennent au moins une ligne avec des ε , ce qui correspondra à un graphe $G A$ non fortement connexe.

Exemple 10. Nous considérons le graphe orienté et valué de la Figure 1.1 suivante:

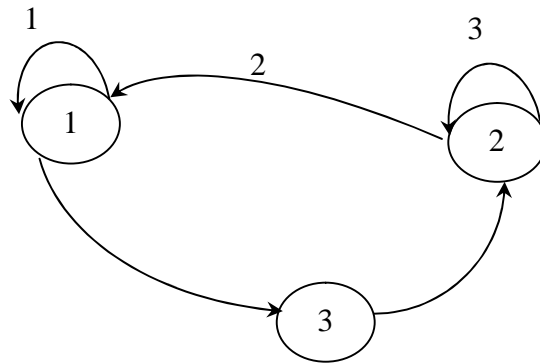


Figure 1.1. Graphe orienté et valué

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$
 est la matrice de précédence associée au graphe de la Figure 1.1

Le graphe de la Figure 1.1 est composé de trois nœuds et pour chaque paire de nœuds, il existe toujours un chemin orienté qui relie ses nœuds. Le graphe est donc fortement connexe, par conséquent sa matrice de précédence associée A est irréductible. La valeur propre de cette matrice est unique, elle est notée λ et est donnée par : $\lambda = \bigoplus_{k=1}^3 (\text{trace} A^k)^{1/k}$

Dans l'algèbre $(\max, +)$ on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \max(1+1, 2+\varepsilon, \varepsilon+e) & \max(1+2, 2+3, \varepsilon+\varepsilon) & \max(1+\varepsilon, 2+e, \varepsilon+\varepsilon) \\ \max(\varepsilon+1, 3+\varepsilon, e+e) & \max(\varepsilon+2, 3+3, e+\varepsilon) & \max(\varepsilon+\varepsilon, 3+e, e+\varepsilon) \\ \max(e+1, \varepsilon+\varepsilon, \varepsilon+e) & \max(e+2, \varepsilon+3, \varepsilon+\varepsilon) & \max(e+\varepsilon, \varepsilon+e, \varepsilon+\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = (\bigoplus_{i=1}^3 A_{ii}) \oplus \frac{1}{2} (\bigoplus_{i=1}^3 (A^2)_{ii}) \oplus \frac{1}{3} (\bigoplus_{i=1}^3 (A^3)_{ii})$$

$$\lambda = 1 \oplus 3 \oplus \varepsilon \oplus \frac{1}{2} (2 \oplus 6 \oplus \varepsilon) \oplus \frac{1}{3} (3 \oplus 9 \oplus 2) = (3 \oplus \frac{6}{2} \oplus \frac{9}{3}) = 3$$

Le vecteur propre, noté u , associé à la valeur propre λ vérifie l'équation suivante :

$Au = \lambda u$ le calcul du vecteur propre se fait comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \max(1+u_1, 2+u_2, \varepsilon+u_3) = 3+u_1 \\ \max(\varepsilon+u_1, 3+u_2, 0+u_3) = 3+u_2 \\ \max(\varepsilon+u_1, \varepsilon+u_2, 0+u_3) = 3+u_3 \end{cases}$$

On trouve le vecteur propre suivant : $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Résolution d'équations dans un dioïde [2]

Dans cette partie on s'intéresse à la résolution d'équation de type

$$f x = b, \quad b \in D$$

Les lois \oplus et \otimes n'étant pas inversibles, en particulier les applications matricielle. Il n'est pas possible, en général d'inverser les applications définies sous forme analytique dans un dioïde, alors la résolution de l'équation pose un problème d'inversion d'application. La théorie de la résiduation permet cependant de définir des pseudo-inverses pour ds application définie sur des dioïdes. Par conséquent, elle permet d'établir, lorsqu'elles existent des solutions extrêmes de l'équation précédente. On s'intéresse donc à la plus grande solution de l'inéquation

$$f x \leq b \text{ ou la plus petite solution de l'inéquation } f(x) \geq b.$$

4.1. Théorie de la résiduation

- **Définition 2.24 (Application résiduable et sa résiduée).** Une application isotone $f: (D, \oplus, \otimes) \rightarrow (C, \oplus, \otimes)$ définie sur des dioïdes complets est dite résiduable si $\forall b \in C$, l'équation $f x \leq b$ admet une plus grande solution dans D . L'application qui associe à b la plus grande solution de $f x \leq b$ est notée $f^\#$ et est appelée application résiduée de f . Ainsi :

$$f^\#(b) = \oplus \{x \in D \mid f x \leq b\}.$$

4.2. Applications résiduables sur les dioïdes complets (Résolution de $ax \leq b$ et $xa \leq b$)[16]

Soient L_a (produit à gauche) et R_a (produit à droite), les applications définies sur un dioïde D complet comme suit :

$$L_a: x \rightarrow a \otimes x$$

$$R_a: x \rightarrow x \otimes a$$

Le fait que le dioïde D soit complet implique que les applications L_a et R_a sont semi-continues inférieurement (distributivité de produit à gauche et à droite sur les sommes infinies). En outre, comme ε est absorbant pour le produit \otimes , alors $L_a \varepsilon = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ et $R_a \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$. Autrement dit, L_a et R_a sont isotones donc résiduable, et leurs applications résiduées sont notées :

$$L_a^\# : x \rightarrow a \oslash x$$

$$R_a^\# : x \rightarrow x \oslash a$$

et respectivement appelées quotient à gauche et quotient à droite. Ainsi, $L_a^\#(b) = a \oslash b$

Chapitre 1 - Outils algébriques

et $R_a^\#(b) = b \not\! / a$ sont les plus grandes solutions des inégalités $ax \leq b$ et $xa \leq b$.

Remarque : Lorsque D est commutatif, $L_a = R_a$. Cela implique donc également que $L_a^\# = R_a^\#$. De nombreuses propriétés sont associées à ces quotients $L_a^\#$ et $R_a^\#$. Elles sont rappelées dans le théorème suivant :

❖ **Théorème 1.1.** Les applications $L_a^\#$ et $R_a^\#$ vérifient les propriétés suivantes
 $\forall x, y, a, b \in D$ avec D un dioïde complet :

$$\begin{aligned}
 a \not\! / \top &= \top & \top \not\! / a &= \top, \\
 a(a \not\! / x) &\leq x & (x \not\! / a)a &\leq x, \\
 a \not\! / (ax) &\geq x & (xa) \not\! / a &\geq x, \\
 a(a \not\! / (ax)) &= ax & ((xa) \not\! / a)a &= xa, \\
 a \not\! / (a(a \not\! / x)) &= a \not\! / x & ((x \not\! / a)a) \not\! / a &= x \not\! / a, \\
 a \not\! / (x \wedge y) &= a \not\! / x \wedge a \not\! / y & (x \wedge y) \not\! / a &= x \not\! / a \wedge y \not\! / a, \\
 a \not\! / (x \oplus y) &\geq (a \not\! / x) \oplus (a \not\! / y) & (x \oplus y) \not\! / a &\geq (x \not\! / a) \oplus (y \not\! / a), \\
 (a \wedge b) \not\! / x &\geq (a \not\! / x) \oplus (b \not\! / x) & x \not\! / (a \wedge b) &\geq (x \not\! / a) \oplus (x \not\! / b), \\
 (a \oplus b) \not\! / x &= a \not\! / x \wedge b \not\! / x & x \not\! / (a \oplus b) &= x \not\! / a \wedge x \not\! / b, \\
 (ab) \not\! / x &= b \not\! / (a \not\! / x) & x \not\! / (ba) &= (x \not\! / a) \not\! / b, \\
 (a \not\! / x)b &\leq a \not\! / (xb) & b(x \not\! / a) &\leq (bx) \not\! / a, \\
 b(a \not\! / x) &\leq (a \not\! / b) \not\! / x & (x \not\! / a)b &\leq x \not\! / (b \not\! / a),
 \end{aligned}$$

4.3. Extension aux dioïdes de matrices : $AX \leq B$ et $XA \not\! / B$

Concernant le cas matriciel, définissons comme suit les applications produit à gauche $L_A : D^{n \times p} \rightarrow D^{m \times p}$ et produit à droite $R_A : D^{n \times p} \mapsto D^{m \times p}$ sur les dioïdes de matrices à coefficients dans le dioïde complet D :

$$\begin{aligned}
 L_A : X &\mapsto A \otimes X, \\
 R_A : X &\mapsto X \otimes A
 \end{aligned}$$

Dans ces applications, $A \in D^{m \times n}$ et $A' \in D^{n \times m}$.

Les plus grandes solutions des inéquations $AX \leq B$ et $XA \not\! / B$, pour lesquelles $B \in D^{m \times p}$ et $B' \in D^{p \times m}$, sont respectivement la résiduée du produit à gauche notée $L_A^\#(B) = A \not\! / B$ et la résiduée du produit à droite notée $R_{A'}^\#(B') = B' \not\! / A'$. Les valeurs de ces matrices sont alors données comme suit :

$$L_A^\#(B) = A \bowtie B : (A \bowtie B)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m A_{ki} \bowtie B_{kj}$$

$$R_{A'}^\#(B') = B' \nearrow A' : (B' \nearrow A')_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m B'_{ik} \nearrow A'_{jk}$$

Remarque En toute rigueur, seul le produit de matrices carrées constitue une application résiduable. Cependant, il est toujours possible de réécrire les applications L_A et $R_{A'}$ dans le dioïde de matrices $D^{q \times q}$ pour lequel $q = \max(m, n, p)$.

Les lignes et colonnes doivent alors être complétées par l'élément ε , ce qui peut compliquer les écritures.

4.4. Equations aux points fixes

Grâce à leur structure de treillis, il est possible d'appliquer aux dioïdes les résultats concernant les points fixes d'applications isotones définies sur des treillis complets. Ainsi, des équations du type $f(x) = x$ peuvent être résolues.

- **Définition 1.25 (Ensemble des points fixes d'application).** Soit f une application isotone définie sur un dioïde complet D . Les ensembles des points fixes, post-fixes et pré-fixes d'applications sont respectivement définis comme suit :

$$\mathbb{F}_f = \{x \in D \mid f(x) = x\},$$

$$\mathcal{P}_f = \{x \in D \mid f(x) \geq x\},$$

$$\mathcal{Q}_f = \{x \in D \mid f(x) \leq x\}.$$

Notons que les ensembles des points post-fixes \mathcal{P}_f et pré-fixes \mathcal{Q}_f peuvent être interprétés

dans \mathbb{F}_f selon les équivalences suivantes :

$$f x \geq x \Leftrightarrow f x \oplus x = x,$$

$$f x \leq x \Leftrightarrow f x \oplus x = x.$$

4.5. Résolution d'équation par étoile de Kleene

Les équations de type point fixe formulées dans le dioïde, de la forme $f x = x$ où $f(x) = a x \oplus b$, sont d'importance, car on cherchera systématiquement à représenter les systèmes étudiés sous des formes récurrentes explicites de type point fixe. Il a notamment été mis en évidence que sous certaines hypothèses de continuité de l'application f , les ensembles de solutions de ces équations sont ordonnés, nous nous intéresserons plus particulièrement à leurs solutions minimales.

Chapitre 1 - Outils algébriques

Nous allons voir la manière de résoudre une équation de type $a x \oplus b$ par l'étoile de Kleene ainsi que les propriétés relatives à cette méthode qui nous intéresse essentiellement dans notre travail par la suite.

Notion 1.1. (Étoile de Kleene) Soit $*$ l'opérateur défini sur un dioïde (D, \oplus, \otimes) par $\forall a \in D, a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$, avec $a^0 = e$

Cet opérateur est cohérent avec la relation d'ordre \preceq par l'implication suivante:

$$\forall a, b \in D, \text{ si } a \preceq b, \text{ alors } a^* \preceq b^*.$$

De la même façon que pour un dioïde de scalaires, l'étoile d'une matrice carrée $A \in D^{n \times n}$, notée A^* , est définie par $A^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A^i$ avec par convention $A^0 = I_n$.

L'étoile de Kleene possède certaines propriétés dont les plus courantes ont été regroupées si dessous. Ces propriétés sont valables $\forall a, b \in D$.

$$a^{**} = a^* \quad 1$$

$$a^* a = a a^* \quad 2$$

$$a b a^* = a b^* a \quad 3$$

$$(a b^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \quad (4)$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* b)^* a^* = a^* (b a^*)^* = (a^* b^*)^* \quad (5)$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* \oplus b)^* = (a \oplus b^*)^* = (a^* \oplus b^*)^* \quad (6)$$

Lorsque D est commutatif :

$$(a \oplus b)^* = a^* b^*$$

On note "+" l'opérateur défini dans un dioïde complet (D, \oplus, \otimes) par :

$$a \in D, \quad a^+ = \bigoplus_{n \geq 1} a$$

On a:

$$a^* = e \oplus a^+ \text{ et } a^+ = a \otimes a^*$$

Les propriétés regroupées ci-dessus sont vérifiées pour tout dioïde complet, y compris matriciel. Dans le cas matriciel, on a en particulier le résultat suivant permettant de calculer l'étoile d'une matrice carrée décomposée en 4 blocs.

Chapitre 1 - Outils algébriques

Exemple 1.6. Soit dans le dioïde \mathbb{Q}_{max} , $A_0 =$

ε	ε	ε
2	ε	ε
ε	4	ε

$$A_0^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_0^i = I_3 \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus A_0^3$$

$$A_0^* = \begin{matrix} e & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \oplus & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \oplus & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & & \varepsilon & 4 & \varepsilon & & 6 & \varepsilon & \varepsilon \end{matrix}$$

$$A_0^* = \begin{matrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon \\ 6 & 4 & e \end{matrix}$$

❖ **Théorème 1.2.** dans un dioïde complet, la quantité A^*B est la plus petite solution de l'équation

$$x = Ax \oplus B \text{ et de l'inéquation } x \succcurlyeq Ax \oplus B.$$

Démonstration : Nous montrons que A^*B est la plus petite solution de l'inéquation donnée dans le théorème. En effet pour toute solution x de l'inéquation $x \succcurlyeq Ax \oplus B$, nous avons :

$$x \succcurlyeq Ax \oplus B \succcurlyeq A.(Ax \oplus B) \oplus B \geq A^k . x \oplus (\bigoplus_{i=0}^{k-1} A^i . B), \forall k \succcurlyeq 0$$

En outre

$$A^k . x \oplus (\bigoplus_{i=0}^{k-1} A^i . B) = A^k . x \oplus A^*B$$

D'où :

$$x \succcurlyeq A^k . x \oplus A^*B$$

On déduit donc que : $x \succcurlyeq A^*B$

Remarque: dans le dioïde \mathbb{Q}_{max} , la quantité (A^*B) est la plus petite solution de l'inéquation $x \geq Ax \oplus B$, par contre (A^*B) correspond à la plus petite solution au sens usuel et à la plus grande solution de l'inéquation $x \preccurlyeq Ax \oplus B$ au sens inverse de l'ordre usuel dans \mathbb{Q}_{min} .

Exemple 1.7. Soit le système :

$$x = \begin{matrix} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & 2 \\ & 2 & \varepsilon & 3 & x \oplus & \varepsilon \\ & 4 & \varepsilon & \varepsilon & & 5 \end{matrix}$$

Le calcul de A^* donne

$$A^* = \begin{matrix} e & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \oplus & 2 & \varepsilon & 3 & \oplus & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \oplus & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & = & 7 & e & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & e & & 4 & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & 4 & \varepsilon & e \end{matrix}$$

Cela donne la solution suivante :

$$x = A^*B = \begin{matrix} e & \varepsilon & \varepsilon & 2 & & 2 \\ 7 & e & 3 & \varepsilon & = & 9 \\ 4 & \varepsilon & e & 5 & & 6 \end{matrix}$$

Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de faire un tour d'horizon sur un ensemble d'outils et d'éléments de base mathématiques dont les principaux sont les ensembles ordonnés, les treillis, et leurs relation avec la structure algébrique des dioïdes. Ensuite, plusieurs types de fonctions définies sur les dioïdes sont considérés, fonctions qui généralement ne sont pas inversibles. Cependant, grâce à la théorie de la résiduation, il est possible de considérer les pseudo-inverses d'application isotone, ainsi que la résolution des équations de type point fixes qui nécessitent la définition de l'application étoile de Kleene qui joue un rôle clé dans le problème d'estimation qui fera l'objet de dernier chapitre.

Introduction

Sous l'appellation Systèmes (Dynamiques) à Événements Discrets (SED) sont regroupés des systèmes généralement conçus par l'homme et dont les transformations ont lieu à des instants discrets, en réponse à des événements ponctuels. A l'instar des systèmes dits « naturels » qui peuvent être modélisés par des équations différentielles dépendantes du temps, les systèmes à événements discrets doivent bénéficier de modèles aptes à prendre en compte leurs caractéristiques dynamiques suscitées par divers phénomènes (tâches séquentielles ou simultanées, temporisées ou non, synchronisées ou concurrentes, etc.).

L'étude des SED s'appuie sur des modèles graphiques et mathématiques variés. Parmi tous les modèles étudiés, les réseaux de Petri constituent un modèle important puisqu'ils permettent de décrire une grande variété des phénomènes dynamiques à savoir la synchronisation, la concurrence, la notion de ressource partagée, etc. En revanche, sur le plan de l'analyse, il est difficile d'appréhender la grande variété des comportements dynamiques que peut engendrer un réseau de Petri général.

C'est pourquoi les SED sont également étudiés à travers d'autres modèles, parfois moins généraux, mais pour lesquels les phénomènes dynamiques sont mieux délimités et donc mieux compris. Par exemple, les systèmes non temporisés déterministes peuvent être décrits par des automates à états finis, et disposent ainsi d'une théorie permettant d'aborder des problèmes de contrôle.

1. Modélisation graphique des systèmes à événements discrets

Les réseaux de Petri (RdP) sont un formalisme privilégié pour l'étude des propriétés qualitatives d'un système complexe. On peut citer la bornitude, la vivacité et l'accessibilité d'état d'un RdP.

Cependant dans notre étude, nous nous intéressons plutôt aux propriétés quantitatives qui peuvent exister entre les différentes places et/ou transitions d'un RdP. Il s'agit d'établir des relations entre elles, qui pourront aisément être formalisées dans un dioïde approprié. Nous traiterons plus particulièrement une sous-classe de réseaux de Petri : les graphes d'événements.

2. Les réseaux de Petri (RdPs) [8]

Les RdP ont été introduits par Carl Adam Petri en 1962. Ils constituent un puissant outil graphique et mathématique de représentation de phénomènes complexes et de mécanismes séquentiels. Ils sont largement utilisés pour l'analyse et la modélisation des systèmes à événements discrets. Ils permettent la modélisation des processus complexes mettant en jeu des phénomènes de synchronisme et de choix.

2.1. Rappels et notions de base [2]

- **Définition 2.1. (Réseau de Pétri).** Un réseau de Pétri est un quadruplet $R = (P, T, \text{Pré}, \text{Post})$ où :

- P est un ensemble non vide et fini dont les éléments sont appelés places ;
- T est un ensemble non vide et fini d'éléments appelés transitions ;
- $\text{Pré} : P \times T \rightarrow \mathbb{Z}$ est une application d'incidence avant : $\text{Pré}(p, t)$ contient la valeur entière associée à l'arc allant de p à t ;
- $\text{Post} : P \times T \rightarrow \mathbb{Z}$ est une application d'incidence arrière : $\text{Post}(p, t)$ contient la valeur entière associée à l'arc allant de t à p ;

Un RdP peut être représenté par un graphe biparti orienté et valué dont les sommets sont soit des places issues de l'ensemble P , soit des transitions issues de l'ensemble T . Un arc relie une place p à une transition t si et seulement si $\text{Pré}(p, t) \neq 0$. De même, un arc relie une transition t à une place p si et seulement si $\text{Post}(p, t) \neq 0$. Les valeurs non nulles des applications Pré et Post sont associées aux arcs comme valuations ou pondérations (sans indication contraire sur les arcs du graphe, la valeur par défaut est 1). On représente généralement une place par un cercle et une transition par un rectangle.

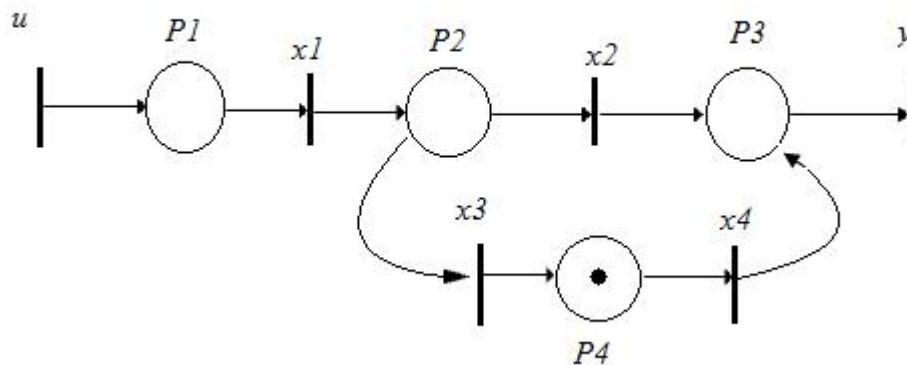


Figure 2.1 – Représentation graphique d'un RdP.

2.2. Marquage d'un RDP

- **Définition 2.2. (Marquage).** Le marquage \mathbb{Z} d'un réseau de Pétri est une application $\mathbb{Z} : P \rightarrow \mathbb{Z}$. La quantité $\mathbb{Z}(p)$ détermine le marquage de la place p . Un réseau de Pétri marqué est déterminé par le couple (R, \mathbb{Z}_0) formé d'un réseau de Petri R et d'un marquage initial \mathbb{Z}_0 .

Un marquage d'un réseau de Petri se caractérise de manière graphique par la présence de $\mathbb{Z}(p)$ jetons dans chaque place p .

Exemple 2.1. Un exemple de réseau de Petri marqué sous forme graphique est donné par la figure 2.2.

Les ensembles des places et des transitions sont ici $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ et $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$.

On a par ailleurs :

$$Pré(p_1, t_1) = 1 \quad Post(p_1, t_2) = 1$$

$$Pré(p_2, t_2) = 1 \quad Post(p_2, t_1) = 1$$

$$Pré(p_3, t_3) = 1 \quad Post(p_3, t_4) = 1$$

$$Pré(p_2, t_4) = 1 \quad Post(p_2, t_3) = 1$$

Le marquage M présenté ici est $M(p_2) = 1$ et $M(p_1) = M(p_3) = 0$

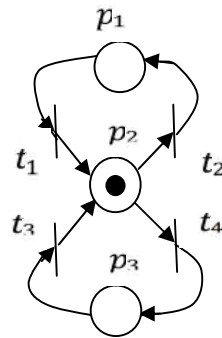


Figure 2.2 : Exemple d'un RDP marqué

2.3. Tir des transitions

L'évolution au cours du temps des marques des places dans un réseau de Petri se fait selon le processus d'activation (ou de tirage) des transitions décrit ci-après. Étant donné un réseau \mathcal{N} et un marquage \mathcal{M} , on dit que la transition $t \in \mathcal{T}$ est franchissable pour \mathcal{M} si l'on a

$$\forall p \in \mathcal{P}, \mathcal{M}(p) \geq Pré(p, t).$$

Lorsque cette condition est satisfaite, l'activation (le tir) de la transition $t \in \mathcal{T}$ conduit à un nouveau marquage \mathcal{M}' défini par :

$$\mathcal{M}'(p) = \mathcal{M}(p) - Pré(p, t) + Post(p, t).$$

Ainsi, par exemple, dans le cas du réseau de Petri de la figure 2.1, en partant du marquage $\mathcal{M}_0 = (0, 1, 0)$ (où $\mathcal{M}_0(p_1) = 0, \mathcal{M}_0(p_2) = 1; \mathcal{M}_0(p_3) = 0$), on atteint par le tir de la transition t_1 le marquage $\mathcal{M}_1 = (1, 0, 0)$; puis à partir de \mathcal{M}_1 , par le tir de la transition t_3 on obtient le marquage $\mathcal{M}_2 = (0, 1, 0)$ et ainsi de suite, sur la figure 2.3, on peut voir l'évolution du marquage du réseau de Petri.

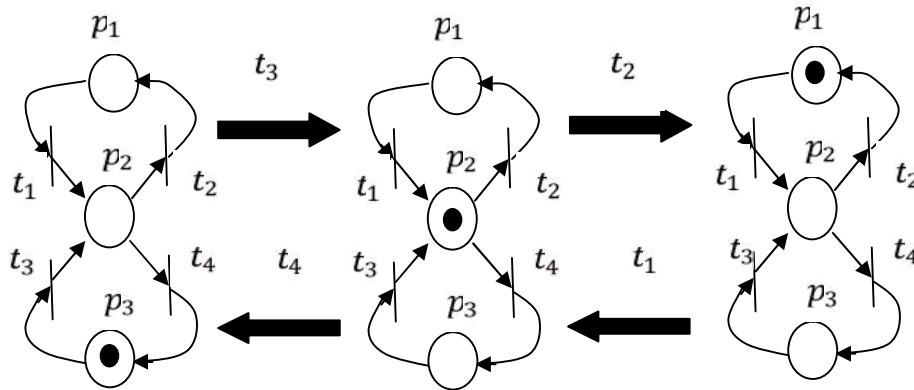


Figure 2.3 Evolution du marquage d'un réseau de Petri

2.4 Transitions source et puits

Définition 2.5 (Transitions source et puits). Une transition sans place amont est dite transition source et une transition sans place aval est dite transition puits.

Propriété 2.1 Le franchissement d'une transition source consiste à rajouter un jeton à chacune de ces places de sortie. (Voir figure 2.4)

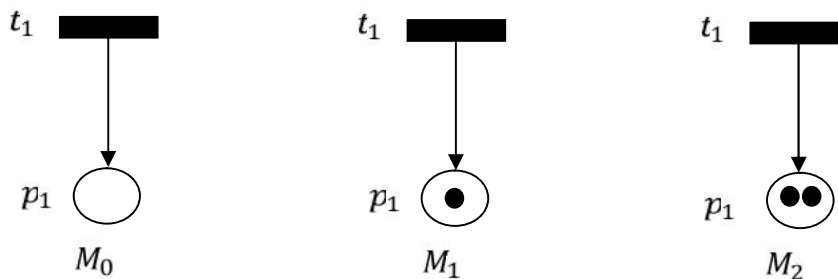


Figure 2.4 Franchissement d'une transition source

Propriété 2.2 Le franchissement d'une transition puits consiste à retirer un jeton de chacune de ses places d'entrée. (Voir figure 2.5)

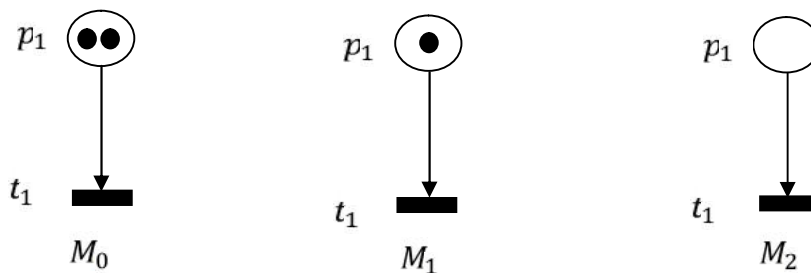


Figure 2.5 Le franchissement d'une transition puits

2.5. Quelques propriétés des réseaux de Petri [3], [13]

Les principales propriétés des RdPs, sont classées en deux groupes : celles qui dépendent du marquage initial sont appelées "propriétés comportementales", celles qui ne dépendent que de la structure du RdP sont appelées "propriétés structurelles".

Pour étudier et vérifier les propriétés comportementales, on établit l'arbre de marquages, appelé aussi graphe de marquages. Il est constitué de nœuds correspondant à un marquage atteignable, et d'arcs orientés, correspondant au franchissement d'une transition qui fait évoluer le RdP d'un état, ou marquage, à un autre.

- **Accessibilité** : Le problème d'accessibilité consiste à trouver si l'on peut atteindre un marquage \mathbb{M}' à partir de \mathbb{M}_0 .

Soit un RdP (N, \mathbb{M}_0) , on dit qu'un marquage \mathbb{M}_0 est accessible (ou atteignable) à partir de \mathbb{M}_0 s'il existe une séquence de franchissement σ telle que $\mathbb{M}_0 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{M}'$. $R(\mathbb{M}_0)$ est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre en partant de \mathbb{M}_0 .

- **Bornitude** : Un réseau de Petri est borné pour un marquage initial donné si, quel que soit le marquage accessible atteint \mathbb{M} et quelle que soit la place p considérée, le nombre de jetons contenus dans cette place est inférieur à une borne k :

$$\forall M \text{ et } \forall p : \mathbb{M}(p) \leq k$$

- **Vivacité** : Une transition t_j est dite vivante si elle peut être franchie quelque soit le marquage atteint :

$$\forall \mathbb{M} \in R(\mathbb{M}_0), \exists \mathbb{M}' \in R(\mathbb{M}_0) \text{ tel que } t_j \text{ soit franchissable pour } \mathbb{M}$$

Un RdP (N, \mathbb{M}_0) est vivant si chacune de ses transitions est vivante.

2.6. Les classe des réseaux de Petri

Dans l'étude des systèmes dynamiques à événements discrets (SDED), on rencontre fréquemment des phénomènes de types concurrence et synchronisation, qui sont modélisés par différentes sous-classes de RdPs que nous décrivons maintenant.

➤ Graphe d'événement

Un graphe d'événement est un RdP élémentaire dans lequel :

- ✓ Chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie,
- ✓ Tous les arcs sont pondérés à 1.[11]

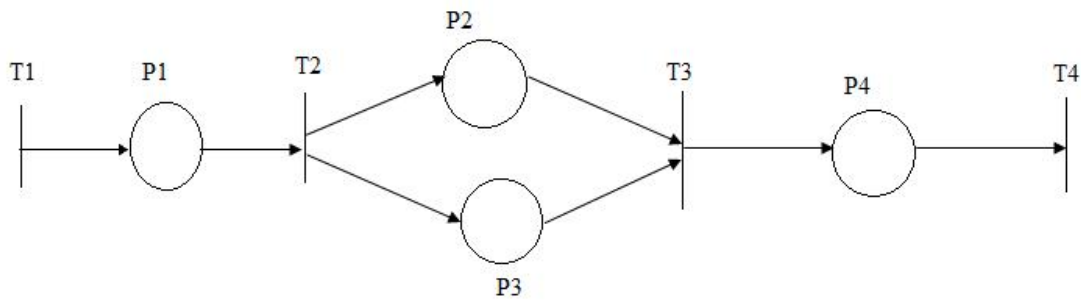


Figure 2.6 : Exemple d'un graphe d'événement

➤ Graphe d'état

Un RdP non marqué ou marqué est un graphe d'états si et seulement si toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie.

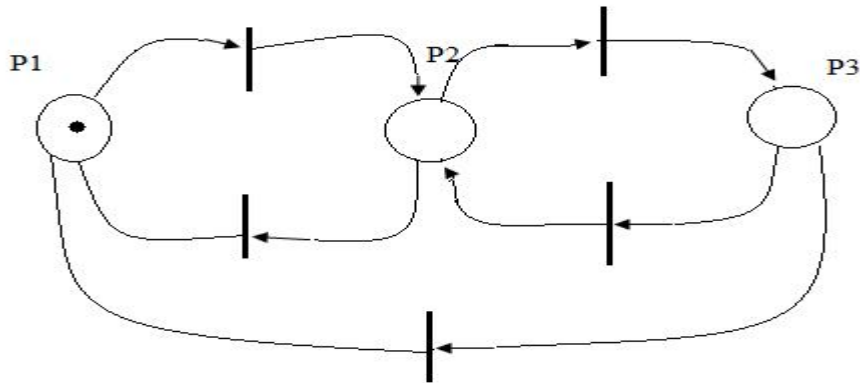


Figure 2.7 : Graphe d'état marqué

➤ Réseaux de Petri à choix libres [2]

Un réseau de Petri à choix libres (RCL) est un réseau de Petri tel que si deux transitions partagent la même place en amont, ils ne possèdent pas d'autre place amont.

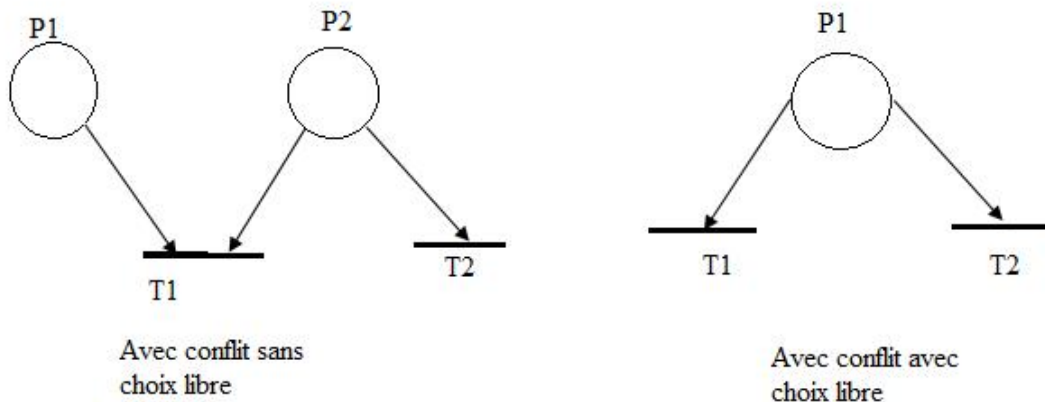


Figure 2.8: Réseaux de Petri à choix libres

➤ Réseaux de Petri simple

les réseaux de Petri simples sont des RDP ordinaires tels que chaque transition a au plus une place d'entrée qui peut être reliée à d'autres transitions, (Toute transition appartient à un seul conflit au plus).

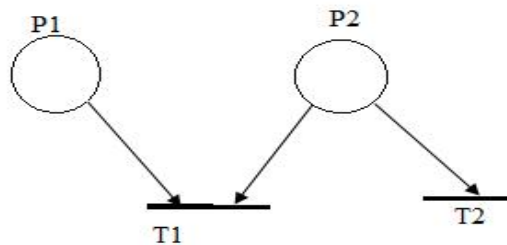


Figure 2.9: Réseau de Petri simple

➤ Réseau de Petri sans conflit

C'est un RDP dans lequel toute place a au plus une transition de sortie. Un conflit (ou conflit structurel) correspond donc à l'existence d'une place p_i qui a au moins deux transitions de sortie, t_j, t_k, \dots . Notation $\langle p_i\{t_j, t_k, \dots\} \rangle$.

Le RDP de la figure 2.10 (b) a le conflit $\langle p_1\{t_2, t_3\} \rangle$

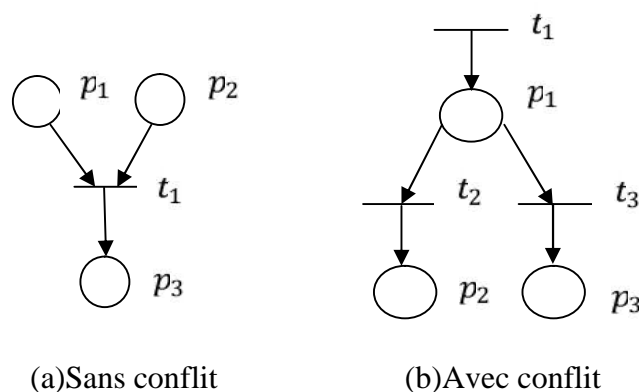


Figure 2.10 Conflit et sans conflit

➤ Réseau de Petri pur

Un RDP pur est RDP dans lequel il n'existe pas de transition ayant une place d'entrée qui soit également place de sortie de cette transition.

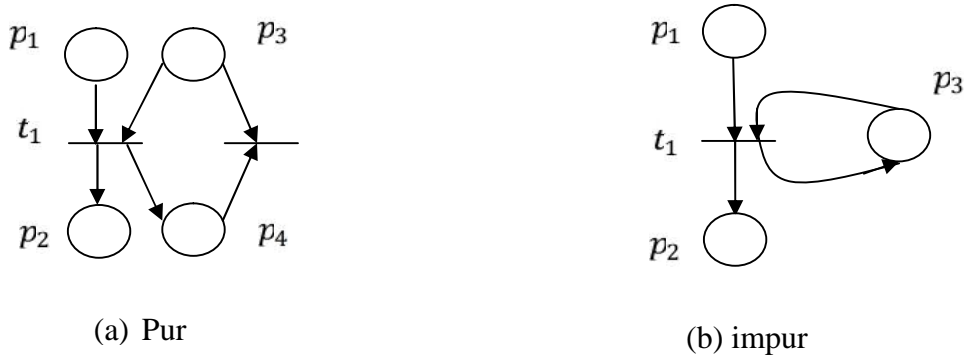


Figure 2.11 RDP pur et impur

3. Les graphes d'événement temporisé (GET) [2]

Définition 2.3. (Graphe d'événement temporisé). Un RDP temporisé est un graphe d'évènements auquel on associe des temporisations. Il permet de décrire un système dont le fonctionnement dépend du temps. Les RDPs temporisés sont utiles pour l'évaluation des performances d'un système. Soit les temporisations sont associées aux places (RDP P-temporisé) soit aux transitions (RDP T-temporisé)..

- **Principe de fonctionnement :** lorsqu'une marque arrive dans une place temporisée, on dit qu'elle est indisponible pendant un temps τ_{ij} . quand le temps est écoulé, la marque devient disponible.

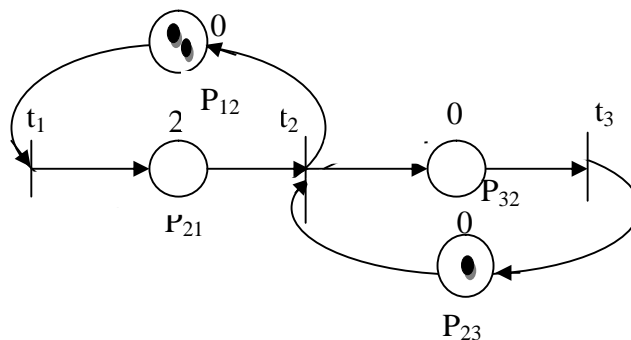


Figure.2.12 : Exemple d'un graphe d'événements temporisés

3.1. Modèles algébriques des graphes d'événements temporisés

Le graphe d'événements temporisé est un outil de modélisation graphique qui constitue une première étape. La seconde étape est la mise en équations du modèle graphique, c'est-à-dire, la définition d'une représentation analytique du système. Le comportement d'un graphe d'événements temporisé peut être décrit par un modèle linéaire dans l'algèbre $(max; +)$ (ou

l'algèbre $(\min; +)$, ce modèle amène à manipuler des variables discrètes qui correspondent aux dates d'activation des transitions du GET.

3.1.1. Modèle en équations aux dateurs (domaine événementiel)

On associe à chaque transition du graphe considéré une fonction de la variable $k \in \mathbb{N}^*$, correspondant à la date du $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition, cette fonction est appelé dateur.

Exemple 2.1 : Nous considérons maintenant le graphe d'événements donné par la figure 2.8.

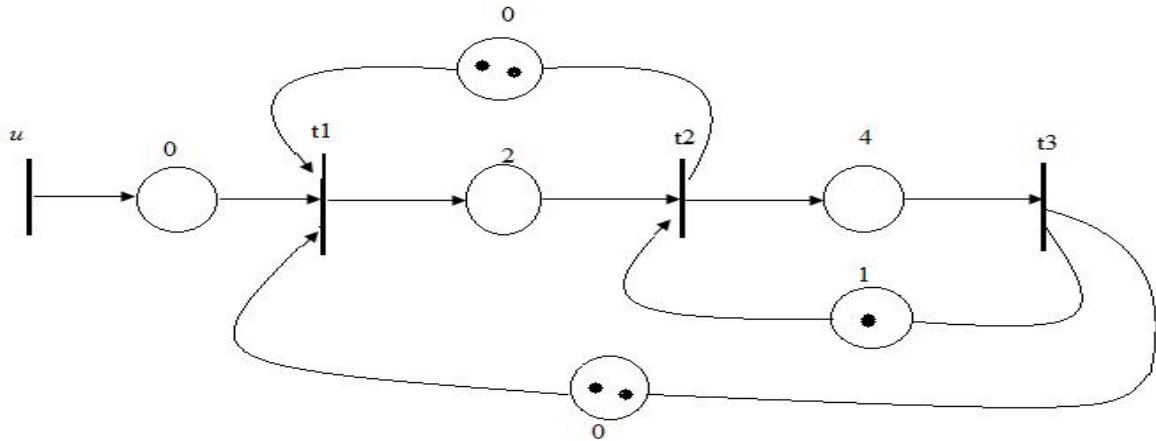


Figure 2.13 : Un graphe d'événements temporisé

Les fonctions dateurs vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 k &\geq \max \{ u k, x_2 k - 2, x_3 k - 2 \} \\ x_2 k &\geq \max \{ 2 + x_1 k, 1 + x_3 k - 1 \} \\ x_3(k) &\geq \max \{ 4 + x_2 k \} \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse d'un fonctionnement au plus tôt, les dateurs ($\text{sur} \mathbb{Z}_{max}$) :

$$\begin{aligned} x_1 k &= u k \oplus x_2 k - 2 \oplus x_3 k - 2 \\ x_2 k &= 2 \otimes x_1(k) \oplus 1 \otimes x_3 k - 1 \\ x_3 k &= 4 \otimes x_2(k) \end{aligned}$$

Pour les dateurs, nous obtenons la représentation d'état sous forme récurrente :

$$x k = \begin{matrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & e & e & & e \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \otimes x(k) \oplus & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \otimes x(k-1) \oplus & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \otimes x(k-2) \oplus & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon \end{matrix} \otimes u(k)$$

La Forme explicite est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \text{On calcule } A_0^*, \text{ tel que } A_0 &= \begin{matrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{matrix} \\ A_0^* &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_0^{i=3} = I_3 \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus A_0^3 \end{aligned}$$

Chapitre 2 - Systèmes à événements discrets

$$A_0^* = \begin{matrix} e & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \oplus & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \oplus & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \oplus & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & & \varepsilon & 4 & \varepsilon & & 6 & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{matrix}$$

$$A_0^* = \begin{matrix} & e & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon & \\ 6 & 4 & e & \end{matrix}$$

L'équation explicite est donnée par :

$$x_k = \begin{matrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & e & e & & e \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & x(k-1) \oplus & \varepsilon & 2 & 2 & x(k-2) \oplus & 2 & u(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & & \varepsilon & 6 & 6 & & 6 & \end{matrix}$$

Pour écrire le modèle d'état on décompose chaque place ayant $m > 1$ en des places avec $m = 1$ et on en ajoute des transitions intermédiaires, et on obtient le graphe suivant :

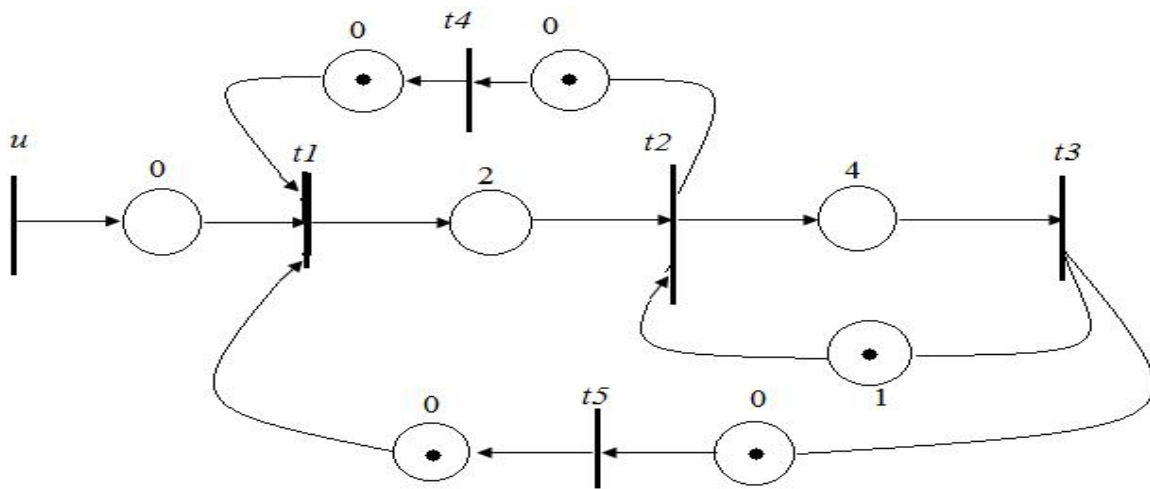


Figure 2.14 : Graphe d'événement temporisé étendu

$$\begin{aligned} x_1 k &= u(k) \oplus x_5(k-1) \oplus x_4(k-1) \\ x_2 k &= 1 \otimes x_3(k-1) \oplus 2 \otimes x_5(k-1) \oplus 2 \otimes x_4(k-1) \\ x_3 k &= 5 \otimes x_3(k-1) \oplus 6 \otimes u(k) \oplus 6 \otimes x_5(k-1) \oplus 6 \otimes x_4(k-1) \\ x_4 k &= x_2(k-1) \\ x_5 k &= x_3(k-1) \end{aligned}$$

Le modèle d'état obtenue est

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & e \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 2 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 & 6 \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(k)$$

3.1.2. Modèle en équations aux compteurs (domaine temporel)

On associe à chaque transition du graphe considéré une fonction du temps correspondant au nombre cumulé de franchissement de la transition à l'instant t. cette fonction est appelée compteur.

Exemple : considérons toujours le graphe de la figure 2.8

Les fonctions compteurs vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_1(t) &\leq \min\{u(t), 2 + x_2(t), 2 + x_3(t)\} \\ x_2(t) &\leq \min\{x_1(t-2), 1 + x_3(t-1)\} \\ x_3(t) &\leq \min\{x_2(t-4)\} \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse d'un fonctionnement au plus tôt, les compteurs (sur \mathbb{Z}_{min}) :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u(t) \oplus 2 \otimes x_2(t) \oplus 2 \otimes x_3(t) \\ x_2(t) &= x_1(t-2) \oplus 1 \otimes x_3(t-1) \\ x_3(t) &= x_2(t-4) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x(t) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x(t-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x(t-2) \\ \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x(t-4) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \otimes u(t)$$

La Forme explicite est donnée comme suit :

$$A_0^* = \begin{pmatrix} e & 2 & 2 \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(t-1) \oplus \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(t-2) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} x(t-4) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(t)$$

Pour avoir la forme d'état, nous avons étendu le graphe d'événement temporisés initial pour avoir un nouveau graphe équivalent avec des temporisations égales à 1 ou 0.

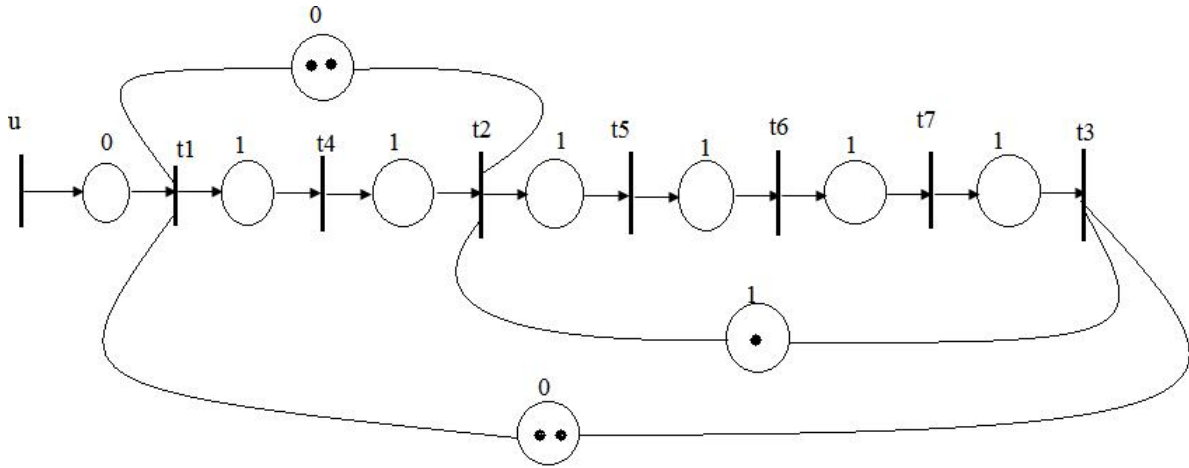


Figure 2.15 : Graphe d'événement temporel étendu

La nouvelle forme d'état explicite sur \mathbb{Z}_{min} qui représente le graphe de la figure 2.10 est :

$$\begin{array}{cccccccc}
 \varepsilon & \varepsilon & 3 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & e \\
 \varepsilon & \varepsilon & 1 & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\
 x & t & = & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & x & t - 1 & + & \varepsilon & u(t) \\
 \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & & & \varepsilon & \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & & & \varepsilon & \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & & & & \varepsilon &
 \end{array}$$

4. Graphes d'événements P-temporels

Les graphes d'événements temporels sont une sous-classe des réseaux de Petri temporels, introduits par Merlin. L'extension temporelle s'exprime sous la forme d'un intervalle associé principalement aux transitions (T-temporel), ou aux places (P-temporel).

En ce qui concerne l'expressivité des graphes d'événements P-temporels et T-temporels, Khansa a montré que ces deux modèles sont distinctes.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux graphes d'événements P-temporel.

- **Définition 2.4.** Un graphe d'événements P-temporel est défini par le doublet $\langle R, I_s \rangle$ où :

R est un réseau de Petri marqué (places-transitions)

$$I_s: P \tilde{E} (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) \times (\mathbb{Z}^+ \cup \{+\infty\})$$

$$P_i \tilde{E} I_{S_i} = [a_i, b_i] \text{ avec } a_i \leq b_i$$

$[a_i, b_i]$ définit l'intervalle statique de temps de séjour d'une marque dans la place p_i .

$I_s(p_i)$ définit l'intervalle statique associé à la place p_i . Un jeton contenu dans la place p_i ne participera à la validation des transitions dont p_i est une place d'entrée que s'il a séjourné pendant au moins a_i unités de temps. Au-delà de b_i unité du temps le jeton est considéré comme mort, et de ce fait ne participera plus à la validation de la transition.

▪ **Définition 2.5. (Fonctionnement admissible)**

Un fonctionnement est admissible pour un réseau de Petri P-temporel, lorsque son évolution dynamique préserve la vivacité des jetons. En conséquence, il ne mène pas le système à un état de blocage.

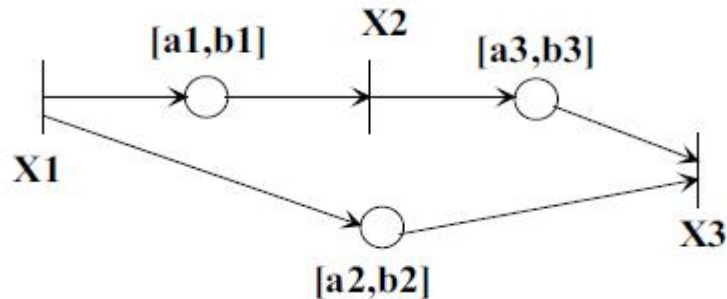


Figure 2.16 : un graphe d'événement P-temporel

4.1. Règles de franchissement pour les GEP-temporel

Les règles de franchissement d'une transition sont les suivantes :

- Toutes les places en amont de la transition doivent contenir au moins un jeton disponible, c.-à-d., ayant séjourné au minimum, s_{min} unités de temps dans la place.
- Les jetons participants à la validation de la transition ne doivent pas avoir séjourné plus de s_{max} unités de temps dans la place.

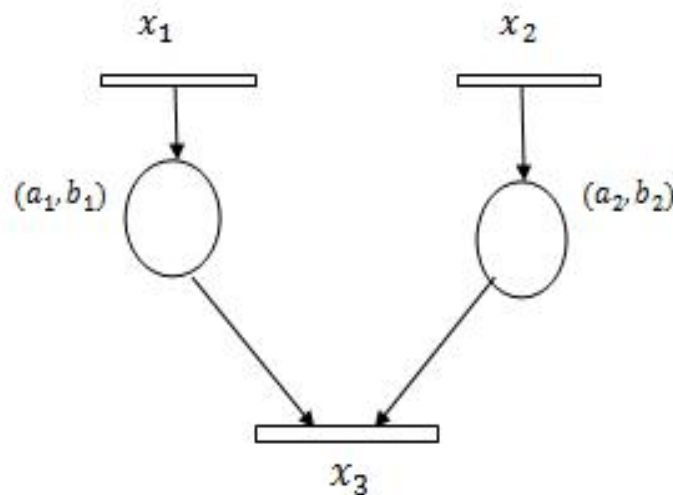


Figure 2.17: Règle de franchissement d'une transition dans un graphe d'événements P-temporel

Exemple. Considérons l'exemple de la figure 2.12, si la transition x_1 est tirée à l'instant t_1 et la transition x_2 est tirée à l'instant t_2 , la date de tir t_3 de la transition x_3 doit respecter les contraintes suivantes:

- $t_3 \geq$ date de disponibilité des jetons c.-à-d.

$$t_3 \geq t_1 + a_1 \text{ et}$$

$$t_3 \geq t_2 + a_2$$

$t_3 \leq$ Date de mort des jetons c.-à-d.

$$t_3 \leq t_1 + b_1 \text{ et}$$

$$t_3 \leq t_2 + b_2$$

4.2. Condition de franchissement d'une transition

4.2.1. Etat d'un jeton

Soit c un instant absolu d'arrivée d'un jeton dans une place (donné par une horloge globale). A l'instant t un jeton peut être :

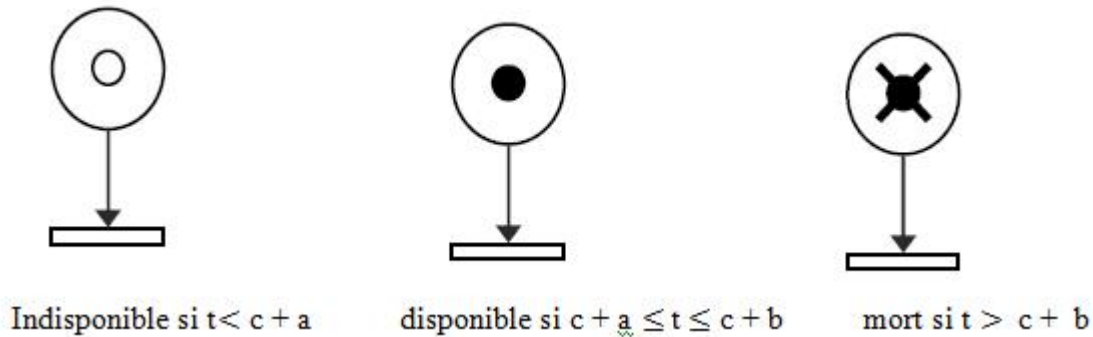


Figure 2.18 : Différents état d'un jeton dans un RdP P-temporel

▪ **Définition 2.6.**

Une transition t_i est potentiellement tirable (validée au sens des RdP P-temporel) à partir de l'état $E(\mathcal{M}, G)$ si et seulement si :

- 1- $\forall p_i \in P : m(p_i) \geq \text{Pré}(p_i, t_i)$
- 2- $\forall p_i \in P$, il existe au moins $\text{Pré}(p_i, t_i)$ marques dans cette place telle que :

$$\min(b_i - \theta_i^k) - \max(0, \max(a_i - \theta_i^k)) \geq 0 \text{ où :}$$

$$k=1, 2, 3, \dots, \text{pré}(p_i, t_i)$$

$[a_i, b_i]$ Est l'intervalle statique associé à la place p_i .

θ_i^k est l'âge de la marque k dans la place p_i .

De plus, il n'existe pas de marques j (qui ne participent pas au franchissement de la transition t_i) telle que $(b_i - \theta_i^j) \leq \max(0, \max(a_i - \theta_i^j))$. Sinon cette marque sera morte.

Alors on associe à cette place l'intervalle $[\max(0, \max(a_i - \theta_i^k)), \min(b_i - \theta_i^k)]$.

L'intersection de tout ces intervalles (pour chaque place d'entrée de t_i , on associe un intervalle) donne l'intervalle dans lequel la transition reste potentiellement tirable.

4.3. Propriétés des Graphes d'événement P-temporel [18]

- **Finitude et accessibilité**

Un RdP P-temporel est borné pour un marquage initial \mathbb{Z}_0 si toutes les places sont bornées : il existe

$k \in \mathbb{Z}$, tel que pour tout marquage accessible de \mathbb{Z}_0 , le nombre de marques dans une place est inférieur ou égal à k .

Le réseau est k-borné si toutes ses places sont k-bornées.

La finitude du marquage et le problème d'accessibilité d'un marquage sont indécidables pour les p-RdP.

- **Vivacité et blocage**

Une transition t_j d'un p-RdP est vivante pour un marquage initial \mathbb{Z}_0 donné si : pour tout marquage \mathbb{Z}_i accessible depuis \mathbb{Z}_0 , il existe une séquence de franchissement (des transitions et des dates de franchissement associées) réalisable à partir de \mathbb{Z}_i contenant t_j .

Un RdP P-temporel est vivant pour un marquage initial \mathbb{Z}_0 si toutes ses transitions sont vivantes pour \mathbb{Z}_0 .

Un p-RdP est marques-vivantes pour un marquage initial \mathbb{Z}_0 (l'état initial E_0) si tous les marquages des états accessibles depuis \mathbb{Z}_0 sont des états marques-vivantes.

Si une marque d'un marquage d'un état accessible depuis E_0 est morte, alors le réseau est marques-mortes. n blocage est un marquage qui ne valide aucune transition.

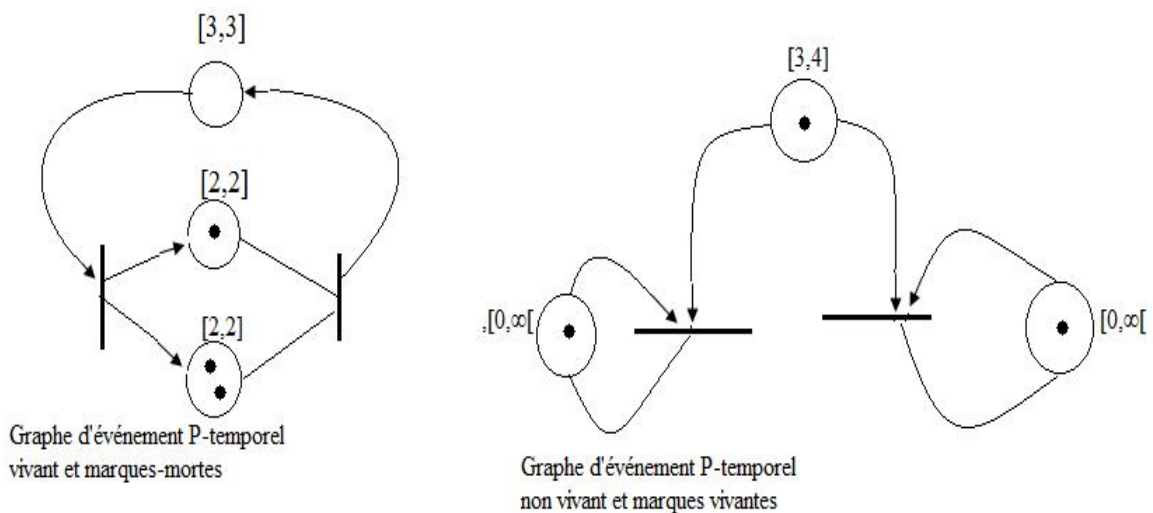


Figure 2.19 : Vivacité des marques

5. Modèle de GE P-temporels dans l'algèbre (Max, +)

Dans l'algèbre des dioïdes, nous adoptons les notations suivantes : \oplus opérateur maximum, \otimes Opérateur minimum et \otimes addition dans $Rmax$.

La proposition suivante donne les conditions que doivent satisfaire les dates de tirs des transitions pour garder un fonctionnement admissible. Ces conditions se présentent sous la forme d'un modèle d'intervalle.

Proposition 2.1. Pour qu'un graphe d'événements P-temporel respecte un fonctionnement admissible, la modélisation correspondant à chacune de ses transitions, non transition source, est donnée par l'expression suivante :

$$\bigoplus_{j \in S_i} (x_j(k - m_j) + T_j^-) \leq x_i(k) \leq \bigoplus_{j \in S_i} (x_j(k - m_j) + T_j^+),$$

Avec S_i l'ensemble des places d'entrée de la transition x_i et m_j le marquage initial de chacune de ces places.

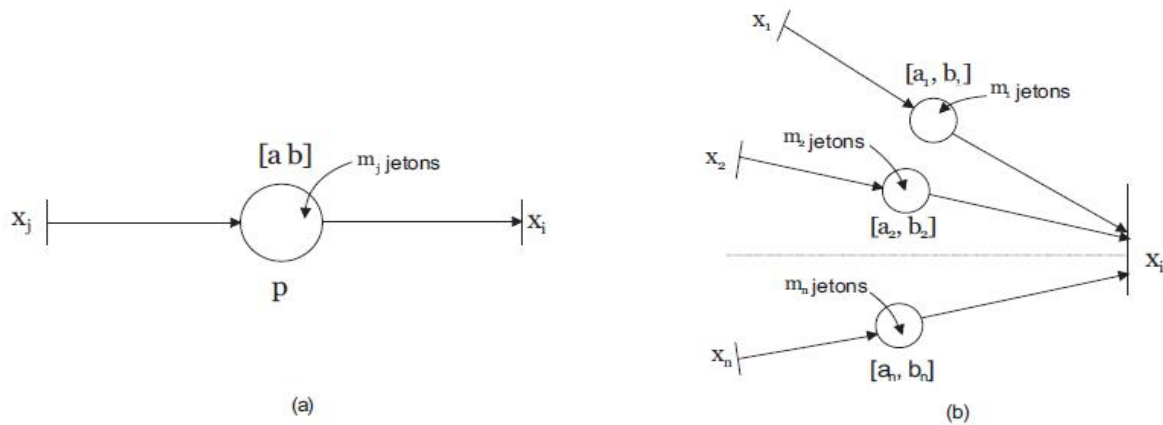


Figure 2.20 : Parties d'un graphe d'événements p-temporel.

Dans un graphe d'événements p-temporel, en dehors des transitions sources, une transition (Interne ou de sortie) peut avoir une seule place en amont ou, être une transition de synchronisation.

Nous associons un dateur $x_i(k)$ pour chaque transition, qui a une seule place P_j en amont. Cette dernière se trouve en aval d'une transition qui a aussi pour dateur $x_j(k)$ (voir la figure 2.8a). Les m_j marques qui franchissent x_j à la date $x_j(k - m_j)$ sont prêtes pour franchir x_i (au plus tôt à la date $x_j(k - m_j) + a_j$, et au plus tard, doivent quitter cette place à la date $x_j(k - m_j) + b_j$: D'ou $x_i(k) \geq x_j(k - m_j) + a_j$ et $x_i(k) \leq x_j(k - m_j) + b_j$. Si x_i est une transition de synchronisation, $x_i(k)$ doit satisfaire les deux systèmes d'inéquations suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(k) \geq x_1 k - m_1 + a_1 \\ x_i(k) \geq x_2 k - m_2 + a_2 \\ \vdots \\ x_i(k) \geq x_n k - m_n + a_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i(k) \leq x_1 k - m_1 + b_1 \\ x_i(k) \leq x_2 k - m_2 + b_2 \\ \vdots \\ x_i(k) \leq x_n k - m_n + b_n \end{array} \right.$$

Dans le dioïde \mathbb{Z}_{max} , le premier système se réécrit : $x_i(k) \geq \bigoplus_{j=1}^n a_j \otimes x_j(k - m_j)$,

Dans le dioïde \mathbb{Z}_{min} , le deuxième système se réécrit : $x_i(k) \leq \bigoplus_{j=1}^n b_j \otimes x_j(k - m_j)$.

$$\bigoplus_{j=1}^n a_j \otimes x_j(k - m_j) \leq x_i(k) \leq \bigoplus_{j=1}^n b_j \otimes x_j(k - m_j)$$

Exemple d'application

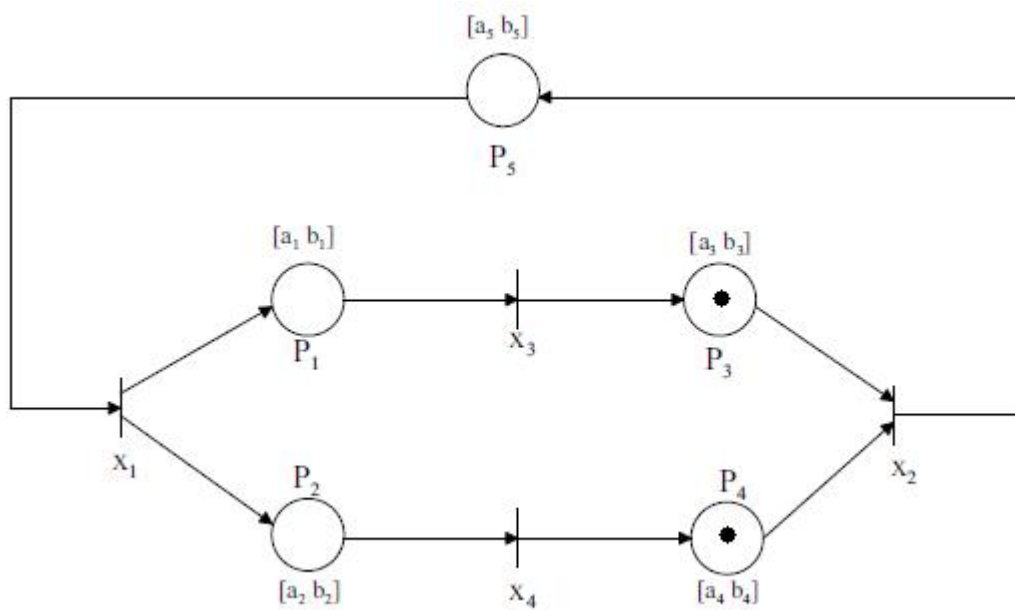


Figure 2.21 : Exemple d'application

$$[a_1, b_1] = [0, 1], [a_2, b_2] = [5, 6]; [a_3, b_3] = [0, 1] [a_4, b_4] = [0, 1] \text{ et } [a_5, b_5] = [3, 4]$$

Les équations d'état du système :

$$\begin{aligned} 3 \otimes x_2(k) &\leq x_1(k) \leq 4 \otimes x_2(k) \\ x_3(k-1) \oplus x_4(k-1) &\leq x_2(k) \leq 1 \otimes x_3(k-1) \oplus 1 \otimes x_4(k-1) \\ x_1(k) &\leq x_3(k) \leq 1 \otimes x_1(k) \\ 5 \otimes x_2(k) &\leq x_4(k) \leq 6 \otimes x_2(k) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon
 \end{array}
 x(k) \oplus
 \begin{array}{cccc}
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & \varepsilon & e & e \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
 \end{array}
 x(k-1) \leq x(k)$$

$$\leq
 \begin{array}{cccc}
 \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon
 \end{array}
 x(k) \oplus
 \begin{array}{cccc}
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & \varepsilon & 1 & 1 \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
 \end{array}
 x(k-1)$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la modélisation des systèmes à événements discrets à contraintes temporelles. Nous avons présenté brièvement les principaux modèles des réseaux de Petri qui permettent une intégration simple et efficace du temps. Ces modèles présentés (RdP temporisés et RdP temporels) sont donc bien adaptés à l'évaluation des performances des systèmes, à contraintes temporelles, soit analytiquement en se basant sur la recherche des circuits critiques et sur le calcul du temps de cycle associé, soit par simulation du modèle. Plusieurs chercheurs ont utilisé cette notion de temps de cycle pour l'évaluation analytique des performances d'ateliers de fabrication.

Introduction

Les Graphes d'événements temporisés jouent un rôle important en raison de son comportement déterministe, l'évolution du système est alors décrite par des équations définies dans un dioïde, à côté de la classe maintenant bien connue des graphes d'événements temporisés les réseaux de Petri temporels sont une classe importante des réseaux de Petri. Ils sont un langage graphique, permettant de décrire les systèmes dynamiques à événements discrets, à contrainte de temps. La dynamique de tels systèmes modélisés par ces graphes dépend à la fois du marquage et des intervalles de temps associés aux places.

Le travail abordé dans ce chapitre est l'étude de l'estimation des graphes d'événements temporels. Les premiers résultats concernant les problèmes d'observation des systèmes à événements discrets, obtenus par une approche $(max, +)$, ont été développés en Mars 2004 par Laurent Hardouin et Carlos Maia, il s'agit d'un résultat inspiré de Luenberger. Dans Declerck [18], une approche basée sur la connaissance de l'entrée u et la sortie y d'un graphe d'événement temporisé est utilisée afin de caractériser le vecteur d'état. Dans ce chapitre, la même approche sera utilisée pour estimer le vecteur d'état d'un graphe d'événement P-temporels. La difficulté réside dans le fait que le temps associé aux places appartient à des intervalles.

1. Rappel sur les observateurs [3]

Un estimateur ou reconstruteur d'état est un système ayant comme entrées les entrées et les sorties du processus réel, et dont la sortie est une estimation de l'état de ce processus.

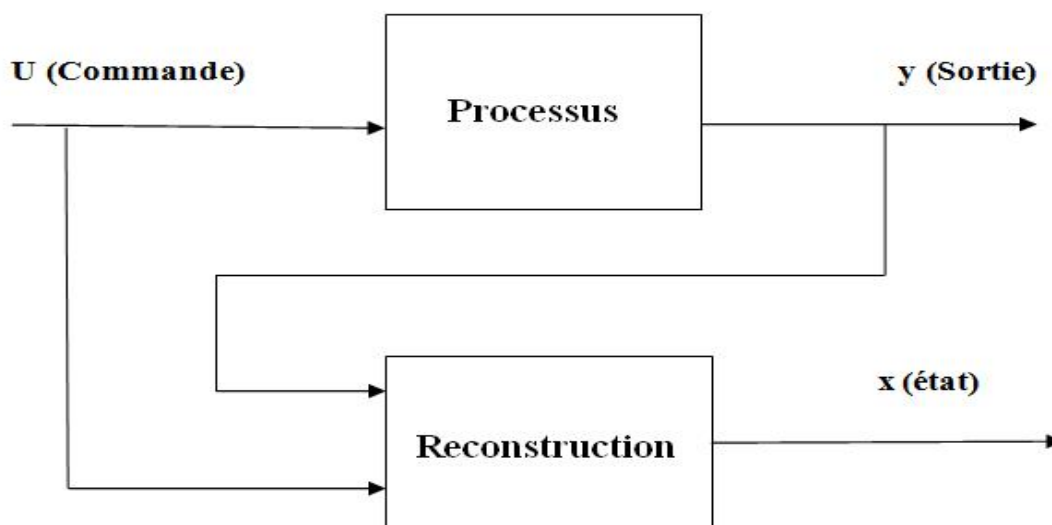


Figure 3.1 : Reconstruction d'état à partir de l'entrée et de la sortie

La réalisation de l'estimation dépend de la nature du modèle du système réel étudié : continu ou discret, déterministe ou stochastique. Notons que, dans le cas où le modèle du processus est déterministe, l'estimateur sera appelé observateur tandis que dans le cas où le modèle est stochastique, le reconstruteur d'état sera appelé filtre.

Rappelons la philosophie de l'estimation dans les systèmes continus. Le problème de l'observabilité prend origine dans le fait que l'on considère souvent des systèmes possédant n variables d'état et m sorties, dans lesquels le nombre des sorties est inférieur à celui des variables d'état ($m < n$). La question se pose sur la possibilité de reconstruire l'état à un instant, à partir de l'observation de la sortie pendant un temps fini.

Dans le problème de l'estimation, les seules grandeurs accessibles du système sont les variables d'entrée et de sortie. A l'opposé, la trajectoire de l'état est l'inconnue. En cohérence avec cette dernière donnée, il est important de rappeler qu'en estimation, les conditions initiales de l'évolution du système dynamique sont inconnues.

Tout le problème est alors de s'affranchir de ces conditions initiales par une résolution adaptée au modèle défini et naturellement à l'algèbre utilisée.

1.1 Observateurs en continu

Le modèle correspond aux classiques équations d'état et de mesure, définies dans l'algèbre habituelle :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

La résolution du problème par Luenberger l'a conduit à l'observateur suivant, où la décroissance de fonctions exponentielles se traduira par la convergence asymptotique à zéro de l'erreur d'observation $\tilde{x} = x - \hat{x}$, avec comme point de départ $\tilde{x} = x_0 - \hat{x}_0$. La variable \hat{x}_0 est une estimation de l'état initial.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)), & \hat{x}(0) &= \hat{x}_0 \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}$$

L'estimation n'est alors correcte qu'après un certain temps de convergence, fixé par la dynamique de l'observateur. Ce sera le cas si la matrice $\tilde{A} = A - K \cdot C$, c'est-à-dire que les valeurs propres de \tilde{A} sont à partie réelle négative.

1.2 Observateur dans l'algèbre max-plus

Le point de départ de la constitution d'un observateur dans l'algèbre $(\max, +)$ est la structure de l'observateur de Luenberger mais avec les transformations suivantes : l'addition $+$ du Modèle et la soustraction $-$ du comparateur, sont remplacées par le maximum noté \oplus ; la multiplication \times est remplacée par l'addition notée \oplus .

1.2.1 Observabilité des graphes d'événements P-temporel [3]

Définition 3.1 Un graphe d'événements est structurellement observable si, à partir de chaque transition interne, il existe au moins un chemin qui mène à une transition de sortie.

Dans les réseaux de Petri, une autre définition est souvent utilisée : une transition est dite observable si les dates des tirs sont connues.

Un effet possible sur les dates de transitions internes ne peut être fait seulement s'il y a un chemin entre une transition d'entrée et chaque transition interne.

2. Estimation d'état par étoile de Kleene

Cette méthode consiste à trouver la borne maximale de $x(k)$ pour k allant de k_0 à k_f sachant que la commande $u(k)$ et la sortie $y(k)$ sont connues, par exemple le tir de la transition u_i dans le système de production signifie qu'un objet est donné au processus pour être transformé et le tir de la transition y_i signifie que la fabrication d'un objet vient d'être terminée, ainsi le modèle est supposé connu sur le même horizon d'observation. Ce problème d'estimation est différent de celui de la synthèse de commande où la commande et la sortie sont des données inconnues.

2.1. Principe de la méthode d'estimation par étoile de Kleene [18]

A partir du graphe d'événements, on construit dans un premier temps un nouveau réseau de Petri tel que chaque place contenant n jetons avec n strictement supérieur à 1 soit développée sous forme d'une chaîne de n places contenant chacune un jeton. Ce nouveau graphe peut être décrit par les équations ci-dessous.

$$x(k) = A_0 x(k) \oplus A_1 x(k-1) \oplus B u(k)$$

$$y(k) = C x(k)$$

L'élément $[A_0]_{ij}$ (respectivement $[A_1]_{ij}$) représente la temporisation de la place sans jeton (respectivement : avec un jeton) formant le lien entre la transition x_j et la transition x_i .

Chapitre 3 - Estimation d'état par étoile de Kleene

L'élément $[B]_{ij}$ (respectivement : $[C]_{ij}$) représente la temporisation de la place sans jeton formant le lien entre l'entrée u_j et la transition x_i (respectivement : entre la transition x_j et la sortie y_i).

Sous la condition que le graphe d'événements ne présente pas de circuit sans jeton, le système peut se réduire à une forme d'état classique en utilisant l'étoile de A_0 . On obtient

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0 \otimes A_1 \otimes x(k-1) \oplus A_0 \otimes B \cdot u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

Cette dernière forme n'étant pas indispensable, nous utiliserons la forme qui la précède et dont l'intérêt est que chaque composante $[A_0]_{ij}, [A_1]_{ij}, [B]_{ij}$ ou $[C]_{ij}$ représente exactement une simple temporisation du graphe. Ce modèle est ainsi plus près de l'événement initial et de sa conception. La méthode suivante peut naturellement être appliquée indistinctement aux deux types d'équation après une modification légère des matrices et des équations.

On note $[A_0]_{ij}^-$ et $[A_0]_{ij}^+$ les limites inférieure et supérieure de l'intervalle correspondant à $[A_0]_{ij}$. Ainsi $[A_0]_{ij}$ appartient à l'intervalle $[[A_0]_{ij}^-, [A_0]_{ij}^+]$ ou $[A_0]_{ij}^- \leq [A_0]_{ij} \leq [A_0]_{ij}^+$. La notation est identique pour $[A_1]_{ij}, B_{ij}$ et C_{ij} .

La méthode de résolution est constituée de trois étapes :

- Choisir un sous-ensemble particulier de contraintes CBD.
- Appliquer l'étoile de Kleene pour calculer la solution maximale.
- Utiliser la solution précédente pour guider le choix de la nouvelle contrainte et ainsi minimiser la solution maximale.

Les deux étapes précédentes sont répétées jusqu'à la convergence vers une solution si elle existe, vérifiant toutes les contraintes.

Nous adoptons ici une démarche itérative qui nous permettra de limiter le nombre de variables et d'équations à traiter simultanément. Ainsi, nous allons résoudre dans un premier temps le système précédent pour $k = k_f$ ce qui va nous permettre de donner une borne supérieure pour $x(k_f)$ et $x(k_f - 1)$.

Nous notons respectivement $x^+(k_f)$ et $x^+(k_f - 1)$ la borne supérieure de $x(k_f)$ et $x(k_f - 1)$ connaissant l'entrée et la sortie sur l'horizon $[k, k_f]$.

Comme il faut tenir compte des calculs précédents et en particulier de la borne supérieure de $x(k_f - 1)$ déjà calculée, on doit donc ajouter l'inégalité suivante dans le système à résoudre.

$$x(k_f - 1) \leq x^+(k_f - 1) .$$

On peut donc répéter la procédure de manière itérative et décroissante jusque k_0 .

3. Développement de la méthode de résolution par étoile de Kleene [19]

Considérons des SED modélisés par des graphes d'événements P-temporel, la technique d'estimation du vecteur d'état qui introduit un observateur dans l'Algèbre (Max, +) sera développé dans la partie suivante.

3.1. Formulation du système d'inéquation

Dans cette partie, le système est transformé en un ensemble d'inégalité. Le système est le suivant :

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0 \quad x(k-1) \quad A_1 \quad x(k-2) \quad \dots \quad B \quad u(k) \\ y(k) &= C \quad x(k) \end{aligned}$$

Ces équations peuvent être réécrites de la manière suivante :

Pour i allant de 1 à n (n dimensions de l'état, q de l'entrée)

$$x_i(k) = \bigoplus_{j=1}^n [A_0]_{i,j}^- \quad x_j(k) \quad \bigoplus_{j=1}^n [A_1]_{i,j}^- \quad x_j(k-1) \quad \bigoplus_{j=1}^q B_{i,j}^- \quad u_j(k)$$

Pour i allant de 1 à m (m dimension de la sortie)

$$y_i(k) = \bigoplus_{j=1}^n C_{i,j}^- \quad x_j(k)$$

En premier, comme $a \oplus b \Rightarrow a \oplus c \oplus b \oplus c$, $c \oplus d \Rightarrow c \oplus d \oplus d \oplus b$ et \oplus est commutative, On a $a \oplus b$ et $c \oplus d$ on obtient $a \oplus c \oplus b \oplus d$. L'opération \oplus est isotone ($a \oplus b \forall c, ac \oplus bc$). Avec ces propriétés on peut déduire les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} [A_0]_{i,j}^- \quad [A_0]_{i,j}^- \quad [A_0]_{i,j}^+ \\ \bigoplus_{j=1}^n [A_0]_{i,j}^- \otimes x_j(k) \quad \bigoplus_{j=1}^n [A_0]_{i,j}^- \otimes x_j(k) \quad \bigoplus_{j=1}^n [A_0]_{i,j}^+ \otimes x_j(k) \\ \bigoplus_{j=1}^n [A_1]_{i,j}^- \otimes x_j(k-1) \quad \bigoplus_{j=1}^n [A_1]_{i,j}^- \otimes x_j(k-1) \quad \bigoplus_{j=1}^n [A_1]_{i,j}^+ \otimes x_j(k-1) \\ \bigoplus_{j=1}^q B_{i,j}^- \otimes u_j(k) \quad \bigoplus_{j=1}^q B_{i,j}^- \otimes u_j(k) \quad \bigoplus_{j=1}^q B_{i,j}^+ \otimes u_j(k) \end{aligned}$$

Enfin, en déduit :

$$\bigoplus_{j=1}^n [A_0]_{i,j}^- \otimes x_j(k) \oplus \bigoplus_{j=1}^n [A_1]_{i,j}^- \otimes x_j(k-1) \oplus \bigoplus_{j=1}^q B_{i,j}^- \otimes u_j(k) \quad x_i(k)$$

Et

$$x_i(k) \quad \bigoplus_{j=1}^n [A_0]_{i,j}^+ \otimes x_j(k) \oplus \bigoplus_{j=1}^n [A_1]_{i,j}^+ \otimes x_j(k-1) \oplus \bigoplus_{j=1}^q B_{i,j}^+ \otimes u_j(k) \quad (3.1)$$

Pour la sortie :

$$\bigoplus_{j=1}^n C_{i,j}^- \otimes x_j(k) \quad y_i(k) \quad \text{Et} \quad y_i(k) \quad \bigoplus_{j=1}^n C_{i,j}^+ \otimes x_j(k)$$

Les coefficients des matrices A_0^- , A_1^- , B^- et C^- (respectivement A_0^+ , A_1^+ , B^+ et C^+) dans \mathbb{Z}_{max} représentent les bornes inférieures (respectivement supérieures) des intervalles de temps associés au places. Ces coefficients sont positifs.

A partir de ce système de $2(n + m)$ équations et n variables $x_i(k)$, ceci pour k donné, nous allons construire un système d'inégalités particulières que nous définissons ci-dessous.

3.2. Construction d'un système d'inéquations particulières en introduisant les CBDs

- **Définition :** Une contrainte bornant par-dessus ou CBD, présente la forme suivante :

$x_{\tau(i)}$ $\sum_{j=1}^s A_{i,j} x_j$ ou $\tau(i)$ est utilisé pour désigner la variable du terme gauche de cette $i^{\text{ème}}$ inégalité.

Remarque : la variable $x_{\tau(i)}$ peut être les termes gauches de plusieurs CBD et donc en peut avoir $x_{\tau(i)} = x_{\tau_j}$ avec $i = j$.

Considérons maintenant l'équation (3.1). Dans le problème posé, le terme $\sum_{j=1}^q B_{i,j} u_j(k)$ représente une constante. Pour ramener le système à une forme CBD, nous introduisons une nouvelle variable x_0 qui représente l'élément neutre e pour l'opération \otimes et le zéro en notation usuelle. Pour i allant de 1 à n (n est la dimension de l'état et q la dimension de l'entrée).

$x_i(k) = \sum_{j=1}^n [A_0]_{i,j}^+ \otimes x_j(k) \oplus \sum_{j=1}^n [A_1]_{i,j}^+ \otimes x_j(k-1) \oplus [\sum_{j=1}^q B_{i,j}^+ \otimes u_j(k)] \otimes x_0$ et pour chaque j allant de 1 à n , $[A_0]_{i,j}^- \otimes x_j(k) = x_i(k)$ ou $x_j(k) = ([A_0]_{i,j}^-)^{\otimes(-1)} \otimes x_i(k)$ et aussi $x_j(k-1) = ([A_1]_{i,j}^-)^{\otimes(-1)} \otimes x_i(k)$.

Pour le dernier terme de droite, $\sum_{j=1}^q B_{i,j}^- \otimes u_j(k) \otimes x_0 = x_i(k)$ ou $x_0 = [\sum_{j=1}^q B_{i,j}^- \otimes u_j(k)]^{\otimes(-1)} \otimes x_i(k)$.

Considérons les inégalités relative a la sortie .Pour i allant de 1 à m (m est la dimension de la sortie), on a : $y_i(k) = \sum_{j=1}^n C_{i,j}^+ \otimes x_j(k)$ et $\sum_{j=1}^n C_{i,j}^- \otimes x_j(k) = y_i(k)$.

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, nous introduisons la variable x_0 dans les inégalités.

$y_i(k) \otimes x_0 = \sum_{j=1}^n C_{i,j}^+ \otimes x_j(k)$ Ou $x_0 = [y_i(k)]^{\otimes(-1)} (\sum_{j=1}^n C_{i,j}^+ \otimes x_j(k))$.

et pour chaque j allant de 1 à n , $C_{i,j}^- \otimes x_j(k) = y_i(k) \otimes x_0$

ou $x_j(k) = [C_{i,j}^-]^{\otimes(-1)} \otimes y_i(k) \otimes x_0$.

En résumé, le système peut être ramené au système CBD suivant et si $x_0 = e$:

- $2n + 1 + m$ relation état / entrée.

($i \in [1,n]$),

$x_i(k) = \sum_{j=1}^n [A_0]_{i,j}^+ \otimes x_j(k) \oplus \sum_{j=1}^n [A_1]_{i,j}^+ \otimes x_j(k-1) \oplus [\sum_{j=1}^q B_{i,j}^+ \otimes u_j(k)] \otimes x_0$

($i \in [1,n]$), $x_0 = [\sum_{j=1}^q B_{i,j}^- \otimes u_j(k)]^{\otimes(-1)} \otimes x_i(k)$

($i \in [1,n]$), ($j \in [1,n]$), $x_j(k) = [A_0]_{i,j}^- \otimes x_i(k)$ et $x_j(k-1) = [A_1]_{i,j}^- \otimes x_i(k)$.

- $m + 1 + n$ relation état / sortie.

($i \in [1,m]$), $x_0 = [y_i(k)]^{\otimes(-1)} (\sum_{j=1}^n C_{i,j}^+ \otimes x_j(k))$

$$(i \in [1,m]), (j \in [1,n]), x_j(k) \in [C_{i,j}^-]^{\otimes(-1)} \quad y_i \leq k \quad x_0.$$

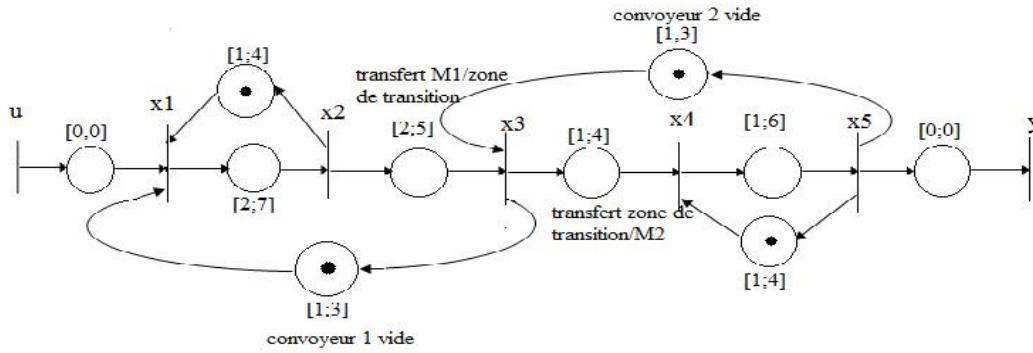
3.3. Résolution du système par étoile de Kleene[19]

Exploitant l'étoile de Kleene, la technique de résolution de E. Walkup et G. Borriello [] permet de calculer la plus grande solution des systèmes d'équations et d'inéquations pouvant se mettre sous la forme d'un ensemble d'inéquations du type CBD. Elle peut résoudre des équations (max, +) linéaires de la forme $x = ax$ et faire de l'optimisation de fonctions sous contraintes. Utilisant l'opérateur bien connu de l'étoile de Kleene présenté dans la section 1.3.2. La solution trouvée devra également vérifier les inégalités de type CBD couplées avec la variable x_0 afin que toutes les inégalités soient vérifiées. Le système est sans solution si une inégalité CBD couplée avec x_0 lui impose une valeur négative. Il est d'autre part possible de montrer que la convergence opère en un nombre fini d'étapes et qu'il existe un sous-ensemble ciblant sauf permettant l'initialisation de l'itération.

4. Exemple d'application

Une cellule de production de pots de peinture est constituée de deux machines. La première machine M1 s'occupe du malaxage (mélange des différentes couleurs) et du chargement de la peinture dans les pots. Cette opération dure au minimum 2 unités de temps, et au maximum 7 unités de temps (sinon, il y aura un débordement du produit et le pot devra être retiré de la chaîne de production). Le temps de fermeture des pots, remplis par la machine M2, est compris entre 1 au minimum (sinon le pot sera mal fermé) et 6 unités de temps au maximum (sinon, le pot sera fermée avec trop de force). Un premier convoyeur a besoin entre 2 et 5 unités de temps pour transporter les produits sortant de M1 vers une zone de transition. Ces derniers transitent par x_3 pour atteindre un deuxième convoyeur qui met entre 1 et 4 unités de temps pour transporter les produits de la zone de transition vers la machine M1. On impose aux deux machines qu'ils ne restent pas libres au delà de 4 unités de temps. Les deux convoyeurs mettent un temps minimum de 1 unité temps pour retourner à leurs états initiaux une fois qu'ils ont livré un produit. Ils peuvent aussi attendre un produit jusqu'à 3 unités de temps.

Afin de modéliser ce système, on utilise donc le graphe d'événements P-temporels représenté dans la figure 3.2.



3.2 : Graphe d'événements P-temporel qui représente le système

Le modèle du graphe d'événement P-temporel du système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 u(k) \oplus 1 \otimes x_2(k-1) \oplus 1 \otimes x_3(k-1) & \quad x_1(k) \quad u(k) \quad 4 \quad x_2(k-1) \oplus (3 \otimes x_3(k-1)) \\
 2 \otimes x_1(k) & \quad x_2(k) \quad 7 \quad x_1(k) \\
 2 \otimes x_2(k) \oplus 1 \otimes x_5(k-1) & \quad x_3(k) \quad (5 \otimes x_2(k) \oplus (3 \otimes x_5(k-1))) \\
 1 \otimes x_3(k) \oplus (1 \otimes x_5(k-1)) & \quad x_4(k) \quad (4 \otimes x_3(k) \oplus (4 \otimes x_5(k-1))) \\
 1 \otimes x_4(k) & \quad x_5(k) \quad 6 \otimes x_4(k) \\
 x_5(k) & \quad y(k) \quad x_5(k)
 \end{aligned}$$

La solution au plus tôt est la suivante :

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= u(k) \oplus (1 \otimes x_2(k-1)) \oplus (1 \otimes x_3(k-1)) \\
 x_2(k) &= 2 \otimes x_1(k) \\
 x_3(k) &= 2 \otimes x_2(k) \oplus 1 \otimes x_5(k-1) \\
 x_4(k) &= 1 \otimes x_3(k) \oplus (1 \otimes x_5(k-1)) \\
 x_5(k) &= 1 \otimes x_4(k) \\
 y(k) &= x_5(k)
 \end{aligned}$$

La solution au plus tard est la suivante :

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= u(k) \quad 4 \quad x_2(k-1) \oplus (3 \otimes x_3(k-1)) \\
 x_2(k) &= 7 \quad x_1(k) \\
 x_3(k) &= (5 \otimes x_2(k) \oplus (3 \otimes x_5(k-1))) \\
 x_4(k) &= (4 \otimes x_3(k) \oplus (4 \otimes x_5(k-1))) \\
 x_5(k) &= 6 \otimes x_4(k) \\
 y(k) &= x_5(k)
 \end{aligned}$$

Chapitre 3 - Estimation d'état par étoile de Kleene

Le fonctionnement au plus tôt (respectivement au plus tard) d'un système représenté par un graphe d'événements P-temporel, correspond à un franchissement pour chacune des transitions (sources, internes et puits) à une date au plus tôt (respectivement au plus tard), le système peut perdre sa propriété de fonctionnement admissible, dans ce cas, il peut avoir un dysfonctionnement qui mènera le système global à une situation de blocage.

Si on pose $x(k) = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)^t$ un vecteur colonne, le système peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{array}{cccccc}
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \\
 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \\
 \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \otimes x(k) \oplus \\
 \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \\
 \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \\
 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \\
 x(k) & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & x(k) \oplus & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \otimes x(k-1) \oplus & \varepsilon & u(k) \\
 \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & & & & \varepsilon \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & & & \varepsilon
 \end{array}$$

La sortie

$$\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e \quad x(k) \quad y(k) \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e \quad x(k)$$

Pour pouvoir poursuivre la démarche de l'approche considérée, on doit ramener le système d'inéquation à une forme CBD en introduisant une variable x_0 pour les termes constant. On aura le système suivant :

$$\begin{array}{l}
 x_1(k) \quad 4 \quad x_2(k-1) \oplus 3 \otimes x_3(k-1) \oplus u(k) x_0 \\
 x_2(k) \quad 7 \quad x_1(k) \\
 x_3(k) \quad 5 \otimes x_2(k) \oplus 3 \otimes x_5(k-1) \\
 x_4(k) \quad 4 \otimes x_3(k) \oplus 4 \otimes x_5(k-1) \\
 x_5(k) \quad 6 \otimes x_4(k)
 \end{array}$$

D'autre part :

$$\begin{array}{l}
 1 \otimes x_2(k-1) \quad x_1(k) \\
 u(k) x_0 \quad x_1(k) \\
 1 \otimes x_3(k-1) \quad x_1(k) \\
 2x_1(k) \quad x_2(k) \\
 2x_2(k) \quad x_3(k) \\
 1 \otimes x_5(k-1) \quad x_3(k)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 1 \otimes x_3 \quad k \quad x_4 \quad k \\
 11 \otimes x_5 \quad k - 1 \quad x_4 \quad k \\
 1 \otimes x_4 \quad k \quad x_5 \quad k \\
 x_5(k) \quad y(k) \otimes x_0
 \end{aligned}$$

Arrivons à cette étape, on cherche à construire un système d'inéquation qu'on peut écrire sous la forme suivante : $x(k) = Ax(k) \oplus B$.

Donc, depuis les inéquations précédentes, on aura le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned}
 x_1 \quad k \quad [2]^{\otimes(-1)} x_2 \quad k \\
 x_2 \quad k \quad [2]^{\otimes(-1)} x_3 \quad k \\
 x_3 \quad k \quad [1]^{\otimes(-1)} x_4 \quad k \\
 x_4 \quad k \quad [1]^{\otimes(-1)} x_5 \quad k \\
 x_5 \quad k \quad y \quad k \quad x_0
 \end{aligned}$$

Qu'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{array}{cccccc}
 \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 x(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & x(k) \oplus \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & y \quad k \quad x_0
 \end{array}$$

Le système ci-dessus est sous forme de $x \quad k = Ax \quad k \oplus B$, la plus grande solution de cette équation est $x(k) = A \oplus B$.

Le calcul de A :

$$\begin{aligned}
 A &= I_5 \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus A_0^3 \oplus A_0^4 \oplus A_0^5 \\
 A_0 &= \begin{array}{ccccc}
 e & -2 & -4 & -5 & -6 \\
 \varepsilon & e & -2 & -3 & -4 \\
 \varepsilon & \varepsilon & e & -1 & -2 \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & -1 \\
 \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e
 \end{array}
 \end{aligned}$$

La plus grande solution d cette équation :

Chapitre 3 - Estimation d'état par étoile de Kleene

$$x(k) = AB = \begin{matrix} e & -2 & -4 & -5 & -6 & \varepsilon \\ \varepsilon & e & -2 & -3 & -4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & -1 & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & y(k) x_0 \end{matrix}$$

L'entrée $u(k)$ et la sortie $y(k)$ correspondante pour k allant de 1 à 10, sont données par le tableau ci-dessous :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U(k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y(k)	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96

Tableau 3.1 les valeurs des entrées et leurs sortie correspondantes

La solution $x(k)$ peut être écrite sous forme d'un système d'équation afin de remplacer les données du tableau 3.1

$$x_1(k) = -6 + y(k)$$

$$x_2(k) = -4 + y(k)$$

$$x_3(k) = -2 + y(k)$$

$$x_4(k) = -1 + y(k)$$

$$x_5(k) = y(k)$$

Au même temps, en calcul la solution des inéquations suivantes et la comparer par la suite dans l'itération suivante avec les résultats qu'on va trouver et choisir la minimal.

$$x_2(k-1) = [1]^{\otimes(-1)} x_1(k)$$

$$x_3(k-1) = [1]^{\otimes(-1)} x_2(k)$$

$$x_5(k-1) = [1]^{\otimes(-1)} x_3(k)$$

$$x_5(k-1) = [1]^{\otimes(-1)} x_4(k)$$

En vérifiant à chaque itération les inéquations suivantes :

$$x_1(k) = 4 \oplus x_2(k-1) \oplus 3 \otimes x_3(k-1) \oplus u(k) x_0$$

$$x_3(k) = 5 \otimes x_2(k) \oplus 3 \otimes x_5(k-1)$$

$$x_4(k) = 4 \otimes x_3(k) \oplus 4 \otimes x_5(k-1)$$

$$x_5(k) = 6 \otimes x_4(k)$$

$$x_0 \quad [u \ k]^{(-1)} x_1 \ k$$

$$x_0 \quad [y(k)]^{(-1)} x_5 k$$

La démarche itérative aura lieu en décrémentant k de $k_f=10$ à $k_0=0$.

➤ **Pour $k = 10$ on a $y_{10} = 96$**

$$\begin{array}{ll} x_1 \ 10 = -6 \otimes 96 & x_1 \ 10 = 90 \\ x_2 \ 10 = -4 \otimes 96 & \Leftrightarrow x_2 \ 10 = 92 \\ x_3 \ 10 = -2 \otimes 96 & x_3 \ 10 = 94 \\ x_4 \ 10 = -1 \otimes 96 & x_4 \ 10 = 95 \\ x_5 \ 10 = 96 & x_5 \ 10 = 96 \end{array}$$

De la, on peut déduire

$$x_2 \ 9 \quad [1]^{(-1)} x_1 \ 10 = 89$$

$$x_3 \ 9 \quad [1]^{(-1)} x_1 \ k = 89$$

$$x_5 \ 9 \quad [1]^{(-1)} x_3 \ k = 93$$

$$\hat{x} \ 10 = \begin{array}{l} 89 \\ 92 \\ 93 \\ 94 \\ 96 \end{array}$$

➤ **Pour $k = 9$ on remplace $y(9) = 87$**

$$\begin{array}{ll} x_1(9) = 81 & x_2 \ 8 \quad 80 \\ x_2(9) = 83 & x_3 \ 8 \quad 80 \\ x_3(9) = 85 & x_5 \ 8 \quad 84 \\ x_4(9) = 86 & \\ x_5(9) = 87 & \end{array}$$

Donc l'estimation du vecteur pour $k=9$

$$\hat{x} \ 9 = \begin{array}{l} 81 \\ 83 \\ 85 \\ 86 \\ 87 \end{array}$$

➤ **Pour $k = 8$ on remplace $y(8) = 78$**

$$\begin{array}{ll} x_1 \ 8 = -6 \otimes 78 & x_1(8) = 72 \\ x_2 \ 8 = -4 \otimes 78 & x_2(8) = 74 \\ x_3(8) = -2 \otimes 78 & \Leftrightarrow x_3(8) = 76 \\ x_4 \ 8 = -1 \otimes 78 & x_4(8) = 77 \\ x_5 \ 8 = 78 & x_5(8) = 78 \end{array}$$

Chapitre 3 - Estimation d'état par étoile de Kleene

$$\begin{array}{ll}
 x_2(7) & -1 \quad -^1x_1(8) & x_2(7) & 71 \\
 x_3(7) & -1 \quad -^1x_1(8) & x_3(7) & 71 \\
 x_5(7) & -1 \quad -^1x_3(8) & x_5(7) & 75 \\
 x_5(7) & -1 \quad -^1x_4(8) & x_5(7) & 76
 \end{array}$$

L'estimation du vecteur pour k=8

$$\hat{x}(8) = \begin{array}{l} 72 \\ 74 \\ 76 \\ 77 \\ 78 \end{array}$$

➤ Pour k = 7 on remplace y(7) = 69

$$\begin{array}{ll}
 x_1(7) = -6 \otimes 69 & x_1(7) = 63 \\
 x_2(7) = -4 \otimes 69 & x_2(7) = 65 \\
 x_3(7) = -2 \otimes 69 & \Leftrightarrow x_3(7) = 67 \\
 x_4(7) = -1 \otimes 69 & x_4(7) = 68 \\
 x_5(7) = 78 & x_5(7) = 69
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 x_2(6) & -1 \quad -^1x_1(7) & x_2(6) & 62 \\
 x_3(6) & -1 \quad -^1x_1(7) & x_3(6) & 62 \\
 x_5(6) & -1 \quad -^1x_3(7) & x_5(6) & 66 \\
 x_5(6) & -1 \quad -^1x_4(7) & x_5(6) & 67
 \end{array}$$

L'estimation du vecteur pour k=7

$$\hat{x}(7) = \begin{array}{l} 63 \\ 65 \\ 67 \\ 68 \\ 69 \end{array}$$

➤ Pour k = 6 on remplace y(6) = 60

$$\begin{array}{ll}
 x_1(6) = -6 \otimes 60 & x_1(6) = 54 \\
 x_2(6) = -4 \otimes 60 & x_2(6) = 56 \\
 x_3(6) = -2 \otimes 60 & \Leftrightarrow x_3(6) = 58 \\
 x_4(6) = -1 \otimes 60 & x_4(6) = 59 \\
 x_5(6) = 60 & x_5(6) = 60
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 x_2(5) & -1 \quad -^1x_1(6) & x_2(5) & 53 \\
 x_3(5) & -1 \quad -^1x_1(6) & x_3(5) & 53 \\
 x_5(5) & -1 \quad -^1x_3(6) & x_5(5) & 57 \\
 x_5(5) & -1 \quad -^1x_4(6) & x_5(5) & 58
 \end{array}$$

Chapitre 3 - Estimation d'état par étoile de Kleene

L'estimation du vecteur pour k=6

$$\hat{x}_6 = \begin{matrix} 54 \\ 56 \\ 58 \\ 59 \\ 60 \end{matrix}$$

➤ Pour $k = 5$ on remplace $y(5) = 51$

$$\begin{array}{ll} x_1(5) = -6 \otimes 51 & x_1(5) = 45 \\ x_2(5) = -4 \otimes 51 & x_2(5) = 47 \\ x_3(5) = -2 \otimes 51 & \Leftrightarrow x_3(5) = 49 \\ x_4(5) = -1 \otimes 51 & x_4(5) = 50 \\ x_5(5) = 51 & x_5(5) = 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_2(4) & -1 \quad -^1x_1(5) & x_2(4) & 44 \\ x_3(4) & -1 \quad -^1x_1(5) & x_3(4) & 44 \\ x_5(4) & -1 \quad -^1x_3(5) & x_5(4) & 48 \\ x_5(4) & -1 \quad -^1x_4(5) & x_5(4) & 49 \end{array}$$

L'estimation du vecteur pour k=5

$$\hat{x}_5 = \begin{matrix} 45 \\ 47 \\ 49 \\ 50 \\ 51 \end{matrix}$$

➤ Pour $k = 4$ on remplace $y(4) = 42$

$$\begin{array}{ll} x_1(4) = -6 \otimes 42 & x_1(4) = 36 \\ x_2(4) = -4 \otimes 42 & x_2(4) = 38 \\ x_3(4) = -2 \otimes 42 & \Leftrightarrow x_3(4) = 40 \\ x_4(4) = -1 \otimes 42 & x_4(4) = 41 \\ x_5(4) = 42 & x_5(4) = 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_2(3) & -1 \quad -^1x_1(4) & x_2(3) & 35 \\ x_3(3) & -1 \quad -^1x_1(4) & x_3(3) & 35 \\ x_5(3) & -1 \quad -^1x_3(4) & x_5(3) & 39 \\ x_5(3) & -1 \quad -^1x_4(4) & x_5(3) & 40 \end{array}$$

Chapitre 3 - Estimation d'état par étoile de Kleene

L'estimation du vecteur pour k=4

$$\hat{x}_4 = \begin{matrix} 36 \\ 38 \\ 40 \\ 41 \\ 42 \end{matrix}$$

➤ Pour $k = 3$ on remplace $y(3) = 33$

$$\begin{array}{ll} x_1(3) = -6 \otimes 33 & x_1(3) = 27 \\ x_2(3) = -4 \otimes 33 & x_2(3) = 29 \\ x_3(3) = -2 \otimes 33 & \Leftrightarrow x_3(3) = 31 \\ x_4(3) = -1 \otimes 33 & x_4(3) = 32 \\ x_5(3) = 33 & x_5(3) = 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_2(2) & -1 \quad -^1x_1(3) & x_2(2) & 26 \\ x_3(2) & -1 \quad -^1x_1(3) & x_3(2) & 26 \\ x_5(2) & -1 \quad -^1x_3(3) & x_5(2) & 30 \\ x_5(2) & -1 \quad -^1x_4(3) & x_5(2) & 31 \end{array}$$

L'estimation du vecteur pour k=3

$$\hat{x}_3 = \begin{matrix} 27 \\ 29 \\ 31 \\ 32 \\ 33 \end{matrix}$$

➤ Pour $k = 2$ on remplace $y(2) = 24$

$$\begin{array}{ll} x_1(2) = -6 \otimes 24 & x_1(2) = 18 \\ x_2(2) = -4 \otimes 24 & x_2(2) = 20 \\ x_3(2) = -2 \otimes 24 & \Leftrightarrow x_3(2) = 22 \\ x_4(2) = -1 \otimes 24 & x_4(2) = 23 \\ x_5(2) = 24 & x_5(2) = 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_2(1) & -1 \quad -^1x_1(2) & x_2(1) & 17 \\ x_3(1) & -1 \quad -^1x_1(2) & x_3(1) & 17 \\ x_5(1) & -1 \quad -^1x_3(2) & x_5(1) & 21 \\ x_5(1) & -1 \quad -^1x_4(2) & x_5(1) & 22 \end{array}$$

L'estimation du vecteur pour k=2

$$\hat{x}_2 = \begin{matrix} 18 \\ 20 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{matrix}$$

➤ Pour $k = 1$ on remplace $y(1) = 15$

$$\begin{array}{ll}
 x_1 \ 1 = -6 \otimes 15 & x_1(1) = 9 \\
 x_2 \ 1 = -4 \otimes 15 & x_2(1) = 11 \\
 x_3(1) = -2 \otimes 15 & \Leftrightarrow x_3(1) = 13 \\
 x_4 \ 1 = -1 \otimes 15 & x_4(1) = 14 \\
 x_5 \ 1 = 15 & x_5(1) = 15 \\
 \\
 x_2(0) \ -1 \ -^1 x_1(1) & x_2(0) \ 8 \\
 x_3(0) \ -1 \ -^1 x_1(1) & x_3(0) \ 10 \\
 x_5 \ 0 \ -1 \ -^1 x_3(1) & x_5(0) \ 12 \\
 x_5(0) \ -1 \ -^1 x_4(1) & x_5(0) \ 13
 \end{array}$$

L'estimation du vecteur pour $k=1$

$$\hat{x} \ 1 = \begin{array}{l} 9 \\ 11 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{array}$$

➤ **Interprétation des résultats**

Dans un premier temps, nous calculons le vecteur d'état du système sur l'horizon [1,10], et qui vérifie le modèle algébrique donné par l'équation d'état correspondant au modèle de la cellule de production suivant :

$$\begin{array}{cccccccc}
 \varepsilon & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & & & e \\
 \varepsilon & 3 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & & & 2 \\
 \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon & 1 & x(k-1) \oplus & 4 & u(k) \quad x(k) \\
 \varepsilon & 6 & 6 & \varepsilon & 2 & & & 5 \\
 \varepsilon & 7 & 7 & \varepsilon & 3 & & & 6 \\
 & & & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & e \\
 & & & \varepsilon & 11 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\
 & & & \varepsilon & 16 & 15 & \varepsilon & 3 & x(k-1) \oplus & 12 & u(k) \\
 & & & \varepsilon & 20 & 19 & \varepsilon & 7 & & & 16 \\
 & & & \varepsilon & 26 & 25 & \varepsilon & 13 & & & 22
 \end{array}$$

Comme les coefficients des matrices A^-, B^- (respectivement A^+, B^+) représentent les bornes inférieures (respectivement supérieures) des intervalles de temps associés, l'état estimé sera différent de l'état réel que l'on pourrait obtenir.

Chapitre 3 - Estimation d'état par étoile de Kleene

Les résultats de calculs sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1(k)$	2	12	21	30	39	48	57	66	75	84
$x_2(k)$	6	15	24	33	42	51	60	69	78	87
$x_3(k)$	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91
$x_4(k)$	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93
$x_5(k)$	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96
$y(k)$	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96

Tableau 3.2 : les résultats de calcul du vecteur d'état sur l'horizon $k \in [1,10]$

Les résultats relatifs au plus grand état estimé $\hat{x}(k)$ sur le même horizon, sont regroupés dans le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{x}_1(k)$	9	18	27	36	45	54	63	72	81	89
$\hat{x}_2(k)$	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92
$\hat{x}_3(k)$	13	22	31	40	49	58	67	76	85	93
$\hat{x}_4(k)$	14	23	32	41	50	59	68	77	86	94
$\hat{x}_5(k)$	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96
$y(k)$	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96

Tableau 3.3 : les résultats de calcul du vecteur d'état estimé sur l'horizon $k \in [1,10]$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré le problème de l'estimation d'état, qui consiste à estimer le plus grand état dans les graphes d'événements P-temporel. Le modèle algébrique obtenu a été transformé afin de reformuler le problème de l'estimation sous la forme d'un problème du point fixe. La résolution nous a conduits à estimer le plus grand état. En général, l'état estimé est différent de l'état réel que l'on pourrait obtenir par des mesures effectuées sur le système en raison de l'imperfection de l'estimation, cependant la solution trouvée est admissible.

Conclusion générale

L'étude des systèmes de type système de production, réseau de transport,... et leur supervision par un système de commande, peut conduire à des modèles complexes utilisant les opérateurs de maximisation, de minimisation et d'addition. Les réseaux de Petri de type P-temporel sont un exemple dont le comportement dynamique présente cette caractéristique. Ceci rend nécessaire l'analyse et la résolution de nouveaux systèmes d'équations et d'inéquations.

Dans ce travail, nous avons abordé le problème d'observation des systèmes à événement discret. Dans un premier temps, nous avons présenté la mise en équation des Graphes d'événement P-temporel qui conduit à un modèle mathématique couramment utilisé par les automaticiens : la représentation d'état linéaire. Ensuite nous avons abordé le problème de l'estimation des variables d'état, cette approche se base sur le calcul d'une borne supérieure de l'état en utilisant l'étoile de Kleene. Pour mettre en œuvre cette synthèse, nous avons appliqué l'approche sur une cellule de production de pots de peinture.

Afin de résoudre le problème de l'estimation par étoile de Kleene, il est important de reformuler le modèle d'état sous forme d'un problème de type point fixe. La résolution nous a conduits à estimer le plus grand état. L'état estimé est différent de l'état réel que l'on pourrait obtenir par des mesures effectuées sur le système en raison de l'imperfection de l'estimation, cependant la solution trouvée est admissible.

Comme perspective, il serait très intéressant d'appliquer cet estimateur sur les systèmes de production dans l'objectif de détection de défaillance et la prédiction de la future évolution de la sortie et la commande du processus.

Résumé

Les systèmes à événements discrets sont soumis à des perturbations telles que les défaillances qui interrompent le fonctionnement habituel du système et réduisent les capacités de prédictions et de commande de la future évolution du système. Sous l'hypothèse d'un fonctionnement normal, les processus modélisés par un graphe d'événements P-temporel peuvent être représentés par un modèle linéaire dans l'algèbre $(\max, +)$. La connaissance du modèle et des conditions initiales nous permettent de caractériser le vecteur d'état par une itération directe de l'équation d'état mais les perturbations peuvent générer une mauvaise détermination de ce vecteur et ainsi empêcher le contrôle du processus.

L'objectif de ce travail est de proposer une estimation d'état en utilisant, non la théorie de la résiduation mais l'étoile de Kleene sur les graphes d'événement P-temporel.

Mots-clés : Système dynamique à événements discrets, Perturbation, Estimation, Prédiction, Commande.

Bibliographie

- [1] Mehdi Lhommeau « *Étude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max,+)* » - Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. - Synthèse de correcteurs en présence de perturbations. Thèse de doctorat, l'ISTIA - Université d'Angers. 2003
- [2] Oulivier Boutin « *Modélisation de conflits et calcul de bornes dans les systèmes de production par la théorie des dioïdes* »Thèse de doctorat, Université de Nantes. 2009
- [3] M.K. Didi-Alaoui « *Étude et supervision des graphes d'événements temporisés et temporels : vivacité, estimation et commande* ». Thèse de doctorat, ISTIA, Université d'Angers. Décembre 2005
- [4] Itéb Ouerghi « *Etude de systèmes (max, +)-linéaires soumis à des contraintes, application à la commande des graphes d'événements P-temporel* ».Thèse de doctorat, l'ISTIA - Université d'Angers. 2006
- [5] Laurent Hardouin « *Sur la Commande des Systèmes (max,+) Linéaires* ».DEA Automatique et Informatique Appliquée – Angers. 2004.
- [6] Collart-Dutilleul-Simon «Les Réseaux de Petri P-temporel : Modélisation et validation d'exigences temporelle».Mémoire d'habilitation à diriger des recherches en automatique et informatique. Université de Lille.2008.
- [7] Philippe Declerck «système à événement discrets dans l'algèbre des dioïde et l'algèbre conventionnelle ». Mémoire scientifique, ISTIA- Université d'Anger.2011
- [8] Abdelhak Guezzi « *Modélisation, analyse de performances et commande des systèmes à événements discrets*». Thèse de doctorat, Université de Nantes. 2010
- [9] Abbas Dideban «*synthèse de contrôleurs discret par simplification de contraintes et de conditions* ». Thèse de doctorat ; Université de Joseph Fourier. 2007.
- [10] Wael KHANSA «*Réseaux de Petri P-temporels contribution a l'étude des système à événement discret* ». Thèse de doctorat, Université de Savoie.1997.
- [11] J.-M.PROTH «*les réseaux de Petri pour la conception et la gestion des systèmes de production*», Edition MASSON, paris, 1995.
- [12] Cotteceau Bertrand « *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets: synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes*». Thèse de doctorat, LISA - Université d'Angers. 1999
- [13] Samir Hamaci « *Étude de graphes d'événements temporisés avec multiplieurs dans l'algèbre (min,+)*, ISTIA - Université d'Angers, 2005.
- [14] Bassam Kattan« *Synthèse structurelle d'un contrôleur basée sur le Grafcet*».Thèse de doctorat, Université de Joseph Fourier. 2004.
-

Bibliographie

- [15] Othman Nasri «Propriétés Spectrales des Fonctions (Min, Max, +)», DEA, École Centrale de Nantes, 2004.
- [16] Euriell LE CORRONC « Modèles et calculs garantis pour les systèmes (min,+)-linéaires » Thèse de doctorat, l'ISTIA, École d'Ingénieur de l'Université d'Angers.2011.
- [17] Patrice Bonhomme « *Réseaux de Petri P-temporel contribution à la commande robuste* ».Thèse de doctorat, Université de Savoie.2001.
- [18] Philippe Declerck, Mohamed Khalid Didi Alaoui « Constraint propagation for max-plus linear discrete event systems, application to the state estimation». 2003
- [19] Philippe Declerck, Mohamed Khalid Didi Alaoui, Marc Bourcerie « *Estimation d'état par l'étoile de Kleene* ». LISA EA-2168, ISTIA, Université d'Angers. 2002
- [20] Elizabeth A. Walkup « *Optimization of Linear Max-Plus Systems with Application to Timing Analysis* ». University of Washington. 1995.
- [21] M. Khalid Didi Alioui «Control synthesis in interval systems », LISA EA-2168, ISTIA , Université d'Angers. 2003.
- [22] Philippe Declerck and Abdelhak Guezzi « *State Estimation and Detection of Changes in Time Interval Models* », LISA EA4014, Université d'Angers, 2002.
-