



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

---

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU  
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

## MEMOIRE DE MAGISTER

SPECIALITE : GENIE MECANIQUE  
OPTION : MECANIQUE APPLIQUEE

THEME

Analyse numérique et analyse expérimentale des champs de  
contraintes dans les engrenages.

---

PRESENTÉ PAR

**BELDI Mustapha**

Devant le jury d'examen composé de :

<b>Mr. ABERKANE Méziane</b>	<b>Professeur</b>	<b>U.M.M.T.O</b>	<b>Président</b>
<b>Mr. BILEK Ali</b>	<b>Maitre de conférences (A)</b>	<b>U.M.M.T.O</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Mr. DJEBBAR Arezki</b>	<b>professeur</b>	<b>U.M.M.T.O</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. BRADAI Mohand Amokrane</b>	<b>Maitre de conférences (A)</b>	<b>U.A.M.Béjaia</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. SADEDDINE Abdelhamid</b>	<b>Maitre de conférences (B)</b>	<b>U.A.M.Béjaia</b>	<b>Invité</b>

**Soutenu le: 10/10/ 2013**



## ***AVANT PROPOS***

Ce mémoire est le résultat d'un travail qui a pu naître et se dérouler grâce à la confiance que mon encadreur, Mr. BILEK Ali a eu en moi. Je tiens à le remercier vivement pour son appui et ses conseils donnés tout le long de ce travail, pour sa compréhension et sa patience, et pour son soutien constant tout au long de ce mémoire.

Je remercie Mr. ABERKANE Meziane qui m'a fait l'honneur d'avoir accepté de présider le jury. Mes remerciements s'adressent également à Mr. DJEBBAR Arezki, Mr. BRADAI Mohand Amokrane et Mr. SADEDDINE Abdelhamid qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être examinateurs de ce travail.

Je dédie ce mémoire à mes chers parents qui ont toujours été à mes côtés avec leur soutien et leurs encouragements. Il est aussi dédié à mes frères, ma sœur, ma famille, ainsi qu'à mes amis.

BELDI Mustapha, juin 2013

# SOMMAIRE

Introduction générale .....	1
-----------------------------	---

## CHAPITRE I: Recherche bibliographie

I.1. Introduction .....	3
I.2. Problème du contact mécanique .....	3
I.3. Problèmes de Hertz .....	4
I.3.1. Solution analytique de Hertz .....	4
I.4. Quelques travaux réalisés en contact mécanique.....	5
I.5. Etude du contact dans les engrenages .....	7
I.5.1. Calcul des contraintes et déformations du contact dans les engrenages.....	7
I.5.2. La méthode des éléments finis et modélisation des engrenages .....	8
I.6. Application de la photoélasticimétrie au problème du contact.....	11
I.6.1. Méthodes d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie 2D .....	12
I.6.1.1. Méthodes utilisant plusieurs configurations de polariscope.....	12
I.6.1.3. Méthodes du tracé des isoclines et calcul des isochromes.....	12
I.6.2. Méthodes d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie 3D .....	16
I.6.2.1. Méthode de figeage et découpage mécanique .....	16
I.6.2.2. Méthode de la lumière diffusée .....	18
• Méthode de Cheng .....	19
• Méthode de découpage optique.....	21
I.7. Conclusion.....	24

## CHAPITRE II: Théorie de la photoélasticimétrie

II.1. Introduction .....	25
II.2. La principe de la photoélasticimétrie .....	25
II. 3. La biréfringence.....	26
II.3.1. La biréfringence naturelle.....	26
II.3.2. La biréfringence accidentelle (provoquée) .....	27
II.4. La constante de frange .....	28
II.5. La polarisation de la lumière.....	28
II. 5.1. Lumière polarisée rectilignement .....	28
II. 5.2. Polarisation circulaire .....	29
II.6. Lame quart d'onde .....	29
II.7. Les polaroids .....	30
II.7.1. Le polariseur .....	30
II.7.2. L'analyseur.....	30
II.8. Description de la réfraction .....	30
II.8.1. Définition du l'indice de réfraction .....	31
II.8.2. La loi de maxwell .....	31
II.9. Différents procèdes de la photoélasticimétrie .....	33
II.9.1. Photoélasticimétrie par réflexion .....	33
II.9.2. Photoélasticimétrie par transmission.....	33
II.9.2.1. Montages photoélastiques classiques .....	34
II.12. Analyse des isoclines.....	37
II.13. Les isostatiques .....	37
II.13.1. Propriété des isostatiques.....	38
II.14. Elimination des isoclines .....	38
II.15. Analyse des isochromes .....	38
II.15.1. Localisation des franges isochromes dans le cas d'un engrenage .....	38
II.16. Expression analytique des isoclines et isochromes .....	40
II.17. Conclusion .....	41

## CHAPITRE III: Théorie de Hertz

III.1. Introduction .....	42
III.2. Théorie de Hertz du contact élastique .....	42
III.3. Contact bidimensionnel de deux cylindres .....	43
III.4. Analyse de la déformation locale au niveau du contact d'un engrenage .....	47
III.5. Expression de la pression superficielle donnée par Hertz.....	47
III.6. Conclusion .....	48

## CHAPITRE IV: Partie pratique

IV.1. Introduction .....	49
IV.2. Analyse expérimentale du contact dans l'engrenage .....	49
IV.2.1. Dispositif expérimental .....	49
IV.2.2. Détermination de la constante de frange .....	50
IV.2.2.1. Première méthode (essai de flexion 4 points).....	50
IV.2.2.2. Deuxième méthode (essai de traction) .....	54
IV.3. Analyse expérimentale des contraintes .....	58
IV.3.1. La variation de la contrainte tangentielle max suivant l'axe [AB].....	58
IV.3.2. Procédure .....	59
IV.3.3. Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair .....	60
IV.4. Calcul de la valeur de $\tau_{\max}$ suivant le segment [AB].....	61
IV.5. Les franges isoclines .....	63
IV.5.1. Exploitation des isoclines pour tracer les isostatiques .....	70
IV.6. Analyse numérique des contraintes .....	71
IV.6.1. Calcul des champs de contraintes à l'aide du logiciel CASTEM 2000.....	65
IV.6.2. Visualisation des franges isochromes ... ..	67
IV.6.3. Visualisation des isoclines.....	68
IV.6.4. La variation de la contrainte tangentielle le long de la droite [AB] .....	69
IV.7. Comparaison des résultats .....	70
IV.7.1. superposition des courbes.....	70
IV.7.2. Réseau d'isochromes .....	71
IV.7.3. Comparaison des isoclines.....	72
IV.8. Discussion des résultats.....	73

<b>IV.8.1. Discussion sur les tracés de l'évolution de <math>\tau_{\max}</math> .....</b>	<b>73</b>
<b>IV.8.2. Discussion du point (A).....</b>	<b>73</b>
<b>IV.9. Conclusion.....</b>	<b>74</b>
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>75</b>

## NOMENCLATURE ET SYMBOLES

R: Rayon du cylindre.

a : Rayon de la zone du contact.

w : Déplacement.

$w_c$  : Déplacement critique de hertz.

Q : effort tangentiel.

E: Module de Young de l'époxy.

$\nu$ : Coefficient de Poisson du modèle en époxy.

U : Direction d'observation.

V : Direction de propagation.

$\psi_1, \psi_2$  : phases aléatoires des champs de granularité  $I_{1g}$  et  $I_{2g}$ .

$I(x,y)$  : Intensité lumineuse.

$I_1, I_2$  : l'intensité de chacun des faisceaux laser.  $\sigma_{xx}$ : Contrainte normale sur la face xx.

$I_{1F}$  et  $I_{2F}$  : Intensités du fond continu

$I_{1g}$  et  $I_{2g}$  : Intensités provoquées par le phénomène de speckle laser

C: Constante optique relative du matériau biréfringent.

$C_1, C_2$ : Constantes photoélastiques absolues du matériau.

$C_0$  : La vitesse de la lumière dans le vide.

V : vitesse de la lumière dans le milieu considéré.

X : Axe du polariseur.

Y : Axe du l'analyseur.

f : Constante de frange du modèle.

e : épaisseur du modèle.

N: Ordre de frange du modèle.

$\tau_{max}$  : Contraintes de cisaillement maximales.

$\sigma_1, \sigma_2$ : Contraintes principales dans le modèle.

$\lambda$ : Longueur d'onde.

$\eta_1, \eta_2$  et  $\eta_3$  : Indices de réfraction.

$\delta$ : Différence de chemin optique entre les deux rayons.  
 $\varphi$  : Déphasage des composantes  $B_I$  et  $B_{II}$  de l'onde  $B$ .  
 $\alpha$  : Angles de rotation des polaroids.  
 $B$  : Onde polarisée.  
 $\vec{B}$  : Vecteur induction magnétique.  
 $\sigma_{zz}$ : Contrainte normale sur la face  $zz$ .  
 $\sigma_{xz}$ : Contrainte normale sur la face  $xz$ .  
 $\tau_{xy}$ : Contrainte de cisaillement.  
 $x$  : représente la coordonnée commune de  $T_1$  et  $T_2$ .  
 $T_1$  et  $T_2$  : points de l'aire du contact.  
 $A$  : courbure équivalente aux surfaces en contact.  
 $h$  : distance séparant les deux surfaces du contact  $s_1$  et  $s_2$ .

## Liste des figures

N° de la figure	Nomination de la Figure	N° de page
<b>Fig. (I.1)</b>	Deux cylindres en contact .....	<b>4</b>
<b>Fig. (I.2)</b>	Zone de contact de Hertz .....	<b>5</b>
<b>Fig. (I.3)</b>	Sphère déformable pressée par un plan rigide.....	<b>5</b>
<b>Fig. (I.4)</b>	Sphère sous chargement normal et tangentiel .....	<b>6</b>
<b>Fig. (I.5)</b>	(a) modèle sphérique avant le contact, (b) pendant la déformation élastique, (c) et pendant la déformation plastique .....	<b>6</b>
<b>Fig. (I.6)</b>	Contraintes agissants sur les dents d'un engrenage .....	<b>7</b>
<b>Fig. (I.7)</b>	Courbe de contrainte de Von Mises maximale pour les cas sélectionnés .....	<b>8</b>
<b>Fig. (I.8)</b>	Résultats expérimentaux et numériques pour les champs de contraintes sur la dent du pignon pour une combinaison 15/18.....	<b>9</b>
<b>Fig. (I.9)</b>	Superposition des graphes analytiques et numériques .....	<b>10</b>
<b>Fig. (I.10)</b>	Deux cylindres en contact avec maillage quadratique .....	<b>10</b>
<b>Fig. (I.11)</b>	Maillage raffiné au voisinage du contact.....	<b>11</b>
<b>Fig. (I.12)</b>	La contrainte du contact normale le long des zones du contact .....	<b>11</b>
<b>Fig. (I.13)</b>	Isoclines obtenues sur le polariscope en lumière plane.....	<b>13</b>
<b>Fig. (I.14)</b>	Franges isochromes sur les deux couronnes.....	<b>13</b>
<b>Fig. (I.15)</b>	Image des deux couronnes traitées à l'aide du logiciel PHOTO2D .....	<b>14</b>
<b>Fig. (I.16)</b>	Images des masques utilisées par le logiciel PHOTO2D pour effectuer les calculs sur les deux pièces.....	<b>14</b>
<b>Fig. (I.17)</b>	Représentation des isostatiques (trajectoires des directions principales) .....	<b>15</b>
<b>Fig. (I.18)</b>	Images isochromes des deux couronnes obtenues à l'aide du logiciel PHOTO2D .....	<b>15</b>
<b>Fig. (I.19)</b>	Schémas des trois modèles utilisés (a) charge normale (cylindre sur demi espace), (b) charge normale et tangentielle, (c) charge axiale (poinçon cylindre sur plan) .....	<b>18</b>
<b>Fig. (I.20)</b>	Polarisation de la lumière diffusée .....	<b>19</b>
<b>Fig. (I.21)</b>	schéma du modèle de Cheng .....	<b>20</b>
<b>Fig. (I.22)</b>	Dispositif expérimental .....	<b>21</b>
<b>Fig. (I.23)</b>	un barreau de section carrée soumis à une charge concentrée .....	<b>23</b>
<b>Fig. (II.1)</b>	Phénomène de biréfringence naturelle.....	<b>27</b>
<b>Fig. (II.2)</b>	Lumière polarisée rectilignement suivant x .....	<b>29</b>
<b>Fig. (II.3)</b>	Polariscope circulaire.....	<b>29</b>
<b>Fig. (II.4)</b>	Effet de la lame quart d'onde sur la lumière.....	<b>30</b>
<b>Fig. (II.5)</b>	Modèle sous contraintes planes .....	<b>31</b>
<b>Fig. (II.6)</b>	Polariscope à réflexion.....	<b>33</b>
<b>Fig. (II.7)</b>	Montage photoélastique classique .....	<b>34</b>
<b>Fig. (II.8)</b>	Schéma de principe d'un polariscope à lumière rectiligne .....	<b>35</b>

<b>Fig. (II.9) :</b> Tracé des isostatiques à partir des isoclines.....	<b>37</b>
<b>Fig. (II.10) :</b> Localisation des franges isochromes dans une dent d'engrenage.....	<b>39</b>
<b>Fig. (II.11) :</b> Tenseur des contraintes en un point M dans un matériau photoélastique.....	<b>40</b>
<b>Fig. (III.1):</b> Contact de Hertz.....	<b>43</b>
<b>Fig. (III.2) :</b> Deux cylindres en contact .....	<b>44</b>
<b>Fig. (III.3):</b> Contact de deux cylindres .....	<b>46</b>
<b>Fig. (III.4):</b> Contact cylindre sur plan.....	<b>47</b>
<b>Fig. (IV.1):</b> Engrenage pignon- crémaillère.....	<b>50</b>
<b>Fig. (IV.2):</b> Dispositif de chargement en flexion.....	<b>50</b>
<b>Fig. (IV.3):</b> Epreuve de l'essai de flexion.....	<b>51</b>
<b>Fig. (IV.4):</b> Les franges isochromes obtenues en flexion .....	<b>52</b>
<b>Fig. (IV.5):</b> Diagramme du moment fléchissant .....	<b>53</b>
<b>Fig. (IV.6):</b> Relevé de l'ordre de frange au bord de l'éprouvette .....	<b>54</b>
<b>Fig. (IV.7):</b> Dispositif de chargement en traction .....	<b>55</b>
<b>Fig. (IV.8):</b> Epreuve utilisée en essai de traction.....	<b>55</b>
<b>Fig. (IV.9):</b> Epreuve chargée en traction .....	<b>56</b>
<b>Fig. (IV.10):</b> Graphe de l'effort moyen appliqué en fonction de l'ordre de frange .....	<b>57</b>
<b>Fig. (IV.11):</b> Dispositif de chargement pour l'essai de contact pignon- crémaillère.....	<b>59</b>
<b>Fig. (IV.12):</b> Réseau d'isochromes observé sur le polariscope .....	<b>60</b>
<b>Fig. (IV.13):</b> Réseau d'isochromes observé sur le polariscope. ....	<b>61</b>
<b>Fig. (IV.14):</b> Evolution de $\tau_{max}$ relevée expérimentalement le long de la droite AB .....	<b>62</b>
<b>Fig. (IV.15):</b> Relevée des isoclines par rotation par pas de 15 degrés.....	<b>63</b>
<b>Fig. (IV.16):</b> Localisation des isoclines correspondant aux directions principales.....	<b>64</b>
<b>Fig. (IV.17):</b> tracés des points par lesquels passeront les isostatiques à partir des isoclines .....	<b>64</b>
<b>Fig. (IV.18):</b> Les isoclines et les isostatiques pour le contact d'engrenage .....	<b>65</b>
<b>Fig. (IV.19):</b> Représentation de la surface maillée .....	<b>65</b>
<b>Fig. (IV.20):</b> Représentation des réactions sur l'ensemble pignon- crémaillère.....	<b>66</b>
<b>Fig. (IV.21):</b> Extraction des efforts correspondant au déplacement imposé.....	<b>67</b>
<b>Fig. (IV.22):</b> Représentation de la déformée .....	<b>67</b>
<b>Fig. (IV.23):</b> Les franges isochromes simulées en champ clair .....	<b>68</b>
<b>Fig. (IV.24):</b> Tracés des isoclines par pas de 15 degrés.....	<b>68</b>
<b>Fig. (IV.25):</b> Isoclines traitées avec Photoshop .....	<b>69</b>
<b>Fig. (IV.26):</b> Evolution de $\tau_{max}$ relevée numériquement le long de la droite AB .....	<b>70</b>
<b>Fig. (IV.27):</b> Superposition des graphes numériques et expérimentaux .....	<b>71</b>
<b>Fig. (IV.28):</b> Isochromes relevées expérimentalement .....	<b>71</b>
<b>Fig. (IV.29):</b> Isochromes simulées à l'aide du logiciel CASTEM2000 traitées avec photoshop .....	<b>72</b>
<b>Fig. (IV.30):</b> Superposition des isoclines obtenues numériquement et traitées avec Photoshop avec leurs correspondantes obtenues expérimentalement .....	<b>72</b>

# LISTE DES TABLEAUX

N° Tableau	Désignation	N° de page
------------	-------------	------------

**Tableau I.1:** Intensité lumineuse  $I(x, y)$  pour différentes configurations du polariscope **12**

**Tableau II.1 :** Les ordres de grandeur de la constante photoélastique de quelques matériaux .....**33**

**Tableau II.2 :** L'intensité  $I$  pour les différentes configurations .....**36**

**Tableau IV.1:** Valeurs de la charge  $F$  en fonction de l'ordre de frange.....**56**

**Tableau IV.2:** Valeur de  $\tau_{max}$  relevées suivant le segment  $[AB]$  .....**62**

## Introduction générale

Les engrenages occupent une place importante dans les systèmes mécaniques, pour la transmission de la puissance et du mouvement de rotation. La conception d'un engrenage nécessite la prise en considération de l'aspect géométrique, du type du matériau, et des conditions d'exploitation. Il est donc essentiel de déterminer les champs de contraintes développés dans les dents d'engrenage afin de prévenir les risques de détérioration.

Le contact mécanique est l'un des facteurs provoquant l'usure des engrenages, souvent considéré comme l'un des problèmes les plus complexes dans les transmissions de charges en raison de la nature particulière des phénomènes physiques localisés à l'interface. Afin d'évaluer l'usure ou plus précisément les dégradations telles que, l'amorçage et la propagation de fissure, il est important de connaître les contraintes générées par les couples transmis dans les dents de l'engrenage.

Dans ce présent travail, un problème de contact entre deux dents d'engrenage a été résolu à l'aide de deux méthodes, une expérimentale et l'autre numérique. Cette étude a pour objectif de valider les résultats numériques par ceux obtenus expérimentalement et de montrer qu'on peut traiter des problèmes complexes de contact mécanique à l'aide de codes de calculs éléments finis sans avoir recours à chaque fois à l'expérience qui peut être coûteuse et qui prend beaucoup de temps.

La méthode expérimentale utilisée est la photoélasticimétrie, c'est une technique d'analyse des contraintes, basée sur la biréfringence acquise par certains matériaux soumis à des contraintes. Les franges isochromes et isoclines obtenues sur le polariscope permettent de retrouver les directions principales des contraintes et les valeurs du cisaillement maximal sur toute la surface du modèle par l'exploitation des franges isochromes et des franges isoclines.

La méthode des éléments finis est une méthode numérique qu'on peut utiliser pour analyser l'état de contrainte d'un corps élastique à géométrie complexe comme les engrenages.

Une solution à l'aide du logiciel "Castem" permettra de simuler les franges et les contraintes développées dans le modèle contraint, en particulier au voisinage de la zone de contact.

Deux comparaisons peuvent être faite entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques :

- la première comparaison entre les franges isochromes expérimentales et les franges isochromes simulées.

- La deuxième comparaison entre les valeurs expérimentales et simulées de la contrainte de cisaillement maximale le long d'un axe défini à partir du point du contact.

Le plan du présent travail comporte quatre chapitres:

Le premier chapitre est dédié à une recherche bibliographique sur différents travaux effectués dans le domaine de la mécanique du contact, notamment dans les engrenages.

Le deuxième chapitre est consacré à quelques rappels important de la photoélasticimétrie et à la description du phénomène de la biréfringence.

Le troisième chapitre comporte quelques rappels sur la théorie de Hertz du contact mécanique, les différents types de contact et les différentes relations analytiques.

Les différents essais réalisés, sont présentés dans la dernière partie de ce mémoire. Les différents réseaux d'isochromes et d'isoclines obtenus à l'aide de la photoélasticimétrie et de la méthode des éléments finis seront analysés et comparés pour valider la solution éléments finis.

On terminera par une conclusion générale et des perspectives.

# Chapitre I

## Etude bibliographique

### **I.1. Introduction**

Les phénomènes liés au problème du contact mécanique sont présents dans de nombreuses applications industrielles. La nature des phénomènes liés à l'interaction purement mécanique entre les solides, exige une attention toute particulière dans ce domaine.

Un mode commun de défaillance de plusieurs composants structurels est la fatigue et la rupture provoquée par les contraintes de contact dans les zones de concentration de contraintes.

La préparation adéquate des surfaces, par conséquent, dans les composants de transfert de charge tels que les roulements à billes, les engrenages, les machines-outils et les cames, est une partie très importante dans la conception et les procédés de fabrication [1].

### **I.2. Problème du contact mécanique**

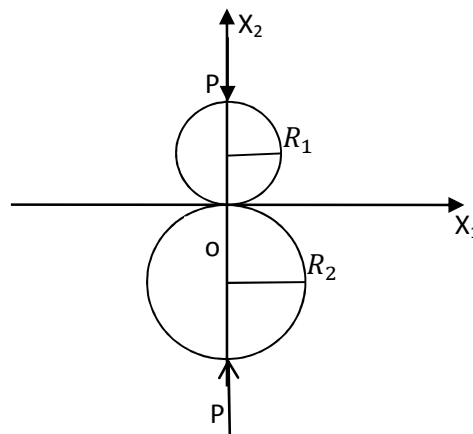
L'étude et la résolution analytique du problème de contact mécanique datent de 1882 avec les travaux de Hertz. En utilisant une démarche analytique et en s'appuyant sur l'élasticité linéaire pour les cas de contacts linéiques ou ponctuels, ces travaux permettent d'évaluer les phénomènes d'écrasement, les surfaces de contact ainsi que les pressions du contact. La plupart des solutions analytiques proposées supposent un contact sans frottement, des zones de contact connues a priori et des formes géométriques simples.

Le développement de techniques de résolution numérique avancées ont permis de traiter des problèmes de contact de plus en plus complexes. A titre d'exemple, la méthode des éléments finis permet la discrétisation de surfaces, de formes quelconques et la prise en compte aisée des diverses conditions aux limites. Elle offre ainsi un outil de calcul puissant pour l'étude des problèmes de contact. Ces techniques s'appuient sur une modélisation simplifiée du contact et s'inspirent bien souvent des méthodes employées en dynamique des structures. Cependant, d'une façon générale, elles rencontrent des difficultés qui sont, d'une

part le traitement des conditions de contact de façons simples, et d'autre part la détermination efficace des zones de contact [2].

### I.3. Problèmes de Hertz

Le problème de Hertz est très souvent utilisé comme référence dans le processus de validation du modèle numérique. Il consiste à calculer l'état mécanique de deux cylindres entrant en contact le long de leur génératrice sous l'effet d'une force linéique  $P$  (Fig.I.1).



**Figure I.1:** Deux cylindres en contact [3]

#### I.3.1. Solution analytique de Hertz

Pour le comportement élastique des solides, la solution analytique est connue depuis les travaux de Hertz publiés en 1882. La solution proposée par Hertz n'est valable que si nous respectons certaines hypothèses sur la zone de contact:

- les surfaces sont continues et non conformes :  $a \ll R_1$  et  $a \ll R_2$  (Fig.I.2)
- les déformations sont petites :  $a \ll R_1$  et  $a \ll R_2$
- chaque solide peut être considéré comme un solide semi-infini, c'est-à-dire:  $a \ll R_1$  et  $a \ll R_2$
- il n'y a pas de frottement:  $\eta = 0$  [3]

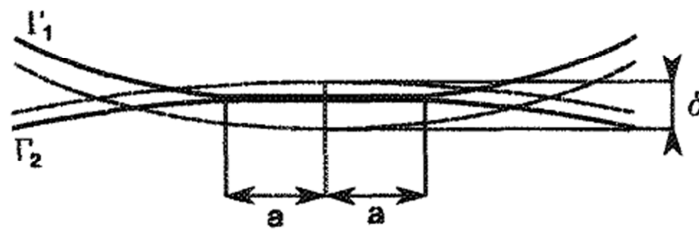


Figure I.2: Zone de contact de Hertz

#### I.4. Quelques travaux réalisés en contact mécanique

L'analyse des contraintes dans les structures mécaniques est d'une importance capitale dans la conception des composants de machines. Plusieurs travaux ont été réalisés à ce sujet.

L. Kogut [4] a présenté un modèle élastique plastique par éléments finis pour un contact sans frottement d'une sphère déformable, pressée sous chargement normal contre un plan rigide. Le contact élastique plastique d'une sphère sur un plan est d'une importance fondamentale dans la mécanique des contacts.

Le modèle donne les expressions de l'aire du contact ainsi que celle des pressions de contact. Kogut a déterminé, en utilisant le critère de Von Mises, la valeur critique de la déformation  $w_c$  de la sphère qui marque la transition de l'état élastique vers l'état élasto-plastique.

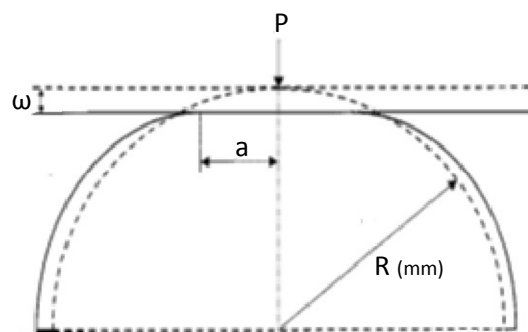
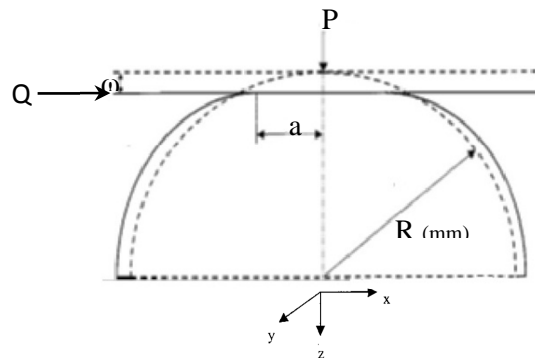


Figure I.3: Sphère déformable pressée par un plan rigide

L'évolution du contact élastique plastique dans cette étude peut être divisée en trois étapes distinctes :

La première pour  $1 \leq w/w_c \leq 6$  où la région plastique se développe au-dessous de la surface de la sphère, et la région du contact entière est élastique. La deuxième pour  $6 \leq w/w_c \leq 68$  où la région du contact est élastique plastique, et la troisième étape pour  $w/w_c > 68$  correspond à une région de contact complètement plastique.

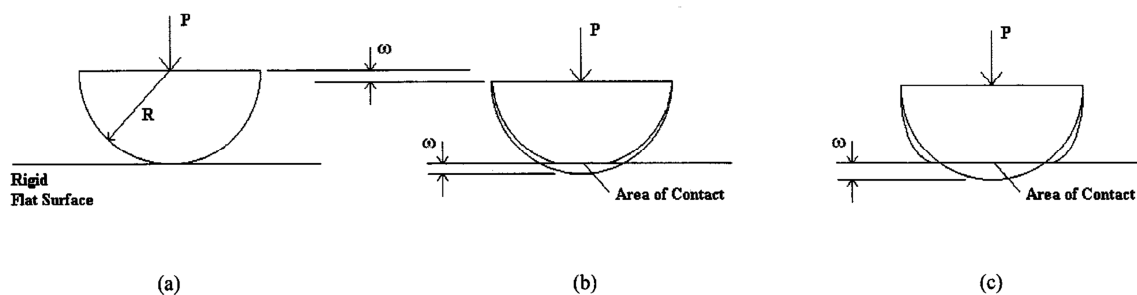
Kogut [5] dans une autre étude, a présenté une analyse par éléments finis d'une sphère élastique parfaitement plastique sollicitée par un plan rigide, la charge maximale tangentielle que peut supporter le contact sphérique au commencement de glissement a été calculée, cette analyse a été combinée avec une solution analytique en utilisant une approche basée sur l'utilisation de lois de comportement appropriées à tout mode de déformation, que ce soit élastique ou plastique.



**Figure I.4:** Sphère sous chargement normal et tangentiel

Dans cette étude, deux modes de rupture différents ont été identifiés en fonction de la nature de la charge normale initiale. Lorsque celle-ci est inférieure à la charge critique de Hertz, la rupture se produit sur l'aire du contact. Si la charge est supérieure à celle critique une défaillance se produit au-dessous de la zone de contact.

Robert L. Jackson [6], a présenté une étude par éléments finis d'une sphère élastique parfaitement plastique en contact sans frottement avec un plan rigide (fig.I.5).



**Figure I.5:** (a) modèle sphérique avant le contact, (b) pendant la déformation élastique, (c) et pendant la déformation plastique

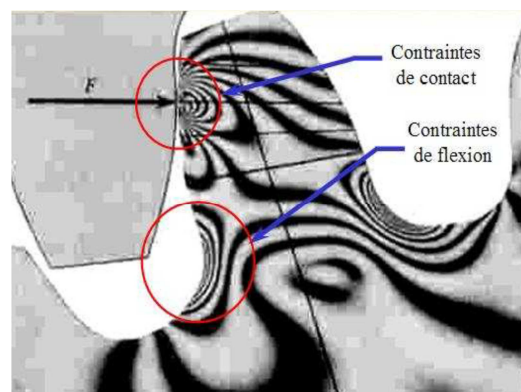
La pression moyenne d'un contact complètement plastique, varie avec la géométrie déformée du contact, qui à son tour dépend des propriétés du matériau.

Ce travail révèle de grandes différences entre les modèles analytiques approchés et d'autres solutions numériques. Plus important encore, la zone du contact et la contrainte sont particulièrement en fonction de la géométrie déformée dans tous les régimes, et dépendent des propriétés du matériau.

### I.5. Etude du contact dans les engrenages

Les avaries mécaniques du fonctionnement des engrenages résultent en général de deux causes principales: soit d'une pression de contact élevée entre les dents, soit d'une fissuration au niveau du pied de la dent par fatigue en flexion. La figure I.6 qui représente une dent observée en photoélasticité montre clairement les deux types de sollicitations agissant sur une dent.

Le contour d'une dent d'engrenage cylindrique à denture droite comporte deux parties, la partie engrènement définie par une développante de cercle pour des raisons cinématiques et la base de la dent de forme trochoïdale [7].



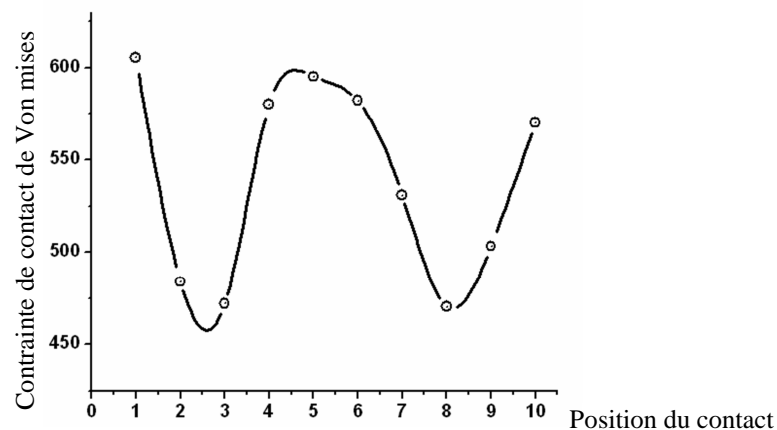
**Figure I.6:** Contraintes agissants sur les dents d'un engrenage

#### I.5.1. Calcul des contraintes et déformations dans les engrenages

La conception d'un engrenage comprend des calculs mathématiques, l'aspect géométrique, la détérioration, les matériaux, la fabrication et la vérification. Parmi tous ces paramètres, il est essentiel de connaître les contraintes se trouvant dans la dent d'engrenage pour prévenir les risques de rupture. Par conséquent, plusieurs méthodes théoriques et expérimentales ont été développées afin de déterminer ces contraintes.

Ali Raad Hassan [8], En 2009, a fait une analyse des contraintes de contact entre deux pignons à denture droite en prenant en compte les différentes positions du contact,

représentant une paire d'engrenages pendant la rotation. Un programme a été mis au point pour tracer une paire de dents en contact. Ce programme a été exécuté pour chaque  $3^\circ$  de la rotation du pignon, de la première position de contact à la dernière position pour 10 cas. Chaque cas a été représenté par une position de la séquence de contact entre ces deux dents. Le programme donne des résultats graphiques pour les profils de ces dents dans chaque position et l'emplacement de contact lors de la rotation. Des modèles éléments finis ont été faits pour ces cas, et l'analyse des contraintes a été faite, la figure I.7 représente la courbe de contrainte de Von Mises maximale pour les 10 positions de contact sélectionnés.



**Figure I.7:** Courbe de contrainte de Von Mises maximale pour les cas de contact sélectionnés pendant la rotation du pignon [8]

Les résultats montrent une forte valeur de pression au début du contact, puis elle commence à diminuer jusqu'à ce que la zone de contact s'effectue sur une seule dent. Là, la pression augmente jusqu'au maximum. Juste après avoir dépassé cette zone de contact d'une seule dent la pression commence à diminuer. A la fin du contact, la contrainte augmente soudainement jusqu'à atteindre la valeur maximal, à ce stade un glissement a eu lieu.

### I.5.2. La méthode des éléments finis et la modélisation de l'engrenage

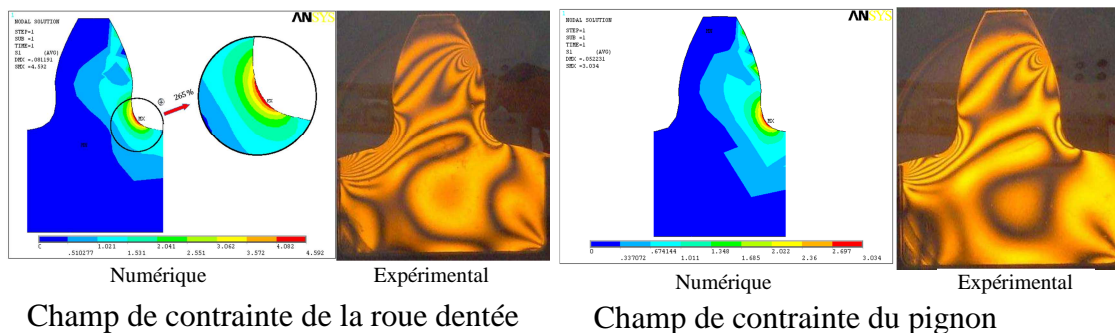
Depuis 1980, l'orientation des travaux de recherche a surtout été dirigée vers l'application des méthodes numériques: Eléments Finis, Équations Intégrales, Méthode des Potentiels Complexes, Bandes Finies.

La Méthode des éléments finis est une méthode facile à appliquer, elle permet d'étudier et de modéliser l'engrenage de façon plus globale. En effet avec cette méthode, il est possible de

tenir compte de plusieurs paramètres comme le nombre de dents sur l'engrenage, l'épaisseur de la jante, ...etc [9].

Parmi les récentes études qui ont été élaborées afin d'améliorer les engrenages en étudiant les champs de contraintes des dents, on peut citer les suivantes :

Konstandinos G. Raptis [10] a utilisé quatre échantillons d'engrenages qui ont un nombre de 15, 18, 22 et 28 dents, respectivement, en faisant des combinaisons pour différents cas d'engrènement, quatre cas ont été étudiés en variant le nombre de dents de la roue et du pignon pour chaque cas. L'étude a été faite principalement sur l'analyse de la contrainte maximale au pied de la dent lorsque les pignons d'engrenage sont chargés à leur point de contact le plus défavorable en utilisant deux méthodes de calcul, la méthode des éléments finis (FEM), et la photoélasticité pour l'étude expérimentale du champ de contraintes. La figure I.8 représente les contraintes pour une combinaison correspondant au nombre de dent 15/18 relevées expérimentalement et celles simulées numériquement à l'aide du logiciel ANSYS.

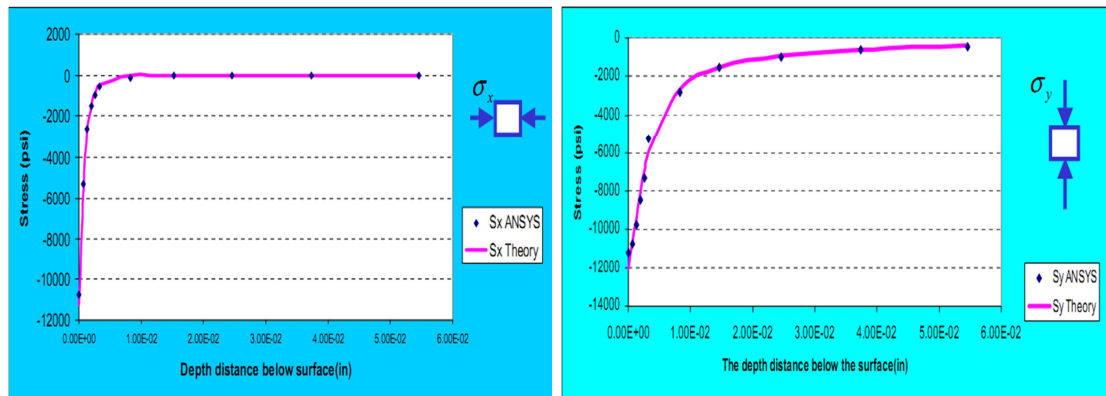


**Figure I.8:** Résultats expérimentaux et numériques pour les champs de contraintes sur la roue dentée et le pignon pour une combinaison 15/18

Dans cette étude, les résultats des expériences sur la photoélasticimétrie, qui est une méthode largement appliquée pour l'analyse des contraintes dans les engrenages, ont été comparés aux résultats de la méthode des éléments finis. Ces résultats ont montré que l'écart entre ces deux méthodes est minimal, mais dès que le nombre de dents dans les engrenages augmente cet écart devient de plus en plus important [10].

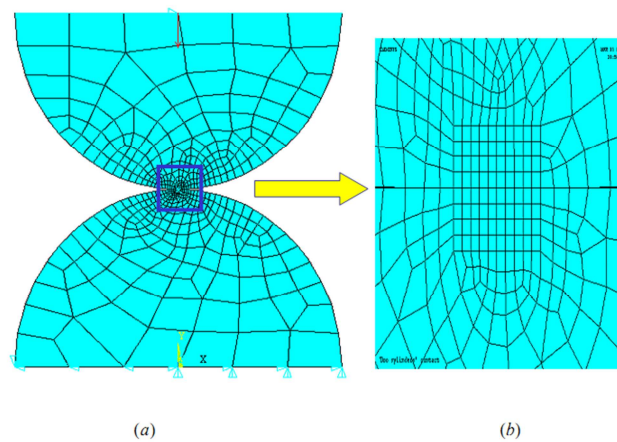
Zeping Wei [11] a développé un modèle numérique où il a analysé la contrainte de contact entre deux cylindres, l'objectif de cette analyse a été de mieux comprendre les difficultés de modélisation, d'examiner les contraintes de contact dans les engrenages.

En validant par la théorie de Hertz la méthode des éléments finis, faisant entrer des techniques particulières telle que la technique d'application de la charge progressive, On peut voir que les résultats FEM sont essentiellement identiques à la solution théorique pour les deux contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ , et que la superposition de leurs graphes est acceptable (fig.I.9).



**Figure I.9:** Superposition des graphes analytiques et numériques [11]

Afin de réduire le temps de calcul, deux demi-cylindres seulement ont été maillés dans le modèle comme le montre la figure I.10 (a).



**Figure I.10:** Deux cylindres en contact avec maillage quadratique [11]

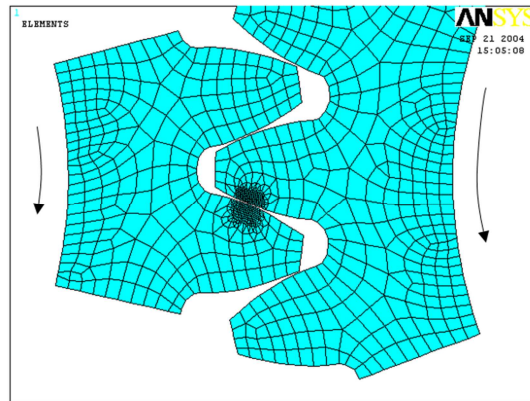
Les conditions de contact sont sensibles à la géométrie des surfaces en contact, ce qui signifie que le maillage éléments finis à proximité de la zone de contact doit être hautement raffiné.

Suite à cette étude, une analyse de la contrainte due au contact dans l'engrenage a été faite en utilisant le logiciel de calcul par élément finis ANSYS en deux dimensions, en utilisant les conditions suivantes:

- Il n'existe pas de glissement dans la zone du contact entre les deux corps.

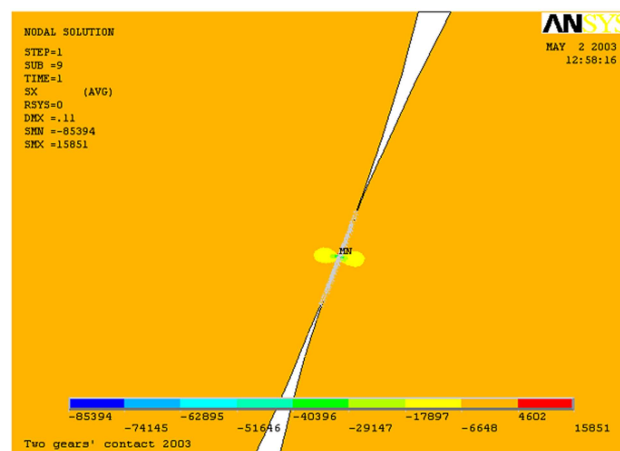
- La surface du contact est continue et lisse.

La définition des paramètres géométriques a été donnée et ensuite plusieurs points du profil en développante de l'engrenage-pignon ont été calculés pour tracer le profil de l'engrenage.



**Figure I.11:** Maillage raffiné au voisinage du contact [11]

Avec les conditions utilisées sur le contact des engrenages. La contrainte de contact normale le long de la zone du contact a été représentée dans la figure I.12.



**Figure I.12:** La contrainte du contact le long de la zone du contact [11]

## I.6. Application de la photoélasticimétrie au problème du contact

Cette technique d'analyse des contraintes est basée sur les relations qui unissent les propriétés optiques de biréfringence et les contraintes mécaniques principales dans certains matériaux plastiques.

## I.6.1. Méthodes d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie 2D

### I.6.1.1. Méthodes utilisant plusieurs configurations du polariscope

Toutes les méthodes expérimentales utilisant plusieurs configurations du polariscope sont basées sur le même principe:

Quel que soit la configuration du polariscope utilisé, on peut déterminer l'expression générale de l'intensité lumineuse émergente. Cette expression est toujours fonction du paramètre isocline  $\alpha$  et du paramètre isochrome  $\varphi$ . La combinaison de ces équations permet de déterminer les paramètres isoclines  $\alpha$  et isochromes  $\varphi$  en tout point du modèle. L'intensité lumineuse  $I(x, y)$  pour les différentes configurations du polariscope est représentée sur le tableau ci-dessous.

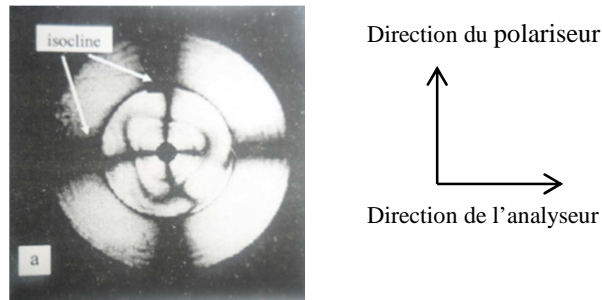
Type de polariscope	Champ clair	Champ sombre
Rectiligne	$I(x, y) = I_0 - I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$
Circulaire	$I(x, y) = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

**Tableau I.1:** Intensité lumineuse  $I(x, y)$  pour différentes configurations du polariscope

### I.6.1.3. Méthodes du tracé des isoclines et calcul des isochromes

Bilek [12], dans son étude d'un emmanchement forcé de deux pièces cylindriques, a déterminé expérimentalement le champ des contraintes développé dans les deux pièces sous l'application de la pression après assemblage. Ce travail est effectué dans le laboratoire de Poitiers. Le logiciel PHOTO2D est utilisé pour le traitement des images recueillis sur le polariscope. Les deux pièces emmanchées sont déposés sur le polariscope pour l'enregistrement des différentes images pour le traitement. Le logiciel permet de calculer le paramètre isocline et le paramètre isochrome. La valeur de la différence des contraintes principales peut alors être déterminée automatiquement le long d'une ligne quelconque appartenant au modèle. Les réseaux des isostatiques sont tracés automatiquement par simple clique de la souris sur toute la surface du modèle.

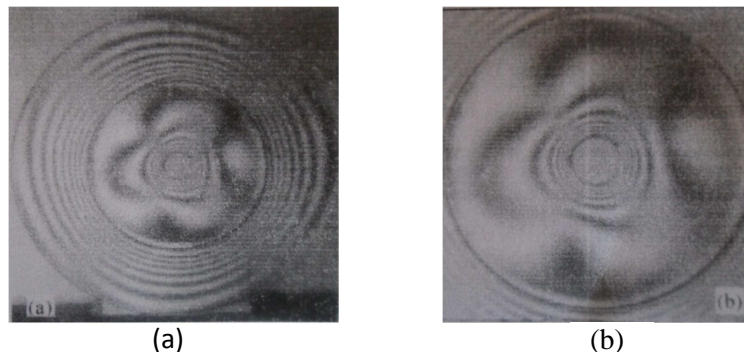
Le réseau d'isoclines obtenu sur le polariscope forme les bandes noires perpendiculaires entre elles et parallèles aux axes du polariseur et de l'analyseur (fig.I.14)



**Figure I.13:** Isoclines obtenues sur le polariscopie en lumière plane [12]

### Tracé des isostatiques et calcul des isochromes

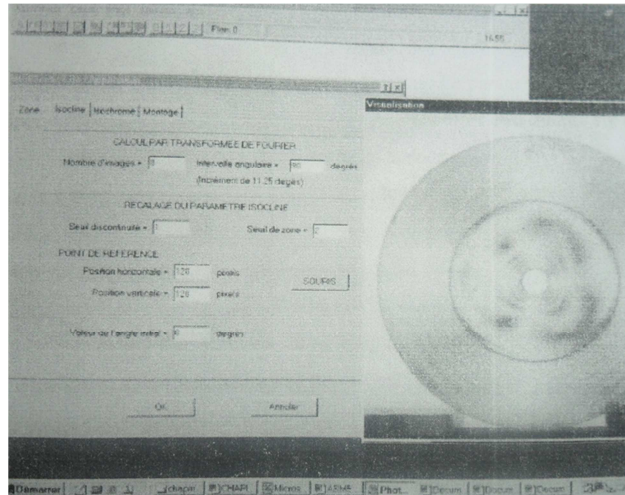
L'enregistrement des images nécessaires pour le tracé automatique des isoclines est réalisé à l'aide d'une caméra CCD. Les contraintes sont considérées constantes le long de l'épaisseur du modèle. Deux séries d'images sont enregistrées ; la première série 14 a) sert à traiter la couronne extérieure et la deuxième série, obtenue en zoomant sur le modèle figure b, sert à traiter la couronne intérieure. Les différentes images sont enregistrées pour des positions différentes des polaroids et des quarts d'ondes puis traitées à l'aide du logiciel PHOTO2D.



**Figure I.14:** Franges isochromes sur les deux couronnes [12]

Le principe de l'analyse des contraintes par la méthode PHOTO2D est basée sur les transformées de Fourier. Il permet de retrouver le paramètre isochrome et le paramètre isocline et ainsi tracer les isostatiques qui sont les trajectoires des directions principales des contraintes sur toute la surface du modèle.

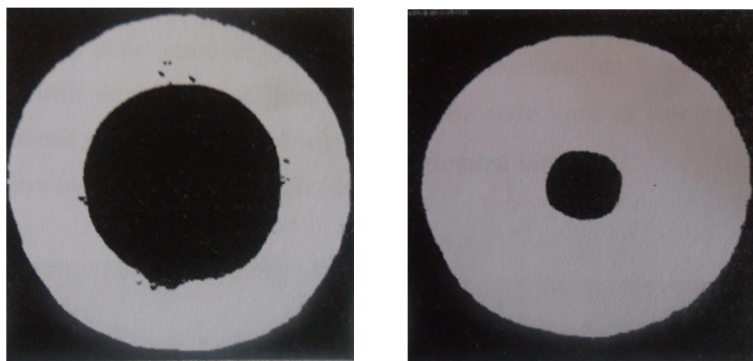
Le logiciel PHOTO2D (fig.I.15) offre la possibilité de régler tous les paramètres nécessaires pour le calcul. La longueur d'onde, la constante optique de la matière utilisée, la valeur de l'angle initial et la valeur de l'ordre dans un point choisi sur l'image du modèle étudié sont introduites dans le logiciel pour permettre le calcul.



**Figure I.15:** Image des deux couronnes traitées à l'aide du logiciel PHOTO2D [12]

### Mode opératoire

Une fois les images enregistrées, le logiciel PHOTO2D crée un masque objet (fig.I.16) pour définir la zone de l'image à traiter, c'est-à-dire la zone à l'intérieur de laquelle les calculs seront effectués. Deux masques sont donc créés, un pour la couronne extérieure et un autre pour la couronne intérieure. Le logiciel ne procède donc au calcul que dans la partie claire de l'image qui représente le modèle analysé.

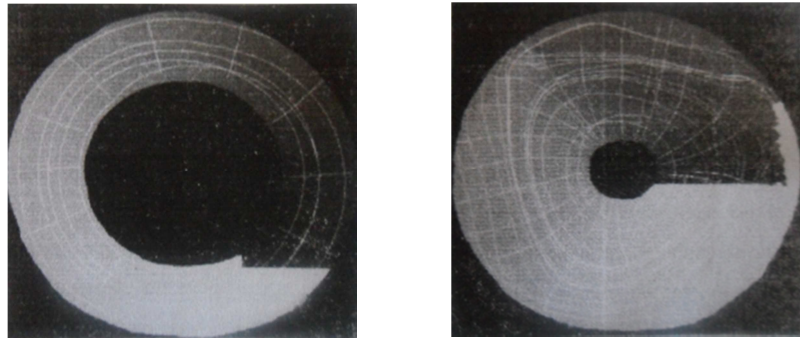


**Figure I.16:** Images des masques utilisées par le logiciel PHOTO2D pour effectuer les calculs sur les deux pièces [12]

La première étape est le calcul du paramètre isocline. Le paramètre isocline est sauvegardé dans un fichier en niveaux de gris. Les isostatiques peuvent alors être tracées sur toute la surface du modèle par simple clique sur le bouton gauche de la souris.

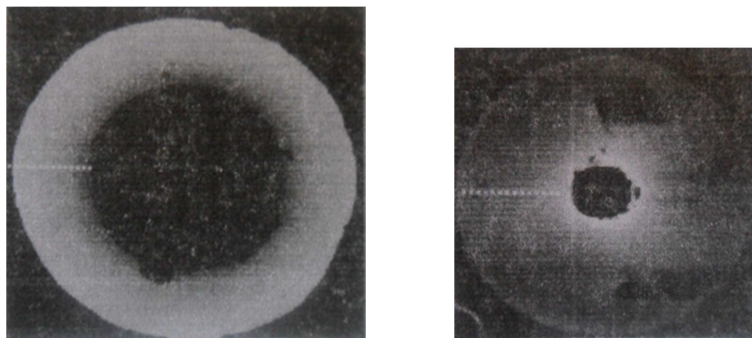
Après traitement donc avec le logiciel PHOTO2D, les isostatiques représentant les trajectoires des directions principales sont tracées sur toute la surface des modèles. Elles forment deux réseaux de courbes orthogonales entre elle (fig.I.17). Pour la couronne

extérieure, les isostatiques ont des formes plus ou moins circulaires. Pour la couronne intérieure, les isostatiques sont perturbées. Ceci est dû au fait que le modèle a été usiné sur un tour. Après l'opération d'usinage, la surface intérieure de la couronne extérieure constituant le modèle ne présente pas une surface parfaitement cylindrique.



**Figure I.17:** Représentation des isostatiques [12]

Une fois le paramètre isocline calculé, il est possible d'obtenir le paramètre isochrome (fig.I.18) et ainsi donc retrouver la différence des contraintes principales sur toute la surface du modèle. Il suffit de définir une ligne sur l'image représentant les isochromes. Le logiciel calcule la différence des contraintes principales le long de cette ligne et sauvegarde les valeurs réelles des contraintes en MPa dans un fichier pour traitement ultérieur.



**Figure I.18:** Images isochromes des deux couronnes obtenues à l'aide du logiciel PHOTO2D [12]

La variation de la différence des contraintes principales le long d'une ligne quelconque choisie (fig.I.18) peut être récupérée sur l'image du logiciel PHOTO2D. Ce logiciel offre la possibilité de tracer la variation de l'intensité en niveau gris le long de la ligne choisie sur le modèle, et ensuite d'enregistrer un fichier contenant les vraies valeurs des contraintes le long de la ligne choisie.

## I.6.2. Méthodes d'analyse des contraintes en photoélasticimétrie 3D

En photoélasticimétrie 2D, on place une éprouvette plane transparente entre deux polariseurs. On observe des franges mettant en évidence le phénomène de biréfringence dans l'éprouvette sous chargement. Les différences des contraintes principales doivent être constantes dans l'épaisseur, d'où l'analyse de modèle plan. Dans le cas d'une répartition 3D des contraintes, le phénomène de biréfringence est toujours présent mais il n'est plus possible de déterminer les paramètres de la même manière. Plusieurs approches ont été développées dans le but d'observer l'état de contrainte dans les modèles 3D.

Cependant, lors de l'étude de pièces épaisses ou à géométrie complexes, l'état des contraintes ne pourra plus être considéré plan, il varie en amplitude et en direction. De ce fait on ne pourra plus parler de différence de contraintes principales ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ), mais de différence des contraintes principales secondaires ( $\sigma' - \sigma''$ ) car l'analyse de feuillet ne se fera pas nécessairement dans les axes principaux des contraintes. Quoique la biréfringence soit toujours présente dans les modèles 3D, la détermination des paramètres ne pourra plus se faire de la même manière que dans l'hypothèse 2D. Pour cela, différentes approches expérimentales ont été développées [13].

### I.6.2.1. Méthode de figeage et découpage mécanique

Cette technique consiste à figer les contraintes dans le volume du modèle en utilisant les propriétés des chaînes moléculaires de certains polymères, cette méthode est basée sur le comportement diphasique de certains matériaux lorsque ils sont chauffés à une température de transition vitreuse où ces matériaux adoptent un comportement viscoélastique. Si le modèle est chargé dans cet état puis refroidi lentement en maintenant la charge appliquée jusqu'à la température ambiante, il conserve presque totalement la biréfringence acquise dans l'état viscoélastique.

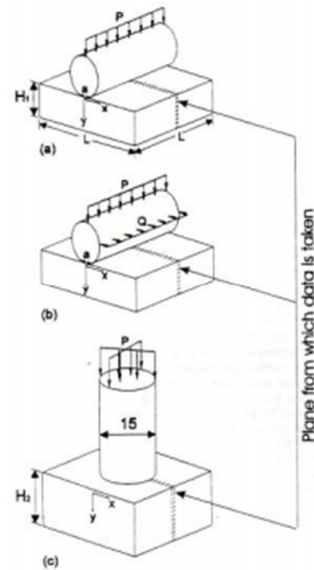
Ces polymères sont composés de deux types de chaînes reliant les molécules entre elles: les chaînes principales et les chaînes secondaires. A température ambiante les deux types de chaînes résistent aux charges appliquées au modèle. Lorsque la température du polymère augmente jusqu'à la température de transition vitreuse (environ 130°C pour un époxy), les chaînes secondaires cèdent et les chaînes principales supportent alors seules le chargement. En diminuant lentement la température du polymère jusqu'à la température ambiante, les chaînes secondaires se reforment entre les chaînes principales déformées. En

supprimant la charge, les chaînes principales se détendent légèrement, mais une très grande partie de la déformation est conservée. Les déformations élastiques des chaînes principales sont alors figées dans le volume du modèle de manière permanente grâce aux chaînes secondaires reformées.

Une fois le modèle refroidi, il est découpé en tranches d'une épaisseur appropriée (5 à 10 mm) telle que la variation des directions de la contrainte principale à travers l'épaisseur de chaque tranche puisse être considérée comme négligeable. Chaque tranche est alors examinée dans un polariscope circulaire ou rectiligne. Les différences des contraintes principales dans chaque direction peuvent être déterminées en coupant les modèles en tranches dans les trois directions orthogonales [14].

Burguete et E.A Paterson [15] ont utilisé la photoélasticimétrie 3D pour l'étude du contact cylindre sur plan, ils ont utilisé la méthode de figeage découpage couplée avec un polariscope automatique relié à une caméra CCD monochromatique. Trois cas de chargement ont été étudiés (figure I.19) un cylindre reposant le long de sa génératrice supportant une charge perpendiculaire au plan, un cylindre reposant le long de sa génératrice supportant une charge perpendiculaire au plan et une charge tangentielle et finalement un cylindre reposant sur son extrémité sur un plan soumis à une charge de compression normale similaire donc à un poinçon. Les deux modèles analysés ont été fabriqués en résine époxy.

Après le figeage des contraintes, une tranche de 0,5 mm d'épaisseur est découpée dans chacun des modèles le long de la direction d'application de la charge et ensuite analysée sur le polariscope automatique, la distribution de la contrainte de cisaillement maximale est ainsi obtenue.



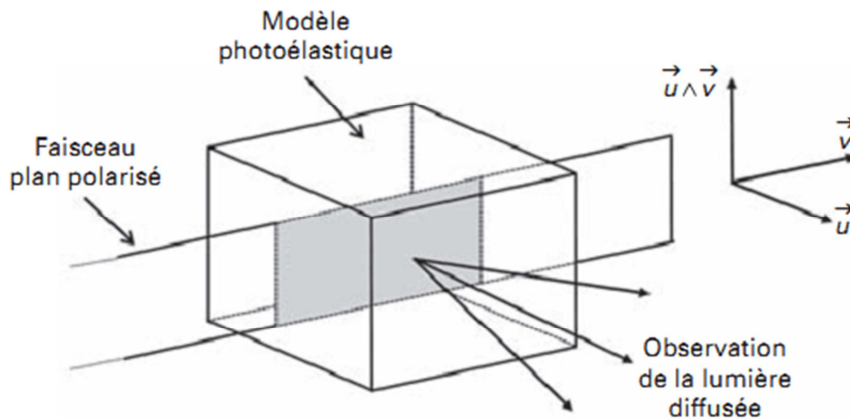
**Figure I.19:** Schémas des trois modèles utilisés (a) charge normale (cylindre sur demi espace), (b) charge normale et tangentielle, (c) charge axiale (poinçon cylindre sur plan) [15]

Burguete et E.A Paterson ont montré la fiabilité avec laquelle peuvent être étudiés les problèmes de contact à l'aide de la méthode de figeage découpage en photoélasticité tridimensionnelle. Cependant, la méthode prend beaucoup de temps du fait qu'il est nécessaire de découper plusieurs tranches pour pouvoir faire une analyse complète du champ des contraintes développé à l'intérieur du modèle. De plus, durant le processus de découpage, des contraintes peuvent être introduites dans des tranches à analyser [15].

Pour supprimer ces inconvénients plusieurs techniques ont été développées pour l'analyse expérimentale des contraintes dans les modèles tridimensionnels.

### I.6.2.2. Méthode de la lumière diffusée

Cette méthode est basée sur le phénomène de diffusion lorsqu'un faisceau lumineux de polarisation quelconque traverse un corps transparent, une partie de l'énergie lumineuse est diffusée perpendiculairement au faisceau.



**Figure I.20:** Polarisation de la lumière diffusée [13]

Si on observe suivant la direction d'observation  $U$  normale à la direction  $V$  de propagation du faisceau, l'intensité lumineuse diffusée est polarisée rectilignement suivant la direction  $U \wedge V$  (Loi de ryleigh), tout se passe comme si un polaroid se trouvait à l'intérieur du modèle. Ce polaroid fictif peut être utilisé comme un analyseur ou comme un polariseur. Il est associé à un polaroid réel placé à l'extérieur du modèle. En changeant la position du polaroid fictif à l'intérieur du modèle on peut accéder aux paramètres photoélastique du modèle. La méthode de la lumière diffusée permet, d'une façon non destructive, la détermination des paramètres photoélastiques du modèle à savoir les directions principales ainsi que les contraintes principales. Le modèle peut avoir subi ou non un figeage des contraintes.

- **Méthode de Cheng**

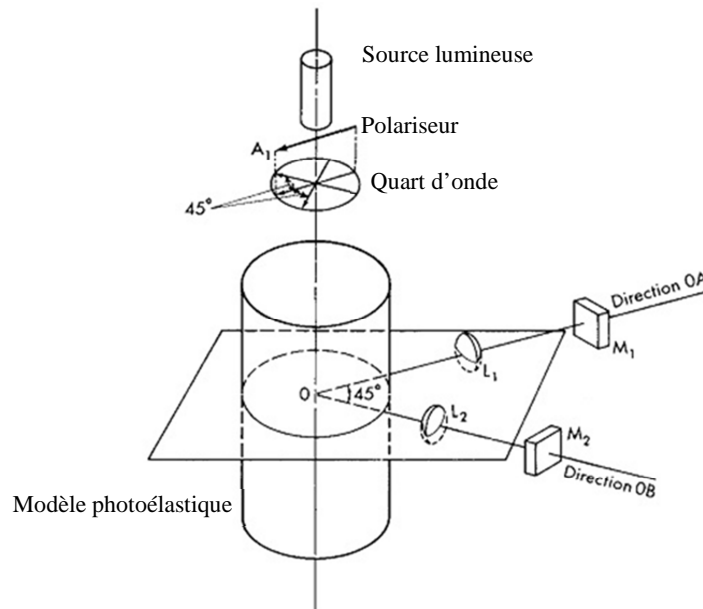
C'est une méthode qui permet d'enregistrer simultanément les intensités de la lumière diffusée suivant deux directions d'observation faisant un angle de 45 degrés dans un plan perpendiculaire au faisceau. Les paramètres photoélastiques sont ensuite évalués à partir de ces enregistrements.

La figure I.21 montre le schéma du dispositif utilisé par Cheng. Cet appareil est composé d'un laser de gaz en hélium-néon à onde continue utilisé comme source de lumière. Il émet un faisceau polarisé linéairement, intense et monochromatique de 2 mm de diamètre. Une lame quart d'onde est orientée pour produire un faisceau polarisé circulairement.

Le modèle a été pris en charge sur une plate-forme dans la cuve d'immersion. Un fluide d'immersion (un mélange de naphthalène chloré et l'huile de paraffine), comportant le

même indice de réfraction que le matériau du modèle, a été utilisé pour éliminer la réfraction et la réflexion à la surface du modèle.

Le point d'observation, O, dans le modèle a été défini comme le point d'intersection de la poutre et un plan transversal, comme indiqué sur la figure.



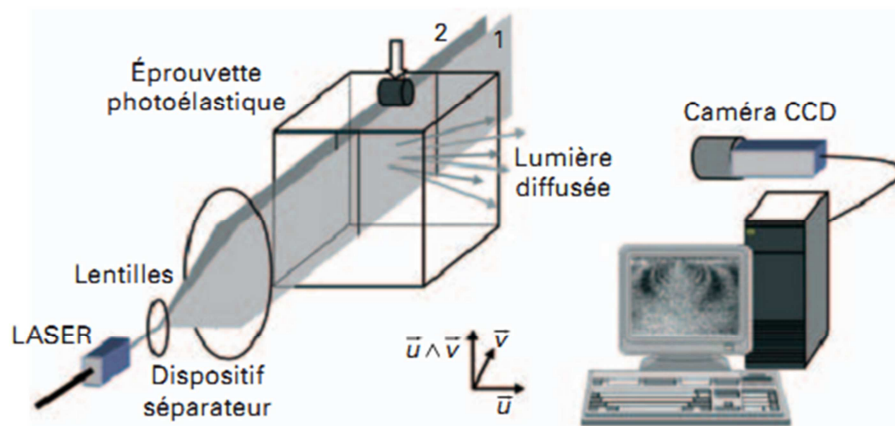
**Figure I.21:** Schéma du modèle de Cheng [16]

La plate-forme est en mesure de se déplacer à une vitesse constante le long de la direction verticale et dans deux directions perpendiculaires dans un plan horizontal, de sorte que n'importe quel point dans le modèle pourrait être mis sous observation. Les directions d'observation, OA et OB, se trouvent dans le plan transversal et font un angle de 45 degrés avec l'autre. En outre, OA est parallèle au plan de polarisation de la source de lumière. Les lentilles L1 et L2 ont été soigneusement réglées de manière que l'image du point O soit projetée de 0,03 pouce. Les multiplicateurs phototubes M1 et M2 s'ouvrent avec un rapport de grossissement de trois pour une bonne résolution de l'image.

Il convient de noter que la méthode de double observation ne nécessite pas la rotation des directions principales du modèle. D'autre part, les deux tracés de l'intensité lumineuse s'enregistrent simultanément sans aucune manœuvre de l'appareil, Le temps des manipulations est ainsi réduit. Enfin, cette méthode nous permet d'afficher les valeurs de  $\alpha$  et  $\phi$  instantanément au moyen d'un calculateur analogique.

- **Méthode de découpage optique**

Il s'agit d'une méthode non destructive de photoélasticimétrie tridimensionnelle à champ complet, utilisant le principe de découpage optique. Cette méthode repose sur les phénomènes de polarisation de la lumière diffusée et de la biréfringence des matériaux transparents. Elle consiste à isoler un feuillet dans le modèle entre deux faisceaux plans laser (fig.I.22).



**Figure I.22:** Schéma du dispositif expérimental [13]

Pour obtenir ces deux plans, le montage optique est constitué d'une source laser, d'un dispositif de séparation du faisceau, d'une lentille convergente et d'une lentille cylindrique. Une caméra CCD placée perpendiculairement à la direction des deux plans laser permet d'enregistrer la lumière diffusée. Les possibilités d'interférences entre les faisceaux diffusés par les deux plans sont fonction de leurs polarisations et de la différence de chemin optique entre les deux plans, c'est-à-dire de la biréfringence du feuillet isolé. L'intensité de la lumière diffusée par les deux faisceaux peut se décomposer en une partie cohérente et polarisée donnant un phénomène de speckle laser, et une partie non cohérente et non polarisée sous forme d'un fond continu. On note  $I_1$  et  $I_2$ , l'intensité de chacun des faisceaux, qui peuvent alors se décomposer en deux parties correspondant respectivement aux intensités du fond continu ( $I_{1F}$  et  $I_{2F}$ ) et à celles provoquées par le phénomène de speckle laser ( $I_{1g}$  et  $I_{2g}$ ). On exprime aussi l'intensité totale  $I$  résultant des deux faisceaux [13]:

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_{1g}}\sqrt{I_{2g}}\gamma \cos(\psi_1 + \psi_2 + \eta) \\ I_1 = I_{1F} + I_{1g} \\ I_2 = I_{2F} + I_{2g} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Où  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont les phases aléatoires des champs de granularité  $I_{1g}$  et  $I_{2g}$ ,  $\eta$  est une fonction des caractéristiques optiques du feuillet.  $\gamma$  est le facteur de corrélation des deux champs de granularité:

$$\gamma^2 = 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (\text{I.2})$$

L'état de biréfringence est supposé constant dans l'épaisseur du feuillet. Il peut alors être décrit par le tenseur bidimensionnel (2D) des indices optiques qui est la projection du tenseur 3D dans le plan médian du feuillet. La différence des indices principaux secondaires sur le feuillet isolé ( $\eta_1 - \eta_2$ ) peut être reliée à la différence des contraintes principales secondaires ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) en utilisant les relations de Maxwell ou à la différence des déformations principales secondaires ( $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ ) à l'aide des lois de Neumann.  $\alpha$  est l'orientation des directions principales secondaires de ce tenseur,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  ses valeurs principales. La biréfringence se définit alors par le paramètre  $\varphi$  donné par :

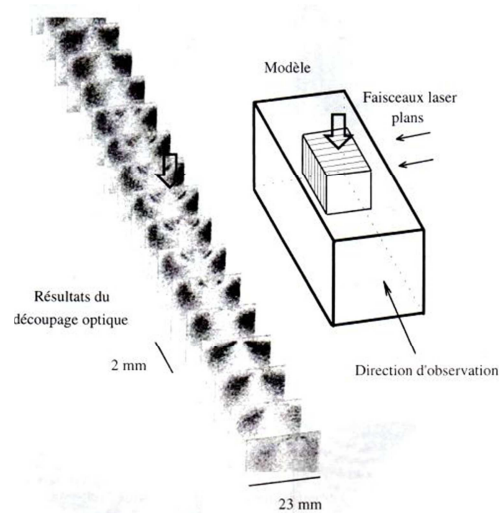
$$\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda} c(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{2\pi e}{\lambda} k(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (\text{I.3})$$

Où  $e$  est l'épaisseur du feuillet et  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière utilisée.  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont les constantes photoélastiques du matériau.

L'équation (I.2) est similaire à l'expression de l'intensité lumineuse obtenue dans un polariscope plan pour une étude 2D. Après l'analyse de la lumière diffusée, on va donc observer des franges équivalentes à celles que nous pourrions obtenir dans le cas d'une étude photoélastique 2D (franges isoclines et isochromes). En pratique, la détermination du facteur de corrélation nécessite l'enregistrement de 3 images correspondant au champ diffusé d'un plan laser seul ( $I_1$ ), du deuxième plan laser seul ( $I_2$ ) et des deux plans laser en même temps ( $I$ ) [17].

J.C. Dupré et A. Lagarde [18], ont présenté une méthode de visualisation des franges isochromes et isoclines développées dans les solides en contact en utilisant le phénomène de diffusion et les propriétés de superposition de ces champs lumineux. Le modèle à analyser est découpé optiquement à l'aide de deux faisceaux lasers. Le champ des contraintes peut être ainsi analysé dans tout le volume des solides en contact. L'évolution des franges le long de l'axe longitudinal (fig.I.23) montre la variation des contraintes dans le volume de la pièce.

Les contraintes sont concentrées au voisinage immédiat de la zone du contact. Couplée avec une caméra CCD et un ordinateur, la méthode de découpage optique nécessite quelques secondes pour obtenir les mêmes résultats que la méthode de figeage découpage qui nécessite plusieurs heures.



**Figure I.23:** Un barreau de section carrée soumis à une charge concentrée [18]

Cette méthode de découpage optique qui permet de visualiser les franges isochromes et isoclines d'un feuillet isolé optiquement au sein d'un matériau biréfringent présente de nombreux avantages: le découpage mécanique qui prend du temps et qui nécessite la fabrication de plusieurs modèles pour une analyse complète est remplacé par un découpage optique non destructif.

Le figeage des contraintes n'est plus nécessaire. Une même pièce peut subir différentes sollicitations. Le montage expérimental est facile à mettre en œuvre et l'enregistrement des images par caméra CCD et le traitement numérique sont rapides et automatiques. L'analyse du réseau de franges permet une étude complète du modèle tridimensionnel.

## **I.7. Conclusion**

Après avoir donné quelques travaux liés au problème du contact mécanique notamment dans les engrenages, on a exposé les différentes méthodes d'analyse par la photoélasticimétrie qui exploite le caractère biréfringent des modèles en époxy pour visualiser les réseaux d'isochromes et d'isoclines. Cette méthode expérimentale, est d'un appui primordial aux méthodes numériques développées grâce aux progrès de l'informatique et de logiciels de simulation car elle permet de valider les modèles éléments finis.

Notre travail portera sur l'analyse des contraintes dans les engrenages, on utilisera la photoélasticimétrie et la méthode des éléments finis pour déterminer les contraintes dans les dents des engrenages particulièrement au voisinage des zones de contact.

# Chapitre II

## La photoélasticimétrie

### II.1.Introduction

Les mesures optiques connaissent depuis une décennie un essor considérable dans les domaines du contrôle industriel et de la caractérisation mécanique expérimentale. En particulier, les techniques dites « de champ » telle que la photoélasticimétrie utilisant des techniques qui permettent d'avoir accès à des cartographies de grandeurs physiques comme l'analyse complète du champ des contraintes. La quantité d'informations quantitatives que délivre cette classe de méthodes, qui est celle à laquelle nous nous intéresserons dans ce chapitre, est donc très importante, et cela justifie amplement l'intérêt suscité auprès des utilisateurs. Par ailleurs, les techniques optiques sont toujours sans contact et souvent sans préparation de surface, ce qui rajoute à leur intérêt.

Notre travail consiste essentiellement à étudier les problèmes de contact dans les engrenages à l'aide de la photoélasticimétrie bidimensionnelle, qui nous permettra une étude sur les zones chargées. Cette méthode est très efficace pour l'étude des zones de concentration de contraintes comme: les trous, les encoches, les épaulements...etc.

### II.2. Principe de la photoélasticimétrie

Cette méthode est basée sur la biréfringence des matériaux acquise sous l'effet des contraintes. Cette biréfringence peut être étudiée en analysant la façon dont la polarisation de la lumière est transformée après le passage à travers le matériau. Par exemple, une onde lumineuse polarisée rectilignement pourra ressortir polarisée elliptiquement. Cela s'explique par le fait que les deux composantes de l'onde subissent un retard l'une par rapport à l'autre. Ce retard est directement relié aux contraintes dans le matériau. On peut donc mesurer les contraintes grâce à cette modification de la polarisation.

Expérimentalement, sur un polariscope: une lumière monochromatique, polarisée à l'aide d'un polariseur, est envoyée sur le modèle à analyser, puis passe à travers un second polaroid (analyseur). Une lentille convergente permet ensuite d'obtenir l'image du modèle sur un écran. Principalement; la lumière polarisée rectilignement va se réfracter selon le trajet qu'elle emprunte dans le matériau et se décompose en deux rayons distincts autonomes qui ont la même fréquence mais sont déphasés l'un par rapport à l'autre avec un retard optique  $\delta$ . L'analyseur va donc éteindre ou pas cette lumière, on verra ainsi apparaître des zones claires ou sombres.

### **I.3. La biréfringence**

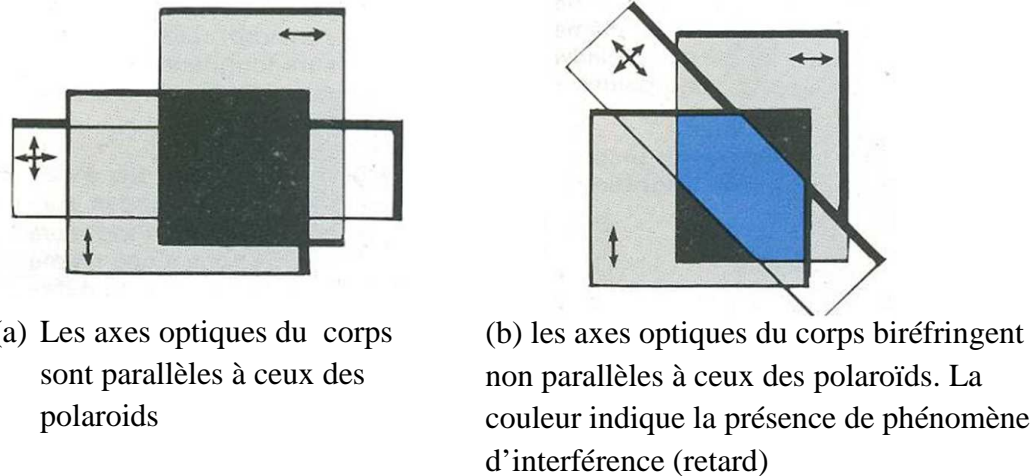
C'est un phénomène physique qui fait que lorsqu'un rayon lumineux traverse certain matériau, il se divise en deux rayons lumineux se propageant à des vitesses différentes. Ainsi si on observe un objet quelconque à travers une lame biréfringente, ce dernier nous apparaîtra dédoublé. Dans un milieu biréfringent, l'indice de réfraction n'est pas unique, il dépend des directions de propagation et de polarisation de la lumière. Il existe deux types de biréfringence, la biréfringence naturelle et la biréfringence accidentelle:

#### **II.3.1. La biréfringence naturelle**

Certains corps présentent naturellement le phénomène de biréfringence ou double réfraction. Une lumière plane polarisée se divise en deux composantes autonomes (ondes polarisées planes) parallèles aux axes optiques principaux lorsqu'elle traverse ces corps. Le phénomène de biréfringence se caractérise par un retard optique ( $\delta$ ) entre les deux composantes à la sortie du corps. Ceci est dû à la structure anisotrope de la matière.

Un corps transparent, naturellement biréfringent, placé entre deux polaroïds à axes perpendiculaires, l'un quelconque de ses axes étant parallèle à la direction de polarisation, ne modifie pas la zone d'extinction (figure a). Ce même corps biréfringent, placé obliquement laisse passer la lumière avec une couleur qui dépend de la biréfringence du corps (partie hachurée sur la figure b).

C'est le phénomène de biréfringence naturelle.



**Figure II.1:** Phénomène de biréfringence naturelle

### II.3.2. La biréfringence accidentelle (provoquée)

Les milieux dans lesquels, il n'y a aucune direction privilégiée (matière à l'état gazeux, liquide et amorphe) ne sont pas biréfringents, mais peuvent le devenir sous l'action d'une cause extérieure qui crée une direction privilégiée : c'est la biréfringence provoquée (ou induite). Le milieu devient uniaxe (axe parallèle à la direction de l'action extérieure)

La plupart des corps transparents, isotropes et normalement non biréfringents, le deviennent lorsqu'ils sont soumis à un état de contrainte, les axes principaux de l'état de contrainte coïncident avec les axes optiques principaux, les indices de réfraction principaux, sont en relation linéaire avec les contraintes principales.

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = n_1(\sigma_1, \sigma_2) \\ n_2 = n_2(\sigma_2, \sigma_1) \end{array} \right\} \Rightarrow n_1 - n_2 = c(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{II.1})$$

Ces deux composantes vont vibrer selon des plans orthogonaux qui sont parallèles aux directions principales des contraintes (1 et 2). elles ont la même fréquence mais sont déphasées l'une par rapport à l'autre (interférence possible), le retard optique  $\delta$  entre ces deux composantes sera proportionnel à la différence des indices principaux donc à la différence entre les contraintes principales et à l'épaisseur "d" du matériau.

$$\delta = c \cdot d (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{II.2})$$

#### II.4. La constante de frange

La constante de frange est le rapport entre la longueur d'onde  $\lambda$  qui sera employée sur le banc de la photoélasticimétrie et la constante photoélastique ( $c$ ) du modèle utilisé. Cette constante sera déterminée expérimentalement grâce à des essais mécaniques de traction et de flexion (chapitre IV).

D'après l'équation de MAXWELL (II.3), la constante de frange ( $f$ ) est le rapport entre la différence des contraintes principales sur l'unité d'ordre de frange en un point du modèle ayant comme épaisseur  $e$ .

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e} \Rightarrow f = \frac{e}{N} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad \text{(II.3)}$$

#### II.5. La polarisation de la lumière

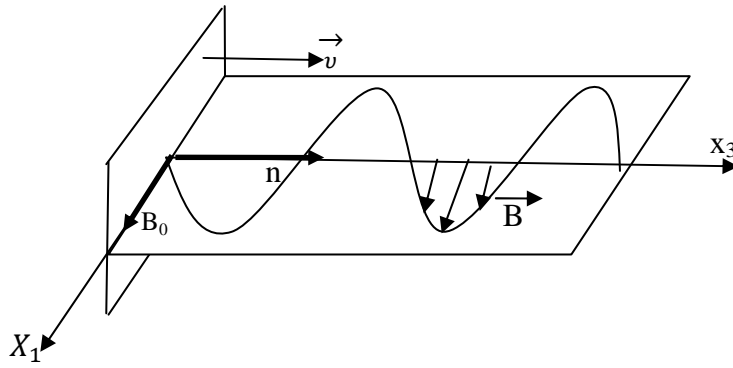
Propriété d'une onde lumineuse qui décrit le comportement des vecteurs électriques et magnétiques au cours de sa propagation (une onde lumineuse étant une onde électromagnétique). Plus précisément, la polarisation d'une onde lumineuse indique les directions que prend, au cours de l'évolution temporelle ou le long d'un rayon lumineux donné, le vecteur champ électrique (ou le vecteur champ magnétique) dans le plan orthogonal au vecteur d'onde. On peut citer comme cas particuliers :

- la polarisation linéaire pour laquelle le vecteur champ électrique "pointe" constamment dans une direction donnée.
- la polarisation elliptique (dont la polarisation circulaire est un cas particulier) pour laquelle le vecteur champ électrique décrit une ellipse.

Bien souvent, la lumière naturelle n'est pas polarisée, ce qui signifie que les "déplacements" des vecteurs champs électrique et magnétique sont désordonnés.

##### II.5.1. Lumière polarisée rectilignement

Le vecteur induction magnétique  $\vec{B}$  reste parallèle à une direction fixe.



**Figure II.2:** Lumière polarisée rectilignement suivant x [19]

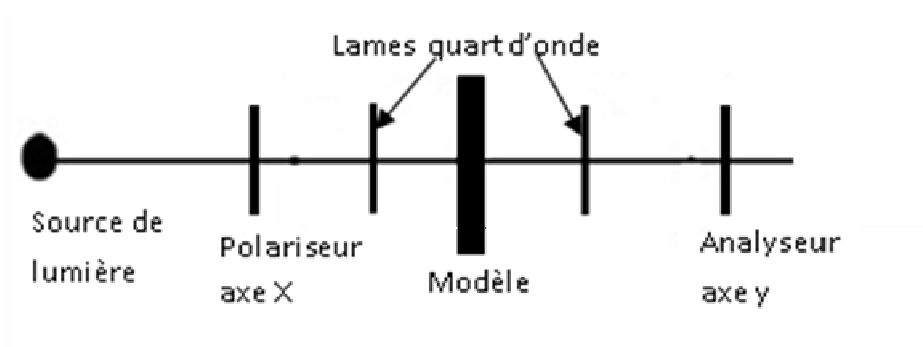
Pour une onde monochromatique polarisée rectilignement se propageant dans la direction  $\vec{n}$ , le vecteur  $\vec{B}$  s'écrit :

$$\vec{B} = B_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x_3}{c}\right) + \varphi\right) \vec{x}_1 \quad (\text{II.4})$$

Avec  $\omega$  : pulsation

### II.5.2. Polarisation circulaire

Pour polariser circulairement une onde lumineuse, on utilise un polariseur classique et une lame quart d'onde. Ce type de polariscope "élimine" les isoclines et ne laisse voir que les isochromes (très pratique pour mesurer les contraintes). En plus des filtres P et A, il comprend deux lames quart d'onde qui sont placées de part et d'autre du modèle selon la figure (II.3) :

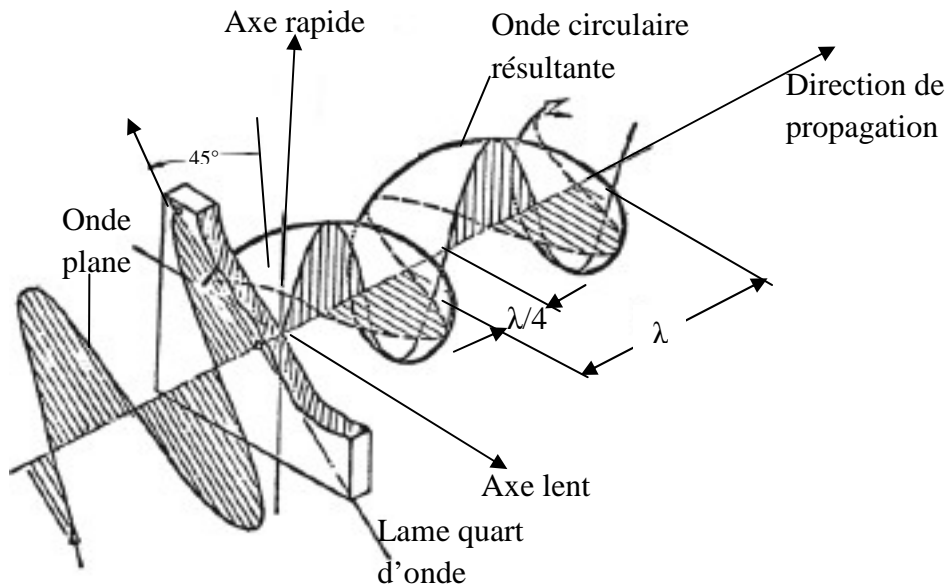


**Figure II.3:** Polariscope circulaire

### II.6. Lame quart d'onde

Pour un corps biréfringent stable, la lumière polarisée plane se décompose en deux composantes mutuellement perpendiculaires avec un retard optique entre les deux composantes égal au  $\frac{1}{4}$  de la longueur d'onde de la lumière incidente. Lorsque l'angle formé

par les directions de polarisation des polaroïds et l'un des axes des lames quart d'onde est égal à  $45^\circ$ , les deux composantes de la lumière transmise auront la même amplitude et se combineront pour former une lumière polarisée circulaire.



**Figure II.4:** Effet de la lame quart d'onde sur la lumière

## II.7. Les polaroïds

### II.7.1. Le polariseur

Un polariseur permet d'obtenir une lumière polarisée rectilignement dans une certaine direction. Dans ce cas, cette direction est appelée l'axe du polariseur. Les polariseurs sont présents et utilisés dans de nombreux instruments d'optique.

### II.7.2. L'analyseur

L'analyseur est un filtre polarisant qui permet de déterminer le plan de polarisation d'une lumière incidente par extinction du faisceau sortant de l'analyseur.

Tout polariseur peut servir d'analyseur et vice et versa.

## II.8. Description de la réfraction

La lumière est déviée lorsqu'elle passe d'un milieu transparent à un autre (par exemple: de l'air à l'eau, ou le contraire...). C'est ce phénomène qu'on observe lorsque l'on regarde une paille dans un verre : celle-ci paraît brisée. Cette fracture apparente est à l'origine du mot réfraction.

En physique des ondes, le phénomène de réfraction est la déviation d'une onde lorsque la vitesse de celle-ci change entre deux milieux. Typiquement, cela se produit à l'interface entre deux milieux. Ce phénomène se traduit par une valeur numérique qui est l'indice de réfraction.

### II.8.1. Définition de l'indice de réfraction

C'est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide  $c_0$  et la vitesse de la lumière  $v$  dans le milieu transparent.

$$n = c_0/v \quad (\text{II.5})$$

$C_0$ : est la vitesse de la lumière dans le vide

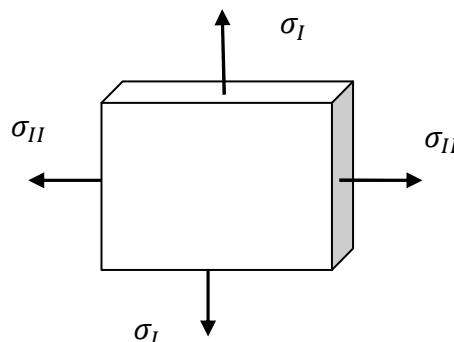
$V$ : vitesse de la lumière dans le milieu considéré

### II.8.2. La loi de maxwell

Au siècle dernier, maxwell a déterminé les lois liant les indices principaux aux contraintes principales:

$$\begin{cases} n_1 = n_0 + c_1\sigma_1 + c_2(\sigma_2 + \sigma_3) \\ n_2 = n_0 + c_1\sigma_2 + c_2(\sigma_3 + \sigma_1) \\ n_3 = n_0 + c_1\sigma_3 + c_2(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Dans le cas plan; on considère un modèle en matériau isotrope sous un état de contraintes planes soumis aux contraintes principales  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  représentées sur la figure (II.5):



**Figure II.5:** Modèle sous contraintes planes

Soit A un point du modèle à analyser, les directions privilégiées de la biréfringence accidentelle coïncide en A avec les directions des contraintes principales. Le modèle est donc

traversé en A par deux vibrations  $V_1$  et  $V_2$  ; à la vibration  $V_1$  parallèle  $\sigma_1$  correspond une vitesse  $v_1$  et un indice de réfraction  $n = c_0/v_1$  et à la vibration  $V_2$  correspond une vitesse  $v_2$  et un indice de réfraction  $n = c_0/v_2$

Neumann spécifie les relations existant dans le milieu entre les indices de réfraction et la valeur des déformations; Maxwell exprime ces relations en se référant aux contraintes.

La loi de Maxwell s'énonce :

$$\begin{cases} n_1 = n_0 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 \\ n_2 = n_0 + c_1\sigma_2 + c_2\sigma_1 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

$$\text{D'où : } n_1 - n_2 = c(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{II.8})$$

$C = C_1 - C_2$ : est appelée la constante photoélastique du matériau et s'exprime en Brewster ( $10^{12} \text{ Pa}^{-1} = 1 \text{ Brewster}$ )

$n_0$  : Indice de réfraction dans l'état non contraint

On déduit donc, que la biréfringence d'un modèle en état de contrainte plane est proportionnelle à la différence des contraintes principales ( $\sigma_2 - \sigma_1$ ).

Par convention on prend  $\sigma_1 > \sigma_2$  donc  $n_1 - n_2 > 0$  d'où:  $v_1 < v_2$

En élasticité, on peut relier le tenseur des indices au tenseur des contraintes et obtenir l'orientation (paramètre isocline) et la différence des contraintes principales (paramètre isochrome).

Si un milieu isotrope optiquement est un milieu biréfringent, le déphasage  $\varphi$ , des composantes  $\mathbf{B}_I$  et  $\mathbf{B}_{II}$  de l'onde  $\mathbf{B}$  polarisée rectilignement qui le traverse, est de :

$$\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda} c(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{II.9})$$

$\varphi$  dépend de la différence des contraintes principales. L'un des objectifs des montages photoélastiques est de visualiser des isovaleurs de  $\varphi$  donc des lignes  $(\sigma_1 - \sigma_2) = c^{ste}$ .

Le tableau suivant donne les ordres de grandeur de la constante photoélastique pour plusieurs matériaux:

matériau	C en Brewster
Verre photoélastique	2
plexiglas	4
Araldite (résine époxy)	55
Cr39	35
Psm1 (polyester)	82
Hysol (polyuréthane)	3200

**Tableau II.1:** Les ordres de grandeur de la constante photoélastique de quelques matériaux

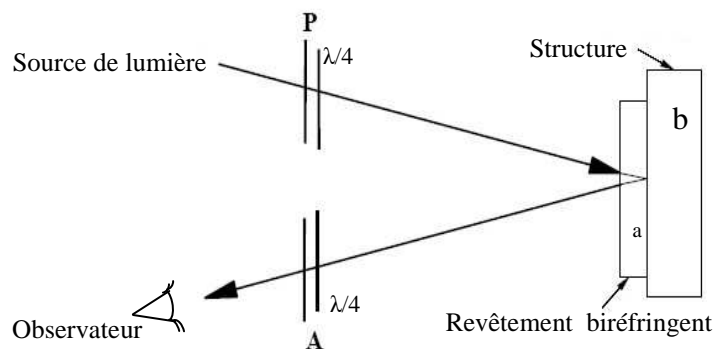
On rappelle que:  $1 \text{ Bw} = 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N} = 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$

## II.9. Différent procédés de la photoélasticimétrie

### II.9.1. Photoélasticimétrie par réflexion

La photoélasticité par réflexion utilise des revêtements minces collés sur des structures réelles, c'est la structure qui impose ses déformations au revêtement biréfringent, on mesure donc des déformations qui sont converties en contraintes.

Un revêtement photoélastique est collé sur la surface de la pièce avec une colle réfléchissante à base de poudre d'aluminium. La lumière incidente polarisée traverse deux fois le revêtement et génère des isoclines et des isochromes (Fig.II.6).



**Figure II.6:** Polariscope à réflexion [13]

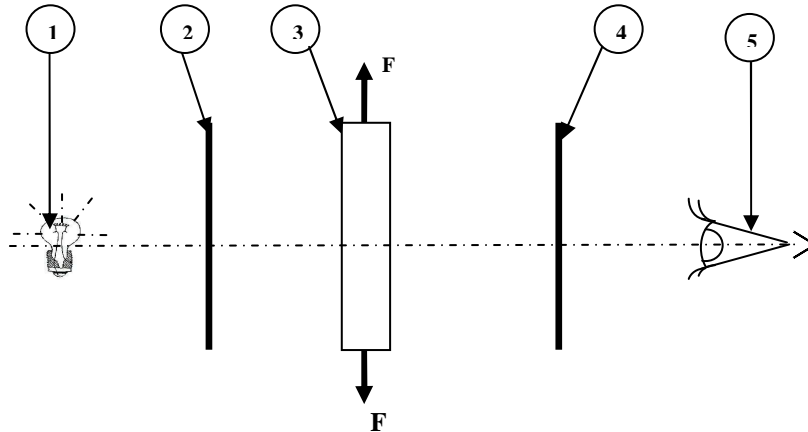
### II.9.2. Photoélasticimétrie par transmission

On réalise une reproduction plane de la forme à étudier découpée dans un matériau photoélastique d'épaisseur  $e$ . Le modèle chargé est observé par transparence entre deux filtres

polarisants. On peut obtenir les contraintes à n'importe quel endroit d'un modèle chargé ou d'un modèle à contraintes figées.

### II.9.2.1. Montage d'un polariscope par transmission

Un montage photoélastique est composé de 5 parties:

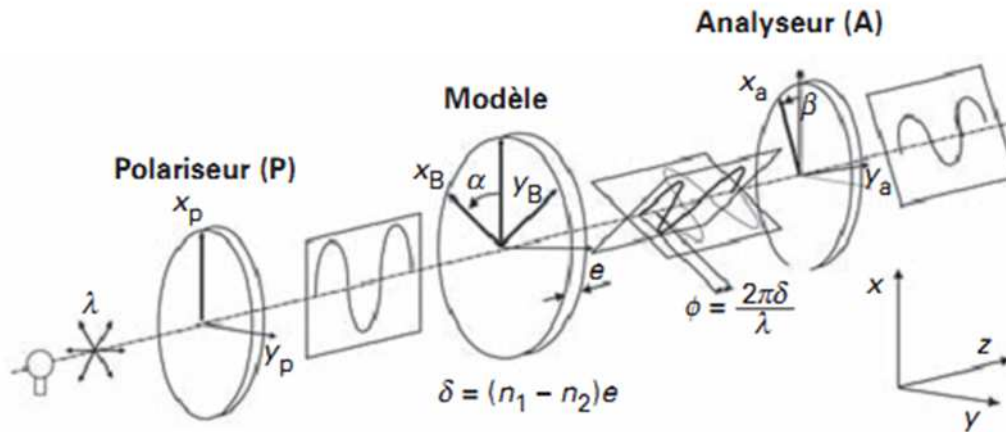


**Figure II.7:** Montage photoélastique par transmission [20]

- 1 – source de lumière monochromatique.
- 2 – polariseur de la lumière.
- 3– plaque mince de matériau biréfringent soumis à des efforts la plaçant en contraintes planes.
- 4 – analyseur de la lumière.
- 5 – observateur.

- **Effet de la biréfringence sur la lumière**

Sur un polariscope, la lumière sortant du polariseur est une forme de lumière  $p = a \cos wt$ . Portée par un axe Ox, la direction de polarisation fait un angle  $\alpha$  avec l'une des directions des contraintes principales du modèle.



**Figure II.8:** Schéma de principe d'un polariscope à lumière rectiligne [13]

Après chargement de la pièce, à l'entrée du modèle biréfringent :

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha \cos \omega t \\ y = -a \sin \alpha \cos \omega t \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Lorsque la lumière traverse le modèle, elle subit un retard  $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$  :

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha \cos \omega t \\ y = -a \sin \alpha \cos(\omega t - \varphi) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

A la sortie du modèle on obtient deux ondes polarisées rectilignement perpendiculaires et déphasées d'un angle  $\varphi$ . L'analyseur ne laisse passer que les ondes projetées selon la direction OY on a donc :

$$A = -a \sin(2\alpha) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (\text{II.12})$$

L'intensité  $I$  est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration  $A$ , et elle est donnée par la relation (II.13):

$$I = a^2 \sin^2(2\alpha) \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (\text{II.13})$$

L'intensité  $I$  est nulle (franges noires) pour :

-  $\sin 2\alpha = 0$  d'où  $\alpha = N\pi/2$  : les lieux d'extinction correspondants sont les isoclines.

Les directions des contraintes principales sont parallèles ou perpendiculaires à la direction de polarisation du polariseur et de l'analyseur. Les franges isoclines obtenues sont indépendantes

de la longueur d'onde, de l'épaisseur et du caractère biréfringent du modèle. Elles varient avec la direction du polariseur et de l'analyseur (sauf en un point isotrope, où toutes les directions sont principales).

-  $\sin \varphi/2 = 0$  d'où le retard introduit par le matériau biréfringent est égale à  $\varphi = 2N\pi$  : les lieux d'extinction correspondants sont les isochromes.

Une frange de même couleur est une isochrome qui correspond à une différence de contraintes principales. Deux franges successives de même couleur correspondent (en générale) à deux valeurs de N consécutives.

Plus la différence des contraintes principales est grande, plus les isochromes se rapprochent les unes des autres. Il suffit de compter les isochromes en partant d'une zone sans contrainte ( $N = 0$ ) pour déduire l'intensité de la contrainte de cisaillement maximale.

La frange ou l'isochrome d'ordre N, qui dépend de la longueur d'onde, est un lieu d'extinction des points vérifiant :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\delta}{ce} = \frac{\varphi\lambda}{2\pi ec} = \frac{2\pi N\lambda}{2\pi ec} = \frac{N\lambda}{ce} \quad (\text{II.14})$$

On désigne le rapport  $\lambda/c$  par la lettre  $f$ , dénommé constante de frange, pour le matériau du modèle utilisé correspondant à la longueur d'onde  $\lambda$  qui sera employée sur le banc photoélasticimétrique. La relation (II.14) s'écrit alors:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf}{e} \quad (\text{II.15})$$

Pour les différentes configurations du polariscope, voici un tableau résumant la valeur de l'intensité lumineuse.

Type de polariscope	Champ clair	Champ sombre
Rectiligne	$I(x, y) = I_0 - I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$
Circulaire	$I(x, y) = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

**Tableau II.2:** L'intensité I pour les différentes configurations

### II.12. Analyse des isoclines

Une ligne isocline est le lieu des points où la direction de l'une des contraintes principales est parallèle à la direction de polarisation.

Ces lignes apparaissent toujours noires lorsque le polariseur et l'analyseur sont croisés (champ sombre). Elle change de position et de forme quand l'ensemble polariseur analyseur tourne.

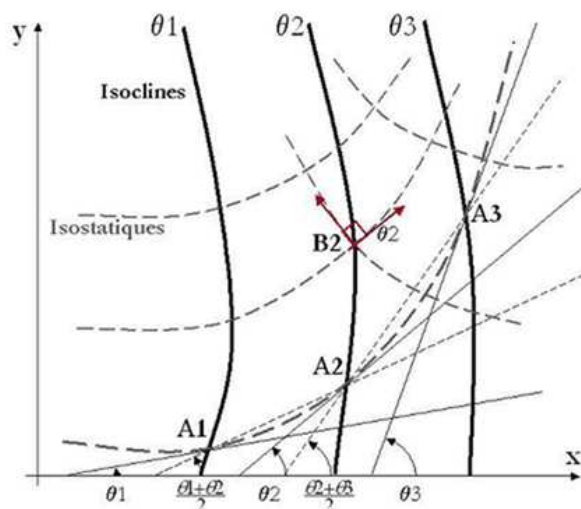
Après avoir analysé plusieurs directions, tous les 15 degrés par exemple, on obtient une cartographie de croix donnant les directions des contraintes principales sur toute la surface du modèle.

### II.13. Les isostatiques

Ce sont des lignes de forces tangentes aux directions principales composées de deux familles orthogonales: une tangente à  $\sigma_1$  et l'autre à  $\sigma_2$ . Elles sont tracées à partir des isoclines.

En un point B2 de l'isocline  $\theta_2$ , les directions principales des contraintes sont données par le dièdre incliné de  $\theta_2$ . Les isostatiques sont donc tangentes à ce dièdre.

Pour tracer une isostatique passant par A1, on relie le point A1 au point A2 avec une droite inclinée de  $(\theta_1 + \theta_2)/2$  et ainsi de suite.



**Figure II.9:** Tracé des isostatiques à partir des isoclines

### II.13.1. Propriété des isostatiques

- Lorsqu'une isostatique présente une forte courbure, la contrainte principale qui lui est perpendiculaire varie rapidement.
- Lorsqu'une isostatique est rectiligne, la contrainte principale qui lui est perpendiculaire est stationnaire et est généralement soit maximale, soit minimale.
- Une isostatique droite est aussi une isocline.
- Les axes de symétrie sont des isostatiques.
- La variation des contraintes dépend de la courbure des isostatiques.

### II.14. Elimination des isoclines

Pour éliminer les isoclines, il suffit de placer entre le polariseur et le modèle d'une part, et d'autre part entre le modèle et l'analyseur, une lame quart d'onde dont les axes sont à  $\alpha = \pi/4$  de ceux du polariseur.

### II.15. Analyse des isochromes

Une ligne isochrome apparaît comme le lieu des points d'égale valeur de la différence des contraintes principales, en effet :

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{N\lambda}{C e} \quad \text{(II.16)}$$

N : ordre de frange d'isochromes.

$\lambda$  : longueur d'onde utilisée.

C : constante photoélastique.

e : épaisseur du modèle.

Le réseau d'isochromes s'analyse en comptant les franges, c'est-à-dire en repérant la valeur de N. Dans le cas d'un éclairage en champ obscur, l'ordre zéro est toujours noir.

Dans le cas d'un polariscope rectiligne, l'analyse des isochromes est difficile du fait de la présence des lignes isoclines noires lorsqu'on travaille avec polariscope rectiligne.

#### II.15.1. Localisation des franges isochromes dans le cas d'un engrenage

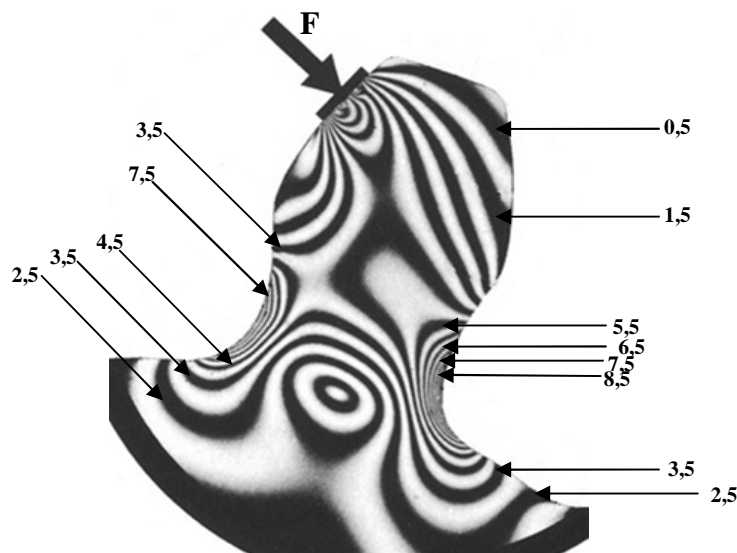
En lumière monochromatique polarisée circulairement, les franges successives peuvent être distinguées quel que soit leur nombre. En chargeant progressivement la pièce, on

peut repérer l'apparition des franges successives, les classer par ordre d'apparition et leur attribuer ensuite un ordre.

On peut également repérer les ordres des franges par le raisonnement. On sait que les isochromes d'ordres différents ne peuvent pas se rencontrer: on ne peut passer de la frange d'ordre  $n$  à celle d'ordre  $(n + 2)$  sans passer par la frange d'ordre  $(n + 1)$ .

Sur l'exemple de la figure II.10, en champ clair, la dent d'engrenage est chargée par une force  $F$  indiquée par la flèche. Le coin supérieur droit de la dent est brillant: c'est la frange d'ordre 0. On peut le contrôler en faisant croître progressivement la force à partir de 0 : si ce point a toujours été brillant depuis le début, c'est qu'il se trouve bien sur la frange d'ordre 0.

On suit le bord droit de la dent de haut en bas, on peut compter les franges par ordre numérique croissant, jusqu'à 8,5. Au-delà, toujours en descendant, les franges qu'on rencontre ont déjà été vues plus haut (une frange ne perd pas son ordre, quel que soit son parcours). Donc, descendant plus bas depuis la frange 8,5, on retrouve les franges précédentes dans l'ordre numérique décroissant. L'ordre maximal qu'on peut observer le long du bord droit de cette dent, est donc celui de la frange d'ordre 8,5.



**Figure II.10:** Localisation des franges isochromes dans une dent d'engrenage

Ayant maintenant à repérer les franges sur le bord gauche de la dent, il n'est pas possible de partir du même point zéro que précédemment, car on doit passer par la zone entourant le point d'application de la force, où les contraintes sont complexes. Par contre, on peut remarquer que la frange d'ordre 3,5, repérée à droite, tout à fait en bas, traverse la dent et

se retrouve à gauche. A partir de là, on monte le bord gauche et on compte des ordres successifs jusqu'à 7,5.

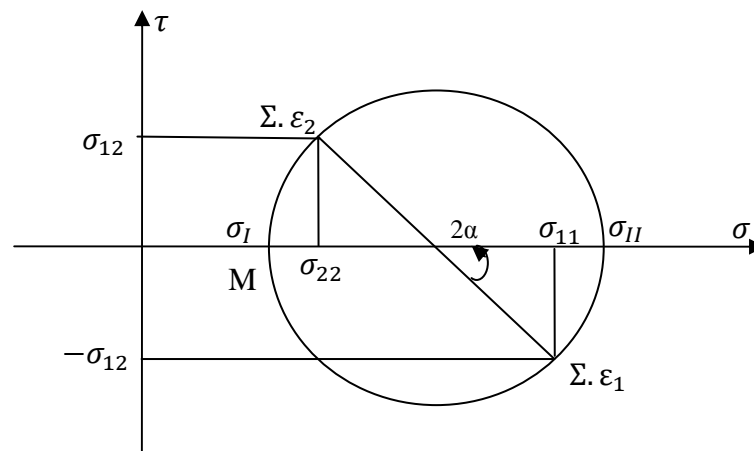
Nous connaissons donc maintenant les contraintes le long des bords, mais d'un point de vue théorique, il est impossible de connaître leur signe, à savoir distinguer les positives des négatives, les tractions des compressions. Dans ce cas simple, une analogie avec un cas de flexion d'une poutre encastrée nous montre que l'ordre 8,5, à droite, est une compression, et que l'ordre 7,5 à gauche, est une traction.

## II.16. Expression analytique des isoclines et des isochromes

Par définition une maquette photoélastique en 2D est en état de contraintes quasiplane. Le tenseur des contraintes  $\Sigma$  est de la forme [20]:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le plan  $(\sigma, \tau)$ , sa représentation est donnée dans la figure II.11 :



**Figure II.11:** Tenseur des contraintes en un point M dans un matériau photoélastique

Cette représentation permet de donner les expressions analytiques des isochromes et des isoclines (eq.II.17 et eq.II.18), qui seront par la suite introduites dans le programme "Castem" pour les tracés en post traitement.

L'équation des isochromes est liée au diamètre du cercle  $(\sigma_I - \sigma_{II})$  :

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = \frac{Nf}{e} \quad \text{(II.17)}$$

L'équation des isoclines est le lieu des points où  $\alpha=c^{ste}$  :

$$\tan(2\alpha) = \frac{-2\sigma_{12}}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})} \quad (\text{II.18})$$

### II.17. Conclusion

Dans ce chapitre on a rappelé essentiellement le phénomène de biréfringence utilisé en photoélasticité bidimensionnelle pour analyser des contraintes dans les modèles sollicités. On a expliqué aussi le principe du polariseur qui permet d'utiliser ce phénomène de biréfringence en lumière plane ou en lumière circulaire. Les franges isoclines et les franges isochromes ainsi obtenues permettent de déterminer respectivement les directions des contraintes principales et les valeurs de la contrainte de cisaillement maximale dans les modèles étudiés.

**Chapitre III**  
**Formulation du problème de contact mécanique**  
**La théorie de Hertz**

### III.1. Introduction

Lorsque deux corps sont mis en contact sous l'effet d'une charge  $P$ , ils produisent des contraintes et des déformations sur les surfaces de contact, cette contrainte s'appelle la contrainte au contact, et cette déformation s'appelle la déformation au contact des surfaces.

La théorie de Hertz établie en 1882, permet sous certaines conditions du déplacement normal des surfaces, de déterminer l'aire de contact et la distribution des contraintes et des déformations connaissant la pression du contact, la géométrie des solides et leurs modules d'élasticité. Hertz a posé comme hypothèse que chacun des deux corps peut être considéré comme semi espace élastique chargé sur une surface elliptique relativement très faible devant les dimensions des solides en contact. Basé sur ces hypothèses, les contraintes sont analysées au voisinage de la zone du contact.

### III.2. Théorie de Hertz du contact élastique

L'hypothèse des relations de Hertz est la suivante: «Si deux corps à surfaces courbes sont pressés l'un contre l'autre, il y a contact sur une surface de pression elliptique».

Les solutions exactes ont été établies par Hertz sous les conditions suivantes :

- les surfaces sont continues et non-conformes:  $a \ll R$
- les déformations sont petites :  $a \ll R$
- chaque solide peut être considéré comme un milieu semi-infini, c'est à-dire:  $a \ll R_{1,2}$
- pas de frottement, soit  $q_x=q_y=0$

On se limite à la présentation des résultats pour des solides de révolution ( $R'_1 = R''_1 = R_1$  et  $R'_2 = R''_2 = R_2$ ) et des cylindres au contact le long de leur génératrice commune. La figure III.1 représente la zone du contact de Hertz.

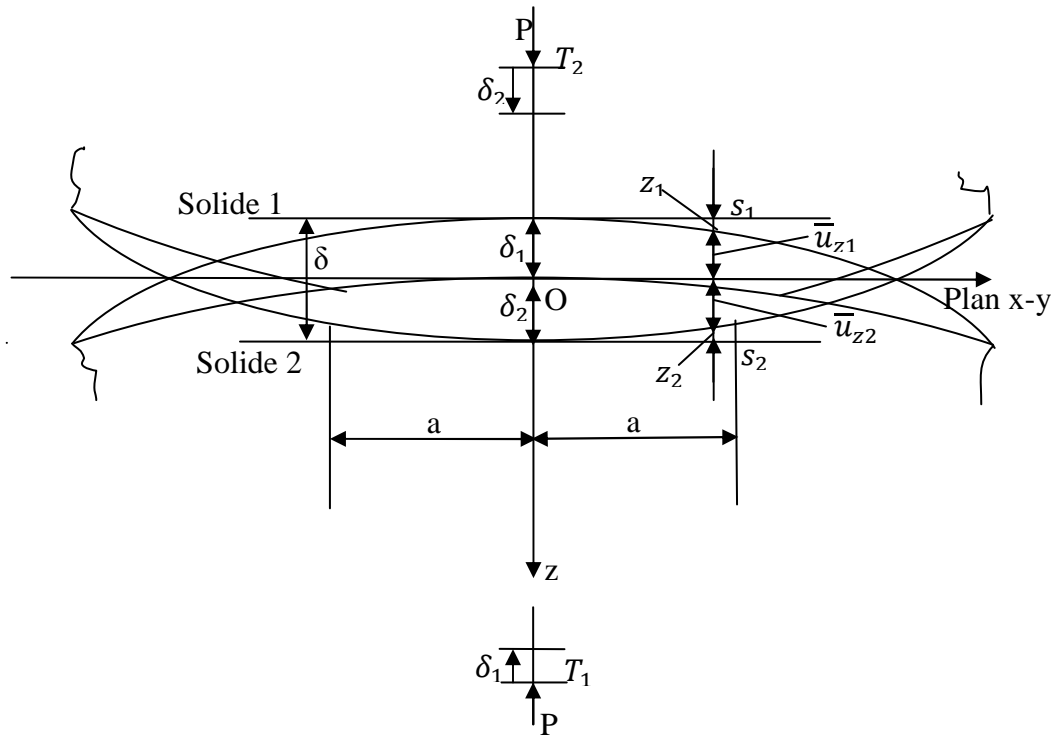
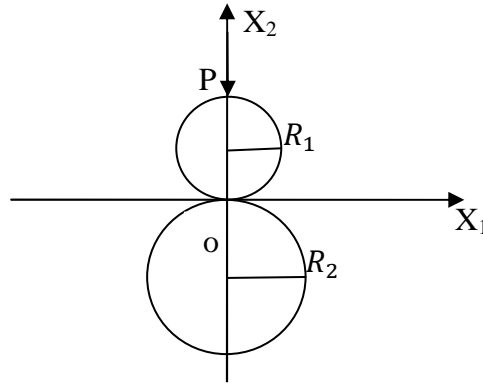


Figure III.1: Contact de Hertz [23]

### III.3. Contact bidimensionnel de deux cylindres

Hertz a fourni des solutions aux problèmes de contacts entre corps élastiques. Les solutions les plus connues concernent deux cylindres ou deux sphères, qui peuvent avoir des rayons différents, et qui sont en contact le long d'une génératrice. Pour une force d'appui donnée, la théorie de Hertz fournit la taille de la zone de contact, la pression normale sous le contact, et les contraintes normales principales à l'intérieur des cylindres dans le plan de symétrie défini par la génératrice et le segment qui joint les centres des sections. La figure ci-dessous précise la géométrie et les notations utilisées.



**Figure III.2:** Deux cylindres en contact

Avec :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Les  $R_i$  sont les rayons de chaque cylindre,  $E_i$  les modules de Young et  $\nu_i$  les coefficients de Poisson.

La surface du contact  $a$ , et la pression maximale de contact  $p_0$ , peuvent être calculées grâce aux relations ci-dessous.

Pour un chargement linéique d'un solide semi-infini, la distance  $h$  séparant les deux surfaces du contact  $s_1$  et  $s_2$  s'écrit:

$$h = z_1 + z_2 = Ax^2 = \frac{1}{2}(1/R_1 + 1/R_2)x^2 = \frac{1}{2}(1/R)x^2 \quad \text{(III.1)}$$

$x$  : représente la coordonnée commune de  $T_1$  et  $T_2$ .

$A$  : courbure équivalente aux surfaces en contact.

Pour les points qui se trouvent sous l'aire du contact, on obtient :

$$\overline{u_{z1}} + \overline{u_{z2}} = \delta - Ax^2 = \delta - \frac{1}{2}(1/R)x^2 \quad \text{(III.2)}$$

Tandis que, pour ceux qui sont situés à l'extérieur, on a:

$$\overline{u_{z1}} + \overline{u_{z2}} > \delta - \frac{1}{2}(1/R)x^2 \quad \text{(III.3)}$$

Les déplacements  $\overline{u_{z1}}$  et  $\overline{u_{z2}}$  peuvent être obtenus en considérant chaque cylindre comme un milieu semi-infini. Les déplacements ne peuvent pas être exprimés à partir d'un point situé à l'infini. Cela signifie que la distance d'approche  $\delta$  ne peut plus être déterminée uniquement à partir des contraintes du contact local, seulement mais qu'il est nécessaire de considérer l'ensemble de la distribution des contraintes à l'intérieur des solides, donc leur géométrie. Des solutions existent pour un certain nombre de problèmes (ex: un petit cylindre entre deux cylindres qui le compriment selon deux génératrices diamétralement opposées).

On a donc la valeur de  $a$  et la répartition de la pression:

$$a = 2 \left( \frac{pR}{\pi E^*} \right)^{1/2} \quad (\text{III.4})$$

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a} \left( 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{III.5})$$

D'où la pression maximale :

$$p_0 = \frac{2p}{\pi a} = \frac{4}{\pi} p_m = \left( \frac{pE^*}{\pi R} \right)^{1/2} \quad (\text{III.6})$$

Le long de l'axe  $oz$ , les contraintes s'expriment sous la forme :

$$\sigma_y = -\frac{P_0}{\pi} z \left( \frac{a^2 + 2y^2 + 2z^2}{a} Q - \frac{2\pi}{a} - 3yR \right) \quad (\text{III.7})$$

$$\sigma_z = -\frac{P_0}{\pi} z (aQ - yR) \quad (\text{III.8})$$

$$\sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z) \quad (\text{III.9})$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P_0}{\pi} z^2 R \quad (\text{III.10})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \quad (\text{III.11})$$

Ou l'on a posé :

$$R = \frac{\pi}{\varepsilon\omega} (1 - \omega) \left( \omega^2 + 2\varepsilon + \left( 1 - \frac{4a^2}{\omega} \right) \right)^{-1/2} \quad (\text{III.12})$$

$$Q = \frac{\pi}{\varepsilon\omega} (1 + \omega) \left( \omega^2 + 2\varepsilon + \left( 1 - \frac{4a^2}{\omega} \right) \right)^{-1/2} \quad (\text{III.13})$$

Avec :

$$\omega = (a + y)^2 + z^2 \quad (\text{III.14})$$

$$\varepsilon^2 = \frac{(a-y)^2 + z^2}{(a+y)^2 + z^2} \quad (\text{III.15})$$

$$\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_{zz} - \sigma_{xx}| = p_0 a \left\{ z - z^2 (a^2 - z^2)^{-1/2} \right\} \quad (\text{III.16})$$

$\tau_1$  est maximale ( $=0,30p_0$ ) à une distance égale à  $0,78 a$ . Qualitativement, on retrouve un profil de celui discuté précédemment. La variation des deux contraintes principales  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{xx}$  le long de l'axe  $oz$  ( $z=0$ ) et les contours selon lesquels  $\tau_1$  est maximale sont indiqués sur la figure ci-dessous. Sur la surface de contact ( $z=0$ ), on vérifie :

$$(\overline{\sigma_{xx}}) = (\overline{\sigma_{zz}}) = -p$$

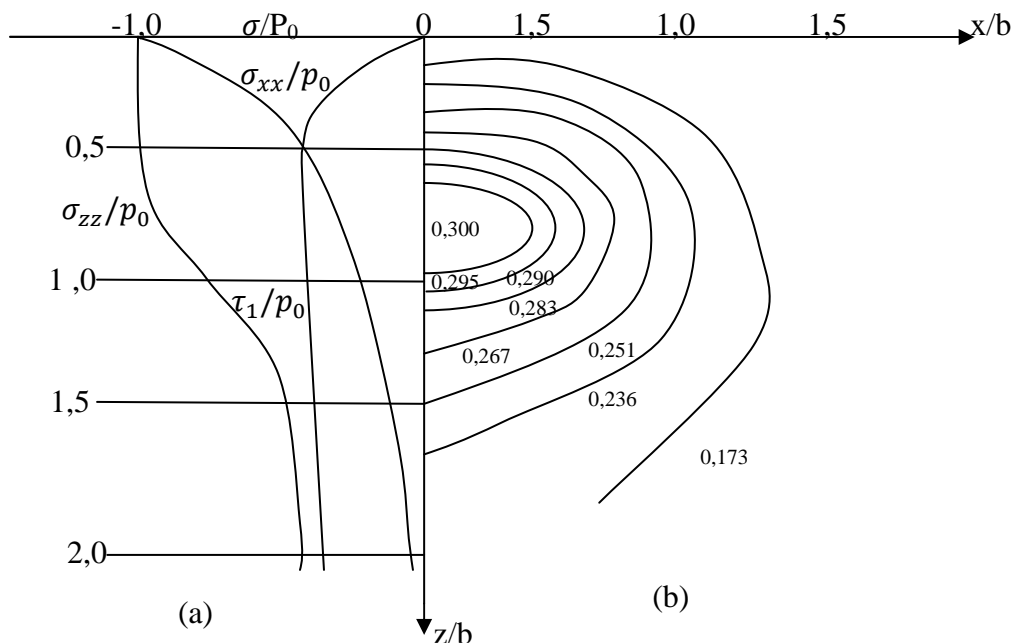


Figure III.3: Contact de deux cylindres [23]

La zone : a) représente les contraintes en sous couche le long de l'axe de symétrie

b) représente les courbes de niveau d'isovaleurs pour la contrainte de cisaillement  $\tau_1$

Le problème du contact cylindre sur cylindre est équivalent au problème du contact cylindre sur plan, en faisant tendre le rayon d'un cylindre vers l'infini.

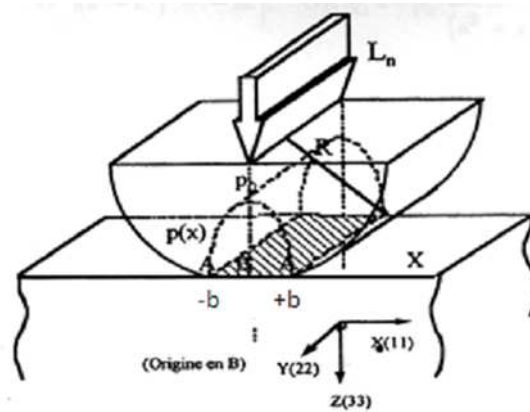


Figure III.4: Contact cylindre sur plan [25]

#### III.4. Analyse de la déformation locale au niveau du contact d'un engrenage

La déformation locale, au niveau du contact, peut être évaluée en utilisant l'expression de Hertz liant la déformation au contact et l'effort pour deux cylindres en contact [24]:

$$\delta = \frac{2}{\pi E} (1 - \nu^2) \frac{F_N}{L} \left[ 1.207 - \text{Ln} \frac{E}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}} - \text{Ln} \frac{F_N}{L} \right] \quad (\text{III.17})$$

$\delta$  : Déplacement relatif en mm

$F_N$  : Effort normal au contact en N

$L$  : longueur du contact en mm

$\rho_1$  et  $\rho_2$  : Rayon de courbure en mm

$E$  : Module de Young en  $\text{N/mm}^2$

$\nu$  : Coefficient de Poisson

#### III.5. Expression de la pression superficielle donnée par Hertz

On considère un contact linéique entre deux cylindres, de longueur  $L$ , en contact suivant une de leur génératrice et une charge  $P$  centré sur la ligne de contact.

Sous l'action de la charge, il existe une densité linéique de charge  $q$  uniforme. Le long de la ligne de contact et dans le domaine d'élasticité des matériaux, il apparaît une légère déformation élastique et un champ de pression sur la zone de contact.

Dans un plan apparent, le champ des pressions est elliptique. Dans un plan médian, le champ de pression est uniforme. La valeur maximale du champ de pression peut être exprimée à l'aide de la formule de Hertz relative au contact linéique [24].

$$\sigma_H = \sqrt{q \left[ \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right] / \pi \left[ \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right]} \quad (\text{III.18})$$

Avec :  $q = F_N/L$  répartition linéique de l'effort

$F_N$  : effort normal au contact

$L$  : longueur du contact

$\rho_1$  et  $\rho_2$  sous les rayons de courbure des surfaces dans le plan apparent, compté positivement pour une surface convexe, et négativement pour une surface concave.

$E_1$  et  $E_2$  sont les modules de Young des matériaux.

$\nu_1$  et  $\nu_2$  sont les coefficients de poisson des matériaux.

Dans le cas des engrenages à denture droite, on a:

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{F_N}{L} \left[ \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right]} 0,59 \sqrt{\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}} \quad (\text{III.19})$$

### III.6. Conclusion

L'application de la théorie de Hertz offre la possibilité de calculer facilement et correctement la longueur, la pression maximale au point du contact et le déplacement engendré par l'effort. Les calculs montrent que, pour un contact normal d'un cylindre sur plan, la différence des contraintes principales est maximale pour  $z=h= 0,78b$  (point de hertz) et la valeur de la contrainte tangentielle est égale à  $0,3P_0$ .

<p style="text-align: center;"><b>Chapitre IV</b></p> <p style="text-align: center;"><b>Analyse des champs de contraintes dans les engrenages</b></p>
---

### **IV.1. Introduction**

Ce chapitre est dédié à l'étude des champs de contraintes développés dans le contact d'une roue dentée et d'une crémaillère, en validant par l'expérimentale les résultats obtenus par la méthode des éléments finis.

L'analyse des résultats se fera d'une part, par la comparaison des courbes de la variation de la contrainte de cisaillement maximale, le long d'une droite passant par le point de contact obtenue par les deux méthodes, et d'autre part, par la comparaison des franges isochromes relevées sur le polariscope avec celles calculées numériquement à l'aide du logiciel "CASTEM".

### **IV.2. Analyse expérimentale du contact dans l'engrenage**

Les calculs sont effectués pour un contact pignon-crémaillère dont le nombre de dents du pignon est  $Z=10$  dents, et ayant un module  $m = 15$ . Il est chargé par une force  $F= 271$  N. Le matériau du modèle est en époxy, de module de Young  $E= 3273$  MPa et de coefficient de Poisson  $\nu=0,37$ .

#### **IV.2.1. Dispositif expérimental**

L'analyse des contraintes dans le modèle se fera à l'aide d'un polariscope plan. Afin de réaliser un contact entre les dents du pignon et de la crémaillère on a conçu un système de chargement assurant l'engrènement (fig.IV.1). On récupère les isochromes et les isoclines directement au niveau de l'analyseur du polariscope sous forme d'images à l'aide d'un appareil photo numérique. L'exploitation de ces franges permet d'analyser le champ des contraintes développées dans le modèle.



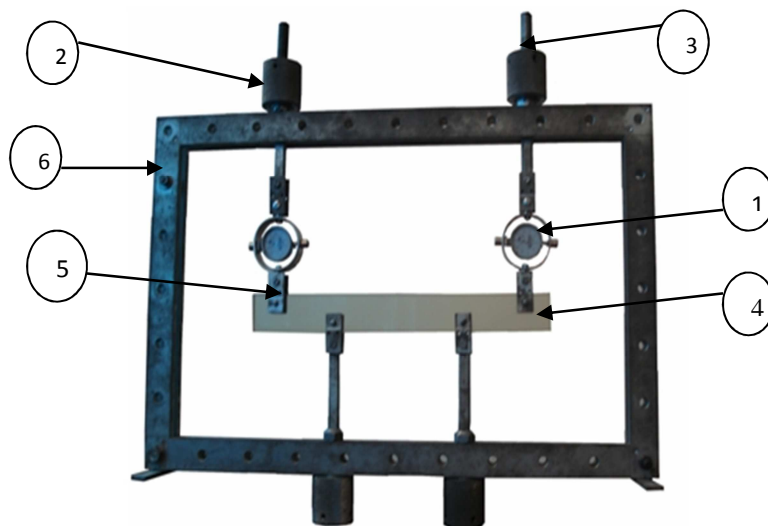
**Figure IV.1:** Engrenage pignon - crémaillère

### IV.2.2. Détermination de la constante de frange

Avant d'effectuer les essais; on doit d'abord retrouver la valeur exacte de la constante de frange  $f$ . Pour cela, on la détermine à l'aide de deux méthodes, essai de traction et essai de flexion 4 points, la moyenne des valeurs obtenues par les deux essais sera la valeur de  $f$  utilisée pour l'analyse des contraintes dans le modèle.

#### IV.2.2.1. Première méthode (essai de flexion 4 points)

L'essai de flexion 4 points (fig.IV.2), permet de créer un moment fléchissant constant sur une éprouvette en matériau biréfringent.



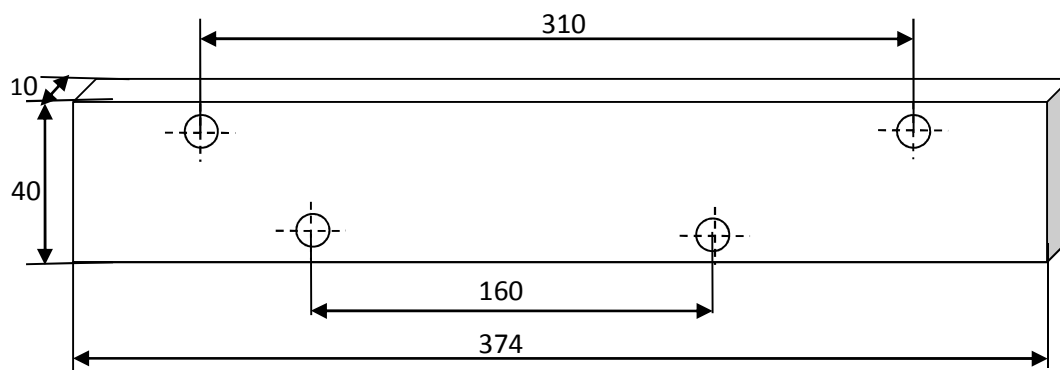
**Figure IV.2 :** Dispositif de chargement en flexion

**Les composants du dispositif**

1. dynamomètres.
2. écrou
3. tige filetée.
4. éprouvette
5. plaque de liaison
6. cadre de charge

**Modèle utilisé**

L'éprouvette ci-dessous sera soumise à un moment fléchissant en utilisant le banc d'essai sur la figure IV.4.



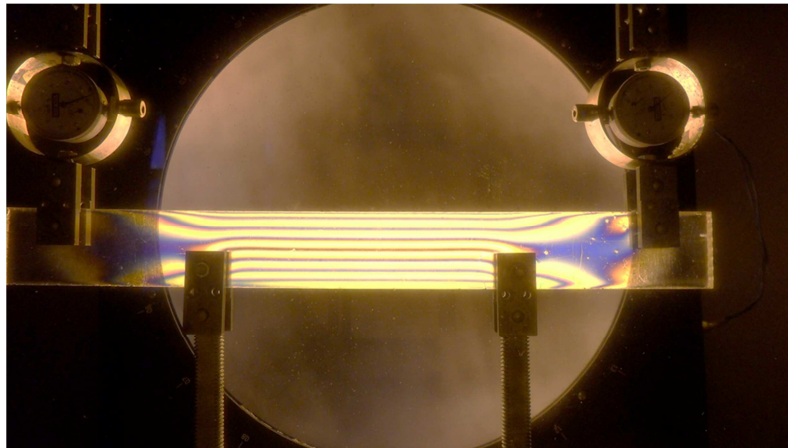
**Figure IV.3:** Eprouvette de l'essai de flexion

**Principe et procédure de détermination de la constante de frange**

Avant de commencer l'expérience, il est nécessaire de régler la disposition des polaroids qui donne la lumière circulaire avec élimination des isoclines.

En créant un moment fléchissant constant sur une certaine partie de l'éprouvette, une fois les franges isochromes visualisées (fig.IV.4). On relève leurs nombre afin de retrouver la valeur de l'ordre de frange au niveau du bord libre.

Le calcul de  $M_f$  par des relations RDM puis le remplacer dans la relation (IV.6), permet de retrouver la valeur de la constante de frange.



**Figure IV.4:** Les franges isochromes obtenues en flexion

### Calcul de la constante de frange

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e} \quad (\text{IV.1})$$

Sur les bords de l'éprouvette nous avons:  $\sigma_2 = 0$

Ce qui donne :

$$f = \frac{e \sigma_1}{N} \quad (\text{IV.2})$$

La contrainte  $\sigma$  nous est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_1 = \frac{M_f}{w_{xx}} = \frac{M_f}{I_{xx}} \cdot v \quad (\text{IV.3})$$

Tel que :  $w_{xx} = I_{xx} / v$

Ou :  $I_{xx}$  est le moment d'inertie de la plaque qu'est donné par la relation :

$$I_{xx} = \frac{e \cdot h^3}{12} \quad (\text{IV.4})$$

$v$  est la distance qui sépare la ligne neutre du bord de la distance qu'est donnée par la relation :

$$v = h/2 \quad (\text{IV.5})$$

En remplaçant (IV.3) dans la relation (IV.2) on aura :

$$f = 6 \frac{M_f}{N \cdot h^2} \quad (\text{IV.6})$$

### Calcul du moment fléchissant $M_f$

On applique aux points A et B, un effort F d'intensité égale à 154,5N.

A l'équilibre, on a:

$$\sum F=0 \Rightarrow 2F - R_B - R_C = 0 \quad (\text{IV.7})$$

$$\sum M_f/B = F_A(AB) + R_B(BB) + R_C(CB) + F_D(DB) = 0$$

$$\Rightarrow 160R_C - 235F_D + 75F_A = 0 \quad (\text{IV.8})$$

A partir de ces équations d'équilibre, on retrouve:

$$R_B = R_C = F = 154,5 \text{ N} \quad (\text{IV.10})$$

Le moment fléchissant entre A et B est

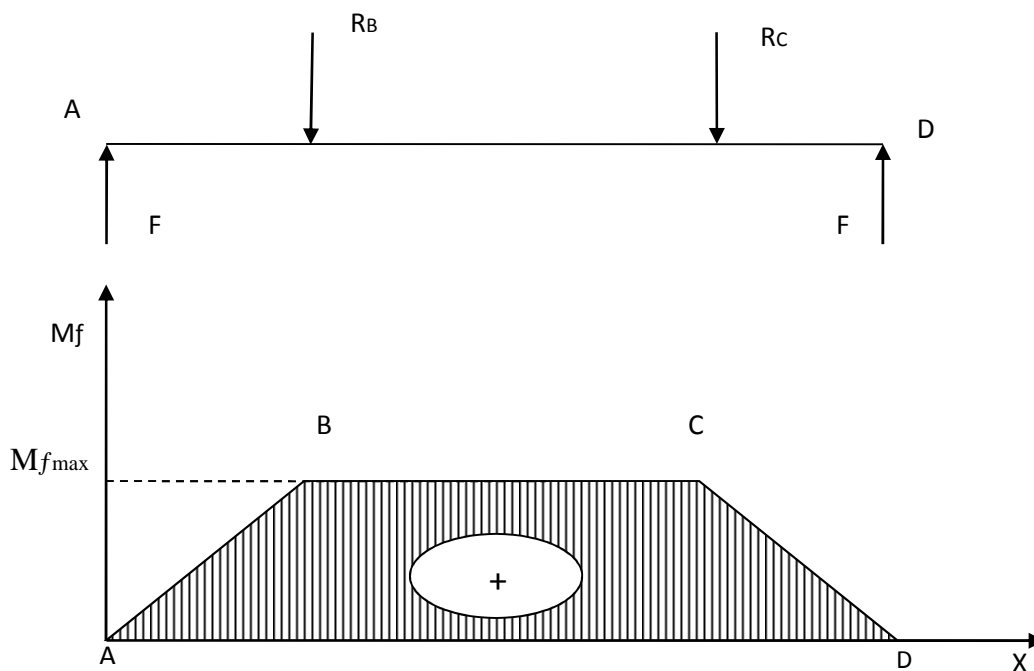
$$M_f = F \cdot x \quad (\text{IV.11})$$

Le moment fléchissant entre B et C est

$$\left\{ \begin{array}{l} M_f = F \cdot x - R_B (x - 75) \\ M_f = F \cdot x - F \cdot x + 75 \cdot F \\ M_f = 75 \cdot F \end{array} \right. \quad (\text{IV.12})$$

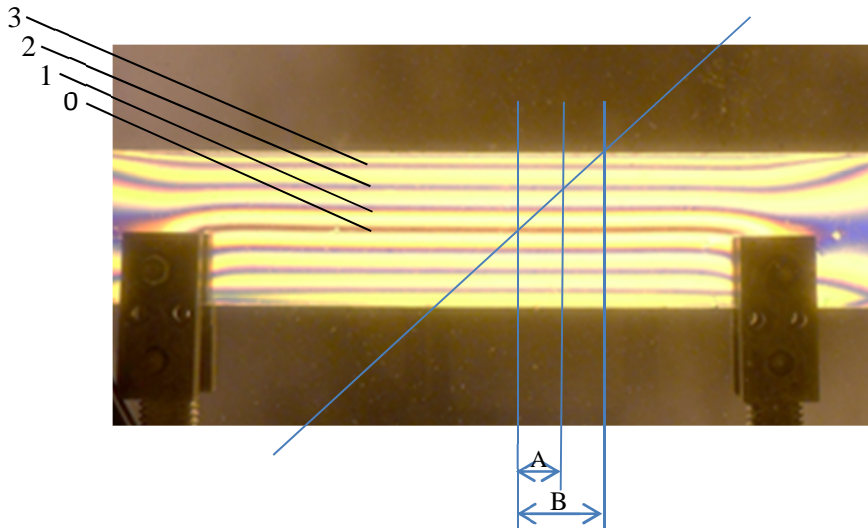
De (IV.11) et (IV.12), on déduit le moment maximum :

$$M_f = 11587,5 \text{ N.mm}$$



**Figure IV.5:** Diagramme du moment fléchissant

Après application des efforts, on relève sur la largeur de la poutre l'ordre de frange  $N^*$  correspondant au moment fléchissant appliqué sur le modèle.



**Figure IV.6:** Relevé de l'ordre de frange au bord de l'éprouvette

Sachant que l'ordre de frange au niveau de la ligne neutre est égale à zéro, à une distance  $A$ , on a l'ordre de frange égale à 2, l'ordre de frange  $N$  au bord de l'éprouvette, à une distance  $B$  sera donné avec :  $N=2 (B/A)$

En mesurant les distances  $A$  et  $B$  à partir de la figure IV.6, on aura le rapport  $(B/A)$  égale à 2, ce qui donne  $N=4$

$$N=N^*/2 \quad (\text{IV.13})$$

En substituant (IV.13) dans (IV.6) on aura :

$$f = \frac{12M_f}{h^2 N^*} \quad (\text{IV.14})$$

Appelons celle-ci  $f_1$  faisant l'application numérique :

$$h = 40 \text{ mm}$$

$$M_f = 11587,5 \text{ N. mm}$$

$$N^* = 8$$

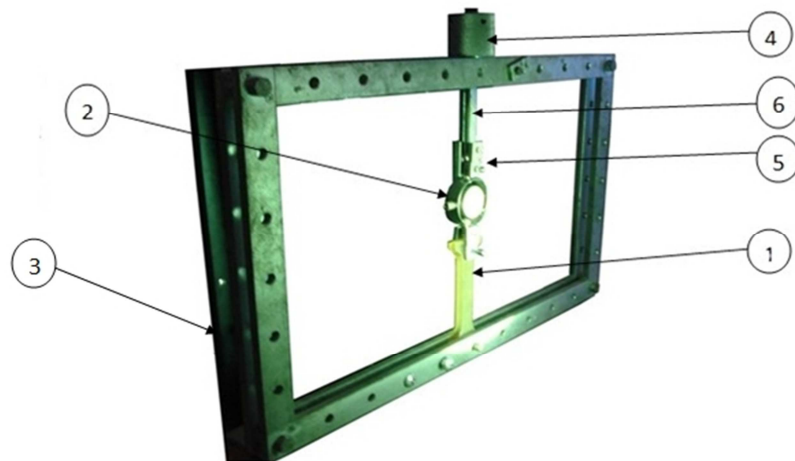
On trouve :

$$f_1 = 10,87 \text{ N/mm. Ordre}$$

#### IV.2.2.2. Deuxième méthode (essai de traction)

En utilisant un essai de traction, on détermine l'ordre de frange correspondant à chaque charge appliquée, le graphe  $F = f(N)$  permet alors de déterminer la valeur de la constante de frange  $f$

### Dispositif de chargement en traction



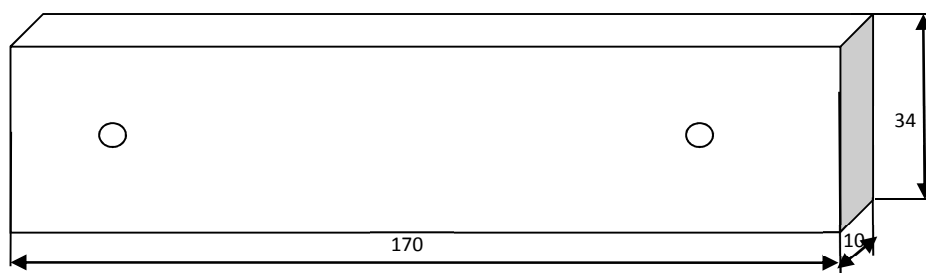
**Figure IV.7:** Dispositif de chargement en traction

#### Les composants du dispositif

1. modèle ou éprouvette d'essai
2. dynamomètre
3. cadre de charge
4. écrou : élément sur lequel on exerce l'effort
5. Plaque de liaison
6. Tige filetée

#### Modèle utilisé

On a utilisé une éprouvette en matériau biréfringent.



**Figure IV.8:** Eprouvette utilisée en traction

#### Procédure et principe

Les conditions de travail sont les mêmes que celles de la première méthode. En augmentant progressivement la charge  $F$ , on peut observer une alternance de franges, claire et obscure recouvrant la surface du modèle.

Les franges noires correspondent aux ordres de frange non entiers lorsqu'on travaille en champ clair et aux ordres de frange entier lorsqu'on travaille en champ obscur.

Au premier chargement la lumière est éteinte on note l'ordre 0,5 la charge F est relevée sur le dynamomètre pour chaque état obscur de la pièce correspondant à un ordre de frange N. Une fois l'ordre  $N=3,5$  estimé suffisant est atteint, on décharge progressivement l'éprouvette en relevant l'ordre de frange.

Cinq tests, de chargement et déchargement, ont été réalisés afin d'avoir une moyennes des charges avec une meilleure approximation. Le graphe  $F = f(N)$  de la figure IV.10 permet alors de calculer la constante de frange.



**Figure IV.9:** Eprouvette chargée en traction

### Résultats obtenues

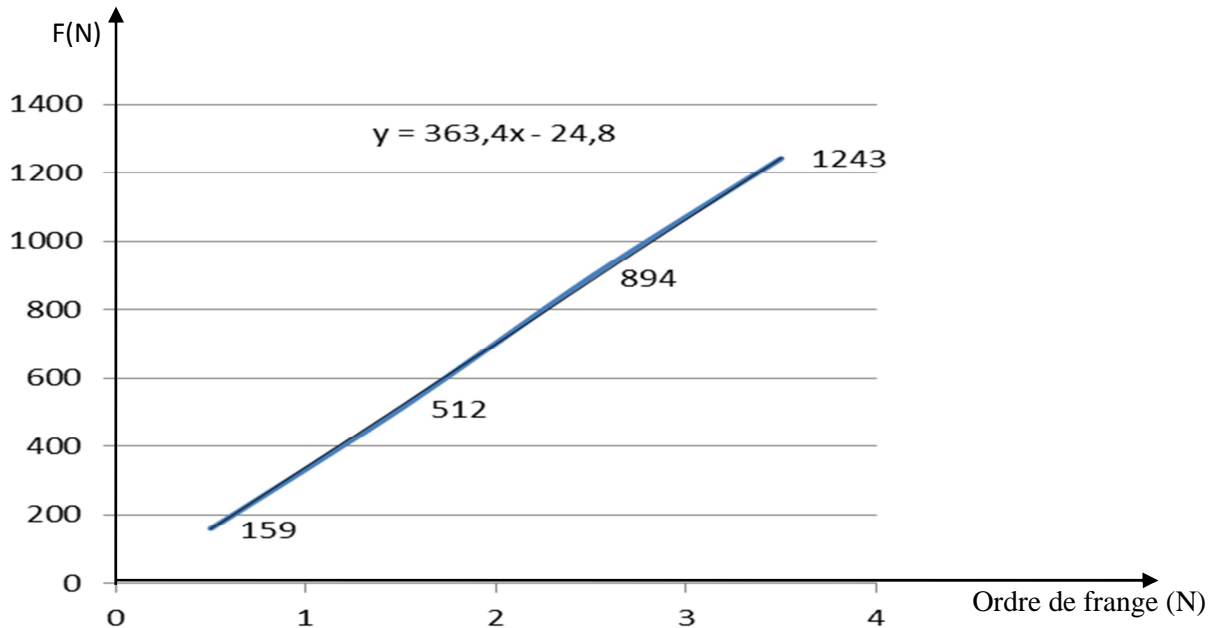
Le tableau ci-dessous regroupe l'ensemble des valeurs de la charge F relevées lors du chargement de l'éprouvette en traction.

Ordre (N)		0.5	1.5	2.5	3.5
Essais de chargement et déchargement (la charge en newton)	Essai 1	149.64	513.07	929.94	1214.98
		181.71	463.19	880.06	1214.98
	Essai 2	210.21	513.07	887.18	1257.73
		178.15	570.08	962.01	1257.73
	Essai 3	128.26	534.45	865.80	1231.79
		156.77	534.45	872.93	1232.79
	Essai 4	149.64	523.61	880.06	1247.05
		142.52	498.82	862.24	1247.05
	Essai 5	131.83	548.70	912.12	1264.86
		163.89	520.19	890.75	1264.86
Moyenne des charges (N)		159.26	521.97	894.31	1243.48

**Tableau IV.1:** Valeurs de la charge F en fonction de l'ordre de frange

### Evolution de la charge en fonction de l'ordre de frange

D'après le graphe ci-dessous, on détermine l'évolution de l'effort  $F$  en fonction de l'ordre de frange  $N$  en traçant le graphe  $F = f(N)$ .



**Figure IV.10 :** Graphe de l'effort moyen appliqué en fonction de l'ordre de frange

Les valeurs des charges appliquées permettent de construire le graphe de  $F = f(N)$ . On constate que la variation de la charge  $F$  avec  $N$  est linéaire, l'équation de la droite est :

$$F = 363,4x - 24,8 \quad (\text{IV.15})$$

La pente de cette droite est :

$$\text{tg}\alpha = \frac{F}{N} = 363,4 \quad (\text{IV.16})$$

D'après la formule de MAXWELL :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e} \quad (\text{IV.17})$$

Avec :  $\sigma_2 = 0$  (l'éprouvette est soumise uniquement à la traction)

On aura :

$$\sigma_1 = \frac{N \cdot f}{e} \quad (\text{IV.18})$$

D'autre part :

$$\sigma_1 = \frac{F}{s} = \frac{F}{e \cdot L} \quad (\text{IV.19})$$

De (eq IV.16) et (eq IV.18) on obtient :

$$f = \frac{\text{tg}\alpha}{L} \quad (\text{IV.20})$$

Appelons celle-ci  $f_2$  et faisons l'application numérique :

$L = 34 \text{ mm}$

$\text{tg}\alpha = 363,4$

On aura :

$$f_2 = \frac{\text{tg}\alpha}{L} = \frac{363,4}{34} = 10,68 \text{ N/mm. ordre}$$

On adopte la valeur moyenne des deux constantes de frange :

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Application numérique :

$$f = \frac{10,87 + 10,68}{2} = 10,77$$

$$f = 10,77 \text{ N/mm. ordre}$$

### IV.3. Analyse expérimentale des contraintes

Pour mesurer expérimentalement les contraintes agissant sur les dents de l'engrenage, on opte pour la méthode photoélasticimétrie.

#### IV.3.1. La variation de la contrainte de cisaillement maximale suivant l'axe [AB]

Pour la détermination de la variation de la contrainte de cisaillement maximale, on doit d'abord visualiser le réseau d'isochromes sur le polariscope, ici en lumière monochromatique et en champs clair. Après détermination des ordres de franges, la loi de Maxwell peut être alors utilisée pour déterminer l'intensité des contraintes. On définit un segment [AB] à partir du point de contact du modèle, où A désigne le point du contact et B un point du bord. Rappelons qu'en photoélasticimétrie :

-la différence des contraintes principales est donnée par la relation de MAXWELL :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N.f}{e}$$

-la contrainte de cisaillement maximale est donnée par la relation suivante :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

On aura donc à partir des relations ci-dessous :

$$\tau_{max} = \frac{N.f}{2.e}$$

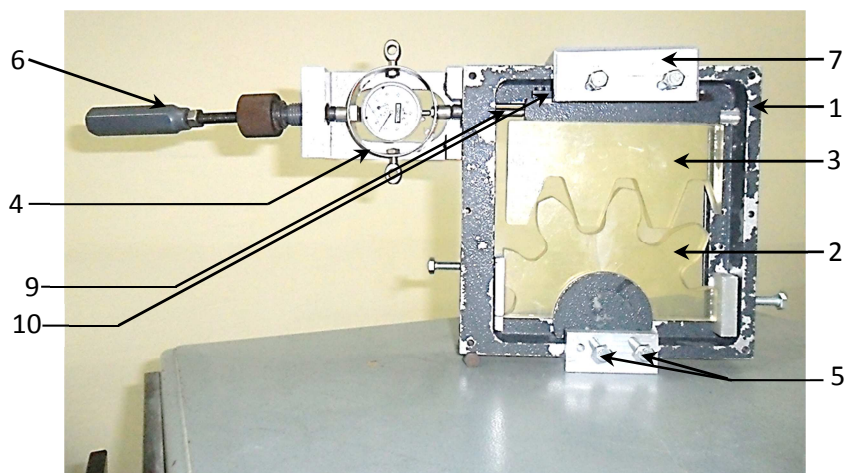
e : étant l'épaisseur du modèle:  $e = 10 \text{ mm}$

On a calculé à l'aide des relations données, les valeurs de  $\tau_{max}$  en un nombre déterminé de points pris sur le segment [AB]. En effet ces points sont repérés au niveau des intersections du segment [AB] avec les franges isochromes.

L'abscisse X et l'ordre de frange N sont relevés en chacun de ces points. Ces valeurs sont portées sur des tableaux à partir desquels seront tracés les graphes de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximale le long du segment [AB].

### IV.3.2. Procédure

Le contact d'engrènement est assuré en faisant tourner la poignée de chargement (6); ce dernier pousse le dynamomètre pour faire coulisser la crémaillère sur un rail à travers le poussoir (10). Le pignon étant fixe, la crémaillère pousse ce dernier en créant un contact entre eux. L'effort appliqué est récupéré directement sur le dynamomètre (4).



**Figure IV.11:** Dispositif de chargement pour l'essai de contact pignon-crémaillère

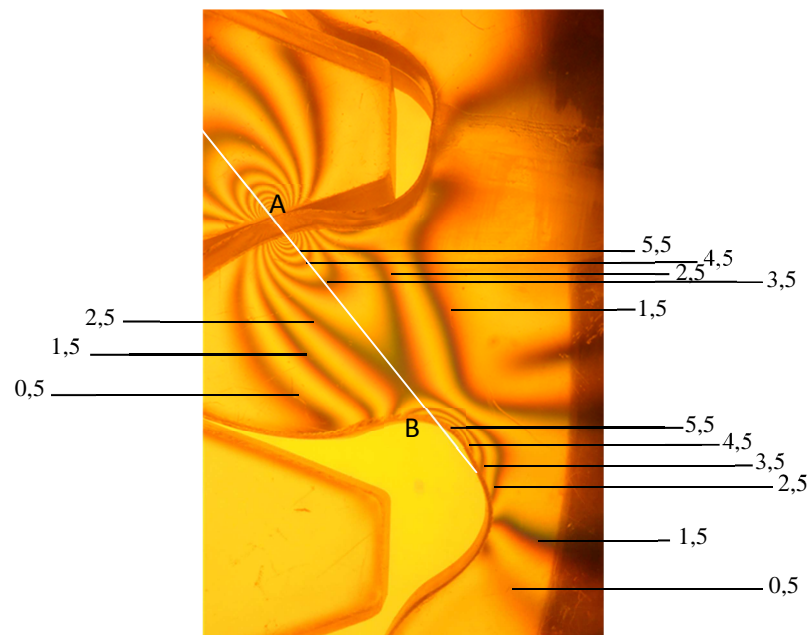
#### Les composants du dispositif

1. corps de charge
2. pignon
3. crémaillère
4. dynamomètre
5. vis de fixation des plaques sur le corps de chargement
6. poigné de chargement
7. plaques de fixation de la crémaillère et du pignon
9. poussoir
10. rail

Sous une lumière monochromatique, on observe sur le polariscope, le réseau de frange isochromes pour le modèle décrit sur la figure IV.11. Sur cette figure, nous relevons les valeurs de l'ordre de frange  $N$  correspondant à chaque frange.

### IV.3.3. Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair

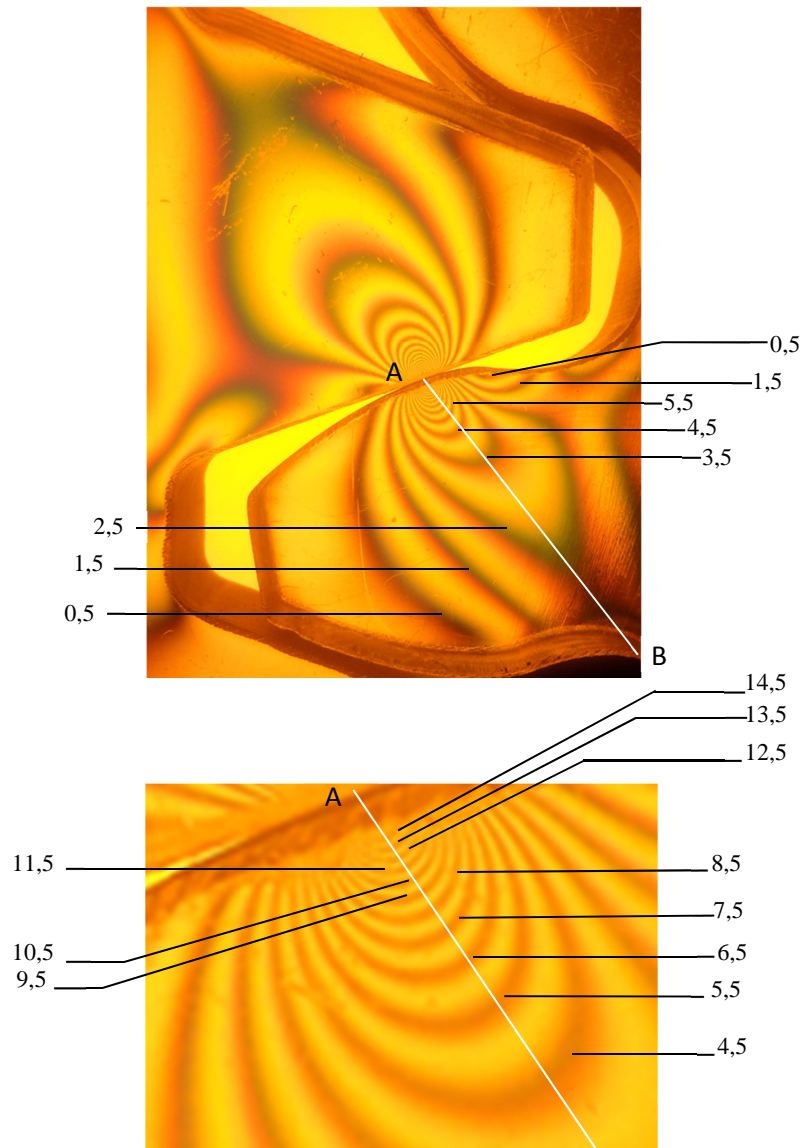
Après chargement du modèle en lumière monochromatique polarisée circulairement, les franges isochromes en champ clair peuvent être distinguées et repérées par leur ordre d'apparition (fig.IV.12 et fig.IV.13). Nous pouvons compter les franges par demi-ordre croissant, jusqu'à 14,5 au voisinage du contact, et jusqu'à 5,5 au pied de la dent sur le bord travaillant en compression.



**Figure IV.12:** Réseau d'isochromes observé sur le polariscope

Les franges au voisinage du contact sont difficiles à distinguer, ce qui nous amène à agrandir cette zone pour pouvoir repérer ces franges (fig.IV.13).

Les autres franges peuvent ensuite être repérées sur toute la surface du modèle, ces valeurs sont portées sur un tableau à partir duquel on trace le graphe de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximale.



**Figure IV.13:** Réseau d'isochromes observé sur le polariscope

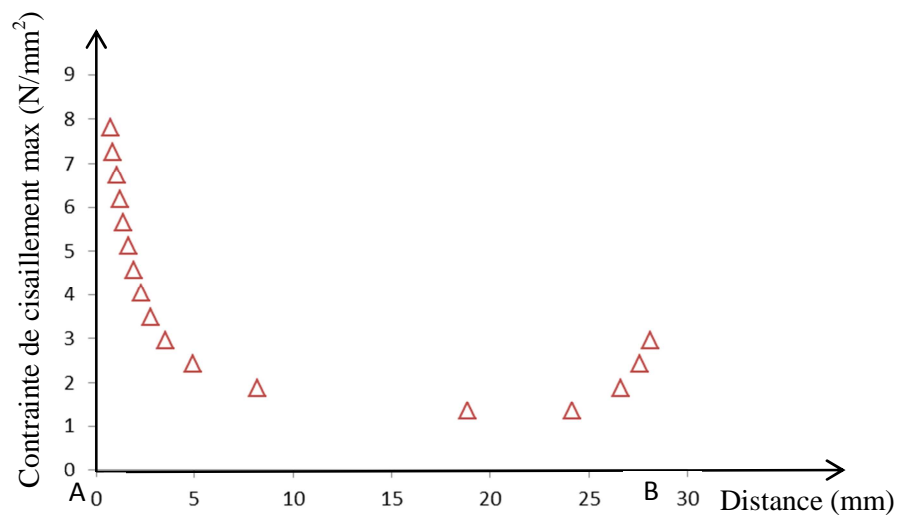
#### IV.4. Calcul de la valeur de $\tau_{\max}$ suivant le segment [AB]

A l'intersection du segment [AB] avec les franges isochromes, on relève les distances correspondantes par rapport au point de contact [A]. Ces valeurs sont portées sur un tableau à partir duquel on trace le graphe de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximale.

Ordre de franges (N)	Distance (mm)	Contrainte de cisaillement maximale $\tau_{\max}$ (MPa)
14,5	0,75	7,808
13,5	0,89	7,269
12,5	1,07	6,731
11,5	1,25	6,192
10,5	1,43	5,654
9,5	1,67	5,115
8.5	1,94	4,577
7.5	2,29	4,038
6.5	2,77	3,5
5.5	3,52	2,961
4.5	4,95	2,423
3.5	8,18	1,884
2.5	18,86	1,346
2.5	24,15	1,346
3.5	26,6	1,884
4.5	27,55	2,423
5.5	28,12	2,961

**Tableau IV.2:** Valeur de  $\tau_{\max}$  relevées suivant le segment [AB]

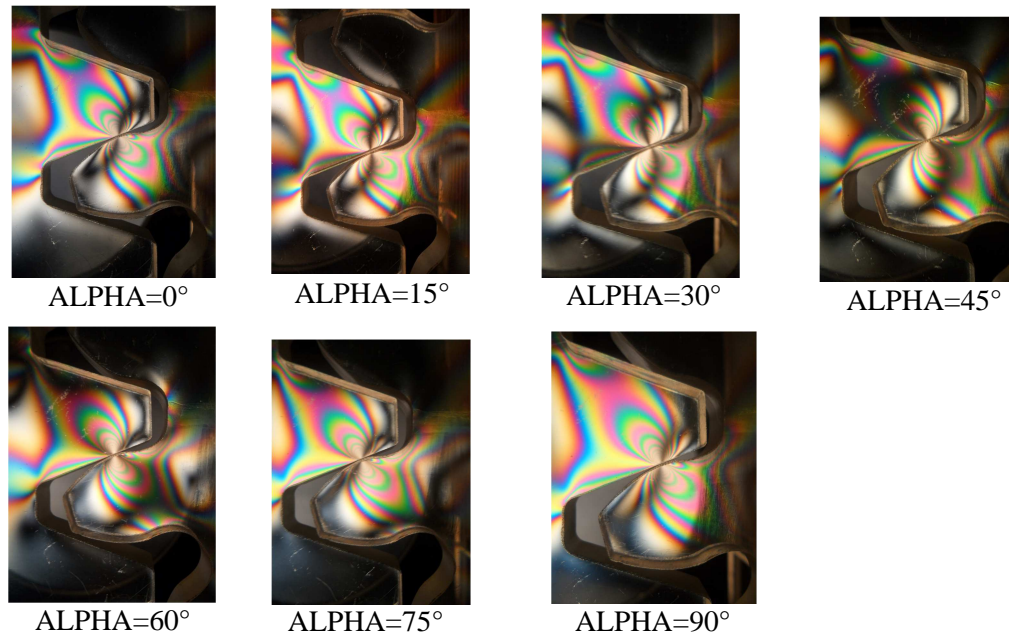
A chaque ordre de frange, l'ordre de N correspond à une valeur de la contrainte de cisaillement maximale donnée en valeur absolue ( $\tau_{\max} \geq 0$ ).



**Figure IV.14:** Evolution de  $\tau_{\max}$  relevée expérimentalement le long de la droite AB

### IV.5. Les franges isoclines

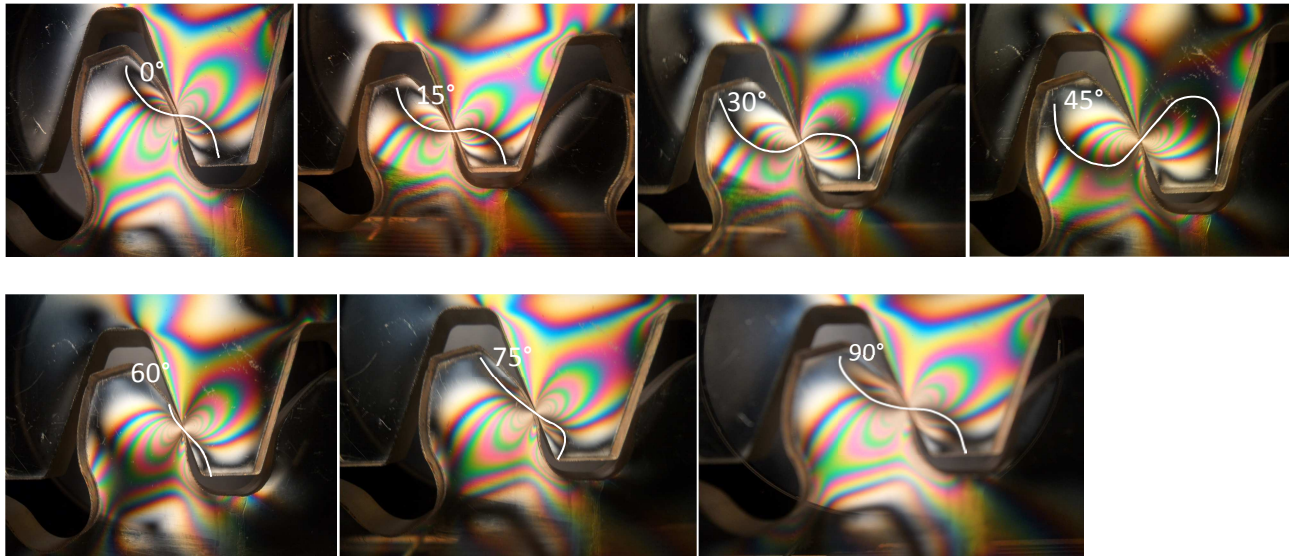
En faisant tourner les deux polaroids simultanément on visualise les différentes franges isoclines (fig.IV.15) qui apparaissent pour chaque valeur d'angle de rotation, les franges isoclines apparaissent sous forme de franges obscures sur les images en fonction de la position des polaroids.



**Figure IV.15:** Relevée des isoclines par rotation par pas de 15 degrés

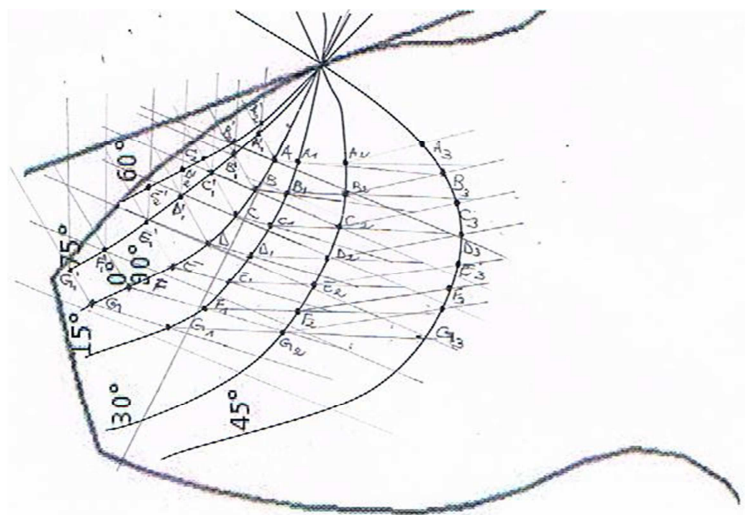
#### IV.5.1. Exploitation des isoclines pour tracer les isostatiques

L'exploitation des isoclines permet de déterminer les directions principales des contraintes. On peut tracer les trajectoires des contraintes principales appelées aussi isostatiques à partir de la connaissance des isoclines. Les tracés en blanc (fig.IV.16) représentent la localisation de chaque isocline correspondant à l'angle de rotation des deux polaroids, qui dans ce cas correspond à un pas de 15 degrés.



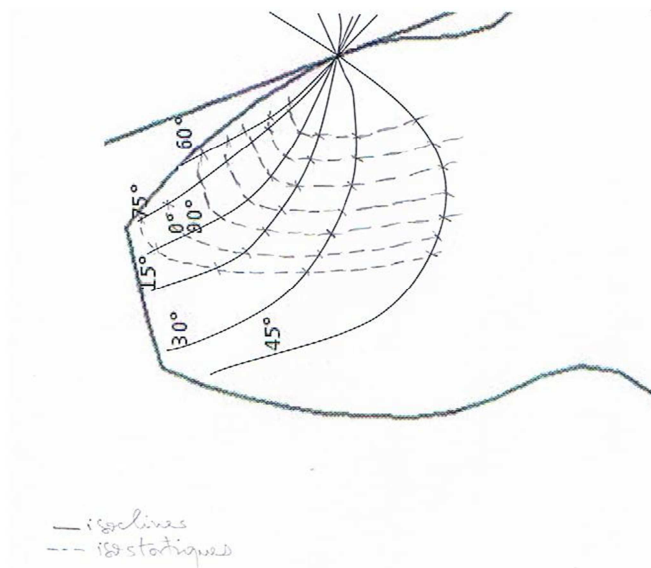
**Figure IV.16:** Localisation des isoclines correspondant aux directions principales

On rassemble d'abord toutes ces isoclines sur la même figure (Fig.IV.17). Les trajectoires des isostatiques débutent par des points arbitrairement espacés A, B, C, D, E sur l'isocline correspondant à  $0^\circ$ . A partir de ces points on trace des lignes orientées des droites inclinées de  $((\theta_1 + \theta_2)/2)$  ainsi suite par rapport à la normale. Les lignes coupent l'isocline suivante correspondant à  $15^\circ$  en A', B', C', D', E'...etc. à partir de ces nouveaux points, on trace des nouvelles lignes inclinées de  $((\theta_2 + \theta_3)/2)$  par rapport à la normale. On répète cette opération jusqu'à ce que le champ entier soit couvert.



**Figure IV.17:** tracés des points par lesquels passeront les isostatiques à partir des isoclines

La figure IV.18 représente les isoclines et les isostatiques tracées manuellement.



**Figure IV.18:** Les isoclines et les isostatiques pour le contact d'engrenage

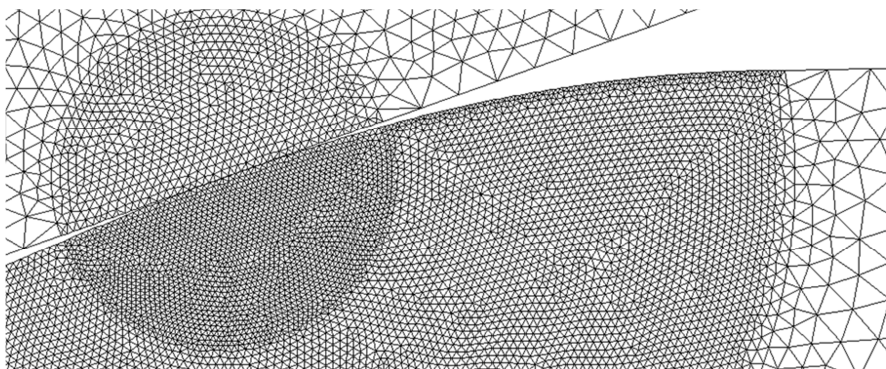
#### IV.6. Analyse numérique des contraintes

Pour la méthode numérique, on calcule les contraintes agissant sur les dents d'engrenage du modèle à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis Castem 2000.

##### IV.6.1. Calcul des champs de contraintes à l'aide du logiciel CASTEM 2000

Une étude par éléments finis conduite à l'aide du logiciel CASTEM a été utilisée pour obtenir le champ des contraintes développé dans le contact d'engrènement. La simulation du contact a été réalisée à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM, elle est basée sur la configuration du montage expérimentale.

Dans le calcul par éléments finis on a considéré le comportement du modèle isotrope purement élastique.

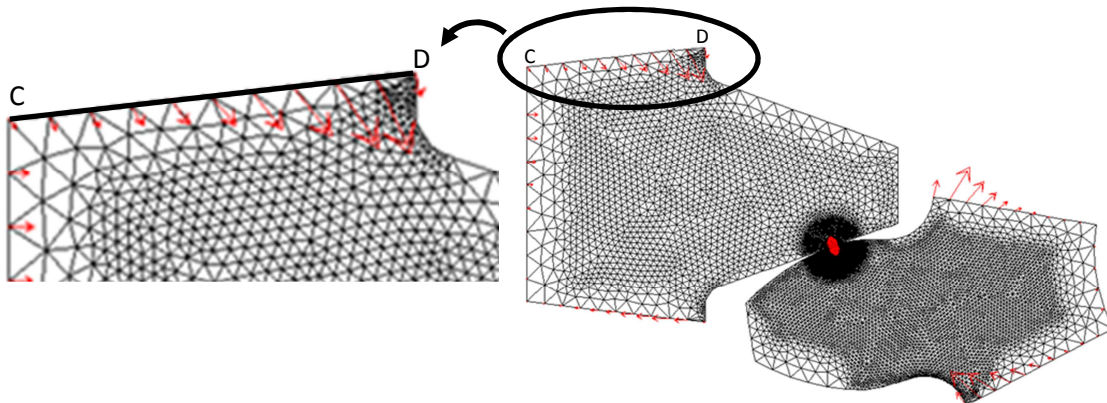


**Figure IV.19:** Représentation de la surface maillée

Le maillage du modèle pour le calcul numérique a été raffiné au voisinage de la zone de contact et aux pieds des dents pour avoir une meilleure représentation des franges. Le module de Young et le coefficient de Poisson du modèle sont introduits dans le programme. Dans le contact entre dents d'engrenages il est plus facile d'imposer un déplacement pour réaliser un contact qu'un effort imposé.

Dans le programme on a choisi l'opérateur (DEPI); qui permet de déplacer la crémaillère uniquement suivant  $y$ . En revanche la dent du pignon est bloquée en rotation et en déplacement. L'opérateur (IMPO) permet de créer un contact entre les dents de la crémaillère et du pignon, ce qui engendre des efforts.

La valeur des efforts verticaux correspondant au déplacement imposé sur le segment [CD] est extraite sur ce dernier. La figure V.20 représente l'ensemble des réactions dues aux sollicitations imposées dans l'engrenage.



**Figure V.20:** Représentation des réactions sur l'ensemble pignon-crémaillère

Le logiciel permet de récupérer les nœuds sur le segment [CD] pour extraire les efforts et leurs sommations: L'effort du premier nœud ( $i=1$ ) est récupéré, puis l'effort du second nœud ( $i=2$ ) qui sera additionné à celui du nœud précédent. Cette opération est répétée jusqu'au dernier nœud où il affiche la valeur de l'effort total appliqué, qui est de 27,1 N (fig.IV.21).

```

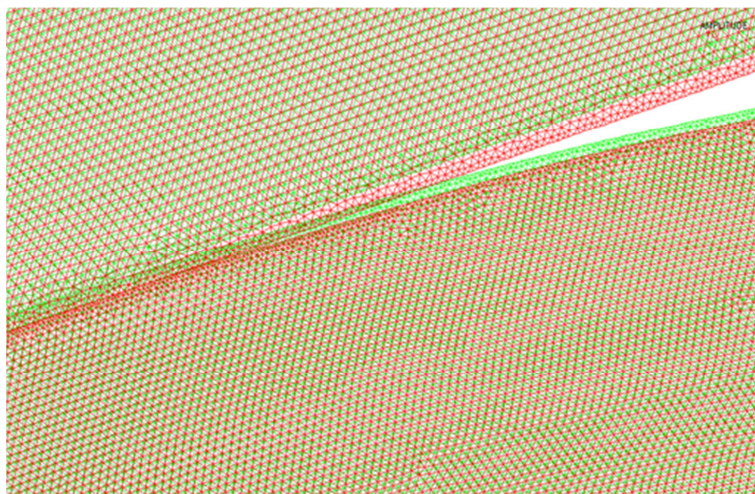
Sélectionner castem11 C:\Users\Mustapha\Desktop\CREMAIL 1 clair.dgibi
$ * LISTE EffV.i;
Ruel valant: -0.64020
$ * FIN BlocFor;
Ruel valant: -1.1423
Ruel valant: -1.2860
Ruel valant: -1.4605
Ruel valant: -1.7603
Ruel valant: -2.1890
Ruel valant: -2.7760
Ruel valant: -3.6617
Ruel valant: -4.9503
Ruel valant: -5.5823
Ruel valant: -1.8094
* Seff = TAB2;
* Seff.i = EffV.i;
* Poill = TAB2;
* Poill.i = PeC.i;
* i = i + 1;
* REPETER BlocSef < n - 1>;
* i = i + 1;
* seffV = Seff.i + EffV.i;
* Seff.i = seffV;
* FIN BlocSef;
* LIST seffV;
Ruel valant: -27.159

```

**Figure IV.21:** Extraction des efforts correspondant au déplacement imposé

Cette valeur correspond approximativement à la charge imposée par unité d'épaisseur pendant l'étude expérimentale qui est de  $271/10=27,1$  N. Sachant que 10 mm est l'épaisseur du modèle.

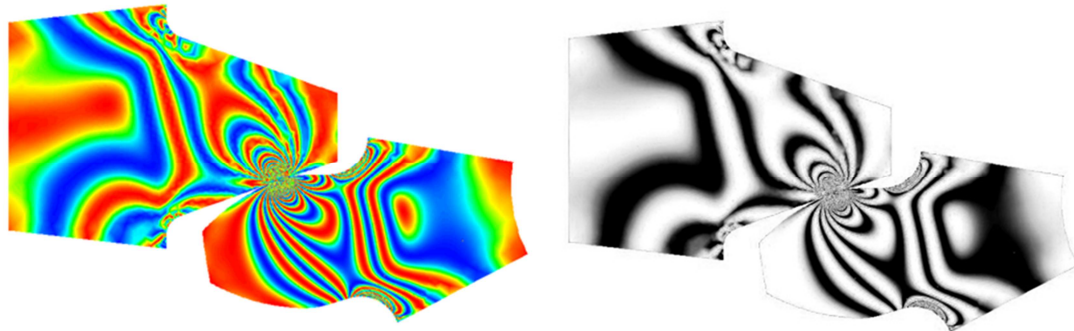
Le logiciel CASTEM permet de construire la déformée de la structure à partir de la géométrie initiale et du champ de déplacement, le maillage initial en couleur verte et la déformée en couleur rouge.



**Figure IV.22:** Représentation de la déformée

#### IV.6.2. Visualisation des franges isochromes

La figure VI.23a représente les franges isochromes en champ clair obtenues à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM. Elles sont tracées avec une échelle de couleur dont le bleu correspond aux franges noires relevées sur le polariscope et le rouge correspond aux franges claires. La figure IV.23b représente les franges isochromes simulées et traitées avec Photoshop. Les franges isochromes en champ clair représentent le terme  $(1-\sin^2\varphi/2)$ .



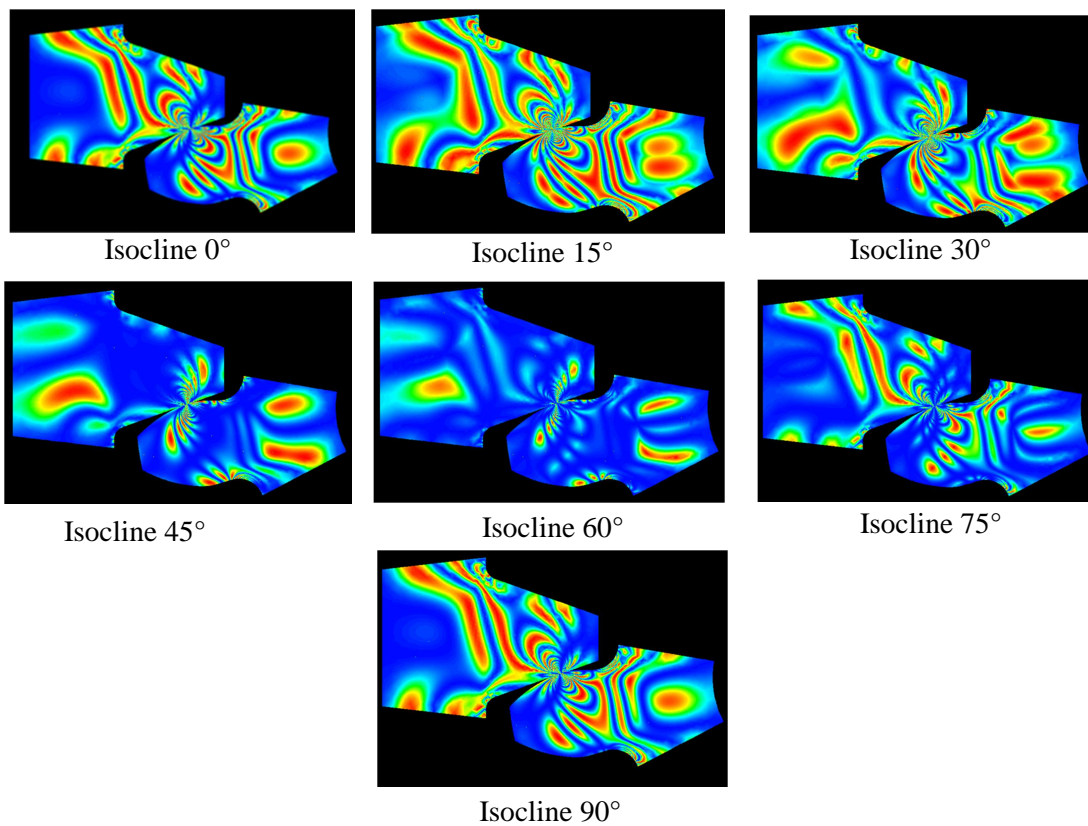
(a) Franges isochromes

(b) Franges isochromes traitées avec Photoshop

**Figure IV.23:** Les franges isochromes simulées en champ clair

### IV.6.3. Visualisation des isoclines

Le programme donne la valeur de  $\sin^2 2\alpha$  en chaque point du modèle; ce qui permet de tracer les isoclines correspondant à  $\sin^2 2\alpha = 0$ . On simule la rotation des polaroids en augmentant successivement l'angle isocline  $\alpha$  de 15 degrés. La figure IV.24 représente les différentes franges isoclines obtenues pour les différentes valeurs de l'angle isocline  $\alpha$ .



Isocline 0°

Isocline 15°

Isocline 30°

Isocline 45°

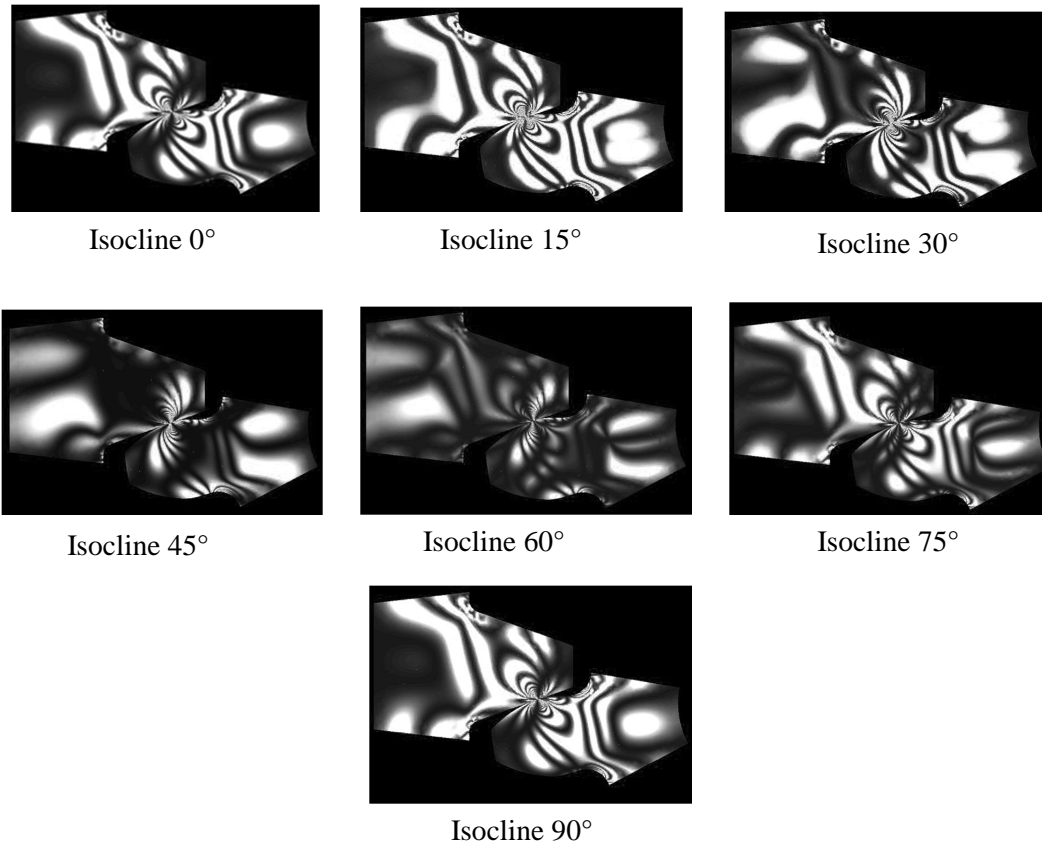
Isocline 60°

Isocline 75°

Isocline 90°

**Figure IV.24:** Tracés des isoclines par pas de 15 degrés

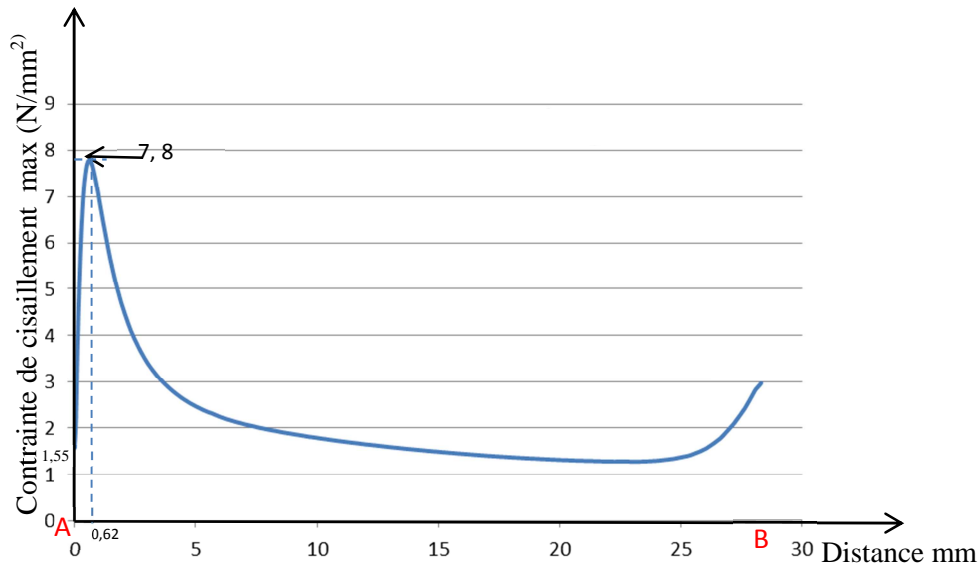
Pour une meilleure comparaison des isoclines obtenues par la méthode des éléments finis et la méthode expérimentale, les isoclines obtenues à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM sont traitées grace au logiciel photoshop pour obtenir les franges en noir et blanc (fig.IV.25).



**Figure IV.25:** Isoclines traitées avec Photoshop

#### **IV.6.4. La variation de la contrainte de cisaillement maximale le long de la droite [AB]**

Le graphe de la variation de la contrainte de cisaillement maximale le long de la droite [AB] est représenté sur la figure IV.26.



**Figure IV.26:** Evolution de  $\tau_{\max}$  relevée numériquement le long de la droite AB

La variation de la contrainte de cisaillement maximale suivant l'axe [AB] est donnée dans la figure VI.26. On constate que la contrainte au milieu de la zone de contact n'est pas nulle à l'origine, mais elle prend une valeur de 1,55 MPa puis augmente progressivement jusqu'à une valeur de 7,8 MPa à une distance de 0,62 mm puis diminue progressivement et une autre fois augmente au niveau du pied de la dent (contrainte due à la flexion de la dent).

Afin de comprendre comment le programme a été effectué, on a décidé à travers le modèle, d'expliquer les différentes étapes suivies dans le programme CASTEM en présentant le calcul dans l'annexe.

## IV.7. Comparaison des résultats

### IV.7.1. Superposition des courbes

Une première comparaison peut se faire par la superposition de la courbe numérique et les points relevés expérimentalement. La figure IV.27 montre que les deux graphes se rapprochent et qu'il y a une bonne concordance des résultats.

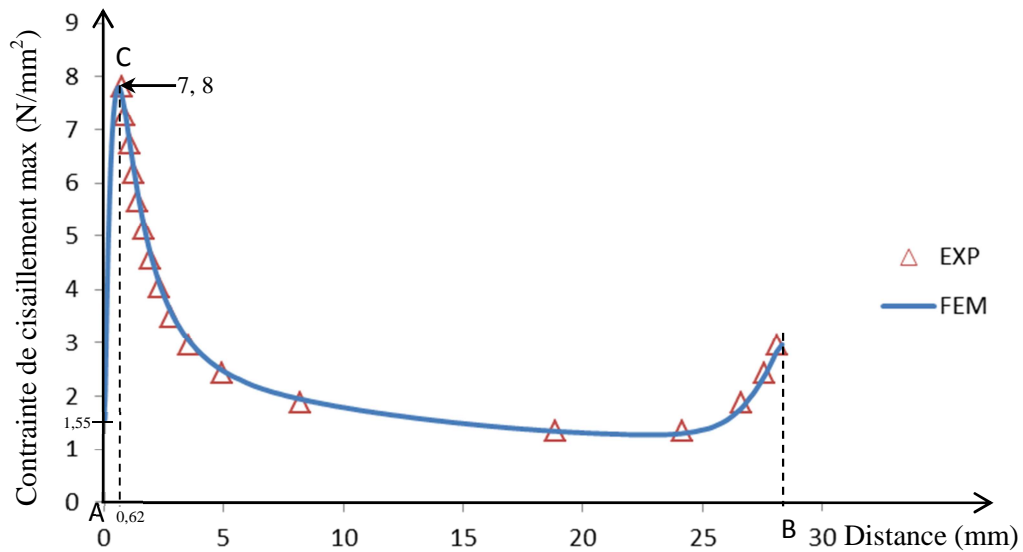


Figure IV.27: Superposition des graphes numériques et expérimentaux

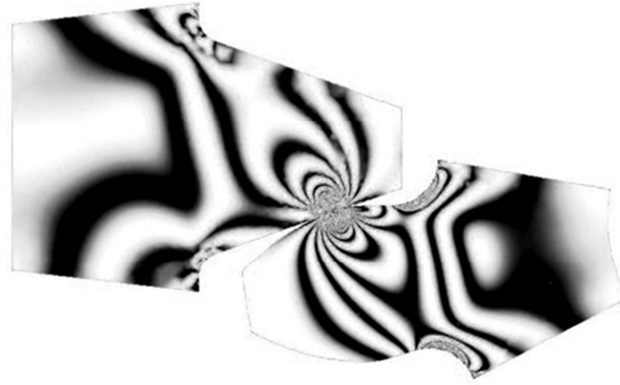
#### IV.7.2. Réseau d'isochromes

Les images relevées expérimentalement sont comparées avec les images calculées numériquement avec CASTEM et traitées à l'aide du logiciel photoshop.

D'après les figures (IV.28, IV.29) on voit que ces images obtenues expérimentalement sont comparables avec les images obtenues sous CASTEM et traitées avec photoshop.



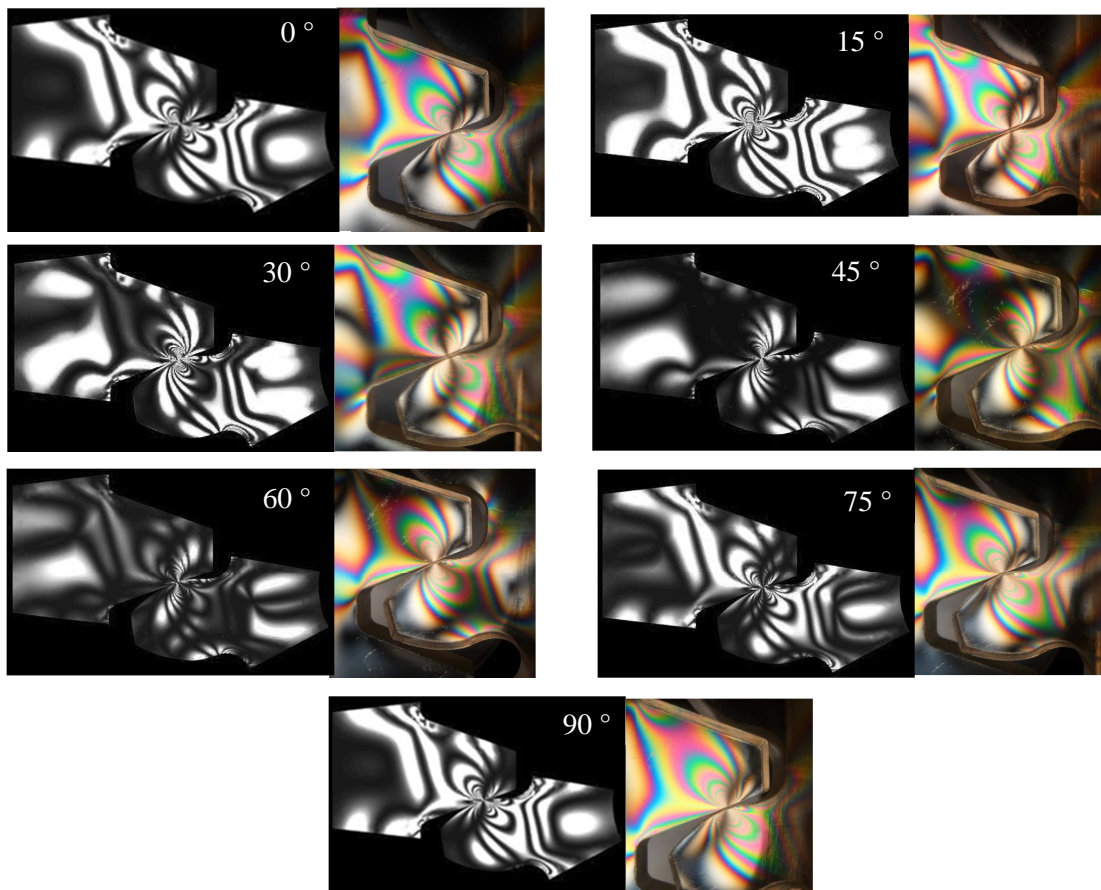
Figure IV.28 : Isochromes relevées expérimentalement



**Figure IV.29:** Isochromes simulées à l'aide du logiciel CASTEM2000 traitées avec photoshop

### IV.7.3. Comparaison des isoclines

Les franges isoclines obtenues numériquement peuvent être comparés aux franges isoclines obtenues par la photoélasticimétrie (fig.IV.30).



**Figure IV.30:** Superposition des isoclines obtenues numériquement et traitées avec Photoshop avec leurs correspondantes obtenues expérimentalement

Pour la comparaison des isoclines obtenues numériquement et expérimentalement pour les différentes rotations de l'angle  $\alpha$ , la partie sombre de chaque image correspond à l'isocline, zone où l'une des directions principales est parallèle à l'un des axes des polaroids.

La figure IV.30, représente la superposition des isoclines obtenues numériquement et traitées avec le logiciel Photoshop (à gauche de chaque image) avec les isoclines correspondantes obtenues expérimentalement (à droite de chaque image). On remarque qu'il est impossible de séparer le réseau isochrome du réseau isocline dans les images obtenues expérimentalement. On remarque que les isoclines sur la partie gauche et la partie droite de chaque image sont semblables.

#### **IV.8. Discussion des résultats**

En pratique, en champs clair, la couleur noire qui représente les franges isochromes correspond au bleu sur les figures données par Castem.

Pour le modèle, les différents réseaux d'isochromes relevés expérimentalement peuvent être comparés directement au réseau obtenu numériquement.

##### **IV.8.1. Discussion sur les tracés de l'évolution de $\tau_{\max}$**

La figure IV.27 représente une superposition des deux courbes (expérimentale et numérique), Ces courbes sont obtenues par les tracés de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximale ( $\tau_{\max}$ ) suivant un segment [AB].

Nous pouvons remarquer que les deux courbes ont presque la même allure. Il existe une bonne concordance des résultats sauf dans certaines zones, notamment au voisinage du point de contact où il est difficile de relever les ordres de franges expérimentaux.

Nous constatons que  $\tau_{\max}$  est maximale au point (C), qu'on appelle point de Hertz, et diminue à mesure qu'on s'éloigne de ce point.

##### **IV.8.2. Discussion du point (A)**

La difficulté à repérer les franges au voisinage de la zone de contact (A) est liée à la qualité d'image, ce qui explique la non détermination de la contrainte  $\tau_{\max}$  au niveau de ce point sur la courbe expérimentale.

Nous pouvons constater sur les courbes numériques à une distance  $x=0,62$  qui correspond au point C, à partir du point (A), un pic correspond à une valeur élevée de  $\tau_{\max}$ . Ceci s'explique par la théorie de Hertz, pour un contact cylindre sur plan.

**IV.9. Conclusion**

Dans ce chapitre, on a utilisé la photoélasticimétrie 2D pour l'étude du contact dans un engrenage. On a déterminé le champ de contraintes développées dans le modèle. Pour valider les résultats numériques, une analyse expérimentale des champs de contraintes à l'aide de la photoélasticimétrie a été faite. Principalement; on a montré que les franges isochromes et isoclines sont similaire aux réseaux des franges obtenues numériquement. Une autre comparaison a été faite entre les graphes de la variation de la contrainte de cisaillement maximale le long d'une droite [AB]. Les résultats obtenus ont révélé relativement une bonne concordance entre les valeurs numériques et expérimentales.

## Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire est une initiation à la recherche dans le domaine de l'analyse des contraintes dans les pièces mécaniques en contact. Le but principal étant de montrer qu'on peut traiter des problèmes complexes de contact à l'aide de codes de calculs éléments finis sans avoir recours à l'expérience qui prend beaucoup de temps et qui peut être coûteuse.

Après une recherche bibliographique traitant différents travaux réalisés sur le problème du contact mécanique, une étude des contraintes dans les engrenages sur un modèle pignon-crémaillère a été traitée expérimentalement à l'aide de la photoélasticimétrie et numériquement en utilisant la méthode des éléments finis.

La photoélasticimétrie qui est une méthode expérimentale non destructive d'analyse des champs de contraintes sur un modèle biréfringent, a permis de réaliser l'expérience sur un dispositif de chargement fabriqué au Hall de technologie. Ce dispositif a permis d'appliquer des charges entre une roue dentée et une crémaillère.

Le relevé des isochromes a permis de calculer la variation de la contrainte de cisaillement maximale le long d'un segment choisi à partir du point de contact. Les isoclines, franges relatives aux directions principales dans le modèle, ont servi à tracer les isostatiques qui sont les trajectoires des contraintes principales.

Grace au développement des codes de calcul par éléments finis, on a développé un programme de calcul contact pignon-crémaillère à l'aide du logiciel CASTEM, qui permet de simuler des franges isochromes et isoclines et aussi de déterminer la contrainte de cisaillement maximale.

En exploitant les résultats des deux méthodes, deux types de comparaison ont été faite:

La première en comparant les isochromes expérimentales et les isochromes simulées. La deuxième comparaison a été faite entre les valeurs de la variation de la contrainte de cisaillement maximale obtenues expérimentalement en exploitant les réseaux des isochromes et les valeurs des contraintes de cisaillement obtenues numériquement.

La comparaison des valeurs expérimentales et numériques montre qu'il existe une bonne concordance des résultats, sauf dans certaines zones, particulièrement au voisinage de la zone de contact où il est difficile de relever les ordres des franges dans l'étude expérimentale.

Comme perspective pour ce travail, on peut envisager de développer des programmes qui permettent de déterminer les contraintes dans les cas de contact tridimensionnel. La validation des résultats pourrait être obtenue en utilisant la méthode de figeage découpage mécanique, ou en utilisant la méthode de découpage optique.

## Références bibliographiques

- [1] M.A. Guler et F. Erdogan «Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings», *Mechanics of Materials* 38 (2006) 633–647.
- [2] HATEM MRAD «simulation probabiliste du problème de contact mécanique», université de QUÉBEC à CHICOUTIMI, Janvier 2009.
- [3] Philippe BUSSETTA «Modélisation et résolution du problème de contact mécanique et son application dans un contexte multi-physiques» université du QUÉBEC à CHICOUTIMI, février 2009.
- [4] Lior Kogut et Izhak Etsion «Elastic-Plastic Contact Analysis of a Sphere and a Rigid Flat», *Journal of Applied Mechanics*, september 2002, Vol. 69 (657-662).
- [5] Lior Kogut et Izhak Etsion «A Semi-Analytical Solution for the Sliding Inception of a Spherical Contact», *Journal of Tribology*, juillet 2003, Vol. 125 (499-506).
- [6] Robert L. Jackson et Itzhak Green «A Finite Element Study of Elasto-Plastic Hemispherical Contact Against a Rigid Flat», *Journal of Tribology*, avril 2005, Vol. 127 (343-354).
- [7] KHALFI Mehdi «optimisation des structures mécaniques : Forme optimale d'un composant», mémoire de magister université MENTOURI-CONSTANTINE 2009.
- [8] Ali Raad Hassan « Contact Stress Analysis of Spur Gear Teeth Pair», *World Academy of Science, Engineering and Technology* 58, 2009 (611-616).
- [9] CORINA OANCEA «Analyse des dents d'engrenages droits par la méthode des potentiels complexes», Université Laval Québec, canada 1997.
- [10] Konstandinos G. Raptis, Theodore N. Costopoulos and Georgios A. Papadopoulos «Rating of Spur Gear Strength Using Photoelasticity and the Finite Element Method», *American J. of Engineering and Applied Sciences* 3 (1): 2010 (222-231).
- [11] Zeping Wei « stresses and deformations in involute spur gears by finite element method», University of Saskatchewan Saskatoon, October 2004.
- [12] BILEK Ali «Méthode non destructive de découpage optique en photoélasticimétrie tridimensionnelle. Application au problème fondamental du contact », Thèse de doctorat d'état, Université de Tizi-Ouzou 2007.

- [13] Fabrice BRÉMAND « mesures en mécanique par méthodes optiques ». Technique de l'ingénieur, R1850, 2011.
- [14] BERDJANE Mohand Ouali «Etude du contact entre solides déformables: Expérimentation - modélisation », mémoire de master université de Tizi-Ouzou 2011.
- [15] R. L. Burguete and E. A. Patterson « A photoelastic study of contact between a cylinder and a Half-space », Experimental Mechanics, Vol. 37, Septembre 1997 (314-323).
- [16] Y. F. Cheng « A Dual-observation Method for Determining Photoelastic, Parameters in Scattered Light ». Experimental Mechanics. Mars 1967 (140-144).
- [17] Arnaud Germaneau, Pascal Doumalin et Jean-Christophe Dupré «Corrélation Volumique par Tomographie Optique et Photoélasticimétrie 3D pour l'étude des effets mécaniques tridimensionnels», 18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, août 2007 (27-31).
- [18] J. C. Dupré and A. Lagarde «Photoelastic Analysis of a Three-dimensional Specimen by Optical Slicing and Digital Image Processing », Experimental Mechanics, décembre 1997 (393-397).
- [19] D.BELLET-J.J.BARREAU « Cours d'élasticité ». Éditions cepadues 1990.
- [20] Denis Dartus « Elasticité linéaire ». CEPADUES-EDITIONS janvier 1995.
- [21] Charles BRUGGER, Paul ENJALBERT, Pierre SIMON « Photoélasticité ». septembre 2003.
- [22] Marie-Anne Le Dain «TP de Mécanique N° 2 en photoélasticimétrie ». Ecole nationale supérieure de génie industriel (ENSGI) ou Grenoble INP. 1ère année 1999-2000.
- [23] Dominique François, André Pineau et André Zaoui « Comportement mécanique des matériaux ». Éditions HERMES 1995.
- [24] Jaques Dufailly « Calcul de la capacité de charge des engrenages cylindriques de transmission de puissance ». Éditions marketing .S.A. 1998.
- [25] Gérald Zambelli, Léo Vincent « Matériaux et contacts ». Edition 1998, Presse Polytechniques et Universitaires Romondes.



## Programme Castem pour le contact pignon-crémaillère

### Programme et analyse de la solution proposée

#### a) début du programme

\*=====

\* **options**

\*=====

OPTI 'DIME' 2 'ELEM' 'SEG2' 'MODE' 'PLAN' 'CONT' ;

La directive **opti(on)** permet de déclarer les principaux paramètres du programme (Ex: dimension du problème, type d'éléments géométriques utilisés....).

#### b) géométrie du modèle

\*=====

\* **les points**

\*=====

E1= -55.12 -21.36;  
 E2= -93.28 29.92;  
 E3= -72.43 1.04;  
 P0=0. 0. ;  
 P1=-27.72 4.72;  
 P2=-55.45 9.44;  
 P3=-63.11 2.15;  
 P4=-67.14 2.06;  
 P5=-70.93 1.52;  
 P6=-73.97 0.43;  
 pp6=-77.34 -1.16;  
 P7=-87.20 -8.74;  
 P23=-63.00 9.69;  
 P45=-67.13 -11.70;  
 P56=-64.10 -22.25;  
 P67= -59.22 -34.93;  
  
 R1=-24.91 -13.05;  
 R2=-49.82 -26.11;  
 R3=-59.35 -21.55;  
 R4=-63.22 -22.70;  
 R5=-66.99 -23.37;  
 R6=-70.22 -23.27;  
 R7=-85.64 -18.62;  
 R23=-56.92 -28.69;  
 R45=-67.46 -9.61;

R56=-67.84 1.35;  
R67=-67.12 14.92;

S1=-124.40 31.48;  
S2=-94.20 34.98;  
S3=-94.20 31.98;  
S4=-91.40 28.68;  
S5=-61.40 17.98;  
S6=-61.40 4.98;  
SS6=-67.36 2.85;  
sss=-72.43 1.04;  
SS7=-77.50 -0.76;  
SS8=-74.65 5.94;  
S7=-91.40 -5.71;  
S8=-94.20 -9.01;  
S9=-94.20 -12.01;  
S10=-124.40 -8.51;

S34=-90.20 32.52;  
S78=-90.20 -9.56;

\*=====

**\* Les lignes**

\*=====

N =10;  
M =200;  
G =400;  
V = 100;  
L1 = D N P1 P2 ;  
L2 = CERC N p2 P23 p3;  
L3 = D N p3 p4;  
L4 = CERC M P4 P45 P5 ;  
L5 = CERC M p5 P56 p6;  
LL6= CERC M P6 P67 PP6;  
L6 = CERC N PP6 P67 P7;  
L8 = CERC 200 P4 E3 PP6;  
LIG1 = L1 ET L2 ET L3 ET L8 ET L6 ;

M1 = D N R1 R2 ;  
M2 = CERC N R2 R23 R3;  
M3 = D N R3 R4;  
M4 = CERC N R4 R45 R5 ;  
M5 = CERC N R5 R56 R6;  
M6 = CERC N R6 R67 R7;  
M7 = CERC N R7 P0 P7;  
M8 = CERC N R1 P0 P1;  
LIG2 = M1 ET M2 ET M3 ET M4 ET M5 ET M6 ET M7 ET M8;  
LIG22 = L8 ET LL6 ET L5 ET L4;  
CONT1 = LIG1 ET LIG2 ;  
CONT = CONT1 ET LIG22;  
TRAC CONT;

SURFA1 = SURF PLAN CONT1 ;  
 TRAC SURFA1;  
 SURFA2 = SURF PLAN LIG22;  
 TRAC SURFA2;

SURFACE1 = SURFA1 ET SURFA2;  
 TRAC SURFACE1;

Q1 = D N S1 S2;  
 Q2 = D N S2 S3;  
 Q3 = CERC N S3 S34 S4;  
 Q4 = D N S4 S5;  
 Q5 = D N S5 S6;  
 Q6 = D N S6 SS6;  
 QQ6 = D G SS6 SS7;  
 QQ7= D M SS7 S7;  
 Q7= CERC N S7 S78 S8;  
 Q8= D N S8 S9;  
 Q9= D N S9 S10;  
 Q10= D N S10 S1;  
 Q11= CERC V SS6 SSS SS8;  
 Q12= Q1 ET Q2 ET Q3 ET Q4 ET Q5 ET Q6 ET Q11 ET Q12 ET  
 QQ7 ET Q7 ET Q8 ET Q9 ET Q10 ;  
 LIG4 = Q11 ET Q12 ET QQ6;  
 CONT2=LIG3 ET LIG4 ;

CONT=CONT ET CONT2;  
 TRAC CONT;

\*=====

\* **maillage des surfaces**

\*=====

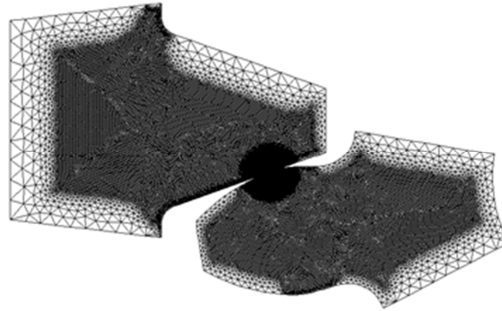
SURFAC1 = SURF PLAN LIG3;  
 SURFAC2 = SURF PLAN LIG4;  
 SURFACE2 = SURFAC1 ET SURFAC2;  
 SURFACE = SURFACE1 ET SURFACE2;  
 TRAC SURFACE;

- l'opérateur **surf(ace)** nous a permis de créer une surface à partir du contour fermé.
- l'opérateur **trac(er)** trace un objet de type maillage (ici la surface ). On peut lui associer l'option **qual(ification)** qui permet d'afficher les noms des objets visualisés en poste traitement.

\*=====

\* **Résultat après maillage du modèle**

\*=====



**Tracé de la surface (SURFACE)**

### C) Description du matériau / création de la rigidité / chargement

\*=====

\* **Choix du comportement**

\*=====

MO(DELE)=MODL SURFACE MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;

l'opérateur **mod(ele)** sert à définir un type de comportement et une formulation élément finis.

\*=====

\* **Données matériau**

\*=====

MATERIAU=MATR MODELE YOUN 3273 NU 0.37;

**Maté(riau)** sert à définir les propriétés physique du matériau (module de Young, coefficient de poisson,...) pour un modèle donné.

RIGID=RIGI MODELE MATERIAU;

L'opérateur **rigi(dité)** permet de construire la rigidité à partir du modèle et de ses caractéristiques.

\*=====

\* **Conditions aux limites**

\*=====

CL1=BLOQU DEPL L1;  
 CL2=BLOQU DEPL M1;  
 CL3=BLOQU DEPL M8;  
 CL4=BLOQU Q1 'UY';  
 CL5=BLOQU Q1 'UX';  
 CL6=BLOQU Q10 'UX';  
 CL7=BLOQU Q9 'UX';

CLTOT=CL1 ET CL2 ET CL3 ET CL4 ET CL5 ET CL6 ET CL7;

RI1=CLTOT ET RI;

L'opérateur **bloq(uer)** construit la rigidité. Qui sera ultérieurement à adjoindre à la rigidité de la structure.

\*=====

\* **(Forces/déplacements) imposés**

\*=====

\*La valeur du déplacement imposé est MM

MM = -0.102;

DEPL1 = 'DEPI' CL4 MM ;

'TITR' 'Déplacement imposé sur la dent 1' ;

'TRAC' ('VECT' (DEPL1 'NOMC' 'UY') 50. 'UX' 'UY' 'VERT')  
(SURFACE) ;

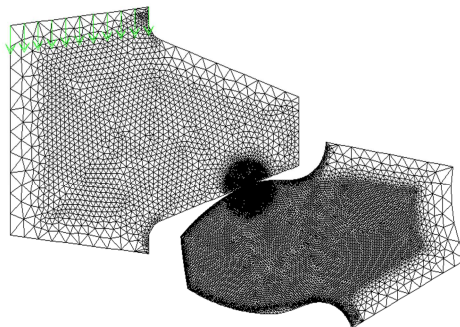
'FINS' ;

L'opérateur VECT(eur) nous permet de tracer le vecteur déplacement imposé DEPL1

\*=====

\* **tracé du vecteur déplacement**

\*=====



**Tracé du vecteur déplacement**

\*=====

\* **Chargements**

\*=====

LTSP1 = 'PROG' 0. 1.;

LAMP = LTSP1 ;

EV1 = EVOL 'MANU' 'TEMPS' LTSP1 'AMPL' LAMP ;

CHARU1 = CHAR 'DIMP' DEPL1 EV1 ;

CHAR0= CHARU1;

**d) Calculs et résolution**

\*=====

**\* Calcul des déformations**

\*=====

\*

\* Construction de la table PASAPAS :

\*

TAB1 = 'TABL' ;  
 TAB1 . 'TEMPS\_CALCULES' = LTPS1 ;  
 TAB1 . 'MODELE' = MO ;  
 TAB1 . 'CARACTERISTIQUES' = MA ;  
 TAB1 . 'BLOCAGES\_MECAIQUES' = CLTOT ;  
 TAB1 . 'CHARGEMENT' = CHAR0 ;  
 TAB1 . 'CONTACT' = MCONTH ;  
 TAB1 . 'GRANDS\_DEPLACEMENTS' = FAUX ;

\*=====

**\* Résolution**

\*=====

TAB2 = PASAPAS TAB1 ;

**TAB(ble)** le système  $\{f\}=[K]\{U\}$ , les déplacement  $\{U\}$ , solution du problème, sont stockés dans depl

\*=====

**\* Dépouillement**

\*=====

DEPL1 =TAB2 . 'DEPLACEMENTS' . 1 ;

\*=====

**\* Déformée**

\*=====

DEFO0 = 'DEFO' (SURFACE1 'ET' SURFACE2) DEPL1 0. 'VERT' ;  
 DEFO1 = 'DEFO' (SURFACE1 'ET' SURFACE2) DEPL1 1. 'ROUG' ;

'TITR' 'Maillages non déformé (vert) et déformé (rouge).';

'TRAC' (DEFO0 'ET' DEFO1) ;

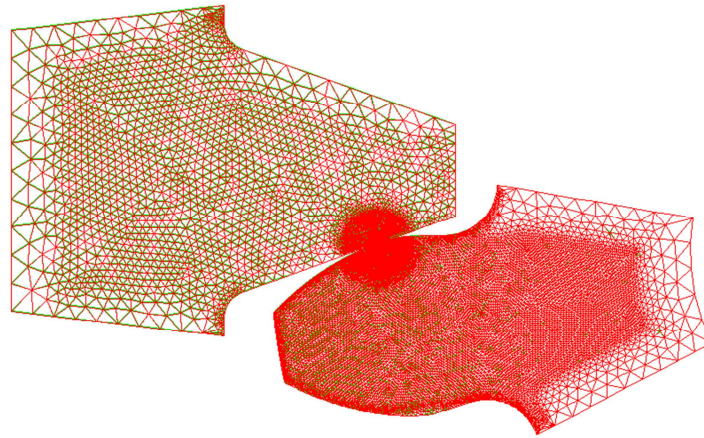
\*'FINS' ;

L'opérateur **defo(rme)** construit la déformée de la structure à partir de la géométrie initiale et du champ de déplacement. On peut préciser que certain nombre d'options comme la couleur (Ici rouge).

\*=====

\* **Résultat après chargement du modèle**

\*=====



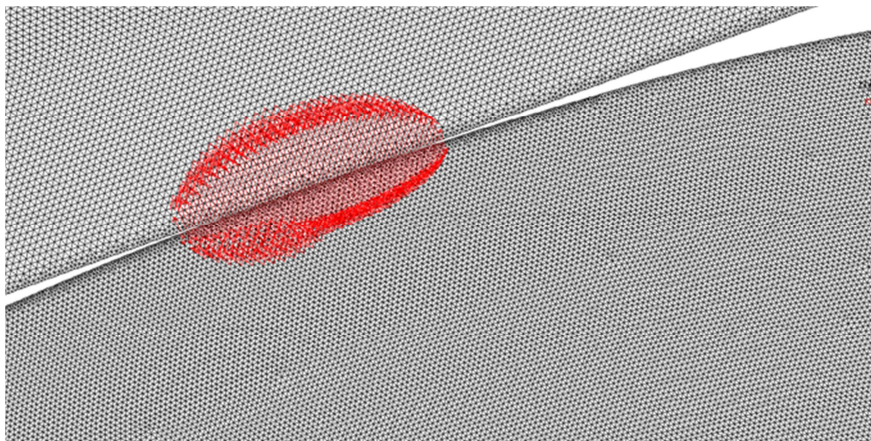
**Tracé de la déformée (DEFO et DEF1)**

\*=====

\* **Visualisations des réactions**

\*=====

```
'SI' GRAPH ;  
REAC1 = TAB2 . 'REACTIONS'. 1 ;  
VR1 = 'VECT' REAC1 1. 'FX' 'FY' 'ROUG' ;  
'TITR' 'Forces de réaction.' ;  
'TRAC' VR1 (SURFACE) ;  
'FINS' ;
```



**Visualisation des réactions au voisinage de contact**

**e) Calculs et résolution**

```
*=====
```

**\* calcul des contraintes**

```
*=====
```

```
CHACONTR=SIGM MODELE MATERIAU DEPL1;
CHANOEUD=CHAN NOEUD MODELE CHACONTR;
CHANPOIN=CHAN CHPO MODELE CHANOEUD;
```

L'opérateur **sigm(a)** calcule le champ des contraintes à partir d'un champ de déplacements.

```
*=====
```

**\* extraction des contraintes (SX, SY, SXY)**

```
*=====
```

```
SX=EXCO CHANPOIN SMXX;
SXY=EXCO CHANPOIN SMXY;
CONT=SURFACE CONT;
```

L'opérateur **exco** crée à partir d'un champ, un champ de même type en extrayant une ou plusieurs composantes données.

```
DIFCONTR= (((SX-SY)**2)+(4*(SXY**2)))**0.5;
```

Sur le cercle de Mohr cette relation donne la différence des contraintes principales ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) en fonction des contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ .

```
*=====
```

**\* calcul du rapport I/I<sub>0</sub> et traçage des isochromes**

```
*=====
```

```
phi=360*(1./10.77)*10.*DIFCONTR;
```

```
ISOC = (sin ((phi)/2.))**2;
```

```
ISOCH=1-ISOC ;
```

```
*=====
```

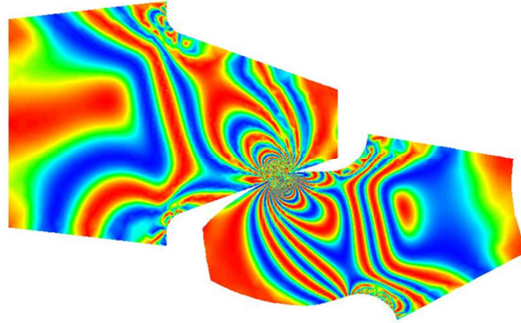
**\* tracé des isochromes**

```
*=====
```

```
trac ISOCH SURFACE cont;
```

Le réseau d'isochromes est donné pour  $\sin^2(\varphi/2)=0$ .

```
*=====
* Visualisation du réseau d'isochromes
*=====
```



**Tracé des isochromes**

L'ordinateur trace les isochromes avec une échelle de couleur par défaut. En pratique et en champ sombre, le noir qui représente les isochromes correspond ici au bleu. De même, les franges blanches correspondent au rouge.

```
*=====
* Tracé des isoclines
*=====
```

```
term1 = (2. * SXY);
term2 = (SX- SY);
term3 = ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL = sin(2. * ALPHA);
ISOCL = (ISOCL ** 2);
ISOCL= ISOC*ISOCL;
trac isocl SURFACE cont;
```

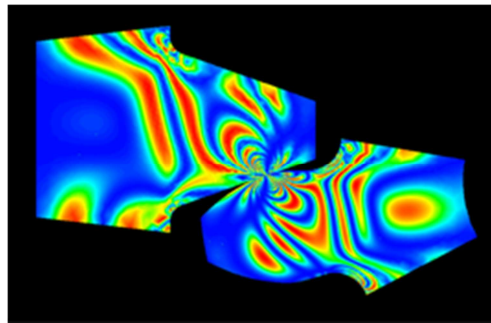
Le programme nous donne la valeur de  $(\sin^2(2\alpha) * (\sin((\phi)/2.))^{**2})$  en chaque point du modèle. Ceci permet de tracer l'allure des franges isoclines et isochromes superposées sur toute la surface de ce dernier.

Les franges isoclines concrétisées dans ce tracé sont celles correspondant à un  $\sin^2(2\alpha)=0$ , représentées par la couleur bleue (extinction en pratique). Ceci est dû au fait que les directions principales dans ces zones coïncident avec les axes (fixes) considérés par le programme.

\*=====

\* **Visualisation du réseau d'isoclines**

\*=====



**Tracé des isoclines**

\*=====

\* **Evolutions des contraintes Sx Sy suivant LIG20**

\*=====

TOM=DIFCONTR/2 ;

LIG20=E3 droi 500 E1;

COMPTOM=INT\_COMP SURFACE TOM LIG20;

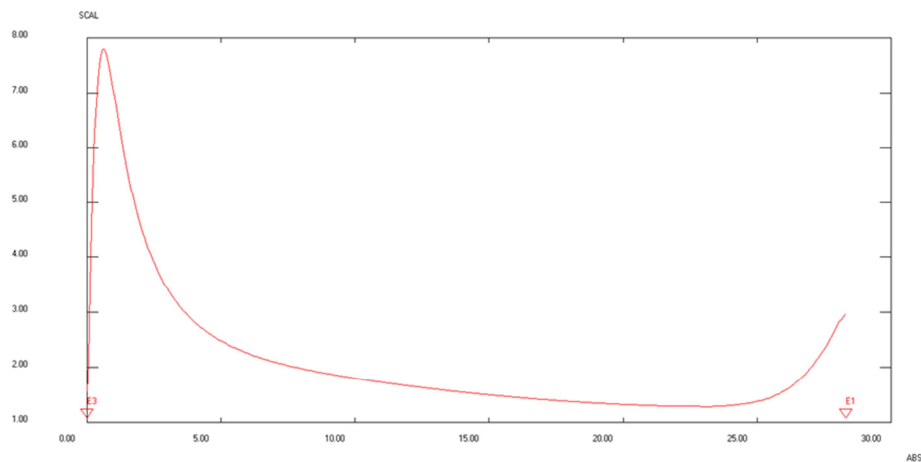
EVOL1=EVOL rouge 'CHPO' LIG20 COMPTOM;

dess EVOL1;

L'opérateur **inter(polation)\_comp(osante)** nous a permet l'interpolation de la contrainte de cisaillement maximale (TOM ou  $\tau_{\max}$ ) du champ de contraintes sur le maillage.

L'opérateur **évol(ution)** nous a permet de définir l'évolution de la contrainte tangentielle maximale (TOM ou  $\tau_{\max}$ ) le long du segment (LIG20).

dess EVOL1;



**Tracé de l'évolution de  $\tau_{\max}$**

\*=====

\* **fin du fichier**

\*=====

**Fin ;**

La directive fin provoque l'arrêt de l'exécution de CASTEM 2000.

## Résumé

Ce mémoire présente un travail de comparaison entrepris pour valider la simulation numérique à l'aide d'une technique expérimentale en analysant les champs de contraintes développées dans un contact d'engrènement.

La méthode expérimentale est la photoélasticimétrie, cette méthode est basée sur la biréfringence accidentelle qui est une propriété optique de double réfraction que présentent certaines matières transparentes. Les directions des contraintes principales et la variation de la contrainte de cisaillement maximale dans le modèle chargé sont déterminées en exploitant les franges isoclines et isochromes obtenues au niveau de l'analyseur du polariscope.

La méthode numérique a été faite à l'aide d'un programme écrit sous le logiciel "CASTEM" qui permet la simulation des franges photoélastiques.

Deux types de comparaison ont été faites: La comparaison des isochromes et des isoclines obtenues expérimentalement à celles obtenues numériquement et la comparaison des valeurs expérimentales et numériques de la variation de la contrainte de cisaillement maximale le long d'un segment déterminé à partir du point du contact.

Les résultats obtenus montrent une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et la simulation, sauf dans certaines zones, particulièrement au voisinage de la zone de contact où il est difficile de relever les ordres de franges dans l'étude expérimentale.

**Mots clés :** photoélasticimétrie, contact, isochromes, isoclines.

