

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

OPTION : PROBABILITES ET STATISTIQUE

Présentée par :

M. Youcef TALEB

Sujet :

PRINCIPES D'INVARIANCE DANS LES
SYSTEMES DE FILES D'ATTENTE AVEC
RAPPELS

Devant le jury d'examen composé de :

M. AIDENE Mohamed	Professeur	U.M.M.T.O	Président
M. AISSANI Amar	Professeur	U.S.T.H.B	Rapporteur
M. SAIS Lakhdar	Professeur	U. d'Artois	Examineur
M. ADJABI Smail	Professeur	U. Béjaia	Examineur
M. FELLAG Hocine	Professeur	U.M.M.T.O	Examineur
M. HAMADOUCHE Djamel	Professeur	U.M.M.T.O	Invité

Soutenue le 27/11/2013

Remerciements

Mes plus vifs remerciements vont d'abord au professeur AISSANI Amar, mon Directeur de thèse, qui m'a proposé ce sujet et l'a encadré.

J'exprime toute ma gratitude aux professeurs AIDENE M., FELLAG H., ADJABI S. et SAIS L. pour avoir bien voulu examiner ce travail.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance au professeur HAMADOUCHE D., mon Directeur de recherche, pour ses précieux conseils, sa disponibilité et sa contribution.

Je remercie également ma collègue, O. OUKACHA, pour son aide précieuse à la maîtrise du logiciel Matlab.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux et celles (Cette page ne suffirait pas pour les citer, ils se reconnaîtront d'eux-mêmes.) qui m'ont aidé pour l'aboutissement de ce travail.

Je termine en adressant mes meilleures pensées à toute ma famille.

Dédicaces

A ma chère mère, . . .

Table des matières

Introduction générale	5
1 Comportement asymptotique de processus stochastiques	9
1.1 Convergence de mesures de probabilités dans les espaces métriques	9
1.1.1 Définitions	9
1.1.2 Convergence faible et équitension.	10
1.1.3 Application.	12
1.2 Convergence de processus stochastiques dans $C[0,1]$	13
1.2.1 Définitions	13
1.2.2 Convergence faible et équitension.	14
1.2.3 Principes d'invariance dans $C[0,1]$	15
1.3 Convergence de processus stochastiques dans $D[0,1]$	15
1.3.1 Définitions	16
1.3.2 Convergence faible et équitension	17
1.3.3 Principes d'invariance dans $D[0,1]$	19
2 Théorèmes limites fonctionnels hölderiens	21
2.1 Espaces de Hölder	21
2.1.1 Les espaces de Banach $H_\alpha[0,1]$ et $H_\alpha^0[0,1]$	22
2.1.2 Analyse fonctionnelle de H_α et H_α^0	23
2.1.3 Processus à trajectoires dans H_α	25
2.1.4 Compacité dans H_α	26
2.1.5 Convergence faible hölderienne	26
2.1.6 Équitension hölderienne	28
2.2 Principes d'invariance dans H_α : cas de suites iid	32
2.3 Principes d'invariance dans H_α : cas de suites dépendantes	34
2.3.1 Quelques outils de dépendance	34
2.3.2 Théorèmes limites fonctionnels	35

3	Théorèmes limites fonctionnels hölderiens dans le cas non stationnaire.	40
3.1	Introduction	40
3.2	Lissage polygonal du processus de sommes partielles	40
3.3	Lissage par convolution du processus de sommes partielles . . .	48
4	Application au modèle de files d'attente M/G/1 avec rappels	56
4.1	Le système M/G/1 avec rappels	57
4.2	Etude de la période d'activité du système par les périodes actives et inactives de l'orbite	58
4.3	Etude de la période d'activité du système par les périodes actives et inactives du serveur	64
	Conclusion et perspectives	68
A	Rappels sur les files d'attente	69
B	Le Mouvement Brownien et le Pont Brownien	75
	Bibliographie	83

Introduction générale

Le travail présenté dans cette thèse porte sur l'étude de la convergence de certains processus stochastiques de files d'attente vers les processus de diffusion. Il s'agit en particulier de clarifier le comportement asymptotique de la période d'activité de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels.

On parle de phénomène d'attente chaque fois que certaines unités appelées clients se présentent d'une manière aléatoire à des "stations" afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire. Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champs d'applications important des processus stochastiques.

La théorie des files d'attente (en anglais Queueing Theory) est un outil de modélisation développé dans les années 1930 pour l'analyse stochastique des systèmes téléphoniques par A. K. Erlang. L'évolution rapide des systèmes informatiques et des réseaux de télécommunication ont montré les limites de la théorie des files d'attente dites classiques qui ne permettent pas d'expliquer le comportement stochastique de certains systèmes complexes où le client répète sans cesse sa demande jusqu'à obtention du service désiré, ce qui a conduit certains chercheurs à développer d'autres modèles plus élaborés qu'on appelle généralement "files d'attente avec rappels" ; en anglais "Retrial Queues". Plusieurs méthodes basées sur la transformée de Laplace Stieltjes ont été élaborées pour étudier les caractéristiques de ces systèmes d'attente. On peut citer, parmi ces caractéristiques, la période d'activité du système, le temps d'attente, le temps de service, la stabilité et l'ergodicité du système. Pour plus de détails, on peut se référer à l'ouvrage de Falin et Templeton [32] ou à celui de J. R. Artalejo et Gomez-Corral [9].

Dans ce travail, on s'intéressera plus précisément à la période d'activité de la file d'attente avec rappels. Bien que les conditions de stabilité et d'ergodicité ont été étudiées par plusieurs auteurs, l'étude approfondie du comportement asymptotique de cette dernière n'a pas été faite.

Il est connu que la période d'activité du système $M/G/1$ avec rappels peut

être écrite comme la somme d'une suite de processus de sommes partielles (R_i, S_i) où S_i est le temps de service du i^{me} client alors que R_i est le temps séparant la fin de service du $(i - 1)^{me}$ client avec l'entrée en service du i^{me} client avec $R_0 = 0$. Durant le laps de temps R_i , le serveur est libre alors qu'il y a encore des clients dans l'orbite qui constitue l'ensemble des sources de rappels. Ces deux processus ne sont pas forcément de même loi et surtout il y a dépendance du processus R_i avec le nombre de clients dans l'orbite. Ceci nous conduit à l'étude du processus de sommes partielles de variables aléatoires dépendantes et pas forcément de même lois.

Lorsqu'on ne connaît pas le type de dépendance, on utilise la décomposition d'Artalejo (1996) de la période d'activité en périodes actives et périodes inactives de l'orbite : (L_k^i, L_k^b) . Cette décomposition nous permet d'utiliser le théorème de Lamperti après son extension, ce qui constitue la première contribution parue dans "International Journal of Applied Mathematics", Volume 39 Issue 1, (2009). Par la suite, on applique ce dernier résultat pour montrer la convergence du processus de sommes partielles de la période d'activité du système M/G/1 avec rappels exponentiels vers le mouvement brownien dans H_α et donc vers la loi normale dans $\mathbb{R}$. Dans le cas d'une dépendance de type α -mélange, le théorème de Hamadouche (2000) permet de conclure par un principe d'invariance en utilisant la modélisation de la suite (R_i, S_i) . Les deux principes d'invariance énoncés ci-dessus constituent la deuxième contribution qui a donné la prépublication dans la revue IRMA Lille, Vol 71, VI, (2011) et une communication internationale dans ROADEF2013 en France.

Il est bien connu que les processus limites comme le mouvement brownien et le pont brownien ont une régularité hölderienne pour tout ordre $\alpha < 1/2$. Cela mène à faire notre étude dans les espaces de Hölder notés H_α . Dans la première partie de ce travail, on s'est intéressé à la convergence de processus stochastiques considérés comme éléments aléatoires de H_α , plus particulièrement aux principes d'invariance hölderiens. Cet espace n'étant pas séparable, on s'intéresse à son sous espace $H_\alpha^0[0, 1]$ qui l'est. Par l'injection canonique, la convergence en loi dans ce dernier espace implique celle dans $H_\alpha[0, 1]$. Le premier résultat dans ce sens est celui de Lamperti [52] qui est une extension du principe d'invariance de Donsker-Prohorov au cas hölderien. Il a obtenu la convergence hölderienne pour tout ordre $\alpha < 1/2$ du processus lissé polygonalement de sommes partielles de variables aléatoires i.i.d (indépendantes et identiquement distribuées). Ce résultat a été redémontré par Kerkycharian et Roynette [50] en utilisant les isomorphismes de Ciesielski [19] entre les espaces de Hölder et des espaces de suites. Dans [20], Ciesielski a donné une application à la régularité des trajectoires de processus gaussiens. Hamadouche [42] a par ailleurs étendu ce résultat aux suites stationnaires de variables aléatoires dépendantes (α -mélangeantes et

associées) et ce avec deux types de lissage (polygonal et par convolution). La convergence hölderienne de processus stochastiques est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles et à l'équitension de leurs lois. Le principal résultat d'équitension hölderienne est la condition de Lamperti [52] basée sur l'inégalité de moment suivante :

$$E |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma < C |t - s|^{1+\delta}, \quad s, t \in [0, 1].$$

Dans [40], Hamadouche a prouvé qu'on peut se contenter de vérifier cette inégalité pour $|t - s| \geq a_n$, où a_n décroît vers 0, au prix d'un contrôle en probabilité du module de continuité hölderien de ξ_n évalué en a_n . Ce résultat plus flexible pour l'utilisation des inégalités de moment trouve ses applications entre autres dans l'étude des processus empiriques, quantiles,... Une parfaite illustration pour l'étude de la convergence hölderienne de ces processus est la contribution parue dans Hamadouche [41], [42] et leurs bibliographies.

Le principe d'invariance énonce la convergence en loi dans $C[0, 1]$ du processus de Donsker-Prohorov ou du processus de sommes partielles de variables aléatoires i.i.d. Après l'extension de Lamperti au cas hölderien pour des v.a. i.i.d et outre les extensions citées précédemment, Račkauskas et Suquet [68] ont étendu le principe d'invariance de Lamperti au cas d'une suite i.i.d (X_n) d'éléments aléatoires d'un espace de Banach B et des espaces de Hölder de fonctions $[0, 1] \rightarrow B$ bâtis à l'aide de poids $p(h) = h^\alpha \text{Log}^\beta(1/h)$.

Dans la première partie de ce travail [44], on se propose d'étendre le principe d'invariance ou théorème central limite fonctionnel classique au cas hölderien pour des variables aléatoires indépendantes non nécessairement de même loi puis dans la deuxième partie, on applique le théorème obtenu au cas de la file d'attente M/G/1 avec rappels [81].

Cette thèse est composée d'une introduction générale, quatre chapitres et une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacré au comportement asymptotique des processus stochastiques. On rappelle certains résultats de convergence de mesures de probabilités dans les espaces métriques, la convergence de processus stochastiques dans les espaces fonctionnels $C[0, 1]$ et $D[0, 1]$. On termine en donnant les deux théorèmes énonçant les principes d'invariance dans ces deux espaces.

Au chapitre deux, on rappelle l'essentiel des travaux de Ciesielski [19] et [20]. On donne les principaux résultats des principes d'invariance hölderiens pour le cas de variables aléatoires indépendantes et de même loi ainsi

que le cas d'une suite stationnaire de variables aléatoires α -mélangeantes ou associées établis dans Hamadouche [41] et [42].

Le chapitre trois est consacré à l'extension du théorème de Lamperti pour le cas de variables aléatoires non identiquement distribuées. Il constitue notre première contribution [44]. On montre, en utilisant les résultats de Hamadouche [42], que le processus de Donsker-Prohorov ou processus de sommes partielles de variables aléatoires non identiquement distribuées défini par

$$\xi_n(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{k=1}^{k=j} X_k(\omega) + (nt - j) X_{j+1}(\omega) \right], \quad \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n},$$

converge vers le mouvement brownien. On montre que la convergence a lieu aussi pour le processus de Donsker-Prohorov lissé par convolution.

Au chapitre quatre, on montre la convergence de la suite de processus stochastiques constituant la période d'activité du modèle de la file d'attente M/G/1 avec rappels en utilisant deux modélisations :

Dans le cas d'une dépendance α -mélangeante, le théorème de Hamadouche (2000) permet de conclure directement par un principe d'invariance en utilisant la modélisation par la suite de périodes inactives et de périodes actives du serveur (R_i, S_i) .

Lorsqu'on ne connaît pas le type de dépendance, on utilise la décomposition d'Artalejo (1996) de la période d'activité en périodes inactives et périodes actives de l'orbite (L_k^i, L_k^b) pour montrer la convergence du processus de sommes partielles de la période d'activité du système M/G/1 avec rappels exponentiels vers le mouvement brownien dans H_α et donc vers la loi normale dans $\mathbb{R}$.

Ces deux principes d'invariance constituent la deuxième contribution qui a donné une prépublication dans la revue IRMA Lille, Vol 71, VI, (2011) et une communication internationale dans ROADEF2013 en France.

Chapitre 1

Comportement asymptotique de processus stochastiques

Introduction

La convergence (faible) d'une suite de processus stochastiques dans les espaces fonctionnels équivaut à la convergence des lois fini-dimensionnelles de cette suite et la relative compacité de la suite des mesures associées à cette suite de processus. Cette relative compacité induit l'équitension de cette suite de lois et la réciproque est vraie si l'espace est séparable et complet. Pour cela, après un rappel des définitions de la convergence faible, on énoncera des critères d'équitension et de convergence faible pour chacun des espaces métrique, $C[0, 1]$ et $D[0, 1]$ et $H_\alpha[0, 1]$. Sauf cas spécifié, les théorèmes, propositions, définitions, ..., cités dans ce chapitre sont pris (traduits) dans Billingsley [13] et Ciesielski [19].

1.1 Convergence de mesures de probabilités dans les espaces métriques

1.1.1 Définitions

Soit E un espace métrique muni d'une distance δ , $\mathcal{A}$ la tribu des boréliens de E , P une loi de probabilité sur $(E, \mathcal{A})$.

Définition 1.1.1 : Soient P_n, P des mesures de probabilité sur $(E, \mathcal{A})$. On dit que la suite $\{P_n\}$ de lois de probabilités converge faiblement vers la loi de probabilité P si pour toute fonction réelle, continue et bornée f sur E , on a

$$\int_E f dP_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E f dP$$

et on note $P_n \Longrightarrow P$.

Soit X une application de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ dans un espace métrique E . Si X est mesurable, on dit que X est un élément aléatoire de E .

Définition 1.1.2 : On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ d'éléments aléatoires de E , converge en loi vers l'élément aléatoire X dans E , si la loi de probabilité P_n de X_n converge faiblement vers la loi de probabilité P de X (i.e $P_n \Longrightarrow P$) dans E et on écrit $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ dans E .

Définition 1.1.3 : La loi de probabilité P définie sur $(E, \mathcal{A})$ est équitendue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K_ε tel que $P(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

En d'autres termes, P est équitendue si et seulement si elle admet un support σ -compact.

1.1.2 Convergence faible et équitension.

Il est important de remarquer que la convergence faible dépend uniquement de la topologie de l'espace E et non de la métrique l'ayant générée.

Soit A un sous ensemble de $\mathcal{A}$ et δA sa frontière. Si $P(\delta A) = 0$ alors on dit que A est l'ensemble de continuité de P .

Les divers résultats relatifs aux propriétés de la convergence faible découlent essentiellement des deux théorèmes suivants établis dans Billingsley [13].

Théorème 1.1.1 ([13]) : Soient P_n et P des mesures de probabilités sur $(E, \mathcal{A})$. Les cinq assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $P_n \Longrightarrow P$
- (ii) $\lim_n \int f dP_n = \int f dP$ pour toute fonction réelle f , bornée et uniformément continue sur E .
- (iii) $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$ pour tout fermé $F \in \mathcal{A}$.

$$(iv) \quad \liminf_n P_n(O) \geq P(O) \text{ pour tout ouvert } O \in \mathcal{A}.$$

$$(v) \quad \lim_n P_n(A) = P(A) \text{ pour tout ensemble de continuité } A \text{ de } P.$$

Ce théorème possède une version exprimée en terme de convergence en loi.

Théorème 1.1.2 ([13]) : Soient P_n et P des mesures de probabilités sur $(E, \mathcal{A})$ associées à (X_n) et X . Les cinq assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

$$(ii) \quad \lim_n E\{f(X_n)\} = E\{f(X)\} \text{ pour toute fonction réelle, bornée et uniformément continue sur } E.$$

$$(iii) \quad \limsup_n P(X_n \in F) \leq P(X \in F) \text{ pour tout fermé } F \in \mathcal{A}.$$

$$(iv) \quad \liminf_n P(X_n \in O) \geq P(X \in O) \text{ pour tout ouvert } O \in \mathcal{A}.$$

$$(v) \quad \lim_n P(X_n \in A) = P(X \in A) \text{ pour tout ensemble de continuité } A \text{ de } P.$$

Un autre critère de convergence est donné par le théorème ci-dessous.

Théorème 1.1.3 ([13]) : Soit $\mathcal{U}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$ telle que

(i) $\mathcal{U}$ est un fermé d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$.

(ii) Tout ouvert de E est fini ou union dénombrable d'éléments de $\mathcal{U}$. Si $P_n(A) \rightarrow P(A)$ pour tout $A \in \mathcal{U}$, alors $P_n \Rightarrow P$.

Soit Π une famille de loi de probabilités sur $(E, \mathcal{A})$. On dit que Π est relativement compacte si de toute suite d'éléments de Π , on peut extraire une sous suite qui converge faiblement.

La famille Π est dite équitendue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $P(K) > 1 - \varepsilon$, pour tout $P \in \Pi$. Un des principaux résultats sur la relative compacité est le théorème de Prohorov.

Théorème 1.1.4 (Prohorov [63]) : Si la famille Π de lois de probabilités est équitendue, alors elle est relativement compacte.

Théorème 1.1.5 ([13]) Supposons l'espace E séparable et complet. Si Π est relativement compacte, alors elle est équitendue.

1.1.3 Application.

Cette section sera utilisée notamment dans le chapitre quatre sur les files d'attente pour montrer la convergence de la période d'activité vers la loi normale.

Soient E et E' deux espaces métriques munis respectivement des distances δ et δ' , $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les tribus des boréliens engendrées par les ouverts de E et E' . Soit h une application de E dans E' , alors toute mesure de probabilité P sur $(E, \mathcal{A})$ induit sur $(E', \mathcal{A}')$ une unique mesure de probabilité Ph^{-1} définie par $Ph^{-1}(A') = P(h^{-1}(A'))$ pour tout $A' \in \mathcal{A}'$.

Théorème 1.1.6 ([13]) : Si $P_n \Rightarrow P$ alors $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.

Si l'application h n'est pas continue mais mesurable, on note D_h l'ensemble de discontinuité de h .

Théorème 1.1.7 ([13]) : Si $P_n \Rightarrow P$ et $P(D_h) = 0$ alors $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.

De ces deux théorèmes, on déduit deux corollaires pour le cas où X et X_n sont des éléments aléatoires de E .

Corollaire 1.1.1 ([13]) : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et la fonction h continue alors $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(X)$.

Corollaire 1.1.2 ([13]) : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $P(D_h) = 0$ alors $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(X)$.

Lorsque E' est la droite des réels, l'application h une fonction réelle mesurable, on a le théorème suivant :

Théorème 1.1.8 ([13]) :

i) Si $P_n \Rightarrow P$ alors $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$ pour toute fonction réelle h mesurable telle que $P(D_h) = 0$.

ii) Si $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$ pour toute fonction réelle h continue et bornée, alors $P_n \Rightarrow P$.

iii) Si $P_n \Rightarrow P$ et si h est une fonction réelle mesurable et bornée avec $P(D_h) = 0$, alors $\int h dP_n \Rightarrow \int h dP$.

Pour les démonstrations, voir Billingsly [13].

Théorème 1.1.9 ([13]) : Si E est séparable, une condition nécessaire et suffisante pour que $P_n \Rightarrow P$ est que :
 $P_n(B'XB'') \rightarrow P(B'XB'')$ pour tout ensemble de continuité B' de P' et tout ensemble de continuité B'' de P'' où P' et P'' sont les lois marginales de P .

Théorème 1.1.10 ([13]) : Si E est séparable alors

$$[P'_nXP''_n \Rightarrow P'XP''] \iff [P'_n \Rightarrow P' \text{ et } P''_n \Rightarrow P'']$$

Théorème 1.1.11 ([13]) : Supposons que E est séparable et les éléments aléatoires X_n et Y_n ont même domaine de définition. Si

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ et } \delta(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \text{ alors } Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

1.2 Convergence de processus stochastiques dans $C[0,1]$

On note par $C = C[0,1]$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la topologie uniforme définie par la distance entre deux fonctions comme suit

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|, \quad f, g \in C[0,1].$$

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 On définit le module de continuité d'un élément f de $C[0,1]$ par

$$w_f(\delta) = w(f, \delta) = \sup_{|t-s| < \delta} |f(t) - f(s)|, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

Soit X une application mesurable de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ dans $C[0,1]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est un élément de $C[0,1]$, noté $X(t, \omega)$ en tant que fonction continue sur $[0,1]$. Pour t fixé, $X(t)$ désigne la variable aléatoire de valeur $X(t, \omega)$ au point ω . X est dite fonction aléatoire ou processus stochastique. On note par $(X(t_1), \dots, X(t_k))$ l'application de Ω dans $\mathbb{R}^k$ dont les valeurs au point ω sont $(X(t_1, \omega), \dots, X(t_k, \omega))$.

1.2.2 Convergence faible et équitension.

La convergence faible dans $C[0, 1]$ ne se montre pas en général par la convergence des lois fini-dimensionnelles puisqu'il se pose le problème de compacité. Comme $C[0, 1]$ est séparable et complet pour la topologie uniforme, les théorèmes 1.1.4 et 1.1.5 montrent que cette relative compacité est équivalente à l'équitension des lois sur $(C[0, 1], \mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ désigne la tribu borélienne de $C[0, 1]$.

Quelques critères d'équitension dans $C[0, 1]$ sont les suivants :

Théorème 1.2.1 ([13]) : *Soient P_n et P des lois de probabilité sur $(C, \mathcal{A})$. Si les lois fini-dimensionnelles de P_n convergent faiblement vers celles de P et si la suite $\{P_n\}$ est équitendue alors $P_n \Rightarrow P$.*

Théorème 1.2.2 ([13]) : *La suite $\{P_n\}$ est équitendue si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées.*

i) *Pour tout $\eta > 0$, $\exists a$ tel que*

$$P_n \{f : |f(0)| > a\} \leq \eta, \quad n \geq 1.$$

ii) *Pour tout ε et η positifs, il existe δ avec $0 < \delta < 1$ et un entier n_0 tel que*

$$P_n \{f : w_f(\delta) \geq \varepsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

Théorème 1.2.3 ([13]) : *La suite $\{P_n\}$ est équitendue si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées.*

i) *Pour tout $\eta > 0$, $\exists a$ tel que*

$$P_n \{f : |f(0)| > a\} \leq \eta, \quad n \geq 1.$$

ii) *Pour tout ε et η positifs, il existe δ avec $0 < \delta < 1$ et un entier n_0 tel que*

$$\frac{1}{\delta} P_n \left\{ f : \sup_{t \leq s \leq t+\delta} |f(t) - f(s)| \geq \varepsilon \right\} \leq \eta, \quad n \geq n_0,$$

pour tout t .

1.2.3 Principes d'invariance dans $C[0,1]$

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On note par $S_j = \sum_{k=1}^j X_k$ la suite de sommes partielles. On définit l'élément aléatoire ξ_n de $C[0,1]$ par

$$\xi_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} X_{[nt]+1}(\omega). \quad (1.1)$$

Le principe d'invariance dans $C[0,1]$, pour les variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées et de variance finie est donné par le théorème de Donsker-Prohorov, BILLINGSLEY. [13].

Théorème 1.2.4 (Donsker-Prohorov [13]) *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées et de variance finie $EX_j^2 = \sigma^2 > 0$. Alors la suite de fonctions aléatoires (ξ_n) définie en (1.1) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans $C[0,1]$.*

La convergence des lois finidimensionnelles de ξ_n vers celles du mouvement brownien est donnée par la proposition 3.2.1. Pour l'équitension, on montre que les conditions du théorème 1.2.4 sont remplies en utilisant le résultat ci-dessous.

Lemme 1.2.1 *Soient $X_1, X_2, \dots, X_m$ des variables aléatoires indépendantes, centrées et de variance finie $EX_j^2 = \sigma_j^2$. Soit $S_i = X_1 + X_2 + \dots + X_i$ et $s_i = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_i^2$. Alors*

$$P \left\{ \max_{i \leq m} |S_i| \geq \lambda s_m \right\} \leq 2P \left\{ |S_m| \geq (\lambda - \sqrt{2}) s_m \right\}, \quad \lambda > 0.$$

1.3 Convergence de processus stochastiques dans $D[0,1]$

L'espace $C[0,1]$ n'est pas adapté à l'étude de processus stochastiques présentant des sauts comme par exemple tout processus basé sur la fonction de répartition empirique F_n .

On note par $D = D[0,1]$ l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$, continues à droite et admettant une limite à gauche. Autrement dit,

i) *Pour tout t tel que $0 \leq t < 1$ on a $f(t+) = \lim_{s \searrow t} f(s)$ existe et $f(t+) = f(t)$.*

ii) Pour tout t tel que $0 < t \leq 1$ on a $f(t-) = \lim_{s \nearrow t} f(s)$ existe.

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.1 On définit le module de continuité de $f \in D$ par

$$w_f(\delta) = \sup_{0 \leq t \leq 1-\delta} w_f[t, t+\delta]$$

$$\text{où } w_f(T_0) = \sup_{s, t \in T_0} |f(t) - f(s)|, \quad T_0 \subset [0, 1].$$

On définit un autre module de continuité w'_f , qui jouera le même rôle que celui joué par w_f dans $C[0, 1]$, par

$$w'_f(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{0 < i \leq r} w_f[t_{i-1}, t_i], \quad 0 < \delta < 1.$$

où l'infimum est pris sur toutes les subdivisions $\{t_i\}$ vérifiant :

$$\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 \\ t_i - t_{i-1} > \delta, \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{cases}$$

Soit Λ la classe de fonctions continues de $[0, 1]$ dans lui même, strictement croissantes. Si $\lambda \in \Lambda$, alors $\lambda(1) = 1$ et $\lambda(0) = 0$. Soit ε pour lequel il existe une fonction $\lambda \in \Lambda$ telle que

- a) $\sup_t |\lambda(t) - t| \leq \varepsilon$,
- b) $\sup_t |f(t) - g(\lambda(t))| \leq \varepsilon$.

Pour tout f et g de $D[0, 1]$ vérifiant a) et b), on montre que $d(f, g) = \min(|\lambda(t) - t|, |f(t) - g(\lambda(t))|)$ est une métrique qui définit la topologie de Skorohod sur cet espace. $D[0, 1]$ muni de cette distance n'est pas complet. On définit une autre métrique d_0 équivalente à d et qui fait de $D[0, 1]$ un espace complet.

Soit Λ la classe de fonctions continues de $[0, 1]$ dans lui même, strictement croissantes. Si $\lambda \in \Lambda$, alors $\lambda(1) = 1$ et $\lambda(0) = 0$. Soit ε pour lequel il existe une fonction $\lambda \in \Lambda$ telle que

- a) $\|\lambda\| \leq \varepsilon$, avec $\|\lambda\| = \sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|$,
- b) $\sup_t |f(t) - g(\lambda(t))| \leq \varepsilon$.

Définition 1.3.2 *On définit la distance d_0 entre f et g de $D[0, 1]$ vérifiant les conditions a) et b) par*

$$d_0(f, g) = \min \left(\|\lambda(t)\|, \sup_t |f(t) - g(\lambda(t))| \right).$$

Cette distance fait de $D[0, 1]$ un espace séparable et complet.

Soient $t_1, \dots, t_k$ des éléments de $[0, 1]$, et π l'application (projection)

$$\begin{aligned} \pi_{t_1, \dots, t_k} : \quad D &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ f &\xrightarrow{\pi} (f(t_1), \dots, f(t_k)). \end{aligned}$$

Un élément aléatoire dans $D[0, 1]$ est aussi appelé fonction aléatoire. Si X est une application de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans $D[0, 1]$, alors pour tout ω , $X(\omega)$ est un élément de $D[0, 1]$ dont la valeur au point t est notée par $X(t, \omega)$. Pour tout t , on note par $X(t)$ la variable aléatoire $\pi_t X$ de Ω dans $\mathbb{R}$.

1.3.2 Convergence faible et équitension

Etant donné une loi de probabilité P sur l'espace $(D, \mathcal{D})$, on note par T_P l'ensemble des points $t \in [0, 1]$ pour lesquels la projection π_t est continue sauf aux points appartenant à un ensemble de mesure nulle. Si $0 < t < 1$ alors $t \in T_P$ si et seulement si $P(S_t) = 0$ où $S_t = \{f : f(t) \neq f(t-)\}$. Il est clair que 0 et 1 appartiennent à T_P .

Quelques résultats d'équitension et de convergence faible dans $D[0, 1]$ sont :

Théorème 1.3.1 ([13]) : *Soit (P_n) une suite de lois de probabilités sur $(D, \mathcal{D})$ telle que*

i) la suite (P_n) est équitendue

ii) $P_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \implies P \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}$ pour tout $t_1, \dots, t_k \in T_P$,

alors

$$P_n \implies P.$$

Théorème 1.3.2 ([13]) : La suite de lois $\{P_n\}$ est équitendue si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :

i) Pour tout $\eta > 0$, il existe a tel que

$$P_n \left\{ f : \sup_t |f(t)| > a \right\} \leq \eta, \quad n \geq 1.$$

ii) Pour tout ε et η positifs, il existe δ , avec $0 < \delta < 1$, et un entier n_0 tel que

$$P_n \{ f : w'_f(\delta) \geq \varepsilon \} \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

Lorsqu'on remplace le module de continuité $w'_f(\delta)$ par le module de continuité $w_f(\delta)$ qui s'approprie aussi à $C = C[0, 1]$, on a le résultat ci-dessous.

Théorème 1.3.3 ([13]) : Supposons que les deux assertions suivantes sont vérifiées :

i) Pour tout $\eta > 0$, il existe a tel que

$$P_n \{ f : |f(0)| > a \} \leq \eta, \quad n \geq 1.$$

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\eta > 0$, il existe δ , $0 < \delta < 1$ et un entier n_0 tels que

$$P_n \{ f : w_f(\delta) \geq \varepsilon \} \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

Alors la suite de loi (P_n) est équitendue. De plus, si une sous suite $(P_{n'})$ converge faiblement vers P , alors $P(C) = 1$.

Voici maintenant un résultat de convergence faible (loi) pour une suite d'éléments aléatoires de $D[0, 1]$.

Théorème 1.3.4 ([13]) : Soient X_n et X des éléments aléatoires de $D[0, 1]$ tels que

$$i) (X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X(t_1), \dots, X(t_k)) \text{ pour tout } t_1, \dots, t_k \in T_X,$$

ii) $P\{X(1) \neq X(1-)\} = 0$
 iii) $P\{|X_n(t) - X_n(t_1)| \geq \lambda, |X_n(t_2) - X_n(t)| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^{2\gamma}} [F(t_2) - F(t_1)]^{2\alpha},$
 avec $t_1 < t < t_2$, $n \geq 1$ et $\gamma \geq 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$, F fonction continue non
 décroissante sur $[0, 1]$ alors

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

1.3.3 Principes d'invariance dans $D[0, 1]$

Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, indépendantes, centrées et de même loi. On note par $S_j = \sum_{k=1}^j X_k$ la suite de sommes partielles. L'élément aléatoire $\xi_n(\omega)$ de D est défini par

$$\xi_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega). \quad (1.2)$$

Le principe d'invariance de Donsker-Prohorov dans $D[0, 1]$ s'énonce comme suit :

Théorème 1.3.5 ([13]) : *Supposons que les variables aléatoires X_j sont indépendantes, de même loi, centrées et de variance commune finie $EX_j^2 = \sigma^2 > 0$. Alors la suite de fonctions aléatoires (ξ_n) définie en (1.2) converge en loi vers le mouvement brownien W dans $D[0, 1]$.*

La convergence des lois finidimensionnelles de ξ_n vers celles du mouvement brownien se montre de la même manière que dans la proposition 3.2.1.

Pour l'équivalence, il suffit de vérifier les deux assertions du Théorème 1.3.3.

Les trajectoires du mouvement brownien standard sont montrés dans la figure suivante :

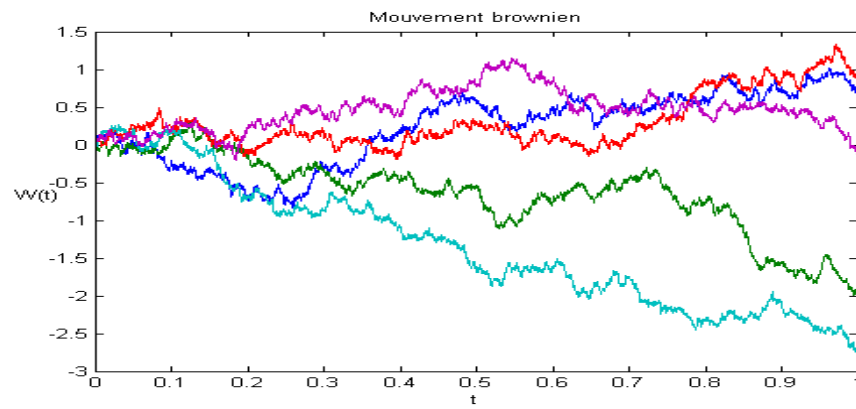


FIG. 1.1 – Mouvement brownien

La figure ci-dessous nous donne les trajectoires du pont brownien qui partent de zéro et reviennent vers zéro (ce qui justifie le nom de pont) :

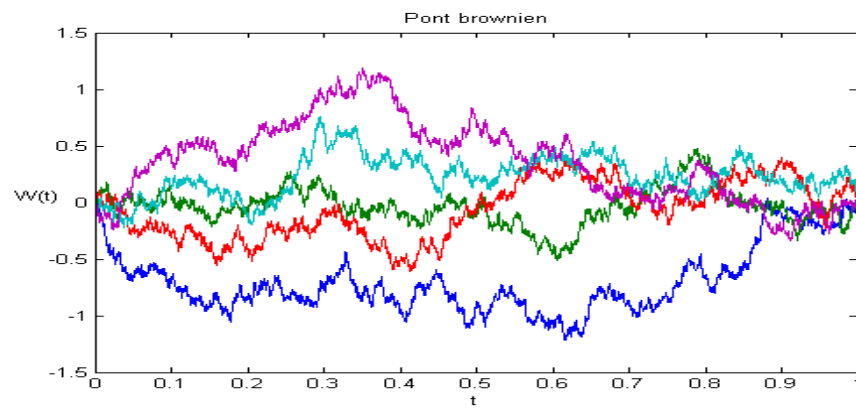


FIG. 1.2 – Pont brownien

Chapitre 2

Théorèmes limites fonctionnels hölderiens

Introduction

Le principe d'invariance dans les espaces de Hölder, pour les variables aléatoires indépendantes, centrées et de même loi, a été démontré par Lamperti [52]. Kerkycharian et Roynette [50] ont redémontré ce résultat en utilisant la base des fonctions triangulaires de Faber-Schauder et leur condition suffisante d'équitension. Hamadouche [40] a étendu le théorème de Lamperti pour une suite strictement stationnaire de variables aléatoires α -mélangeantes ou associées. Par ailleurs dans Hamadouche [42], il a été établi que le processus de Donsker-Prohorov lissé par convolution, pour les variables aléatoires indépendantes et de même loi, converge aussi vers le mouvement brownien. Le même résultat pour les variables aléatoires dépendantes est également établi pour le lissage par convolution.

2.1 Espaces de Hölder

Il est connu que les trajectoires des processus limites habituels comme le mouvement brownien W et le pont brownien B ont une régularité hölderienne pour tout ordre $\alpha < 1/2$ (donc dépassant la seule continuité). Comme l'espace de Hölder $H_\alpha[0, 1]$ a une topologie plus fine que celle de $C[0, 1]$, on obtient alors plus de fonctionnelles continues de trajectoires pour des applications statistiques. Il est alors légitime d'étudier la convergence faible dans cet espace.

On rappelle les travaux de Ciesielski [19] et [20] sur les espaces de Hölder en donnant la base de Schauder de H_α^0 et on rappelle les expressions de S_α et

T_α faisant de $(H_\alpha^0[0, 1], \|\cdot\|_\alpha)$ et $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ des espaces isomorphes, l^∞ désignant l'espace de Banach des suites bornées muni de la norme du supremum. On donne les théorèmes essentiels fournissant les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une modification à trajectoires presque sûres dans H_α . On termine le paragraphe par les principaux résultats de convergence, de compacité et d'équitension dans H_α^0 du fait que la convergence faible hölderienne d'une suite de processus stochastiques est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles de cette suite et à sa relative compacité (équitension).

2.1.1 Les espaces de Banach $H_\alpha[0, 1]$ et $H_\alpha^0[0, 1]$

Définitions

On reprend les notations et résultats de Ciesielski [19] et [20] relatifs aux espaces de fonctions hölderiennes sur $[0, 1]$.

Définition 2.1.1 *On appelle espace de Hölder d'ordre α ($0 < \alpha \leq 1$), noté $H_\alpha[0, 1]$, l'espace des fonctions définies sur $[0, 1]$, nulles en zéro et telles que*

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0 < |t-s| \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha} < \infty.$$

Le module de continuité Hölderien de f noté $w_\alpha(f, \delta)$ est défini par

$$w_\alpha(f, \delta) = \sup_{0 < |t-s| \leq \delta} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha}.$$

Le sous espace $H_\alpha^0[0, 1]$ de $H_\alpha[0, 1]$ est défini par

$$f \in H_\alpha^0 \Leftrightarrow f \in H_\alpha \text{ et } \lim_{\delta \rightarrow 0} w_\alpha(f, \delta) = 0.$$

On notera souvent $H_\alpha[0, 1]$ par H_α et $H_\alpha^0[0, 1]$ par H_α^0 .

Propriétés

L'espace $(H_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach non séparable. $(H_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$ est un sous espace fermé, séparable alors que $(H_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ est séparable pour la norme $\|\cdot\|_\beta$ pour tout $0 < \beta < \alpha$. De plus H_α s'injecte continuellement dans H_β .

2.1.2 Analyse fonctionnelle de H_α et H_α^0

On note $C_0[0, 1]$ l'hyperplan fermé des fonctions de $C[0, 1]$, nulles en zéro.

Pour définir la base Faber-Schauder, on considère la fonction triangulaire $\Delta(t)$ définie par

$$\Delta(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

pour $n = 2^j + k$, $j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$, on pose

$$\begin{aligned} \Delta_n(t) &= \Delta_{j,k}(t) = \Delta(2^j t - k), \quad t \in [0, 1], \\ \Delta_0(t) &= t 1_{[0,1]}(t), \\ \Delta_{-1}(t) &= 1_{[0,1]}(t). \end{aligned}$$

On note par

$$\begin{aligned} \lambda_0(f) &= f(1), \\ \lambda_n(f) &= \lambda_{j,k}(f) = f\left(\frac{(k+1)/2}{2^j}\right) - \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{k}{2^j}\right) + f\left(\frac{k+1}{2^j}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Lemme 2.1.1 (*Faber-Schauder*) Pour toute fonction f de $C_0[0, 1]$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(f) \Delta_n(t), \quad (2.1)$$

avec $\lambda_0(f) = f(1)$ et pour $n = 2^j + k$ ($j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$) :

$$\lambda_n(f) = \lambda_{j,k}(f) = f\left(\frac{k+1/2}{2^j}\right) - \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{k}{2^j}\right) + f\left(\frac{k+1}{2^j}\right) \right\}.$$

La série (2.1) converge uniformément sur $[0, 1]$, autrement dit, au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $C_0[0, 1]$.

Théorème 2.1.1 (*Ciesielski [19]*) : Pour toute fonction f de H_α^0 la série

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(f) \Delta_n(t)$$

converge au sens de la norme $\|\cdot\|_\alpha$. La famille $\{\Delta_n, n \geq 0\}$ est une base de Schauder de $(H_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$.

Théorème 2.1.2 (*Ciesielski [19]*) : On pose $\Delta_n^{(\alpha)} = 2^{-(j+1)\alpha} \Delta_n$ pour $n = 2^j + k$ ($j \geq 0, 0 \leq k < 2^j$) et $\Delta_0^{(\alpha)} = \Delta_0$. Les espaces $(H_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ et $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ sont isomorphes par les opérateurs S_α et $T_\alpha = S_\alpha^{-1}$ définis comme suit

$$S_\alpha : H_\alpha \rightarrow l^\infty$$

$$f \rightarrow u = (u_n)_{n \geq 0}$$

$$\text{avec } u_n = 2^{(j+1)\alpha} \lambda_n(f), n \geq 1 \text{ et } u_0 = \lambda_0(f).$$

$$T_\alpha : l^\infty \rightarrow H_\alpha$$

$$u = (u_n)_{n \geq 0} \rightarrow f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Delta_n^{(\alpha)}.$$

De plus $\|S_\alpha\|_\alpha = 1$ et

$$\frac{2}{3(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha})} \leq \|T_\alpha\|_\alpha \leq \frac{2}{(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha})}.$$

Remarque : On sait que l'approximation d'une fonction f par les sommes partielles de sa série de Faber-Schauder est aussi son approximation par interpolation linéaire entre des points d'abscisses dyadiques.

Lemme 2.1.2 (*Hamadouche [41]*) : Soit f une ligne polygonale sur $[0, 1]$, de sommets $(x_i, f(x_i))$, $(0 \leq i \leq n+1)$ avec $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$. Alors

$$\sup_{0 \leq s \leq t \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha}$$

est atteint en deux sommets $s = x_i$ et $t = x_j$, $0 \leq i < j \leq n+1$.

2.1.3 Processus à trajectoires dans H_α

Dans nos travaux, on se place dans le cas où le processus ξ_n est à trajectoires dans H_α , c'est à dire considéré comme élément aléatoire de H_α . On donne aussi les résultats sur l'existence d'une modification à trajectoires presque sûre dans cet espace.

Théorème 2.1.3 (*Kolmogorov [13]*) : Soit $(\xi_t, t \in [0, 1])$ un processus défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et supposons qu'il existe $\delta > 0$, $\gamma > 0$ et $c > 0$ tels que

$$\forall \lambda > 0, \quad P(|\xi_t - \xi_s| > \lambda) \leq \frac{c}{\lambda^\gamma} |t - s|^{1+\delta}.$$

Alors il existe une version de ξ à trajectoires dans H_α^0 pour tout $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

Théorème 2.1.4 (*Ibragimov [47]*) : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, croissante telle que pour tous s, t dans $[0, 1]$

$$E |\xi_t - \xi_s|^p \leq f^p(|t - s|).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que presque toutes les trajectoires de ξ soient dans H_α est que

$$\int_0^1 \frac{f(u)}{u^{\alpha+1+1/p}} du < \infty.$$

2.1.4 Compacité dans H_α

Dans [41], il a été démontré que la convergence faible hölderienne d'une suite de processus stochastiques est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles de cette suite et à sa relative compacité dans l'espace des mesures de probabilité sur H_α^0 muni de la topologie de la convergence étroite. Par le théorème de Prohorov, cette relative compacité équivaut à l'équitension de la suite des lois. Les deux lemmes ci-dessous permettent de caractériser les compacts de H_α^0 .

Lemme 2.1.3 (Hamadouche [41]) : *Si $0 < \alpha < \beta < 1$ et si K est borné dans H^β alors K est relativement compact dans H_α^0 .*

Lemme 2.1.4 (Suquet [79]) : *K est relativement compact dans H_α^0 si et seulement si*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in K} w_\alpha(f, \delta) = 0.$$

2.1.5 Convergence faible hölderienne

On considère un processus ξ à trajectoires hölderiennes (élément aléatoire de l'espace fonctionnel H_α). Comme H_α^0 s'injecte continuellement dans H_α , la convergence faible dans H_α^0 entraîne celle dans H_α . Le premier résultat dans ce sens est :

Proposition 2.1.1 (Hamadouche [42]) : *La convergence en loi dans H_α^0 d'une suite de processus $(\xi_n, n \geq 1)$ équivaut à l'équitension sur H_α^0 de la suite des lois $P_n = P\xi_n^{-1}$ des éléments aléatoires ξ_n et à la convergence des lois fini-dimensionnelles de ξ_n .*

Preuve : On rappelle ici les grandes lignes de la preuve (voir [42]).

Il est clair que l'équitension et la convergence des lois fini-dimensionnelles sont des conditions nécessaires pour la convergence faible hölderienne d'une suite de processus $(\xi_n)_{n \geq 1}$. D'autre part, si la suite des lois $(P_n)_{n \geq 1}$ est équitendue, il existe au moins une sous suite de $(P_n)_{n \geq 1}$ qui converge vers P_ξ ,

loi d'un élément aléatoire ξ de H_α^0 . Il reste à montrer que cette loi limite est unique.

Pour cela, on rappelle que si χ est un espace de Banach séparable, sa tribu borélienne $\mathcal{B}_\chi$ coïncide avec sa tribu cylindrique $\mathcal{C}_\chi$, tribu engendrée par les fonctionnelles φ du dual topologique χ' . Ainsi si on note, pour ξ élément aléatoire de χ et φ élément déterministe de χ' ,

$$L_\xi(\varphi) = E \exp(i(\xi, \varphi)) = E \exp(i\varphi(\xi)),$$

la fonctionnelle caractéristique de ξ , on a

$$L_\xi(\varphi) = L_\zeta(\varphi), \quad \forall \varphi \in \chi' \iff \xi \text{ et } \zeta \text{ ont même loi } (P_\xi = P_\zeta).$$

Par le théorème de convergence dominée, on voit facilement que la fonctionnelle caractéristique est continue sur χ' . Il suffit donc de tester l'égalité de L_ξ et L_ζ sur une partie dense de χ' pour vérifier l'égalité des lois de ξ et ζ .

Revenons à H_α^0 et soit φ un élément du dual $(H_\alpha^0)'$. On a la caractérisation suivante :

Théorème 2.1.5 (Ciesielski [19]) : *Toute fonctionnelle linéaire continue φ sur $(H_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$ est de la forme*

$$\varphi(f) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n u_n$$

avec $u_0 = \lambda_0(f)$, $u_n = 2^{(j+1)\alpha} \lambda_n(f)$, $n = 2^j + k$, ($j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$) et $a = (a_0, a_1, \dots) \in l^1$.

De plus $\|\varphi\|_{(H_\alpha^0)'} \leq \|S_\alpha\| \|a\|_{l^1}$, $\|a\|_{l^1} \leq \|T_\alpha\| \|\varphi\|_{(H_\alpha^0)'}$ et les constantes $\|S_\alpha\|$ et $\|T_\alpha\|$ sont optimales.

Le théorème ci-dessus nous fournit une suite $a = (a_n) \in l^1(\mathbb{N})$ telle que

$$\varphi(f) = a_0 f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{(j+1)\alpha} \lambda_n(f), \quad f \in H_\alpha^0. \quad (2.2)$$

De plus $\|\varphi\|_{(H_\alpha^0)'} \leq \|S_\alpha\| \|a\|_{l^1}$. Cette inégalité nous permet de voir, via le critère de Cauchy, que la série notée par (2.2) converge pour la topologie de la norme de $(H_\alpha^0)'$. Il en résulte immédiatement que la famille des évaluations aux points dyadiques ($f \rightarrow f(k2^{-j})$) est totale dans $(H_\alpha^0)'$.

Supposons maintenant que $(P_n)_{n \geq 1}$ ait deux sous-suites dont les lois convergent respectivement vers P_ξ et P_ζ . La convergence des lois fini-dimensionnelles de $(P_n)_{n \geq 1}$ entraîne l'égalité de P_ξ et P_ζ , ce qui achève la démonstration.

2.1.6 Équitension hölderienne

L'essentiel de la difficulté pour montrer la convergence hölderienne réside dans la vérification de l'équitension. Une condition suffisante est donnée par :

Théorème 2.1.6 (*Kerkycharian et Roynette [50]*) : Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de processus nuls en zéro et vérifiant pour des constantes $\gamma > 0$, $\delta > 0$ et $c > 0$

$$\forall \lambda > 0, \quad P(|\xi_n(t) - \xi_n(s)| > \lambda) \leq \frac{c}{\lambda^\gamma} |t - s|^{1+\delta}.$$

Alors la suite des lois P_n des processus ξ_n est équitendue dans H_α^0 pour $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

La version des moments de ce théorème est obtenue via l'inégalité de Markov. Elle s'énonce par le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.1 (*Lamperti [52]*) : Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de processus nuls en zéro et vérifiant pour des constantes $\gamma > 0$, $\delta > 0$ et $c > 0$

$$E |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \leq c |t - s|^{1+\delta}.$$

Alors la suite des lois P_n des processus ξ_n est équitendue dans H_α^0 pour $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

On termine ce chapitre en énonçant ce résultat plus maniable pour la vérification des conditions de moments et sur lequel repose les démonstrations de nos principes d'invariance.

Théorème 2.1.7 (*Hamadouche [42]*) : Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de processus à trajectoires dans H_α^0 , vérifiant les conditions suivantes :

a) Il existe des constantes $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et une suite de nombres positifs $(a_n) \searrow 0$ telles que

$$E |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^a \leq c |t - s|^b, \quad (2.3)$$

pour tout n et tous s, t tels que $|t - s| \geq a_n$;

b) $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P \{w_\alpha(\xi_n, a_n) > \varepsilon\} = 0$.

Alors pour tout $\alpha < a^{-1}(\min(a, b) - 1)$, la suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$ est équitendue dans H_α^0 .

Preuve : On rappelle aussi ici les grandes lignes de la preuve (Voir Hamadouche [42]).

On construit un autre processus ζ_n qui interpole linéairement ξ_n aux points $t_k = ka_n$ ($0 \leq k \leq k_n$) avec $k_n = \left\lceil \frac{1}{a_n} \right\rceil$ et $t_{k_n+1} = 1$. Les trajectoires de ζ_n sont des lignes polygonales, donc dans H_α^0 , pour tout $\alpha \leq 1$. On utilise alors :

l'hypothèse a) pour montrer l'équitension de $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ et l'hypothèse b) pour prouver la convergence en probabilité vers zéro de $\|\xi_n - \zeta_n\|_\alpha$. L'équitension de $\{\xi_n, n \geq 1\}$ s'en déduit facilement via la caractérisation séquentielle de la relative compacité des familles de mesures de probabilité sur un espace polonais (ici H_α^0).

Première étape : *Equitension de $\{\zeta_n, n \geq 1\}$.*

Pour prouver l'équitension dans H_α^0 , nous nous appuyerons sur la condition suffisante de Kerkycharian et Roynette [50]. Plus précisément, en utilisant le corollaire 2.1.1, nous souhaitons montrer

$$E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a \leq K |t - s|^\gamma, \quad n \geq 1, \quad s, t \in [0, 1] \quad (2.4)$$

où $\gamma = \min(a, b)$.

1^{er} cas : Si s et t sont dans le même segment $I_k = [ka_n, (k+1)a_n]$, ($0 \leq k \leq k_n$), alors $|t - s| \leq a_n \leq 1$ et la définition de ζ_n nous donne

$$|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| = a_n^{-1} |t - s| |\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|,$$

d'où en prenant les moments d'ordre a et en utilisant (2.3)

$$\begin{aligned} E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a &= a_n^{-a} |t - s|^a E |\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|^a \\ &\leq c a_n^{b-a} |t - s|^a. \end{aligned}$$

On a $|t - s| \leq a_n \leq 1$, si $b - a < 0$, on majore a_n^{b-a} par $|t - s|^{b-a}$; si $b - a \geq 0$, on majore par a_n^{b-a} par 1. Nous obtenons ainsi

$$E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a \leq c |t - s|^\gamma, \quad \gamma = \min(a, b).$$

2^e cas : si $s \in I_k$ et $t \in I_{k+1}$, on écrit

$$|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| \leq |\zeta_n(t) - \zeta_n(t_{k+1})| + |\zeta_n(t_{k+1}) - \zeta_n(s)|,$$

et par convexité, on se ramène à la majoration du 1^{er} cas

$$\begin{aligned} E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a &\leq 2^{a-1} c (|t - t_{k+1}|^\gamma + |t_{k+1} - s|^\gamma) \\ &\leq 2^{a-1} c |t - s|^\gamma, \end{aligned}$$

car $\gamma > 0$, $|t - t_{k+1}| \leq |t - s|$ et $|t_{k+1} - s| \leq |t - s|$.

3^e cas : Si $s \in I_k$ et $t \in I_{k+j}$, avec $j > 1$, on découpe l'accroissement ζ_n en trois termes :

$$|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| \leq |\zeta_n(t) - \zeta_n(t_{k+j})| + |\zeta_n(t_{k+j}) - \zeta_n(t_{k+1})| + |\zeta_n(t_{k+1}) - \zeta_n(s)|.$$

Avec l'inégalité de Jensen, la condition a) et le premier cas, on obtient :

$$\begin{aligned} E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a &\leq 3^{a-1} c (|t - t_{k+j}|^\gamma + |t_{k+j} - t_{k+1}|^\gamma + |t_{k+1} - s|^\gamma) \\ &\leq 3^a c |t - s|^\gamma \end{aligned}$$

car $|t - t_{k+j}|$, $|t_{k+j} - t_{k+1}|$ et $|t_{k+1} - s|$ sont inférieurs à $|t - s|$.

Ainsi, l'inégalité de moment (2.4) est bien vérifiée (avec $K = 3^a c$). L'équation de $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ en découle.

Deuxième étape : *Convergence en probabilité de $\|\xi_n - \zeta_n\|_\alpha$.*

Posons pour alléger les écritures $\chi_n = \xi_n - \zeta_n$. Nous voulons montrer la convergence en probabilité vers zéro de la suite de variables aléatoires réelles :

$$\|\chi_n\|_\alpha = \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t - s|^\alpha}.$$

Comme à la première étape, nous discutons suivant la localisation de s et t .

1^{er} cas : $s, t \in I_k$ donc $|t - s| < a_n$. on a

$$\frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq \frac{|\xi_n(t) - \xi_n(s)|}{|t - s|^\alpha} + \frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t - s|^\alpha}.$$

La trajectoire de ζ_n étant affine sur I_k , on a :

$$\frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t - s|^\alpha} = \frac{|\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|}{a_n} |t - s|^{1-\alpha},$$

qui est de la forme $f(u) = ku^{1-\alpha}$, $u = |t - s| \in [0, a_n]$. La fonction f est croissante, son maximum est atteint en $u = a_n$ donc

$$\begin{aligned} \frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t - s|^\alpha} &\leq \frac{|\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|^\alpha}{a_n} \\ &= \frac{|\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|^\alpha}{a_n} \\ &\leq w_\alpha(\xi_n, a_n). \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq 2w_\alpha(\xi_n, a_n).$$

2^e cas $s \in I_k$, $t \in I_{k+1}$. On se ramène au premier cas par l'inégalité triangulaire

$$\frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq \frac{|\chi_n(t) - \chi_n(t_{k+1})|}{|t - s|^\alpha} + \frac{|\chi_n(t_{k+1}) - \chi_n(s)|}{|t - s|^\alpha}.$$

Comme $|t - s| \geq |t - t_{k+1}|$ et $|t - s| \geq |s - t_{k+1}|$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t - s|^\alpha} &\leq 4 \max_{|t-s| \leq 1} \frac{|\xi_n(t) - \xi_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \\ &= 4w_\alpha(\xi_n, a_n). \end{aligned}$$

3^e cas : $s \in I_k$, $t \in I_{k+j}$ ($j \geq 1$).

$$\frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq \frac{|\chi_n(t) - \chi_n(t_{k+j})|}{|t - s|^\alpha} + \frac{|\chi_n(s) - \chi_n(t_{k+1})|}{|t - s|^\alpha} + \frac{|\chi_n(t_{k+1}) - \chi_n(t_{k+j})|}{|t - s|^\alpha}$$

Le dernier terme est nul car $\xi_n(t_i) = \zeta_n(t_i)$ pour $0 \leq i \leq k_n$. D'après le premier cas, on obtient

$$\frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq 4w_\alpha(\xi_n, a_n), \quad 0 \leq s < t \leq 1.$$

Finalement, dans tous les cas de figure, $\|\zeta_n - \xi_n\|_\alpha \leq 4w_\alpha(\xi_n, a_n)$. L'hypothèse b) du théorème nous donne alors la convergence en probabilité vers zéro de $\|\zeta_n - \xi_n\|_\alpha$. Ainsi $\{\xi_n, n \geq 1\}$ est équitendue dans H_α^0 .

2.2 Principes d'invariance dans H_α : cas de suites iid

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées et de variance commune

$$EX_j^2 = \sigma^2. \quad (2.5)$$

On note par ξ_n les lignes polygonales obtenues par interpolation linéaire aux points $\left(\frac{j}{n}, \frac{S_j}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ où

$$S_j = \sum_{k=1}^j X_k. \quad (2.6)$$

Le premier principe d'invariance dans H_α , pour les variables aléatoires indépendantes et de même loi, est donné par le théorème de Lamperti.

Théorème 2.2.1 (Lamperti [52]) : *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, centrées, réduites. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ tel que $E|X_j|^\gamma < \infty$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq j < n$:*

$$\xi_n(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{0 < k \leq j} X_k(\omega) + (nt - j) X_{j+1}(\omega) \right], \quad \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}, \quad (2.7)$$

alors la suite de lois de ξ_n converge étroitement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0 , pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Ce résultat démontré par Lamperti, en montrant la convergence des lois fini-dimensionnelles de ξ_n ainsi que l'équitension de la suite de ses lois, a été redémontré par Kerkycharian et Roynette [50], en utilisant la base des fonctions triangulaires de Faber-Schauder et leur condition suffisante d'équitension. Il est par ailleurs, étendu par Hamadouche pour une suite strictement

stationnaire de variables aléatoires dépendantes α -mélangeantes ou associées. De plus, Hamadouche [42] a étendu le théorème de Donsker-Prohorov pour le cas de lissage par convolution sous les conditions définies ci-dessous :

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées telles que $E |X_1|^\gamma < +\infty$ pour un $\gamma > 2$. On note σ^2 leur variance commune. On pose encore $S_i = \sum_{k=1}^i X_k$ et on considère le processus de sommes partielles normalisé de Donsker-Prohorov

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n} S_{[nt]}(t), \quad t \in [0,1], \quad (2.8)$$

$[nt]$ étant la partie entière de (nt) .

Soit K une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |u| K(u) du < \infty \quad (2.9)$$

et $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs tendant vers zéro et vérifiant :

$$\frac{1}{b_n} = O(n^{\tau/2}), \quad 0 < \tau < \frac{1}{2}. \quad (2.10)$$

On définit la suite $(K_n)_{n \geq 1}$ de noyaux de convolution par

$$K_n(t) = \frac{1}{b_n} K\left(\frac{t}{b_n}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Nous considérons le processus de sommes partielles lissé défini par :

$$\zeta_n(t) = (\xi_n * K_n)(t) - (\xi_n * K_n)(0), \quad t \in [0,1]. \quad (2.12)$$

Le terme correctif $(\xi_n * K_n)(0)$ assure la nullité en zéro du processus ζ_n .

Le lemme suivant nous assure que ζ_n est dans $H_{\frac{1}{2}}[0,1]$.

Lemme 2.2.1 (*Hamadouche [42]*) : *soit f une fonction mesurable, bornée à support dans $[0,1]$ et K un noyau de convolution tel que*

$$K \in L^1([-1,1]) \cap L^{\frac{1}{2}}([-1,1]), \quad (2.13)$$

$$|K(x) - K(y)| \leq \alpha(K) |x - y|, \quad x, y \in [-1,1], \quad (2.14)$$

*pour une certaine constante $\alpha(K)$. Alors la restriction à l'intervalle $[0,1]$ de $(f * K) - (f * K)(0)$ est dans $H_{\frac{1}{2}}[0,1]$.*

Lorsque les conditions énoncées ci-dessus sur K_n sont remplies, on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.2.2 (*Hamadouche* [42]) : *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées et réduites telles que $EX_1^\gamma < \infty$ pour un $\gamma > 2$. On suppose que les noyaux de convolution K_n vérifient $((2.9)), (2.11), (2.13)$ et (2.14) . Alors la suite de processus de sommes partielles lissés ζ_n définis par (2.12) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H_α^0 , pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max\left(\tau, \frac{1}{\gamma}\right)$.*

On montre l'équitension de la suite des lois de ζ_n en utilisant le théorème 2.1.7 avec $a_n = 1/n$.

Pour la convergence des lois fini-dimensionnelles, on se ramène à celles de ξ_n en montrant que la distance entre $(\zeta_n(t_1), \dots, \zeta_n(t_k))$ et $(\xi_n(t_1), \dots, \xi_n(t_k))$ tend en probabilité vers zéro.

2.3 Principes d'invariance dans H_α : cas de suites dépendantes

2.3.1 Quelques outils de dépendance

Les résultats suivants sont nécessaires lors de l'établissement des principes d'invariance sous dépendance.

Définition 2.3.1 *On appelle coefficient de mélange entre deux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ le nombre*

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|.$$

Définition 2.3.2 *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé. On définit le coefficient de mélange fort α_n par*

$$\alpha_n = \sup \left\{ \alpha(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_{n+k}^\infty) \mid k \in \mathbb{N}^* \right\},$$

où $\mathcal{F}_j^l$ désigne la tribu engendrée par les variables $(X_i, j \leq i \leq l)$.

Définition 2.3.3 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est α -mélangeante (ou fortement mélangeante) si la suite de coefficients

$$\alpha_n = \sup \left\{ \alpha(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_{n+k}^\infty) \quad k \in \mathbb{N}^* \right\},$$

tend vers zéro quand n tend vers ∞ et F_j^l désigne la tribu engendrée par les variables $(X_i, \quad j \leq i \leq l)$.

Définition 2.3.4 On dit que $X_1, X_2, \dots, X_m$ est une suite finie de variables associées si

$$\text{Cov}(f(X_1, \dots, X_m), g(X_1, \dots, X_m)) \geq 0,$$

pour toute paire f, g de fonctions $R^m \rightarrow R$, croissantes coordonnée par coordonnée et telles que cette covariance existe.

Définition 2.3.5 On dit qu'une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables associées si toute sous-suite finie est associée.

2.3.2 Théorèmes limites fonctionnels

On va énoncer quelques théorèmes sur les inégalités des moments et des théorèmes limites fonctionnels pour les suites de variables aléatoires dépendantes.

Le théorème ci-dessous nous donne une majoration de la valeur absolue de la covariance de deux variables aléatoires à variance finie.

Théorème 2.3.1 (Davidov [23]) : Soient X et Y des variables aléatoires réelles centrées de variance finie. Pour $p, q, r \geq 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$,

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq 8\alpha(X, Y)^{1/p} E^{1/q} |X|^q E^{1/r} |Y|^r$$

où α est le coefficient de mélange.

Le théorème suivant nous fournit également une majoration pour le moment d'ordre γ d'une somme partielle de suites de variables aléatoires α -mélangeantes.

Théorème 2.3.2 (Yokoyama [84]) : Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire, α -mélangeante telle que $EX_1 = 0$, $E|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ pour un $\gamma > 2$, un $\varepsilon > 0$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} \alpha_n^{\varepsilon/(\gamma+\varepsilon)} < +\infty,$$

alors il existe $C > 0$ tel que

$$E |X_1 + X_2 + \dots + X_n|^\gamma \leq Cn^{\gamma/2}.$$

Le théorème suivant nous fournit les conditions suffisantes pour que la suite (X_j) α -mélangeante satisfasse le théorème central limite fonctionnel dans $D[0, 1]$.

Théorème 2.3.3 (*Odaïra, Yoshihara [62]*) : Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite α -mélangeante vérifiant pour des constantes $\varepsilon > 0$, $\gamma > 2$ les conditions :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^{\varepsilon/(\gamma+\varepsilon)} < +\infty,$$

$$\sup_{j \geq 1} E |X_j|^{\gamma+\varepsilon} < +\infty$$

Alors $(X_j)_{j \geq 1}$ satisfait le théorème central limite fonctionnel dans $D[0, 1]$.

Voici maintenant une inégalité des moment d'ordre γ pour les suites stationnaires de variables aléatoires associées.

Théorème 2.3.4 (*Birkel [16]*) : Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires associées, centrées, telles que $\sup_{j \geq 1} E |X_j|^{\gamma+\varepsilon} < +\infty$ pour un $\gamma > 2$ et un $\varepsilon > 0$.

On suppose que le coefficient

$$u(n) = \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{j: |j-k| \geq n} \text{cov}(X_1, X_k) = O(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon)/(2\varepsilon)})$$

Alors il existe une constante b telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\sup_m E |S_{n+m} - S_m|^\gamma \leq bn^{\gamma/2}, \text{ où } S_k = \sum_{j=1}^k X_j.$$

Le théorème suivant nous donne un principe d'invariance dans $C[0, 1]$ pour des variables aléatoires associées et à variance finie.

Théorème 2.3.5 (Newman, Wright [55]) : *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire de variables aléatoires centrées, de variance finie, associées telles que*

$$\sigma^2 = EX_1^2 + 2\text{cov}(X_1, X_j) < +\infty.$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit le processus :

$$W_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^j X_k + (nt - j) X_{j+1} \right), \quad \frac{j}{n} \leq t \leq \frac{j+1}{n}, \quad 0 \leq j < n.$$

Alors W_n converge faiblement dans $C[0, 1]$ vers le mouvement brownien W . A fortiori, les lois fini-dimensionnelles de W_n convergent vers celles de W .

Le théorème suivant, donnant un principe d'invariance dans H_α^0 , sera utilisé dans le chapitre quatre lorsque la dépendance des variables aléatoires considérées est de type α -mélange.

Théorème 2.3.6 (Hamadouche [42]) : *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire α -mélangeante de variables aléatoires centrées. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ et $\varepsilon > 0$ tels que $E|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ et*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} [\alpha_n]^{\varepsilon/(\gamma+\varepsilon)} < \infty.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^$ et $0 \leq j < n$:*

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[\sum_{k=1}^{k=j} X_k + (nt - j) X_{j+1} \right], \quad \text{si } \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n},$$

où

$$\sigma^2 = EX_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \text{Cov}(X_1, X_j) < \infty.$$

Les lois de ξ_n convergent étroitement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Par les théorèmes 2.1.7 et 2.3.2, on montre l'équitension de la suite des lois des processus ξ_n alors que la convergence des lois fini-dimensionnelles de ξ_n vers celles du mouvement brownien se fait par le Théorème 2.3.3.

Un principe d'invariance dans H_α^0 pour une suite de variables aléatoires associées est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.3.7 (Hamadouche [42]) : *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire de variables associées, centrées telles que $E|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ pour un $\gamma > 2$ et un $\varepsilon > 0$. On suppose que*

$$u(n) = \sum_{j \geq n+1} \text{Cov}(X_1, X_j) = O\left(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon)/(2\varepsilon)}\right)$$

et

$$0 < \sigma^2 = EX_1^2 + u(1) < \infty.$$

Alors les lois de ξ_n convergent étroitement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0 , pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

L'équitension se démontre comme dans le cas α -mélangeant en utilisant le Théorème 2.3.4. La convergence des lois finidimensionnelles résulte du Théorème 2.3.5.

Voici maintenant deux principes d'invariance établis pour le lissage polygonal de suites α -mélangeantes ou associées de variables aléatoires.

Théorème 2.3.8 (Hamadouche [42]) : *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire α -mélangeante de variables aléatoires centrées. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ et $\varepsilon > 0$ tels que $E|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ et*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} [\alpha_n]^{\varepsilon/(\gamma+\varepsilon)} < \infty.$$

Alors

$$\sigma^2 = EX_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \text{Cov}(X_1, X_j)$$

est finie. On suppose de plus que $\sigma^2 > 0$ et que les noyaux de convolution K_n vérifient (2.9), (2.11), (2.13) et (2.14). Alors la suite de processus de sommes partielles lissés ζ_n définis par (2.12) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max\left(\tau, \frac{1}{\gamma}\right)$.

L'équitension se démontre de la même manière que dans le théorème 2.2.2 en utilisant le théorème 2.1.7 et le théorème 2.3.2.

Pour la convergence des lois fini-dimensionnelles de ζ_n , on se ramène à celles de ξ_n qui convergent vers celles du mouvement brownien grâce au théorème 2.3.3.

Théorème 2.3.9 (*Hamadouche [42]*) : Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire de variables associées, centrées telles que $E|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ pour un $\gamma > 2$ et un $\varepsilon > 0$. On suppose que

$$u(n) = \sum_{j \geq n+1} \text{Cov}(X_1, X_j) = O(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon)/(2\varepsilon)})$$

et

$$\sigma^2 = EX_1^2 + u(1) > 0.$$

On suppose de plus que les noyaux de convolution K_n vérifient (2.9),

(2.11), (2.13) et (2.14). Alors la suite de processus de sommes partielles lissés ζ_n définis par (2.12) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max\left(\tau, \frac{1}{\gamma}\right)$.

L'équitension se démontre de la même manière que dans le théorème 2.2.2 en utilisant le théorème 2.1.7 et le théorème 2.3.4.

Pour la convergence des lois fini-dimensionnelles de ζ_n , on se ramène à celles de ξ_n qui convergent vers celles du mouvement brownien grâce au théorème 2.3.5.

Chapitre 3

Théorèmes limites fonctionnels hölderiens dans le cas non stationnaire.

3.1 Introduction

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, non nécessairement de même loi, centrées et de variances $EX_j^2 = \sigma_j^2$. On note par ξ_n les lignes polygonales obtenues par interpolation linéaire aux points $\left(\frac{j}{n}, \frac{S_j}{s_n}\right)$ où $S_j = \sum_{k=1}^j X_k$ et $s_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$.

Dans ce chapitre, on se propose d'étendre le théorème de Lamperti, aussi bien pour le lissage polygonal que pour le lissage par convolution, au cas de variables aléatoires indépendantes, centrées n'ayant pas nécessairement la même loi. Il constitue notre première contribution [44]

3.2 Lissage polygonal du processus de sommes partielles

Dans ce paragraphe, on présente la première extension du théorème de Lamperti pour les variables aléatoires indépendantes non identiquement distribuées.

Théorème 3.2.1 ([44]) *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées, non de même loi. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$, $m > 0$ et $M > 0$ telles que*

$$m \leq \sigma_j^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \sigma^2 \text{ et } E|X_j|^\gamma \leq M < \infty, \quad \forall j \geq 1. \quad (3.1)$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq j < n$

$$\xi_n(t, \omega) = \frac{1}{s_n} \left[\sum_{k=1}^{k=j} X_k(\omega) + (nt - j) X_{j+1}(\omega) \right], \quad \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}. \quad (3.2)$$

Alors la suite de lois de ξ_n converge étroitement vers la mesure de Wiener P_w dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}$.

Preuve : D'après la proposition 2.1.1, il suffit de montrer l'équitension de la suite des lois des éléments aléatoires ξ_n et la convergence des lois finidimensionnelles de ξ_n vers celles du mouvement brownien.

Equitension des lois $P_n = P\xi_n^{-1}$:

D'après le corollaire 2.1.1 il suffit de montrer que sous les hypothèses du théorème 3.2.1, on a

$$E |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \leq K |t - s|^\gamma \quad \text{avec } 1 + \delta = \frac{\gamma}{2} > 1.$$

Cas 1 : $\frac{j}{n} \leq s \leq t \leq \frac{j+1}{n}$

$$\begin{aligned} |\xi_n(t) - \xi_n(s)| &= \left| \frac{1}{s_n} ([S_j + (nt - j)X_{j+1}(\omega)] - [S_j + (ns - j)X_{j+1}(\omega)]) \right| \\ &= \left| \frac{1}{s_n} n(t - s) X_{j+1}(\omega) \right| \end{aligned}$$

puisque $X_j(\omega)$ a la même valeur sur l'intervalle $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ pour tous s, t et ce $\forall j \geq 1$. L'hypothèse (3.1) implique qu'il existe une constante M' telle que

$$E |X_j|^2 \leq M' \quad \forall j \geq 1. \quad (3.3)$$

En effet, l'inégalité de Hölder suivante :

$$E |XY| \leq (E |X|^p)^{\frac{1}{p}} (E |Y|^q)^{\frac{1}{q}} \quad \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

appliquée à X_j^2 et à la variable déterministe $X = 1$ avec $p = \frac{\gamma}{2}$ et $q = \frac{\gamma}{\gamma-2}$ donne

$$E |X_j^2 \times 1| \leq \left(E |X_j^2|^{\frac{\gamma}{2}} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left(E |1|^{\frac{\gamma}{\gamma-2}} \right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma}} = (E |X_j|^\gamma)^{\frac{2}{\gamma}}.$$

D'après (3.1) et ce qui précède, on a

$$m < E |X_j|^2 \leq (E |X_j|^\gamma)^{\frac{2}{\gamma}} < M^{\frac{2}{\gamma}} = M'.$$

L'utilisation des précédentes inégalités nous permet de majorer et minorer s_n comme suit

$$mn \leq s_n^2 \leq M'n. \quad (3.4)$$

Ce qui implique

$$|\xi_n(t) - \xi_n(s)| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{nm}} n (t-s) X_{j+1} \right| = \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{2}} |(t-s) X_{j+1}|.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} E |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma &\leq E \left| \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{2}} (t-s) X_{j+1} \right|^\gamma \\ &\leq \left(\left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^\gamma |t-s|^\gamma E |X_{j+1}|^\gamma \\ &\leq \left(\frac{1}{m} \right)^{\frac{\gamma}{2}} (n |t-s|)^{\frac{\gamma}{2}} |t-s|^{\frac{\gamma}{2}} E |X_{j+1}|^\gamma \\ &\leq m^{-\frac{\gamma}{2}} M |t-s|^{\frac{\gamma}{2}} = K |t-s|^{1+\delta}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

puisque $E |X_{j+1}|^\gamma < M$ et $n |t-s| \leq 1$, avec $K = m^{-\frac{\gamma}{2}} M$ et $1+\delta = \frac{\gamma}{2} > 1$.

Cas 2 : $\frac{j-1}{n} \leq s \leq \frac{j}{n} \leq \frac{j+k}{n} \leq t \leq \frac{j+k+1}{n}$

$$\begin{aligned} |\xi_n(t) - \xi_n(s)| &= \left| \xi_n(t) - \xi_n\left(\frac{j+k}{n}\right) + \xi_n\left(\frac{j+k}{n}\right) - \xi_n\left(\frac{j}{n}\right) + \xi_n\left(\frac{j}{n}\right) - \xi_n(s) \right| \\ &\leq \left| \xi_n(t) - \xi_n\left(\frac{j+k}{n}\right) \right| + \left| \xi_n\left(\frac{j+k}{n}\right) - \xi_n\left(\frac{j}{n}\right) \right| + \left| \xi_n\left(\frac{j}{n}\right) - \xi_n(s) \right|. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen suivante :

$$E \left| \sum_{i=1}^n X_i \right|^\gamma \leq n^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n E |X_i|^\gamma,$$

on obtient

$$E |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \leq 3^{\gamma-1} (E \left| \xi_n(t) - \xi_n(\frac{j+k}{n}) \right|^\gamma + E \left| \xi_n(\frac{j+k}{n}) - \xi_n(\frac{j}{n}) \right|^\gamma + E \left| \xi_n(\frac{j}{n}) - \xi_n(s) \right|^\gamma).$$

Le premier terme et le troisième terme du second membre de l'inégalité se traitent de la même manière que le cas précédent

$$E \left| \xi_n(t) - \xi_n(\frac{j+k}{n}) \right|^\gamma \leq K_1 |t-s|^{1+\delta}, \quad (3.6)$$

$$E \left| \xi_n(\frac{j}{n}) - \xi_n(s) \right|^\gamma \leq K_3 |t-s|^{1+\delta}. \quad (3.7)$$

Pour le terme du milieu

$$E \left| \xi_n(\frac{j+k}{n}) - \xi_n(\frac{j}{n}) \right|^\gamma = E \left| \frac{1}{s_n} \left[\sum_{i=1}^{j+k} X_i \right] - \frac{1}{s_n} \left[\sum_{i=1}^j X_i \right] \right|^\gamma = E \left| \frac{1}{s_n} \sum_{i=j+1}^{j+k} X_i \right|^\gamma.$$

On utilise (3.4) pour minorer s_n , ce qui nous donne

$$E \left| \xi_n(\frac{j+k}{n}) - \xi_n(\frac{j}{n}) \right|^\gamma \leq \left(\frac{1}{nm} \right)^{\frac{\gamma}{2}} E \left| \sum_{i=j+1}^{j+k} X_i \right|^\gamma.$$

En appliquant l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund au dernier terme du second membre de l'inégalité, on obtient

$$\begin{aligned} E \left| \xi_n(\frac{j+k}{n}) - \xi_n(\frac{j}{n}) \right|^\gamma &\leq \left(\frac{1}{nm} \right)^{\frac{\gamma}{2}} C_\gamma \left(\sum_{i=1}^k E |X_i|^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{nm} \right)^{\frac{\gamma}{2}} C_\gamma (kM')^{\frac{\gamma}{2}} = C_\gamma \left(\frac{M'}{m} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{\gamma}{2}}, \end{aligned}$$

puisque d'après (3.4), $E |X_j|^2 < M'$.

D'autre part, comme $|t-s| \geq \frac{j+k}{n} - \frac{j}{n} = \frac{k}{n}$ on a

$$E \left| \xi_n(\frac{j+k}{n}) - \xi_n(\frac{j}{n}) \right|^\gamma \leq C_\gamma \left(\frac{M'}{m} \right)^{\frac{\gamma}{2}} |t-s|^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Il existe donc une constante $K_2 = C_\gamma \left(\frac{M'}{m} \right)^{\frac{\gamma}{2}}$ et $\delta > 0$ telles que

$$E \left| \xi_n\left(\frac{j+k}{n}\right) - \xi_n\left(\frac{j}{n}\right) \right|^\gamma \leq K_2 |t-s|^{1+\delta}. \quad (3.8)$$

Les inégalités (3.6), (3.7) et (3.8) nous donnent finalement

$$E |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \leq 3^{\gamma-1} (K_1 + K_2 + K_3) |t-s|^{1+\delta}.$$

On peut conclure qu'il existe une constante $K = 3^{\gamma-1} (K_1 + K_2 + K_3)$ telle que

$$E |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \leq K |t-s|^{1+\delta} \quad \text{avec} \quad 1+\delta = \frac{\gamma}{2} > 1.$$

D'après le corollaire 2.1.1, la suite des lois P_n du processus ξ_n est équitendue dans H_α^0 pour $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Convergence des lois fini-dimensionnelles.

Cette partie de la démonstration sera utilisée dans la démonstration du théorème 3.3.1 pour le lissage par convolution. Il est donc utile de l'énoncer sous forme de proposition.

Proposition 3.2.1 ([44]) *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées, pas nécessairement identiquement distribuées. On suppose qu'il existe des constantes $\gamma > 2$, $m > 0$ et $M > 0$ telles que*

$$m \leq \sigma_j^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \sigma^2 \quad \text{et} \quad E |X_j|^\gamma \leq M < \infty, \quad \forall j \geq 1. \quad (3.9)$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^$ et $0 \leq j < n$*

$$\xi_n(t, \omega) = \frac{1}{s_n} \left[\sum_{k=1}^{k=j} X_k(\omega) + (nt - j) X_{j+1}(\omega) \right], \quad \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}. \quad (3.10)$$

Alors la suite des lois fini-dimensionnelles de la suite de processus ξ_n converge vers celles du mouvement Brownien W dans H_α^0 , pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}$.

Preuve

Montrons d'abord que pour un point donné s , $\xi_n(s) \xrightarrow{\mathcal{L}} W_s$. De la définition de ξ_n , on déduit

$$\left| \xi_n(s) - \frac{S_{[ns]}}{s_n} \right| = (ns - [ns]) \frac{1}{s_n} X_{[ns]+1} \leq \frac{1}{s_n} X_{[ns]+1}$$

puisque $(ns - [ns]) \leq 1$.

D'après le théorème 1.1.11, il suffit de montrer

$$\frac{1}{s_n} X_{[ns]+1} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{et} \quad \frac{S_{[ns]}}{s_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} W_s.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{VAR}(X)}{\varepsilon^2}$ avec $\varepsilon > 0$, appliquée à $\frac{1}{s_n} X_{[ns]+1}$ nous donne

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{s_n} X_{[ns]+1} \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\text{VAR}\left(\frac{1}{s_n} X_{[ns]+1}\right)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{1}{s_n^2} \frac{\text{VAR}(X_{[ns]+1})}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{1}{nm} \frac{M'}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

puisque $nm \leq s_n^2$ et $\text{VAR}(X_j) \leq M', \forall j \geq 1$.

Ainsi

$$\frac{1}{s_n} X_{[ns]+1} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0.$$

D'autre part, d'après le théorème de Lindeberg, $\frac{S_n}{s_n}$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0, s)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{s_n^2} \int_{|X_k| \geq \varepsilon s_n} X_k^2 dP = 0.$$

Or sous l'hypothèse $|X_k| \geq \varepsilon s_n$, nous avons $1 \leq \frac{|X_k|^\delta}{|\varepsilon s_n|^\delta}$ et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{s_n^2} \int_{|X_k| \geq \varepsilon s_n} X_k^2 dP &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{s_n^2} \int_{|X_k| \geq \varepsilon s_n} \frac{|X_k|^{2+\delta}}{|\varepsilon s_n|^\delta} dP \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\varepsilon^\delta s_n^{2+\delta}} \int_{|X_k| \geq \varepsilon s_n} |X_k|^{2+\delta} dP \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\varepsilon^\delta s_n^{2+\delta}} E |X_k|^{2+\delta}.$$

Comme par hypothèse, $E |X_i|^{2+\delta} < M$ et $m < \sigma_i^2$, on obtient

$$s_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2} > (nm)^{\frac{1}{2}} \implies s_n^{2+\delta} > (nm)^{\frac{2+\delta}{2}}.$$

Il s'ensuit alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{s_n^2} \int_{|X_k| \geq \varepsilon s_n} X_k^2 dP &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\varepsilon^\delta m^{\frac{2+\delta}{2}} n^{\frac{2+\delta}{2}}} M \\ &= \frac{M}{\varepsilon^\delta m^{\frac{2+\delta}{2}} n^{\frac{\delta}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{S_{[ns]}}{s_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, s).$$

D'autre part, l'indépendance des variables aléatoires X_j implique

$$\begin{aligned} \text{VAR} \left[\frac{S_{[ns]}}{s_n} \right] &= \frac{1}{s_n^2} \text{VAR} [X_1 + \dots + X_{[ns]}] \\ &= \frac{1}{s_n^2} (\text{VAR} [X_1] + \dots + \text{VAR} [X_{[ns]}]) \\ &= \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_{[ns]}^2}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2} \\ &= \left(\frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_{[ns]}^2}{[ns]} \right) \left(\frac{n}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_{[ns]}^2 + \dots + \sigma_n^2} \right) \frac{[ns]}{n}. \end{aligned}$$

D'après (3.4) on a

$$0 < \frac{[ns] m}{[ns]} \leq \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_{[ns]}^2}{[ns]} \leq \frac{[ns] M'}{[ns]},$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_{[ns]}^2}{[ns]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_{[ns]}^2}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 = \sigma^2 < \infty. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{VAR} \left[\frac{S_{[ns]}}{s_n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[ns]}{n} = s$$

puisque $\frac{ns-1}{n} \leq \frac{[ns]}{n} \leq \frac{ns}{n}$.

De plus

$$E \left(\frac{S_{[ns]}}{s_n} \right) = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{[ns]} E(X_k) = 0.$$

On conclut finalement que

$$\frac{S_{[ns]}}{s_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, s).$$

Considérons maintenant deux points s et t avec $s < t$. D'après ce qui précède, on a

$$\frac{S_{[nt]}}{s_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} W_t.$$

Par conséquent

$$\frac{S_{[nt]}}{s_n} + \left(-\frac{S_{[ns]}}{s_n} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} W_t - W_s.$$

Les deux membres du couple $\left(\frac{S_{[ns]}}{s_n}, \frac{S_{[nt]}}{s_n} - \frac{S_{[ns]}}{s_n} \right)$ sont indépendants et ce grâce à l'indépendance des variables (X_j) , on peut donc conclure, puisque $\mathbb{R}$ est séparable, en utilisant le théorème 1.1.10 que

$$\left(\frac{S_{[ns]}}{s_n}, \frac{S_{[nt]}}{s_n} - \frac{S_{[ns]}}{s_n} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (W_s, W_t - W_s).$$

De plus

$$\left| (\xi_n(t) - \xi_n(s)) - \left(\frac{S_{[nt]}}{s_n} - \frac{S_{[ns]}}{s_n} \right) \right| = \left| (nt - [nt]) \frac{1}{s_n} X_{[nt]+1} - (ns - [ns]) \frac{1}{s_n} X_{[ns]+1} \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{s_n} X_{[nt]+1} \right| + \left| \frac{1}{s_n} X_{[ns]+1} \right|.$$

Nous avons montré précédemment que $\frac{1}{s_n} X_{[ns]+1} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ et par conséquent $\frac{1}{s_n} X_{[nt]+1} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$. On aura alors

$$\left| (\xi_n(t) - \xi_n(s)) - \left(\frac{S_{[nt]}}{s_n} - \frac{S_{[ns]}}{s_n} \right) \right| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0.$$

En appliquant le théorème 1.1.11, on conclut que

$$(\xi_n(t) - \xi_n(s)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (W_t - W_s).$$

Comme les variables X_j sont indépendantes alors $\xi_n(s)$ et $\xi_n(t) - \xi_n(s)$ sont indépendants et en utilisant le théorème 1.1.10, on a aussi

$$(\xi_n(s), \xi_n(t) - \xi_n(s)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (W_s, W_t - W_s).$$

Pour conclure, soit la fonction :

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow h(x, y) = (x, x + y)$$

Il est clair que h est continue. L'application du corollaire 1.1.2 du théorème 1.1.7 donne

$$(\xi_n(s), \xi_n(t)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (W_s, W_t).$$

On peut faire la même démonstration pour un autre point $u > t$ puis un autre point $v > u$ et ainsi de suite jusqu'à un nombre $p \in \mathbb{N}$, ce qui revient à dire que les lois fini-dimensionnelles de ξ_n convergent vers celles du mouvement brownien W , ce qui achève la démonstration de la proposition ainsi que celle du théorème 3.2.1. De plus cette convergence est établie pour $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

3.3 Lissage par convolution du processus de sommes partielles

Pour avoir la trajectoire du processus lissé par convolution dans H_α^0 , il est utile de rappeler ici que les conditions et résultats établis dans Hamadouche [42] sur les noyaux de convolution sont supposées vérifiées.

On considère le processus de sommes partielles normalisé de Donsker-Prohorov

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n} S_{[nt]}(t), \quad t \in [0, 1], \quad (3.11)$$

où $[nt]$ représente la partie entière de (nt) .

Selon les besoins, on utilisera aussi les notations suivantes de ξ_n ci-dessous,

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^n S_i 1_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[}(t), \quad (3.12)$$

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n X_k 1_{\left[\frac{k}{n}, 1\right]}(t). \quad (3.13)$$

Soit le processus lissé défini par

$$\zeta_n(t) = (\xi_n * K_n)(t) - (\xi_n * K_n)(0), \quad t \in [0, 1]. \quad (3.14)$$

Le terme $(\xi_n * K_n)(0)$ assure la nullité de ζ_n en zéro.

Pour avoir toutes les trajectoires des processus ζ_n dans H_α^0 , on suppose que les conditions (2.9), (2.10), (2.11), (2.13) et (2.14) sont vérifiées.

Théorème 3.3.1 ([44]) *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes non identiquement distribuées vérifiant (3.1). On suppose que les noyaux de convolution K_n vérifient (2.9), (2.11), (2.13) et (2.14). Alors la suite de processus de sommes partielles lissés ζ_n définis par (3.14) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max\left(\tau, \frac{1}{\gamma}\right)$.*

Preuve

Le lemme 2.4.1 implique que toutes les trajectoires de ζ_n sont dans $H_{\frac{1}{2}}$ et donc dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$.

D'après la proposition 2.1.1, il suffit de montrer l'équiten-sion sur H_α^0 des lois $P_n = P_{\zeta_n^{-1}}$ des éléments aléatoires ζ_n et la convergence des lois finidimensionnelles de ζ_n .

Rappelons que le produit de convolution de ξ_n par K_n s'écrit

$$(\xi_n * K_n)(t) = \int_{\mathbb{R}} \xi_n(t-u) K_n(u) du = \int_{\mathbb{R}} \xi_n(u) K_n(t-u) du.$$

Equitension :

On appliquera le théorème 2.1.7 avec $a_n = \frac{1}{n}$. On doit alors étudier les deux cas : $t - s \geq \frac{1}{n}$ et $t - s < \frac{1}{n}$.

On suppose que $t > s$.

cas 1 : $t - s \geq \frac{1}{n}$, on a

$$\begin{aligned} E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma &= E |(\xi_n * K_n)(t) - (\xi_n * K_n)(s)|^\gamma \\ &= E \left| \frac{1}{s_n} \int_{\mathbb{R}} (S_{[n(t-u)]} - S_{[n(s-u)]}) K_n(u) du \right|^\gamma \\ &= E \left| \frac{1}{s_n} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_k \right|^\gamma K_n(u) du \\ &= E \left| E_{K_n} \left(\frac{1}{s_n} \sum_{k=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_k \right) \right|^\gamma. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen par rapport au noyau K , on a

$$E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma \leq E \left(E_{K_n} \left| \frac{1}{s_n} \sum_{k=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_k \right|^\gamma \right).$$

Par le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma &\leq E_{K_n} \left(E \left| \frac{1}{s_n} \sum_{k=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_k \right|^\gamma \right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} E \left| \frac{1}{s_n} \sum_{k=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_k \right|^\gamma K_n(u) du. \end{aligned}$$

L'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund appliquée à l'espérance donne

$$\begin{aligned} E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{s_n} \right)^\gamma C_\gamma \left(\sum_{k=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} E |X_k|^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} K_n(u) du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{s_n} \right)^\gamma C_\gamma \left(\sum_{k=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} E |X_k|^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} K_n(u) du. \end{aligned}$$

Par suite les hypothèses (3.1) et (3.4) impliquent $\left(\frac{1}{s_n} \right)^\gamma \leq \left(\frac{1}{\sqrt{nm}} \right)^\gamma$ et il existe une constante M' telle que $E |X_k|^2 \leq M' < \infty$; par conséquent on a

$$\begin{aligned}
E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{nm}} \right)^\gamma C_\gamma \left(\sum_{k=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} M' \right)^{\frac{\gamma}{2}} K_n(u) du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{mn}} \right)^\gamma C_\gamma M' ([n(t-u)] - [n(s-u)])^{\frac{\gamma}{2}} K_n(u) du.
\end{aligned}$$

Or $[n(t-u)] - [n(s-u)] \leq n(t-s) + 2$ et $|t-s| \geq \frac{1}{n}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma &\leq \int_{\mathbb{R}} (mn)^{-\frac{\gamma}{2}} C_\gamma M' (n|t-s| + 2)^{\frac{\gamma}{2}} K_n(u) du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (mn)^{-\frac{\gamma}{2}} C_\gamma M' \left(n|t-s| + 2\frac{n}{n} \right)^{\frac{\gamma}{2}} K_n(u) du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} m^{-\frac{\gamma}{2}} C_\gamma M' \left(|t-s| + \frac{2}{n} \right)^{\frac{\gamma}{2}} K_n(u) du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} m^{-\frac{\gamma}{2}} C_\gamma M' (|t-s| + 2|t-s|)^{\frac{\gamma}{2}} K_n(u) du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} m^{-\frac{\gamma}{2}} C_\gamma M' (3|t-s|)^{\frac{\gamma}{2}} K_n(u) du \\
&\leq m^{-\frac{\gamma}{2}} C_\gamma M' (3|t-s|)^{\frac{\gamma}{2}} \int_{\mathbb{R}} K_n(u) du \\
&\leq m^{-\frac{\gamma}{2}} C_\gamma M' 3^{\frac{\gamma}{2}} |t-s|^{\frac{\gamma}{2}}.
\end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C'_\gamma = m^{-\frac{\gamma}{2}} C_\gamma M' 3^{\frac{\gamma}{2}}$ telle que

$$E |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma \leq C'_\gamma |t-s|^{\frac{\gamma}{2}}.$$

cas 2 : $t-s < \frac{1}{n}$, on a

$$\begin{aligned}
|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| &= |(\xi_n * K_n)(t) - (\xi_n * K_n)(s)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n X_k (K_n(t-u) - K_n(t-s)) 1_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(u) du \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n |X_k| |K_n(t-u) - K_n(t-s)| 1_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(u) du
\end{aligned}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n |X_k| \left(\frac{1}{b_n} \right) \left| K \left(\frac{t-u}{b_n} \right) - K \left(\frac{s-u}{b_n} \right) \right| 1_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(u) du.$$

En utilisant l'hypothèse (2.14) du lemme 2.4.1 on a

$$\begin{aligned} |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n |X_k| \left(\frac{1}{b_n} \right) \alpha(K) \left| \frac{t-s}{b_n} \right| 1_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(u) du \\ &\leq \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n |X_k| \frac{1}{b_n} \alpha(K) \frac{|t-s|}{b_n} \int_{\mathbb{R}} 1_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(u) du \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{nm}} \sum_{k=1}^n |X_k| \frac{1}{b_n^2} \alpha(K) |t-s| \left(1 - \frac{k}{n}\right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{nm}} \frac{1}{b_n^2} \alpha(K) \sum_{k=1}^n |X_k| |t-s| \quad \text{puisque } \left(1 - \frac{k}{n}\right) < 1. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq \frac{1}{\sqrt{nm}} \frac{1}{b_n^2} \alpha(K) \sum_{k=1}^n |X_k| |t-s|^{1-\alpha}$$

et

$$\begin{aligned} W_\alpha \left(\zeta_n, \frac{1}{n} \right) &= \sup_{|t-s| \leq \frac{1}{n}} \frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{b_n^2} \alpha(K) n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n |X_k| \left| \frac{1}{n} \right|^{1-\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{b_n^2 n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \alpha(K) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |X_k|. \end{aligned}$$

Pour montrer que $W_\alpha \left(\zeta_n, \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, il suffit de montrer

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{b_n^2 n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \alpha(K) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |X_k| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0.$$

Par l'inégalité de Markov, on a

$$P \left[\left(\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{b_n^2 n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \alpha(K) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |X_k| \right) > \delta \right] \leq \frac{1}{\delta} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{b_n^2 n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \alpha(K) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E |X_k|.$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée à X_n et à la variable déterministe $X = 1$ nous donne

$$\begin{aligned} E |X_k| &= E |X_k 1| \leq (E |X_k|^2)^{\frac{1}{2}} (E |1|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (M')^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P \left[\left(\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{b_n^2 n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \alpha(K) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |X_k| \right) > \delta \right] &\leq \frac{1}{\delta} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{b_n^2 n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \alpha(K) \frac{n \sqrt{M'}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ \text{du fait que } \frac{1}{\delta} \frac{\sqrt{M'}}{\sqrt{m}} \alpha(K) &\text{ est une constante et d'après (2.10)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{b_n^2} n^{a-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{b_n} n^{\frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{2})} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ dès que } \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) > \tau \text{ soit } \alpha < \frac{1}{2} - \tau.$$

Le théorème 2.1.7 permet de conclure alors que la suite des lois de ζ_n est équitendue dans H_α^0 pour $a = \gamma$, $b = \frac{\gamma}{2}$, $c = C'_\gamma$ et $a_n = \frac{1}{n}$.

Cette équitension obtenue dans H_α^0 est valable pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \tau$ et $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$ soit $\alpha < \frac{1}{2} - \max\left(\tau, \frac{1}{\gamma}\right)$.

Convergence des lois finidimensionnelles de $\{\zeta_n, n \geq 1\}$

On montre d'abord que la distance dans $\mathbb{R}^k$ de

$$(\zeta_n(t_1), \dots, \zeta_n(t_k)) \text{ et } (\xi_n(t_1), \dots, \xi_n(t_k))$$

tend en probabilité vers zéro. Par la proposition 3.2.1 les lois fini-dimensionnelles de ξ_n convergent vers celles du mouvement brownien, il en sera de même alors pour celles de ζ_n en vertu du théorème 1.1.11. Il suffit donc de vérifier la convergence vers 0 de $E |\zeta_n(t) - \xi_n(t)|^2$ pour tout $t \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} E |\zeta_n(t) - \xi_n(t)|^2 &= E \left| \int_R \xi_n(t-u) K_n(u) du - \xi_n(t) \right|^2 \\ &= E \left| \int_R \left(\xi_n(t-u) K_n(u) du - \xi_n(t) \int_R K_n(u) du \right) \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left| \int_R (\xi_n(t-u) - \xi_n(t)) K_n(u) du \right|^2 \\
&= E \left| \int_R \frac{1}{s_n} (S_{[n(t-u)]} - S_{[nt]}) K_n(u) du \right|^2 \\
&= E \left| \int_R \frac{1}{s_n} \sum_{i=[nt]+1}^{[n(t-u)]} X_i K_n(u) du \right|^2 \\
&= E \left| E_k \left[\frac{1}{s_n} \sum_{i=[nt]+1}^{[n(t-u)]} X_i \right] \right|^2.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Jensen appliquée au dernier membre donne

$$E |\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)|^2 \leq E \left[E_k \left| \frac{1}{s_n} \sum_{i=[nt]+1}^{[n(t-u)]} X_i \right|^2 \right].$$

Par le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
E |\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)|^2 &\leq E_k \left[E \left| \frac{1}{s_n} \sum_{i=[nt]+1}^{[n(t-u)]} X_i \right|^2 \right] \\
&\leq \int_R E \left| \frac{1}{s_n} \sum_{i=[nt]+1}^{[n(t-u)]} X_i \right|^2 K_n(u) du.
\end{aligned}$$

En appliquant enfin l'inégalité de Marcinkiewiez-Zygmund avec $q=2$, on aura

$$\begin{aligned}
E |\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)|^2 &\leq c \int_R \left[\left(\frac{1}{s_n} \right)^2 \sum_{i=[nt]+1}^{[n(t-u)]} E |X_i^2| \right] K_n(u) du \\
&\leq c \int_R \left[\left(\frac{1}{s_n} \right)^2 ([n(t-u)] - [nt]) M' \right] K_n(u) du \\
&\leq c \int_R \frac{1}{nm} ([n(t-u)] - [nt]) M' K_n(u) du \\
&\leq c \int_R \frac{M'}{nm} (n|u| + 2) K_n(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \frac{M'}{m} \int_R (|u| + \frac{2}{n}) K_n(u) du \\
&\leq c' \int_R (|u| + \frac{2}{n}) K_n(u) du \quad \text{avec } c' = c \frac{M'}{m}
\end{aligned}$$

Avec le changement de variable $v = \frac{u}{b_n}$ et en utilisant (2.11), il s'ensuit

$$\begin{aligned}
E |\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)|^2 &\leq c' \int_R \left(b_n |v| + \frac{2}{n} \right) \frac{1}{b_n} K(v) b_n dv \\
&\leq c' \left(b_n \int_R |v| K(v) dv + \frac{2}{n} \int_R K(v) dv \right) \\
&\leq c' \left(b_n \int_R |v| K(v) dv + \frac{2}{n} \right).
\end{aligned}$$

Comme $\int_R |v| K(v) dv < \infty$ et b_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, on déduit que $\xi_n(t) * K_n(t) - \xi_n(t)$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0,1]$ et en particulier pour $t = 0$ on a $E |\xi_n * K_n(0)|^2 = 0$.

Or pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
E |\zeta_n(t) - \xi_n(t)|^2 &= E |(\xi_n * K_n)(t) - (\xi_n * K_n)(0) - \xi_n(t)|^2 \\
&\leq 2 \left(E |(\xi_n * K_n)(t) - \xi_n(t)|^2 + E |(\xi_n * K_n)(0)|^2 \right).
\end{aligned}$$

Comme les deux espérances du second membre de l'inégalité convergent vers 0, on déduit que pour tout t

$$\zeta_n(t) - \xi_n(t) \xrightarrow{L^2} 0,$$

ce qui implique que $\zeta_n(t) - \xi_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ et par conséquent

$$\sum_{i=1}^k |\zeta_n(t_i) - \xi_n(t_i)|^2 = \|\zeta_n - \xi_n\|_{\mathbb{R}^k}^2 \xrightarrow{\mathcal{P}} 0.$$

Le théorème 1.1.11 montre que les lois finidimensionnelles de ζ_n ont la même limite que celles de ξ_n , c'est à dire, elles convergent vers celles du mouvement brownien. On conclut alors

$$\zeta_n \xrightarrow{\mathcal{L}} W \text{ dans } H_\alpha, \quad \forall \alpha < \frac{1}{2} - \max\left(\tau, \frac{1}{\gamma}\right)$$

et ceci achève la preuve du théorème 3.3.1.

Chapitre 4

Application au modèle de files d'attente M/G/1 avec rappels

Introduction

Les systèmes de files d'attente avec rappels sont des systèmes où un client qui trouve tous les serveurs occupés à son arrivée quitte le système pour rappeler ultérieurement à des instants aléatoires jusqu'à satisfaction de sa demande. Entre deux rappels successifs (appelés aussi "appels secondaires"), le client est dit en orbite. Ces systèmes sont en particulier utilisés dans la modélisation des réseaux de télécommunication et des systèmes d'ordinateurs. Ces systèmes sont caractérisés par le fait qu'un client qui trouve tous les serveurs occupés se met en orbite pour faire des rappels jusqu'à satisfaction de sa demande. Ils peuvent être représentés par la figure 4.1 ci-dessous

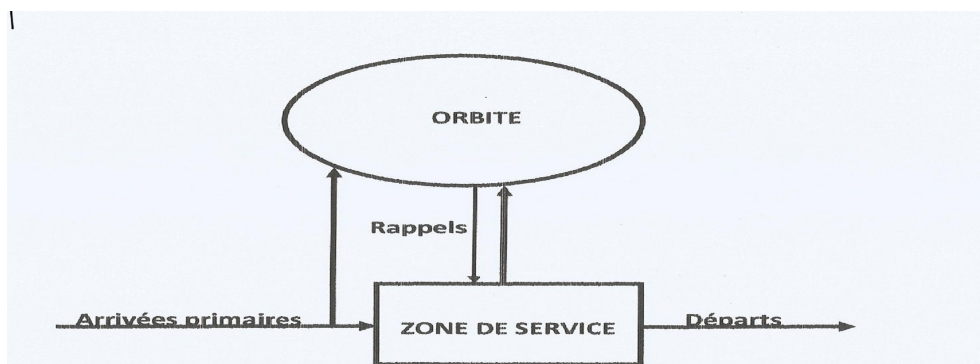


FIG. 4.1 – SYSTEME DE FILES D'ATTENTE AVEC RAPPELS

La difficulté majeure est qu'on ne peut pas observer l'orbite et en particulier on arrive pas à faire la distinction entre un appel primaire (arrivée d'un nouveau client) et un rappel (qui vient de l'orbite). De plus, le processus des arrivées dépend à la fois des lois régissant les rappels ainsi que de la loi des arrivées primaires ce qui supprime la propriété de l'indépendance.

Falin et Artalejo [7] ont montré qu'on peut étudier certaines caractéristiques de la file d'attente M/G/1 avec rappels en modélisant la période d'activité par des périodes actives $L_n^{(b)}$ et des périodes inactives $L_n^{(i)}$ de l'orbite. Pour plus de détails, il faut consulter la monographie de Falin [33], le livre d'Artalejo & Gomez-Corral [10] et celui de Falin & Templeton [32], les travaux de Falin [31] et ceux de Yang & Templeton [83]. Deux publications d'Artalejo ont repris les articles publiés durant les décennies 1990-1999 et 2000-2009.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la période d'activité du modèle M/G/1 avec rappels exponentiels. On la définit comme étant le temps qui sépare l'instant t_0 de l'arrivée d'un client primaire qui trouve le système (orbite et serveur) et l'instant t_1 où le système redevient, pour la première fois, vide (le serveur libre et l'orbite vide). Plusieurs auteurs l'ont, avec des méthodes différentes, analysée et se sont souvent contentés de donner son espérance mathématique exprimée avec la transformée de Laplace-Stieltjes (voir [8], [32] et [33]).

Dans notre cas, on utilisera les principes d'invariance hölderiens (et en particulier le Théorème 2.3.6 et le Théorème 3.2.1) pour préciser le comportement asymptotique de la période d'activité du système M/G/1 avec rappels exponentiels.

4.1 Le système M/G/1 avec rappels

Pour décrire la file d'attente M/G/1 avec rappels, on va reprendre la description faite dans l'article de Yang [83] : Les clients arrivent dans le système selon un processus homogène de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un client qui arrive pour la première fois dans le système (appelé aussi appel primaire) et trouve le serveur occupé, quitte le système et revient (rappel) à des instants aléatoires (On dit qu'il se met en orbite) jusqu'à ce qu'il trouve le serveur libre et entre en service. La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire (client en orbite) suit la loi exponentielle de paramètre μ . Un client (appel primaire ou rappel) qui trouve à son arrivée le serveur libre est immédiatement servi et quitte le système. La suite des temps de service est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi générale B sur $\mathbb{R}_+$. Soit $B(t)$, $t \geq 0$, la fonction de répartition du temps de service de transformée de Laplace-Stieltjes $\beta(s)$ et de moments d'ordre k , $\beta_k = (-1)^k \beta^{(k)}(0)$. On suppose que $B(0+) = 0$ et on sait que $\rho = \lambda \beta_1$.

Les intervalles de temps entre deux arrivées successives, les temps de service et les rappels sont mutuellement indépendants.

L'évolution du système se fait de la manière suivante : A l'instant η_{i-1} le $(i-1)^{\text{ème}}$ client termine son service et le serveur devient libre. Même s'il y a des clients dans l'orbite, ils ne peuvent pas occuper le service immédiatement puisqu'ils ne savent pas que le serveur est libre. Le $i^{\text{ème}}$ client entre en service après un laps de temps R_i durant lequel le serveur est libre. Le service S_i du $i^{\text{ème}}$ client débute à l'instant $\xi_i = \eta_{i-1} + R_i$. Supposons que le nombre de client N_{i-1} dans l'orbite à l'instant η_{i-1} est égale à n . Nous avons alors (voir [7]) R_i de loi exponentielle de paramètre $\lambda + n\mu$. Le $i^{\text{ème}}$ client sera un appel primaire avec probabilité $\frac{\lambda}{\lambda+n\mu}$ et un rappel avec probabilité $\frac{n\mu}{\lambda+n\mu}$. Tous les rappels qui arrivent durant ce temps de service n'ont aucun effet sur le système. A l'instant $\eta_i = \xi_i + S_i$, le $i^{\text{ème}}$ client achève son service et le serveur devient de nouveau libre et ainsi de suite.

4.2 Etude de la période d'activité du système par les périodes actives et inactives de l'orbite

Bien que très utilisées dans les réseaux de télécommunication, les files d'attente sont très difficiles à étudier. La difficulté majeure est qu'on ne peut pas observer l'orbite et en particulier on n'arrive pas à faire la distinction entre un client primaire (le premier appel) et un client qui rappelle (de l'orbite). De plus, le processus des arrivées dépend à la fois des lois régissant les rappels ainsi que de la loi des arrivées ce qui supprime la propriété de l'indépendance. G. I. Falin et J. R. Artalejo [7] ont montré qu'on peut étudier certaines caractéristiques de la file d'attente M/G/1 avec rappels en modelisant la période d'activité par des périodes actives $L_n^{(b)}$ et des périodes inactives $L_n^{(i)}$ de l'orbite. Ces deux caractéristiques sont définies comme suit :

Définition 4.2.1 ([7])

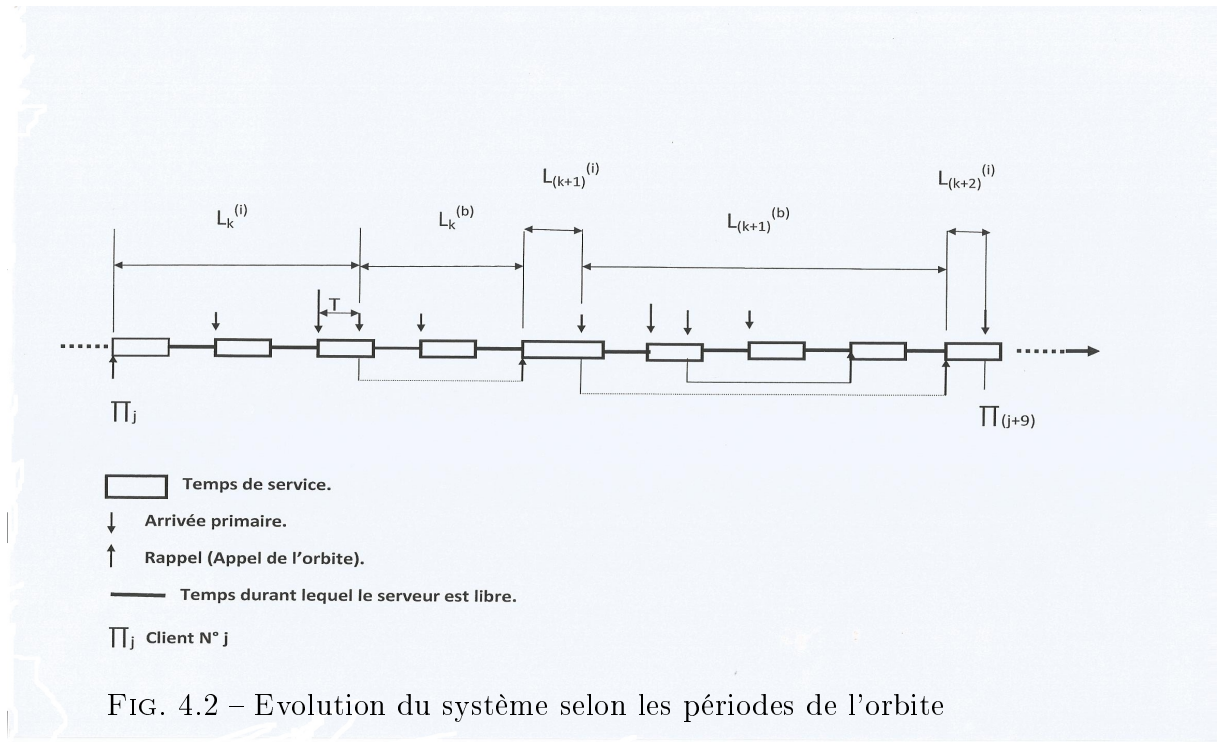
Une période inactive $L^{(i)}$ de l'orbite commence au moment où le dernier client de l'orbite (un rappel) entre en service (donc laisse l'orbite vide) et se termine lorsqu'un client primaire (un client qui arrive pour la première fois) trouve le serveur occupé et est obligé de rejoindre l'orbite.

Définition 4.2.2 ([7])

Une période active de l'orbite $L^{(b)}$ commence au moment où un client pri-

maire arrive, trouve le serveur occupé et l'orbite vide (il sera obligé de rejoindre) l'orbite. Elle se termine au moment où un rappel (client de l'orbite) trouve le serveur libre et entre en service en laissant l'orbite vide.

La figure 4.2 ci-dessous, montre l'évolution du système suivant les périodes actives et les périodes inactives de l'orbite.



Soit T_k le temps aléatoire qui s'est écoulé entre le début d'un temps de service et l'arrivée d'un client juste avant le début de la période $L_k^{(b)}$. T_k se termine à l'arrivée d'un client primaire.

La durée d'une période inactive de l'orbite $L_k^{(i)}$ est déterminée par la durée minimale qui sépare le début d'un temps de service et l'instant de l'arrivée d'un client primaire.

La densité de probabilité de la durée de cette compétition, si elle se termine par la fin d'un temps de service est $f_1(t) = \frac{1}{\beta(\lambda)} B'(t) e^{-(\lambda t)}$ (voir [7]).

La densité de probabilité de la durée de cette compétition, si elle se termine par l'arrivée d'un client primaire, est $f_2(t) = \frac{1}{1-\beta(\lambda)} \lambda e^{-(\lambda t)} (1 - B(t))$ (voir [7]).

En se référant à la figure 4.2 ci-dessus, la période d'activité du système peut être décomposée en plusieurs périodes actives $L_k^{(b)}$ de l'orbite et de périodes de compétition T_k (qui représentent dans ce cas les $L_k^{(i)}$). Elle se termine par un temps de service qui est une variable aléatoire Ω (voir [7]). Cette période d'activité, notée L , peut être représentée par la figure 4.3 ci-dessous :

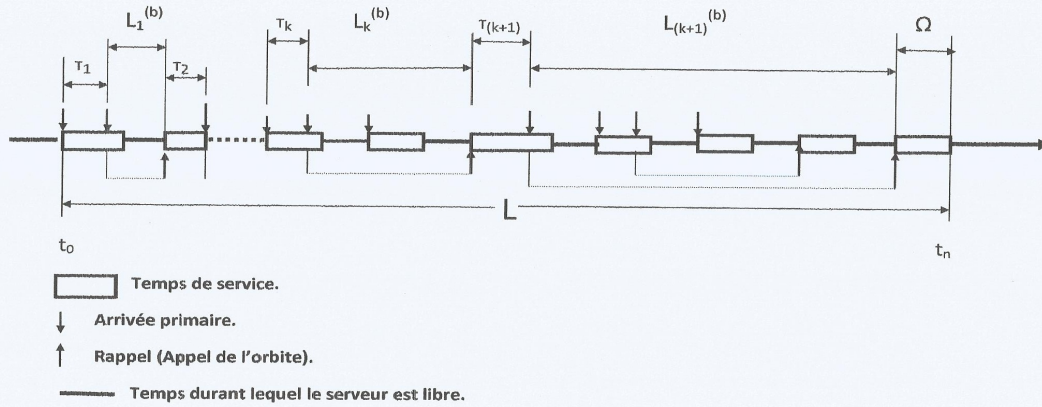


FIG. 4.3 – Période d'activité du système selon les périodes de l'orbite

Le schéma ci-dessus montre que $L_k^{(b)}$ dépend de T_k . Par conséquent, la suite de variables aléatoires $L_k^{(b)}$ est une suite de variables dépendantes.

Par contre, les variables aléatoires définies par $C_k^{(b)} = T_k + L_k^{(b)}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes puisque $C_k^{(b)}$ commence au moment où l'orbite est vide (voir [7]).

On note par $N^{(b)}$ le nombre de périodes actives de l'orbite se déroulant durant la période d'activité L . On définit la variable aléatoire

$$L_n = (L / N^{(b)=n-1}) = (\sum_{k=1}^{n-1} C_k^{(b)}) + \Omega, \quad n \geq 2, \quad (4.1)$$

Comme les variables aléatoires $L_k^{(b)}$, $k \geq 1$ sont de même loi alors les variables aléatoires $C_k^{(b)}$, $k \geq 1$ sont aussi de même loi.

De plus, lorsque $\rho < 1$ (voir [7]), on a

$$E(L^b) = \frac{\beta(\lambda)p_{00}^{-1} - 1}{\lambda(1 - \beta(\lambda))} \quad \text{et} \quad E(T) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\beta'(\lambda)}{1 - \beta(\lambda)}$$

Par conséquent,

$$E(C^{(b)}) = \frac{\beta(\lambda)p_{00}^{-1} + \lambda\beta'(\lambda) - \beta(\lambda)}{\lambda(1 - \beta(\lambda))}, \quad (4.2)$$

où

$$p_{00} = (1 - \rho) \exp\left(\frac{-\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda u)}{\beta(\lambda - \lambda u) - u} du\right)$$

.

Pour tout $n \geq 1$, on note

$$a_n = E(L_n) = E(\Omega) + (n-1)E(C^{(b)}) = -\frac{\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)} + (n-1) \frac{\beta(\lambda)p_{00}^{-1} + \lambda\beta'(\lambda) - \beta(\lambda)}{\lambda(1 - \beta(\lambda))}$$

,

$$s_n^2 = \text{Var}(L_n) = \text{Var}(\Omega) + (n-1)^2 \text{Var}(C^{(b)})$$

,

où $\text{Var}(\Omega)$ et $\text{Var}(C^{(b)})$ sont calculées à partir des formules (4.2), (4.3) et (4.4).

Lemme 4.2.1 ([81]) *Pour $\rho < 1$, on a*

$$E(\Omega) = -\frac{\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)}, \quad E(\Omega^2) = \frac{\beta''(\lambda)}{\beta(\lambda)}. \quad (4.3)$$

$$E((C^{(b)})^2) = \frac{\lambda^2 \beta''(\lambda) - 2(p_{00}^{-1} - 1)\lambda\beta'(\lambda) + \beta(\lambda)(-E(L^2) + 2(p_{00}^{-1} - 1)^2)}{\lambda^2(1 - \beta(\lambda))}, \quad (4.4)$$

où $E(L^2)$ est donnée par Artalejo et Lopez-Herrero [10].

$$E(L^2) = \frac{1}{p_{00}} \left[\frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{2\rho\beta_1}{\mu} + \beta_2 \right) - \int_0^1 \frac{2}{\lambda\mu(\beta(\lambda-\lambda t)-t)} \times \left(1 - \frac{\lambda(1-t)\beta'(\lambda-\lambda t)}{\beta(\lambda-\lambda t)-t} - \frac{1}{1-\rho} \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_t^1 \frac{1-\beta(\lambda-\lambda u)}{\beta(\lambda-\lambda u)-u} du \right\} dt \right) \right].$$

Preuve du Lemme 4.2.1

a) La transformée de Laplace-Stieltjes de Ω est donnée par (cf. [7])

$$\Psi(s) = \frac{\beta(s + \lambda)}{\beta(\lambda)}$$

On dérive cette fonction, on obtient :

$$\Psi'(s) = \frac{\beta'(s + \lambda)}{\beta(\lambda)}$$

Comme $\Psi'(0) = -E(\Omega)$, alors

$$E(\Omega) = -\frac{\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)}$$

*

Pour obtenir $E(\Omega^2)$, il suffit de dériver une deuxième fois cette fonction par rapport à s et de poser $s = 0$, avec $\Psi''(0) = E(\Omega^2)$.

b) Soient $g(s)$ et $\Phi(s)$ les transformées de Laplace-Stieltjes de $C^{(b)}$ et L respectivement. On a la relation suivante [7]

$$g(s) = \frac{1}{1 - \beta(\lambda)} \left(1 - \frac{\beta(s + \lambda)}{\Phi(s)} \right).$$

La première dérivée de g par rapport à s nous donne

$$g'(s) = \frac{-1}{1 - \beta(\lambda)} \left(\frac{\beta'(s + \lambda)\Phi(s) - \Phi'(s)\beta(s + \lambda)}{(\Phi(s))^2} \right).$$

En dérivant une deuxième fois

$$g''(s) = \frac{-1}{1 - \beta(\lambda)} \left[\frac{\beta''(s + \lambda)\Phi(s) + \beta(s + \lambda)(-\Phi''(s) + 2(\Phi'(s))^2\phi(s)) - 2\phi'(s)\phi^2(s)\beta'(s + \lambda)}{\Phi^4(s)} \right].$$

On sait que $E((C^{(b)})^2) = g''(0)$, par conséquent

$$E((C^{(b)})^2) = \frac{1}{\lambda^2(1 - \beta(\lambda))} [\lambda^2\beta''(\lambda) - 2(p_{00}^{-1} - 1)\lambda\beta'(\lambda) + \beta(\lambda)(-E(L^2) + 2(p_{00}^{-1} - 1))^2]$$

Théorème 4.2.1 ([81]) *On suppose que les variables aléatoires Ω , $C^{(b)}$ sont non dégénérées et qu'il existe $\gamma > 2$ tel que :*

$$E|\Omega|^\gamma < \infty \quad \text{et} \quad E|C^{(b)}|^\gamma < \infty. \quad (4.5)$$

Si $\rho < 1$, alors la suite $((L_n)_n \geq 1)$ est asymptotiquement gaussienne.

Preuve du Théorème 4.2.1

En utilisant les notations $X_k = C_{k-1}^{(b)}$, $k \geq 2$ et $X_1 = \Omega$, on a $L_n = \sum_{k=1}^{k=n} X_k$. On considère la suite centrée $(Y_k = X_k - E(X_k))_{k \geq 1}$, et nous allons vérifier que les conditions du théorème de Hamadouche & Taleb [44] sont satisfaites.

i) On a $E(Y_1^2) = \text{Var}(X_1) = \text{Var}(\Omega)$ et pour $k \geq 2$, $EY_k^2 = \text{Var}(X_k) = \text{Var}(C^{(b)})$ (la condition $E|Y_k|^2 \rightarrow \text{Var}(C^{(b)})$ est bien vérifiée).

Comme les variables aléatoires Ω et $C^{(b)}$ sont non dégénérées alors, on a $\min(\text{Var}(\Omega), \text{Var}(C^{(b)})) > 0$. Il suffit donc de prendre $m = \min(\text{Var}(\Omega^2), \text{Var}(C^{(b)}))$.

La condition (4.5) assure que :

$$M = \max(E|\Omega - E(\Omega)|^\gamma, E|C^{(b)} - E(C^{(b)})|^\gamma) < \infty$$

Comme $Y_1 = \Omega - E(\Omega)$ et $Y_k = C_k^{(b)} - E(C_k^{(b)})$, $k \geq 2$, on obtient :

$$E|Y_j|^\gamma \leq M < \infty, \quad \forall j \geq 1.$$

ii) On a

$$b_n^2 = \sum_{k=1}^{k=n} \text{Var}(Y_k) = \sum_{k=1}^{k=n} E(Y_k^2) = \sum_{k=1}^{k=n} \text{Var}(X_k) = \text{Var}(\Omega) + \sum_{k=2}^{k=n} \text{Var}(C^{(b)}).$$

Il s'en suit que

$$b_n^2 = \text{Var}(\Omega) + (n-1)\text{Var}(C^{(b)}). \text{ C'est à dire } b_n^2 = s_n^2.$$

Par le théorème 3.2.1, on déduit que la suite de processus de sommes partielles lissés

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n} \left[\sum_{k=1}^{[nt]} Y_k + (nt - [nt])Y_{[nt]+1} \right], \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}^*$$

converge vers le mouvement brownien dans H_α pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

On considère la fonctionnelle continue $F : H_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(g) = g(1)$. Par le corollaire 1.1.1, on a $F(\xi_n)$ qui converge en loi dans $\mathbb{R}$, vers $F(W_t) = N(0, 1)$, où $N(0, 1)$ est la loi normale centrée, réduite.

Comme

$$\begin{aligned} F(\xi_n) &= \frac{\sum_{k=1}^{k=n} (X_k - E(X_k))}{s_n} = \frac{(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) - \sum_{k=1}^{k=n} E(X_k)}{s_n} \\ &= \frac{(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) - E(\Omega) - (n-1)^2 E(C^b)}{s_n} = \frac{(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) - a_n}{s_n}, \end{aligned}$$

ce qui confirme le résultat du théorème 4.2.1.

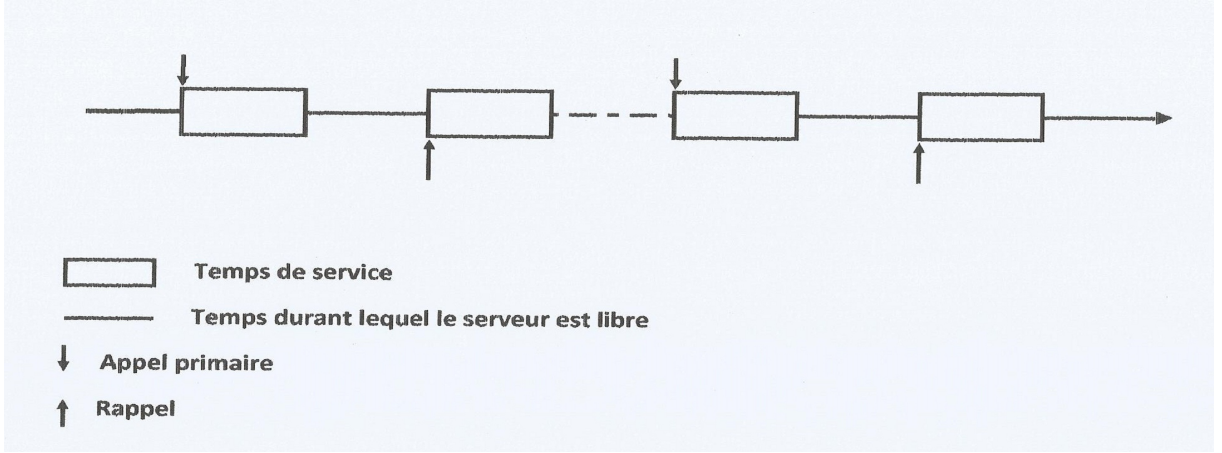
Remarque 4.2.1 *La valeur moyenne de la période d'activité $E(L)$ vérifie l'équation :*

$$E(L) = \sum_{n=1}^{\infty} E(L/N^{(b)} = n-1) \times P(N^{(b)} = n-1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times q_{n-1},$$

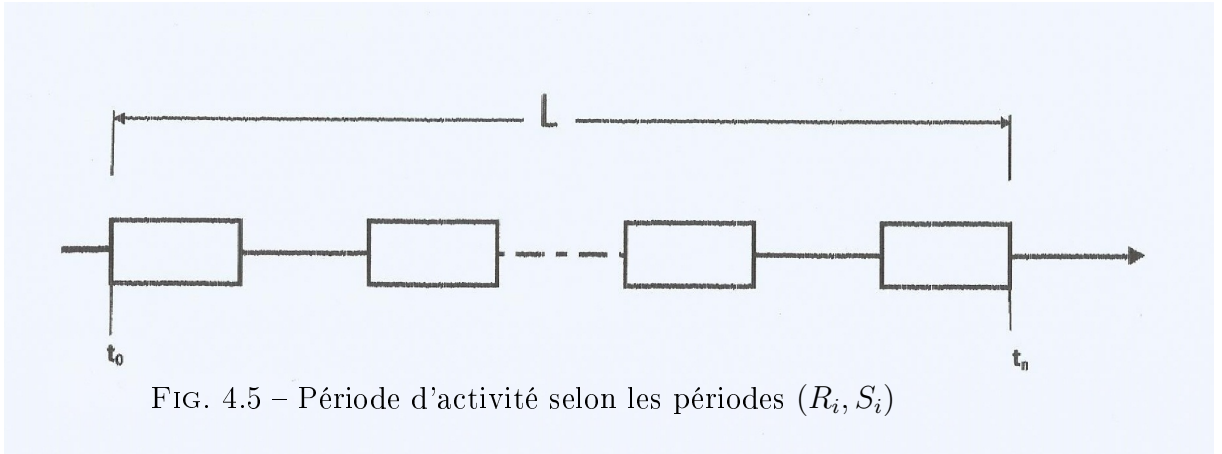
où q_n , $n \geq 0$ est la loi de probabilité de la variable aléatoire $N^{(b)}$ qui est une loi géométrique de paramètre $\beta(\lambda)$, ce qui permet de faire une représentation graphique de $E(L)$.

4.3 Etude de la période d'activité du système par les périodes actives et inactives du serveur

Il est connu que la période d'activité du système (notée L) est formée d'une somme (en une alternance) de périodes actives (notées S_i) et de périodes inactives (notées R_i) du serveur. On rappelle que durant les périodes R_i le serveur est libre alors qu'il y a des clients dans l'orbite. L'évolution du système peut être représentée par la figure ci-dessous.

FIG. 4.4 – Evolution du système selon les périodes (R_i, S_i)

Par contre, la période d'activité selon les périodes actives et les périodes inactives du serveur (R_i, S_i) peut être représentée comme suit :

FIG. 4.5 – Période d'activité selon les périodes (R_i, S_i)

On note par I le nombre de clients servis durant la période d'activité du système. On a

$$L_n = (L/I=n) = \sum_{i=1}^{i=n} (R_i + S_i), \quad n \geq 1,$$

avec $R_1 = 0$.

Lemme 4.3.1 ([32])

La variable aléatoire R_i dépend du nombre de client dans l'orbite $N_{(n-1)}$ à l'instant η_{i-1} . On note sa loi conditionnelle par :

$$G(x) = P(R_i < x / N_{i-1} = k) = 1 - e^{-(\lambda + k\mu)x} \text{ de moyenne } E(R_i / N_{i-1} = k) = \frac{1}{\lambda + k\mu}.$$

Lemme 4.3.2 ([32])

Les variables aléatoires $(R_i + S_i)_{i \geq 2}$ sont identiquement distribuées si et seulement si les variables aléatoires N_i sont identiquement distribuées.

Sachant que $\rho < 1$, le nombre de client dans l'orbite pendant la période d'activité L peut être estimé par $n_e = [\bar{n}_o] + 1$, où $\bar{n}_o = \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda \rho}{\mu(1-\rho)}$ est le nombre moyen de client dans l'orbite (Voir. [83]). On peut trouver des modifications des variables aléatoires $(U_i = S_i + R_i)$ qui seront donc identiquement distribuées.

Par la suite, on s'intéresse à la loi asymptotique de $A_n = \sum_{i=1}^{i=n} U_i$, avec R_i de loi exponentielle de paramètre $\lambda + n_e \mu$, $i \geq 1$. Notons

$$b_n = \frac{n}{\lambda + n_e \mu} + n\beta_1, \quad n \geq 1$$

et

$$\sigma^2 = \beta_2 - \beta_1^2 + \frac{1}{(\lambda + n_e \mu)^2} + 2 \sum_{i=2}^{i=\infty} \text{Cov}(R_1, R_i).$$

On pose $Z_i = U_i - E(U_i)$. Les variables aléatoires centrées (Z_i) sont dépendantes et de même loi. Dans le cas où (Z_i) est une suite α -mélangeante, on note par $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ la suite des coefficients de mélange fort de $(Z_n)_{n \geq 1}$ (Voir définition 2.3.2) et on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.3.1 ([81]) *On suppose que $(R_n + S_n - E(R_n + S_n))_{n \geq 1}$ est stationnaire, α -mélangeante et qu'il existe $\gamma > 2$, $\varepsilon > 0$ tels que*

$$E|S_i|^{\gamma+\varepsilon} < \infty ; \quad E|R_i|^{\gamma+\varepsilon} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} (\alpha_n)^{\frac{\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}} < \infty.$$

Si $\rho < 1$, alors $(A_n)_{n \geq 1}$ est asymptotiquement gaussienne.

Preuve du Théorème 4.3.1

Sous les conditions du théorème 4.3.1, la suite centrée $(Z_n)_{n \geq 1}$ est α -mélangeante et stationnaire.

L'hypothèse qu'il existe $\gamma > 2$, $\varepsilon > 0$ tels que :

$$E|S_i|^{\gamma+\varepsilon} < \infty \quad \text{et} \quad E|R_i|^{\gamma+\varepsilon} < \infty, \quad \text{donne} \quad E|Z_n|^{\gamma+\varepsilon} < \infty.$$

Les coefficients de mélange $(\alpha_n)_n$ de la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ vérifient la condition

$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} [\alpha_n]^{\frac{\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}} < \infty$ du théorème 2.3.6, ce qui permet de conclure que la suite de processus :

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} Z_i + (nt - [nt])Z_{[nt]+1}, \quad t \in [0, 1], \quad n \geq 1$$

converge faiblement vers W dans H_α , $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$,

avec

$$\bar{\sigma}^2 = E((Z_1)^2) + 2 \sum_{i=2}^{i=\infty} Cov(Z_1, Z_i)$$

.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= Var(U_1) + 2 \sum_{i=2}^{i=\infty} Cov(U_1, U_i) \\ &= \beta_2 - \beta_1^2 + \frac{1}{(\lambda + n_e \mu)^2} + 2 \sum_{i=2}^{i=\infty} Cov(R_1, R_i) \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Le corollaire 1.1.1 appliqué à la fonction $F(g) = g(1)$ continue sur $(H_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, permet de conclure à la convergence en loi de

$F(\xi_n) = \frac{A_n - b_n}{\sigma\sqrt{n}}$ vers $F(W_t) = \mathcal{N}(0, 1)$. Ce qui achève la preuve du théorème 4.3.1.

Conclusion et perspectives

L'objectif du travail présenté dans cette thèse est l'étude et l'analyse du comportement asymptotique de la période d'activité de la file d'attente M/G/1 avec rappels. L'analyse de cette dernière nous a amené à l'extension du théorème de Lamperti puisque les différents processus constituant la période d'activité ne sont pas tous de même loi. Le vrai problème est la dépendance des variables aléatoires de rappels notées R_i avec le nombre de clients dans l'orbite.

Lorsqu'on connaît le type de dépendance, on peut appliquer certains théorèmes existants ou à démontrer. Un exemple est donné dans ce sens au chapitre quatre, où on montre la convergence vers le mouvement brownien dans H_α et donc vers la loi gaussienne dans $\mathbb{R}$. Lorsqu'on ne connaît pas le type de dépendance, on utilise la décomposition d'Artalejo de la période d'activité en périodes actives et périodes inactives de l'orbite : (L_k^i, L_k^b) . On arrive ainsi à exhiber une suite de variables aléatoires indépendantes mais pas de même loi. Ceci nous a conduit à l'utilisation du théorème de Lamperti après son extension, ce qui a constitué notre première contribution. Par la suite, on a appliqué ce théorème pour montrer la convergence du processus de sommes partielles (constituant la période d'activité du système M/G/1 avec rappels exponentiels) vers le mouvement brownien dans H_α et donc vers la loi normale dans $\mathbb{R}$. Cette partie traitée dans le chapitre quatre constitue notre deuxième contribution qui a donné la prépublication [81] et la communication internationale dans ROADEF2013 en France.

Les perspectives de ce travail sont très diverses. On peut envisager d'étendre ces résultats à d'autres types de rappels ou à d'autres types de dépendance. Il serait également intéressant de voir ce que donnerait ce résultat en utilisant la méthode du principe des grandes déviations (abrégée en anglais par "LDP" : Large Deviation Principle).

Annexe A

Rappels sur les files d'attente

Introduction

Comme par nature, tout être humain déteste attendre pour accéder à un service. Il est tout a fait naturel de vouloir réduire le temps d'attente et par conséquent, dans l'étude des systèmes de files d'attente, on s'intéresse souvent au nombre de clients dans le système. L'évolution d'un système de files d'attente se fait généralement en fonctions des arrivées des clients ainsi que des fins de services (un client peut demander plusieurs services auprès de plusieurs serveurs) qui correspondent à un départ d'un client. L'évolution d'un tel système est souvent modelisée par un processus aléatoire qui s'avère être un modèle mathématique adéquat. Les plus simples modèles sont markoviens mais dans la réalité ce n'est pas toujours vrai auquel cas on modélise avec un processus non markovien.

A.1 Généralités

La théorie des files d'attente, en anglais "Queueing Theory", permet de modéliser des situations où des clients arrivent à des instants aléatoires dans un lieu appelé "station" pour demander un ou plusieurs services. Le serveur peut être un guichet de banque, la caisse d'un supermarché ou d'une station service de carburants ; ou simplement un serveur informatique dont les clients sont les tâches que le serveur doit traiter. Le temps nécessaire pour servir un client est aussi supposé aléatoire. Les systèmes de files d'attente sont définis par les éléments suivants :

1. Le flux d'arrivées des demandes.
2. Les caractéristiques des temps de service de chaque demande.
3. Le nombre de serveurs.

4. La discipline de service auprès de chaque serveur.

Il arrive qu'après un premier service, il est nécessaire d'obtenir un autre (ou plusieurs) service(s). Dans ce cas, les différentes stations sont regroupées en un réseau de systèmes de files d'attente. Lorsque la station ne possède pas de file d'attente et que le client est obligé de revenir à des instants aléatoires jusqu'à ce qu'il trouve le serveur libre, on parle de file d'attente avec rappels. Dans ce cas, il faut préciser la loi régissant les rappels (appelés aussi appels secondaires).

Notations de Kendall

Pour décrire les différents systèmes de files d'attente, on utilise souvent la notation de Kendall : $A/B/m/n$ où :

- A est le code de la loi de probabilité de l'intervalle entre les arrivées successives du flux d'entrées,

- B est le code de la loi de probabilité de la durée de service d'une demande,

- m est le nombre de dispositifs de service (serveurs),

- n est le nombre de places dans la file d'attente et lorsque $n = \infty$, on utilise la notation $A/B/m$ au lieu de $A/B/m/\infty$,

- Les symboles A et B prennent le plus souvent leurs valeurs dans l'ensemble M, E_k, H_k, G, GI, D avec :

- M Désigne la loi exponentielle,

- E_k est la loi d'Erlang d'ordre k ,

- H_k est la loi hyper exponentielle d'ordre k ,

- G et GI lois arbitraires où I signifie que les intervalles successifs sont indépendants,

- D désigne la loi de probabilité (déterministe) d'un flux régulier.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'ergodicité et au régime stationnaire

du système. D'une façon générale, on cherche :

- Les conditions d'existence d'un régime stationnaire,
- La distribution stationnaire des probabilités d'état du système,
- Le nombre moyen de demandes présentes dans le système en régime stationnaire,
- La loi de probabilité du temps d'attente,
- Le temps moyen d'attente de service,
- Le temps moyen de séjour d'une demande dans le système,
- etc.

Taux d'occupation

Dans le système G/G/1, si on note par λ le taux des arrivées des clients et par $E[B]$ le temps moyen de service, on définit le taux d'occupation moyen par $\rho = \lambda.E[B]$. On montre que la file se vide si $\rho < 1$.

Soit $L(t)$ la variable aléatoire qui désigne le nombre de clients dans le système à l'instant t et S_n celle qui désigne le temps de séjour du client n dans le système. Sous l'hypothèse $\rho < 1$, on montre que ces variables aléatoires admettent des limites lorsque $n \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow \infty$ et ne dépendent pas de l'état initial du système. On note par L et S ces limites. Lorsque le système est stable, on estime souvent le nombre moyen de clients par $E[L]$ et le temps moyen de séjour dans le système par $E[S]$.

On note par

$$p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P(L(t) = k) = P(L = k), \quad F_S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq x) = P(S \leq x).$$

Sachant que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{x=0}^t L(x) dx = E[L], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k = E[S].$$

La loi de Little nous donne la relation :

$$E[L] = \lambda.E[S]. \tag{A.1}$$

A.2 Le modèle de files d'attente M/G/1 avec rappels

Le système de files d'attente M/G/1 avec rappels est caractérisé par le fait qu'un client qui arrive et trouve le serveur occupé quitte le système pour rappeler ultérieurement à des instants aléatoires jusqu'à satisfaction de sa demande. Entre deux rappels successifs, le client est dit en orbite. Ces systèmes sont en particulier utilisés dans la modélisation des réseaux de télécommunication et des systèmes d'ordinateurs.

La difficulté majeure est qu'on ne peut pas observer l'orbite et en particulier, on arrive pas à faire la distinction entre un appel primaire (arrivée d'un nouveau client) et un rappel (qui vient de l'orbite). De plus, le processus des arrivées dépend à la fois des lois régissant les rappels ainsi que de la loi des arrivées primaires ce qui supprime la propriété de l'indépendance.

Le modèle M/G/1 avec rappels exponentiels est le modèle le plus étudié. On peut citer entre autres les travaux de [2], [3], [7], [10] et [83]. L'évolution de ce système est décrite au chapitre quatre. On rappelle toutefois que :

- a) λ : désigne le taux des arrivées.
- b) μ : est le taux des rappels de l'orbite.
- c) β_k est le moment d'ordre k de la loi de probabilité du temps de service.

On décrit souvent l'état du système par le processus :
 equation $X(t) = N(t)$, si $C(t) = 0$ et $X(t) = (C(t), N(t), \varepsilon(t))$ si $C(t) = 1$,

où :

$X(t)$ désigne le nombre de clients dans le système (orbite + service) à l'instant t .

$C(t) = 0$ ou $C(t) = 1$ selon que le serveur est libre ou occupé à l'instant t .

$\varepsilon(t)$ désigne la valeur résiduelle (ou le temps qui s'est écoulé) à la date t si $C(t) = 1$.

Soit :

$$P_{0,i}(t) = P(C(t) = 0, N(t) = i),$$

$$P_{1,i}(t, x) = P(C(t) = 1, N(t) = i, x < \varepsilon(t) < x + dx), i > 0.$$

La fonction génératrice du nombre de clients dans le système en régime stationnaire ($\rho < 1$) est :

$$G(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\beta(\lambda-\lambda z)}{\beta(\lambda-\lambda z)} \exp\left(-\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1-\beta(\lambda-\lambda x)}{x-\beta(\lambda-\lambda x)} dx\right).$$

En posant :

$$\Psi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\beta(\lambda-\lambda z)}{\beta(\lambda-\lambda z) - z},$$

et

$$\Phi(z) = \exp\left(-\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1-\beta(\lambda-\lambda x)}{x-\beta(\lambda-\lambda x)} dx\right),$$

on peut montrer la décomposition stochastique suivante :

$$G(z) = \Psi(z) + \frac{\Phi(z)}{\Phi(1)}.$$

D'après l'égalité précédente, on peut dire que le nombre de clients dans le système du modèle M/G/1 avec rappels est égal au nombre de clients dans le système du modèle M/G/1 classique plus une variable aléatoire positive de fonction génératrice égale à :

$$\frac{\Phi(z)}{\Phi(1)}.$$

En utilisant la méthode de la chaîne de Markov incluse ou la méthode de la variable aléatoire supplémentaire, on arrive à calculer les caractéristiques moyennes du système M/G/1 avec rappels.

Nombre moyen de clients dans le système

$$\bar{n} = \rho + \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

Nombre moyen de clients dans l'orbite :

$$\bar{n}_0 = \bar{n} - \rho = \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

Temps moyen d'attente :

$$\bar{W} = \frac{\lambda \beta_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

Nombre moyen de rappels par client :

$$\bar{r} = \bar{W} \mu = \frac{\mu \lambda \beta_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

Annexe B

Le Mouvement Brownien et le Pont Brownien

Le Mouvement Brownien

Nous rappelons ici les définitions et les propriétés du mouvement brownien et du pont brownien. Pour plus de détails, on confère à [13],[46].

Définition B.0.1 Soient μ et σ^2 fixés, le théorème de Kolmogorov montre qu'il existe un processus gaussien $(\xi_t)_{t \geq 0}$ caractérisé par

$$E[\xi_t] = \mu t,$$

$$\text{cov}(\xi_t, \xi_s) = \sigma^2 \cdot s \wedge t, \quad \forall s, t \geq 0$$

$$s \wedge t = \min(t, s).$$

Tout processus de ce type est appelée **mouvement brownien**.

Pour tout mouvement brownien $(\xi_t)_{t \geq 0}$, on peut se ramener au mouvement brownien canonique par le changement de variable

$$\xi_t \longmapsto \frac{\xi_t - \mu t}{\sigma} = \varsigma_t$$

Dans ce cas, on a évidemment

$$E[\varsigma_t] = 0, \quad \text{cov}(\varsigma_t, \varsigma_s) = s \wedge t, \quad \forall s, t \geq 0.$$

Indépendance et stationnarité des accroissements

Le mouvement brownien est à accroissements indépendants et stationnaires.

Il suffit pour cela de constater que si $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq t_4$ on a

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi_{t_1} - \xi_{t_2}, \xi_{t_3} - \xi_{t_4}) &= 0, \\ \text{var}(\xi_{t_1} - \xi_{t_2}) &= \sigma^2(t_1 - t_2), \\ E[\xi_{t_1} - \xi_{t_2}] &= \mu(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour un mouvement brownien $(\xi_t)_{t \geq 0}$, avec $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, les accroissements $(\xi_{t_{j+1}} - \xi_{t_j})$ sont mutuellement indépendants et la loi du k -uplet ne dépend que des écarts $(t_{j+1} - t_j)$.

Continuité en probabilité et en moyenne quadratique

Le mouvement brownien est continu en moyenne quadratique et donc en probabilité en tout t fixé.

à t fixé on constate que $\text{var}(\xi_{t+\mu_n} - \xi_t) = \|\mu_n\|$ donc $(\xi_{t+\mu_n} - \xi_t) \longrightarrow 0$ en moyenne quadratique lorsque μ_n tend vers zéro. Toutefois cette continuité n'implique pas la continuité des trajectoires.

Continuité p.s des trajectoires d'une modification

Théorème B.0.2 (Kolmogorov-Chantsov)[13] *Soit ξ_t un processus sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que*

$$\forall 0 \leq s, t \leq T \quad E|\xi_t - \xi_s|^\alpha \leq c|t - s|^{1+\beta},$$

où α et β sont des constantes positives alors il existe un processus ζ_t tel que

$$1) \quad P\{\zeta_t = \xi_t\} = 1, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$2) \quad P\left\{ \sup_{\substack{0 \leq |t-s| \leq h \\ s, t \in [0, T]}} \frac{|\zeta_t - \zeta_s|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta \right\} = 1,$$

où δ est une constante, h une variable aléatoire presque sûrement > 0 et $\gamma \in]0, \frac{\beta}{\alpha}[$.

On dit que (ζ_t) est une modification de (ξ_t) γ -höldérienne.

Application au mouvement brownien

Soit (ξ_t) un mouvement brownien canonique. On sait que pour un tel processus, l'accroissement $(\xi_t - \xi_s)$ avec $t > s$, suit une loi normale de moyenne nulle et de variance $(t - s)$. On a donc

$$\begin{aligned} 1) \quad P\{\xi_t - \xi_s < x\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{(t-s)}} du. \\ 2) \quad E|\xi_t - \xi_s|^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^\alpha e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{(t-s)}} du, \\ &= |t - s|^{\frac{\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} |u|^\alpha e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{(t-s)}} du. \end{aligned}$$

Les conditions du théorème précédent sont réunies pour $\alpha > 2$ et $\beta = \frac{\alpha}{2} - 1$.

On peut donc énoncer que pour un mouvement brownien, il existe une modification de (ξ_t) dont les trajectoires sont toutes localement γ -höldériennes.

Désormais, on travaillera dans toute la suite sous cette hypothèse et on notera W_t le mouvement brownien canonique, modification de (ξ_t) .

Mesurabilité du mouvement brownien

Pour t fixé, l'application qui à $\omega \longrightarrow W_t(\omega)$ est mesurable. Grâce à la continuité des trajectoires, on a le résultat plus fort suivant :

Théorème B.0.3 ([13]) *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega, t) & \longrightarrow & W_t(\omega) \end{array}$$

est mesurable pour $(A \otimes B(\mathbb{R}^+), B(\mathbb{R}))$.

Preuve :

On considère dans un premier temps le découpage dyadique de $\mathbb{R}^+$ en $\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots\}$ et le processus à trajectoires constantes :

$$W_t^{(n)}(\omega) = W_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \quad \text{pour } t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[.$$

L'application $(\omega, t) \longrightarrow W_t^n(\omega)$ est mesurable pour $(A \otimes B(\mathbb{R}^+), B(\mathbb{R}))$.

Lorsque $n \nearrow \infty$, l'application précédente tend vers $(\omega, t) \longrightarrow W_t(\omega)$.

Par continuité de $W_0(\omega)$ il en résulte la mesurabilité cherchée.

Propriétés de Markov et propriétés des trajectoires du Mouvement Brownien

Invariance du Mouvement Brownien

a) Si W_t est un mouvement brownien, alors $U_t^\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} W_{\lambda t}$ est aussi un mouvement brownien.

U^λ est bien gaussien et centré.

Si $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ on a :

$$\text{cov}(U_{t_2}^\lambda - U_{t_1}^\lambda, U_{t_4}^\lambda - U_{t_3}^\lambda) = \frac{1}{\lambda} \text{cov}(W_{\lambda t_2} - W_{\lambda t_1}, W_{\lambda t_4} - W_{\lambda t_3}) = 0,$$

$$\text{var}(U_{t_2}^\lambda - U_{t_1}^\lambda) = \frac{1}{\lambda} \text{var}(\lambda t_2 - \lambda t_1) = (t_2 - t_1).$$

De plus les trajectoires sont continues.

b) Si W_t est un mouvement brownien, alors le processus $V_t = t W_{\frac{1}{t}} (1 - 1_{\{0\}}(t))$ l'est aussi.

Propriété de Markov

Le mouvement brownien est un processus de Markov i.e Pour tout $t \leq s$ et $A \in B(\mathbb{R})$ avec $F_t = \sigma(W_\tau, \tau \leq t)$,

$$P\{W_s \in A / F_t\} = P\{W_s \in A / W_t\}.$$

Preuve :

il suffit de vérifier que $\forall k, \forall t_1 \leq t_2 \dots \leq t_k \leq s$ on a :

$$P\{W_s \in A / W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_k}\} = P\{W_s \in A / W_{t_k}\}.$$

$W_s - W_{t_k}, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}$ et $W_{t_1} = W_{t_1} - W_0$ sont indépendants donc la loi de W_s conditionnellement aux écarts : $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_1}$ est une loi gaussienne de variance $(s - t_k)$, centrée en t_k , ce qui implique

$$P \{W_s \in A / W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_k}\} = P \{W_s \in A / W_{t_k}\}.$$

Propriété de Markov forte

Propriété (de Markov) : Pour tout $t \in R^+$, le processus

$$(W_{t+t'} - W_t)_{t' \in R^+}$$

est un mouvement brownien indépendant de F_t .

Cette propriété découle directement de l'indépendance des accroissements. Elle reste vraie lorsque t est un temps d'arrêt.

Théorème B.0.4 ([13])(propriété de Markov forte) Soit τ un temps d'arrêt pour la suite de tribus $(F_t)_{t \geq 0}$ engendrée par le mouvement brownien W_t . le processus $(U_t)_{t \geq 0}$ défini par $U_t = W_{\tau+t} - W_\tau$ est un mouvement brownien indépendant de F_τ

Preuve (voir Billingsley page 154) Il faut établir que $\forall A \in F_t, \forall k \geq 0$ et pour tout k-uplet $t_1, t_2, \dots, t_k$ et $\forall E \in B(R^k)$ on a :

$$P \{[(U_{t_1}, \dots, U_{t_k}) \in E] \cap A\} = P \{(U_{t_1}, \dots, U_{t_k}) \in E\} P(A) \text{ pour l'indépendance.}$$

$$P \{(W_{t_1}, \dots, W_{t_k}) \in E\} = P \{(U_{t_1}, \dots, U_{t_k}) \in E\} \text{ pour le caractère brownien.}$$

Irrégularité des trajectoires

Théorème B.0.5 ([13]) Pour presque tout ω , $(W_t(\omega))_{t \geq 0}$ n'est en aucun point γ -höldérienne pour tout $\gamma \geq \frac{1}{2}$.

Théorème B.0.6 (loi du Logarithme itéré) [13] Pour presque tout ω on a :

$$\begin{cases} \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log \log \frac{1}{t}}} = 1, \\ \underline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log \log \frac{1}{t}}} = -1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1, \\ \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = -1. \end{cases}$$

Remarque

Il faut d'abord constater que les deux expressions se ramènent l'une à l'autre par la transformation $W_t \longrightarrow \pm W_{\frac{1}{t}}$. Par ailleurs les $\underline{\lim}$ se déduisent des $\overline{\lim}$ par la transformation $W_t \longrightarrow -W_t$ qui conserve le caractère brownien.

Lemme B.0.3 *[13](loi des extréma) Si $s \succ 0$, la loi conjointe de (W_s, M_s) a comme densité*

$$g(x, y) = \frac{2(2y - x)}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(2y-x)^2}{2s}} \quad x \leq y, \quad y \geq 0, \quad M_s = \sup_{0 \leq t \leq s} W_t.$$

Module de continuité

Le théorème suivant précise le module de continuité des trajectoires sur un segment. Ce module de continuité d'ordre $O\left(|t - s|^{\frac{1}{2} - \varepsilon}\right)$ pour $\varepsilon \succ 0$ est certainement d'ordre inférieur à $g(|t - s|)$ du théorème précédent.

Théorème B.0.7 *([13]) Avec $g(\delta) = \sqrt{2\delta \log \frac{1}{\delta}}$, on a presque pour toutes les trajectoires :*

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{|t-s| \leq \delta \\ s, t \in [0, 1]}} \frac{|W_t - W_s|}{g(\delta)} = 1.$$

Ensemble des points d'annulation

Théorème B.0.8 *([13]) Pour presque tout ω l'ensemble $Z(\omega)$ des points t où $W_t(\omega) = 0$ est parfait, non borné et de mesure de Lebesgue nulle. De plus tout intervalle en contient un autre inclus dans $(Z(\omega))^c$.*

Propriétés de Martingales

a) Le processus $(W_t)_{t \geq 0}$ et $(W_t^2 - t)_{t \geq 0}$ sont deux martingales pour la famille $(F_t)_{t \geq 0}$.

b) Pour tout $\lambda > 0$ $\left[e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}} \right]_{t \geq 0}$ est aussi une martingale pour la famille $(F_t)_{t \geq 0}$.

Le pont brownien

Un élément aléatoire X de $C[0, 1]$ est gaussien si ses lois fini-dimensionnelles sont des vecteurs gaussiens. Dans $C[0, 1]$, la loi gaussienne d'un élément aléatoire X est complètement définie par le moment $EX(t)$ et par le moment du produit $E(X(s)X(t))$, $0 \leq s, t \leq 1$, puisqu'ils déterminent les lois fini-dimensionnelles.

Or on sait que pour le mouvement brownien W , on a

$$EW_t = 0,$$

$$E(W_s W_t) = s \wedge t.$$

Dans le cadre de l'étude des loi empiriques, on cherche à avoir un élément aléatoire gaussien B qui remplit les deux conditions :

$$\text{i) } EB_t = 0,$$

$$\text{ii) } E(B_s B_t) = s(1-t) \text{ si } s < t.$$

Il existe plusieurs manières de montrer l'existence d'un tel élément. Dans [?] il est construit comme suit :

$$B_t = W_t - tW_1.$$

L'élément aléatoire B_t ainsi défini est appelé pont brownien.

Comme W_t et W_1 sont des éléments aléatoires gaussiens, B_t est aussi un élément aléatoire gaussien. De plus

$$B_0 = B_1 = 0,$$

$$EB_t = 0,$$

$$E \{ (B_t - B_s)^2 \} = (t - s) (1 - (t - s)) \quad \text{si } s < t,$$

$$E \{ (B_{s_2} - B_{s_1}) (B_{t_2} - B_{t_1}) \} = -(s_2 - s_1) (t_2 - t_1) \quad \text{si } s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2.$$

Le pont brownien admet pratiquement les mêmes propriétés que le mouvement brownien (voir Billingsley [13]) pour plus de détails.

Bibliographie

- [1] AISSANI A., *An $M^X/G/1$ energetic retrial queue with vacation and control*, IMA journal of management mathematics, vol 22, issue 1, 13-32, (2011).
- [2] AISSANI A., *Optimal control of an $M/G/1$ retrial queue with vacation*, Journal of System Science and Systems Engineering, vol 17, issue 4, 487-502, (2008).
- [3] AISSANI A., Artalejo J. R., *On the single server retrial queue subject to break-downs*, Queueing Systems, vol 30, 309-312, (1998).
- [4] AISSANI A., *Modélisation et Simulation*, OPU, (2011).
- [5] AISSANI A., *Modèles Stochastiques de la Théorie de Fiabilité*, OPU, (1992).
- [6] ARAUJO A. , GINE E., *The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables* Wiley, New York. (1980).
- [7] ARTALEJO J.R., FALIN G.I., *On the orbit characteristics of the $M/G/1$ retrial queue*, Naval research logistics, vol 43, 1147-1161, (1996).
- [8] ARTALEJO J.R., *Retrial queueing Systems*, Mathematical and computermodelling 30, 1-228, (1999).
- [9] ARTALEJO J.R., GOMEZ-CORALL A., *Retrial queueing systems : A Computational Approach*, Springer (2008)
- [10] ARTALEJO J.R., LOPEZ-HERRERO M. G., *On the busy period of $M/G/1$ retrial queue*, Naval Research Logistics 47, 115-127, (2000).
- [11] ARTALEJO J., FALIN G. , *Standard and Retrial Queueing Systems : a comparative analysis*, Revista Matematica complutense, vol. XV, num. 1, 101-129, (2002).
- [12] BALDI P. , ROYNETTE B., *Some exact equivalents for the brownian motion in Hölder norm*, Probability Theory and Related Fields, 93, 457-484, (1993)
- [13] BILLINGSLEY P., *Convergence of probability measures*, J. Wiley, New York, (1968.)

- [14] BILLINGSLEY P., *Probability and measure, Second Edition*, J. Wiley, New York, (1986).
- [15] BIRKEL T., *Moment bounds for associated sequences*, Ann. Probab., 16, 1184-1193, (1988)
- [16] BIRKEL T., *The invariance principle for associated processes*, stochastic processes and their applications, 27, 57-71, (1988).
- [17] BREZIS H., *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, (1983)
- [18] CHUNG K. L., *A Course in Probability Theory, Second Edition*, Academic, New York, (1974).
- [19] CIESIELSKI Z., *On the isomorphisms of the spaces $H\alpha$ and m* , Bull. Acad., Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 8, 217-222, (1960).
- [20] CIESIELSKI Z., *Hölder conditions for realizations of Gaussian processes*, Trans. Amer. Math. Soc., 99, 403-413, (1961).
- [21] CIESIELSKI Z., KERKYACHARIAN G., ROYNETTE B., *Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens*, Studia-Math., 107, 171-204, (1993).
- [22] CINLAR E., *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, Englewood cliffs, New Jersey, (1975).
- [23] DAVYDOV Y., *The invariance principle for stationnary processes*, Theory Probab. Appl., 487-498, (1970).
- [24] DAVYDOV Y., *Weak convergence of discontinuous processes to continuous ones*, Th. of Probab. and math. Stat., Proc. of the seminar dedicated to the memory of Kolmogorov, March-May 1993, St. Petersburg (I. Ibragimov, A. Zaitser, Eds.), Gordon and Breach, 15-16 (1996).
- [25] DEDECKER J.; DOUKHAN, P., Lang G., Leon J. R., Louhichi S., Prieur C., *Weak dependence : Models, Theory and Applications*, Lecture Note in Statistics 190, Springer-verlag (2007).
- [26] DOOB J. L., *Stochastic Processes*, J. Willey, New York, (1953).
- [27] DOUKHAN P., *Mixing*, Lecture Notes in statistics, 85 (1994).
- [28] DOUKHAN P. , MASSART P. , RIO E. *The functional central limit theorem for strongly mixing processes*, Ann. Inst. Henry Poincaré, Proba. Stat., 30, 63-82, (1994)
- [29] DUDIN A.N. MEDVEDEV G.A. MELENETS Y.V. *Practicum Informatique De Théorie Des Files D'Attente*, OPU 2010; Traduit du Russe en Français par le Professeur AISSANI Amar.
- [30] ERICKSON R. V., *Lipschitz smoothness and convergence with applications to the central limit theorem for summation processes* Ann. Probab. 9, 831-851, (1981).

- [31] FALIN G.I., *On the single-line system with secondary orders*, Engineering Cybernetics 17, pp : 76-83 (1979).
- [32] FALIN G.I., TEMPLETON J.G.C., *Retrial Queues*, Chapman and Hall, London (1997).
- [33] FALIN G. , *Surveil of retrial queues*, Queueing Systems, 7, 127-168, (1990).
- [34] FELLER W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol I, Third Edition, Vol II, Second Edition, Wiley, New York, (1968), (1971).
- [35] FERNHOLZ L. T., *Almost sure convergence of smothed empirical distribution functions*, Scand. J. Statist. 18, 255-262, (1991).
- [36] FOURGEAUD C. , FUSHS A., *Statistique, deuxième édition*, Dunod, Paris, (1972).
- [37] GNEDENKO B. V. , KOLMOGOROV A. N., *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, English ed. , Addison-Wesly, Reading, Massachusetts, (1954).
- [38] GUIKHMAN I., SKOROKHOD A., *Introduction à la théorie des processus aléatoires*, Edition Mir. (1980).
- [39] HALMOS P. R., *Measure Theory*, Van Nostrand, New York, (1950).
- [40] HAMADOUCHE D., *Principes d'invariance dans les espaces hölderiens pour des variables α -mélangeantes ou associées*, Pub. IRMA Lille, Vol. 37, IX,(1995).
- [41] HAMADOUCHE D., *Weak convergence of smoothed empirical process in Hölder spaces*, Stat. Prob. Letters, 36, 393-400, (1998).
- [42] HAMADOUCHE D., *Invariance principles in Hölder spaces*, Portugaliae Mathematica, vol. 57 Fasc.2, 127-151, (2000).
- [43] HAMADOUCHE D. , SUQUET CH., *Weak Hölder convergence of processes with application to the perturbed empirical process*, Applicationes Mathematicae, 26, 68-83, (1999)
- [44] HAMADOUCHE D. , TALEB Y., *Hölderien Version of Donsker-Prohorov's Invariance Principle*, IAENG Int. Jour. of App. Math., Vol 39, Issue 1, 1-8, (2009).
- [45] HARDY G. H. and LITTLEWOOD J. E., *some proprieties of functional integrals*, I. Maths. Zeitschr., 27, 565-606, 1972.
- [46] HIDA T., *Brownian motion*, Springer (1980).
- [47] IBRAGIMOV I., *Sur la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 289, 545-547,(1979).

- [48] ITÔ K. , MC KEAN H., *Diffusion processes and Their Sample Pathes*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, (1965).
- [49] KARLIN S., TAYLOR H. M., *A first cours in stochastic processes, Second Edition*, Academic Press, New York, (1975).
- [50] KERKYACHARIAN G., ROYNETTE B., *Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Ito Nisio*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 312, 877-882, (1991).
- [51] KOROLIOUK V., PORTENKO N., SKOROHOD A., TOURBINE A., *Aide-mémoire de théorie des probabilités et de statistique mathématique*, Edition Mir Moscou (1983).
- [52] LAMPERTI J., *On convergence of stochastic processes*, Trans. Amer. Math. Soc., 104, 430-435, (1962).
- [53] LEVY P., *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Vallars, Paris (1937).
- [54] METIVIER M., *Notions fondamentales de la théorie des probabilités, deuxième édition*, Dunod, 1972.
- [55] NEWMAN C. M. and WRIGHT A. L., *An invariance principle for certain dependent sequences*, Ann. Probab., 9, 671-675. (1981)
- [56] NOBELIS PH., *Fonctions aléatoires lipschitziennes*, Lecture Notes Math., 850, 38-43, (1981).
- [57] OLIVEIRA P. E., *Invariance principle in $L^2[0, 1]$* , Comment. Math. Univ. Carolinae 31, 2, 357-366, (1990).
- [58] OLIVEIRA P. E., SUQUET CH., *An invariance principle in $L^2[0, 1]$ for non stationary φ -mixing sequences*, Comm. Math. Univ. Carolinae 36, 2 293-302, (1995).
- [59] OLIVEIRA P. E., SUQUET CH., *$L^2(0, 1)$ weak convergence of the empirical process for dependent variables*, Lecture Notes in Statistics 103, A. Antoniadis and G. Oppenheim (Eds) Wavelets and Statistics, 331-344, (1995).
- [60] OLIVEIRA P. E. , SUQUET CH., *An L^2 invariance principle for LPDQ random variables*, Portugaliae Mathematica 53, 367-379, (1995).
- [61] OLIVEIRA P. E., SUQUET CH., *Weak convergence in $L^p[0, 1]$ of the uniform empirical process under dependence*, Pub IRMA, Lille 41-VI.
- [62] OODAÏRA H., YOSHIHARA K. I., *Functional central limit theorems for strictly stationary processes satisfying the strong mixing condition*, Kodai Math. Sem. Rep., 24 , 259-269, (1972).

- [63] PROHOROV Y. V., *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*, Theor. Prob. Appl. 1, 157-214, (1956).
- [64] PROHOROV Y. V., ROSANOV Y., *Théorie des probabilités. (Notions fondamentales. Théorèmes limites. Processus aléatoires)*, M., Naouka, (1973).
- [65] RAČKAUSKAS A., SUQUET CH., *Central limit theorem in Hölder spaces*, Probab. and Math. Statist., 19, 133-152, (1999).
- [66] RAČKAUSKAS A., SUQUET CH., *On the hölderian functional central limit theorem for i.i.d. random elements in Banach space*, *Limit Theorem in Probability and Statistics*, Balatonlelle, (I. Berkes, E. Csaki, M. Csörgő, eds) Janos Bolyai Mat. Soc., Budapest, vol 2, 485-498, (2002).
- [67] RAČKAUSKAS A., SUQUET CH., *Invariance principles for adaptive self-normalized partial sums processes*. Stochastic Process. Appl., 95, 63-81, (2001).
- [68] RAČKAUSKAS A., SUQUET CH., *Central limit theorems in Hölder topologies for Banach space valued random fields*, *A Theory of Probability and its Applications*, 2002.
- [69] RAČKAUSKAS A., SUQUET CH., *Necessary and sufficient condition for the hölderian functional central limit theorem*. Pub IRMA Lille 57-I, (2002).
- [70] RAČKAUSKAS A., SUQUET CH., *Hölder norm test statistics for epidemic change*. Pub IRMA Lille, 59-III. (2002).
- [71] RAČKAUSKAS A., SUQUET CH., *Testing epidemic changes of infinite dimensional parameters*. Pub IRMA Lille, 60-VIII, (2003).
- [72] RAMCHANDRAN B., *Advanced theory of characteristic Functions*, Statistical Publishing society, Calcutta, (1967).
- [73] RIESZ M., *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta. Math., 81, 1-223, (1949).
- [74] SAZONOV V., *On multidimensional central limit theorem*, Sankhya. Ser. A, 39, part. 2, 181-209, (1968).
- [75] SCHWARTZ L., *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann (1970) .
- [76] SHORACK G. R., WELLNER G. A., *Empirical processes with applications to statistics*, Wiley (1986).
- [77] SINGER I., *Bases in Banach spaces*, II, Springer (1981).
- [78] SKOROKHOD A., *Studies in the Theory of Random Processes*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1965).

- [79] SUQUET CH., *Tightness in Schauder décomposable Banach spaces*, Translation of A.M.S., Proceedings of the St Petersburg Math. Soc., 5, (1996).
- [80] SUQUET CH., VIANO M. C., *Change point detection in dependent sequences : invariance principles for some quadratic statistics*, Math. Meth. of Stat., volume 7, N° 2, 157-191, (1998).
- [81] TALEB Y., ACHEMINE F., HAMADOUCHE D., AISSANI A., *Asymptotic Study of a Busy Period in a Retrial Queue*, PUB IRMA LILLE, Vol 71, VI, (2011).
- [82] VENTSEL A., *Théorie des processus aléatoires*, Naouka, (1975).
- [83] YANG Y., TEMPLETON J.G.C., " *A survey on retrial queues. Queueing systems* ", 203-233, (1987).
- [84] YOKOYAMA R., *Moment Bounds for stationary mixing sequences*, Z. Wahrsh. Verw. Gebiete, 52, 45-57, (1980).

Résumé

L'étude de la convergence faible des processus stochastiques dans l'espace de Hölder nous permet de montrer une version Hölderienne du principe d'invariance de Donsker-Prohorov en utilisant certains résultats d'équitension dans cet espace. Ainsi, on généralise le principe d'invariance de Lamperti pour les lignes polygonales du processus de sommes partielles de variables aléatoires non stationnaires. Le même résultat est obtenu par le lissage polygonal. Ces deux extensions constituent notre première contribution.

Comme application, on utilise le premier résultat pour l'étude asymptotique de la période d'activité de la file d'attente M/G/1 avec rappels. La modélisation d'Artalejo et Falin (1996) permet de conclure par un principe d'invariance pour les variables aléatoires indépendantes non stationnaires. Dans la deuxième approche, on utilise la période active et la période inactive du serveur et on conclut aussi par un principe d'invariance lorsque la suite des variables aléatoires est α -mélangeante. Ces deux principes d'invariance constituent notre deuxième contribution.

Mots clé : Processus stochastique, Equitension, Espace de Hölder, Principe d'Invariance, Mouvement Brownien, File d'Attente avec Rappels, Période d'activité.

Abstract

We study the weak convergence of stochastic processes in Hölder spaces and using some results of tightness proved in these spaces, we obtain a Hölderian version of Donsker-Prohorov's invariance principle. First, for the polygonal interpolation of the partial sums process, generalizing Lamperti's invariance principle to the non-stationary case and similar results are proved for the convolution smoothing of the partial sums process.

We use the first result to study the asymptotic distribution of the busy period of an M/G/1 retrial queue. The first approach rely on the modeling of Artalejo and Falin (1996) and an invariance principle for independent random variables. In the second one, we use the evolution of the system in terms of idle periods and busy periods of the server for dependent sequences and we conclude with an Hölderian invariance principle.

Keywords : Stochastic process, Tightness, Hölder Space, Invariance Principle, Brownian Motion, Retrial Queue, Busy Period.