

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées

## **THESE DE DOCTORAT L.M.D**

Spécialité : Mathématiques

Option : Recherche opérationnelle

Présentée par :

**Mr Ferhat LOUNIS**

Sujet :

### **Approximation dans le système de files d'attente avec rappels, à serveur non fiable et clients impatients.**

Devant le jury d'examen composé de :

M. AIDENE Mohamed ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Président
M. HAMADOUCHE Djamel ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Rapporteur
M. AISSANI Amar ;	Professeur ;	U.S.T.H.B ;	Co-rapporteur
M. SADI Bachir ;	MCA ;	U.M.M.T.O ;	Examineur
Mme AOUDIA-Rahmoune Fazia ;	MCA ;	U. Béjaïa ;	Examinatrice
Mme BELLAHCENE Fatima ;	MCA ;	U.M.M.T.O ;	Examinatrice

## *Remerciements*

Tout d'abord, Je tiens à exprimer mes sincères remerciements au professeur Djamel Hamadouche pour m'avoir confié ce sujet de thèse, pour m'avoir encadré durant ces années avec beaucoup de patience, de disponibilité et de professionnalisme. Ce fut très sincèrement un réel plaisir de travailler à ses côtés pendant ces années et pour m'avoir ainsi permis de réaliser cette thèse.

Je remercie très chaleureusement mon co-promoteur Mr Amar Aissani, professeur à l'USTHB pour ses conseils et ses commentaires fort utiles qui ont fortement enrichi ma formation. Je tiens également à le remercier pour sa disponibilité et la confiance qu'il m'a accordée.

J'adresse mes sincères remerciements au professeur Aidène Mohamed qui a bien voulu présider le jury.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Mr Sadi Bachir, Mme Aoudia-Rahmoune Fazia et Mme Bellahcene Fatima d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à saluer les membres du laboratoire LMPA de l'université de Tizi-Ouzou avec qui, j'ai eu le plaisir de travailler. J'exprime une pensée plus particulière à l'équipe de probabilités et statistique.

Enfin, un grand merci à mes parents et ma famille qui m'ont toujours encouragé et soutenu.

# Table des matières

Introduction générale	4
<b>1 Eléments de la théorie des files d'attente</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Systèmes de files d'attente classiques . . . . .	9
1.2.1 Description du modèle d'attente classique . . . . .	9
1.2.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente . . .	12
1.3 Systèmes de files d'attente avec rappels . . . . .	14
1.3.1 Description du modèle d'attente avec rappels . . . . .	15
1.3.2 Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite . . . . .	16
<b>2 Système de files d'attente <math>M/G/1</math> avec rappels, à serveur non fiable et clients impatientes</b>	<b>18</b>
2.1 Introduction . . . . .	18
2.2 Description du modèle . . . . .	19
2.3 Condition de stabilité . . . . .	22
2.4 Distribution stationnaire de l'état du système . . . . .	28
2.5 Cas particuliers . . . . .	36
<b>3 Evaluation des performances dans le système de files d'attente <math>M/G/1</math> avec rappels, à serveur non fiable et clients impatientes</b>	<b>38</b>

3.1	Introduction . . . . .	38
3.2	Mesures de performance probabilistes . . . . .	39
3.3	Mesures de performance moyennes . . . . .	43
3.4	Illustrations numériques . . . . .	49
3.4.1	Influence des paramètres sur les mesures de performance . . . . .	49
3.4.2	Problème d'optimisation . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Approximation dans le système de files d'attente M/G/1 avec rappels, non fiable et clients impatientes</b>	<b>62</b>
4.1	Introduction . . . . .	62
4.2	Comportement asymptotique du nombre de clients en orbite sous un taux de trafic intense . . . . .	63
4.3	Comportement asymptotique du nombre de clients en orbite sous un taux de rappels faible . . . . .	68
4.4	Comportement asymptotique du nombre de clients en orbite sous un taux de connexion instantanée des clients impatientes . . . . .	73
4.5	Illustrations numériques . . . . .	78
	<b>Conclusion générale</b>	<b>80</b>
<b>A</b>	<b>Convergence uniforme</b>	<b>84</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>86</b>

## Publication et communications

### Publication :

- Amar Aissani, Ferhat Lounis, Djamel Hamadouche & Samira Taleb (2018) : Analysis of Customers' Impatience in a Repairable Retrial Queue under Postponed Preventive Actions, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, DOI : 10.1080/01966324.2018.1486763.
- Ferhat Lounis, Djamel Hamadouche & Amar Aissani (2018) : Approximation of an unreliable M/G/1 retrial queue with impatience. *Proceedings of 12th International Workshop on Retrial Queues and Related Topics*. Tomsk, Russia.

### Communications :

- An Unreliable Retrial Queue with Impatience and Preventive Maintenance, The first international conference on the "*Evolution of Contemporary Mathematics and their Impact in Sciences and Technology*" (ECMI-SciTech 2017), Freres Mentouri Constantine University, 09 au 12 October 2017.
- Approximation of an unreliable M/G/1 retrial queue with impatience, 1<sup>ère</sup> édition des *Doctoriales Nationales de Mathématiques*, Ecole Normale Supérieure Assia DJEBAR de Constantine, 28 au 31 octobre 2017.

# Introduction générale

La théorie des files d'attente est un des outils analytiques les plus puissants pour la modélisation de systèmes de logistique et de communication. Cette théorie a pour objet l'étude de systèmes et réseaux où des entités, appelées clients, cherchent à accéder à des ressources, généralement limitées, afin d'en obtenir un service. La demande concurrente d'une même ressource par plusieurs clients engendre des délais dans la réalisation des services ainsi que des files de clients désireux d'accéder à une ressource indisponible. L'analyse théorique de tels systèmes permet d'établir à l'avance les performances de l'ensemble, d'identifier les éléments critiques ou encore, d'appréhender les effets d'une modification des conditions de fonctionnement.

Ce domaine de recherche est né en 1917, des travaux de l'ingénieur électricien danois Erlang sur la gestion des réseaux téléphoniques de Copenhague entre 1909 et 1920. Par la suite, les files d'attente ont été utilisées dans la modélisation des systèmes de production et des systèmes informatiques. Initialement, leur utilisation était très limitée par le fait qu'elles faisaient vite appel à une puissance de calcul non disponible à cette époque. Ainsi, pendant longtemps, c'est surtout des développements de nature théorique qui ont vu le jour dans le domaine. Le sujet a pourtant inspiré et continue à inspirer de nombreux chercheurs comme en témoignent les nombreuses publications parues à ce jour dans le domaine. Avec l'automatisation des systèmes technologiques, notamment l'avènement des systèmes de production flexibles, les convoyeurs automatiques, etc, les applications

nécessitant le traitement par une telle théorie se sont également multipliées.

Ce n'est pourtant que rarement que les files d'attente apparaissent de manière isolée. Le plus souvent ce sont des réseaux entiers avec un nombre élevé de serveurs interconnectés qu'il s'agit de modéliser. La grande percée dans le domaine est venue avec la découverte en 1957, par Jackson, d'une manière particulièrement élégante et efficace de traiter certains réseaux de files d'attente. C'est grâce aux apports des mathématiciens Khintchine, Palm, Kendall, Pollaczek et Kolmogorov que la théorie s'est vraiment développée.

La théorie des files d'attente classique offre deux possibilités pour résoudre le conflit qui apparaît lorsqu'un client arrive dans le système à serveur unique et trouve le serveur occupé : soit il quitte le système sans recevoir le service (modèle d'Erlang à demandes refusées), soit il prend place dans une file d'attente. Une possibilité alternative est que le client qui ne peut être servi, libère l'espace du serveur mais après une durée de temps aléatoire revient au système pour répéter sa demande de service. Entre les appels successifs, le client en question se trouve en "orbite". Un tel système est appelé système de files d'attente avec "rappels".

Cette branche de la théorie des files d'attente s'applique dans la modélisation stochastique de différents problèmes de télécommunications, et de réseaux informatiques. Les systèmes de files d'attente avec rappels peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes pratiques, tels que l'analyse du comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques, l'évitement de collision dans les réseaux locaux, l'analyse du temps d'attente pour accéder à la mémoire sur les disques magnétiques, etc [10]. Par conséquent, de nombreux travaux ont été publiés dans des Journaux spécialisés en probabilités appliquées et modèles stochastiques, statistiques et recherche opérationnelle, télécommunication et ingénierie industrielle, et informatique. Le grand intérêt de ce domaine est confirmé par l'organisation d'une série de workshops sur les systèmes de files d'attente avec rappels : Madrid

(1998), Minsk (1999), Amsterdam (2000), Cochin (2002), Seoul (2004), Miraflores de la Sierra (2006), Athens (2008) et Beijing (2010). A cet effet, quelques revues de renommées internationales ont dédié des numéros spéciaux ; c'est le cas du journal *Annals of Operation Research* [12] et *Mathematical and Computer Modelling* [11].

Parmi les premières contributions sur les modèles d'attente avec rappels, on trouve celles de Hashida et Kawashima (1979) [37] et de Lubacz et Roberts (1984) [45]. Les progrès récents sont résumés dans les articles de synthèse de Aïssani (1994) [3], Kulkani et Liang (1997) [51], Templeton (1999) [64] et dans les monographies de Falin et Templeton (1997) [30], Gómez-Corral et Ramalhoto (2000) [34] et dans les travaux bibliographiques de Artalejo (1999 et 2010) [11], [9].

Souvent, la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients en orbite peut être obtenue sous une forme explicite, mais ayant une expression assez lourde, elle ne révèle pas la nature de la distribution en question. Par conséquent, on est amené à l'étude de la convergence asymptotique de ces distributions pour les valeurs limites des différents paramètres : trafic intense, taux de rappels faible. Une première étude du comportement asymptotique d'un modèle avec rappels de type  $M/G/1$  a été réalisée par Falin (1979, 1986) [28], [29] et Falin et Templeton [30]. D'autres études ont été établies dans [6], [37], [44], [61]. Il existe aussi des travaux sur des modèles classiques.

Le travail de cette thèse s'inscrit dans cette optique, en particulier, on s'intéresse à l'évaluation des performances et approximation dans le système de files d'attente  $M/G/1$  avec rappels, serveur non fiable et clients impatientes.

- Le premier chapitre est un rappel des résultats sur les éléments de la théorie des files d'attente, qui permettra d'introduire les chapitres suivants où seront abordés de nouveaux résultats.
- Dans le chapitre deux, nous réalisons pour la première fois l'analyse stochastique complète du système de files d'attente  $M/G/1$  avec rappels, à

serveur non fiables et clients impatients avec deux types de maintenance du serveur. D'abord, nous établissons la condition d'ergodicité sous laquelle le système sera stable. Ensuite, en utilisant la méthode des variables supplémentaires, on obtient la loi de probabilité conjointe de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite.

- Dans le troisième chapitre, nous établissons des résultats sur les mesures de performance qui peuvent être utiles pour les praticiens. Quelques illustrations numériques sur la façon dont ces résultats peuvent être interprétés sont données et nous considérons également un problème d'optimisation.
- Enfin, dans le quatrième chapitre, nous étudions le comportement asymptotique du nombre de clients dans l'orbite du modèle  $M/G/1$  avec rappels, à serveur non fiable et clients impatients, sous un taux de trafic intense, un taux de rappels faible et puis sous un taux de connexion instantanée des clients impatients. Ces trois résultats généralisent les résultats du modèle d'attente  $M/G/1$  avec rappels. Nous complétons notre travail par des exemples numériques illustrant tous ces résultats.

# Chapitre 1

## Eléments de la théorie des files d'attente

### 1.1 Introduction

Les systèmes de files d'attente décrivent un aspect de la vie moderne que nous rencontrons à chaque étape de nos activités quotidiennes. Qu'il se produit devant un guichet d'une banque ou en accédant à l'internet, le phénomène de base des files d'attente surgit chaque fois qu'un serveur (guichet, routeur, ...) est consulté pour son service par un grand nombre de tâches ou de clients.

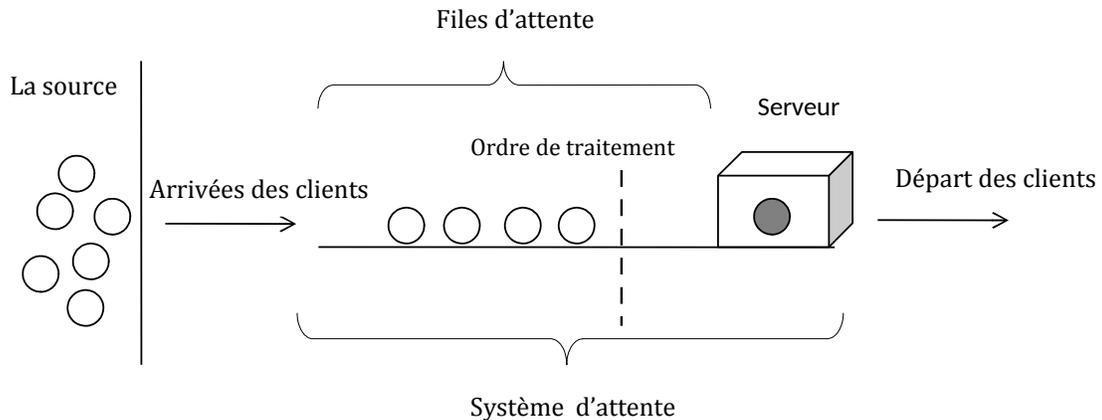
Dans ce chapitre, nous présentons les éléments essentiels et quelques résultats concernant les systèmes de files d'attente. Nous commencerons par une description d'un système de files d'attente classiques. Ensuite, nous nous intéressons particulièrement aux files d'attente avec rappels.

### 1.2 Systèmes de files d'attente classiques

#### 1.2.1 Description du modèle d'attente classique

Le modèle général d'un système de files d'attente peut être résumé comme suit, Les demandes de service (clients) arrivent à un certain endroit et réclament un certain service. Si un dispositif de service (serveur) est libre, le client qui arrive se

dirige vers ce dernier où il est servi. Dans le cas contraire, on a deux possibilités : soit le client quitte le système, soit il prend une place dans une file d'attente. A un moment donné, le client est sélectionné pour le service selon une discipline donnée. Une représentation graphique est donnée par la figure 1.1. Un système de



**FIGURE 1.1** – Modèle de files d'attente à un serveur.

files d'attente comprend donc, un espace de service et un espace d'attente. Pour identifier un système de files d'attente, on doit spécifier :

1. **Le processus des arrivées des clients** : Les arrivées des clients sont caractérisées par l'ensemble des instants d'arrivées de chaque client ou d'un groupe de clients dans le système. La collection de ces instants forment un processus des arrivées. Souvent, on suppose que les temps entre deux arrivées consécutives sont indépendants et identiquement distribués.
2. **La source des clients** : La population source, d'où proviennent les clients, peut être finie ou infinie, unique ou multiples.
3. **La capacité du système** : Elle représente le nombre maximal de clients dans le système. Un client arrivant et trouvant ce nombre de clients présents dans le système sera perdu.

4. **La durée de service** : Le temps de service d'un client est défini par le temps séparant le début et la fin de son service. En général, on suppose que les durées de service sont indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes des temps d'inter-arrivées.
5. **La discipline de service** : Elle spécifie la manière avec laquelle le serveur sélectionne le prochain client à servir. Cependant, plusieurs possibilités existent quant à l'ordre selon lequel les clients seront servis. Les principales disciplines de service sont :
  - FIFO (First In First Out) : Cette discipline est la plus usuelle. Les clients quittent le système dans l'ordre suivant lequel ils sont entrés.
  - LIFO (Last In First Out) : Le dernier client dans la file est le premier à être servi.
  - Random : Tous les clients ont la même probabilité d'être servis en premier.
  - Prioritaire : Les clients sont servis suivant un attribut qui leur est associé.
6. **Le nombre de serveurs** : Il s'agit du nombre de serveurs composant l'espace de service. La plupart du temps, les serveurs sont considérés identiques et indépendants les uns des autres.

Puisque les instants d'arrivée et les durées de service sont généralement des quantités aléatoires, la modélisation décrivant le fonctionnement d'un système de files d'attente est un processus stochastique. Par ailleurs, on suppose généralement que toutes les variables aléatoires introduites pour décrire un système d'attente sont mutuellement indépendantes.

Pour la classification des systèmes de files d'attente, on a recours à une notation symbolique (notation de Kendall) comprenant quatre symboles rangés dans l'ordre  $A/B/c/m$  où  $A$  et  $B$  décrivent respectivement les codes de la distribution des temps inter-arrivées et la distribution des temps de service,  $c$  est le nombre de

serveurs (montés en parallèle),  $m$  est la capacité du système. Le dernier symbole peut être supprimé si  $m = \infty$ .

Dans la description des processus d'arrivées ou des processus de service, les symboles suivants sont utilisés :

M : loi exponentielle ;

G : loi générale ;

$H_k$  : loi hyperexponentielle d'ordre  $k$  ;

$E_k$  : loi d'Erlang d'ordre  $k$  ;

D : loi déterministe.

### 1.2.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait le plus souvent par l'introduction d'un processus stochastique défini de façon appropriée. En fonction des quantités qui définissent la structure du système, on cherche à calculer les probabilités d'état définissant le régime transitoire du processus en question, puis le régime stationnaire. Les probabilités d'état définissant le régime transitoire dépendent de la distribution initiale du processus étudié. Ainsi, le calcul explicite du régime transitoire s'avère pénible, voir impossible, pour la plupart des modèles. La distribution stationnaire du processus introduit permet d'obtenir les mesures de performance du système, entre autres on retrouve

- Nombre moyen de clients dans le système  $\bar{n}$
- Nombre moyen de clients dans la file d'attente  $\bar{n}_f$
- Temps moyen d'attente d'un client dans la file d'attente  $\bar{w}$
- Temps moyen de séjour d'un client dans le système  $\bar{w}_s$

Ces valeurs ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais sont liées par les relations suivantes (*Formules de Little*) :

$$\bar{n} = \lambda_e \bar{w}_s; \quad \bar{n}_f = \lambda_e \bar{w}; \quad \bar{w}_s = \bar{w} + \frac{1}{\mu}; \quad \bar{w} = \frac{\bar{n}_f}{\lambda_e}; \quad \bar{n} = \bar{n}_f + \frac{\lambda_e}{\mu}.$$

où  $\lambda_e$  est le taux d'entrée des clients dans le système,  $\frac{1}{\mu}$  est la durée moyenne du service ( $\mu > 0$ ). Une autre mesure importante d'un système de files d'attente, celle qui mesure le degré de saturation du système, est l'intensité du trafic  $\rho$  :

$$\rho = \frac{\text{temps moyen du service}}{\text{temps moyen entre deux arrivées successives}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

### Modèles markoviens

Les modèles markoviens caractérisent les systèmes dans lesquels tous les événements tels que les arrivées, les fins de services, les changements d'état du système dépendent uniquement de l'état actuel du système et non de son comportement antérieur. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastique approprié. Ce processus est souvent le processus de naissance et de mort  $\{N(t); t \geq 0\}$  qui définit le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ . L'évolution temporelle du processus markovien  $\{N(t); t \geq 0\}$  est complètement définie grâce à la propriété d'absence de mémoire.

### Modèles semi markoviens

En l'absence de l'exponentialité c'est à dire lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques : le temps des inter-arrivées et la durée de service, ou en prenant en compte certaines spécificités des problèmes par l'introduction de paramètres supplémentaires, on aboutit à un modèle semi markovien. La combinaison de tous ces facteurs rend l'étude mathématique du modèle très délicate, voire impossible. On essaye alors de se ramener à un processus de Markov judicieusement choisi à l'aide de l'une des méthodes d'analyse suivantes :

– **Méthode des étapes d’Erlang** : Son principe est d’approximer toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox (mélange de lois exponentielles). Cette dernière possède la propriété d’absence de mémoire par étapes.

– **Méthode des variable supplémentaires** : Elle consiste à compléter l’information sur le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  en lui donnant un caractère Markovien, ce qui nous ramène à l’étude du processus  $\{N(t), \xi(t), t \geq 0\}$ , où  $\xi(t)$  sont dites alors variables supplémentaires.

– **Méthode de la chaîne de Markov induite** : Elle consiste à choisir une séquence d’instantants  $1, 2, 3, \dots, n$  (déterministes ou aléatoires) telle que la chaîne induite  $\{q_n, n \geq 0\}$ , où  $q_n$  est le nombre de clients dans le système à l’instant  $n \geq 0$ , soit markovienne et homogène.

– **Méthode des événements fictifs** : Le principe de cette méthode est d’introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

– **Simulation** : C’est un procédé d’imitation artificielle d’un processus réel donné sur ordinateur qui permet d’étudier les systèmes les plus complexes, de prévoir leurs comportements et de calculer leurs caractéristiques. Les résultats obtenus ne sont qu’approximatifs, mais peuvent être utilisés avec une bonne précision. Cette technique se base sur la génération de variables aléatoires.

D’autres méthodes d’analyse de systèmes semi markoviens existent, telle que l’approche utilisant les martingales et les méthodes d’approximations.

### 1.3 Systèmes de files d’attente avec rappels

Les systèmes de files d’attente avec rappels sont caractérisés par la propriété qu’un client qui trouve à son arrivée tous les serveurs occupés quitte l’espace de

service et rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Entre deux rappels successifs, le client est dit "en orbite". Ces systèmes de files d'attente sont largement utilisés dans la modélisation des systèmes informatiques et des réseaux de télécommunications [14], [15], [17], [18], [45], [46], [58].

Une description mathématique complète des modèles d'attente avec rappels peut être trouvée dans la monographie de Falin et Templeton (1997) [30]. Une classification bibliographique est donnée dans les articles de Artalejo (1999) [7] et (2010) [9].

### 1.3.1 Description du modèle d'attente avec rappels

Pour identifier un système de files d'attente avec rappels, on a besoin des spécifications suivantes : la nature stochastique du processus des arrivées, la distribution du temps de service, le nombre de serveurs qui composent l'espace de service, la capacité et la discipline d'attente ainsi que la spécification concernant le processus de répétition d'appels et la politique des rappels.

Le modèle général d'un système de files d'attente avec répétition d'appels, étudiés dans [16] et [19], peut être décrit comme suit : le système est composé de  $c \geq 1$  dispositifs de service et de  $m$  positions d'attente. Les clients arrivent dans le système selon un processus aléatoire avec une loi de probabilité donnée, et forment un flux d'appels primaires. A l'arrivée d'un client, s'il y a une position d'attente libre, le client rejoint la file d'attente. Dans le cas contraire, il quitte l'espace de service temporairement pour tenter sa chance après une durée de temps aléatoire, ou il quitte le système définitivement. Entre les tentatives, le client est en "orbite" et devient source d'appels répétés ou d'appels secondaires. La capacité  $O$  de l'orbite peut être finie ou infinie. Dans le cas où  $O$  est finie et si l'orbite est pleine, le client quitte le système pour toujours. Lorsqu'un client est rappelé de l'orbite, il est traité de la même manière qu'un client primaire.

On décrit l'entrée dans le système par une suite  $\{(\tau_n, M_n), n \geq 1\}$  [60], où  $\tau_n$  est l'intervalle de temps entre les arrivées des  $n^{\text{ème}}$  et  $(n+1)^{\text{ème}}$  clients primaires,  $M_n$  est une marque associée au  $n^{\text{ème}}$  client primaire. Cette marque comprend :  $\varsigma_n$  la durée de service,  $w_n$  le nombre maximal de rappels autorisés (on suppose  $w_n \rightarrow \infty$ ),  $\tau_n^r = \{\tau_{n1}^r, \tau_{n2}^r, \dots, \tau_{nw_n}^r\}$  une suite d'intervalles de temps entre deux rappels successifs. Les variables aléatoires  $\tau_n$ ,  $\varsigma_n$  et  $\tau_n^r$ , sont indépendantes et définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, F, P)$ . Dans ce qui suit, on suppose que les suites  $\{\tau_n\}$ ,  $\{\varsigma_n\}$  et  $\{\tau_n^r\}$  sont des suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

### 1.3.2 Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite

La définition du protocole de rappels est en effet un sujet de controverse, et concerne l'aspect de modélisation du système sous étude.

– **politique de rappels classiques** : Le protocole le plus décrit dans la théorie des files d'attente avec rappels est la politique de rappels classique dans laquelle chaque source dans l'orbite rappelle après un temps exponentiellement distribué avec un paramètre  $\nu$ . Donc, il y a une probabilité  $\nu dt + o(dt)$  d'un nouveau rappel dans le prochain intervalle  $(t, t + dt)$ , sachant que  $n$  clients sont en orbite à l'instant  $t$ . Une telle politique a été motivée naturellement par des applications dans la modélisation du comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques depuis les années 1940.

– **Politique de rappels constants** : Durant les dernières années, les technologies ont considérablement évoluées. La littérature des files d'attentes avec rappels décrit différents protocoles de rappels spécifiques à certains réseaux informatiques et de communications modernes. Dans les protocoles en question, le temps inter-rappels peut être contrôlé par un dispositif électronique et par conséquent, est indépendant du nombre d'unités demandant le service. Ici, la probabilité d'un

rappel durant  $(t, t + dt)$ , sachant que l'orbite n'est pas vide, est  $\beta dt + o(dt)$ . Ce type de discipline de rappels est appelé politique de rappels constants. Le premier travail dans cette direction, celui de Fayolle [22], considère une file d'attente  $M/M/1$ , où uniquement le client en tête de la file d'attente en orbite peut demander un service après un temps de rappels exponentiellement distribué avec un taux constant. Cette sorte de politique de contrôle de rappels est bien connue pour protocole ALOHA dans le système de communication.

–**Politique de rappels linéaires** : Certains autres travaux décrivent des applications aux réseaux locaux, aux protocoles de communication, ainsi que aux systèmes mobiles et autres (choi (1992) [22] et Artalejo et Gomez-Corral (1997) [13] traitent les deux cas d'une manière unifiée en définissant une politique de rappels linéaires pour laquelle la probabilité d'un rappel durant  $(t, t + dt)$ , sachant que  $n$  clients sont en orbite à l'instant  $t$ , est  $(\beta(1 - \rho) + n\nu) dt + o(dt)$ .

On mentionne aussi l'existence d'une autre politique dite politique de rappels quadratique (voir par exemple [58]).

# Chapitre 2

## Systeme de files d'attente $M/G/1$ avec rappels, à serveur non fiable et clients impatientes

### 2.1 Introduction

Il existe un grand nombre de variantes et de généralisations des principales files d'attente avec rappels. Parmi ces variantes, on a des files d'attente avec rappels et clients impatientes et interruptions de service. Pour les clients impatientes, on distingue deux cas d'abandon : recalage et rebattement. recalage décrit la probabilité de quitter le système ou de rejoindre l'orbite. Un client en attente peut éventuellement renoncer après une période aléatoire d'attente. En pratique, le serveur n'est pas disponible en permanence pour servir les clients et est sujet à des interruptions. Ces interruptions peuvent être dues à des pannes de serveur, à des vacances de serveur, à l'arrivée de clients prioritaires, à des interruptions induites par le client, à une défaillance catastrophique provoquée par un événement externe, etc. Krishnamoorthy et al. (2014) [49] donnent un aperçu sur les files d'attente avec des interruptions de service. Depuis les articles de Aissani (1988) [1] et Kulkarni et Choi (1990) [50], de nombreuses études sur les files d'attente avec rappels non fiables ont été effectuées. Les pannes peuvent être actives ou passives selon que les

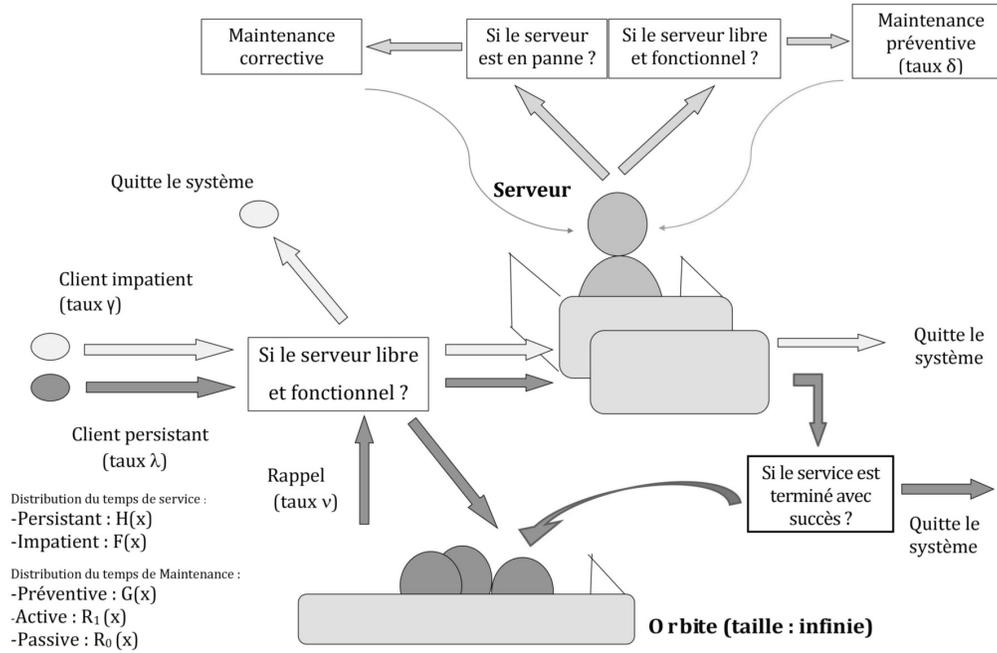
défaillances se produisent pendant une période de fonctionnement ou d'inactivité du serveur. Les échecs peuvent également avoir lieu avant le démarrage du service. Si les pannes sont préemptives, il existe plusieurs scénarios possibles, tels que la reprise du service pour restaurer un service interrompu Gaver (1962) [31]. Afin de maintenir et d'améliorer les performances d'exploitation du système et de réduire les pannes, une maintenance préventive doit être effectuée. Une telle politique est très utilisée dans plusieurs situations pratiques comme dans les systèmes de production ou pour la maintenance de sites web, sujets à des coupures physiques ou des attaques informatiques. Toute panne de la machine entraîne une interruption de la production et entraîne des coûts supplémentaires dus aux temps d'arrêt, à la perte de production, à la baisse de productivité et de qualité et à l'utilisation inefficace du personnel, des équipements et des installations. La maintenance du site comprend toute activité nécessaire pour assurer le bon fonctionnement du site et conformément au plan. De nombreuses publications traitent la planification et l'optimisation des opérations de maintenance préventive dans les systèmes de files d'attente classiques (Awi et So, (1990) [20]; Glazebrook, (1984) [32]; Gupta et al. (2001) [36]; Hsu (1992, 1999) [39], [40]; Hsu et Tapiero (1987) [41]; Koyanagi et Kawai, (2003) [47]; Osaki (1972) [55]; Perry et Posner (2000) [57]). Toutefois, la maintenance préventive dans une file d'attente avec rappels non fiable n'a pas été prise en compte. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à une nouvelle version de files d'attente non fiables avec des clients persistants et impatientes, prenant en compte les maintenances correctives et préventives.

## 2.2 Description du modèle

Considérons un système de files d'attente  $M/G/1$  avec rappels, non fiable et deux types d'appels primaires : persistants et impatientes. Ces appels arrivent selon des processus de Poisson indépendants avec des taux  $\lambda > 0$  et  $\gamma > 0$  respective-

ment. Si un appel principal arrivant (persistant ou impatient) trouve le serveur libre et fonctionnel, il occupe immédiatement le serveur et quitte le système après l'achèvement de son service. Si un appel persistant arrivant trouve le serveur bloqué, il devient une source d'appel secondaire et revient plus tard pour réessayer jusqu'à ce qu'il trouve le serveur libre et fonctionnel. Si un appel impatient arrive et trouve le service bloqué, il quitte le système pour toujours. Tout client accepté pour le service à l'arrivée ou lors d'un nouveau rappel quitte le système pour toujours après l'achèvement de son service. Nous supposons que chaque client en orbite revient, indépendamment des autres, après une durée exponentielle avec le paramètre  $\nu > 0$ . Les temps de service des clients persistants sont indépendants avec la fonction de répartition commune  $H(x)$ , sa transformée de Laplace-Stieltjes  $h(s)$  et les premiers moments donnés par  $h_1$  et  $h_2$ . Les temps de service des clients impatientes sont indépendants avec la fonction de répartition commune  $F(x)$ , sa transformée de Laplace-Stieltjes  $f(s)$  et les premiers moments donnés par  $f_1$  et  $f_2$ . Le serveur est sujet à des pannes actives et passives. Les échecs se produisent selon les processus de Poisson avec les taux  $\theta_1 > 0$  et  $\theta_0 > 0$ , lorsque le serveur est occupé et libre respectivement. Un client persistant dont le service est interrompu rejoint l'orbite alors qu'un impatient quitte le système. Deux types de maintenance sont effectués : préventive et corrective. La maintenance préventive est initiée de temps en temps pour améliorer les performances du système selon un processus de Poisson avec un taux  $\delta > 0$ . Sa durée est une variable aléatoire avec la fonction de répartition  $G(x)$ , sa transformée de Laplace-Stieltjes  $g(s)$  et les deux premiers moments  $g_1, g_2$ . Si une action préventive se produit lorsqu'un service est en cours, il est reporté à une date ultérieure. La maintenance corrective (également appelée réparation) est lancée lorsque le serveur tombe en panne. Sa durée est une variable aléatoire avec fonction de distribution de probabilité  $R_1(x)$ , sa transformée de Laplace-Stieltjes  $r_1(s)$  et les premiers moments donnés

par  $r_{11}$  et  $r_{12}$ , lorsque la panne survient pendant une période d'activité et avec la fonction de répartition  $R_0(x)$ , sa transformée de Laplace-Stieltjes  $r_0(s)$  et les deux premiers moments  $r_{01}$  et  $r_{02}$ , lorsque la panne survient pendant une période d'inactivité. Toutes les variables considérées sont supposées mutuellement indépendantes et tous les moments sont supposés finis. L'état du système est décrit



**FIGURE 2.1** – Modèle de files d'attente avec rappels, à serveur non fiable et clients impatient.

par le processus

$$\zeta(t) = (\alpha(t), \beta(t), R(t); \xi(t)), \quad t \geq 0,$$

où  $R(t)$  est le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ , et

- $\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est fonctionnel à l'instant } t, \\ 1, & \text{si le serveur est sous maintenance préventive à l'instant } t, \\ 2, & \text{si le serveur est sous maintenance corrective à l'instant } t, \end{cases}$
- $\beta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre à l'instant } t, \\ 1, & \text{si le serveur est occupé par un client persistant à l'instant } t, \\ 2, & \text{si le serveur est occupé par un client impatient à l'instant } t, \end{cases}$
- $\xi(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha(t) = 0 \text{ et } \beta(t) = 0, \\ \text{temps de service résiduel,} & \text{si } \alpha(t) = 0 \text{ et } \beta(t) \neq 0, \\ \text{temps de maintenance résiduel,} & \text{si } \alpha(t) \neq 0. \end{cases}$

Même si le processus  $\{R(t), t \geq 0\}$  est non-markovien, on observe que le processus  $\{\zeta(t), t \geq 0\}$  est un processus markovien avec des réalisations linéaires par morceaux au sens de Gnedenko & Kovalenko (1989) [33] et décrivant l'évolution de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite. Dans la section suivante, nous établissons la condition d'ergodicité dans laquelle le système sera stable.

## 2.3 Condition de stabilité

La zone de stabilité de la file d'attente est l'ensemble des valeurs des paramètres de la file d'attente (lois des arrivées, des demandes des services, etc) tel que le système puisse atteindre le régime stationnaire (et dans ce cas, l'atteindra forcément un jour). En particulier, la loi du processus  $(\zeta(t))_{t \geq 0}$  devient stationnaire, et un client qui entre dans le système trouve toujours le système à l'état stationnaire, sans perturber cet état. La version stationnaire de  $(\zeta(t))_{t \geq 0}$  est alors la loi de probabilité sur  $N$  telle que pour tout  $t$  à partir de l'atteinte de l'état sta-

tionnaire,  $(\zeta(t))_{t \geq 0}$  soit distribué suivant cette loi. Dans cette section, nous nous intéressons à la condition d'ergodicité du processus  $(\zeta(t))_{t \geq 0}$  qui implique l'existence de sa distribution stationnaire. D'après la théorie générale (voir par exemple Gnedenko et Kovalenko (1989) [33]), les probabilités stationnaires existent et sont positives si l'on peut trouver une chaîne de Markov induite qui est elle-même ergodique. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que le processus  $(\zeta(t))_{t \geq 0}$  soit ergodique.

**Théorème 2.1** *La condition*

$$\rho = \{1 - h(\theta_1)\} \left(1 + \frac{\lambda}{\theta_1} + \lambda r_{11}\right) < 1, \quad (2.1)$$

*est nécessaire et suffisante pour que le processus  $\{\zeta(t), t \geq 0\}$  soit ergodique. En conséquence, la distribution stationnaire du processus  $\{\zeta(t), t \geq 0\}$  existe et, elle est unique.*

**Preuve** Soit  $t_n$  l'instant durant lequel le serveur devient inactif pour la  $n^{\text{ème}}$  fois et  $R_n = R(t_n + 0)$  le nombre de clients persistants dans l'orbite juste après cet instant. Il est bien connu que les cycles entre ces temps forment un processus régénératif. Les cycles successifs  $]t_{n-1}, t_n], n \geq 1$ , sont de huit types différents, décrits ci-dessous :

- Type 1 : Le serveur tombe en panne avant une maintenance préventive ou une arrivée externe ou un rappel,
- Type 2 : Une maintenance préventive a lieu avant une panne ou une arrivée externe ou un rappel,
- Type 3 : Une arrivée persistante a lieu avant une panne passive ou une maintenance préventive ou une arrivée impatiente ou un rappel, le temps de service est interrompu par une panne active,

- Type 4 : Une arrivée persistante a lieu avant une panne passive ou une maintenance préventive ou une arrivée externe impatiente ou un rappel, le temps de service est terminé avec succès,
- Type 5 : Une arrivée impatiente a lieu avant une panne passive ou un maintenance préventive ou d'une arrivée persistante ou un rappel, le temps de service est interrompu par une panne active,
- Type 6 : Une arrivée impatiente a lieu avant une panne passive ou une maintenance préventive ou une arrivée externe persistante ou un rappel, le temps de service est terminé avec succès,
- Type 7 : Un rappel a lieu avant une panne passive ou une maintenance préventive ou une arrivée externe, le temps de service est interrompu par une panne active,
- Type 8 : Un rappel a lieu avant une panne passive ou une maintenance préventive ou une arrivée externe, le temps de service est terminé avec succès.

Soit  $I_n = k$  si le  $n^{\text{ème}}$  cycle est de type  $k$ . la chaîne de Markov induite  $(R_n)_{(n \geq 1)}$  satisfait l'équation récursive suivante :

$$R_{n+1} = \begin{cases} R_n + A_I^{(n+1)}, & \text{if } I_{n+1} = 1, \\ R_n + A_{PM}^{(n+1)}, & \text{if } I_{n+1} = 2, \\ R_n + A_B^{(n+1)} + A_1^{(n+1)} + 1, & \text{if } I_{n+1} = 3, \\ R_n + A_1^{(n+1)}, & \text{if } I_{n+1} = 4, \\ R_n + A_B^{(n+1)} + A_2^{(n+1)}, & \text{if } I_{n+1} = 5, \\ R_n + A_2^{(n+1)}, & \text{if } I_{n+1} = 6, \\ R_n + A_B^{(n+1)} + A_1^{(n+1)}, & \text{if } I_{n+1} = 7, \\ R_n + A_1^{(n+1)} - 1, & \text{if } I_{n+1} = 8. \end{cases} \quad (2.2)$$

Où  $(A_I^{(n)})_{n \geq 1}$ ,  $(A_{PM}^{(n)})_{n \geq 1}$ ,  $(A_B^{(n)})_{n \geq 1}$ ,  $(A_1^{(n)})_{n \geq 1}$  et  $(A_2^{(n)})_{n \geq 1}$  sont des séquences indépendantes de variables aléatoires i.i.d avec des variables génériques  $A_I$ ,  $A_{PM}$ ,  $A_B$ ,  $A_1$  et  $A_2$  respectivement :

- $A_I^{(n)}$  est le nombre de clients persistants arrivant dans le système durant la panne passive dans le  $n^{\text{ème}}$  cycle de type 1 avec distribution

$$k_j^{(I)} = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} dR_0(x), \quad j \geq 0,$$

de fonction génératrice  $E(z^{A_I}) = r_0(\lambda - \lambda z)$  et premier moment  $\lambda r_{01}$ ,

- $A_{PM}^{(n)}$  est le nombre de clients persistants arrivant dans le système durant la maintenance préventive dans le  $n^{\text{ème}}$  cycle de type 2 avec distribution

$$k_j^{(PM)} = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} dG(x), \quad j \geq 0,$$

de fonction génératrice  $E(z^{A_{PM}}) = g(\lambda - \lambda z)$  et premier moment  $\lambda g_1$ ,

- $A_B^{(n)}$  est le nombre de clients persistants arrivant dans le système durant la panne active dans le  $n^{\text{ème}}$  cycle de types 3, 5 et 7 avec distribution

$$k_j^{(B)} = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} dR_1(x), \quad j \geq 0,$$

de fonction génératrice  $E(z^{A_B}) = r_1(\lambda - \lambda z)$  et premier moment  $\lambda r_{11}$ ,

- $A_1^{(n)}$  est le nombre de clients persistants arrivant dans le système durant le temps de service d'un client persistant jusqu'à ce qu'il soit interrompu par une panne active dans le  $n^{\text{ème}}$  cycle de types 4 et 8 avec distribution

$$k_j^3 = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} \cdot \frac{e^{-\theta_1 x}}{h(\theta_1)} dH(x), \quad j \geq 0,$$

de fonction génératrice

$$E(z_1^A / S_1 < t_f) = \frac{h(\theta_1 + \lambda - \lambda z)}{h(\theta_1)},$$

et de premier moment  $\frac{-\lambda h'(\theta_1)}{h(\theta_1)}$  si le temps de service est achevé avec succès et avec la distribution

$$k_j^4 = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} \cdot \theta_1 \frac{e^{\theta_1 x} (1 - H(x))}{1 - h(\theta_1)} dF(x), \quad j \geq 0,$$

de fonction génératrice

$$E(z_1^A / t_f < S_1) = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \lambda - \lambda z} \frac{1 - h(\theta_1 + \lambda - \lambda z)}{1 - h(\theta_1)}$$

et de premier moment  $\frac{\lambda \theta_1 h'(\theta_1) + \lambda(1 - h(\theta_1))}{\theta_1(1 - h(\theta_1))}$  si le temps de service est interrompu par un échec ( $S_1$  et  $t_f$  étant le temps de service d'un client persistant et la durée de vie du serveur quand il est occupé, respectivement),

- $A_2^{(n)}$  est le nombre de clients persistants arrivant dans le système durant le temps de service d'un client persistant jusqu'à ce qu'il soit interrompu par une panne active dans le  $n^{\text{ème}}$  cycle de types 6 avec distribution

$$k_j^5 = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} \cdot \frac{e^{-\theta_1 x}}{f(\theta_1)} dF(x), \quad j \geq 0,$$

de fonction génératrice

$$E(z_2^A / S_2 < t_f) = \frac{f(\theta_1 + \lambda - \lambda z)}{f(\theta_1)},$$

et de premier moment  $\frac{-\lambda f'(\theta_1)}{f(\theta_1)}$  si le temps de service est achevé avec succès et avec la distribution

$$k_j^6 = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} \cdot \theta_1 \frac{e^{-\theta_1 x} (1 - F(x))}{1 - f(\theta_1)} dH(x), \quad j \geq 0,$$

de fonction génératrice

$$E(z_2^A / t_f < S_2) = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \lambda - \lambda z} \frac{1 - f(\theta_1 + \lambda - \lambda z)}{1 - f(\theta_1)},$$

et de premier moment  $\frac{\lambda \theta_1 f'(\theta_1) + \lambda(1 - f(\theta_1))}{\theta_1(1 - f(\theta_1))}$  si le temps de service est interrompu par une panne ( $S_2$  étant le temps de service d'un client impatient).

La variable aléatoire  $I_{n+1}$  ne dépend que de  $R_n$  où

$$P(I_{n+1} = k/R_n = i) = \begin{cases} \frac{\theta_0}{\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta + i\nu}, & \text{if } k = 1, \\ \frac{\delta}{\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta + i\nu}, & \text{if } k = 2, \\ \frac{\lambda(1-h(\theta_1))}{\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta + i\nu}, & \text{if } k = 3, \\ \frac{\lambda h(\theta_1)}{\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta + i\nu}, & \text{if } k = 4, \\ \frac{\gamma(1-f(\theta_1))}{\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta + i\nu}, & \text{if } k = 5, \\ \frac{\gamma f(\theta_1)}{\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta + i\nu}, & \text{if } k = 6, \\ \frac{i\nu(1-h(\theta_1))}{\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta + i\nu}, & \text{if } k = 7, \\ \frac{i\nu h(\theta_1)}{\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta + i\nu}, & \text{if } k = 8. \end{cases}$$

Maintenant, on va montrer que l'inégalité (2.1) est une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne de Markov induite  $\{R_n, n \geq 1\}$  soit ergodique. Du système (2.2),  $\{R_n, n \geq 1\}$  est une chaîne irréductible et apériodique. Pour prouver l'ergodicité, nous utilisons la condition suffisante de Foster qui énonce ce qui suit : une chaîne de Markov irréductible et apériodique  $\{R_n, n \geq 1\}$  est ergodique s'il existe une fonction non négative  $f(j)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , et un nombre réel  $\varepsilon > 0$  tels que l'accroissement moyen de la chaîne de Markov  $\chi_j = E(f(R_{n+1}) - f(R_n)/R_n = j)$  est fini pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et  $\chi_j \leq -\varepsilon$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$  à l'exception peut être d'un ensemble fini. Considérons la fonction  $f(j) = j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Alors l'accroissement moyen est donnée par

$$\chi_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta} \left\{ \theta_0 r_{01} + \delta g_1 + (1-h(\theta_1)) \left( \lambda r_{11} + \frac{\lambda \theta_1 h'(\theta_1) + \lambda(1-h(\theta_1))}{\theta_1(1-h(\theta_1))} + 1 \right) - \lambda h'(\theta_1) + \gamma(1-f(\theta_1)) \left( r_{11} + \frac{\theta_1 f'(\theta_1) + (1-f(\theta_1))}{\theta_1(1-f(\theta_1))} \right) - \gamma f'(\theta_1) \right\},$$

$$\begin{aligned} \chi_j = \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta + j\nu} & \left\{ \theta_0 r_{01} + \delta g_{1+(1-h(\theta_1))} \left( \lambda r_{11} + \frac{\lambda \theta_1 h'(\theta_1) + \lambda(1-h(\theta_1))}{\theta_1(1-h(\theta_1))} \right) \right. \\ & + 1 \Big) - \lambda h'(\theta_1) + \gamma(1-f(\theta_1)) \left( r_{11} + \frac{\theta_1 f'(\theta_1) + (1-f(\theta_1))}{\theta_1(1-f(\theta_1))} \right) - \gamma f'(\theta_1) + \\ & \left. + j\nu(1-h(\theta_1)) \left( r_{11} + \frac{\theta_1 h'(\theta_1) + (1-h(\theta_1))}{\theta_1(1-h(\theta_1))} \right) - \frac{j\nu}{\lambda} (\lambda h'(\theta_1 + 1)) \right\}, j > 0. \end{aligned}$$

Soit  $x = \lim_{j \rightarrow \infty} \chi_j$ , alors  $x = \{1 - h(\theta_1)\}(1 + \frac{\lambda}{\theta_1} + \lambda r_{11}) - 1$ . Ainsi,  $\rho = \{1 - h(\theta_1)\}(1 + \frac{\lambda}{\theta_1} + \lambda r_{11}) < 1$  est la condition suffisante pour l'ergodicité de notre chaîne. Pour montrer qu'elle est aussi une condition nécessaire, nous appliquons la condition de Kaplan : Une chaîne de Markov n'est pas ergodique si  $\chi_j < +\infty$  pour tout  $j \geq 0$  et il existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\chi_j \geq 0$  pour  $j \geq j_0$ . Dans notre cas, cette condition est vérifiée car  $r_{ij} = 0$  pour  $i > j - 1$  et  $j > 0$ . Par conséquent, si  $\rho > 1$ , la chaîne de Markov induite  $\{R_n, n \geq 1\}$  n'est pas ergodique. Enfin,  $\{R_n, n \geq 1\}$  est ergodique si et seulement si  $\rho < 1$ . Nous pouvons montrer à partir du théorème de Burke dans Cooper (1981) [23] que la distribution stationnaire du processus  $\{\zeta(t), t \geq 0\}$  existent et sont positives si et seulement si la même inégalité  $\rho < 1$  est vérifiée.

## 2.4 Distribution stationnaire de l'état du système

Dans cette section, nous déduisons la distribution conjointe de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite en régime permanent. Les temps de service résiduels et les temps de maintenance résiduels sont considérés comme des variables supplémentaires. Sous l'hypothèse  $\rho < 1$ , on définit les probabilités stationnaires

par

$$P_{00}(m) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\alpha(t) = 0, \beta(t) = 0, R(t) = m\}, m \geq 0, \quad (2.3)$$

$$P_{ij}(m, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\alpha(t) = i, \beta(t) = j, R(t) = m; \xi(t) < x\}, \quad (2.4)$$

$$i, j = 0, 1, 2, (i, j) \neq (0, 0), m \geq 0, x \geq 0.$$

En observant l'évolution du processus  $\{\zeta(t), t \geq 0\}$  pendant un intervalle infinitésimal  $(0, \Delta t)$  et en faisant tendre  $\Delta t$  vers 0 on obtient que les probabilités (2.3)-(2.4) sont solutions du système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$(\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta + \nu m)P_{00}(m) = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{dP_{i0}(m, 0)}{dx} + \frac{dP_{0i}(m, 0)}{dx} \right), m \geq 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \lambda P_{10}(m, x) &= \frac{dP_{10}(m, x)}{dx} - \frac{dP_{10}(m, 0)}{dx} + \delta P_{00}(m)G(x) \\ &+ \lambda(1 - \delta_{0m})P_{10}(m - 1, x), m \geq 0, x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \lambda P_{20}(m, x) &= \frac{dP_{20}(m, x)}{dx} - \frac{dP_{20}(m, 0)}{dx} + \lambda(1 - \delta_{0m})P_{20}(m - 1, x) \\ &+ \theta_1 [(1 - \delta_{0m})P_{01}(m - 1, \infty) + P_{02}(m, \infty)]R_1(x) \\ &+ \theta_0 P_{00}(m)R_0(x), m \geq 0, x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \theta_1)P_{01}(m, x) &= \frac{dP_{01}(m, x)}{dx} - \frac{dP_{01}(m, 0)}{dx} + \lambda(1 - \delta_{0m})P_{01}(m - 1, x) \\ &+ \lambda P_{00}(m)H(x) + \nu(m + 1)P_{00}(m + 1)H(x), m \geq 0, x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \theta_1)P_{02}(m, x) &= \frac{dP_{02}(m, x)}{dx} - \frac{dP_{02}(m, 0)}{dx} + \lambda(1 - \delta_{0m})P_{02}(m - 1, x) \\ &+ \gamma P_{00}(m)F(x), m \geq 0, x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $\delta_{ij}$  est la fonction Delta de Kronecker définie comme suit

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1, & \text{si } i=j, \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

On introduit les fonctions génératrices partielles selon la composante discrète  $m$ , telles que

$$F_{00}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_{00}(m),$$

et

$$F_{ij}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_{ij}(m), \quad i = 0, 1, 2; \quad j = 0, 1, 2; \quad (i, j) \neq (0, 0).$$

Soit  $f_{ij}(z, s)$  la transformée de Laplace selon la composante continue  $x$  des fonctions génératrices partielles  $F_{ij}(z, x)$  défini par

$$f_{ij}(z, s) = \int_0^{\infty} F_{ij}(z, x) e^{-sx} dx, \quad i = 0, 1, 2; \quad j = 0, 1, 2; \quad (i, j) \neq (0, 0).$$

Le théorème suivant décrit la distribution de probabilité en régime permanent du processus stochastique  $\{\zeta(t), t \geq 0\}$  en termes de transformées de Laplace.

**Théorème 2.2** *Si  $\rho < 1$ , et le système est en régime stationnaire alors les transformées de Laplace de la distribution conjointe de l'état du serveur et de la taille de l'orbite sont données par*

$$f_{10}(z, s) = \frac{g(\lambda - \lambda z) - g(s)}{s(s - \lambda + \lambda z)} F_{00}(z), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} f_{20}(z, s) = & \theta_0 \frac{r_0(\lambda - \lambda z) - r_0(s)}{s(s - \lambda + \lambda z)} F_{00}(z) \\ & + \theta_1 \left\{ z \frac{q(\lambda - \lambda z)}{v(\lambda - \lambda z) - z} \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right. \\ & \left. + \gamma \frac{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right\} \frac{r_1(\lambda - \lambda z) - r_1(s)}{s(s - \lambda + \lambda z)} F_{00}(z), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$f_{01}(z, s) = \frac{q(\lambda - \lambda z)}{v(\lambda - \lambda z) - z} \frac{h(\lambda - \lambda z + \theta_1) - h(s)}{s(s - \lambda + \lambda z - \theta_1)} F_{00}(z), \quad (2.12)$$

$$f_{02}(z, s) = \gamma \frac{f(\lambda - \lambda z + \theta_1) - f(s)}{s(s - \lambda + \lambda z - \theta_1)} F_{00}(z), \quad (2.13)$$

où

$$\begin{aligned} q(z) &= z + \gamma - \gamma w(z) + \theta_0 - \theta_0 r_0(z) + \delta - \delta g(z), \\ v(z) &= h(z + \theta_1) + \theta_1 z \frac{1 - h(z + \theta_1)}{z + \theta_1} r_1(z), \\ w(z) &= f(z + \theta_1) + \theta_1 \frac{1 - f(z + \theta_1)}{z + \theta_1} r_1(z). \end{aligned}$$

La fonction  $F_{00}(z)$  est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} F_{00}(z) &= k_0 \exp\left(\frac{\lambda}{\nu} \int_1^z \frac{1 - v(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\gamma}{\nu} \int_1^z \frac{1 - w(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy\right) \\ &\quad + \frac{\theta_0}{\nu} \int_1^z \frac{1 - r_0(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\delta}{\nu} \int_1^z \frac{1 - g(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy, \end{aligned}$$

où la constante  $k_0$  est donnée par

$$k_0 = \frac{1 - \rho}{F_{00}(1) \times [(1 - \rho)(\delta g_1 + \theta_0 r_{01}) + \{1 - f(\theta_1)\} \Psi]},$$

où

$$\Psi = \frac{\gamma}{\theta_1} + r_{11} + \frac{1}{2}(\lambda \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \lambda \delta g_1)(\lambda r_{12} + \frac{r_{11}}{\lambda^2}),$$

$$\text{et } w_1 = \{1 - f(\theta_1)\}(\frac{1}{\theta_1} + r_{11}).$$

**Preuve** Avec les fonctions génératrices  $F_{00}(z)$  et  $F_{ij}(z, x)$ , le système d'équations de balance (2.5) – (2.9) devient

$$(\lambda + \gamma + \theta_0 + \delta)F_{00}(z) + \nu z \frac{dF_{00}(z)}{dz} = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial F_{i0}(z, 0)}{\partial x} + \frac{\partial F_{0i}(z, 0)}{\partial x} \right), \quad (2.14)$$

$$(\lambda - \lambda z)F_{10}(z, x) = \frac{\partial F_{10}(z, x)}{\partial x} - \frac{\partial F_{10}(z, 0)}{\partial x} + \delta F_{00}(z)G(x), \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda z)F_{20}(z, x) &= \frac{\partial F_{20}(z, x)}{\partial x} - \frac{\partial F_{20}(z, 0)}{\partial x} \theta_0 F_{00}(z)R_0(x) \\ &\quad + \theta_1 \left[ zF_{01}(z, \infty) + F_{02}(z, \infty) \right] R_1(x), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda z + \theta_1)F_{01}(z, x) &= \frac{\partial F_{01}(z, x)}{\partial x} - \frac{\partial F_{01}(z, 0)}{\partial x} \\ &\quad + \left( \lambda F_{00}(z) + \nu \frac{dF_{00}(z)}{dz} \right) H(x), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$(\lambda - \lambda z + \theta_1)F_{02}(z, x) = \frac{\partial F_{02}(z, x)}{\partial x} - \frac{\partial F_{02}(z, 0)}{\partial x} + \gamma F_{00}(z)F(x). \quad (2.18)$$

En utilisant la transformée de Laplace  $f_{ij}(z, s)$ , on obtient des équations précédentes

$$s(s - \lambda + \lambda z)f_{10}(z, s) = \frac{\partial F_{10}(z, 0)}{\partial x} - \delta F_{00}(z)g(s), \quad (2.19)$$

$$s(s - \lambda + \lambda z)f_{20}(z, s) = \frac{\partial F_{20}(z, 0)}{\partial x} - \theta_0 F_{00}(z)r_0(s) - \theta_1[zF_{01}(z, \infty) + F_{02}(z, \infty)]r_1(s), \quad (2.20)$$

$$s(s - \lambda + \lambda z - \theta_1)f_{01}(z, s) = \frac{\partial F_{01}(z, 0)}{\partial x} - \left( \lambda F_{00}(z) + \nu \frac{dF_{00}(z)}{dz} \right) h(s), \quad (2.21)$$

$$s(s - \lambda + \lambda z - \theta_1)f_{02}(z, s) = \frac{\partial F_{02}(z, 0)}{\partial x} - \gamma F_{00}(z)f(s). \quad (2.22)$$

Les fonctions inconnues  $\frac{\partial F_{ij}(z, 0)}{\partial x}$  peuvent être déterminées en utilisant le fait que les fonctions  $f_{ij}(z, s)$  sont des fonctions analytiques dans le disque  $|z| \leq 1$ . Considérons par exemple la première équation du système précédent,  $f_{10}(z, s)$  est une fonction analytique dans le disque  $|z| \leq 1$ , et puisque le côté gauche de (2.19) est égal à zéro pour  $s = \lambda - \lambda z$ , alors le côté droit doit être nul aussi en ce point. Alors, nous avons la première condition

$$\frac{\partial F_{10}(z, 0)}{\partial x} = \delta F_{00}(z)g(\lambda - \lambda z). \quad (2.23)$$

En remplaçant  $s$  par  $\lambda - \lambda z$  dans les équations (2.20)-(2.21) et  $s$  par  $\lambda - \lambda z + \theta_1$  dans (2.22), on obtient toutes les fonctions  $\frac{\partial F_{ij}(z, 0)}{\partial x}$ ,  $0 \leq i, j \leq 2$ ,  $(i, j) \neq (0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{20}(z, 0)}{\partial x} &= \theta_0 F_{00}(z)r_0(\lambda - \lambda z) + \theta_1[zF_{01}(z, \infty) \\ &\quad + F_{02}(z, \infty)]r_1(\lambda - \lambda z), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial F_{01}(z, 0)}{\partial x} = \left( \lambda F_{00}(z) + \nu \frac{dF_{00}(z)}{dz} \right) h(\lambda - \lambda z + \theta_1), \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial F_{02}(z, 0)}{\partial x} = \gamma F_{00}(z)f(\lambda - \lambda z + \theta_1). \quad (2.26)$$

En substituant maintenant (2.23)-(2.26) dans (2.19)-(2.22), on obtient les fonctions  $f_{ij}(z, s)$  sous la forme suivante :

$$f_{10}(z, s) = \delta \frac{g(\lambda - \lambda z) - g(s)}{s(s - \lambda + \lambda z)} F_{00}(z), \quad (2.27)$$

$$f_{20}(z, s) = \theta_0 \frac{r_0(\lambda - \lambda z) - r_0(s)}{s(s - \lambda + \lambda z)} F_{00}(z) + \theta_1 [zF_{01}(z, \infty) + F_{02}(z, \infty)] \times \frac{r_1(\lambda - \lambda z) - r_1(s)}{s(s - \lambda + \lambda z)}, \quad (2.28)$$

$$f_{01}(z, s) = \left( \lambda F_{00}(z) + \nu \frac{dF_{00}(z)}{dz} \right) \frac{h(\lambda - \lambda z + \theta_1) - h(s)}{s(s - \lambda + \lambda z - \theta_1)}, \quad (2.29)$$

$$f_{02}(z, s) = \gamma \frac{f(\lambda - \lambda z + \theta_1) - f(s)}{s(s - \lambda + \lambda z - \theta_1)} F_{00}(z). \quad (2.30)$$

Les expressions  $F_{ij}(z, \infty)$  peuvent être déduites du théorème Tauberain,

$$F_{ij}(z, \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{ij}(z, x) = \lim_{s \rightarrow 0} s f_{ij}(z, s).$$

Donc, on obtient de (2.27),

$$F_{10}(z, \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{10}(z, x) = \lim_{s \rightarrow 0} s f_{10}(z, s) = \delta \frac{1 - g(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} F_{00}(z). \quad (2.31)$$

De même, nous obtenons de (2.28)-(2.30)

$$F_{20}(z, \infty) = \theta_0 \frac{1 - r_0(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} F_{00}(z) + \theta_1 [zF_{01}(z, \infty) + F_{02}(z, \infty)] \frac{1 - r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z}, \quad (2.32)$$

$$F_{01}(z, \infty) = \left( \lambda F_{00}(z) + \nu \frac{dF_{00}(z)}{dz} \right) \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1}, \quad (2.33)$$

$$F_{02}(z, \infty) = \gamma \frac{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} F_{00}(z). \quad (2.34)$$

En tenant compte de (2.33) et (2.34), l'équation (2.32) devient

$$F_{20}(z, \infty) = \theta_0 \frac{1 - r_0(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} F_{00}(z) + \theta_1 z \left( \lambda F_{00}(z) + \nu \frac{dF_{00}(z)}{dz} \right) \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \times \frac{1 - r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} + \gamma \theta_1 \frac{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \times \frac{1 - r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} F_{00}(z). \quad (2.35)$$

De même, on peut réécrire l'équation (2.24) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{20}(z, 0)}{\partial x} &= \theta_0 F_{00}(z) r_0(\lambda - \lambda z) + \theta_1 z \left( \lambda F_{00}(z) \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{dF_{00}(z)}{dz} \right) \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} r_1(\lambda - \lambda z) \\ &\quad + \theta_1 \gamma \frac{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} r_1(\lambda - \lambda z) F_{00}(z). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Maintenant, en remplaçant (2.23), (2.25), (2.26) dans l'équation (2.14) et en tenant compte (2.36), on obtient

$$\begin{aligned} \left\{ \lambda - \lambda v(\lambda - \lambda z) + \gamma - \gamma w(\lambda - \lambda z) + \theta_0 - \theta_0 r_0(\lambda - \lambda z) + \delta - \delta g(\lambda - \lambda z) \right\} F_{00}(z) &= \\ = \nu \left\{ v(\lambda - \lambda z) - z \right\} \frac{dF_{00}(z)}{dz} \end{aligned} \quad (2.37)$$

où

$$v(\lambda - \lambda z) = h(\lambda - \lambda z + \theta_1) + \theta_1 z \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} r_1(\lambda - \lambda z), \quad (2.38)$$

et

$$w(\lambda - \lambda z) = f(\lambda - \lambda z + \theta_1) + \theta_1 \frac{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} r_1(\lambda - \lambda z). \quad (2.39)$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire homogène est de la forme

$$\begin{aligned} F_{00}(z) &= k_0 \exp\left(\frac{\lambda}{\nu} \int_0^z \frac{1 - v(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy\right) \times \exp\left(\frac{\gamma}{\nu} \int_0^z \frac{1 - w(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy\right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{\theta_0}{\nu} \int_0^z \frac{1 - r_0(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy\right) \times \exp\left(\frac{\delta}{\nu} \int_0^z \frac{1 - g(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy\right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

La constante  $k_0$  peut être déterminée en utilisant la condition de normalisation. Notons que la condition d'ergodicité  $\rho < 1$  apparaît ici puisque la constante  $k_0$  doit être strictement positive. Ceci achève la démonstration du théorème 2.2.

**Remarque 2.1** Selon le théorème d'unicité de la transformée de Fourier, les équations du théorème 2.2 définissent entièrement la distribution de l'état du serveur et de la taille de l'orbite (2.3)-(2.4).

**Corollaire 2.3** Si  $\rho < 1$ , les fonctions génératrices de la distribution conjointe de l'état du serveur et de la taille de l'orbite en régime stationnaire sont données par  $F_{ij}(z, \infty)$ ,

$$F_{10}(z, \infty) = \delta \frac{1 - g(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} F_{00}(z), \quad (2.41)$$

$$F_{20}(z, \infty) = \theta_0 \frac{1 - r_0(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} F_{00}(z) + \theta_1 \left\{ z \frac{q(\lambda - \lambda z)}{v(\lambda - \lambda z) - z} \cdot \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right. \\ \left. + \gamma \frac{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right\} \frac{1 - r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} F_{00}(z), \quad (2.42)$$

$$F_{01}(z, \infty) = \frac{q(\lambda - \lambda z)}{v(\lambda - \lambda z) - z} \cdot \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} F_{00}(z), \quad (2.43)$$

$$F_{02}(z, \infty) = \gamma \frac{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} F_{00}(z). \quad (2.44)$$

**Corollaire 2.4** La fonction génératrice de la distribution marginale de la taille de l'orbite  $R(t)$  est donnée par

$$F(z) = \frac{q(\lambda - \lambda z)}{\lambda[v(\lambda - \lambda z) - z]} \left\{ 1 - \theta_1 \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right\} k_0 \exp \left( \frac{\lambda}{\nu} \int_0^z \frac{1 - v(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{\nu} \int_0^z \frac{1 - w(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\theta_0}{\nu} \int_0^z \frac{1 - r_0(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\delta}{\nu} \int_0^z \frac{1 - g(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy \right). \quad (2.45)$$

**Preuve** Nous utilisons le fait que

$$P_m = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{R(t) = m\} \\ = P_{00}(m) + P_{10}(m, \infty) + P_{20}(m, \infty) + P_{01}(m, \infty) + P_{02}(m, \infty). \quad (2.46)$$

Donc la fonction génératrice est donnée par

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m = F_{00}(z) + F_{10}(z) + F_{20}(z) + F_{01}(z) + F_{02}(z). \quad (2.47)$$

Après quelques calculs algébriques, nous obtenons la formule (2.45).

**Corollaire 2.5** *la fonction génératrice de la distribution de l'état stationnaire du nombre de clients dans le système est*

$$Q(z) = \left\{ \frac{q(\lambda - \lambda z)}{\lambda[v(\lambda - \lambda z) - z]} h(\lambda - \lambda z + \theta_1) + \gamma \frac{(z-1)\{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)\}}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right\} F_{00}(z). \quad (2.48)$$

**Preuve** Il suffit de noter que

$$\begin{aligned} Q_m &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{M(t) = m\} \\ &= P_{00}(m) + P_{10}(m, \infty) + P_{20}(m, \infty) + P_{01}(m-1, \infty) + P_{02}(m-1, \infty). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Donc la fonction génératrice est donnée par

$$Q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m Q_m = F_{00}(z) + F_{10}(z) + F_{20}(z) + zF_{01}(z) + zF_{02}(z). \quad (2.50)$$

Encore après quelques calculs algébriques, nous obtenons la formule (2.48).

## 2.5 Cas particuliers

### • Cas 1 : absence de la maintenance préventive et clients impatientes

Dans ce cas, le serveur est sujet à des pannes actives et passives, le serveur n'effectue pas la maintenance préventive et pas de clients impatientes, c'est à dire,  $\gamma = \delta = 0$ . Alors la condition de stabilité du système est

$$\rho = \{1 - h(\theta_1)\} \left(1 + \frac{\lambda}{\theta_1} + \lambda r_{11}\right) < 1.$$

Si  $\rho < 1$ , la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système est

$$Q(z) = \frac{\lambda(1-z) + \theta_0(1-r_0(\lambda-\lambda z))}{\lambda[v(\lambda-\lambda z) - z]} h(\lambda - \lambda z + \theta_1) \times C(z),$$

où

$$C(z) = k_0 \exp \left( \frac{1}{\nu} \int_0^z \frac{\lambda(1 - v(\lambda - \lambda y)) + \theta_0(1 - r_0(\lambda - \lambda y))}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy \right).$$

Les résultats trouvés dans ce cas particulier sont similaires aux résultats du modèle étudié par Kulkarni et Choi (1990) [50], Aissani et Artalejo (1998) [4].

• **Cas 2 : absence de la maintenance préventive, de pannes et de clients impatientes**

Dans ce cas, le serveur ne tombe jamais en panne, le serveur n'effectue pas la maintenance préventive et pas de clients impatientes, c'est à dire,  $\gamma = \delta = \theta_0 = \theta_1 = 0$ . Alors dans ce cas, la condition de stabilité du système est donnée par

$$\rho = \lambda h_1.$$

Si  $\rho < 1$ , la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système est

$$Q(z) = (1 - \rho) \frac{\lambda(1 - z)}{\lambda[h(\lambda - \lambda z) - z]} \exp \left( \frac{1}{\nu} \int_0^z \frac{\lambda(1 - h(\lambda - \lambda y))}{h(\lambda - \lambda y) - y} dy \right).$$

Les résultats trouvés dans ce cas sont similaires aux résultats du modèle classique M/G/1 avec rappels, (voir Falin et Templeton (1997) [30]).

# Chapitre 3

## Evaluation des performances dans le système de files d'attente $M/G/1$ avec rappels, à serveur non fiable et clients impatientes

### 3.1 Introduction

La théorie des files d'attente est une technique de la recherche opérationnelle qui permet de modéliser un système admettant un phénomène d'attente, de calculer ses performances et de déterminer ses caractéristiques pour aider les gestionnaires dans leur prise de décision. Pour l'application de la théorie des files d'attente à l'évaluation des performances, il est apparu que même les modèles de file d'attente les plus simples fournissaient des résultats qui correspondaient de près aux observations réelles. Dans ce qui suit, nous donnons des résultats sur des mesures de performance d'intérêt qui peuvent être utiles pour les praticiens. Quelques illustrations numériques sur la façon dont ces résultats peuvent être interprétés sont également fournies dans ce chapitre.

## 3.2 Mesures de performance probabilistes

Du chapitre précédent, nous pouvons obtenir certaines mesures de performance d'intérêt.

**Corollaire 3.1** *Les principales mesures de performance probabilistes, en régime permanent, sont données par les formules suivantes :*

1. *La probabilité que le serveur soit libre et fonctionnel*

$$F_{00} = \frac{1 - \rho}{q_1 h(\theta_1)}, \quad (3.1)$$

$$\text{où } q_1 = 1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1,$$

2. *La probabilité que le serveur soit occupé par un client persistant*

$$F_{01} = \frac{\lambda}{\theta_1} \frac{1 - h(\theta_1)}{h(\theta_1)}, \quad (3.2)$$

3. *La probabilité que le serveur soit occupé par un client impatient*

$$F_{02} = \frac{\gamma}{\theta_1} \frac{\{1 - f(\theta_1)\}(1 - \rho)}{q_1 h(\theta_1)}, \quad (3.3)$$

4. *La probabilité que le serveur soit fonctionnel*

$$\pi_0 = \frac{(1 - \rho)(1 + \delta g_1) + \frac{\gamma}{\theta_1} \{1 - f(\theta_1)\}(1 - \rho) + \frac{\lambda}{\theta_1} q_1 \{1 - h(\theta_1)\}}{q_1 h(\theta_1)}, \quad (3.4)$$

5. *La probabilité que le serveur soit occupé*

$$\pi_1 = \frac{\frac{\lambda}{\theta_1} q_1 \{1 - h(\theta_1)\} + \frac{\gamma}{\theta_1} \{1 - f(\theta_1)\}(1 - \rho)}{q_1 h(\theta_1)}, \quad (3.5)$$

6. *La probabilité que le serveur soit en arrêt*

$$\pi_2 = \frac{(\delta g_1 + \theta_0 r_{01})(1 - \rho) + \lambda q_1 \{1 - h(\theta_1)\} r_{11}}{q_1 h(\theta_1)} + \frac{\gamma \{1 - f(\theta_1)\}(1 - \rho) r_{11}}{q_1 h(\theta_1)}, \quad (3.6)$$

7. La probabilité que le serveur soit en maintenance préventive

$$\pi_3 = \delta \frac{1 - \rho}{q_1 h(\theta_1)} g_1, \quad (3.7)$$

8. La probabilité que le serveur soit en cours de réparation

$$\pi_4 = \frac{\theta_0 r_{01} (1 - \rho) + \lambda q_1 \{1 - h(\theta_1)\} r_{11}}{q_1 h(\theta_1)} + \frac{\gamma \{1 - f(\theta_1)\} (1 - \rho) r_{11}}{q_1 h(\theta_1)}, \quad (3.8)$$

9. La fréquence de défaillance est donnée par

$$\Delta_f = \theta_0 F_{00} + \theta_1 \pi_1. \quad (3.9)$$

## Preuve

1. La probabilité que le serveur soit libre et fonctionnel est donnée par  $F_{00}(1)$  qui peut être trouvé en utilisant l'équation de normalisation  $F(1) = 1$ .

Nous pouvons écrire

$$F(1) = B(1) \cdot F_{00}(1) \text{ alors } F_{00}(1) = \frac{1}{B(1)},$$

avec

$$B(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{q(\lambda - \lambda z)}{\lambda(v(\lambda - \lambda z) - z)} \left\{ 1 - \theta_1 \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right\} \right\}. \quad (3.10)$$

Au point  $z = 1$ , on trouve  $B(1) = 0/0$  qui est une forme indéterminée.

Pour cela, en utilisant la règle d'Hôpital, on aura

$$\frac{q(\lambda - \lambda z)}{v(\lambda - \lambda z) - z} \Big|_{z=1} = \frac{-\lambda q'(0)}{-1 - \lambda v'(0)}.$$

Pour calculer  $q'(0)$  et  $v'(0)$ , on a

$$\begin{aligned}
-\lambda q'(\lambda - \lambda z) &= -\lambda + \lambda \gamma w'(\lambda - \lambda z) + \lambda \theta_0 r'_0(\lambda - \lambda z) + \lambda \delta g'(\lambda - \lambda z) \\
-\lambda w'(\lambda - \lambda z) &= \lambda f'(\lambda - \lambda z + \theta_1) \left( \theta_1 \frac{r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} - 1 \right) \\
&\quad + \theta_1 \frac{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \left( \frac{\lambda r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} - \lambda r'_1(\lambda - \lambda z) \right) \\
-\lambda v'(\lambda - \lambda z) &= \left\{ \lambda h'(\lambda - \lambda z + \theta_1) \left( z \theta_1 \frac{r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} - 1 \right) \right. \\
&\quad + \theta_1 \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \left( z \frac{\lambda r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right. \\
&\quad \left. \left. + r_1(\lambda - \lambda z) - \lambda z r'_1(\lambda - \lambda z) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

On remplace  $z$  par 1 dans les expressions précédentes, on obtient

$$q_1 = q'(0) = 1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1, \quad (3.11)$$

$$w_1 = -w'(0) = \{1 - f(\theta_1)\} \left( \frac{1}{\theta_1} + r_{11} \right), \quad (3.12)$$

$$\rho = -\lambda v'(0) = \{1 - h(\theta_1)\} \left( 1 + \frac{\lambda}{\theta_1} + \lambda r_{11} \right). \quad (3.13)$$

Ainsi, on aura

$$\frac{-\lambda q'(0)}{-1 - \lambda v'(0)} = \frac{\lambda + \lambda \gamma w_1 + \lambda \theta_0 r_{01} + \lambda \delta g_1}{1 - \rho} = \frac{\lambda q_1}{1 - \rho} \quad (3.14)$$

et

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left\{ 1 + \theta_1 \frac{h(\lambda - \lambda z + \theta_1) - 1}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right\} = h(\theta_1). \quad (3.15)$$

On obtient finalement,

$$F_{00} = F_{00}(1) = \frac{1 - \rho}{q_1 h(\theta_1)},$$

où  $q_1$  est donné par l'équation (3.11).

2. La probabilité que le serveur soit occupé par un client persistant est donnée

par

$$\begin{aligned}
F_{01} &= F_{01}(z) |_{z=1} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{q(\lambda - \lambda z)}{v(\lambda - \lambda z) - z} \cdot \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} F_{00}(z) \right\} \\
&= \frac{\lambda}{\theta_1} \frac{1 - h(\theta_1)}{h(\theta_1)}.
\end{aligned}$$

3. La probabilité que le serveur soit occupé par un client impatient est donnée par

$$\begin{aligned}
F_{02} &= F_{02}(z) |_{z=1} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \gamma \frac{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} F_{00}(z) \right\} \\
&= \frac{\gamma}{\theta_1} \frac{\{1 - f(\theta_1)\} (1 - \rho)}{q_1 h(\theta_1)}.
\end{aligned}$$

4. La probabilité que le serveur soit fonctionnel peut être exprimée comme suit

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= F_{00}(1) + F_{10}(1) + F_{01}(1) + F_{02}(1) \\
&= \frac{(1 - \rho)(1 + \delta g_1) + \frac{\gamma}{\theta_1} \{1 - f(\theta_1)\} (1 - \rho) + \frac{\lambda}{\theta_1} q_1 \{1 - h(\theta_1)\}}{q_1 h(\theta_1)}.
\end{aligned}$$

5. De même, la probabilité que le serveur soit occupé est

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= F_{01}(1) + F_{02}(1) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{q(\lambda - \lambda z)}{v(\lambda - \lambda z) - z} \cdot \frac{1 - h(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right. \\
&\quad \left. + \gamma \frac{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right\} \cdot F_{00}(z) \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\theta_1} q_1 \{1 - h(\theta_1)\} + \frac{\gamma}{\theta_1} \{1 - f(\theta_1)\} (1 - \rho)}{q_1 h(\theta_1)}.
\end{aligned}$$

6. La probabilité que le serveur soit hors service est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_2 &= F_{10}(1) + F_{20}(1) \\ &= \frac{(\delta g_1 + \theta_0 r_{01})(1 - \rho) + \lambda q_1 \{1 - h(\theta_1)\} r_{11}}{q_1 h(\theta_1)} \\ &\quad + \frac{\gamma \{1 - f(\theta_1)\} (1 - \rho) r_{11}}{q_1 h(\theta_1)}.\end{aligned}$$

7. La probabilité que le serveur soit occupé par une maintenance préventive

$$\begin{aligned}\pi_3 &= F_{10}(1) \\ &= \delta \frac{1 - \rho}{q_1 h(\theta_1)} g_1.\end{aligned}$$

8. Enfin, la probabilité que le serveur soit en réparation

$$\begin{aligned}\pi_4 &= F_{20}(1) \\ &= \frac{\theta_0 r_{01} (1 - \rho) + \lambda q_1 \{1 - h(\theta_1)\} r_{11}}{q_1 h(\theta_1)} \\ &\quad + \frac{\gamma \{1 - f(\theta_1)\} (1 - \rho) r_{11}}{q_1 h(\theta_1)}.\end{aligned}$$

### 3.3 Mesures de performance moyennes

Les mesures de performance moyennes sont obtenues à partir de la fonction génératrice du nombre de clients dans l'orbite  $F(z)$ .

**Corollaire 3.2** *En régime permanent*

1. Le nombre moyen de clients dans l'orbite est donné par

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_o &= \frac{\lambda q_2}{2q_1} + \frac{\lambda^2 v_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda}{h(\theta_1)} \left\{ -h'(\theta_1) + \frac{h(\theta_1) - 1}{\theta_1} \right\} \\ &\quad + \frac{\lambda(\rho - 1) + q_1}{\nu(1 - \rho)},\end{aligned}\tag{3.16}$$

où  $q_2$ ,  $w_2$  et  $v_2$  sont donnés par

$$\begin{aligned} q_2 &= \gamma w_2 + \theta_0 r_{02} + \delta g_2, \\ w_2 &= 2f'(\theta_1) \left( \frac{1}{\theta_1} + r_{11} \right) + 2\{1 - f(\theta_1)\} \left( \frac{r_{11}}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_1^2} + \frac{1}{2}r_{12} \right), \\ v_2 &= 2\left\{ h'(\theta_1) + \frac{1 - h(\theta_1)}{\theta_1} \right\} \left( \frac{1}{\lambda} + r_{11} + \frac{1}{\theta_1} \right) + 2\{1 - h(\theta_1)\} \left( \frac{r_{11}}{\lambda} + \frac{1}{2}r_{12} \right). \end{aligned}$$

2. Le nombre moyen de clients dans le système est donné par

$$\bar{\eta} = \frac{\lambda q_2}{2q_1} + \frac{\lambda^2 v_2}{2(1-\rho)} + \frac{-\lambda q_1 h'(\theta_1) + \frac{\gamma}{\theta_1} \{1 - f(\theta_1)\} (1-\rho)}{q_1 h(\theta_1)} + \frac{\lambda(\rho-1) + q_1}{\nu(1-\rho)}, \quad (3.17)$$

3. Le nombre moyen de clients persistants dans le système est donné par

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= \frac{\lambda q_2}{2q_1} + \frac{\lambda^2 v_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda}{h(\theta_1)} \left\{ -h'(\theta_1) + \frac{h(\theta_1) - 1}{\theta_1} \right\} \\ &\quad + \frac{\lambda(\rho-1) + q_1}{\nu(1-\rho)} + \frac{\lambda}{\theta_1} \frac{1 - h(\theta_1)}{h(\theta_1)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

4. Le temps moyen d'attente dans l'orbite

$$\begin{aligned} \bar{W}_0 &= \frac{q_2}{2q_1} + \frac{\lambda v_2}{2(1-\rho)} + \frac{1}{h(\theta_1)} \left\{ -h'(\theta_1) + \frac{h(\theta_1) - 1}{\theta_1} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\nu} \frac{(\rho-1) + q_1}{(1-\rho)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

5. Le temps moyen de séjour d'un client persistant dans le système

$$\bar{W} = \bar{W}_0 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1 - h(\theta_1)}{h(\theta_1)}. \quad (3.20)$$

## Preuve

1. La démonstration de ce corollaire est basée sur quelques manipulations algébriques et l'application de la règle de l'Hôpital plusieurs fois. Cependant, en dérivant l'expression (2.47) au point  $z = 1$ , on obtient la formule du

nombre moyen de clients dans le système  $M/G/1$  avec rappels, non fiable et clients impatient. On doit calculer alors

$$F'(z) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \left( \frac{q(\lambda - \lambda z)}{v(\lambda - \lambda z) - z} \right)' \left\{ 1 + \theta_1 \frac{h(\lambda - \lambda z + \theta_1) - 1}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right\} + \frac{q(\lambda - \lambda z)}{\lambda(v(\lambda - \lambda z) - z)} \right. \\ \left. \times \theta_1 \left\{ \frac{-\lambda h'(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} + \lambda \frac{h(\lambda - \lambda z + \theta_1) - 1}{(\lambda - \lambda z + \theta_1)^2} \right\} \right\} F_{00}(z) + B(z) F'_{00}(z). \quad (3.21)$$

On évalue alors chacune des fractions précédentes.

On a

$$\pi(z) = \left( \frac{q(\lambda - \lambda z)}{v(\lambda - \lambda z) - z} \right)' = \frac{-\lambda q'(\lambda - \lambda z)(v(\lambda - \lambda z) - z)}{(v(\lambda - \lambda z) - z)^2} \\ + \frac{q(\lambda - \lambda z)(\lambda v'(\lambda - \lambda z) + 1)}{(v(\lambda - \lambda z) - z)^2}.$$

Au point  $z = 1$ , on trouve  $\pi(1) = 0/0$  qui est une forme indéterminée. Pour cela, en utilisant la règle d'Hôpital, on obtient :

$$\pi(z) = \frac{\lambda^2 q''(\lambda - \lambda z)(v(\lambda - \lambda z) - z) + \lambda q'(\lambda - \lambda z)(\lambda v'(\lambda - \lambda z) + 1)}{-2(\lambda v'(\lambda - \lambda z) + 1)(v(\lambda - \lambda z) - z)} \\ + \frac{-\lambda q'(\lambda - \lambda z)(\lambda v'(\lambda - \lambda z) + 1) - q(\lambda - \lambda z)\lambda^2 v''(\lambda - \lambda z)}{-2(\lambda v'(\lambda - \lambda z) + 1)(v(\lambda - \lambda z) - z)}$$

On utilise la règle d'Hôpital une deuxième fois, on aura

$$\pi(z) = \frac{\lambda^2 q''(\lambda - \lambda z)}{-2(\lambda v'(\lambda - \lambda z) + 1)} + \frac{q(\lambda - \lambda z)\lambda^2 v''(\lambda - \lambda z)}{2(\lambda v'(\lambda - \lambda z) + 1)(v(\lambda - \lambda z) - z)}$$

Pour  $z = 1$ , on obtient

$$\pi(1) = \frac{\lambda^2 q''(0)}{-2(\lambda v'(0) + 1)} + \frac{\lambda q'(0)\lambda^2 v''(0)}{2(\lambda v'(0) + 1)^2} \\ = \frac{\lambda^2 q_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda q_1}{2(1 - \rho)^2} \lambda^2 v_2. \quad (3.22)$$

Il reste à calculer  $q_2$  et  $v_2$ ,

$$\begin{aligned}
\lambda^2 q''(\lambda - \lambda z) &= -\lambda^2 \gamma w''(\lambda - \lambda z) - \lambda^2 \theta_0 r_0''(\lambda - \lambda z) - \lambda \delta g''(\lambda - \lambda z), \\
\lambda^2 w''(\lambda - \lambda z) &= -\lambda^2 f''(\lambda - \lambda z + \theta_1) \left( \theta_1 \frac{r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} - 1 \right) \\
&\quad + 2\lambda f'(\lambda - \lambda z + \theta_1) \left( \frac{\lambda r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} - \lambda r_1'(\lambda - \lambda z) \right) \\
&\quad + \{1 - f(\lambda - \lambda z + \theta_1)\} \left( 2 \frac{\lambda^2 r_1(\lambda - \lambda z)}{(\lambda - \lambda z + \theta_1)^2} \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\lambda^2 r_1'(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} + \lambda^2 r_1''(\lambda - \lambda z) \right), \\
\lambda^2 v''(\lambda - \lambda z) &= \lambda^2 h''(\lambda - \lambda z + \theta_1) \left( z \theta_1 \frac{r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} - 1 \right) + \lambda h'(\lambda - \lambda z + \theta_1) \\
&\quad \times \left\{ 2\theta_1 \frac{r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} + 2\theta_1 z \frac{-\lambda r_1'(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} + 2\theta_1 z \frac{\lambda r_1(\lambda - \lambda z)}{(\lambda - \lambda z + \theta_1)^2} \right\} \\
&\quad + \frac{1 - h(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \left\{ 2\theta_1 z \frac{\lambda^2 r_1(\lambda - \lambda z)}{(\lambda - \lambda z + \theta_1)^2} + 2\theta_1 \frac{\lambda r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right. \\
&\quad \left. - 2\theta_1 z \frac{\lambda^2 r_1'(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} - 2\theta_1 \lambda r_1'(\lambda - \lambda z) + \theta_1 2z \lambda^2 r_1'(\lambda - \lambda z) \right\}.
\end{aligned}$$

On remplace  $z$  par 1 dans les expressions précédentes, on obtient :

$$q_2 = \frac{-q''(0)}{\lambda^2} = \gamma w_2 + \theta_0 r_{02} + \delta g_2, \quad (3.23)$$

$$w_2 = \frac{w''(0)}{\lambda^2} = 2f'(\theta_1) \left( \frac{1}{\theta_1} + r_{11} \right) + 2\{1 - f(\theta_1)\} \left( \frac{r_{11}}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_1^2} + \frac{1}{2} r_{12} \right), \quad (3.24)$$

$$v_2 = \frac{v''(0)}{\lambda^2} = 2\left\{ h'(\theta_1) + \frac{1 - h(\theta_1)}{\theta_1} \right\} \left( \frac{1}{\lambda} + r_{11} + \frac{1}{\theta_1} \right) + 2\{1 - h(\theta_1)\} \left( \frac{r_{11}}{\lambda} + \frac{1}{2} r_{12} \right) \quad (3.25)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{-\lambda h'(\lambda - \lambda z + \theta_1)}{\lambda - \lambda z + \theta_1} + \lambda \frac{h(\lambda - \lambda z + \theta_1) - 1}{(\lambda - \lambda z + \theta_1)^2} \right\} \\
&= \left\{ \frac{-\lambda h'(\theta_1)}{\theta_1} + \lambda \frac{h(\theta_1) - 1}{\theta_1^2} \right\} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

et

$$F'_{00}(z) = \left\{ \frac{\lambda - \lambda v(\lambda - \lambda z)}{\nu(v(\lambda - \lambda z) - z)} + \frac{q(\lambda - \lambda z) - \lambda + \lambda z}{\nu(v(\lambda - \lambda z) - z)} \right\} F_{00}(z).$$

Dans cette formule, on utilise la règle d'Hôpital, on aura

$$F'_{00}(1) = \frac{\lambda}{\nu} \frac{(\rho - 1) + q_1}{q_1 h(\theta_1)}, \quad (3.27)$$

où  $F'_{00}(1)$  représente le nombre de clients en orbite lorsque le serveur est libre et fonctionnel. Finalement, en remplaçant (3.1), (3.14), (3.15) et (3.22)-(3.27) dans (3.21), après quelques manipulations algébriques, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_o &= \frac{\lambda q_2}{2q_1} + \frac{\lambda^2 v_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda}{h(\theta_1)} \left\{ -h'(\theta_1) + \frac{h(\theta_1) - 1}{\theta_1} \right\} \\ &\quad + \frac{\lambda}{\nu} \frac{(\rho - 1) + q_1}{(1-\rho)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

où  $q_2, v_2$ , sont donnés par les équations (3.23), (3.25).

## 2. Nombre moyen de clients dans le système

Le nombre moyen de clients dans le système est :  $\bar{\eta} = Q'(1) = \bar{\eta}_0 + E[X]$ ,  
où

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si le serveur est occupé,} \\ 0 & \text{si le serveur est libre.} \end{cases}$$

Donc  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  avec  $p = P[X = 1] = \pi_1$  (la probabilité que le serveur soit occupé) alors  $E[X] = \pi_1$ . On a alors

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \bar{\eta}_0 + \pi_1 \\ &= \bar{\eta}_0 + \frac{\frac{\lambda}{\theta_1} q_1 \{1 - h(\theta_1)\} + \frac{\gamma}{\theta_1} \{1 - f(\theta_1)\} (1 - \rho)}{q_1 h(\theta_1)}, \\ &= \frac{\lambda q_2}{2q_1} + \frac{\lambda^2 v_2}{2(1-\rho)} + \frac{-\lambda q_1 h'(\theta_1) + \frac{\gamma}{\theta_1} \{1 - f(\theta_1)\} (1 - \rho)}{q_1 h(\theta_1)} \\ &\quad + \frac{\lambda}{\nu} \frac{(\rho - 1) + q_1}{(1-\rho)}. \end{aligned}$$

## 3. Nombre moyen de clients persistants dans le système

Le nombre moyen de clients persistants dans le système est :  $\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_0 + E[Y]$ ,

où

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si le serveur est occupé par un client persistant,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc  $Y$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $q$  avec  $q = P[Y = 1] = F_{01}$

alors  $E[Y] = F_{01}$  et

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= \bar{\eta}_0 + F_{01} \\ &= \bar{\eta}_0 + \frac{\lambda}{\theta_1} \frac{1 - h(\theta_1)}{h(\theta_1)}. \end{aligned}$$

#### 4. Temps moyen d'attente d'un client (persistant)

Lorsque la capacité d'attente n'est pas limitée, il existe des relations entre les caractéristiques moyennes connues, sous le nom de formules de Little :

$$\bar{\eta}_0 = \Delta \bar{W}_0, \quad \bar{\eta}_1 = \Delta \bar{W},$$

avec  $\Delta$  le taux moyen d'entrée de clients persistants :

$$\Delta = \sum_{n \geq 0} \lambda_n P_n = \lambda \sum_{n \geq 0} P_n = \lambda.$$

On a alors

le temps moyen d'attente dans l'orbite :

$$\begin{aligned} \bar{W}_0 = \frac{\bar{\eta}_0}{\lambda} &= \frac{q_2}{2q_1} + \frac{\lambda v_2}{2(1-\rho)} + \frac{1}{h(\theta_1)} \left\{ -h'(\theta_1) + \frac{h(\theta_1) - 1}{\theta_1} \right\} \\ &+ \frac{1}{\nu} \frac{(\rho - 1) + q_1}{(1 - \rho)}, \end{aligned}$$

et le temps moyen de séjour d'un client persistant dans le système :

$$\bar{W} = \frac{\bar{\eta}_1}{\lambda} = \bar{W}_0 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1 - h(\theta_1)}{h(\theta_1)}.$$

## 3.4 Illustrations numériques

Dans cette section, nous illustrons l'influence des paramètres du système sur les mesures de performance d'intérêt. Nous montrons en particulier l'effet de  $\lambda$  (taux d'arrivée des clients persistant),  $\gamma$  (taux d'arrivée des clients impatient),  $\theta_1$  (taux de panne active),  $\theta_0$  (taux de panne passive),  $\delta$  (taux d'entretien préventif), et  $\nu$  (taux de rappel) sur la taille moyenne de l'orbite  $\bar{\eta}_o$ , probabilités d'état du serveur  $F_{00}$  (serveur libre et fonctionnel),  $\pi_0$  (serveur fonctionnel),  $\pi_1$  (serveur occupé),  $\pi_2$  (serveur hors service),  $\pi_4$  (serveur en réparation), et fréquence de défaillance  $\Delta_f$ . De plus, un problème d'optimisation des coûts est pris en considération.

Les deux premiers moments des durées de maintenance (correctif et préventif) sont fixés comme suit :  $r_{11} = 1$ ,  $r_{01} = 1$ ,  $g_1 = 1$ ,  $r_{12} = 2$ ,  $r_{02} = 2$ ,  $g_2 = 2$ . La durée de service des clients impatients est supposée être exponentielle avec paramètre 2. Dans la figure 1, trois distributions sont considérées pour la durée de service des clients persistants : distribution exponentielle avec paramètre 2, distribution hyperexponentielle avec moyenne 0.5 dont la fonction de densité est  $h(x) = \frac{8}{3}e^{-4x} + \frac{1}{3}e^{-x}$ ,  $x > 0$  et Erlang d'ordre deux avec moyenne 0.5. Dans les figures 2-16, le temps de service des clients persistants suit la distribution hyperexponentielle avec moyenne 0.5.

### 3.4.1 Influence des paramètres sur les mesures de performance

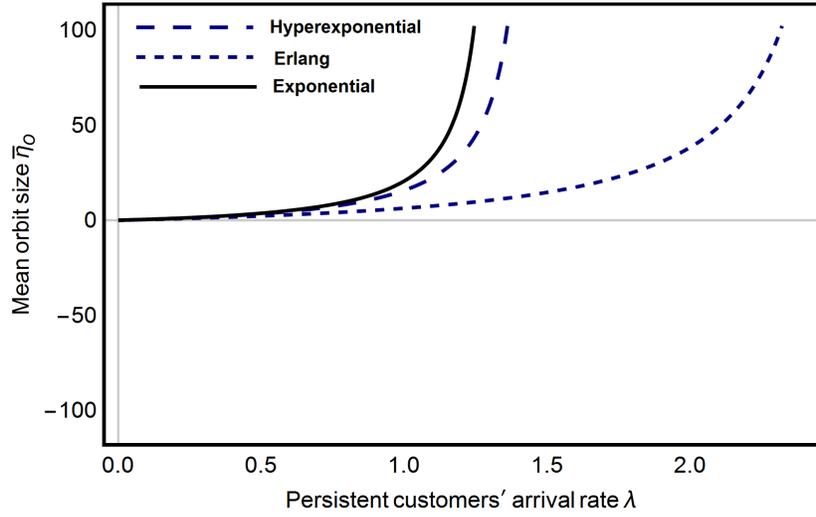
les Figures 1 – 5 représentent l'augmentation de la taille moyenne de l'orbite par rapport à  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_0$  et  $\delta$  tandis que la figure 6 montre la diminution de la taille moyenne de l'orbite par rapport à  $\nu$ . En effet, avec l'augmentation de  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_0$  et  $\delta$ , il y a plus de clients persistants qui trouvent le serveur bloqué (occupé ou en cours de maintenance) et deviennent ensuite des sources d'appels

secondaires. Avec l'augmentation du taux de rappel  $\nu$ , le taux de réussite pour accéder au serveur augmente, et par conséquent, plus de clients orbitaux quittent l'orbite.

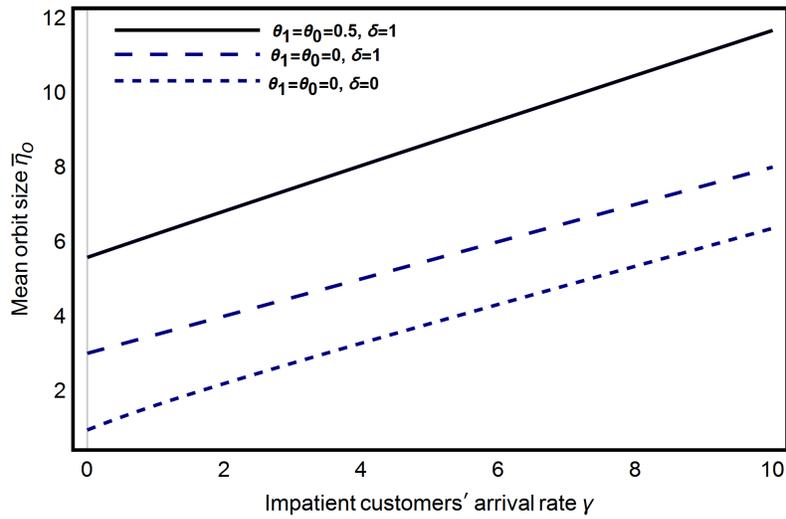
Il apparaît de figures 7 – 11 que

- La probabilité que le serveur soit libre et fonctionnel  $F_{00}$  décroît par rapport à tous les paramètres. En effet, lorsque  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_0$  et  $\delta$  augmentent, la durée de la période d'inactivité du serveur diminue et par conséquent,  $F_{00}$  est réduit,
- Les composants des deux vecteurs  $(\pi_0, \pi_4)$  et  $(\pi_1, \pi_2)$  se comportent différemment. Lorsque la probabilité que le serveur soit fonctionnel  $\pi_0$  (resp. probabilité que le serveur est occupé  $\pi_1$ ) augmente, la probabilité que le serveur est en réparation  $\pi_4$  ( resp. probabilité que le serveur soit hors service  $\pi_2$ ) diminue et vice versa. Lorsque  $\lambda$  et  $\gamma$  augmentent, le serveur devient plus occupé et plus prédisposé aux pannes et donc  $\pi_1$  et  $\pi_4$  augmentent. Par conséquent  $\pi_0$  et  $\pi_2$  diminuent. Avec l'augmentation de  $\theta_1$  et  $\theta_0$ , les probabilités  $\pi_2$  et  $\pi_4$  augmentent et  $\pi_0$  et  $\pi_1$  diminuent. Comme on peut s'y attendre dans les entretiens préventifs,  $\pi_4$  et  $\pi_1$  diminuent et  $\pi_0$  et  $\pi_2$  augmentent par rapport à  $\delta$ .

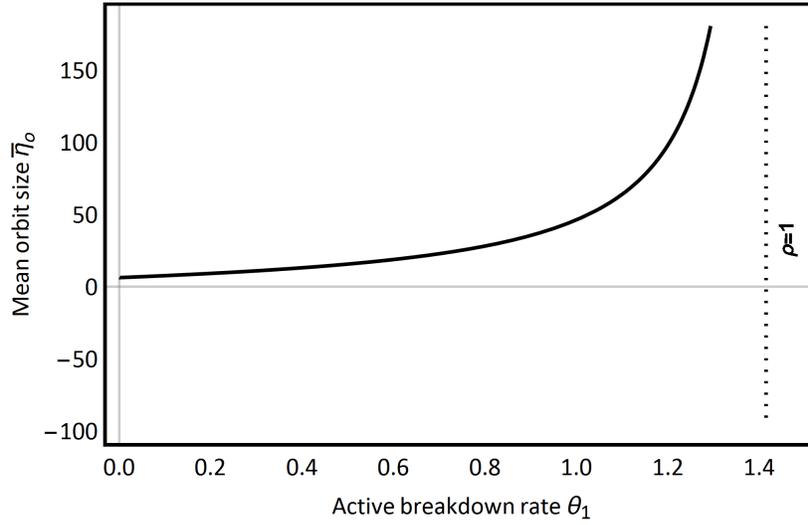
Comme indiqué dans les figures 12 – 13, la fréquence de défaillance diminue par rapport à  $\lambda$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ , et augmente par rapport  $\theta_0$ .



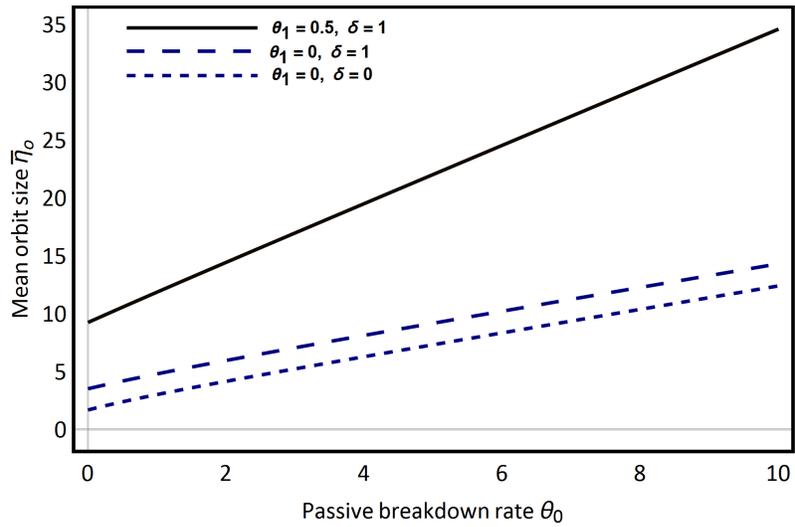
**FIGURE 3.1** – Effet du taux d’arrivée des clients persistants sur le nombre moyen de clients en l’orbite ( $\theta_1 = \theta_0 = 0.5$ ,  $\gamma = \delta = 1$ ).



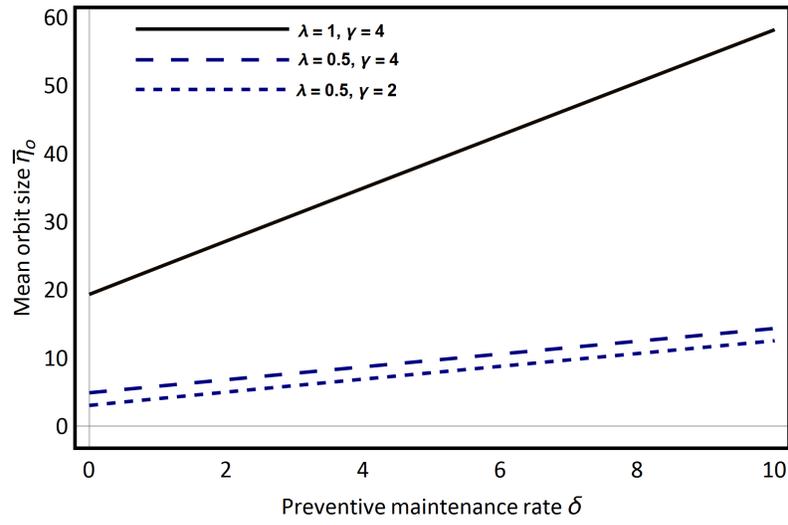
**FIGURE 3.2** – Effet du taux d’arrivée des cliens impatientes sur le nombre moyen de clients en orbite ( $\lambda=1$ ).



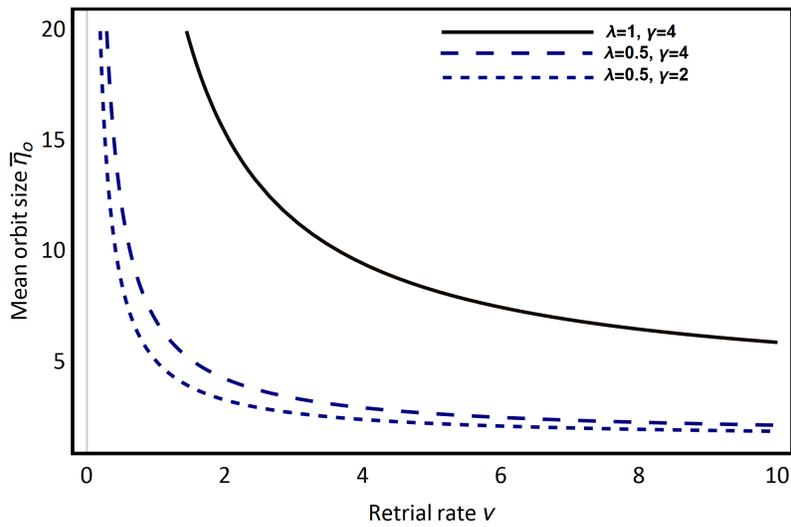
**FIGURE 3.3** – Effet du taux de panne active sur le nombre moyen de clients en orbite ( $\lambda = \gamma = \delta = 1, \theta_0 = 0.5$ ).



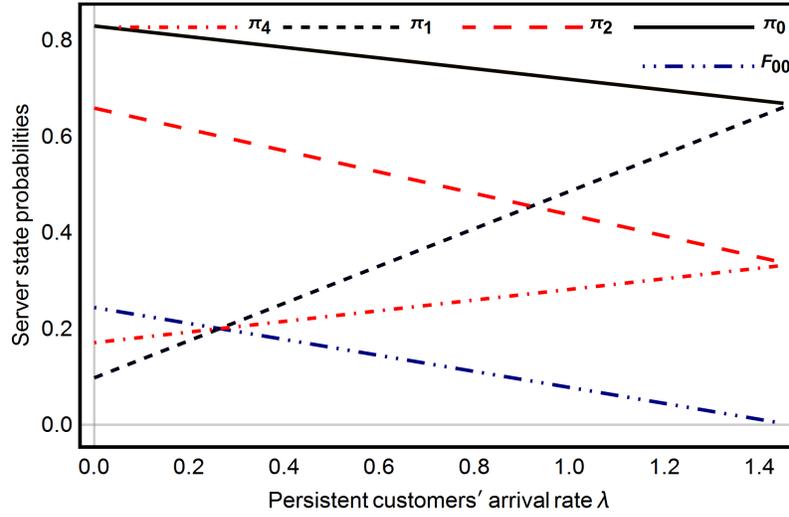
**FIGURE 3.4** – Effet du taux de panne passive sur le nombre moyen de clients en orbite ( $\lambda = \gamma = 1$ ).



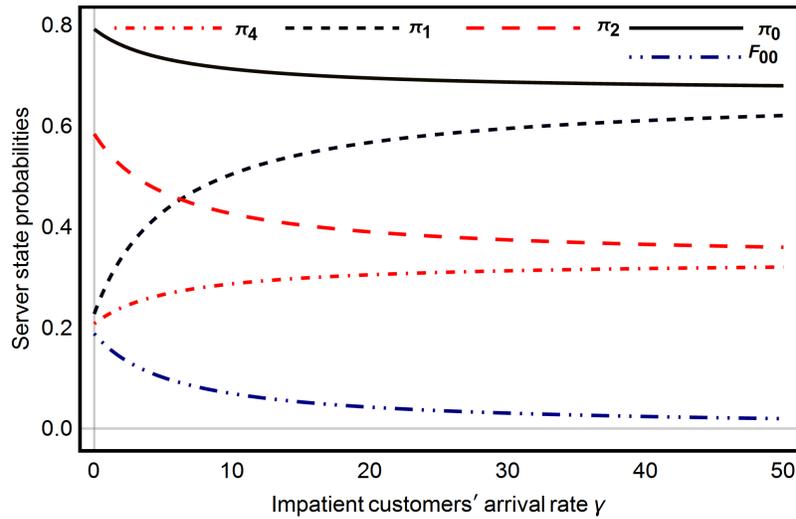
**FIGURE 3.5** – Effet du taux de maintenance préventive sur le nombre moyen de clients en orbite ( $\theta_1 = \theta_0 = 0.5, \delta = 1$ ).



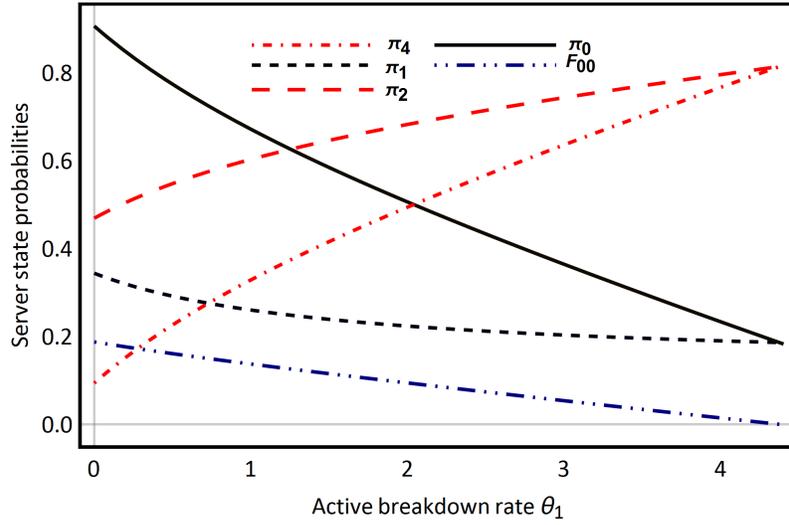
**FIGURE 3.6** – Effet du taux de rappel sur le nombre moyen de clients en orbite ( $\theta_1 = \theta_0 = 0.5, \delta = 1$ ).



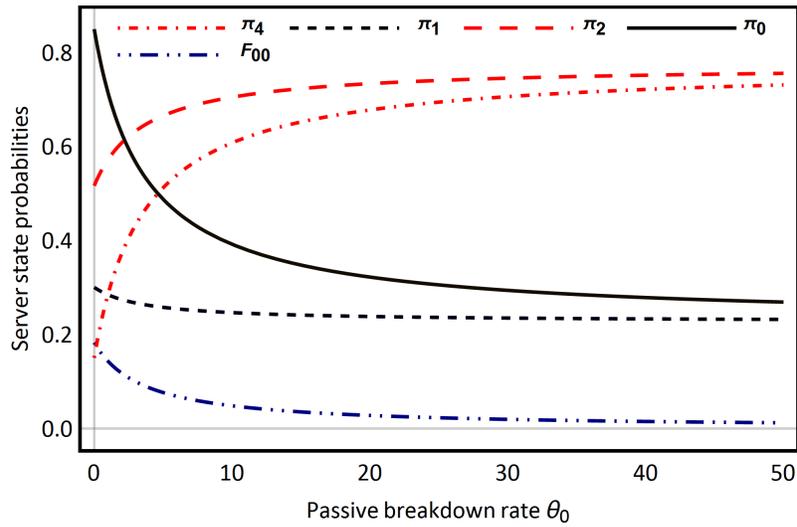
**FIGURE 3.7** – Effet du taux d’arrivée des clients persistants sur les probabilités d’état du serveur ( $\theta_1 = \theta_0 = 0.5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 2$ ).



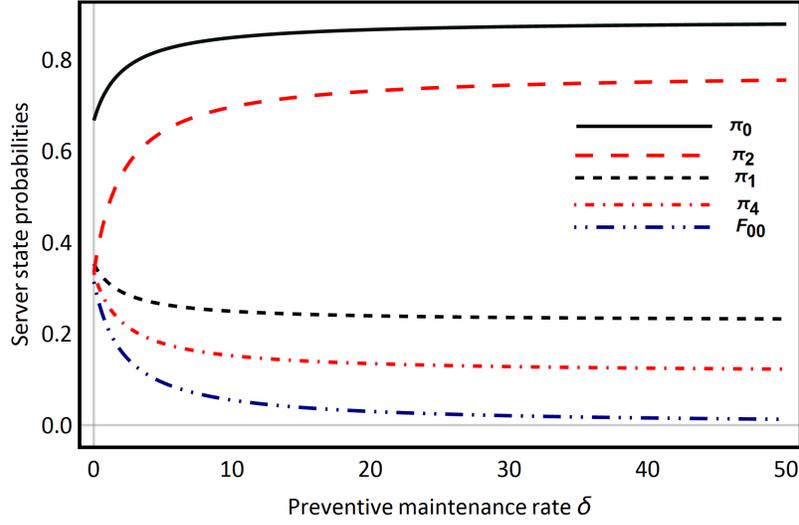
**FIGURE 3.8** – Effet du taux d’arrivée des clients impatients sur les probabilités d’état du serveur ( $\theta_1 = \theta_0 = \lambda = 0.5$ ,  $\delta = 2$ ).



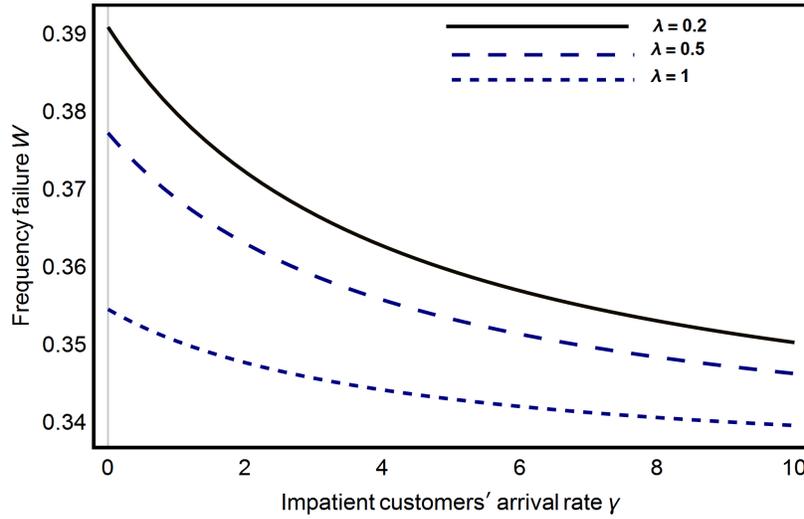
**FIGURE 3.9** – Effet du taux de panne active sur les probabilités d'état du serveur ( $\theta_0 = \lambda = 0.5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 2$ ).



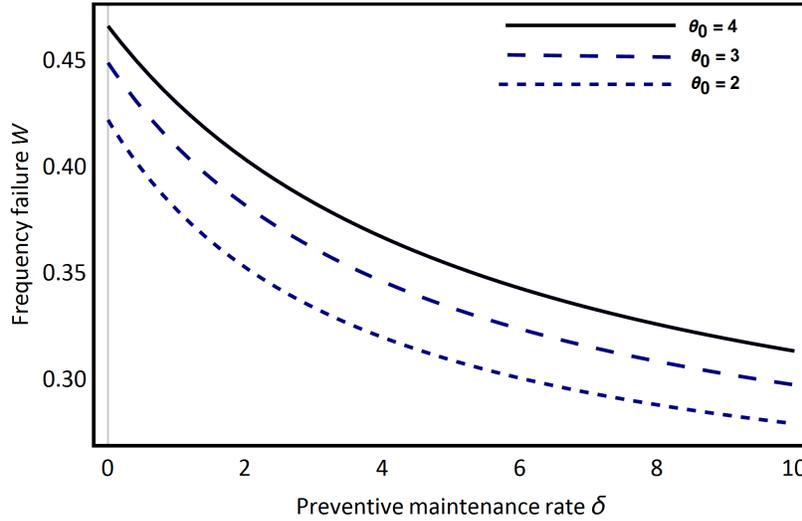
**FIGURE 3.10** – Effet du taux de panne passive sur les probabilités d'état du serveur ( $\theta_1 = \lambda = 0.5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 2$ ).



**FIGURE 3.11** – Effet du taux de maintenance préventive maintenance sur les probabilités d'état du serveur ( $\theta_1 = \theta_0 = \lambda = 0.5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 2$ ).



**FIGURE 3.12** – Effet des taux d'arrivée des clients persistants et impatientes sur la fréquence de défaillance ( $\theta_0 = \theta_1 = 0.5$ ,  $\delta = 1$ ).



**FIGURE 3.13** – Effet du taux de maintenance préventive et du taux du panne passive sur la fréquence de défaillance ( $\lambda = \gamma = 1$ ,  $\theta_1 = 0.5$ ).

### 3.4.2 Problème d'optimisation

Du point de vue de la gestion, nous devons minimiser la probabilité que le serveur soit inactif  $F_{00}$  et la probabilité que le serveur soit en panne  $\pi_4$ , mais en même temps, du point de vue de la qualité du service, nous avons également besoin de minimiser le nombre moyen de clients sur l'orbite  $\bar{\eta}_o$ . Ainsi, notre objectif est de trouver le taux optimal de maintenance préventive qui répond à ces deux besoins. A cet effet, nous considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\delta \geq 0} : \omega(\delta) = AF_{00} + B\pi_4 + C\bar{\eta}_o$$

où

- $A$  est le coût du serveur inactif,
- $B$  est le coût de la maintenance corrective,
- $C$  est le coût par unité de temps pour chaque client en orbite.

Le choix ci-dessus de la fonction coût est dû au fait que le taux de maintenance préventive est directement sous contrôle. La possibilité de contrôler d'autres paramètres du système est beaucoup plus réduite en pratique.

Puisque  $g_1$  est constant, la minimisation par rapport à  $\delta$  est équivalente à la minimisation par rapport à  $\sigma = \delta g_1$ . On prend la dérivée par rapport à  $\sigma$ ,

$$\frac{d\omega(\sigma)}{d\sigma} = E - \frac{\Lambda}{(1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \sigma)^2},$$

où  $\Lambda$  et  $E$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{A(1 - \rho)}{h(\theta_1)} + \frac{B}{h(\theta_1)} \left( \theta_0 r_{01} + \gamma \{1 - f(\theta_1)\} r_{11} \right) (1 - \rho) \\ &\quad + \frac{\lambda C}{2g_1} \left( -g_2(1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01}) + g_1(\gamma w_2 + \theta_0 r_{02}) \right), \\ E &= \frac{\lambda C}{\nu(1 - \rho)}. \end{aligned}$$

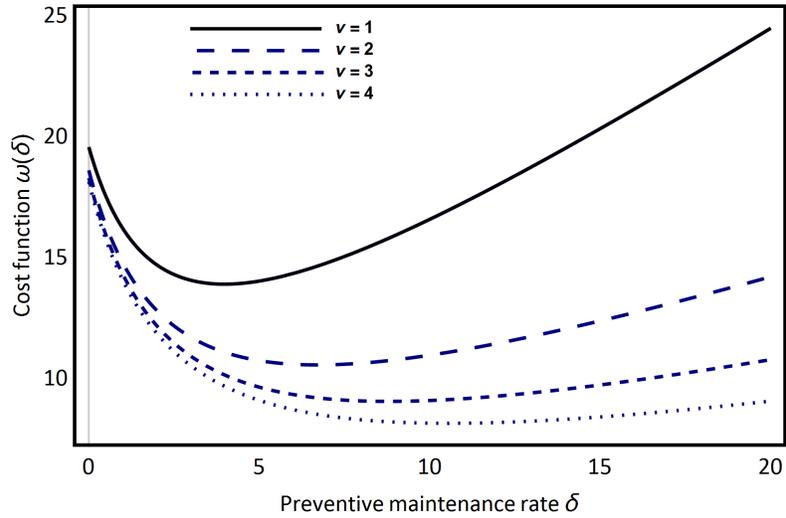
Si  $\Lambda \leq E$ , on a

$$\frac{d\omega(\sigma)}{d\sigma} \geq 0,$$

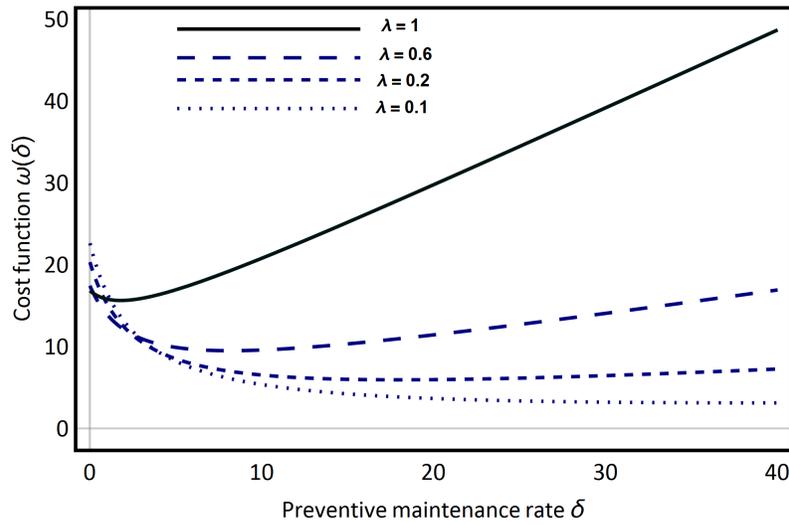
impliquant que la fonction coût est minimisée à  $\sigma = 0$ . Si  $\Lambda > E$ , la fonction coût est convexe et minimisée à

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\Lambda}{E}} - (1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01}).$$

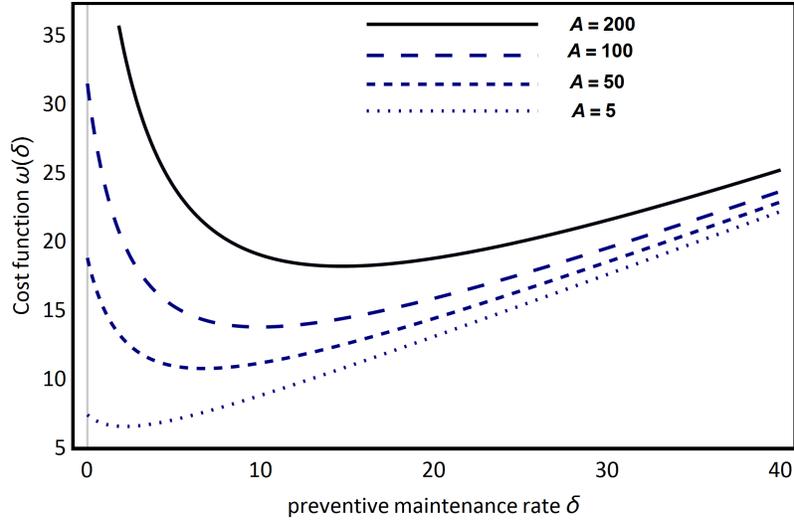
L'effet des paramètres  $A$ ,  $\nu$  et  $\lambda$  sur la fonction coût sont présentés dans les figures 14, 15 et 16 respectivement. La valeur optimale de  $\delta$  et le coût minimal correspondant sont résumés dans les tableaux 1, 2 et 3 pour différentes valeurs de  $A$ ,  $\nu$  et  $\lambda$  respectivement. On voit que la valeur minimale de la fonction coût augmente par rapport à  $A$  et  $\lambda$ , et diminue par rapport à  $\nu$ . Cependant, la valeur optimale du taux de maintenance préventive augmente par rapport à  $A$  et  $\nu$  et diminue en fonction de  $\lambda$ .



**FIGURE 3.14** – Effet du taux de rappel sur la fonction coût ( $\lambda = 0.5$ ,  $\gamma = \theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 0.5$ ,  $B = 10$ ,  $A = 50$ ,  $C = 1$ ).



**FIGURE 3.15** – Effet du taux d'arrivée des clients persistants sur la fonction coût ( $\gamma = \theta_0 = 1$ ,  $\nu = 4$ ,  $\theta_1 = 0.5$ ,  $B = 10$ ,  $A = 50$ ,  $C = 1$ ).



**FIGURE 3.16** – Effet du coût de serveur inactif sur la fonction coût ( $\lambda = 0.5, \gamma = \theta_0 = 1, \theta_1 = 0.5, \nu = 2, B = 10, C = 1$ ).

Table 1 : Les valeurs optimales de  $\delta^*$  et coût optimal  $\omega(\delta^*)$  pour différentes valeurs du coût de serveur inactif  $A$  ( $\lambda = 0.5, \gamma = \theta_0 = 1, \theta_1 = 0.5, \nu = 2, B = 10, C = 1$ ).

$A$	Valeur optimale $\delta^*$	Valeur optimale $\omega(\delta^*)$
2	1.428	6.080
5	1.925	6.513
10	2.649	7.154
50	6.575	10.720
100	9.849	13.737
200	14.621	18.155
300	18.331	21.599
500	24.257	27.104

Table 2 : Les valeurs optimales de  $\delta^*$  et coût optimal  $\omega(\delta^*)$  pour différentes valeurs du taux de rappel  $\nu$  ( $\lambda = 0.5$ ,  $\gamma = \theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 0.5$ ,  $B = 10$ ,  $A = 50$ ,  $C = 1$ ).

$\nu$	Valeur optimale $\delta^*$	Valeur optimale $\omega(\delta^*)$
0.1	0	37.009
0.2	0.341	27.196
0.3	1.002	23.004
0.5	2.051	18.630
1	3.977	14.057
2	6.702	10.719
3	8.793	9.213
4	10.555	8.307

Table 3 : Les valeurs optimales de  $\delta^*$  et coût optimal  $\omega(\delta^*)$  pour différentes valeurs du taux d'arrivée des clients persistants  $\lambda$  ( $\gamma = \theta_0 = 1$ ,  $\nu = 4$ ,  $\theta_1 = 0.5$ ,  $B = 10$ ,  $A = 50$ ,  $C = 1$ ).

$\lambda$	Valeur optimale $\delta^*$	Valeur optimale $\omega(\delta^*)$
0.1	36.37610	3.122
0.3	17.033	5.942
0.6	8.221	9.493
0.8	4.985	12.123
1	2.558	15.739
1.2	0.561	22.995
1.34	0	42.898
1.4	0	80.501

# Chapitre 4

## Approximation dans le système de files d'attente $M/G/1$ avec rappels, non fiable et clients impatientes

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous fournissons une analyse asymptotique du modèle  $M/G/1$  avec rappels, non fiable et clients impatientes, dans trois cas extrêmes : (i) trafic chargé ( $\rho \rightarrow 1$ ), (ii) taux de rappels faible ( $\nu \rightarrow 0$ ) et (iii) Connexion instantanée des clients impatientes ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). Dans ces cas, le nombre des clients persistants dans le système tend vers l'infini. Ainsi, l'évaluation numérique de la distribution est difficile. Cependant, en utilisant certaines techniques de mise à l'échelle appropriées, nous obtenons des expressions asymptotiques simples de la distribution marginale de la taille de l'orbite. Les cas (i) et (ii) ont été réalisés la première fois par Falin (1979, 1986) [28], [29] et ceci pour le système de files d'attente avec rappels  $M/G/1$ . Il a été établi ce qui suit :

- si  $\rho \rightarrow 1$  et  $h_2 < \infty$ , la distribution de la variable aléatoire du nombre de clients en orbite  $(1 - \rho)R$  converge vers la distribution Gamma de paramètres  $\alpha^* = \frac{1}{\nu h_1} + \frac{h_2}{2h_1^2}$  et  $\mu^* = \frac{h_2}{2h_1^2} \left( \frac{1}{\nu h_1} + \frac{h_2}{2h_1^2} \right)$ .
- si  $\nu \rightarrow 0$ ,  $R$  le nombre de clients en orbite est asymptotiquement Gaussienne

de moyenne  $\frac{\lambda\rho}{\nu(1-\rho)}$  et de variance  $\frac{\lambda^3 h_2 + 2\lambda\rho - 2\lambda\rho^2}{\nu(1-\rho)}$ .

La convergence (iii) n'a pas fait l'objet de publication dans la littérature et est établi ici pour la première fois. Nous nous référons également à Arrar et al. (2012) [8] et Hiroyuki Sakurai et al. (2016) [59] qui ont considéré les cas (i) et (ii) pour le modèle  $M^X/G/1$  avec rappels et clients impatientes et le modèle  $M/G/1$  avec rappels à communication bidirectionnelle respectivement.

## 4.2 Comportement asymptotique du nombre de clients en orbite sous un taux de trafic intense

Nous nous intéressons dans cette partie au cas du trafic intense, c'est-à-dire quand le taux d'arrivée  $\lambda$  croît de telle manière que  $\rho$  tend vers 1.

**Théorème 4.1** *Si  $v_2 < \infty$  et  $q_1 < \infty$ , alors sous la condition  $\rho \rightarrow 1 - 0$ ,  $(1 - \rho)R$  suit la distribution Gamma,*

$$(1 - \rho)R \sim \Gamma\left(1 + \frac{2(1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)v_1}{v_2 \nu}, \frac{2(v_1)^2}{v_2}\right),$$

où  $\Gamma(a, b)$  est la distribution Gamma avec des paramètres  $(a, b)$ .

**Remarque 1.4** Notons que si  $\theta_1 = 0$  et  $\gamma w_1 = \theta_0 r_{01} = \delta g_1 = r_{11} = 0$ , le théorème 4.1 se réduit au résultat correspondant dans Falin et Templeton (1997) [30] pour le modèle  $M/G/1$  avec rappels.

**Preuve** Afin de montrer que  $(1 - \rho)R$  suit la distribution Gamma lorsque  $\rho \rightarrow 1 - 0$ , il suffit de prouver que la transformée de Laplace de la distribution stationnaire du nombre de clients en orbite converge vers celle de la loi Gamma, en vertu du théorème d'unicité pour les transformées de Fourier.

En particulier, nous montrons que

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \mathcal{L}\left((1-\rho)R\right) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \mathbf{E}\left[e^{-s(1-\rho)R}\right] = \left(1 + \frac{v_2}{2(v_1)^2}s\right)^{-1 - \frac{2(1+\gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)v_1}{v_2 v}}, \quad s \geq 0.$$

Considérons la fonction génératrice

$$F(z) = \frac{1-\rho}{q_1} \frac{q(\lambda - \lambda z)}{\lambda[v(\lambda - \lambda z) - z]} \quad (4.1)$$

$$\times \frac{1}{h(\theta_1)} \left\{ 1 + \theta_1 \frac{h(\lambda - \lambda z + \theta_1) - 1}{\lambda - \lambda z + \theta_1} \right\} \quad (4.2)$$

$$\times \exp\left(\frac{\lambda}{\nu} \int_1^z \frac{1-v(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\gamma}{\nu} \int_1^z \frac{1-w(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy \right. \\ \left. + \frac{\theta_0}{\nu} \int_1^z \frac{1-r_0(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\delta}{\nu} \int_1^z \frac{1-g(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy\right). \quad (4.3)$$

Supposons que  $\varepsilon = 1 - \rho$  tend vers 0, quand  $\lambda$  tend vers  $\frac{h(\theta_1)}{1-h(\theta_1)} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + r_{11}} - 0 = \frac{1}{v_1} - 0$  et posons  $z = e^{-\varepsilon s}$ . Sous cette hypothèse, la limite du premier terme (4.1) devient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{q(\lambda - \lambda e^{-\varepsilon s})}{\lambda[v(\lambda - \lambda e^{-\varepsilon s}) - e^{-\varepsilon s}]} \times \frac{\varepsilon}{q_1}.$$

Comme  $\lambda \rightarrow \frac{1}{v_1} - 0$ , la variable  $t = \lambda(1 - e^{-\varepsilon s}) \rightarrow 0$ . Donc, si  $v_2 < \infty$  alors le développement de Taylor de  $v(t)$  est

$$v(t) = v(0) + v'(0)t + \frac{1}{2}v''(0)t^2 + o(t^2) \\ = 1 - v_1 t + \frac{v_2}{2}t^2 + o(t^2), \quad (t \rightarrow 0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
v(t) &= v(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})) \\
&= 1 - \lambda v_1(1 - e^{-\varepsilon s}) + \lambda^2 \frac{v_2}{2} (1 - e^{-\varepsilon s})^2 + o\left(\lambda^2 (1 - e^{-\varepsilon s})^2\right) \\
&= 1 - \lambda v_1 \left(\varepsilon s - \frac{1}{2} \varepsilon^2 s^2 + o(\varepsilon^2)\right) + \lambda^2 \frac{v_2}{2} \left(\varepsilon s + o(\varepsilon)\right)^2 + o(\varepsilon^2) \\
&= 1 - (1 - \varepsilon) \left(\varepsilon s - \frac{1}{2} \varepsilon^2 s^2 + o(\varepsilon^2)\right) + \frac{v_2}{2(v_1)^2} \left(\varepsilon s + o(\varepsilon)\right)^2 + o(\varepsilon^2) \\
&= 1 - \varepsilon s + \varepsilon^2 \left[ s^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{v_2}{2(v_1)^2}\right) + s \right] + o(\varepsilon^2), \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

En outre, si  $q_1 < \infty$  alors le développement de Taylor de  $g(t)$ ,  $r_0(t)$  et  $w(t)$  sont

$$\begin{aligned}
g(t) &= 1 + g_1 t + o(t), \quad (t \rightarrow 0), \\
r_0(t) &= 1 + r_{01} t + o(t), \quad (t \rightarrow 0), \\
w(t) &= 1 + w_1 t + o(t), \quad (t \rightarrow 0).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
g(t) &= g(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})) \\
&= 1 - \lambda g_1(1 - e^{-\varepsilon s}) + o\left(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})\right) \\
&= 1 - \frac{g_1}{v_1} (1 - \varepsilon) (\varepsilon s + o(\varepsilon)) + o(\varepsilon) \\
&= 1 - \frac{g_1}{v_1} (\varepsilon s - \varepsilon^2 s) + o(\varepsilon), \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

De même

$$r_0(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})) = 1 - \frac{r_{01}}{v_1} (\varepsilon s - \varepsilon^2 s) + o(\varepsilon), \tag{4.6}$$

$$w(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})) = 1 - \frac{w_1}{v_1} (\varepsilon s - \varepsilon^2 s) + o(\varepsilon), \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \tag{4.7}$$

Ainsi, la limite de (4.1) lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  est donnée par

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{q(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s}))}{\lambda[v(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})) - e^{-\varepsilon s}]} \times \frac{\varepsilon}{q_1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\varepsilon s - \varepsilon^2 s) + o(\varepsilon^2)}{\varepsilon \left( s + \frac{v_2}{2(v_1)^2} s^2 \right)} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s - \varepsilon s + o(\varepsilon^2)}{\left( s + \frac{v_2}{2(v_1)^2} s^2 \right)} \\
&= \frac{1}{\left( 1 + \frac{v_2}{2(v_1)^2} s \right)} \\
&= \left( 1 + \frac{v_2}{2(v_1)^2} s \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

On passe à la limite du second terme (4.2)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{h(\theta_1)} \left\{ 1 + \theta_1 \frac{h(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s}) + \theta_1) - 1}{\lambda(1 - e^{-\varepsilon s}) + \theta_1} \right\} = 1.$$

Finalement, nous calculons la limite du facteur exponentiel (4.3), on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow \frac{1}{v_1} - 0} \exp \left( \frac{\lambda}{\nu} \int_1^{e^{-\varepsilon s}} \frac{1 - v(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\gamma}{\nu} \int_1^{e^{-\varepsilon s}} \frac{1 - w(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy \right. \\
\left. + \frac{\theta_0}{\nu} \int_1^{e^{-\varepsilon s}} \frac{1 - r_0(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\delta}{\nu} \int_1^{e^{-\varepsilon s}} \frac{1 - g(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy \right).
\end{aligned}$$

En introduisant une nouvelle variable  $x = \frac{1-y}{1-e^{-\varepsilon s}}$ , on peut transformer l'expression à l'intérieur de  $\exp(\cdot)$  (4.3) comme suit :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left( \frac{1}{\nu} \int_0^1 \left( \frac{\lambda(1 - v(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x)) + \gamma(1 - w(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x))}{v(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) - 1 + (1 - e^{-\varepsilon s})x} \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{\theta_0(1 - r_0(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x)) + \delta(1 - g(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x))}{v(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) - 1 + (1 - e^{-\varepsilon s})x} \right) (e^{-\varepsilon s} - 1) dx \right). \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Pour l'échange entre la limite et l'intégration, la convergence uniforme est nécessaire. Comme  $x \in [0, 1]$  et  $\lambda(1 - e^{\varepsilon s}) \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , en appliquant Lemme

A.1 et Lemme A.2 (voir annexe) avec  $s = x$  et  $\varepsilon = \lambda(1 - e^{-\varepsilon s})$ , on obtient

$$\begin{aligned}
v(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) &= 1 - \lambda v_1(1 - e^{-\varepsilon s})x + \lambda^2 \frac{v_2}{2} ((1 - e^{-\varepsilon s})x)^2 + o\left(\lambda^2 ((1 - e^{-\varepsilon s})x)^2\right) \\
&= 1 - (1 - \varepsilon) \left( \varepsilon s - \frac{1}{2} \varepsilon^2 s^2 + o(\varepsilon^2) \right) x + \frac{v_2}{2(v_1)^2} \left( (1 - \varepsilon) (\varepsilon s + o(\varepsilon)) \right)^2 x^2 + o(\varepsilon^2) \\
&= 1 - \varepsilon s x + \varepsilon^2 \left[ s^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{v_2}{2(v_1)^2} x^2 \right) + s x \right] + o(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
w(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) &= 1 - \lambda w_1(1 - e^{-\varepsilon s})x + o(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) \\
&= 1 - \frac{w_1}{v_1} (1 - \varepsilon) (\varepsilon s + o(\varepsilon)) x + o(\varepsilon) \\
&= 1 - \varepsilon \frac{w_1}{v_1} x s + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
r_0(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) &= 1 - \varepsilon \frac{r_{01}}{v_1} x s + o(\varepsilon), \\
g(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) &= 1 - \varepsilon \frac{g_1}{v_1} x s + o(\varepsilon),
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à  $x \in [0, 1]$ . En substituant ces résultats dans (4.8) et

en prenant la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda \left( 1 - v(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) \right) + \gamma \left( 1 - w(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) \right)}{v(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) - 1 + (1 - e^{-\varepsilon s})x} (e^{-\varepsilon s} - 1) \\
&+ \frac{\theta_0 \left( 1 - r_0(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) \right) + \delta \left( 1 - g(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) \right)}{v(\lambda(1 - e^{-\varepsilon s})x) - 1 + (1 - e^{-\varepsilon s})x} (e^{-\varepsilon s} - 1) \\
&= \frac{\left[ \frac{1}{v_1} (1 - \varepsilon) (\varepsilon s x + o(\varepsilon)) + \gamma \left( \varepsilon \frac{w_1}{v_1} x s + o(\varepsilon) \right) \right] (-\varepsilon s + o(\varepsilon))}{1 - \varepsilon s x + \varepsilon^2 \left[ s^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{v_2}{2(v_1)^2} x^2 \right) + s x \right] - 1 + (\varepsilon s - \frac{1}{2} \varepsilon^2 s^2) x + o(\varepsilon^2)} \\
&+ \frac{\left[ \theta_0 \left( \varepsilon \frac{r_{01}}{v_1} x s + o(\varepsilon) \right) + \delta \left( \varepsilon \frac{g_1}{v_1} x s + o(\varepsilon) \right) \right] (-\varepsilon s + o(\varepsilon))}{1 - \varepsilon s x + \varepsilon^2 \left[ s^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{v_2}{2(v_1)^2} x^2 \right) + s x \right] - 1 + (\varepsilon s - \frac{1}{2} \varepsilon^2 s^2) x + o(\varepsilon^2)} \\
&= \frac{-\frac{1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1}{v_1} \varepsilon^2 s^2 x + o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2 \left( x s + \frac{v_2}{2(v_1)^2} x^2 s^2 \right) + o(\varepsilon^2)} \rightarrow -\frac{1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1}{v_1} \frac{s}{1 + \frac{v_2}{2(v_1)^2} s x}.
\end{aligned}$$

On prend l'intégrale de cette limite

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\nu} \int_0^1 -\frac{1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1}{v_1} \frac{s}{1 + \frac{v_2}{2(v_1)^2} s x} dx \\ &= -\frac{2(1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)v_1}{v_2 \nu} \log \left( 1 + \frac{v_2}{2(v_1)^2} s \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, en raison de la convergence uniforme mentionnée ci-dessus, la permutation de la limite et l'intégrale est permise, on aura alors

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left( \frac{\lambda}{\nu} \int_0^{e^{-\varepsilon s}} \frac{1 - v(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\gamma}{\nu} \int_0^{e^{-\varepsilon s}} \frac{1 - w(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy \right. \\ & \quad \left. + \frac{\theta_0}{\nu} \int_0^{e^{-\varepsilon s}} \frac{1 - r_0(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\delta}{\nu} \int_0^{e^{-\varepsilon s}} \frac{1 - g(\lambda - \lambda y)}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy \right) \\ &= \exp \left( -\frac{2(1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)v_1}{v_2 \nu} \log \left( 1 + \frac{v_2}{2(v_1)^2} s \right) \right) \\ &= \left( 1 + \frac{v_2}{2(v_1)^2} s \right)^{-\frac{2(1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)v_1}{v_2 \nu}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Finalement,

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} F(z) = \left( 1 + \frac{v_2}{2(v_1)^2} s \right)^{-1 - \frac{2(1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)v_1}{v_2 \nu}}.$$

### 4.3 Comportement asymptotique du nombre de clients en orbite sous un taux de rappels faible

Le théorème suivant décrit la distribution du nombre de clients en orbite lorsque le taux de rappels est faible  $\nu \rightarrow 0$ .

**Théorème 4.2** *Si  $v_2 < \infty$  et  $q_2 < \infty$ , alors sous la condition  $\nu \rightarrow 0$ ,  $R$  est asymptotiquement Gaussienne de moyenne*

$$a_1 = \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{\nu(1 - \rho)},$$

et de variance,

$$b_1 = \frac{\lambda^3 q_1 v_2 + \lambda(1-\rho)[\lambda q_2 + 2(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)]}{2(1-\rho)^2 \nu}.$$

**Preuve** Afin de montrer que  $R$  suit la distribution Gaussienne lorsque  $\nu \rightarrow 0$ , il suffit de prouver que la fonction caractéristique de la variable aléatoire normalisée

$$R_1 = \frac{R - \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{\nu(1-\rho)}}{\frac{1}{\sqrt{\nu}}} = \sqrt{\nu} R - \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{\sqrt{\nu}(1-\rho)}$$

converge vers celle de la loi Gaussienne de moyenne 0 et de variance,

$$b_1 = \frac{\lambda^3 q_1 v_2 + \lambda(1-\rho)[\lambda q_2 + 2(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)]}{2(1-\rho)^2}.$$

Plus précisément, nous montrons que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathbf{E} \left[ e^{itR_1} \right] = \exp \left[ -\frac{t^2 \lambda^3 q_1 v_2 + \lambda(1-\rho)[\lambda q_2 + 2(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)]}{2(1-\rho)^2} \right], \quad t \in \mathbb{R}.$$

La fonction caractéristique  $\mathbf{E} \left[ e^{itR_1} \right]$  peut être exprimée en fonction de la fonction génératrice  $F(z)$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ e^{itR_1} \right] &= \mathbf{E} \left[ e^{it\sqrt{\nu}R} \right] \times e^{-it \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{\sqrt{\nu}(1-\rho)}} \\ &= F(e^{it\sqrt{\nu}}) \times e^{-it \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{\sqrt{\nu}(1-\rho)}} \\ &= \frac{1-\rho}{1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1} \frac{q(\lambda - \lambda e^{it\sqrt{\nu}})}{\lambda[v(\lambda - \lambda e^{it\sqrt{\nu}}) - e^{it\sqrt{\nu}}]} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\times \frac{1}{h(\theta_1)} \left\{ 1 + \theta_1 \frac{h(\lambda - \lambda e^{it\sqrt{\nu}} + \theta_1) - 1}{\lambda - \lambda e^{it\sqrt{\nu}} + \theta_1} \right\} \quad (4.11)$$

$$\times \exp \left( \frac{1}{\nu} \int_1^{e^{it\sqrt{\nu}}} \frac{\lambda(1-v(\lambda-\lambda y)) + \gamma(1-w(\lambda-\lambda y))}{v(\lambda-\lambda y) - y} dy \right) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{\nu} \int_1^{e^{it\sqrt{\nu}}} \frac{\theta_0(1-r_0(\lambda-\lambda y)) + \delta(1-g(\lambda-\lambda y))}{v(\lambda-\lambda y) - y} dy \\ &- it \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{\sqrt{\nu}(1-\rho)} \end{aligned}$$

Maintenant, on va calculer les limites de (4.10)-(4.12) lorsque  $\nu \rightarrow 0$ . Si  $v_2 < \infty$ , la fonction  $v(\lambda s)$  peut s'écrire comme suit :

$$v(\lambda s) = 1 - v_1 s + \frac{v_2}{2} s^2 + o(s^2), \quad Re(s) \geq 0, \quad (s \rightarrow 0),$$

où  $Re(s)$  désigne la partie réelle de  $s$ . Ainsi, en notant que  $s = 1 - e^{it\sqrt{\nu}}$  lorsque  $\nu \rightarrow 0$  et  $Re(1 - e^{it\sqrt{\nu}}) = 1 - \cos(t\sqrt{\nu}) \geq 0$ , le développement de Taylor de  $v(\lambda(1 - e^{it\sqrt{\nu}}))$  est donné par

$$v(\lambda(1 - e^{it\sqrt{\nu}})) = 1 + \rho(1 - e^{it\sqrt{\nu}}) + \frac{\lambda^2}{2} v_2 (1 - e^{it\sqrt{\nu}})^2 + o(|1 - e^{it\sqrt{\nu}}|^2).$$

De même si  $q_2 < \infty$ , alors le développement de Taylor de  $w(\lambda(1 - e^{it\sqrt{\nu}}))$ ,  $r_0(\lambda(1 - e^{it\sqrt{\nu}}))$  et  $g(\lambda(1 - e^{it\sqrt{\nu}}))$  sont donnés par

$$\begin{aligned} w(\lambda(1 - e^{it\sqrt{\nu}})) &= 1 + \lambda w_1(1 - e^{it\sqrt{\nu}}) - \lambda^2 \frac{w_2}{2} (1 - e^{it\sqrt{\nu}})^2 + o(|1 - e^{it\sqrt{\nu}}|^2), \\ r_0(\lambda(1 - e^{it\sqrt{\nu}})) &= 1 + \lambda r_{01}(1 - e^{it\sqrt{\nu}}) - \lambda^2 \frac{r_{02}}{2} (1 - e^{it\sqrt{\nu}})^2 + o(|1 - e^{it\sqrt{\nu}}|^2), \\ g(\lambda(1 - e^{it\sqrt{\nu}})) &= 1 + \lambda g_1(1 - e^{it\sqrt{\nu}}) - \lambda^2 \frac{g_2}{2} (1 - e^{it\sqrt{\nu}})^2 + o(|1 - e^{it\sqrt{\nu}}|^2). \end{aligned}$$

Par conséquent, la limite de (4.10) lorsque  $\nu \rightarrow 0$  est donnée par

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda(1 - \rho) q_1 (1 - e^{it\sqrt{\nu}}) - \frac{\lambda^2}{2} q_2 (1 - e^{it\sqrt{\nu}})^2 + o(|1 - e^{it\sqrt{\nu}}|^2)}{\lambda q_1 \left[ 1 + \rho(1 - e^{it\sqrt{\nu}}) + \frac{\lambda^2}{2} v_2 (1 - e^{it\sqrt{\nu}})^2 + o(|1 - e^{it\sqrt{\nu}}|^2) - e^{it\sqrt{\nu}} \right]} \\ &= \frac{-\lambda(1 - \rho) q_1 it\sqrt{\nu} - \frac{\lambda^2}{2} q_2 (it\sqrt{\nu})^2 + o(\sqrt{\nu})}{\lambda q_1 \left[ -(1 - \rho)it\sqrt{\nu} - \frac{\lambda^2}{2} v_2 (it\sqrt{\nu}) + o(\sqrt{\nu}) \right]} \\ &= \frac{\lambda(1 - \rho) q_1 + \frac{\lambda^2}{2} q_2 it\sqrt{\nu} + o(\sqrt{\nu})}{\lambda q_1 \left[ (1 - \rho) + \frac{\lambda^2}{2} v_2 it\sqrt{\nu} + o(\sqrt{\nu}) \right]} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 1. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Maintenant, nous calculons la limite du second facteur (4.11)

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{h(\theta_1)} \left\{ 1 + \theta_1 \frac{h(\lambda(1 - e^{it\sqrt{\nu}}) + \theta_1) - 1}{\lambda(1 - e^{it\sqrt{\nu}}) + \theta_1} \right\} = 1. \tag{4.14}$$

Enfin, on va calculer la limite de (4.12) . Pour cela, nous transformons l'expression à l'intérieur de  $\exp(\cdot)$  de (4.12) comme suit :

$$\begin{aligned}
&= \exp \left( \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{(1 - \rho)} \frac{e^{it\sqrt{\nu}} - 1 - it\sqrt{\nu}}{\nu} \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\nu} \int_1^{e^{it\sqrt{\nu}}} \left( \frac{\lambda(1 - v(\lambda - \lambda y)) + \gamma(1 - w(\lambda - \lambda y))}{v(\lambda - \lambda y) - y} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\theta_0(1 - r_0(\lambda - \lambda y)) + \delta(1 - g(\lambda - \lambda y))}{v(\lambda - \lambda y) - y} \right) dy \right. \\
&\quad \left. - it \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{\sqrt{\nu}(1 - \rho)} \right) dy \Bigg).
\end{aligned}$$

Dans cette dernière formule, la limite  $\nu \rightarrow 0$  du premier terme est donnée par

$$\begin{aligned}
&\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{(1 - \rho)} \frac{e^{it\sqrt{\nu}} - 1 - it\sqrt{\nu}}{\nu} \\
&= \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{(1 - \rho)} \frac{-\frac{1}{2}t^2\nu + o(\nu)}{\nu} \\
&= \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)t^2}{2(1 - \rho)}. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Pour calculer la limite du deuxième terme, on introduit la fonction

$$\begin{aligned}
A(\nu) &= \int_1^{e^{it\sqrt{\nu}}} \left( \frac{\lambda(1 - v(\lambda - \lambda y)) + \gamma(1 - w(\lambda - \lambda y))}{v(\lambda - \lambda y) - y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\theta_0(1 - r_0(\lambda - \lambda y)) + \delta(1 - g(\lambda - \lambda y))}{v(\lambda - \lambda y) - y} \right. \\
&\quad \left. - it \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{\sqrt{\nu}(1 - \rho)} \right) dy.
\end{aligned}$$

Pour cette fonction, nous avons  $A(0) = 0$ , et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned}
A'(\nu) &= it \frac{e^{it\sqrt{\nu}}}{2\sqrt{\nu}} \left( \frac{\lambda(1-v(\lambda-\lambda e^{it\sqrt{\nu}})) + \gamma(1-w(\lambda-\lambda e^{it\sqrt{\nu}}))}{v(\lambda-\lambda e^{it\sqrt{\nu}}) - e^{it\sqrt{\nu}}} \right. \\
&\quad + \frac{\theta_0(1-r_0(\lambda-\lambda e^{it\sqrt{\nu}})) + \delta(1-g(\lambda-\lambda e^{it\sqrt{\nu}}))}{v(\lambda-\lambda e^{it\sqrt{\nu}}) - e^{it\sqrt{\nu}}} \\
&\quad \left. - \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{(1-\rho)} \right) \\
&= it \frac{e^{it\sqrt{\nu}} - \frac{\lambda^2}{2} \left( \lambda v_2 + q_2 + \frac{\lambda(\rho+q_1-1)}{1-\rho} \right) (1-e^{it\sqrt{\nu}})^2 + o\left(\left(1-e^{it\sqrt{\nu}}\right)^2\right)}{2\sqrt{\nu} \left( (1-\rho)(1-e^{it\sqrt{\nu}}) + \frac{\lambda^2}{2} v_2 (1-e^{it\sqrt{\nu}})^2 + o\left(\left(1-e^{it\sqrt{\nu}}\right)^2\right) \right)} \\
&= -e^{it\sqrt{\nu}} \left( \frac{\left( \lambda^3 q_1 v_2 + \lambda^2 q_2 (1-\rho) \right) \nu + o(\nu)}{4(1-\rho)^2 \nu + o(\nu)} \right) t^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on prend la limite lorsque  $\nu \rightarrow 0$  et on obtient

$$A'(0) = -\frac{\lambda^3 q_1 v_2 - \lambda^2 q_2 (1-\rho)}{4(1-\rho)^2} t^2.$$

D'autre part, en utilisant le développement de Taylor de  $A(\nu)$ , on a

$$A(\nu) = A(0) + \nu A'(0) + o(\nu),$$

par conséquent,

$$\frac{1}{\nu} A(\nu) = A'(0) + o(1) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} -\frac{\lambda^3 q_1 v_2 + \lambda^2 q_2 (1-\rho)}{4(1-\rho)^2} t^2. \quad (4.16)$$

On substitue maintenant (4.15)-(4.16) dans (4.12), on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \rightarrow 0} \exp & \left( \frac{1}{\nu} \int_1^{e^{it\sqrt{\nu}}} \frac{\lambda(1 - v(\lambda - \lambda y)) + \gamma(1 - w(\lambda - \lambda y))}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy \right. \\
& + \frac{1}{\nu} \int_1^{e^{it\sqrt{\nu}}} \frac{\theta_0(1 - r_0(\lambda - \lambda y)) + \delta(1 - g(\lambda - \lambda y))}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy \\
& \left. - it \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{\sqrt{\nu}(1 - \rho)} \right) \\
= & \exp \left[ -\frac{t^2}{2} \frac{\lambda^3 q_1 v_2 + \lambda^2 q_2 (1 - \rho) + 2\lambda(\rho + q_1 - 1)(1 - \rho)}{2(1 - \rho)^2} \right] \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Enfin, en appliquant (4.13), (4.14) et (4.17) dans (4.10)-(4.12), nous obtenons le résultat requis.

## 4.4 Comportement asymptotique du nombre de clients en orbite sous un taux de connexion instantanée des clients impatientes

Quand le taux d'arrivée des clients impatientes est élevé,  $\gamma \rightarrow \infty$ , le nombre de clients en orbite se comporte asymptotiquement comme suit :

**Théorème 4.3** *Si  $v_2 < \infty$  et  $q_2 < \infty$ , alors sous la condition  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $R$  est asymptotiquement Gaussienne de moyenne,*

$$a_2 = \frac{\lambda \gamma w_1}{\nu(1 - \rho)},$$

*et de variance*

$$b_2 = \gamma \frac{\lambda^3 w_1 v_2 + \lambda[\lambda w_2 + 2w_1](1 - \rho)}{2(1 - \rho)^2 \nu}.$$

**Preuve** Nous montrons que la fonction caractéristique de la variable aléatoire normalisée

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} R - \frac{\lambda w_1}{\nu(1 - \rho)} \sqrt{\gamma}$$

tend vers celle de la distribution gaussienne avec moyen 0 et variance

$$b_2 = \frac{\lambda^3 w_1 v_2 + \lambda[\lambda w_2 + 2w_1](1 - \rho)}{2(1 - \rho)^2 \nu}.$$

En particulier, nous prouvons que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathbf{E} \left[ e^{itR_2} \right] = \exp \left[ -\frac{t^2}{2} \cdot \frac{\lambda^3 w_1 v_2 + \lambda[\lambda w_2 + 2w_1](1 - \rho)}{2(1 - \rho)^2 \nu} \right], \quad t \in \mathbb{R}.$$

La fonction caractéristique  $\mathbf{E} \left[ e^{itR_2} \right]$  peut être exprimée en termes de la fonction génératrice  $F(z)$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ e^{itR_2} \right] &= \mathbf{E} \left[ e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}} R} \right] \times e^{-it \frac{\lambda w_1}{\nu(1-\rho)} \sqrt{\gamma}} = F \left( e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \right) e^{-it \frac{\lambda w_1}{\nu(1-\rho)} \sqrt{\gamma}} \\ &= \frac{1 - \rho}{1 + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1} \frac{q \left( \lambda - \lambda e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \right)}{\lambda \left[ v \left( \lambda - \lambda e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \right) - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \right]} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\times \frac{1}{h(\theta_1)} \left\{ 1 + \theta_1 \frac{h \left( \lambda - \lambda e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} + \theta_1 \right) - 1}{\lambda - \lambda e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} + \theta_1} \right\} \quad (4.19)$$

$$\times \exp \left( \frac{1}{\nu} \int_1^{e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}} \frac{\lambda(1 - v(\lambda - \lambda y)) + \gamma(1 - w(\lambda - \lambda y))}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy \right) \quad (4.20)$$

$$+ \frac{1}{\nu} \int_1^{e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}} \frac{\theta_0(1 - r_0(\lambda - \lambda y)) + \delta(1 - g(\lambda - \lambda y))}{v(\lambda - \lambda y) - y} dy - it \frac{\lambda w_1}{\nu(1 - \rho)} \sqrt{\gamma} \Bigg).$$

Nous notons que le chemin de l'intégrale dans (4.20) peut être un chemin arbitraire dans le domaine  $Re(y) \leq 1$ . Pour trouver les limites de (4.18)-(4.20), nous utilisons les extensions suivantes. Puisque  $s = (1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}})$  lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , le développement de Taylor de  $v(\lambda s)$  est donné comme suit

$$v(\lambda s) = 1 - v_1 s + \frac{v_2}{2} s^2 + o(s^2), \quad (s \rightarrow 0).$$

Donc  $v(\lambda(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}))$  peut s'écrire comme suit

$$v \left( \lambda \left( 1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \right) \right) = 1 + \rho \left( 1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \right) + \frac{\lambda^2}{2} v_2 \left( 1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \right)^2 + o \left( \left| 1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \right|^2 \right) \quad (4.21)$$

De même, nous avons aussi

$$\begin{aligned}
w(\lambda(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}})) &= 1 + \lambda w_1(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}) - \lambda^2 \frac{w_2}{2}(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}})^2 + o\left(|1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}|^2\right), \\
r_0(\lambda(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}})) &= 1 + \lambda r_{01}(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}) - \lambda^2 \frac{r_{02}}{2}(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}})^2 + o\left(|1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}|^2\right), \\
g(\lambda(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}})) &= 1 + \lambda g_1(1 - e^{it\sqrt{\nu}}) - \lambda^2 \frac{g_2}{2}(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}})^2 + o\left(|1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}|^2\right).
\end{aligned}$$

La limite de (4.18) lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$  est donné par

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda(1 - \rho)q_1(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}) - \frac{\lambda^2}{2}q_2(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}})^2 + o\left(|1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}|^2\right)}{\lambda q_1 \left[1 + \rho\left(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}\right) + \frac{\lambda^2}{2}v_2\left(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}\right)^2 + o\left(|1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}|^2\right) - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}\right]} \\
&= \frac{-\lambda(1 - \rho)q_1 \frac{it}{\sqrt{\gamma}} - \frac{\lambda^2}{2}q_2\left(\frac{it}{\sqrt{\gamma}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\lambda q_1 \left[-(1 - \rho) \frac{it}{\sqrt{\gamma}} - \frac{\lambda^2}{2}v_2\left(\frac{it}{\sqrt{\gamma}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\right]} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda(1 - \rho)q_1 + \frac{\lambda^2}{2}q_2 \frac{it}{\sqrt{\gamma}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\lambda q_1 \left[(1 - \rho) + \frac{\lambda^2}{2}v_2 \frac{it}{\sqrt{\gamma}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\right]} \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 1 \quad (4.23)$$

Maintenant, nous calculons la limite du deuxième facteur (4.19)

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{h(\theta_1)} \left\{ 1 + \theta_1 \frac{h\left(\lambda(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}) + \theta_1\right) - 1}{\lambda(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}) + \theta_1} \right\} = 1. \quad (4.24)$$

Maintenant, considérons le troisième facteur (4.20). Nous pouvons transformer l'argument de la fonction exponentielle comme suit

$$\begin{aligned}
& \exp \left( \frac{1}{\nu} \int_1^{e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}} \left( \frac{\lambda(1-v(\lambda-\lambda y)) + \gamma(1-w(\lambda-\lambda y))}{v(\lambda-\lambda y) - y} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\theta_0(1-r_0(\lambda-\lambda y)) + \delta(1-g(\lambda-\lambda y))}{v(\lambda-\lambda y) - y} \right) dy - it \frac{\lambda w_1}{\nu(1-\rho)} \sqrt{\gamma} \right) \\
= & \exp \left( \frac{\lambda \gamma w_1}{(1-\rho)} \frac{e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} - 1 - \frac{it}{\sqrt{\gamma}}}{\nu} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\nu} \int_1^{e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}} \frac{\lambda(1-v(\lambda-\lambda y)) + \theta_0(1-r_0(\lambda-\lambda y)) + \delta(1-g(\lambda-\lambda y))}{v(\lambda-\lambda y) - y} dy \right. \\
& \quad \left. + \frac{\gamma}{\nu} \int_1^{e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}} \left( \frac{(1-w(\lambda-\lambda y))}{v(\lambda-\lambda y) - y} - it \frac{\lambda w_1}{(1-\rho)} \right) dy \right).
\end{aligned}$$

Dans cette formule, la limite  $\gamma \rightarrow \infty$  du premier terme est donnée par

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\lambda \gamma w_1}{(1-\rho)} \frac{e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} - 1 - \frac{it}{\sqrt{\gamma}}}{\nu} &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\lambda \gamma w_1 + \frac{-\frac{1}{2}t^2}{\gamma} + o(\frac{1}{\gamma})}{(1-\rho)\nu} \\
&= -\frac{\lambda w_1}{2(1-\rho)\nu} t^2.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

La limite du second terme est donnée par

$$\frac{1}{\nu} \int_1^{e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}} \frac{\lambda(1-v(\lambda-\lambda y)) + \theta_0(1-r_0(\lambda-\lambda y)) + \delta(1-g(\lambda-\lambda y))}{v(\lambda-\lambda y) - y} dy \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 0. \tag{4.26}$$

Posons

$$B(\gamma) = \int_1^{e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}} \left( \frac{(1-w(\lambda-\lambda y))}{v(\lambda-\lambda y) - y} - \frac{\lambda w_1}{(1-\rho)} \right) dy.$$

Pour cette fonction, nous avons  $B(\infty) = 0$ ,

$$\begin{aligned}
B'(\gamma) &= \frac{it}{2} \sqrt{\gamma} e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \left( \frac{(1-w)\left(\lambda - \lambda e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}\right)}{v\left(\lambda - \lambda e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}\right) - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}} - \frac{\lambda w_1}{(1-\rho)} \right) \\
&= \frac{it}{2} \sqrt{\gamma} e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \frac{\frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{\lambda w_1}{1-\rho} v_2 + w_2\right) \left(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}\right)^2 + o\left(\left(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}\right)^2\right)}{(1-\rho)\left(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}\right) + \frac{\lambda^2}{2} v_2 \left(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}\right)^2 + o\left(\left(1 - e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}\right)^2\right)} \\
&= \frac{it}{2} \sqrt{\gamma} e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \frac{\frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{\lambda w_1}{1-\rho} v_2 + w_2\right) \left(\frac{it}{\sqrt{\gamma}} + o(\sqrt{\gamma})\right)^2 + o\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{(1-\rho) \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{-it}{\sqrt{\gamma}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\right) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right)} \\
&= -e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}} \frac{\left(\lambda^3 w_1 v_2 + \lambda^2 (1-\rho) w_2\right) \frac{1}{\gamma} + o\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{4(1-\rho)^2 \frac{1}{\gamma} + o\left(\frac{1}{\gamma}\right)} t^2.
\end{aligned}$$

On prend la limite lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , on obtient

$$B'(\infty) = -\frac{\lambda^3 w_1 v_2 + \lambda^2 (1-\rho) w_2}{4(1-\rho)^2} t^2.$$

On utilise le développement de Taylor pour  $B(\gamma)$

$$B(\gamma) = B(\infty) + \frac{1}{\gamma} B'(\infty) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right),$$

par conséquent,

$$\gamma B(\gamma) = B'(\infty) + o(1) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} -\frac{\lambda^3 w_1 v_2 + \lambda^2 (1-\rho) w_2}{4(1-\rho)^2} t^2. \quad (4.27)$$

Substituer maintenant (4.25)-(4.27) dans (4.20), on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \exp \left( \frac{1}{\nu} \int_1^{e^{\frac{it}{\sqrt{\gamma}}}} \left( \frac{\lambda(1-v(\lambda-\lambda y)) + \gamma(1-w(\lambda-\lambda y))}{v(\lambda-\lambda y) - y} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\theta_0(1-r_0(\lambda-\lambda y)) + \delta(1-g(\lambda-\lambda y))}{v(\lambda-\lambda y) - y} \right) dy - it \frac{\lambda \gamma w_1}{\nu(1-\rho)} \sqrt{\gamma} \right) \\
&= \exp \left[ -\frac{t^2}{2} \frac{\lambda^3 w_1 v_2 + \lambda^2 w_2 (1-\rho) + 2\lambda(1-\rho) w_1}{2(1-\rho)^2} \right]. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Appliquons (4.23), (4.24) et (4.28) dans (4.18)-(4.20), nous obtenons le résultat requis.

## 4.5 Illustrations numériques

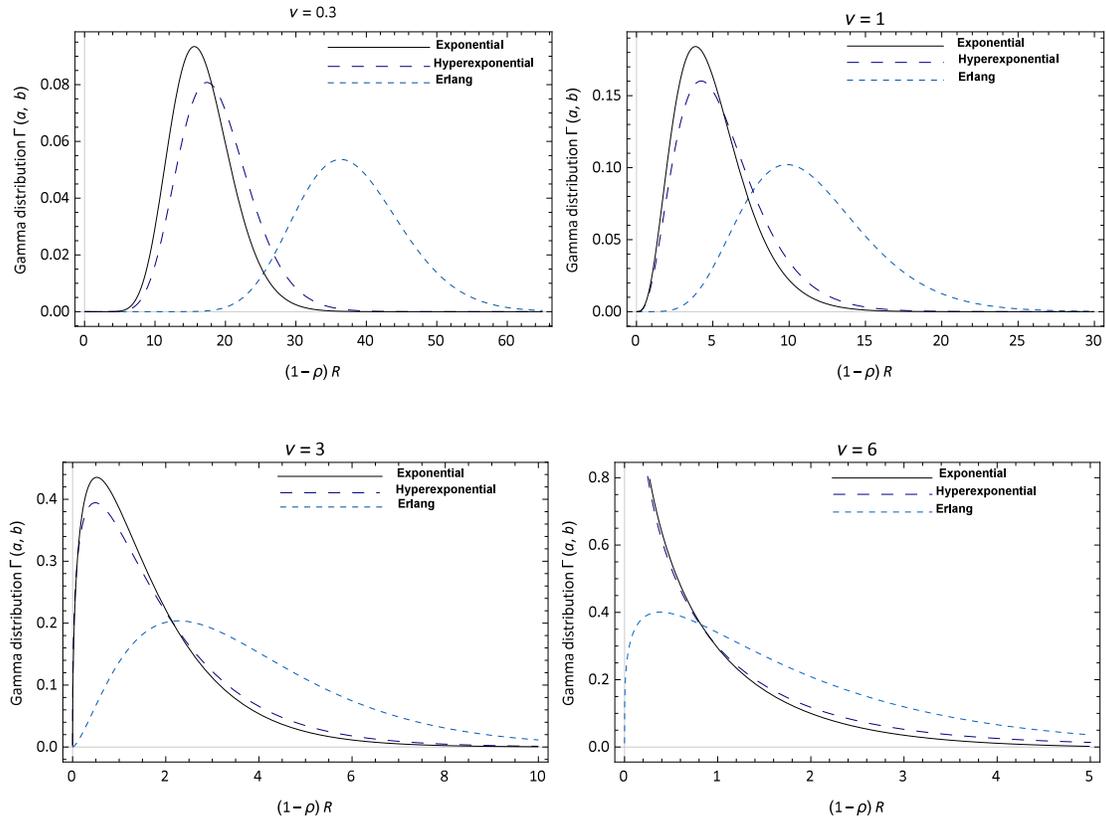
Dans cette section, nous illustrons la performance de la méthode d'approximation présentée dans le chapitre 4 par le biais de méthodes numériques. Les deux premiers moments des durées de maintenance (correctif et préventif) sont fixés comme suit :  $r_{11} = 1$ ,  $r_{01} = 1$ ,  $g_1 = 1$ ,  $r_{12} = 2$ ,  $r_{02} = 2$ ,  $g_2 = 2$ . La durée de service des clients impatientes est supposée être exponentielle avec paramètre 2. Dans la figure 1, trois distributions sont considérées pour la durée de service des clients persistants : distribution exponentielle avec paramètre 2, distribution hyperexponentielle avec moyenne 0.5 dont la fonction de densité est  $h(x) = \frac{8}{3}e^{-4x} + \frac{1}{3}e^{-x}$ ,  $x > 0$  et Erlang d'ordre deux avec moyenne 0.5.

Dans la figure 1, nous traçons la distribution gamma  $\Gamma(a, b)$  qui est obtenue à partir du théorème 4.1 pour différentes valeurs de taux de rappel  $\nu$ . Nous observons que cette distribution converge vers une loi exponentielle de paramètre  $b = \frac{2(v_1)^2}{v_2}$  lorsque le taux de rappel  $\nu$  augmente, mais cette convergence est plus rapide lorsque la durée de service des clients persistants suit la loi exponentielle.

Dans les tables 1 – 2, nous examinons l'impact du taux de maintenance préventive  $\delta$  et du taux de panne passive  $\theta_0$  sur la performance de l'approximation dans le cas taux de rappel faible ( $\nu \rightarrow 0$ ) (théorème 4.2). Nous concluons que l'augmentation du taux de maintenance préventive  $\delta$  et le taux de panne passive  $\theta_0$  n'ont pas une influence sur la performance de l'approximation.

Dans les tables 3 – 4, nous examinons l'impact du taux de maintenance préventive  $\delta$  et du taux de panne passive  $\theta_0$  sur la performance de l'approximation obtenu dans le cas de la connexion instantanée des clients impatientes ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) (théorème 4.3). A partir des tableaux 3-4, on constate que l'augmentation du taux

maintenance préventive  $\delta$ , ainsi que l'augmentation du taux de panne passive  $\theta_0$  détériore la précision de l'approximation. Nous concluons que notre approximation est de qualité lorsque le taux de maintenance préventive  $\delta$  et le taux de panne passive  $\theta_0$  sont faibles.



**FIGURE 4.1** – Effet du taux de rappel sur la distribution Gamma  $\Gamma(a, b)$  ( $\gamma = \delta = \theta_0 = 1, \theta_1 = 0.5$ ).

**TABLE 4.1** – L’impact  $\delta$  sur la performance de l’approximation obtenu dans le cas d’un taux de rappel faible. ( $\gamma = \delta = \theta_0 = 1, \theta_1 = 0.5, \lambda = 1$ ).

		Erlang		Exponential		Hyperexponential	
$\delta$	$\nu$	Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$	Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$	Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$
10	0.3	72.780	70.910	204.737	198.333	157.285	152.238
	0.1	214.602	212.732	601.404	595.34	461.761	456.714
	0.01	2129.19	2127.32	15956.4	5951	4572.19	4567.14
5	0.3	42.033	40.2314	121.337	115.22	87.952	92.931
	0.1	122.496	120.697	351.337	345.00	268.857	263.857
	0.01	1208.74	1206.94	3456.34	3450	2643.55	2638.57
0.5	0.3	14.138	12.62	46.053	40.44	34.791	30.095
	0.1	39.378	37.859	126.044	120	94.982	90.285
	0.01	380.118	378.599	1206.05	1200	907.554	902.554

**TABLE 4.2** – L’impact de  $\theta_0$  sur la performance de l’approximation obtenu dans le cas d’un taux de rappel faible. ( $\gamma = \delta = \theta_0 = 1, \theta_1 = 0.5, \lambda = 1$ ).

		Erlang		Exponential		Hyperexponential	
$\theta_0$	$\nu$	Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$	Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$	Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$
10	0.3	72.780	70.910	204.737	198.333	157.285	152.238
	0.1	214.602	212.732	601.404	595.34	461.761	456.714
	0.01	2129.19	2127.32	15956.4	5951	4572.19	4567.14
5	0.3	42.033	40.2314	121.337	115.22	87.952	92.931
	0.1	122.496	120.697	351.337	345.00	268.857	263.857
	0.01	1208.74	1206.94	3456.34	3450	2643.55	2638.57
0.5	0.3	14.138	12.62	46.053	40.44	34.791	30.095
	0.1	39.378	37.859	126.044	120	94.982	90.285
	0.01	380.118	378.599	1206.05	1200	907.554	902.554

**TABLE 4.3** – L’impact de  $\delta$  sur la performance de l’approximation obtenu dans le cas de connexion instantanée des clients impatientes. ( $\theta_0 = 1, \theta_1 = 0.5, \lambda = 0.5$ ).

$\delta$	$\gamma$	Erlang		Exponential		Hyperexponential	
		Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$	Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$	Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$
10	10	12.509	4.198	18.258	6.224	16.972	5.586
	30	20.595	12.595	30.234	18.22	28.120	16.758
	100	50.25	41.98	72.213	60.342	67.203	55.862
5	10	8.980	4.198	16.225	6.224	12.287	5.586
	30	17.363	12.595	25.213	18.22	23.445	16.758
	100	46.743	41.98	67.204	60.342	62.539	55.862
0.5	10	5.773	4.198	8.669	6.224	8.039	5.586
	30	14.187	12.595	20.68	18.22	19.228	16.758
	100	43.58	41.98	62.695	60.342	58.34	55.862

**TABLE 4.4** – L’impact de  $\theta_0$  sur la performance de l’approximation obtenu dans le cas de connexion instantanée des clients impatientes. ( $\theta_0 = 1, \theta_1 = 0.5, \lambda = 0.5$ ).

$\theta_0$	$\gamma$	Erlang		Exponential		Hyperexponential	
		Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$	Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$	Exact $\mathbf{E}[R]$	Appr $\mathbf{E}[R]$
10	10	12.509	4.198	18.258	6.224	16.972	5.586
	30	20.595	12.595	30.234	18.22	28.120	16.758
	100	50.25	41.98	72.213	60.342	67.203	55.862
5	10	8.980	4.198	16.225	6.224	12.287	5.586
	30	17.363	12.595	25.213	18.22	23.445	16.758
	100	46.743	41.98	67.204	60.342	62.539	55.862
0.5	10	5.773	4.198	8.669	6.224	8.039	5.586
	30	14.187	12.595	20.68	18.22	19.228	16.758
	100	43.58	41.98	62.695	60.342	58.34	55.862

# Conclusion générale

Dans ce travail nous nous sommes intéressés aux systèmes de files d'attente de type M/G/1 avec rappels, non fiable et clients impatientes.

Nous avons réalisé l'analyse stochastique complète du modèle M/G/1 avec rappels, non fiable et clients impatientes, à cet effet nous avons donné la condition nécessaire et suffisante d'ergodicité dans laquelle le système sera stable, la fonction génératrice du nombre de clients en orbite a été obtenue et nous avons donné des résultats sur des mesures de performance d'intérêt qui peuvent être utiles pour les praticiens. Dans certains cas extrêmes, où la longueur de la file d'attente tend vers l'infini, nous avons proposé des techniques de mise à l'échelle appropriées pour obtenir des expressions simples de la distribution marginale de la taille de l'orbite. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant.

Condition d'échelle	L'échelle	Distribution
$\rho \rightarrow 1 - 0$	$(1 - \rho)R$	distribution Gamma
$\nu \rightarrow 0$	$\sqrt{\nu}R - \frac{\lambda(\rho + \gamma w_1 + \theta_0 r_{01} + \delta g_1)}{\sqrt{\nu(1-\rho)}}$	distribution Gaussienne
$\gamma \rightarrow \infty$	$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}R - \frac{\lambda w_1}{\nu(1-\rho)}\sqrt{\gamma}$	distribution Gaussienne

Ces résultats sont aussi étayés par des simulations numériques. Le travail que nous avons présenté dans cette thèse nous a permis d'envisager plusieurs axes de recherche, nous citons quelques uns ci-dessous :

- Il serait intéressant de considérer une structure plus complexe en prenant une distribution générale pour les temps de rappels.
- Il serait intéressant d'estimer la distribution stationnaire de l'état du système, et ceci à l'aide de l'approche basée sur le principe du maximum d'entropie.

# Annexe A

## Convergence uniforme

Pour permettre l'échange entre la limite et l'intégration, la convergence uniforme est nécessaire. A cette fin, nous prouvons les deux lemmes suivants.

**Lemme A.1** *Si  $v_2 < \infty$  alors*

$$v(\varepsilon s) = 1 - v_1 \varepsilon s + \frac{v_2}{2} \varepsilon^2 s^2 + o(\varepsilon^2),$$

*uniformément par rapport à  $s \in [0, M]$ .*

**Preuve** Considérons la fonction

$$\varphi(t) = v(t) - 1 + v_1 t - \frac{v_2}{2} t^2, \quad t \geq 0.$$

Pour démontrer que la convergence est uniforme, il suffit de trouver le majorant de l'ensemble  $\{|\varphi(\varepsilon s)|, s \in [0, M]\}$ , puis de montrer que ce majorant tend vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nous avons

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \beta'''(t) = v'''(t) &= -h''(t + \theta_1) \left( \theta_1 \frac{r_1(t)}{t + \theta_1} - 1 \right) + 2h'(t + \theta_1) \left( \frac{r_1(t)}{t + \theta_1} - r_1'(t) \right) \\ &+ \left\{ 1 - h(t + \theta_1) \right\} \left( 2 \frac{r_1(t)}{(t + \theta_1)^2} - 2 \frac{r_1'(t)}{t + \theta_1} + r_1''(t) \right). \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace, on obtient que  $\varphi'''(t) = v'''(t) < 0, \forall t > 0$ . Par conséquent, la fonction  $\varphi''(t)$  est décroissante,  $t \geq 0$ . Donc,  $\varphi'(t)$  est décroissante,  $t > 0$ . Ceci implique que  $\varphi(t)$  est décroissante,  $t > 0$ . Alors pour  $t \leq T$ , on a  $\varphi(T) \leq \varphi(t) \leq 0$ . En outre, l'existence de  $v_2$  implique que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t^2} = 0$ . Donc, nous avons

$$M \frac{\beta(\varepsilon M)}{M\varepsilon} \leq s \frac{\beta(\varepsilon s)}{\varepsilon s} \leq 0, \quad s \in [0, M].$$

Comme  $\frac{\beta(\varepsilon M)}{\varepsilon M} \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , alors nous avons  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\beta(\varepsilon s)}{\varepsilon} = 0$ . C'est à dire, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  la fonction  $v(\varepsilon s)$  converge uniformément vers  $1 - v_1 \varepsilon s + \frac{v_2}{2} \varepsilon^2 s^2$ ,  $s \in [0, M]$ .

**Lemme A.2** *Si  $\max \{r_{01}, w_1, g_1\} < \infty$  alors*

$$w(\varepsilon s) = 1 - w_1 \varepsilon s + o(\varepsilon),$$

$$r_0(\varepsilon s) = 1 - r_{01} \varepsilon s + o(\varepsilon),$$

$$g(\varepsilon s) = 1 - g_1 \varepsilon s + o(\varepsilon),$$

*uniformément par rapport à  $s \in [0, M]$ .*

**Preuve** Considérons la fonction

$$\beta(t) = w(t) - 1 + w_1 t, \quad t \geq 0.$$

Nous avons

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \beta''(t) = w''(t) &= -f''(t + \theta_1) \left( \theta_1 \frac{r_1(t)}{t + \theta_1} - 1 \right) + 2f'(t + \theta_1) \left( \frac{r_1(t)}{t + \theta_1} - r_1'(t) \right) \\ &+ \{1 - f(t + \theta_1)\} \left( 2 \frac{r_1(t)}{(t + \theta_1)^2} - 2 \frac{r_1'(t)}{t + \theta_1} + r_1''(t) \right). \end{aligned}$$

Encore, en utilisant les propriétés de la transformée de Laplace, on obtient que  $\beta''(t) = w''(t) > 0, \forall t > 0$ . Par conséquent, la fonction  $\beta'(t)$  est croissante,  $t \geq 0$ . Donc,  $\beta(t)$  est croissante. Alors pour  $t \leq T$ , on a  $0 \leq \beta(t) \leq \beta(T)$ . En outre, l'existence de  $w_1$  implique que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\beta(t)}{t} = 0$ . Donc, nous avons

$$0 \leq s \frac{\beta(\varepsilon s)}{s\varepsilon} \leq M \frac{\beta(\varepsilon M)}{\varepsilon M}, \quad s \in [0, M].$$

Comme  $\frac{\beta(\varepsilon M)}{\varepsilon M} \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , alors nous avons  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\beta(\varepsilon s)}{\varepsilon} = 0$ . C'est à dire, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  la fonction  $w(\varepsilon s)$  converge uniformément vers  $1 - w_1 \varepsilon s$ ,  $s \in [0, M]$ .

# Bibliographie

- [1] Aissani, A. (1988). On the M/G/1/1 queueing system with repeated orders and unreliable server. *Journal of Technology*, 6, 98-123.
- [2] Aissani, A. (1991). Influence des pannes des serveurs sur la distribution du nombre de clients en orbite et dans un système M/G/1/0 avec rappels. *Technologies Avancées*, 2, 23-38.
- [3] Aissani, A. (1994). Survey on Retrial Queueing Models. *Actes des Journées Statistiques Appliquées*, U.S.T.H.B., Alger, 1-11.
- [4] Aissani, A. and Artalejo, J. R. (1998). On the single server retrial queue subject to breakdowns. *Queueing Systems : Theory and Applications*, 30, 309-321.
- [5] Aissani, A., Lounis, F., Hamadouche, D. and Taleb, S. (2018). Analysis of Customers' Impatience in a Repairable Retrial Queue under Postponed Preventive Actions. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*. doi :10.1080/01966324.2018.1486763.
- [6] Anisimov, A. and Kurtulush, M. (2001). Some Markovian queueing retrial system under light-traffic conditions, *Cybernetics and Systems Analysis*, 37, 876- 887.
- [7] Anisimov, A. (1999). Switching stochastic models and applications in retrial queues, *Top*, 7, 169-186.

- [8] Arrar, N. K., Djellab, N. V. and Baillon, J. B. (2012). On the asymptotic behaviour of M/G/1 retrial queues with batch arrivals and impatience phenomenon. *Mathematical and Computer Modelling*, 55, 654-665.
- [9] Artalejo, J. R. (2010). Accessible bibliography on retrial queues : Progress in 2000-2009. *Mathematical and Computer Modelling*, 51, 1071-1081.
- [10] Artalejo, J. R. (1998). Retrial queues with a finite number of sources. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 35(3) :503-525.
- [11] Artalejo, J. R. (1999). Retrial Queueing systems, *Mathematical and Computer Modelling* 30, No. 3-4, 1-228.
- [12] Artalejo, J. R. (2006). Algorithmic Methods in Retrial Queues. *Annals of Operation Research*, 141,1-301.
- [13] Artalejo, J. R. and Choudhury, G. (2004). Steady state analysis of an M/G/1 queue with repeated attempts and two phase service. *Quality Technology and Quantitative Management*, 1(2), 189-199.
- [14] Artalejo, J. R., Dudin, A. N. and Klimenok, V. I. (2001). Stationary analysis of a retrial queue with preemptive repeated attempts. *Operations Research Letters*, 28, 173-180.
- [15] Artalejo, J. R., Economou, A. and Gomez-Corral, A. (2007). Applications of maximum queue lengths to call center management. *Computers and Operations Research*, 34, 983-996.
- [16] Artalejo, J. R. and Lopez-Herrero, M.J. (2007). On the distribution of the number of retrials. *Applied Mathematical Modelling*, 31, 478-489.
- [17] Artalejo, J. R. and Lopez-Herrero, M.J. (2010). Cellular mobile networks with repeated calls operating in random environment. *Computers & Mathematics with Applications*, 37, 1158-1166.

- [18] Artalejo, J. R. and Pla, V. (2009). On the impact of customer balking, impatience and retrials in telecommunication systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 57, 217-229.
- [19] Artalejo, J. R., Rajagopalan, V. and Sivasamy, R. (2000). On finite Markovian queues with repeated attempts. *Investigacion Operativa*, 9, 83-94.
- [20] Awi, F. and So, K. C. (1990). Optimal maintenance policies for single server queueing systems subject to breakdowns. *Operations Research*, 38, 330-343.
- [21] Bhat, U. N. (2008). Introduction to queueing theory : Modelling and analysis in applications. London, UK : Birkhauser.
- [22] Choi, B. D., Shin, Y. W. and Ahn, W. C. (1992). Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. *Queueing Systems 11*, 335-356.
- [23] Cooper, R. B. (1981). Introduction to queueing theory. Amsterdam, Netherlands : Elsevier
- [24] Daigle, J. N. (2005). Queueing theory with applications to packet telecommunication. Boston, MA : Springer.
- [25] Dimitriou, I. (2015). A retrial queue for modelling fault-tolerant systems with check pointing and rollback recovery. *Computers and Industrial Engineering*, 79, 156-167.
- [26] Do, T. V., Takahashi, Y., Yue, W. and Nguyen, V. H. (2016). Queueing theory and network applications : Advances in intelligent systems and computing (pp. 383). Berlin, Germany : Springer.
- [27] Dudin, A. N., Medvediev, G. A. and Melenets, Y. V. (1994), (2010). Practicum on computer in queueing theory (2nd ed., Russian ; 3rd ed., French). Minsk and Algiers : Universitsetkoje Publishing Company and Office of University Publications (OPU).

- [28] Falin, G.I. (1979). A Single-line System with Secondary Orders. *Engineering Cybernetics Review*, 17(2), 76-83.
- [29] Falin, G.I. (1986). Single-line Repeated Orders Queueing Systems. *Mathematische Operationsforschung und Statistik, Optimization*, 5, 649-667.
- [30] Falin, G. I. and Templeton, J. G. (1997). Retrial queues. New Jersey : Chapman and Hill.
- [31] Gaver, D. P. (1962). A waiting line with interrupted service including priorities. *J. Roy. Stat. Soc.*, B25, 73-90.
- [32] Glazebrook, K. D. (1984). Scheduling stochastic jobs on a single machine subject to breakdowns. *Naval Research Logistics Quarterly*, 31, 251-264.
- [33] Gnedenko, B. V. and Kovalenko, I. N. (1989), (1966). Introduction to queueing theory (1st ed. ; 2nd ed.). Moscow, Hauka and Boston, MA : Nauka and Birkhauser.
- [34] Gomez-Corral, A. and Ramalhoto, M. F. (2000). On the waiting time distribution and the busy period of a retrial queue with constant retrial rate. *Stochastic Modelling and Applications*, 3, 37-47.
- [35] Gomez-Corral, A. and Phung-Duc, T. (2016). Retrial queues and related models. *Annals of Operations Research*, 247(1), 1.
- [36] Gupta, D., Günalay, Y. and Srinivasan, M. (2001). The relationship between preventive maintenance and manufacturing system performance. *European Journal of Operational Research*, 132, 146-162.
- [37] Hashida O. and Kawashima, K. (1979). Buffer Behavior with Repeated Calls. *Electronics and Communication in Japan*, 62-B, 27.
- [38] Hieghem, P. V. (2006). Performance analysis of communication networks and systems. New York, NY : Cambridge University Press.

- [39] Hsu, L. F. (1992). Optimal preventive maintenance policies in an M/G/1 queue like production system. *European Journal of Operational Research*, 58, 112-122. [CrossRef](#) [Google Scholar](#)
- [40] Hsu, L. F. (1999). Simultaneous determination of preventive maintenance and replacement policies in a queue like production system with minimal repair. *Reliability Engineering and Systems Safety*, 63, 161-167.
- [41] Hsu, L. F. and Tapiero, C. S. (1987). Maintenance of unreliable M/G/1 queue like job shop. *Queueing Systems*, 2, 333-350.
- [42] Jacob, V. and Krishnamoorthy, A. (2015). Analysis of customer-induced interruption and retrial of interrupted customers. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 34, 343-366.
- [43] Keijzer, F., Mullenders, E., van Reeken, A. and Kleijnen, J.P.C. (1981). Optimization of priority class queues with a computer center case study. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 1, 341-358.
- [44] Kim, J., Kim, B. and Ko, S.S. (2007). Tail Asymptotic for the Queue Size Distribution in an M/G/1 Retrial Queue. *Journal Applied Probability*, 44, 1111-1118.
- [45] Koba, E. V. and Pustovaya, S. V. (2007). Call center as retrial queueing system. *Journal of Automation and Information Sciences*, 39, 37-47.
- [46] Koole, G. and Mandelbaum, A. (2002). Queueing models of call centers : An introduction. *Annals of Operations Research*, 113, 41-59.
- [47] Koyanagi, J. and Kawai, H. (2003). An optimal age maintenance for an M/G/1 queueing system. *Mathematical and computer Modelling*, 38, 1333-1338. Please confirm the inserted volume number for the reference Koyanagi and Kawai (2003).

- [48] Krishnamoorthy, A., Gopakumar, B. and Narayanan, V. C. (2012). A retrial queue with server interruptions, resumption and restart of service. *Operational Research*, 12, 133-149.
- [49] Krishnamoorthy, A., Pramod, P. K. and Chakravarty, S. R. (2014). Queues with interruptions : A survey. *Top*, 22(1), 290-320.
- [50] Kulkarni, V. G. and Choi, B. D. (1990). Retrial queues with server subject to breakdowns and repairs. *Queueing Systems*, 7, 191-208.
- [51] Kulkarni, V. G. and Liang, H. M. (1997). Retrial Queues Revisited. *Frontiers in Queueing (J.H. Dshalov, ed.) CRC Press Boca Raton*, pp 19-34.
- [52] Lounis, F. Hamadouche, D. and Aissani, A. (2018). Approximation of an unreliable M/G/1 retrial queue with impatience. *Proceedings of 12th International Workshop on Retrial Queues and Related Topics*. Tomsk, Russia.
- [53] Medhi, J. (2002). Stochastic models in queueing theory. New York, NY : Academic Press.
- [54] Medvedev, G. A. (1994). Random characteristics in LAN with random access and asymmetric load. *Automatic Control and Computer Science*, 28, 34-41.
- [55] Osaki, S. (1972). An intermittently used system with preventive maintenance. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 15, 102-111.
- [56] Parthasarathy, P. R. and Vasudevant, K. (2010). A single server queue with two types of customers and a gate mechanism. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 30, 331-345.
- [57] Perry, D. and Posner, M. J. M. (2000). A correlated M/G/1 type queue with randomized server repair and maintenance modes. *Operations Research Letters*, 26, 137-147.

- [58] Roszik, J., Sztrik, J. and Kim, C. S. (2005). Retrieval queues in the performance modelling of cellular mobile networks using MOSEL. *International Journal of Simulation* 6, 38-47.
- [59] Sakurai, H. and Phung-Duc, T. Scaling limits for single server retrieval queues with two-way communication. *Annals of Operations Research*, 247(1), (2016), 229-256.
- [60] Sennott, L. I., Humblet, P. A. and Tweedie, R. I. (1983). Mean drifts and non ergodicity of Markov chains. *Operations Research* 31, 783-789.
- [61] Shang, W., Liu, L. and Li, Q. L. (2006). Tail asymptotics for the queue length in an M/G/1 retrieval queue. *Queueing Systems*, 52, 193-198.
- [62] Taleb, S. and Aissani, A. (2010). Unreliable M/G/1 retrieval queue : Monotonicity and comparability. *Queueing Systems*, 64, 227-252.
- [63] Taleb, S. and Aissani, A. (2016). Preventive maintenance in an unreliable M/G/1 retrieval queue with persistent and impatient customers. *Annals of Operations Research*, 247(1), 291-317.
- [64] Templeton, J. G. C. (1999). Retrieval Queues, *Top*, vol. 7, p. 351-353.

## Résumé

Les systèmes d'attente avec rappels sont très utilisés dans la modélisation stochastique des systèmes informatiques et de télécommunications, entre autres. Dans ce travail, on étudie quelques problèmes liés au phénomène de rappels dû à la non fiabilité du serveur qui peut être sujet à des coupures physiques ou des attaques informatiques. Le modèle considéré ici prend en compte la maintenance corrective et préventive. De telles politiques sont très utilisées dans plusieurs situations pratiques comme par exemple dans les systèmes de production ou pour la maintenance des sites web. Nous donnons la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit stable. On obtient la loi de probabilité conjointe de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite et dans le système. Cette distribution est obtenue en termes de transformée de Laplace et de  $z$ -transformée. Nous établissons des résultats sur les mesures de performance d'intérêt qui peuvent être utiles pour les praticiens. Ensuite, nous fournissons une analyse asymptotique de la distribution marginale de la taille de l'orbite dans certaines conditions extrêmes (i) trafic chargé, (ii) taux de rappels faible et (iii) instantanée des clients impatientes. Nous complétons notre travail par des exemples numériques.

**Mots-clés :** Impatience, Laplace et  $z$ -transformée, maintenance, mesures de performance, processus de Markov, comportement asymptotique, rappels, serveur non fiable.

## Abstract

Retrial Queues are useful in the stochastic modeling of computer and telecommunication systems amongst others. In this work, we study some problems connected with retrial phenomena involving the unreliability of the server line which can be subject to physical breakdowns or computer attacks. The model considered here takes into account the corrective and preventive maintenance. Such policies are useful for example in many practical situations as in production systems or for the maintenance of web sites. We give the necessary and sufficient condition for the system to be stable. We obtain the joint probability distribution of the server state and the number of orbiting customers in the system. This distribution is obtained in terms of Laplace and  $z$ -transforms. We establish results on performance measures of interest that may be useful for practitioners. We then derive scaling limits for the queue length distribution under some extreme conditions (i) heavy traffic, (ii) slow retrials and (iii) instantaneous connection to impatient customers. We complete our work with numerical examples.

**Keywords :** Impatience, Laplace and  $z$ -transforms, maintenance, performance measures, Markov process, asymptotic behaviour, retrial queues, unreliable server.