

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



## Mémoire de Fin d'Études

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

# Le mouvement Brownien fractionnaire : simulation et estimation du paramètre de Hurst.

OPTION : Probabilités et Statistique

Présenté par : M<sup>lle</sup> Lounis Amel

Devant le jury d'examen composé de :

Président : M. Graïche Farid	Maître de Conférences B	U.M.M.T.O ;
Examinatrice : Mme Moussouni Samia	Maître Assistant A	U.M.M.T.O ;
Encadrant : Mme Merabet Dalila	Maître de Conférences B	U.M.M.T.O ;

Soutenu le : 02/07/2025

Année Universitaire : 2024–2025

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>4</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>6</b>
<b>1 Rappels sur le mouvement brownien</b>	<b>8</b>
1.1 Généralités sur les processus stochastiques . . . . .	8
1.2 Espérance Conditionnelle . . . . .	10
1.2.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle . . . . .	11
1.3 Martingales . . . . .	11
1.3.1 Filtration et processus adapté . . . . .	12
1.3.2 Martingale à temps discret . . . . .	12
1.3.3 Martingales à temps continu . . . . .	13
1.3.4 Martingale locale et semimartingale . . . . .	13
1.4 Mouvement Brownien . . . . .	14
1.4.1 Propriétés du Mouvement Brownien . . . . .	14
1.5 Variation et Variation quadratique . . . . .	16
1.6 Pont Brownien . . . . .	17
<b>2 Le mouvement brownien fractionnaire (MBF)</b>	<b>18</b>
2.1 Introduction . . . . .	18
2.1.1 Définitions . . . . .	18
2.2 Propriétés principales du MBF . . . . .	20
2.2.1 Auto-similarité . . . . .	20
2.2.2 Accroissements stationnaires . . . . .	21
2.2.3 Inversion temporelle . . . . .	21
2.3 Propriétés de mémoire . . . . .	22
2.4 Étude des propriétés trajectoires . . . . .	24
2.4.1 Continuité Hölderienne . . . . .	24
2.4.2 Non-Différentiabilité . . . . .	24
2.4.3 Variation d'ordre $\alpha$ . . . . .	25
2.5 Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas markovien . . . . .	26
2.6 Variation quadratique et semi-martingales . . . . .	26
<b>3 Simulation des trajectoires du mouvement brownien fractionnaire (MBF)</b>	<b>28</b>
3.1 Introduction . . . . .	28
3.1.1 Méthode de Mandelbrot et Van Ness . . . . .	29

# TABLE DES MATIÈRES

---

3.1.2	Méthode de Cholesky . . . . .	31
3.1.3	Méthode de Wood et Chan : Simulation du bruit gaussien fractionnaire	34
3.2	Principe d'invariance . . . . .	40
3.2.1	Convergence des mesures de probabilité dans les espaces métriques .	40
3.2.2	Compacité relative et équitension . . . . .	42
3.2.3	Convergence des processus dans $D[0, 1]$ . . . . .	42
3.2.4	Convergence faible et équitension . . . . .	43
3.2.5	Principe d'invariance et convergence vers le mouvement brownien (classique et fractionnaire) . . . . .	43
3.2.6	Simulation de trajectoires normalisées $T_n(t) = \frac{1}{n^H} S_n(t)$ . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst</b>	<b>49</b>
4.1	Introduction . . . . .	49
4.2	Densité spectrale . . . . .	50
4.2.1	Densité spectrale d'un BGF . . . . .	50
4.3	Méthode du Périodogramme . . . . .	52
4.4	La méthode de Hurst (R/S) . . . . .	56
4.4.1	Propriétés principales : . . . . .	59
4.5	Estimation par la méthode maximum de vraisemblance (EMV) . . . . .	60
4.5.1	Densité d'un vecteur gaussien multivarié . . . . .	60
4.5.2	Propriétés de l'estimateur de H par la méthode du Maximum de Vraisemblance (EMV) . . . . .	62
	<b>Conclusion générale</b>	<b>66</b>

# Dédicace

## **À mes parents bien-aimés,**

Les mots me manquent pour exprimer toute ma gratitude.  
Merci pour vos sacrifices, vos prières dans le silence de la nuit, votre amour sans limite et votre patience quand j'étais au bord de l'abandon.  
C'est grâce à vous que je suis arrivée ici. Ce mémoire est autant le vôtre que le mien.

## **À mes frères, Youssef et Amar,**

Vous êtes mes piliers. Votre présence discrète mais rassurante, vos encouragements, vos regards pleins de fierté. . .  
Merci pour chaque mot, chaque geste, chaque sourire.

## **À ma douce Aya,**

Ma sœur, mon miroir. Ton soutien, ta tendresse et ton regard toujours bienveillant m'ont portée plus que tu ne le crois.  
Tu es un trésor que la vie m'a offert.

## **À ma grand-mère chérie,**

Ta présence dans ma vie est une bénédiction. Ton amour pur, tes paroles simples mais pleines de sagesse, et ta foi m'ont donné la force de continuer.

## **À mes amies qui sont devenues mes sœurs : Lisa, Randa, Wafa, Soumeya et Amira,**

Merci pour les rires, les larmes, les longues discussions, le soutien sans faille.  
Dans les moments de doute, vous avez su trouver les mots, me relever, me faire croire à nouveau.

## **Et à toute personne qui m'a tendu la main, écoutée, encouragée, même par un simple regard. . .**

Ce travail vous est dédié.

*Avec toute ma reconnaissance, mon amour, et une immense émotion,*

**Amel Lounis**

# Remerciements

Je remercie Dieu Tout-Puissant de m'avoir donné la force et la patience nécessaires pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement **Madame Merabet Dalila**, ma professeure encadrante, pour son accompagnement, ses conseils précieux et sa disponibilité.

Je remercie également tous les enseignants du département de mathématiques, et plus particulièrement ceux de la spécialité *Probabilités et Statistique*, pour leurs efforts, leur encadrement et la qualité de l'enseignement qu'ils nous ont transmis.

Mes remerciements vont aussi à mes camarades du Master 2 pour leur soutien et leur collaboration tout au long de notre parcours.

Merci enfin à toutes les personnes qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'aboutissement de ce mémoire.

# Introduction Générale

Le mouvement brownien occupe une place centrale dans la modélisation des phénomènes aléatoires, tant en mathématiques qu'en physique, finance, biologie ou ingénierie. Il constitue l'un des processus stochastiques les plus étudiés et les plus utilisés. Cependant, malgré sa puissance, le mouvement brownien standard présente certaines limitations. En particulier, il suppose l'indépendance des accroissements et l'absence de mémoire, ce qui le rend parfois inadapté pour décrire certains phénomènes réels caractérisés par une dépendance temporelle à long terme.

C'est dans cette perspective qu'a été introduit le mouvement brownien fractionnaire (MBF), proposé initialement par Kolmogorov [21] et formalisé plus tard par Mandelbrot et Van Ness [24]. Ce processus stochastique, noté  $B_H(t)$ , dépend d'un paramètre  $H \in (0, 1)$ , appelé exposant de Hurst. Ce paramètre contrôle à la fois la régularité des trajectoires et la dépendance temporelle du processus. Ainsi, le MBF permet de mieux représenter des phénomènes réels où les effets de mémoire sont significatifs, comme dans les séries financières [34], les écoulements de rivières [18], certains signaux biologiques [16], ou encore dans le domaine des télécommunications [33].

Le MBF est un processus gaussien centré et auto-similaire, dont les trajectoires sont plus ou moins lisses selon la valeur de  $H$ . On distingue deux comportements principaux :

- Lorsque  $H > 0,5$ , le processus présente une dépendance positive à long terme. On parle alors de processus persistant : une tendance à la hausse est souvent suivie d'une autre hausse, et inversement. Ce comportement est fréquent dans les marchés financiers, le trafic Internet ou les écoulements hydrologiques.
- Lorsque  $H < 0,5$ , le processus est dit anti-persistant : une tendance est plus susceptible d'être suivie d'un changement de direction. Ce type de comportement s'observe dans certains signaux biologiques ou des séries temporelles présentant une forte alternance.

Grâce à ses propriétés particulières, le MBF constitue une généralisation naturelle du mouvement brownien standard, permettant une modélisation plus fidèle des données réelles dans lesquelles la dépendance temporelle joue un rôle significatif.

Le mouvement brownien fractionnaire connaît aujourd'hui un large éventail d'applications dans des domaines scientifiques et techniques variés. Sa capacité à modéliser des phénomènes à mémoire longue et à auto-similarité en fait un outil puissant dans les contextes suivants :

- Finance : modélisation des séries de prix d'actifs financiers présentant une volatilité persistante ; amélioration des modèles de risque et de rendement ; analyse des marchés inefficients.
- Hydrologie et géophysique : représentation des écoulements de rivières, niveaux de nappes phréatiques ou variations climatiques présentant une dépendance à long terme.

## Introduction

---

- Télécommunications : modélisation du trafic Internet et des réseaux de données, qui présentent une auto-similarité et des corrélations à long terme dans le flux de paquets.
- Biologie et médecine : analyse de signaux physiologiques (par exemple le rythme cardiaque ou les signaux EEG), souvent caractérisés par une structure auto-similaire et une dynamique complexe.
- Physique statistique : description de la diffusion anormale, des milieux poreux et des phénomènes critiques, pour lesquels le modèle brownien classique est insuffisant.

Ces nombreuses applications témoignent de la pertinence du MBF pour la modélisation de phénomènes complexes et de l'intérêt croissant qu'il suscite dans les milieux académiques et industriels.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux fondements théoriques et pratiques du mouvement brownien fractionnaire. Notre travail est structuré en quatre chapitres principaux :

- Le chapitre 1 présente des généralités sur les processus stochastiques, l'espérance conditionnelle, les martingales et le mouvement brownien standard.
- Le chapitre 2 présente en détail le mouvement brownien fractionnaire et ses principales propriétés.
- Le chapitre 3 est consacré aux méthodes de simulation du mouvement brownien fractionnaire sous le logiciel R. Nous y présentons également le principe d'invariance et la convergence vers le mouvement brownien, qu'il soit classique ou fractionnaire.
- Le chapitre 4 introduit quelques méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst.

Ce mémoire se conclut par une synthèse des résultats obtenus et une discussion sur les perspectives d'approfondissement possibles.

Ce mémoire se termine par une synthèse des résultats obtenus et une discussion sur les perspectives d'approfondissement futures, notamment l'utilisation du MBF dans des contextes appliqués où la dépendance temporelle joue un rôle crucial.

# Chapitre 1

## Rappels sur le mouvement brownien

### 1.1 Généralités sur les processus stochastiques

La théorie des processus aléatoires concerne l'étude mathématique des phénomènes évoluant dans le temps et dont l'évolution est de caractère aléatoire, c'est-à-dire non prévisible avec certitude.

**Définition 1.1** [7] Un **processus stochastique**  $(Y_t)_{t \in T}$  est une collection de variables aléatoires indexées par un ensemble  $T$  (souvent associé au temps). Selon la nature de  $T$  :

- Si  $T = \mathbb{R}_+$  ou  $T = \mathbb{R}$ , le processus évolue en temps continu.
- Si  $T = \mathbb{N}$  (ou  $T \subset \mathbb{Z}$ ), le processus est dit discret (ou correspond à une série temporelle).
- Si  $T \subset \mathbb{R}^d$ , on parle de champ aléatoire (drap pour  $d=2$ ).

Un processus dépend de deux paramètres :

- Pour un temps fixe  $t \in T$ , la fonction  $\omega \mapsto Y_t(\omega)$  est une variable aléatoire sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .
- Pour un  $\omega \in \Omega$  fixé, la fonction  $t \mapsto Y_t(\omega)$  décrit la trajectoire du processus.

**Définition 1.2 (Modification, version)**

Deux processus stochastiques  $(X_t)_{t \in T}$  et  $(\tilde{X}_t)_{t \in T}$  sont des **versions** ou des **modifications** l'un de l'autre si :

$$\forall t \in T, \quad P(X_t = \tilde{X}_t) = 1.$$

Cela signifie que pour tout instant  $t$ , la probabilité que  $X_t$  et  $\tilde{X}_t$  prennent la même valeur est égale à 1, c'est-à-dire qu'ils coïncident presque sûrement.

Si de plus,

$$P\left(X_t = \tilde{X}_t, \forall t \in T\right) = 1,$$

alors on dit que les deux processus sont **indistinguables**. Cela signifie que les trajectoires des processus sont identiques avec probabilité 1.

**Définition 1.3 (Régularité trajectorielle)** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est  $\alpha$ -Höldérienne ou que  $f$  a une continuité de Hölder, s'il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour tous  $s, t \in I$ ,

$$|f(t) - f(s)| \leq c|t - s|^\alpha.$$

## Chapitre 1 : Rappels sur le Mouvement Brownien

---

Le théorème de Kolmogorov est un résultat fondamental permettant de conclure à la continuité de Hölder (presque sûrement) pour les trajectoires d'un processus stochastique, sous certaines conditions.

**Théorème 1.1 (Théorème de Kolmogorov [21])** Soit  $(X_t)_{t \in I}$  un processus à valeurs réelles pour lequel il existe trois constantes strictement positives  $\gamma$ ,  $c$  et  $\varepsilon$  telles que

$$\mathbb{E} |X_t - X_s|^\gamma \leq c |t - s|^{1+\varepsilon}. \quad (1.1)$$

Alors, pour tout  $\alpha \in \left[0, \frac{\varepsilon}{\gamma}\right]$ , il existe une modification  $\tilde{X}$  de  $X$  dont les trajectoires sont  $\alpha$ -Höldérienne, c'est-à-dire que :

$$\sup_{t \neq s} \frac{|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|}{|t - s|^\alpha} < \infty \quad p.s. \quad (1.2)$$

**Définition 1.4** Un processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est dit **strictement stationnaire** si, pour tout décalage  $h \in \mathbb{Z}$ , la loi conjointe de  $(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_p+h})$  est identique à celle de  $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_p})$ , pour tout choix de points  $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{Z}$ . Autrement dit :

$$(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_p+h}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_p}).$$

Le processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est dit **faiblement stationnaire** (ou **stationnaire au second ordre**) si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) L'espérance est constante :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{E}(Y_t) = \mu.$$

(ii) La variance est constante et finie :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \text{Var}(Y_t) = \sigma^2 < \infty.$$

La covariance ne dépend que du décalage  $h$  :

$$\forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2, \quad \text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma_h.$$

Le terme  $\gamma_h$  est appelé **l'auto-covariance d'ordre  $h$**  du processus  $Y_t$ .

Un exemple typique de processus stationnaire est le **bruit blanc**, un processus  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  vérifiant :

- $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ ,
- $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$  (constante),
- $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0$  pour tout  $h \neq 0$ .

**Définition 1.5** Un processus  $(Y_t)$  possède des **accroissements stationnaires** si la distribution de la différence  $Y_{t+h} - Y_t$  ne dépend que de  $h$ , et non de  $t$ . En d'autres termes :

$$Y_{t+h} - Y_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_h, \quad \forall t > 0, h > 0.$$

Un processus  $(Y_t)$  est dit à **accroissements indépendants** si, pour tout entier  $p \geq 1$  et toute suite croissante  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p$ , les variables aléatoires suivantes sont mutuellement indépendantes :

$$Y_{t_1}, \quad Y_{t_2} - Y_{t_1}, \quad \dots, \quad Y_{t_p} - Y_{t_{p-1}}.$$

**Définition 1.6 (Représentation causale)**

Un processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est dit **causal** s'il peut être exprimé comme une fonction des valeurs passées d'un autre processus. Cela signifie qu'il existe une suite de coefficients  $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et un bruit blanc  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  tels que :

$$Y_t = \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_i X_{t-i}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, la valeur présente de  $Y_t$  dépend uniquement des valeurs passées de  $X_t$ , garantissant une dépendance unidirectionnelle dans le temps.

**Définition 1.7 (Représentation inversible)** Un processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est dit **inversible** s'il est possible de retrouver le bruit blanc  $(X_t)$  à partir des valeurs passées du processus. En d'autres termes, il existe une suite  $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$X_t = \sum_{i \in \mathbb{N}} \psi_i Y_{t-i}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

L'inversibilité garantit donc que les innovations du processus peuvent être déterminées de manière unique à partir des observations passées de  $Y_t$ .

En particulier, un processus  $X_n$  admet une représentation causale s'il s'écrit sous la forme :

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \epsilon_{n-k},$$

où  $(\epsilon_n)$  est un bruit blanc et  $(a_k)$  une suite de coefficients.

De même, un processus est inversible si l'on peut exprimer  $(\epsilon_n)$  en fonction des valeurs passées de  $(X_n)$  :

$$\epsilon_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X_{n-k},$$

ou  $(b_k)$  est une suite assurant la récupération unique des innovations.

**Définition 1.8** Un processus gaussien  $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est un processus tel que la loi de tout vecteur extrait est gaussienne. Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n, (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \text{ est un vecteur gaussien.}$$

## 1.2 Espérance Conditionnelle

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité et  $\mathcal{F}$  une sous-tribu de  $\mathcal{A}$ , représentant les informations disponibles.

L'estimation d'une variable aléatoire  $X$  sachant une information donnée par une filtration  $(\mathcal{F}_t)$  est souvent réalisée à travers l'espérance conditionnelle. L'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{F}_t$ , notée  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_t)$ , est la meilleure approximation de  $X$  au sens quadratique, donnée par une variable  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Dans le cas particulier où  $\mathcal{F}$  est engendrée par un événement  $A$  de probabilité positive ( $P(A) > 0$ ), on définit l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $A$  par :

$$\mathbb{E}(X | A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{E}(X \cdot \mathbf{1}_A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A X d\mathbb{P}.$$

Cette expression représente la moyenne de  $X$  lorsqu'on sait que l'événement  $A$  s'est produit. Cette définition s'étend ensuite au cas général où  $\mathcal{F}$  est une tribu plus complexe.

**Définition 1.1** Soient  $\mathcal{F}$  une sous-tribu de  $\mathcal{A}$  et  $X$  une v.a intégrable. L'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{F}$  est l'unique variable aléatoire  $\mathcal{F}$ -mesurable vérifiant, pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\int_A \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

### 1.2.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires intégrables, et  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{H}$  deux sous-tribus de  $\mathcal{A}$ , telles que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ .

1. **Linéarité** : Pour  $a, b$  deux constantes,

$$E(aX + bY | \mathcal{F}) = aE(X | \mathcal{F}) + bE(Y | \mathcal{F}).$$

2. **Espérance totale** :

$$E[E(X | \mathcal{F})] = E(X).$$

3. **Multiplication par une variable mesurable** : Si  $X$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable,

$$E(XY | \mathcal{F}) = X E(Y | \mathcal{F}).$$

4. **Conservation de la variable** : Si  $X$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable,

$$E(X | \mathcal{F}) = X.$$

5. **Indépendance** : Si  $X$  est indépendant de  $\mathcal{F}$ ,

$$E(X | \mathcal{F}) = E(X).$$

6. **Itérativité** :

$$E[E(X | \mathcal{F}) | \mathcal{H}] = E[E(X | \mathcal{H}) | \mathcal{F}] = E(X | \mathcal{H}).$$

## 1.3 Martingales

Les martingales viennent à l'origine de la théorie des jeux. On appelle **martingale** une suite de gains (ou pertes) d'un joueur si, en moyenne, il ne gagne ni ne perd au tour suivant, en tenant compte des informations disponibles à ce moment-là. Cela signifie que le jeu est équitable.

Les martingales sont aussi très utiles en mathématiques. Elles possèdent de bonnes propriétés, notamment pour étudier la convergence des suites de variables aléatoires. Ce paragraphe va présenter ces propriétés et leurs applications.

### 1.3.1 Filtration et processus adapté

**Définition 1.1** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Une **filtration**  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  est une famille de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  telle que :

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n.$$

Autrement dit,  $\mathcal{F}_n$  représente l'information disponible à l'instant  $n$ , et cette information ne peut que croître avec le temps.

**Définition 1.2** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On dit que  $(X_n)$  est **adaptée** à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ ,

$$X_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable.}$$

Cela signifie que la valeur de  $X_n$  est déterminée par l'information contenue dans  $\mathcal{F}_n$ .

**Remarque 1.1** Tout processus est toujours adapté à sa filtration naturelle, définie par :

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n).$$

### 1.3.2 Martingale à temps discret

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un processus défini sur un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$ .

On dit que  $(X_n)$  est une **martingale** si les conditions suivantes sont vérifiées :

1.  $X_n$  est intégrable, c'est-à-dire  $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ , pour tout  $n \geq 0$ ,
2.  $(X_n)_{n \geq 0}$  est adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ ,
3.  $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ , presque sûrement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Définition 1.3** Si l'on remplace la condition 3 par

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n \quad (\text{resp. } \geq X_n),$$

alors  $(X_n)$  est appelée **sur-martingale** (resp. **sous-martingale**).

**Remarque 1.2** Une martingale est en moyenne constante, tandis qu'une sur-martingale est en moyenne décroissante et une sous-martingale est en moyenne croissante.

**Définition 1.4** Soit  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une filtration. Une variable aléatoire  $\tau : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est un **temps d'arrêt** par rapport à cette filtration si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\{\tau \leq n\} = \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

**Définition 1.5** Soit  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  une filtration. Une suite  $(H_n)_{n \geq 0}$  est un **processus prévisible** si, pour tout  $n \geq 1$ ,  $H_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable.

**Remarque 1.3** *Un processus est dit adapté s'il est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable pour tout  $n \geq 0$ , c'est-à-dire que la valeur du processus à l'instant  $n$  est connue à l'instant  $n$ . En revanche, un processus est **prévisible** si sa valeur à l'instant  $n$  est déterminée à l'instant  $n - 1$ . Cela signifie que l'on peut « prévoir » sa valeur en connaissant l'information disponible jusqu'à l'instant précédent.*

**Théorème 1.1 (Décomposition de Doob d'une sous-martingale)** *Toute sous-martingale  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se décompose de façon unique sous la forme*

$$X_n = M_n + A_n, \quad (1.5)$$

où :

- $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale,
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un processus croissant prévisible tel que  $A_0 = 0$ .

**Théorème 1.2 (Théorème d'arrêt)**

*Si  $\tau$  est un temps d'arrêt et  $(X_n)$  une martingale, on appelle le processus arrêté à l'instant  $\tau$  la suite aléatoire :*

$$X_n^\tau = X_{\tau \wedge n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

*Le processus arrêté  $(X_n^\tau)_{n \geq 0}$  est une martingale.*

### 1.3.3 Martingales à temps continu

*Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, et soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration sur cet espace. Un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , intégrable et adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , est :*

- dit martingale si, pour tout  $0 \leq s \leq t$ , on a  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ ,
- dit sous-martingale si  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$ ,
- dit sur-martingale si  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$ .

**Remarque 1.4** *Toutes les propriétés vues en temps discret demeurent vraies en temps continu après le remplacement de  $n \in \mathbb{N}$  par  $t \in [0, +\infty[$ .*

### 1.3.4 Martingale locale et semimartingale

**Définition 1.6** *Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique, on dit que  $X$  est une martingale locale continue s'il existe une suite croissante  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de temps d'arrêt vérifiant*

$$\tau_n \rightarrow \infty \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

*telle que le processus arrêté  $(X^{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale uniformément intégrable.*

**Définition 1.7** *Un processus stochastique  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  est appelé une **semimartingale continue** s'il peut se décomposer sous la forme :*

$$X_t = M_t + A_t,$$

*où  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale locale continue, et  $(A_t)_{t \geq 0}$  un processus à variation finie.*

### 1.4 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien a été observé pour la première fois par Robert Brown en 1828, lorsqu'il remarqua le déplacement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau.

Par la suite, en 1877, Delsaux expliqua ces changements incessants de direction par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau, mettant ainsi en évidence l'origine physique de ce phénomène.

En 1900, Louis Bachelier fit un pas de plus en analysant le caractère « markovien » du mouvement brownien dans le cadre de l'étude des fluctuations des cours de la Bourse, établissant ainsi un lien entre ce phénomène physique et la théorie des probabilités.

Quelques années plus tard, en 1905, Albert Einstein détermina la densité de transition du mouvement brownien en utilisant l'équation de la chaleur, reliant ainsi ce phénomène aux équations aux dérivées partielles de type parabolique.

Cette même année, Marian Smoluchowski décrivit le mouvement brownien comme une limite de promenades aléatoires, renforçant ainsi son interprétation probabiliste.

Enfin, en 1923, Norbert Wiener réalisa la première étude mathématique rigoureuse du mouvement brownien et en démontra l'existence formelle. Plus tard, en 1948, Paul Lévy approfondit cette analyse en s'intéressant aux propriétés fines des trajectoires du mouvement brownien, contribuant ainsi à une meilleure compréhension de ce processus stochastique fondamental.

**Définition 1.1** *Pour des constantes  $\mu$  et  $\sigma^2$  fixées, il existe un processus gaussien  $(X_t)_{t \geq 0}$  tel que :*

$$\begin{aligned} E(X_t) &= t\mu, \\ \text{Cov}(X_s, X_t) &= \Gamma(s, t) = \sigma^2(s \wedge t), \quad \forall s, t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

*Tout processus de cette famille est dit mouvement brownien. En posant*

$$Y_t = \frac{X_t - \mu t}{\sigma},$$

*on obtient :*

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= 0, \\ \Gamma(s, t) &= s \wedge t, \quad \forall s, t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

*Le processus  $(Y_t)$  ainsi obtenu est appelé mouvement brownien canonique ou standard.*

**Remarque 1.1** *Le mouvement brownien est également appelé processus de Wiener.*

#### 1.4.1 Propriétés du Mouvement Brownien

- **Indépendance et stationnarité des accroissements** Le mouvement brownien  $(X_t)_{t \geq 0}$  possède les deux propriétés suivantes :

- **Accroissements indépendants** : Pour toute suite de temps

$$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \quad (n \geq 2),$$

les variables aléatoires

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \quad X_{t_3} - X_{t_2}, \quad \dots, \quad X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

- **Accroissements stationnaires** : La loi de l'accroissement

$$X_{t+s} - X_t$$

ne dépend que de  $s$  et non du temps  $t$ .

- **Régularité trajectorielle**

**Proposition 1.1** *Le mouvement brownien  $(X_t)_{t \geq 0}$  a des trajectoires p.s. localement Höldériennes de tout ordre  $\delta \in ]0, \frac{1}{2}[$ . En particulier, le MB admet donc une modification à trajectoires continues.*

*Dans la suite, on définira un MB (standard) qu'on notera  $B_t$  comme étant un processus gaussien. à accroissements indépendants et stationnaires et à trajectoires continues,  $\gamma$ -Höldériennes pour tout  $\gamma \in ]0, \frac{1}{2}[$ .*

*Notons :  $B_0 = 0$  p.s. (car la loi de  $B_0$  est  $\mathcal{N}(0, 0)$ ) et  $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$  car  $\mathbb{E}(B_t) = 0$  et  $\text{Var}(B_t) = T(t, t) = t$ .*

- **Mesurabilité**

L'application

$$B : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, t) \mapsto B_t(\omega)$$

est mesurable pour la  $\sigma$ -algèbre produit  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$  et la tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

- **Invariance du mouvement brownien**

Si  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien, alors les processus suivants sont aussi des mouvements browniens :

- $X(t) = |B_t|$  (mouvement brownien réfléchi à l'origine).
- Pour tout  $t \geq 0$ , le processus  $(B_{t+s} - B_t)_{s \geq 0}$  est un mouvement brownien standard, indépendant de  $\{B_u\}_{u < t}$ .
- $(-B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien (symétrie).
- Pour tout  $c > 0$ , le processus

$$\left( \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} \right)_{t \geq 0}$$

est également un mouvement brownien standard (autosimilarité).

- Le processus

$$G_t = e^{B_t}, \quad t \geq 0,$$

est appelé mouvement brownien géométrique.

- Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard. Pour  $t > 0$ , on définit le processus  $\tilde{B}_t$  par

$$\tilde{B}_t = t B_{1/t}, \quad \text{pour } t > 0, \quad \tilde{B}_0 = 0.$$

Alors, le processus  $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$  est également un mouvement brownien standard.

• **Propriété de Markov**

Le mouvement brownien est un processus de Markov, c'est-à-dire que pour tout  $t \leq s$  et pour tout ensemble borélien  $A \subset \mathbb{R}$ ,

$$P(B_s \in A \mid \mathcal{F}_t) = P(B_s \in A \mid B_t),$$

où  $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_u : u \leq t\}$ . Propriété de Markov forte Soit  $\tau$  un temps d'arrêt à valeurs finies. On a alors :

$$\mathbb{E}[f(B_{\tau+s}) \mid \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[f(B_{\tau+s}) \mid B_\tau].$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt fini  $\tau$ , le processus défini par

$$W_t = B_{t+\tau} - B_\tau, \quad t \geq 0,$$

est un mouvement brownien indépendant de  $\mathcal{F}_\tau$ .

• **Propriété de martingale**

Pour le mouvement brownien  $(B_t)$ , les processus suivants sont des martingales [20] :

- $(B_t)$ ,
- $(B_t^2 - t)$ ,
- $\left(\exp\left(aB_t - \frac{1}{2}a^2t\right)\right)$  pour tout  $a > 0$ .

• **Irrégularité des trajectoires**

Bien que les trajectoires du mouvement brownien soient  $\gamma$ -höldériennes pour tout  $\gamma \in ]0, \frac{1}{2}[$ , il est démontré que, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , la trajectoire  $t \mapsto B_t(\omega)$  n'est nulle part  $\gamma$ -höldérienne pour  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ . Par conséquent :

1. Presque toute trajectoire est nulle part dérivable.
2. Presque toute trajectoire présente une variation non bornée.

## 1.5 Variation et Variation quadratique

**Définition 1.1 (Variation d'ordre  $p$ )** Soit  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$  un processus stochastique et soit  $\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k(n)}^n = T\}$  une suite de partitions de l'intervalle  $[0, T]$  dont le pas tend vers zéro :  $|\pi_n| = \max_i(t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

La variation d'ordre  $p > 0$  de  $X$  sur  $[0, T]$  est définie par :

$$V_n^{(p)}(X) = \sum_{i=1}^{k(n)} |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}|^p. \tag{1.9}$$

Si cette somme converge lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on dit que le processus a une variation d'ordre  $p$  finie.

**Définition 1.2 (Variation quadratique)** Le cas particulier  $p = 2$  est appelé **variation quadratique**. Si la suite

$$V_n^{(2)}(X) = \sum_{i=1}^{k(n)} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2. \tag{1.10}$$

converge (au sens presque sûr ou  $L^2$ ), alors la limite est appelée **variation quadratique** de  $X$  sur  $[0, T]$ , et elle est notée  $[X]_T$ .

**Proposition 1.1** Soit  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard. Alors :

1. La variation quadratique de  $B$  sur  $[0, t]$  existe et est égale à :

$$[B]_t = t \quad \text{presque sûrement.}$$

2. Le mouvement brownien n'est pas à variation bornée, c'est-à-dire que sa variation d'ordre 1 est infinie :

$$\sum_{i=1}^{k(n)} |B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}| \xrightarrow{p.s.} +\infty.$$

## 1.6 Pont Brownien

Le pont brownien est un processus gaussien  $(X_t)$  centré défini sur l'intervalle  $T = [0, 1]$  et caractérisé par la covariance

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = s(1-t), \quad \forall s \leq t.$$

On peut définir un pont brownien  $(X_t)_{t \in [0,1]}$  à partir d'un mouvement brownien standard

$$X_t = B_t - tB_1.$$

### Remarque 1.6.1

1. Puisque  $X_1 = 0$  (p.s.), toutes les trajectoires du pont brownien commencent en 0 au temps  $t = 0$  et reviennent en 0 au temps  $t = 1$ .
2. On peut définir le pont brownien entre 0 et une valeur  $y \in \mathbb{R}$  en posant, pour  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$X_t^y = B_t - t(B_1 - y) = X_t + ty,$$

où  $X_t$  est pont brownien standard (allant de 0 à 0). Ce processus est appelé *pont brownien fractionnaire*.

3. Le processus  $X = (X_t)$  partage pratiquement les mêmes propriétés que le mouvement brownien standard.

# Chapitre 2

## Le mouvement brownien fractionnaire (MBF)

### 2.1 Introduction

Le mouvement brownien fractionnaire (MBF) se distingue nettement du mouvement brownien classique, des semi-martingales et d'autres processus probabilistes usuels. Il s'agit d'un processus gaussien centré, dont les incréments sont stationnaires et présentent une mémoire moyenne ou longue. Cette caractéristique le différencie fondamentalement des martingales et des processus markoviens. Ce chapitre explore le MBF et ses principales propriétés.

Les travaux de Harold Edwin Hurst (1880-1978) [18] sur les variations du niveau du Nil ont mis en évidence une dépendance à long terme, menant au développement de méthodes spécifiques pour la caractériser. Plus tard, Benoît Mandelbrot [24] a approfondi cette notion, notamment en finance. En 1968, il a proposé un modèle gaussien dont les accroissements sont corrélés sur le long terme : le mouvement brownien fractionnaire. Bien que cette idée ait été initialement évoquée par Kolmogorov dans les années 1940, c'est Mandelbrot qui en a précisé les propriétés essentielles.

Aujourd'hui, le MBF suscite un intérêt croissant dans de nombreux domaines, car il dépasse certaines limites des modèles classiques en s'affranchissant de l'hypothèse de Markov et de l'indépendance des accroissements. Il trouve notamment des applications dans des domaines variés comme la finance (modélisation de séries financières à volatilité persistante), l'hydrologie (analyse des débits de rivières), les télécommunications (trafic réseau à structure auto-similaire), la biologie (modélisation de signaux physiologiques), ou encore l'économie (analyse de séries macroéconomiques persistantes).

#### 2.1.1 Définitions

**Définition 2.1** [26] *Le mouvement brownien fractionnaire avec un paramètre  $H$  appartenant à l'intervalle  $]0, 1[$  est un processus gaussien réel centré, noté*

$$B^H = \{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}.$$

*défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et qui satisfait les propriétés suivantes :*

- $B_0^H = 0$  presque sûrement.

- L'espérance du carré de  $B_t^H$  est donnée par

$$\mathbb{E}[(B_t^H)^2] = |t|^{2H}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Définition 2.2** Le paramètre  $H$  est appelé paramètre de Hurst.

**Proposition 2.1** Le mouvement brownien fractionnaire admet une fonction de covariance  $R_H$ , définie pour  $(t, s) \in \mathbb{R}^2$  par :

$$R_H(t, s) = \frac{1}{2} \left( |s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H} \right). \quad (2.1)$$

Cette fonction caractérise la dépendance temporelle du processus.

**Preuve.**

On démontre cette propriété en développant l'espérance du carré de la différence entre deux points du processus :

$$\mathbb{E}[(B_t^H - B_s^H)^2] = \mathbb{E}[(B_t^H)^2] + \mathbb{E}[(B_s^H)^2] - 2 \mathbb{E}[B_t^H B_s^H]. \quad (2.2)$$

Et comme

$$B_t^H - B_s^H \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_{t-s}^H, \quad (2.3)$$

on obtient finalement :

$$\mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2} \left( |s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H} \right). \quad (2.4)$$

**Proposition 2.2** Soit  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst  $H \in ]0, 1]$ .

1. Si  $H = \frac{1}{2}$ , alors  $B^H$  coïncide avec le mouvement brownien standard.
2. Si  $H = 1$ , alors  $B_t^H = t B_1^H$  presque sûrement pour tout  $t > 0$ .

**Preuve.**

1. On constate immédiatement que la covariance de  $B_t^{1/2}$  se réduit à

$$(s, t) \mapsto s \wedge t,$$

ce qui correspond à celle d'un mouvement brownien classique.

2. Lorsque  $H = 1$ , pour tout  $t > 0$ , on calcule

$$\mathbb{E}[(B_t^H - t B_1^H)^2] = \mathbb{E}[(B_t^H)^2] - 2t \mathbb{E}[B_t^H B_1^H] + t^2 \mathbb{E}[(B_1^H)^2]. \quad (2.5)$$

L'expression obtenue se révèle nulle en utilisant la forme explicite de la covariance du mouvement brownien fractionnaire pour  $H = 1$ . On en déduit donc

$$B_t^H = t B_1^H \quad \text{p.s.} \quad (2.6)$$

## 2.2 Propriétés principales du MBF

### 2.2.1 Auto-similarité

**Définition 2.1** Un processus  $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$  est dit **auto-similaire d'indice**  $\beta > 0$  si, pour tout  $\alpha > 0$ , les processus  $\{X_{\alpha t}, t \in \mathbb{R}\}$  et  $\{\alpha^\beta X_t, t \in \mathbb{R}\}$  ont la même loi, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha > 0, \quad \{X_{\alpha t}, t \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\alpha^\beta X_t, t \in \mathbb{R}\}.$$

**Théorème 2.1** [24] Le mouvement brownien fractionnaire  $B_H(t)$  de paramètre  $H$  est **auto-similaire d'ordre**  $H$ , ce qui signifie que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \{B_H(\alpha t), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\alpha^H B_H(t), t \in \mathbb{R}\} \quad (2.7)$$

**Preuve.**

Fixons  $\alpha > 0$ . Il est clair que  $\{B_H(\alpha t), t \in \mathbb{R}\}$  et  $\{\alpha^H B_H(t), t \in \mathbb{R}\}$  sont deux processus gaussiens centrés. Il suffit donc de montrer qu'ils ont la même fonction de covariance.

**Covariance de  $B_H(\alpha t)$  :** Par définition du MBF, la fonction de covariance est donnée par :

$$R_H(\alpha t, \alpha s) = \mathbb{E}[B_H(\alpha t)B_H(\alpha s)]. \quad (2.8)$$

Or, on sait que :

$$\mathbb{E}[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (2.9)$$

En remplaçant  $t$  et  $s$  par  $\alpha t$  et  $\alpha s$ , on obtient :

$$R_H(\alpha t, \alpha s) = \frac{1}{2} (|\alpha t|^{2H} + |\alpha s|^{2H} - |\alpha t - \alpha s|^{2H}). \quad (2.10)$$

En factorisant  $\alpha^{2H}$ , cela devient :

$$R_H(\alpha t, \alpha s) = \frac{1}{2} \alpha^{2H} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (2.11)$$

**Covariance de  $\alpha^H B_H(t)$  :** D'autre part, nous avons :

$$\mathbb{E}[(\alpha^H B_H(t))(\alpha^H B_H(s))] = \alpha^{2H} \mathbb{E}[B_H(t)B_H(s)]. \quad (2.12)$$

Or,

$$\mathbb{E}[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad (2.12)$$

donc

$$\mathbb{E}[(\alpha^H B_H(t))(\alpha^H B_H(s))] = \frac{1}{2} \alpha^{2H} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (2.13)$$

On constate que les deux processus ont la même fonction de covariance. Étant donné qu'ils sont également gaussiens et centrés, ils ont la même loi. On en déduit que :

$$\{B_H(\alpha t), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\alpha^H B_H(t), t \in \mathbb{R}\}.$$

Ce qui prouve que le MBF est bien auto-similaire d'indice  $H$ .

### 2.2.2 Accroissements stationnaires

**Proposition 2.1** *Le mouvement brownien fractionnaire  $(B_H(t))_{t \geq 0}$  est un processus à accroissements stationnaires, c'est-à-dire :*

$$\forall h > 0, \quad \{B_H(t+h) - B_H(h), t \geq 0\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{B_H(t), t \geq 0\}. \quad (2.14)$$

**Preuve.**

Étant donné que  $(B_H(t))_{t \geq 0}$  est un processus gaussien et que pour  $s < t$ , il suffit de vérifier :

$$\text{Cov}(B_H(t+h) - B_H(h), B_H(s+h) - B_H(h)) = \text{Cov}(B_H(t), B_H(s)). \quad (2.15)$$

Nous avons :

$$\text{Cov}(B_H(t+h) - B_H(h), B_H(s+h) - B_H(h)) = \mathbb{E}[(B_H(t+h) - B_H(h))(B_H(s+h) - B_H(h))]. \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_H(t+h) - B_H(h), B_H(s+h) - B_H(h)) &= \mathbb{E}[B_H(t+h)B_H(s+h)] - \mathbb{E}[B_H(t+h)B_H(h)] \\ &\quad - \mathbb{E}[B_H(h)B_H(s+h)] + \mathbb{E}[B_H(h)B_H(h)]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Utilisant la fonction de covariance du MBF,

$$\text{Cov}(B_H(t+h), B_H(s+h)) = \frac{1}{2} (|t+h|^{2H} + |s+h|^{2H} - |t-s|^{2H}) \quad (2.18)$$

$$- \frac{1}{2} (|t+h|^{2H} + |h|^{2H} - |t|^{2H}) \quad (2.19)$$

$$- \frac{1}{2} (|h|^{2H} + |s+h|^{2H} - |s|^{2H}) + |h|^{2H}. \quad (2.20)$$

En simplifiant terme à terme, on obtient :

$$\text{Cov}(B_H(t+h) - B_H(h), B_H(s+h) - B_H(h)) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}). \quad (2.21)$$

Ce qui montre que :

$$\text{Cov}(B_H(t), B_H(s)) = R_H(B_H(t), B_H(s)),$$

prouvant ainsi la propriété d'accroissements stationnaires du MBF.

### 2.2.3 Inversion temporelle

**Proposition 2.2** *(Invariance par inversion temporelle)*

Soit  $B_H = (B_H(t))_{t > 0}$  un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst  $H \in ]0, 1]$ . Alors, le processus suivant :

$$\left( t^{2H} B_H \left( \frac{1}{t} \right) \right)_{t > 0}$$

a la même loi que le processus original  $(B_H(t))_{t>0}$ , ce que l'on note :

$$\left( t^{2H} B_H \left( \frac{1}{t} \right) \right)_{t>0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_H(t))_{t>0} \quad (2.22)$$

**Preuve.**

Cette propriété découle directement de la forme de la fonction de covariance du mouvement brownien fractionnaire :

$$\mathbb{E}[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$$

On vérifie que la covariance du processus inversé  $t^{2H} B_H(1/t)$  coïncide avec celle de  $B_H(t)$ . En effet, soient  $t, s > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[t^{2H} B_H(1/t) \cdot s^{2H} B_H(1/s)] &= t^{2H} s^{2H} \cdot \mathbb{E}[B_H(1/t)B_H(1/s)] \\ &= t^{2H} s^{2H} \cdot \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{t} \right)^{2H} + \left( \frac{1}{s} \right)^{2H} - \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{s} \right|^{2H} \right) \\ &= \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H}) \\ &= \mathbb{E}[B_H(t)B_H(s)] \end{aligned} \quad (2.23)$$

**Remarque 2.1** Les processus  $t^{2H} B_H(1/t)$  et  $B_H(t)$  ont exactement la même fonction de covariance. Étant tous deux gaussiens et centrés, ils ont la même loi.

On en déduit :

$$\left( t^{2H} B_H \left( \frac{1}{t} \right) \right)_{t>0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_H(t))_{t>0}$$

**Proposition 2.3** tout processus gaussien continu  $B_H = (B_H(t))_{t>0}$  avec  $B_H(0) = 0$ ,  $\text{Var}(B_H(1)) = 1$  vérifiant l'auto-similarité et la stationnarité est un mouvement brownien fractionnaire d'indice  $H$ .

## 2.3 Propriétés de mémoire

**Définition 2.1** [6] Etant donné un processus stationnaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ , on définit la suite  $(r_n)_{n \geq 1}$  par

$$r(n) = \text{Cov}(X_k, X_{k+n}), \quad k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.24)$$

on dit alors que  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est à longue mémoire si

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = +\infty,$$

et à courte mémoire si

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < +\infty.$$

**Proposition 2.1** *Le mouvement brownien fractionnaire a une longue mémoire si  $H > \frac{1}{2}$  et une courte mémoire si  $H < \frac{1}{2}$ .*

**Preuve.**

Posons

$$X_k = B_k^H - B_{k-1}^H \quad \text{et} \quad X_{k+n} = B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H.$$

Puisque le mouvement brownien fractionnaire (MBF) est centré, on a

$$r(n) = \text{cov}(X_k, X_{k+n}) = \mathbb{E}[X_k X_{k+n}]. \quad (2.25)$$

Par stationnarité, on peut prendre  $k = 1$  et obtenir

$$r(n) = \mathbb{E}[(B_1^H)(B_{n+1}^H - B_n^H)] = \mathbb{E}[B_1^H B_{n+1}^H] - \mathbb{E}[B_1^H B_n^H]. \quad (2.26)$$

En utilisant la formule de covariance du MBF,

$$\mathbb{E}[B_u^H B_v^H] = \frac{1}{2}(|u|^{2H} + |v|^{2H} - |u - v|^{2H}),$$

on a :

$$\mathbb{E}[B_1^H B_{n+1}^H] = \frac{1}{2}(1^{2H} + (n+1)^{2H} - n^{2H}),$$

et

$$\mathbb{E}[B_1^H B_n^H] = \frac{1}{2}(1^{2H} + n^{2H} - (n-1)^{2H}).$$

Ainsi,

$$r(n) = \frac{1}{2}[(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}].$$

On factorise  $n^{2H}$  :

$$r(n) = \frac{n^{2H}}{2} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2H} - 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2H} \right]. \quad (2.27)$$

En développant en série de Taylor pour  $n$  grand, on obtient :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2H} = 1 + \frac{2H}{n} + \frac{H(2H-1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2H} = 1 - \frac{2H}{n} + \frac{H(2H-1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En additionnant ces deux expressions et en soustrayant 2, nous obtenons :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2H} - 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2H} = \frac{2H(2H-1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'où,

$$r(n) = \frac{n^{2H}}{2} \left( \frac{2H(2H-1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = H(2H-1) n^{2H-2} + o(n^{2H-2}). \quad (2.28)$$

Ainsi, si  $H > \frac{1}{2}$ , alors  $2H - 2 > -1$  et la série  $\sum_{n \geq 1} r(n)$  diverge, indiquant une longue mémoire. À l'inverse, si  $H < \frac{1}{2}$ , alors  $2H - 2 < -1$  et la série converge, indiquant une courte mémoire.

## 2.4 Étude des propriétés trajectorielles

### 2.4.1 Continuité Hölderienne

**Proposition 2.1** [28] *Tout mouvement brownien fractionnaire admet une modification dont les trajectorielles ont une continuité de Hölder d'ordre  $\alpha < H$  sur tout intervalle  $[0, p]$  avec  $p > 0$*

**Preuve.**

Dans le cas du mouvement brownien fractionnaire, la covariance est donnée par

$$\mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

et en particulier,

$$\mathbb{E}[(B_t^H)^2] = t^{2H}.$$

On a

$$\mathbb{E}[|B_t^H - B_s^H|^2] = \mathbb{E}[(B_t^H - B_s^H)^2] = t^{2H} + s^{2H} - (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) = |t - s|^{2H}. \quad (2.4.1)$$

En prenant  $\gamma = 2$  et  $d = 1$ , on obtient  $d + \varepsilon = 2H$ , d'où  $\varepsilon = 2H - 1$ . D'après le théorème de Kolmogorov,  $B^H$  admet une modification, notée  $\tilde{B}^H$ , dont les trajectoires sont Hölderiennes de paramètre

$$\alpha \in \left[0, \frac{\varepsilon}{\gamma}\right[ = \left[0, \frac{2H - 1}{2}\right[ = \left[0, H - \frac{1}{2}\right[.$$

Ainsi, pour tout  $\alpha < H$  (puisque  $H - \frac{1}{2} < H$  pour  $H \leq 1$ ), on a montré que  $\tilde{B}^H$  a une continuité Hölderienne de paramètre  $\alpha$ .

**Remarque 2.1** *Les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire n'ont p.s. pas de continuité Hölderienne d'ordre supérieur à  $H$  sur tout intervalle borné.*

### 2.4.2 Non-Différentiabilité

**Théorème 2.1** [24]

*Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire sont p.s. non différentiables en  $t_0$ .*

**Preuve.**

On veut montrer que, pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbb{P} \left[ \limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0} \right| = +\infty \right] = 1.$$

Par stationnarité, on peut se ramener au cas  $t_0 = 0$ . Il suffit donc d'étudier le comportement de  $\frac{B_t^H}{t}$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .

Nous allons démontrer la non-différentiabilité à droite. Pour cela, posons :

$$A(t) = \left\{ \sup_{0 < s \leq t} \frac{B_s^H}{s} \geq M \right\}, \quad \text{où } M > 0.$$

On a alors :

$$\mathbb{P}[A(t)] \geq \mathbb{P} \left[ \frac{B_t^H}{t} \geq M \right].$$

Par auto-similarité du mouvement brownien fractionnaire :

$$\mathbb{P} \left[ \frac{B_t^H}{t} \geq M \right] = \mathbb{P} [t^{H-1} B_1^H \geq M].$$

Lorsque  $t \rightarrow 0$ , on a :

$$\mathbb{P} [|B_1^H| \geq M t^{1-H}] \rightarrow \mathbb{P} [|B_1^H| \geq 0] = 1.$$

Donc, pour tout  $M > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[A(t)] = 1.$$

Ainsi :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{B_t^H}{t} \right| = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

De même, en considérant  $t \rightarrow 0^-$ , on obtient :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^-} \left| \frac{B_t^H}{t} \right| = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

D'où le résultat.

### 2.4.3 Variation d'ordre $\alpha$

#### **Théorème 2.2** [36]

Considérons le mouvement brownien fractionnaire  $B^H$ . Pour tout  $\alpha > 0$ , on définit :

$$V_{n,\alpha} = \sum_{j=1}^{2^n} |B^H(j2^{-n}) - B^H((j-1)2^{-n})|^\alpha \quad (2.29)$$

et la variation d'ordre  $\alpha$  comme la limite en probabilité :

$$V_\alpha = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} V_{n,\alpha}$$

Alors :

$$V_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha H > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha H < 1 \\ \mathbb{E} [|B^H(1)|^\alpha] & \text{si } \alpha H = 1 \end{cases}$$

**Remarque 2.2** Le mouvement brownien fractionnaire  $B^H$  a des variations d'ordre  $\alpha = 1$  non bornées presque sûrement sur tout compact de  $\mathbb{R}$ , si  $H < 1$ .

## 2.5 Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas markovien

**Théorème 2.1** [8, 24]

Soit  $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$  un processus gaussien centré. Si  $X$  est un processus de Markov, alors pour tout  $s < t < u$ , avec  $\text{Cov}(X_t, X_t) > 0$ , on a :

$$\text{Cov}(X_s, X_u) \cdot \text{Cov}(X_t, X_t) = \text{Cov}(X_s, X_t) \cdot \text{Cov}(X_t, X_u).$$

De plus, si  $\text{Cov}(X_t, X_t) = 0$ , alors les processus  $\{X_s : s \leq t\}$  et  $\{X_s : s \geq t\}$  sont indépendants.

**Corollaire 2.1** [17]

Le mouvement Brownien fractionnaire  $\{B_t, t \in \mathbb{R}\}$  n'est pas markovien pour  $H \neq \frac{1}{2}$ .

**Preuve.**

- Supposons qu'il soit markovien. Comme  $R_H(0, 0) = 0$ , les processus  $\{B_s : s \leq 0\}$  et  $\{B_s : s \geq 0\}$  seraient indépendants, ce qui est absurde.
- S'il était markovien, sa fonction de covariance vérifierait (1) et, en particulier, pour  $1 < 2 < 3$ , on aurait :

$$R_H(1, 3)R_H(2, 2) = R_H(1, 2)R_H(2, 3).$$

Calculons chaque terme :

$$\frac{1}{2}(1 + 3^{2H} - 2 \cdot 3^{2H})2^{2H} = \frac{1}{2}(1^{2H} + 2^{2H} - 1) \cdot \frac{1}{2}(2^{2H} + 3^{2H} - 1),$$

ce qui donne :

$$3 + 3^{2H} - 3 \cdot 2^{2H} = 0.$$

Après analyse de la fonction  $H \mapsto 3 + 3^{2H} - 3 \cdot 2^{2H}$ , on constate qu'elle ne s'annule que pour  $H = \frac{1}{2}$  et pour  $H = 1$  (ce dernier cas étant exclu par définition). Ainsi, le seul cas possible est  $H = \frac{1}{2}$ , ce qui correspond au mouvement Brownien standard, qui est bien markovien.

## 2.6 Variation quadratique et semi-martingales

**Définition 2.1** Un processus  $X$  est à variation quadratique finie s'il existe un processus noté  $\langle X \rangle$  tel que, pour tout  $t$  et toute suite de subdivisions  $\Delta_n$  de  $[0, t]$  telle que le pas  $|\Delta_n| \rightarrow 0$ , on ait :

$$\sum_{(t_i, t_{i+1}) \in \Delta_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X \rangle_t, \quad \text{lorsque } |\Delta_n| \rightarrow 0$$

**Théorème 2.1** [6]

Soit  $\{B_t^H, t \in \mathbb{R}\}$  un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre  $H$ . On a :

- Pour  $H > \frac{1}{2}$  :

$$\langle B^H \rangle_t = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

la variation quadratique est nulle, ce qui indique que les trajectoires sont trop régulières.

- Pour  $H = \frac{1}{2}$ , on retrouve le mouvement brownien standard, avec une variation quadratique donnée par  $[B^{1/2}]_t = t$
- Pour  $H < \frac{1}{2}$  :

$$\langle B^H \rangle_t = +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$$

la variation quadratique est infinie, ce qui reflète une forme d'irrégularité croissante.

**Théorème 2.2** *Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semi-martingale pour  $H \neq \frac{1}{2}$  relativement à sa filtration naturelle.*

# Chapitre 3

## Simulation des trajectoires du mouvement brownien fractionnaire (MBF)

### 3.1 Introduction

On note  $B^H$  le mouvement brownien fractionnaire (MBF) standard discrétisé aux instants  $i/N$ , avec  $i = 0, \dots, N-1$ . En général, les méthodes de simulation de la trajectoire du FBM peuvent se distinguer suivant leurs approches en deux catégories :

- **Simulation directe du MBF**, en tenant compte de l'une de ses différentes représentations.
- **Simulation du processus des accroissements (FGN)** : le bruit gaussien fractionnaire (FGN) est un processus gaussien stationnaire obtenu comme les accroissements discrets d'un mouvement brownien fractionnaire (MBF), défini par :

$$X_k = B_H \left( \frac{k+1}{N} \right) - B_H \left( \frac{k}{N} \right), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Ce processus présente une dépendance à long terme lorsque l'exposant de Hurst  $H > 0,5$ . Après la discrétisation de la trajectoire du MBF en  $N$  instants, on simule ces incréments (FGN), puis on génère le MBF en effectuant la **somme cumulée** des valeurs du FGN aux instants  $i/N$ .

On s'est basé sur une étude de Coeurjolly [8] qui a mis en évidence une procédure pour juger la qualité de l'approximation de la trajectoire du FBM, permettant ainsi d'extraire les méthodes les plus performantes.

L'étude a conclu que les méthodes les plus stables (en matière d'algorithme) sont :

- La méthode de *Cholesky* (de la première approche).
- La méthode de *Wood et Chan* (de la deuxième approche).

Pour plus de détails, voir [39].

On présente à la fin une méthode de simulation directe, basée sur le principe d'invariance. Le mouvement brownien fractionnaire peut-être vu comme limite d'une marche aléatoire. Ainsi, on l'approche, pour  $n$  grand, par la suite des sommes partielles normalisées.

### 3.1.1 Méthode de Mandelbrot et Van Ness

Une des approches historiques pour la simulation du mouvement brownien fractionnaire (MBF) repose sur sa représentation en moyenne mobile, telle que proposée par Mandelbrot et Van Ness [24]. Cette formulation donne une expression intégrale du MBF à travers une intégrale stochastique, ce qui suggère naturellement une méthode de simulation par discrétisation de cette intégrale.

#### Formule de Mandelbrot et Van Ness

Le MBF  $B^H(t)$  peut être représenté sous la forme suivante :

$$B^H(t) = K_H \left( \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(s) \right),$$

où  $B(s)$  est un mouvement brownien standard,  $K_H$  est une constante de normalisation dépendant de  $H$ , et  $H \in (0, 1)$  est le paramètre de Hurst.

#### Discrétisation de l'intégrale

Pour simuler  $B^H(t)$  numériquement, cette intégrale est approximée par une somme de Riemann. L'intégrale est tronquée à une borne  $a_N$  finie (car on ne peut simuler que sur un domaine fini), ce qui donne :

$$B^H\left(\frac{t}{N}\right) \approx K_H \left( \sum_{k=-a_N}^0 \left( \left(\frac{t-k}{N}\right)^{H-1/2} - \left(\frac{-k}{N}\right)^{H-1/2} \right) B_1(k) + \sum_{k=0}^t \left(\frac{t-k}{N}\right)^{H-1/2} B_2(k) \right),$$

où  $B_1(k)$  et  $B_2(k)$  sont deux suites de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, représentant respectivement les contributions de l'intégrale sur  $(-\infty, 0)$  et sur  $(0, t)$ .

#### Rôle des paramètres

- $K_H$  est une constante dépendant de  $H$  donnée par :

$$K_H = \sqrt{\frac{2H\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\Gamma(2-2H)}}.$$

- $a_N$  représente la borne à partir de laquelle on tronque l'intégrale. En pratique, on prend  $a_N = N^{1.5}$  pour assurer une bonne précision, tout en limitant le coût de calcul.
- $N$  est le nombre de pas de discrétisation : plus  $N$  est grand, plus l'approximation est précise.

La méthode de simulation basée sur la représentation de Mandelbrot et Van Ness est importante et aide à comprendre le MBF. Mais elle est rarement utilisée en pratique parce qu'elle est compliquée à mettre en œuvre, qu'elle a des limites numériques et qu'il existe des méthodes plus efficaces. C'est une théorie importante pour beaucoup d'autres méthodes.

## Code R — Simulation du MBF par la méthode de Mandelbrot & Van Ness

```

# Fonction de simulation du MBF via Mandelbrot & Van Ness
fbm_mvness <- function(H, N, aN = NULL) {
  if (is.null(aN)) {
    aN <- ceiling(N^1.5)
  }

  KH <- sqrt(2 * H * gamma(1.5 - H) / (gamma(H + 0.5) * gamma(2 - 2
    * H)))

  B1 <- rnorm(aN + 1)
  B2 <- rnorm(N)

  BH <- numeric(N + 1)
  BH[1] <- 0

  for (t in 1:N) {
    s1 <- sum(((t + 0:aN)^(H - 0.5) - (0:aN)^(H - 0.5)) * B1)
    s2 <- sum(((t:1)^(H - 0.5)) * B2[1:t])
    BH[t + 1] <- KH * (s1 + s2)
  }

  return(BH)
}

# -----
# Paramètres de simulation
# -----
N <- 512
H_values <- c(0.5, 0.6, 0.7)
time <- seq(0, 1, length.out = N + 1)

# Affichage des trajectoires
par(mfrow = c(3, 1), mar = c(4, 4, 2, 1))

set.seed(42)
for (i in 1:length(H_values)) {
  BH_path <- fbm_mvness(H_values[i], N)
  plot(time, BH_path, type = "l", col = "black",
    main = paste("MBF simulé (Mandelbrot & Van Ness) avec H=",
      H_values[i]),
    xlab = "t", ylab = expression(B^H(t)))
  grid()
}

```

Listing 3.1 – Simulation du MBF pour  $H=0.5, 0.6, 0.7$  par la méthode de Mandelbrot & Van Ness

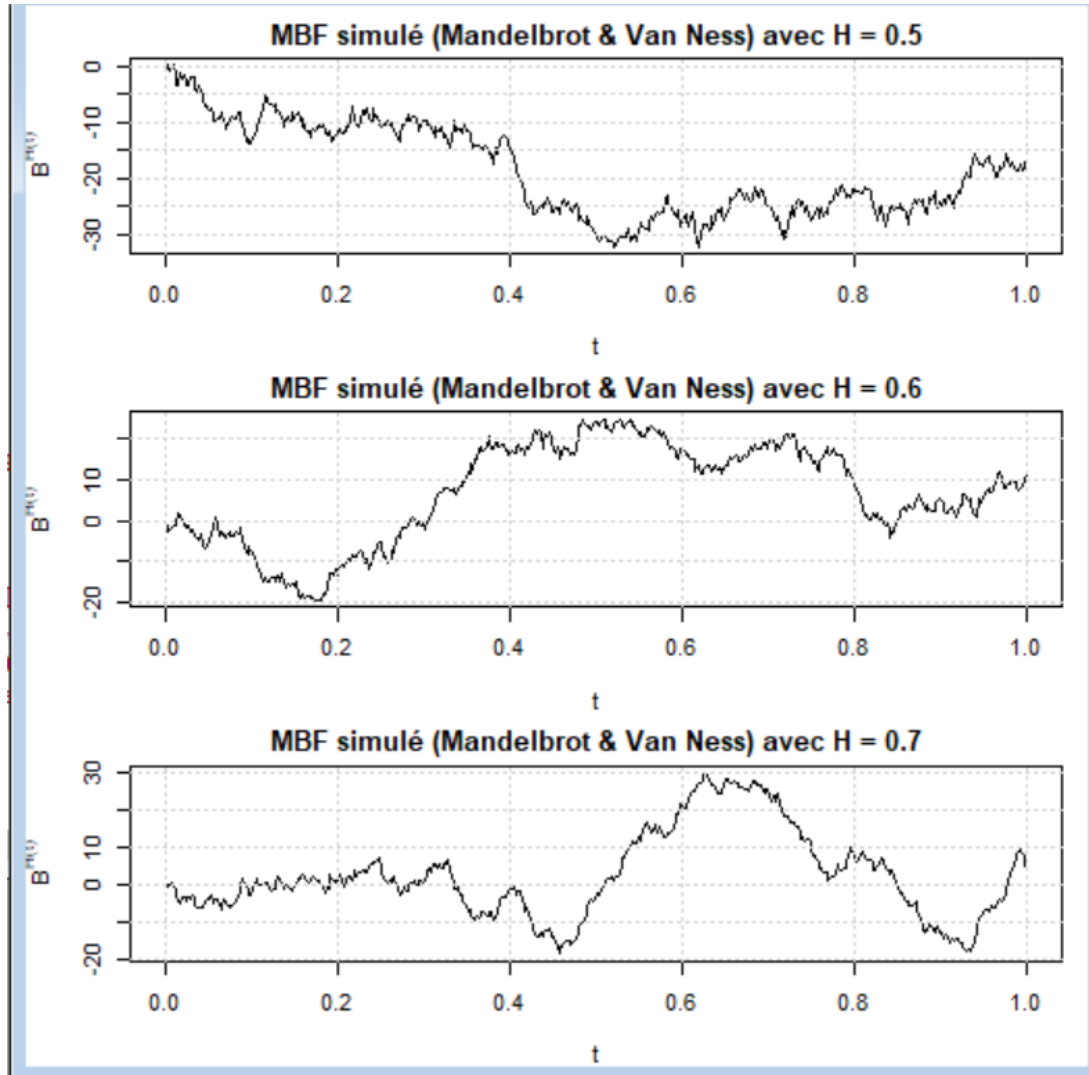


FIGURE 3.1 – Trajectoires simulées du MBF avec  $H = 0.5, 0.6, 0.7$  (Mandelbrot & Van Ness)

### 3.1.2 Méthode de Cholesky

Soit  $\Gamma$  la matrice de covariance du mouvement brownien fractionnaire (FBM) standard discrétisé aux instants  $i/N$ , pour  $i = 0, \dots, N - 1$ . Les éléments de  $\Gamma$  sont donnés par :

$$\Gamma_{i,j} = \begin{cases} \text{cov} \left( B_{i/N}^H, B_{j/N}^H \right) & \text{si } i \neq j, \\ \text{var} \left( B_{i/N}^H \right) & \text{si } i = j. \end{cases}$$

La covariance du FBM est donnée explicitement par :

$$\text{cov} \left( B_s^H, B_t^H \right) = \frac{1}{2} \left( s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H} \right).$$

La matrice  $\Gamma$  est une matrice symétrique définie positive (ou semi-définie positive), ce qui garantit l'existence d'une décomposition de Cholesky [2].

## Chapitre 3 : Simulation des trajectoires du MBF

Par définition,  $B_0^H = 0$ , donc la simulation de la trajectoire du FBM se fait uniquement aux instants  $t_i = i/N$  pour  $i = 1, \dots, N-1$ . On considère alors la sous-matrice  $\Gamma'_{N-1 \times N-1}$  obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de  $\Gamma$ . Notons que, pour tout  $t > 0$ ,  $\text{cov}(B_t^H, B_0^H) = 0$ .

Pour simuler la trajectoire discrétisée du FBM, on procède comme suit :

1. Générer un vecteur  $Z \in \mathbb{R}^{N-1}$  composé de  $(N-1)$  variables aléatoires indépendantes, suivant une loi normale centrée réduite :  $Z \sim \mathcal{N}(0, I_{N-1})$ .
2. Calculer la décomposition de Cholesky de la matrice  $\Gamma'$ , c'est-à-dire trouver une matrice triangulaire inférieure  $L$  telle que :

$$\Gamma' = LL^\top.$$

3. Construire la trajectoire simulée du FBM aux instants  $i/N$  pour  $i = 0, \dots, N-1$  comme suit :

$$B^H = (0, (LZ)^\top).$$

Ainsi, le vecteur  $LZ$  est un vecteur gaussien centré de dimension  $N-1$ , de covariance  $\Gamma'$ , représentant la trajectoire discrétisée de  $B_t^H$  pour  $t = i/N$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ .

### Code R — Simulation par la méthode de Cholesky

```
# -----  
# Simulation du MBF par méthode de Cholesky  
# -----  
  
# Fonction de covariance du MBF  
cov_fbm <- fonction(i, j, H) {  
  return(0.5 * (abs(i)^(2 * H) + abs(j)^(2 * H) - abs(i - j)^(2 * H)  
    )))  
}  
  
# Fonction de simulation du MBF avec Cholesky  
fbm <- fonction(H, n) {  
  # Construction de la matrice de covariance  
  cov_matrix <- matrix(0, n, n)  
  for (i in 1:n) {  
    for (j in i:n) {  
      cov_matrix[i, j] <- cov_fbm(i, j, H)  
      cov_matrix[j, i] <- cov_matrix[i, j] # symétrie  
    }  
  }  
}  
  
# Decomposition de Cholesky  
  
L <- chol(cov_matrix)  
  
# Generation d'un vecteur gaussien standard  
Z <- rnorm(n)
```

```
# Simulation du MBF
B <- L %*% Z
B <- c(0, B) # B(0) = 0

return(as.vector(B))
}

# -----
# Parametres de simulation
# -----

n <- 500 # nombre de points
H_values <- c(0.2, 0.5, 0.7)
time <- (0:n) / n

# Matrice pour stocker les trajectoires
traj <- matrix(0, nrow = length(H_values), ncol = n + 1)

# Simulation des trajectoires pour chaque H
for (k in 1:length(H_values)) {
  traj[k, ] <- fbm(H_values[k], n)
}

# -----
# Affichage des trajectoires
# -----

par(mfrow = c(3, 1)) # 3 graphiques en colonnes

for (k in 1:length(H_values)) {
  plot(time, traj[k, ], type = "l", col = "blue",
        main = paste("MBF simulé avec H=", H_values[k]),
        xlab = "t", ylab = expression(B^H(t)))
  grid()
}
```

Listing 3.2 – Simulation MBF avec la méthode de Cholesky pour  $H=0.2, 0.5, 0.7$

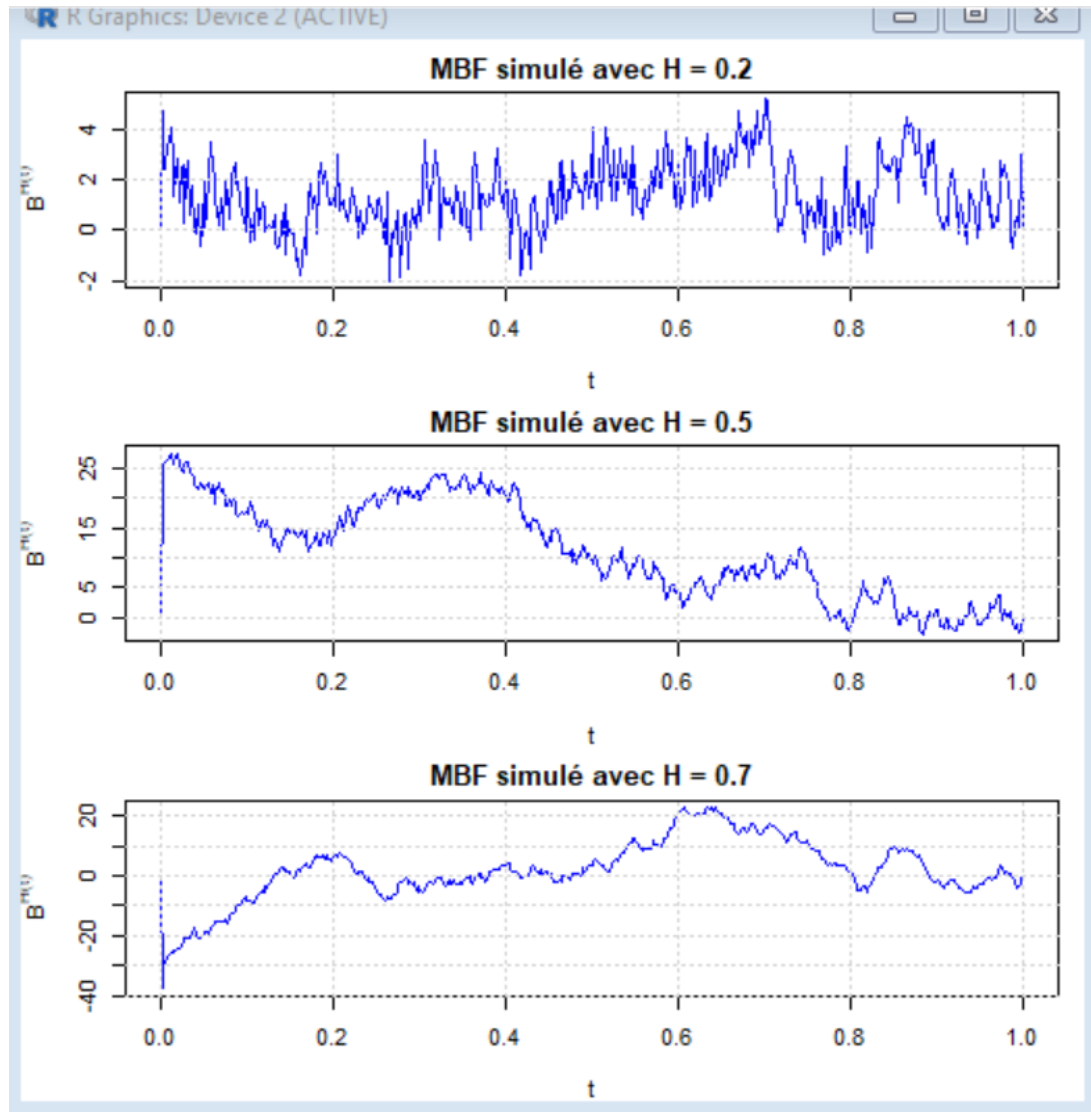


FIGURE 3.2 – Trajectoires simulées du MBF avec  $H = 0.2, 0.5, 0.7$  (Cholesky)

### 3.1.3 Méthode de Wood et Chan : Simulation du bruit gaussien fractionnaire

La méthode de **Wood et Chan** (1994) est une méthode numérique efficace pour la simulation de trajectoires de processus gaussiens stationnaires, tels que le *bruit gaussien fractionnaire* (FGN), qui représente les incréments du *mouvement brownien fractionnaire* (MBF).

Cette méthode s'appuie sur deux idées principales :

- L'extension de la matrice de covariance à une matrice **circulante** de taille supérieure, qui permet une **diagonalisation rapide** via la transformée de Fourier rapide (FFT).
- L'utilisation de cette diagonalisation pour simuler un vecteur gaussien centré à covariance donnée.

### Objectif

Simuler un vecteur de bruit gaussien fractionnaire  $X = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})$ , dont les composantes représentent les incréments discrets d'un MBF  $B^H(t)$  aux instants  $t = i/N$ , puis reconstituer le MBF par sommation cumulée :

$$B^H(0) = 0, \quad B^H\left(\frac{i}{N}\right) = \sum_{k=0}^i X_k, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

### Structure de covariance

Le FGN est un processus gaussien stationnaire défini par une fonction d'autocovariance :

$$\gamma(h) = \frac{\sigma^2}{2} (|h+1|^{2H} - 2|h|^{2H} + |h-1|^{2H}), \quad h \in \mathbb{Z},$$

où  $H \in (0, 1)$  est l'indice de Hurst, et  $\sigma^2$  la variance (souvent normalisée à 1).

La matrice de covariance  $G \in \mathbb{R}^{N \times N}$  associée au FGN est de Toeplitz (constante sur les diagonales), avec :

$$G_{i,j} = \gamma\left(\frac{j-i}{N}\right), \quad i, j = 0, \dots, N-1.$$

### Prolongement en matrice circulante

Afin de pouvoir utiliser la FFT, on insère  $G$  dans une matrice circulante  $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , de taille  $m \geq 2N$  (typiquement,  $m = 2^g$ , où  $g \in \mathbb{N}$  est choisi comme le plus petit entier tel que  $2^g \geq 2N$ ). Cette condition permet de profiter de l'efficacité numérique de la FFT, qui est optimale lorsque la taille est une puissance de deux :

$$C = \text{Circulant}(c_0, c_1, \dots, c_{m-1}),$$

où les coefficients sont construits comme suit :

$$c_j = \begin{cases} \gamma\left(\frac{j}{N}\right), & 0 \leq j < m/2, \\ \gamma\left(\frac{m-j}{N}\right), & m/2 \leq j < m. \end{cases}$$

Cette matrice est réelle, symétrique et circulante.

### Propriétés des matrices circulantes

Les matrices circulantes sont diagonalisables par la base de Fourier complexe. Autrement dit, il existe une matrice unitaire  $F$  (la matrice de la transformée de Fourier discrète, ou DFT) telle que :

$$C = F \Lambda F^*,$$

où  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1})$  est la matrice diagonale contenant les **valeurs propres** de la matrice circulante  $C$ . Ces valeurs propres sont données par la formule suivante :

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{m-1} c_j e^{-2\pi i j k / m}, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

ce qui correspond à la transformée de Fourier discrète (FFT) de la première ligne  $(c_0, \dots, c_{m-1})$  de la matrice circulante.

La matrice de Fourier discrète  $F$  est définie par :

$$F_{jk} = \frac{1}{\sqrt{m}} e^{-2\pi i j k / m}, \quad 0 \leq j, k < m,$$

et sa transposée conjuguée (également appelée adjointe hermitienne) est donnée par :

$$F^* = \overline{F}^\top, \quad \text{soit} \quad F_{jk}^* = \frac{1}{\sqrt{m}} e^{+2\pi i j k / m}.$$

Ainsi, les matrices circulantes peuvent être efficacement diagonalisées à l'aide de la FFT, ce qui permet des calculs rapides dans de nombreuses applications numériques.

**Exemple :** Considérons une petite matrice circulante  $C$  définie par sa première ligne :

$$c = (1, 2, 3)$$

Alors la matrice circulante  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut la diagonaliser en utilisant la DFT.

La matrice de Fourier discrète  $F$  de taille 3 est :

$$F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i / 3} & e^{-4\pi i / 3} \\ 1 & e^{-4\pi i / 3} & e^{-8\pi i / 3} \end{pmatrix}$$

Et  $F^* = \overline{F}^\top$ .

Les valeurs propres sont données par :

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^2 c_j e^{-2\pi i j k / 3}, \quad k = 0, 1, 2$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 + 2 + 3 = 6 \\ \lambda_1 &= 1 + 2e^{-2\pi i / 3} + 3e^{-4\pi i / 3} \\ \lambda_2 &= 1 + 2e^{-4\pi i / 3} + 3e^{-8\pi i / 3} \end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$C = F \cdot \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \cdot F^*$$

Ce calcul est la base des algorithmes rapides utilisant la FFT pour simuler ou manipuler des signaux et des processus stochastiques, comme le mouvement brownien fractionnaire.

### Étapes de la simulation

1. **Calcul des valeurs propres  $\lambda_k$  :**

- Construire le vecteur  $c = (c_0, \dots, c_{m-1})$  à partir de la fonction d'autocovariance  $\gamma(h)$  du FGN :

$$c_j = \begin{cases} \gamma\left(\frac{j}{N}\right) & \text{si } 0 \leq j < \frac{m}{2}, \\ \gamma\left(\frac{m-j}{N}\right) & \text{si } \frac{m}{2} \leq j < m. \end{cases}$$

- Appliquer la transformée de Fourier rapide (FFT) à  $c$  pour obtenir les valeurs propres  $\lambda_k$  de la matrice circulante  $C$  :

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{m}\right), \quad k = 0, \dots, m-1.$$

- Vérifier que  $\lambda_k \geq 0$ . Si ce n'est pas le cas, augmenter  $m$ .

2. **Génération du vecteur aléatoire complexe  $W \in \mathbb{C}^m$  :**

- Générer  $U_j, V_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$  indépendants.
- Construire  $W$  selon :

$$W_0 = U_0, \quad W_{m/2} = U_{m/2}, \quad W_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_j + iV_j), \quad W_{m-j} = \overline{W_j}, \quad \text{pour } 1 \leq j < \frac{m}{2}.$$

3. **Produit spectral :**

$$Z_k = \sqrt{\lambda_k} \cdot W_k, \quad \text{pour } k = 0, \dots, m-1.$$

4. **Application de la transformée de Fourier inverse (IFFT) :**

$$Y = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \text{IFFT}(Z),$$

où  $Y \in \mathbb{C}^m$  est un vecteur gaussien complexe de covariance  $C$ .

5. **Extraction des composantes réelles :**

$$X_i = \Re(Y_i), \quad \text{pour } i = 0, \dots, N-1.$$

Le vecteur  $X = (X_0, \dots, X_{N-1})$  est alors une réalisation simulée du FGN.

6. **Construction du MBF par sommation :**

$$B^H(0) = 0, \quad B^H\left(\frac{i}{N}\right) = \sum_{k=0}^i X_k, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

Cette méthode exploite la diagonalisation naturelle des matrices circulantes par la FFT, ce qui permet de simuler des trajectoires de MBF de manière efficace (complexité en  $\mathcal{O}(N \log N)$ ) et avec une mémoire optimisée. Elle est particulièrement adaptée à la simulation de trajectoires longues ou à haute résolution.

### Remarques

- Si certaines  $\lambda_k < 0$ , la simulation n'est plus valide. On peut alors :
  - Augmenter la taille  $m$  de la matrice circulante;
- Le choix de  $m = 2^g \geq 2N$  permet d'optimiser l'usage de la FFT.
- Une bonne estimation numérique des  $\lambda_k$  nécessite une attention particulière à la stabilité des calculs FFT.

La méthode de Wood et Chan permet de simuler des trajectoires de mouvement brownien fractionnaire très rapidement, même avec beaucoup de données.

### Code R — Simulation par Wood & Chan

```
# -----  
# Fonction de simulation du MBF via Wood & Chan  
# -----  
  
fbm_wood_chan <- fonction(H, n) {  
  m <- 2^(ceiling(log2(2 * n - 2))) # taille du vecteur pour la  
    FFT (puissance de 2)  
  
  # Fonction d'autocovariance du FBM  
  autocov <- fonction(k, H) {  
    return(0.5 * (abs(k + 1)^(2 * H) - 2 * abs(k)^(2 * H) + abs(k -  
      1)^(2 * H)))  
  }  
  
  # Construction du vecteur de covariance pour le FGN  
  gamma <- numeric(m)  
  for (k in 0:(n - 1)) {  
    gamma[k + 1] <- autocov(k, H)  
  }  
  
  # On complete par la symétrie  
  gamma_full <- c(gamma, rev(gamma[2:(m - n + 1)]))  
  
  # Application de la FFT  
  lambda <- Re(fft(gamma_full))  
  
  # Verification de la positivite des valeurs propres  
  if (any(lambda < 0)) stop("La matrice n'est pas definie positive."  
    )  
  
  # Generation de bruit complexe  
  Z <- complex(real = rnorm(m), imaginary = rnorm(m))  
  
  # Produit spectral  
  Y <- fft(sqrt(lambda) * Z, inverse = TRUE) / sqrt(m)  
  
  # Partie réelle FGN (fractional Gaussian noise)
```

```
fgn <- Re(Y[1:n])

# MBF = somme cumulée (FBM)
fbm <- c(0, cumsum(fgn))
return(fbm)
}

# -----
# Parametres de simulation
# -----

n <- 500 # nombre de points
H_values <- c(0.2, 0.5, 0.7)
time <- (0:n) / n

# Matrice pour stocker les trajectoires
traj_wc <- matrix(0, nrow = length(H_values), ncol = n + 1)

# Simulation des trajectoires avec la methode de Wood et Chan
for (k in 1:length(H_values)) {
  traj_wc[k, ] <- fbm_wood_chan(H_values[k], n)
}

# -----
# Affichage des trajectoires
# -----

par(mfrow = c(3, 1)) # 3 graphiques verticaux

for (k in 1:length(H_values)) {
  plot(time, traj_wc[k, ], type = "l", col = "darkgreen",
        main = paste("MBF (Wood & Chan) avec H=", H_values[k]),
        xlab = "t", ylab = expression(B^H(t)))
  grid()
}
```

Listing 3.3 – Simulation MBF avec la méthode de Wood & Chan

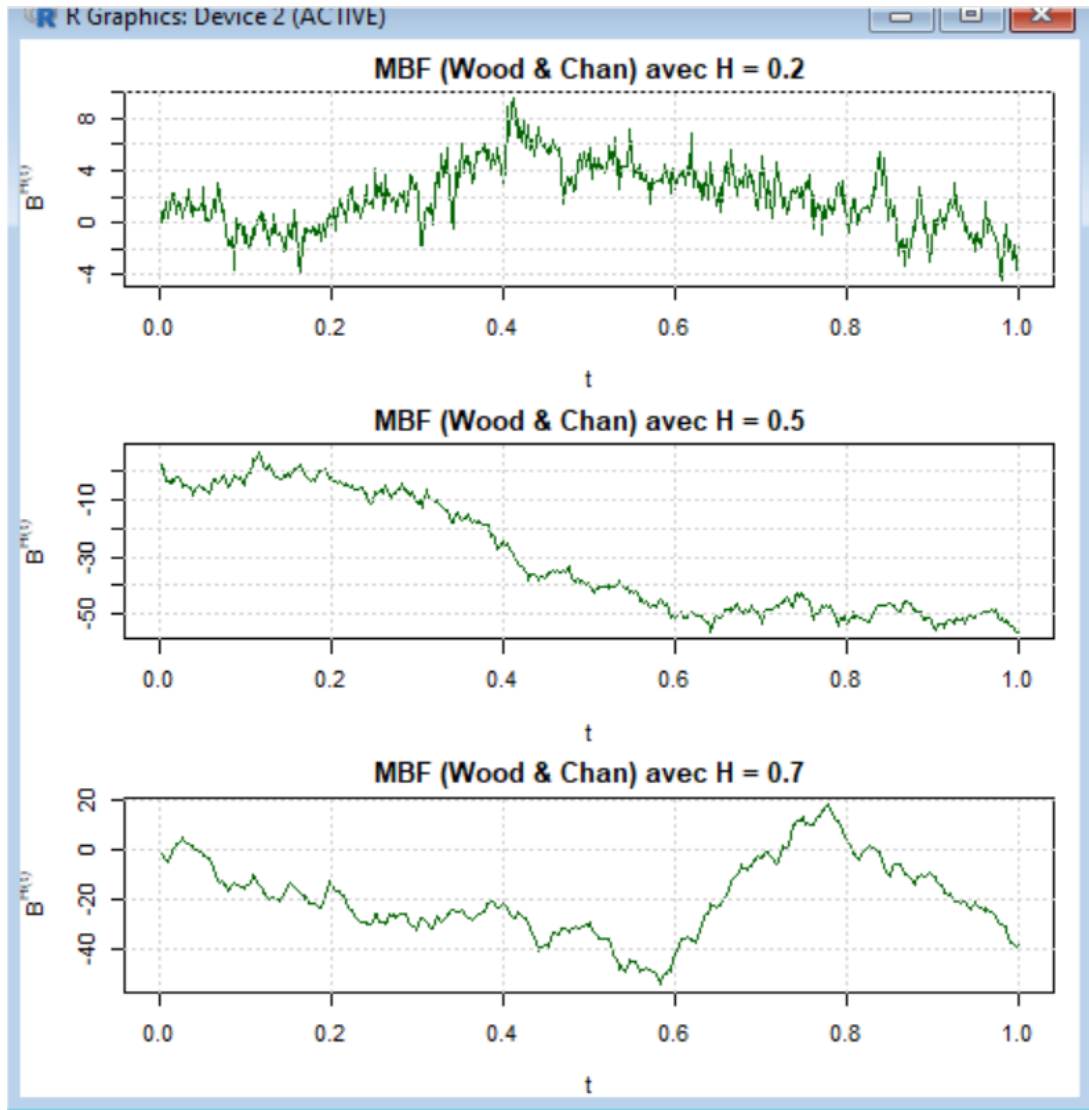


FIGURE 3.3 – Trajectoires simulées du MBF avec  $H = 0.2, 0.5, 0.7$  (Wood & Chan)

## 3.2 Principe d’invariance

Avant d’énoncer le principe d’invariance, il est nécessaire de rappeler quelques notions de convergence faible de mesures de probabilité.

### 3.2.1 Convergence des mesures de probabilité dans les espaces métriques

Soit  $E$  un espace métrique muni d’une distance  $\delta$ ,  $\mathcal{F}$  sa tribu borélienne, et  $\mathbb{P}$  une loi de probabilité sur  $(E, \mathcal{F})$ .

**Définition 3.1** (*Convergence faible des mesures*)

Soient  $\{\mathbb{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\mathbb{P}$  des mesures de probabilité sur  $(E, \mathcal{F})$ . On dit que  $\mathbb{P}_n$  converge

*faiblement* vers  $\mathbb{P}$ , et on note

$$\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$$

si pour toute fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée, on a :

$$\int_E f d\mathbb{P}_n \longrightarrow \int_E f d\mathbb{P}.$$

Soit maintenant  $X : (\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}) \rightarrow E$  une application mesurable. On dit que  $X$  est un **élément aléatoire de  $E$** .

**Définition 3.2** On dit que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  d'éléments aléatoires de  $E$  **converge en loi** vers un élément aléatoire  $X$  de  $E$ , et on écrit :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \text{dans } E,$$

si la loi de  $X_n$ , notée  $\mathbb{P}_{X_n}$ , converge faiblement vers la loi de  $X$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}_{X_n} \Rightarrow \mathbb{P}_X$ .

**Théorème 3.1 (Billingsley [5])** Supposons que  $E$  est un espace métrique séparable. Soient  $X_n$  et  $Y_n$  deux suites d'éléments aléatoires défini sur le même espace de probabilité.

Si :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \text{et} \quad \delta(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

alors :

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

**Théorème 3.2 (Continuité des fonctions mesurables)** Soit  $f : E \rightarrow E'$  une application mesurable et soit  $D_f$  l'ensemble de ses points de discontinuité. Si :

$$\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(D_f) = 0,$$

alors :

$$\mathbb{P}_n \circ f^{-1} \Rightarrow \mathbb{P} \circ f^{-1}.$$

Soit  $X$  un élément aléatoire à valeurs dans un espace  $E$ , et  $f(X)$  un élément aléatoire à valeurs dans un espace  $E'$ .

**Corollaire 3.1** Si  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  et  $\mathbb{P}(X \in D_f) = 0$ , alors :

$$f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X).$$

**Corollaire 3.2** Si  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$  et si  $f$  est continue en  $a$ , alors :

$$f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(a).$$

### 3.2.2 Compacité relative et équitension

**Définition 3.3 (Tension)** Une loi de probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $(E, \mathcal{F})$  est dite **tendue** si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\varepsilon \subset E$  tel que :

$$\mathbb{P}(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

**Définition 3.4 (Famille équitendue et relativement compacte)**

Soit  $\Pi$  une famille de lois de probabilité sur  $(E, \mathcal{F})$ .

- $\Pi$  est **équitendue** si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K \subset E$  tel que  $\mathbb{P}(K) > 1 - \varepsilon$  pour tout  $\mathbb{P} \in \Pi$ .
- $\Pi$  est **relativement compacte** si toute suite de  $\Pi$  admet une sous-suite qui converge faiblement.

**Théorème 3.3 (Prohorov [27])** Si une famille  $\Pi$  de lois de probabilité est équitendue, alors elle est relativement compacte.

**Théorème 3.4 (Réciproque de Prohorov [27])** Si l'espace  $E$  est métrique, séparable et complet, alors toute famille relativement compacte est équitendue.

### 3.2.3 Convergence des processus dans $D[0, 1]$

#### Définitions et notations

On note par  $D = D[0, 1]$  l'espace des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont **càdlàg**, c'est-à-dire :

- $f$  est continue à droite : pour tout  $t \in [0, 1)$ , la limite à droite  $\lim_{s \downarrow t} f(s)$  existe et est égale à  $f(t)$ ,
- $f$  admet une limite à gauche : pour tout  $t \in (0, 1]$ , la limite  $\lim_{s \uparrow t} f(s)$  existe.

**Définition 3.5 (Module de continuité)**

Le **module de continuité** d'une fonction  $f \in D$  est défini par :

$$\omega_f(\delta) = \sup_{0 \leq t \leq 1 - \delta} \sup_{s, t \in [t, t + \delta]} |f(t) - f(s)|.$$

On définit également un module de continuité modifié  $\omega'_f(\delta)$  par :

$$\omega'_f(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{1 \leq i \leq r} \sup_{s, t \in [t_{i-1}, t_i)} |f(t) - f(s)|,$$

où l'infimum est pris sur toutes les subdivisions  $\{t_i\}$  telles que :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1, \quad \text{et} \quad t_i - t_{i-1} > \delta.$$

**Définition 3.6 (Topologie de Skorohod)**

Soit  $\Lambda$  la classe des fonctions strictement croissantes, continues de  $[0, 1]$  dans lui-même telles que  $\lambda(0) = 0$  et  $\lambda(1) = 1$ .

On définit la **distance de Skorohod**  $d_0(f, g)$  entre  $f, g \in D$  par :

$$d_0(f, g) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \exists \lambda \in \Lambda, \|\lambda\| \leq \varepsilon, \sup_t |f(t) - g(\lambda(t))| \leq \varepsilon \right\},$$

où :

$$\|\lambda\| = \sup_{s \neq t} \left| \log \left( \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right) \right|.$$

Cette distance munit  $D[0, 1]$  d'une structure d'espace métrique séparable et complet, appelé **espace de Skorohod**.

### 3.2.4 Convergence faible et équitension

Soient  $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$  et considérons l'application de projection :

$$\pi_{t_1, \dots, t_k} : D \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

$$f \mapsto (f(t_1), \dots, f(t_k)).$$

Soit  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $(D, \mathcal{D})$ . On note  $T_{\mathbb{P}} \subset [0, 1]$  l'ensemble des points  $t$  tels que la projection  $\pi_t$  est continue  $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Plus précisément :

$$t \in T_{\mathbb{P}} \iff \mathbb{P}(\{f \in D : f(t) \neq f(t^-)\}) = 0.$$

En particulier,  $0 \in T_{\mathbb{P}}$  et  $1 \in T_{\mathbb{P}}$ .

**Théorème 3.5 (Théorème de convergence de Billingsley [5])** *Soit  $(\mathbb{P}_n)$  une suite de lois de probabilité sur  $(D, \mathcal{D})$  telle que :*

1. *La suite  $(\mathbb{P}_n)$  est équitendue ;*
2. *Pour tout  $t_1, \dots, t_k \in T_{\mathbb{P}}$ , on a :*

$$\mathbb{P}_n \circ \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \Rightarrow \mathbb{P} \circ \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}.$$

Alors :

$$\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P} \quad \text{dans } D[0, 1].$$

### 3.2.5 Principe d'invariance et convergence vers le mouvement brownien (classique et fractionnaire)

Le mouvement brownien classique (BM) et son extension fractionnaire (MBF) apparaissent comme limites de nombreux modèles discrets, notamment les marches aléatoires. Le passage du discret au continu est formalisé par le *principe d'invariance*, ou *théorème limite fonctionnel*. Ce paragraphe présente ce principe dans le cadre classique (convergence vers le BM standard), puis dans le cadre du mouvement brownien fractionnaire (convergence non triviale due à la dépendance des accroissements).

### Convergence vers le mouvement brownien classique

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que :

- $\mathbb{E}[X_i] = 0$ ,
- $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ .

On définit le processus :

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i, \quad t \in [0, 1] \quad (3.1)$$

Ce processus prend ses valeurs dans l'espace  $D([0, 1])$  des fonctions càdlàg.

**Théorème 3.6 (Donsker [13])** *Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs réelles, vérifiant :*

$$\mathbb{E}[X_i] = 0, \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty.$$

Alors, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on a :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n(\cdot) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} B(\cdot),$$

dans l'espace  $D[0, 1]$  muni de la topologie de Skorokhod, où  $(B(t))_{t \in [0, 1]}$  est un mouvement brownien standard.

**Interprétation :** Ce théorème est une version fonctionnelle du théorème central limite. Il affirme que, lorsque  $n$  devient grand, le processus de somme partielle normalisée  $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n(t) = \mathcal{E}_n(t)$  se comporte comme une trajectoire de mouvement brownien. La convergence en loi dans l'espace  $D([0, 1])$  signifie que les trajectoires du processus  $\mathcal{E}_n(t)$  convergent en distribution vers celles de  $B$ , en tenant compte à la fois des valeurs et de la structure temporelle du processus.

**Remarque 3.1** • *Le mouvement brownien  $B(t)$  est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, avec  $B(0) = 0$  et  $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .*

- *Cette convergence est fondamentale pour le passage des modèles discrets aux modèles continus, par exemple en finance (approximation du modèle de Black-Scholes par le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein).*
- *Le facteur  $\sigma$  traduit l'échelle de variance de la marche aléatoire d'origine.*

En pratique, on utilise ce résultat pour simuler le mouvement brownien, on l'approche, pour  $n$  grand, à l'aide du processus

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n(t).$$

### Simulation numérique du Mouvement Brownien Standard

```
# Paramètres
n <- 1000          # Nombre de pas
T <- 1            # Intervalle de temps [0, T]
t <- seq(0, T, length.out = n + 1)
sigma <- 1        # cart -type
# Fonction de simulation du mouvement brownien
simuler_brownien <- function(n, sigma, T) {
  dt <- T / n
  X <- rnorm(n, mean = 0, sd = sigma * sqrt(dt)) # Incréments
  # normaux
  S_n <- c(0, cumsum(X)) # Processus W(t)
  return(S_n)
}
# Simulation d'une trajectoire
traj <- simuler_brownien(n, sigma, T)
# Tracé de la trajectoire
plot(t, traj, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
      ylim = range(traj),
      xlab = "Temps t", ylab = expression(W(t)),
      main = "Simulation d'une trajectoire du Mouvement Brownien")
```

Listing 3.4 – Simulation d'un mouvement brownien standard

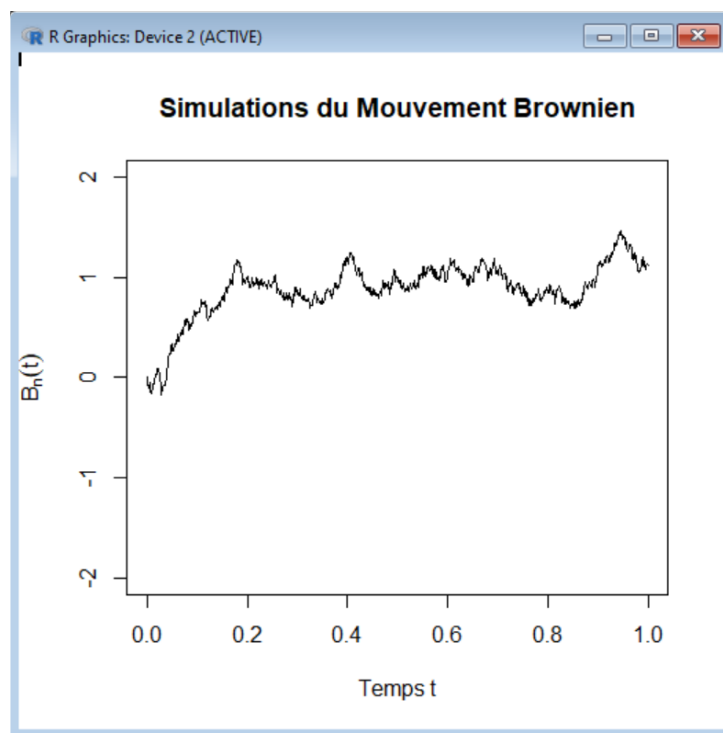
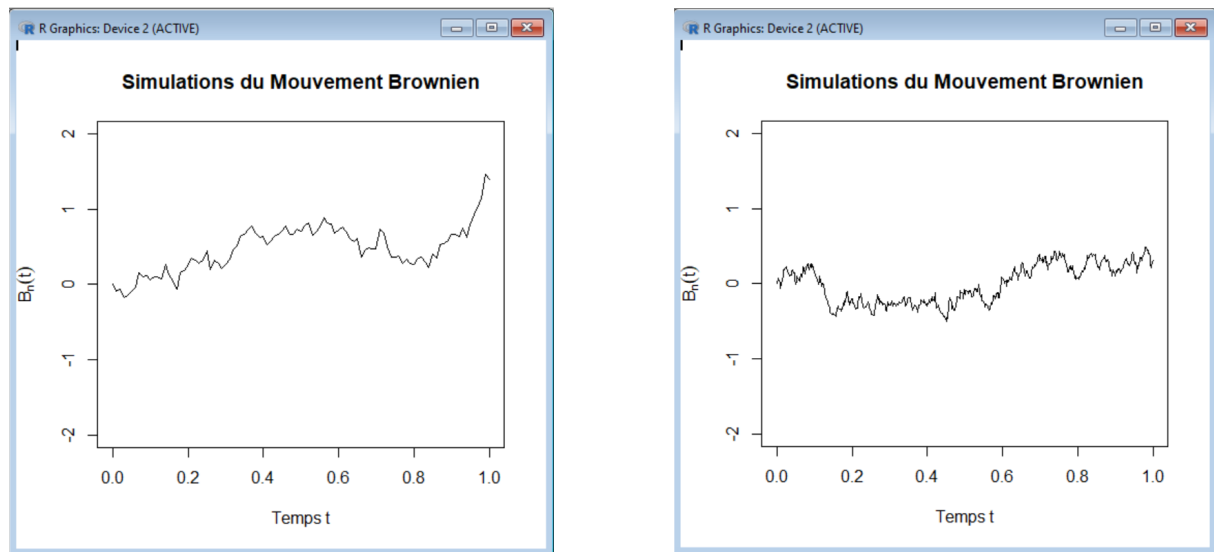


FIGURE 3.4 – Simulation du mouvement brownien

## Chapitre 3 : Simulation des trajectoires du MBF

Pour illustrer la simulation du mouvement brownien, plusieurs trajectoires ont été tracées pour deux valeurs de  $n$ , à savoir  $n = 100$  et  $n = 500$ .



(a) Trajectoires pour  $n=100$

(b) Trajectoires pour  $n=500$

FIGURE 3.5 – Simulations comparées du mouvement brownien

Le théorème suivant donne une version analogue au théorème de Donsker : le mouvement brownien fractionnaire peut également être vu comme limite d'une marche aléatoire.

**Théorème 3.7 (Taqqu [36])** Soit  $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  une suite gaussienne, stationnaire et centrée telle que

$$\text{Cov}(X_0, X_k) \sim L(k) k^{2H-2}, \quad H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

où  $L(\cdot)$  est une fonction à variation lente à l'infini.

Alors, dans l'espace de Skorokhod  $\mathcal{D}([0, 1])$ ,

$$\frac{1}{n^H} S_n(\cdot) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} c_H B^H(\cdot),$$

où  $S_n$  est la suite des sommes partielles définie par (3.1) et  $B^H$  désigne un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst  $H$  et  $c_H > 0$  est une constante dépendant uniquement de  $H$  et de la fonction  $L$ .

### 3.2.6 Simulation de trajectoires normalisées $T_n(t) = \frac{1}{n^H} S_n(t)$

```
# Nécessite : install.packages("fracdiff")
library(fracdiff)
# Paramètres
n <- 1000
H <- 0.75
t <- seq(0, 1, length.out = n + 1)
# Fonction de simulation fBm
simuler_fbm <- function(n, H) {
  fgn <- fracdiff.sim(n = n, d = H - 0.5)$series
  S_Hn <- c(0, cumsum(fgn)) / n^H
  return(S_Hn)
}
# Simulation d'une seule trajectoire
traj <- simuler_fbm(n, H)
# Tracé de la trajectoire
plot(t, traj, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
      ylim = c(-3, 3),
      xlab = "Temps t", ylab = expression(S[n]^H(t)),
      main = paste("Simulation d'une trajectoire de fBm (H=", H, ")
                  "))
```

Listing 3.5 – Simulation de trajectoires fBm avec le théorème de Taqqu

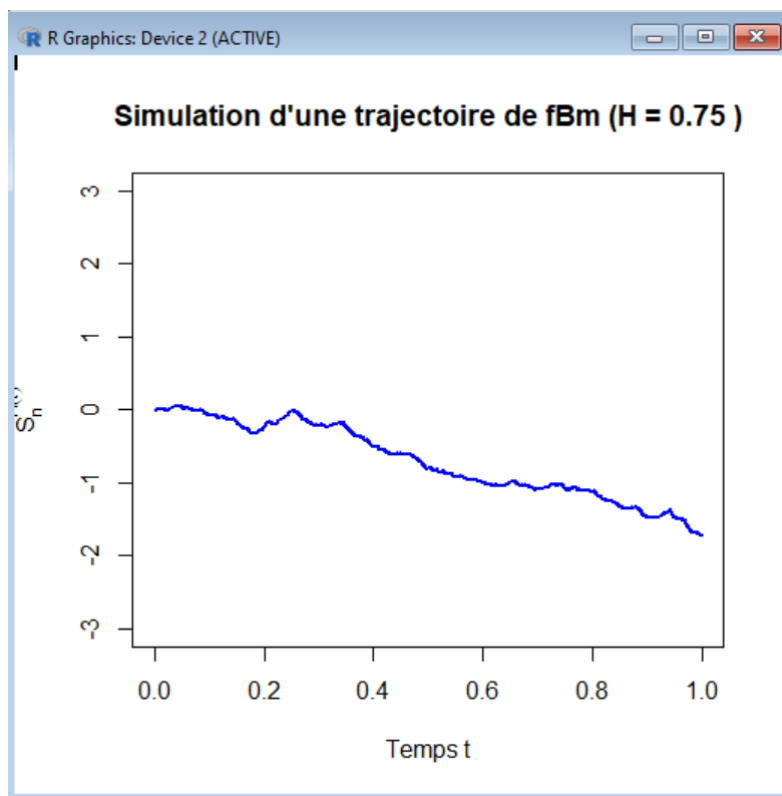
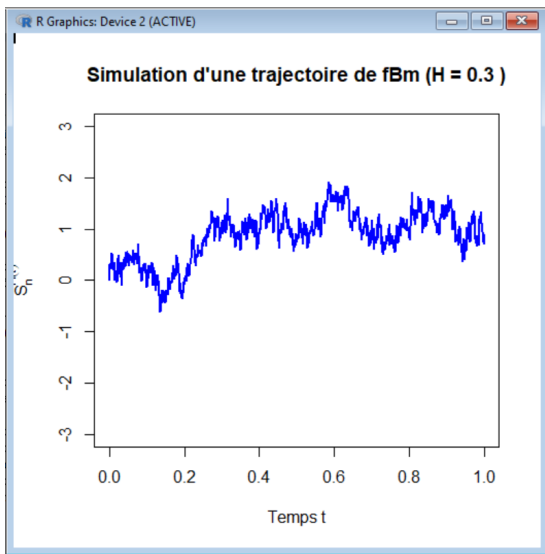


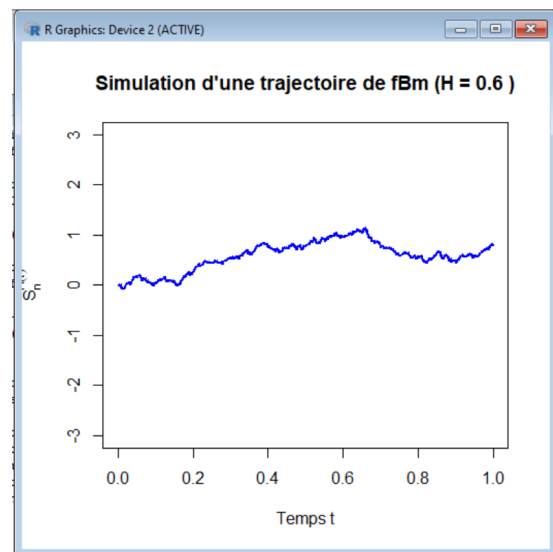
FIGURE 3.6 – Trajectoires pour H=0.75

### Chapitre 3 : Simulation des trajectoires du MBF

*Pour voir l'effet du paramètre  $H$ , on simule plusieurs trajectoires du mouvement brownien fractionnaire pour différentes valeurs de  $H$ .*



(a) Trajectoires pour  $H=0.3$



(b) Trajectoires pour  $H=0.6$

FIGURE 3.7 – Simulations comparées du mouvement brownien fractionnaire

# Chapitre 4

## Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst

### 4.1 Introduction

L'exposant de Hurst, noté généralement  $H$ , joue un rôle fondamental dans la caractérisation des **processus auto-similaires** et des **processus à mémoire longue**. Il mesure le degré de dépendance à long terme d'un signal ou d'un processus stochastique. Plus précisément, cet exposant permet de quantifier la structure de corrélation dans le temps : un processus avec  $H > 0,5$  présente une dépendance positive à long terme, tandis qu'un processus avec  $H < 0,5$  tend à montrer des alternances plus marquées dans son comportement.

La première estimation empirique de cet exposant remonte aux travaux du célèbre hydrologue **Harold Edwin Hurst**, qui a introduit dans les années 1950 la méthode de l'*analyse des étendues re-normalisées* (Rescaled Range Analysis, notée R/S). Cette méthode visait initialement à étudier les débits du Nil dans le cadre de la construction de barrages. Depuis, elle a suscité une vaste littérature, tant l'importance de l'exposant de Hurst est cruciale dans divers domaines tels que l'hydrologie, la finance, la physique statistique ou encore les télécommunications.

Au fil des années, de nombreuses techniques ont été développées pour estimer l'exposant de Hurst, en s'appuyant sur différentes représentations du signal. Ces méthodes peuvent être classées en trois grandes familles :

1. **Les méthodes spectrales** : elles exploitent les propriétés fréquentielles du signal, notamment la décroissance de la densité spectrale aux basses fréquences. Parmi ces méthodes, on distingue :
  - le *périodogramme logarithmique* [14],
  - l'*estimateur de Whittle*, fondé sur le maximum de vraisemblance dans le domaine spectral [38].
2. **Les méthodes basées sur les ondelettes** : ces techniques analysent le signal à différentes échelles temporelles à l'aide d'une transformation en ondelettes, offrant une bonne localisation temporelle et fréquentielle. On retrouve notamment :
  - la *méthode de vraisemblance maximale en ondelettes* (Wavelet Maximum Likelihood, WML) [25],

- la *méthode d'Abry-Veitch*, fondée sur une régression linéaire du log-énergie des coefficients d'ondelettes [1, 37].
3. **Les méthodes temporelles** : elles utilisent les données directement dans le domaine temporel, en analysant les variations statistiques à différentes échelles. Les principales sont :
- la *méthode des variances agrégées* [35],
  - la *méthode d'analyse des fluctuations redressées* (Detrended Fluctuation Analysis, DFA), réputée pour sa robustesse face aux tendances non stationnaires [30, 15].

Chacune de ces approches présente des avantages et des limites, selon la nature du signal étudié (stationnaire ou non, bruité ou non, longueur de la série, etc.). Ainsi, le choix de la méthode d'estimation de  $H$  doit toujours être adapté au contexte et aux propriétés du processus sous-jacent.

## 4.2 Densité spectrale

**Définition 4.1** *La densité spectrale d'un processus est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocovariance.*

*Autrement dit, on a :*

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) e^{-i\lambda h},$$

où :

- $f(\lambda)$  est la densité spectrale à la fréquence  $\lambda$ ,
- $\gamma(h)$  est la fonction d'autocovariance au décalage  $h$ .

**Définition 4.2** *Un processus stationnaire  $X_t$  est un processus à mémoire longue s'il existe un nombre réel  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ , et une constante  $a > 0$  vérifiant :*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda)}{a|\lambda|^{-\beta}} = 1$$

où  $f(\lambda)$  désigne la densité spectrale (la transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance). Comme on peut l'observer, la densité spectrale présente un pôle à la fréquence zéro.

Pour un processus à mémoire courte, la fonction d'autocorrélation associée décroît de manière exponentielle. Ainsi, la densité spectrale est finie à l'origine, et la série des autocorrélations est également finie :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \rho(k) < \infty.$$

### 4.2.1 Densité spectrale d'un BGF

La fonction d'autocorrélation du bruit gaussien fractionnaire (BGF) [11] peut s'écrire sous la forme :

$$\rho(k) = \frac{1}{2}k^{2H}h(1/k) \quad \text{pour } k \geq 1,$$

avec :

$$h(x) = (1-x)^{2H-2} + (1+x)^{2H}$$

Le développement de Taylor autour de l'origine de cette fonction donne, pour  $H \neq \frac{1}{2}$ , la relation asymptotique suivante :

$$\rho(k) \sim H(2H-1)k^{2H-2}$$

On considère la densité spectrale d'un bruit fractionnaire associée au mouvement brownien fractionnaire (fBm) [32], donnée par :

$$h(\lambda) = C_H \left( 2 \sin \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda + 2k\pi|^{2H+1}},$$

où :

- $\lambda \in [-\pi, \pi]$  est la fréquence,
- $H \in (0, 1)$  est l'exposant de Hurst,
- $C_H$  est une constante dépendant de  $H$ .

## Objectif

Étudier le comportement de  $h(\lambda)$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ .

- Approximation du sinus Lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , on utilise le développement limité :

$$\sin \left( \frac{\lambda}{2} \right) \sim \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \left( 2 \sin \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right)^2 \sim \lambda^2$$

- Séparation du terme dominant dans la somme.

On écrit la somme en séparant le terme principal  $k = 0$  :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda + 2k\pi|^{2H+1}} = \frac{1}{|\lambda|^{2H+1}} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda + 2k\pi|^{2H+1}}.$$

Ainsi, on a :

$$h(\lambda) \sim C_H \lambda^2 \left( \frac{1}{|\lambda|^{2H+1}} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda + 2k\pi|^{2H+1}} \right).$$

- Analyse asymptotique  
Développons l'expression :

$$h(\lambda) \sim C_H \left( \lambda^2 \cdot \frac{1}{|\lambda|^{2H+1}} \right) + C_H \left( \lambda^2 \cdot \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda + 2k\pi|^{2H+1}} \right),$$

Le premier terme donne :

$$C_H \cdot |\lambda|^{2-(2H+1)} = C_H \cdot |\lambda|^{1-2H}$$

Le second terme :

$$C_H \lambda^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|\lambda + 2k\pi|^{2H+1}} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 0$$

car la somme est bornée et  $\lambda^2 \rightarrow 0$ .

Au voisinage de  $\lambda = 0$ , on a donc :

$$h(\lambda) \sim C_H |\lambda|^{1-2H}.$$

ce qui montre que le comportement de la densité spectrale est asymptotiquement proportionnel à une puissance de  $\lambda$ , dépendant de  $H$ .

Donc le bruit gaussien fractionnaire (les accroissements du mouvement brownien fractionnaire) permet de détecter la présence de mémoire longue dans les séries temporelles selon la valeur de l'exposant de Hurst  $H$  :

- i) Si  $H = \frac{1}{2}$  : les autocorrélations sont nulles, la densité spectrale est constante, et le processus n'a aucune dépendance à long terme.
- ii) Si  $0 < H < \frac{1}{2}$  : les autocorrélations sont positivement corrélées, le processus est à mémoire longue, on dit alors qu'il est *persistant*.
- iii) Si  $\frac{1}{2} < H < 1$  : les autocorrélations sont négativement corrélées, le processus est à mémoire courte, on le qualifie alors d'*antipersistant*.

### 4.3 Méthode du Périodogramme

La méthode du périodogramme est l'une des plus anciennes méthodes pour estimer la densité spectrale d'un signal. Elle a été introduite par Schuster en 1898 [3] . Elle est souvent utilisée pour estimer l'exposant de Hurst  $H$ , indicateur de la dépendance à long terme dans les processus stochastiques tels que le bruit gaussien fractionnaire.

**Définition du périodogramme :** [29, 35]

Étant donnée une série temporelle  $\{X_j\}_{j=1}^N$ , le périodogramme à la fréquence  $\lambda$  est défini par :

$$I(\lambda) = |\text{TF}_X(\lambda)|^2$$

où  $\text{TF}_X(\lambda)$  est la transformée de Fourier discrète, donnée par :

$$\text{TF}_X(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{j=1}^N X_j e^{-ij\lambda},$$

avec  $i^2 = -1$ .

**Lien avec la densité spectrale :** Pour un bruit gaussien fractionnaire (BGF), la densité spectrale  $f(\lambda)$  autour de  $\lambda = 0$  se comporte comme :

$$f(\lambda) \propto |\lambda|^{1-2H}.$$

Ainsi, en prenant le logarithme du périodogramme et des fréquences, on obtient une relation linéaire :

$$\log I(\lambda) \approx \alpha + \beta \log |\lambda| \quad \text{où } \beta = 1 - 2H.$$

La pente  $\beta$  estimée via une régression linéaire permet alors d'en déduire l'exposant de Hurst :

$$H = \frac{1 - \beta}{2}.$$

### Étapes de la méthode :

1. Préparer la série temporelle  $\{X_j\}$  de taille  $N$ .
2. Calculer les fréquences discrètes :

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$$

- $2\pi$  : car on travaille en **radians** (une période complète d'une sinusoïde correspond à  $2\pi$  radians).
  - $j$  : l'**indice de fréquence** il indique le nombre de cycles par période.
  - $N$  : le **nombre total de points** (échantillons) dans la série temporelle.
  - $\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$  : on ne garde que la **moitié inférieure des fréquences**, car :
    - Pour un signal réel, le périodogramme est **symétrique** autour ( $\pi$ ).
    - On travaille donc seulement avec les **fréquences positives** pour éviter la redondance.
3. Appliquer la transformée de Fourier discrète :  
 À partir de la série temporelle  $\{X_k\}_{k=1}^N$  et des fréquences discrètes  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}$ , on calcule la transformée de Fourier discrète  $\text{TF}_X(\lambda_j)$  selon la formule suivante :

$$\text{TF}_X(\lambda_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{k=1}^N X_k e^{-ik\lambda_j},$$

où :

- $i$  est l'unité imaginaire ( $i^2 = -1$ ),
- $e^{-ik\lambda_j} = \cos(k\lambda_j) - i \sin(k\lambda_j)$ ,
- $\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}$  est la fréquence discrète associée à l'indice  $j$ .

### Détail du calcul

La transformée peut être séparée en sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$\text{Re}[\text{TF}_X(\lambda_j)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{k=1}^N X_k \cos(k\lambda_j)$$

$$\text{Im}[\text{TF}_X(\lambda_j)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{k=1}^N (-X_k \sin(k\lambda_j)).$$

Ainsi :

$$\text{TF}_X(\lambda_j) = \text{Re}[\text{TF}_X(\lambda_j)] + i \text{Im}[\text{TF}_X(\lambda_j)].$$

### Exemple numérique

Supposons  $N = 4$  et  $X = (2, 3, 5, 7)$ . Les fréquences discrètes sont :

$$\lambda_1 = \frac{2\pi \times 1}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi \times 2}{4} = \pi$$

Le calcul de  $\text{TF}_X(\lambda_1)$  s'écrit :

$$\text{TF}_X(\lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 4}} (2e^{-i\pi/2} + 3e^{-i\pi} + 5e^{-i3\pi/2} + 7e^{-i2\pi})$$

où :

$$e^{-i\pi/2} = -i, \quad e^{-i\pi} = -1, \quad e^{-i3\pi/2} = i, \quad e^{-i2\pi} = 1$$

En pratique, pour des séries longues, on utilise l'algorithme de la **transformée rapide de Fourier (FFT)** pour accélérer le calcul.

### Résumé

- Pour chaque fréquence  $\lambda_j$ , multiplier chaque  $X_k$  par  $e^{-ik\lambda_j}$ ,
  - Additionner tous les produits,
  - Normaliser par  $\frac{1}{\sqrt{2\pi N}}$ .
4. Calculer le périodogramme :

$$I(\lambda_j) = |\text{TF}_X(\lambda_j)|^2$$

5. Tracer  $\log I(\lambda_j)$  en fonction de  $\log \lambda_j$ .
6. Effectuer une régression linéaire sur les basses fréquences.
7. En déduire un estimateur de l'exposant de Hurst  $H = \frac{1-\beta}{2}$ .

**Remarque 4.1** *Le périodogramme est un estimateur biaisé et non consistant de la densité spectrale, car sa variance ne tend pas vers zéro quand  $N \rightarrow \infty$ . Pour atténuer cet effet, il est possible d'utiliser des variantes telles que le périodogramme cumulé, le lissage (moyenne mobile, fenêtrage) ou d'autres techniques spectrales améliorées.*

Code R — estimation par La méthode du périodogramme

```

# Installer et charger le package fBm
# install.packages("fBm") # Si vous n'avez pas encore ce
# package installé
library(fBm)
# Fonction pour simuler un fBm
fbm_simulation <- fonction(H, n) {
  # Générer un fBm de Hurst H et de longueur n
  fBm_object <- fBm.sim(n = n, H = H, method = "cholesky") #
  # Utilisation de la méthode de Cholesky pour simuler un fBm
  return(fBm_object$series)
}
# Fonction pour estimer Hurst via la méthode Log-périodogramme
hurst_log_periodogramme <- fonction(n, H) {
  MBF <- fbm_simulation(H, n) # Générer un fBm
  # Calcul des diff\grave{e}rences de la série pour obtenir les
  # accroissements
  BGF <- diff(MBF)
  n <- length(BGF) # Taille de la série d'accroissements
  # Calcul du périodogramme
  P <- Mod(fft(BGF))^2 / n # Périodogramme
  P <- P[2:(n/2)] # On garde seulement les fréquences positives
  # (de 1 à n/2)
  # Calcul des fréquences discrètes
  freqs <- (2 * pi * (1:(n/2 - 1))) / n
  # Régression log-log
  reg <- lm(log(P) ~ log(freqs)) # Régression linéaire log-log
  # Estimation de Hurst à partir de la pente de la régression
  H_est <- 0.5 * (1 - reg$coefficients[2])
  return(H_est)
}
# Entrée des paramètres pour l'estimation
n <- as.integer(readline(prompt = "Entrez le nombre de points de
# la série temporelle (n) :"))
H <- as.numeric(readline(prompt = "Entrez la valeur du paramètre
# de Hurst (H) :"))
N <- as.integer(readline(prompt = "Entrez le nombre d'
# estimations (N) :"))
# Réalisation des estimations
HN <- numeric(N) # Vecteur pour stocker les estimations
# Simulation et estimation du paramètre de Hurst
for (i in 1:N) {
  HN[i] <- hurst_log_periodogramme(n, H) # Appeler la fonction
  # Hurst pour chaque simulation
}
# Moyenne des estimations
H_estime <- mean(HN)
cat("Estimation du paramètre de Hurst : ", H_estime, "\n")

```

### Résultats de simulation

Posons :

- $\hat{H}$  : L'estimateur de  $H$  par la méthode Log-périodogramme.
- $n$  : Nombre de points.
- $N$  : Nombre de réalisations de  $\hat{H}$ .
- $\mathbb{E}(\hat{H})$  : L'espérance de  $\hat{H}$  (la moyenne des estimations obtenues).

Pour $N = 10$			Pour $N = 100$		
n	H	$\mathbb{E}(\hat{H})$	n	H	$\mathbb{E}(\hat{H})$
100	0.2	0.0794	100	0.2	0.1237
	0.3	0.2384		0.3	0.2841
	0.5	0.5552		0.5	0.5023
	0.6	0.6187		0.6	0.6018
	0.8	0.8635		0.8	0.8276
500	0.2	0.1076	500	0.2	0.1952
	0.3	0.2591		0.3	0.3098
	0.5	0.4979		0.5	0.4991
	0.6	0.6095		0.6	0.5984
	0.8	0.7905		0.8	0.8123

TABLE 4.1 – Estimation de  $H$  par la méthode du log-périodogramme pour différentes tailles de séries ( $n$ ) et différentes valeurs de  $H$ , selon deux tailles d'échantillonnage  $N$ .

**Remarque 4.2** *D'après les résultats des tableaux précédents, on remarque que l'estimateur de  $H$  par la méthode du log-périodogramme est asymptotiquement sans biais si  $H > \frac{1}{2}$ . En revanche, si  $H \leq \frac{1}{2}$ , l'estimateur est biaisé.*

## 4.4 La méthode de Hurst (R/S)

Cette méthode est appelée *analyse des étendues normalisées*, ou bien *Rescaled Range Analysis (R/S)*, introduite par Hurst en 1951 [18], puis modifiée par Lo en 1991 [23], est une méthode statistique classique pour estimer l'exposant de Hurst  $H$ , qui mesure la présence d'une dépendance à long terme dans une série temporelle. Elle repose sur le rapport entre l'étendue centrée cumulée (Range) et l'écart-type (Standard deviation), ce qui donne son nom à la méthode : Rescaled Range (R/S).

### Principe

Soit une série temporelle  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et sa moyenne empirique :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(i).$$

On définit la série intégrée centrée :

$$Y(k) = \sum_{j=1}^k (X(j) - \bar{X}), \quad k = 1, \dots, n.$$

L'étendue  $R$  est la différence entre le maximum et le minimum de  $Y(k)$  :

$$R = \max_{1 \leq k \leq n} Y(k) - \min_{1 \leq k \leq n} Y(k).$$

L'écart-type de la série initiale est :

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X(j) - \bar{X})^2}.$$

La statistique  $R/S$  est alors définie par :

$$\frac{R}{S}.$$

Hurst a observé que cette statistique croît de manière asymptotique avec la taille de l'échantillon  $n$  selon la relation :

$$\left(\frac{R}{S}\right)_n \sim c \cdot n^H, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où  $c$  est une constante positive indépendante de  $n$ , et  $H$  est l'exposant de Hurst caractérisant la dépendance à long terme du processus.

### Méthode d'estimation de $H$

1. Diviser la série de longueur  $N$  en  $d$  blocs de taille  $n$ .
2. Pour chaque bloc  $m = 1, \dots, d$ , calculer  $R_m/S_m$ .
3. Calculer le rapport  $\left(\frac{R}{S}\right)_n$  défini par :

$$\left(\frac{R}{S}\right)_n = \frac{1}{d} \sum_{m=1}^d \frac{R_m}{S_m}.$$

4. Répéter cette opération pour différentes tailles  $n$ .
5. Tracer le graphe  $\log((R/S)_n)$  en fonction de  $\log(n)$ .
6. Estimer la pente de la droite obtenue par régression linéaire :

$$\log\left(\frac{R}{S}\right)_n = \log(c) + H \cdot \log(n).$$

7. La pente fournit une estimation de l'exposant de Hurst  $H$ .

Code R — estimation par La méthode de Hurst (R/S)

```

library(fracdiff)
# Fonction R/S
hurst_rs <- function(x, min_block = 10, max_block = NULL) {
  N <- length(x)
  if (is.null(max_block)) {
    max_block <- floor(N / 5)
  }
  block_sizes <- seq(min_block, max_block, by = 10)
  rs_values <- numeric(length(block_sizes))
  for (b in seq_along(block_sizes)) {
    n <- block_sizes[b]
    nb_blocks <- floor(N / n)
    rs_block <- numeric(nb_blocks)
    for (k in 1:nb_blocks) {
      segment <- x[((k-1)*n + 1):(k*n)]
      mean_seg <- mean(segment)
      dev <- segment - mean_seg
      y <- cumsum(dev)
      R <- max(y) - min(y)
      S <- sd(segment)
      rs_block[k] <- ifelse(S == 0, 0, R/S)
    }
    rs_values[b] <- mean(rs_block) }
  log_n <- log(block_sizes)
  log_rs <- log(rs_values)
  # Régression linéaire pour estimer H
  reg <- lm(log_rs ~ log_n)
  H <- coef(reg)[2]
  # Affichage
  plot(log_n, log_rs, type = "b", col = "blue", pch = 19,
       main = "Méthode R/S : log(R/S) vs log(n)",
       xlab = "log(n)", ylab = "log(R/S)")
  abline(reg, col = "red", lwd = 2)
  return(H)
}
# Exemple d'utilisation : simulation d'un fBm
# Utilisation de la fonction fracdiff.sim pour générer un
# processus fractionnaire
set.seed(123)
H_theorique <- 0.75
n <- 1000
x_sim <- fracdiff.sim(n = n, d = H_theorique - 0.5)$series
# Estimation de H
H_estime <- hurst_rs(x_sim)
cat("Estimation de H par la méthode R/S:", round(H_estime, 4),
    "\n")

```

Résultats de simulation

Posons :

- $\hat{H}$  : estimateur de  $H$  par la méthode R/S (Range over Standard deviation).
- $n$  : nombre de points simulés.
- $N$  : nombre de réalisations de  $\hat{H}$ .
- $\mathbb{E}(\hat{H})$  : L'espérance de  $\hat{H}$  (la moyenne des estimations obtenues).

Pour $N = 10$			Pour $N = 100$		
n	H	$\mathbb{E}(\hat{H})$	n	H	$\mathbb{E}(\hat{H})$
100	0.2	0.5395	100	0.2	0.5159
	0.3	0.5850		0.3	0.5380
	0.5	0.6459		0.5	0.6497
	0.6	0.6865		0.6	0.6775
	0.8	0.8131		0.8	0.7919
500	0.2	0.4250	500	0.2	0.4165
	0.3	0.4728		0.3	0.4683
	0.5	0.5908		0.5	0.5938
	0.6	0.6723		0.6	0.6621
	0.8	0.7963		0.8	0.7850

TABLE 4.2 – Estimation de  $H$  pour différentes tailles de séries temporelles ( $n$ ) et différentes valeurs de  $H$ , selon deux tailles d'échantillonnage  $N$ .

**Remarque 4.1** La méthode R/S (rescaled range) est utilisée pour estimer l'exposant de Hurst  $H$ , qui mesure la dépendance à long terme dans une série temporelle. Cette méthode repose sur le rapport entre l'étendue cumulée  $R(n)$  et l'écart-type  $S(n)$  d'une série de taille  $n$ . Si la série présente une mémoire longue, ce rapport croît selon une loi de puissance :

$$\frac{R(n)}{S(n)} \sim c \cdot n^H$$

ce qui permet d'estimer  $H$  par une régression en échelle log-log.

### 4.4.1 Propriétés principales :

- **Détection de la mémoire longue :**
  - Si  $H > 0,5$ , la série est **persistante** (les valeurs tendent à continuer dans le même sens).
  - Si  $H < 0,5$ , la série est **antipersistante** (les valeurs changent souvent de direction).
  - Si  $H = 0,5$ , la série est un **bruit blanc** (pas de mémoire).
- **Méthode simple :** facile à appliquer, même sans modèle statistique avancé.
- **Basée sur l'auto-similarité :** permet de détecter si le comportement de la série reste similaire à différentes échelles de temps.

### Inconvénients :

- Sensible aux tendances ou aux données non stationnaires.

- Moins précise que d'autres méthodes modernes (comme DFA ou les ondelettes), surtout sur des séries courtes.

### Conclusion :

La méthode R/S est une bonne première approche pour analyser la mémoire à long terme, mais elle doit être utilisée avec prudence.

## 4.5 Estimation par la méthode maximum de vraisemblance (EMV)

L'estimation par maximum de vraisemblance (EMV) pour le paramètre de Hurst  $H$  d'un mouvement brownien fractionnaire (fBm) a été proposée par Dahlhaus [9]. Elle repose sur l'utilisation de la loi multinormale du processus et possède de bonnes propriétés asymptotiques : en particulier, l'estimateur  $H_{EMV}$  est consistant et asymptotiquement normal [4].

### 4.5.1 Densité d'un vecteur gaussien multivarié

Soit  $X \in \mathbb{R}^N$  un vecteur aléatoire suivant une loi normale multivariée :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma),$$

où :

- $\mu \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur moyen,
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est la matrice de covariance (symétrique définie positive).

La fonction de densité de probabilité de  $X$  est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right).$$

Dans le cadre de l'estimation du paramètre de Hurst d'un mouvement brownien fractionnaire (fBm), on suppose que  $\mu = 0$ , et que la covariance est proportionnelle à une matrice  $\Gamma_H$  dépendant de  $H$ , c'est-à-dire  $\Sigma = a\Gamma_H$ , où  $a > 0$  est un paramètre d'échelle.

La densité devient alors :

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (a^N |\Gamma_H|)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2a} x^T \Gamma_H^{-1} x\right).$$

Cette densité est utilisée pour construire le logarithme de la vraisemblance, que l'on maximise afin d'estimer le paramètre  $H$ .

L'estimateur du maximum de vraisemblance se formule de la manière suivante :

**1. Modèle et hypothèses** Considérons une série d'observations  $x = (x_1, \dots, x_N)$  du fBm aux temps  $t = (t_1, \dots, t_N)$ .

Le vecteur  $X$  suit une loi normale multivariée :

$$x \sim \mathcal{N}(0, a\Gamma_H)$$

où :

- $a > 0$  est une constante d'échelle (variance),
- $\Gamma_H$  est la matrice de covariance dont les éléments dépendent de  $H$ ,
- $\Gamma_H(i, j) = \mathbb{E}[X(t_i)X(t_j)]$ .

**2. Fonction de vraisemblance** La densité de probabilité de  $x$  est donnée par :

$$L(x; a, H) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (a^N |\Gamma_H|)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2a} x^T \Gamma_H^{-1} x\right),$$

où  $|\Gamma_H|$  désigne le déterminant de  $\Gamma_H$ .

**3. Log-vraisemblance** En prenant le logarithme :

$$\log L(x; a, H) = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{N}{2} \log(a) - \frac{1}{2} \log |\Gamma_H| - \frac{1}{2a} x^T \Gamma_H^{-1} x.$$

Le problème d'estimation revient à maximiser cette fonction par rapport à  $(a, H)$ .

**4. Estimation de  $a$**  On dérive la log-vraisemblance par rapport à  $a$  et on identifie à zéro :

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = -\frac{N}{2a} + \frac{1}{2a^2} x^T \Gamma_H^{-1} x = 0.$$

Ce qui donne :

$$a = \frac{1}{N} x^T \Gamma_H^{-1} x.$$

Ainsi,  $a$  est fonction de  $H$ .

**5. Problème réduit : estimation de  $H$**  En injectant  $a$  dans la log-vraisemblance, on obtient une fonction de  $H$  seule à maximiser :

$$Q(H) = -N \log\left(\frac{1}{N} x^T \Gamma_H^{-1} x\right) - \log |\Gamma_H|.$$

**6. Méthode d'optimisation** Le problème consiste alors à trouver  $H$  qui maximise  $Q(H)$ . Cela se fait généralement par une méthode numérique [4] telle que :

- Méthode du gradient,
- Méthode quasi-Newton.

**Remarque 4.1** *la concavité de  $Q(H)$  n'est pas toujours garantie théoriquement ; elle doit être vérifiée numériquement.*

Appliquons la méthode du gradient pour la résolution du problème de minimisation

$$\hat{H} = \arg \min_{H \in (0,1)} Q(H).$$

**Étapes de la méthode du gradient :**

1. **Initialisation :** choisir une valeur initiale  $H_0 \in (0, 1)$ , par exemple  $H_0 = 0.5$ .
2. **Calcul de la fonction objectif :** pour chaque itération  $k$ , calculer  $Q(H_k)$ .
3. **Approximation du gradient :** si l'on ne dispose pas d'une expression analytique, on utilise une approximation par différences finies :

$$\frac{dQ}{dH}(H_k) \approx \frac{Q(H_k + \varepsilon) - Q(H_k - \varepsilon)}{2\varepsilon},$$

où  $\varepsilon$  est un petit pas, typiquement  $10^{-4}$ .

4. **Mise à jour du paramètre :** selon la règle de descente du gradient :

$$H_{k+1} = H_k - \alpha \cdot \frac{dQ}{dH}(H_k),$$

où  $\alpha$  est le pas d'apprentissage.

5. **Critère d'arrêt :** on arrête lorsque  $|H_{k+1} - H_k| < \epsilon$ , ou bien lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint.

**Remarque 4.2** La matrice de covariance  $\Gamma_H$  est définie par :

$$\Gamma_H(i, j) = \frac{1}{2} (|i|^{2H} + |j|^{2H} - |i - j|^{2H}).$$

### 4.5.2 Propriétés de l'estimateur de H par la méthode du Maximum de Vraisemblance (EMV)

L'estimateur du paramètre de Hurst  $\hat{H}_{EMV}$  issu de la méthode du Maximum de Vraisemblance possède plusieurs propriétés asymptotiques importantes :

1. **Convergence presque sûre :**

$$\hat{H}_{EMV} \xrightarrow{\text{P.s.}} H \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty$$

L'estimateur converge presque sûrement vers la vraie valeur du paramètre de Hurst lorsque la taille de l'échantillon  $N$  augmente.

2. **Estimation asymptotiquement sans biais :**

$$\mathbb{E}[\hat{H}_{EMV}] \rightarrow H \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Cela signifie que le biais de l'estimateur tend vers zéro lorsque la taille de l'échantillon devient grande.

3. **Normalité asymptotique :**

$$\sqrt{N} (\hat{H}_{EMV} - H) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

L'estimateur est asymptotiquement normal, ce qui permet de construire des intervalles de confiance classiques.

### 4. Variance explicite de l'estimateur (donnée par Lai, 2004) :

$$\sigma(\hat{H}_{EMV}) = \frac{2}{\text{trace} \left( \left[ \Gamma_H^{-1} \dot{\Gamma}_H \right]^2 \right)},$$

où :

- $\Gamma_H$  est la matrice de covariance du vecteur de données,
- $\dot{\Gamma}_H = \frac{\partial \Gamma_H}{\partial H}$  est sa dérivée par rapport à  $H$ .

### 5. Efficacité :

L'estimateur EMV est efficace au sens asymptotique, ce qui signifie qu'il atteint la borne de Cramér-Rao dans certains cas. Il possède ainsi une variance minimale parmi les estimateurs réguliers.

### Résumé visuel de l'EMV :

- **Entrée** : Observations  $(x_1, \dots, x_N)$ .
- **Étape 1** : Calculer la matrice de covariance  $\Gamma_H$ .
- **Étape 2** : Calculer  $x^T \Gamma_H^{-1} x$  pour chaque  $H$ .
- **Étape 3** : Maximiser  $Q(H)$ .
- **Sortie** : Estimation de  $H$  et de  $a$ .

### Code R — estimation par La méthode du Maximum de vraisemblance (EMV)

```
# Chargement des bibliothèques nécessaires
library(MASS) # Pour l'inversion de matrices et d'autres
calculs

# Fonction pour simuler un mouvement brownien fractionnaire
simulate_fbm <- fonction(H, N) {
  # Création de la matrice de covariance (Gamma_H)
  gamma <- matrix(0, nrow = N, ncol = N)
  for (i in 1:N) {
    for (j in 1:N) {
      gamma[i, j] <- abs(i - j)^(2 * H) # Covariance simple
    }
  }

  # Générer un vecteur gaussien de taille N avec la matrice de
  covariance gamma
  X <- mvrnorm(1, mu = rep(0, N), Sigma = gamma)
  return(X)
}

# Fonction pour calculer la fonction de vraisemblance
log_likelihood <- fonction(params, x, N) {
```

```
H <- params[1] # Paramètre de Hurst
a <- params[2] # Paramètre a (scalabilité)

# Créer la matrice Gamma_H pour un paramètre H donné
gamma_H <- matrix(0, nrow = N, ncol = N)
for (i in 1:N) {
  for (j in 1:N) {
    gamma_H[i, j] <- abs(i - j)^(2 * H) # Covariance simple
  }
}

# Calcul de l'inverse de Gamma_H
inv_gamma_H <- solve(gamma_H)

# Calcul du log de la vraisemblance
log_likelihood_value <- -0.5 * N * log(2 * pi) - 0.5 * log(det
  (gamma_H)) - 0.5 * t(x) %*% inv_gamma_H %*% x / a
return(-log_likelihood_value) # Renvoie la négative car nous
  minimisons
}

# Fonction pour estimer le paramètre H par la méthode du maximum
  de vraisemblance (EMV)
estimate_H_EMV <- fonction(x, N) {
  # Initialiser les paramètres de départ
  initial_params <- c(0.5, 1) # H initialisé à 0.5, a initialis
    é à 1

  # Optimisation de la fonction de vraisemblance pour estimer H
    et a
  result <- optim(initial_params, log_likelihood, x = x, N = N,
    method = "BFGS", control = list(fnscale = -1))

  # Estimations des paramètres
  H_est <- result$par[1]
  a_est <- result$par[2]

  return(H_est)
}

# Exemple d'utilisation

N <- 100 # Taille de la trajectoire
H_true <- 0.7 # Valeur vraie du paramètre de Hurst

# Simuler une trajectoire du MBF
x <- simulate_fbm(H_true, N)

# Estimer le paramètre H par la méthode EMV
```

```
H_estimated <- estimate_H_EMV(x, N)

# Afficher le résultat
cat("Estimation du paramètre H:", H_estimated, "\n")
```

### Résultats de simulation

Posons :

- $\hat{H}$  : L'estimateur de  $H$  par la méthode du Maximum de Vraisemblance (EMV).
- $n$  : Nombre de points.
- $N$  : Nombre de réalisations de  $\hat{H}$ .
- $\mathbb{E}(\hat{H})$  : L'espérance de  $\hat{H}$  (la moyenne des estimations obtenues).

Pour $N = 10$			Pour $N = 100$		
<b>n</b>	<b>H</b>	$\mathbb{E}(\hat{H})$	<b>n</b>	<b>H</b>	$\mathbb{E}(\hat{H})$
100	0.2	0.2058	100	0.2	0.2032
	0.3	0.2987		0.3	0.3017
	0.5	0.5041		0.5	0.5012
	0.6	0.5979		0.6	0.5993
	0.8	0.7886		0.8	0.7964
500	0.2	0.2012	500	0.2	0.2009
	0.3	0.3021		0.3	0.2985
	0.5	0.4989		0.5	0.4998
	0.6	0.6023		0.6	0.6007
	0.8	0.8010		0.8	0.8001

TABLE 4.3 – Estimation de  $H$  par la méthode du maximum de vraisemblance (EMV) pour différentes tailles de séries ( $n$ ), différentes valeurs de  $H$  réels, et différents nombres de simulations  $N$ .

# Conclusion générale

Le mouvement brownien fractionnaire (MBF) est un processus stochastique fondamental qui généralise le mouvement brownien classique en introduisant un paramètre appelé l'exposant de Hurst  $H$ , permettant de modéliser la dépendance à long terme et la régularité des trajectoires.

Dans ce mémoire, nous avons d'abord étudié les propriétés mathématiques du MBF, notamment sa nature gaussienne, son autosimilarité et la non-indépendance de ses accroissements. Nous avons mis en évidence le rôle clé du paramètre de Hurst dans la caractérisation des trajectoires : plus  $H$  est grand, plus les trajectoires sont régulières et présentent une mémoire longue.

Nous avons ensuite présenté plusieurs méthodes numériques de simulation du mouvement brownien fractionnaire (MBF), en particulier la décomposition de Cholesky et la méthode de Wood et Chan, qui repose sur des techniques efficaces de génération de processus gaussiens à covariance spécifiée via la transformée de Fourier rapide (FFT). Ces simulations nous ont permis de visualiser concrètement l'influence du paramètre de Hurst  $H$  sur les trajectoires du MBF, en observant les variations de régularité et la mémoire à long terme selon les valeurs de  $H$ .

Par la suite, nous avons mis en œuvre plusieurs méthodes d'estimation du paramètre de Hurst, notamment la méthode du log-périodogramme, la méthode R/S (Rescaled Range Analysis) et l'estimation par maximum de vraisemblance (EMV). Ces approches ont été testées sur des données simulées, et les résultats ont montré que la précision des estimations s'améliore significativement avec la taille de l'échantillon. Chaque méthode présente ses propres avantages et limites, mais dans l'ensemble, elles permettent toutes d'approcher efficacement la valeur réelle de  $H$  dans un cadre contrôlé.

Ce travail ouvre ainsi la voie à des applications concrètes du MBF dans des domaines variés comme la finance, les télécommunications, la biologie ou l'hydrologie, où la modélisation de phénomènes à mémoire longue est cruciale. Des pistes futures pourraient inclure l'exploration d'autres méthodes d'estimation, ainsi que l'application à des données réelles.

# Bibliographie

- [1] Abry, P., & Veitch, D. (1998). Wavelet analysis of long-range-dependent traffic. *IEEE Transactions on Information*, 44, 2–15.
- [2] Asmussen, S. (1999). Stochastic simulation with a view towards stochastic processes. Notes of a Concentrated Advance Course at MaPhySto, Aarhus, Denmark.
- [3] Benesty, J. Estimation spectrale, méthodes non paramétriques.
- [4] Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman and Hall, New York.
- [5] Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York.
- [6] Biagini, F., Oksendal, B., Hu, Y., & Zhang, T. (2008). *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. Springer.
- [7] Breton, J.-C. (2017). Cours M2 mathématiques : Processus stochastique. Université de Rennes1.
- [8] Jean-François Coeurjolly, Simulation and identification of the fractional Brownian motion : A bibliographical and comparative review, *Journal of Statistical Software*, 5(7), 2000.
- [9] Dahlhaus, R. (1989). Efficient parameter estimation for self-similar processes. *The Annals of Statistics*, 17(4), 1749–1766.
- [10] Davies, R.B., & Harte, D.S. (1987). Tests for Hurst effect. *Biometrika*, 74, 95–102.
- [11] Dieker, T. (2004). *Simulation of Fractional Brownian Motion*. PhD thesis, Twente University.
- [12] Dietrich, C.R., & Newsam, G.N. (1997). Fast and exact simulation of stationary Gaussian processes through circulant embedding of the covariance matrix. *SIAM Journal Sci. Comput.*, 18, 1088–1107.
- [13] Donsker, Monroe D. (1951) An Invariance Principle for Certain Probability Limit Theorems. *Memoirs of the American Mathematical Society*, Volume 6. American Mathematical Society.
- [14] Geweke, K., & Porter-Hudak, S. (1983). The estimation and application of long memory time series models. *Time Series Anal.*, 4, 221–238.
- [15] Goldberger, A. L., et al. (2000). Components of a new research resource for complex physiologic signals. *Circulation*, 101(23), e215–e220.
- [16] Ary L. Goldberger, Luis A. N. Amaral, Jeffrey M. Hausdorff, Plamen Ch. Ivanov, C.-K. Peng, and H. Eugene Stanley. Fractal dynamics in physiology : Alterations with disease and aging. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(Suppl 1) :2466–2472, 2002.

- [17] Hazeb, R. (2016). Intégration stochastique par rapport aux mouvements browniens fractionnaire et sous-fractionnaire et applications aux équations différentielles stochastiques. Mémoire de Master, Université Dr Tahar Moulay-Saïda.
- [18] Hurst, H.E. (1951). Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 116, 770–799.
- [19] Le Gall, J.-F. (2011). Mouvement Brownien, Martingales Et Calcul Stochastique. Université Paris-Sud.
- [20] Joachim Y. Nahmani. Introduction to stochastic integration w.r.t fBm. Institut of Mathematics A (june2009)
- [21] Kolmogorov, A.N. (1940). Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum. C. R. Acad. Sci. URSS (N.S.), 26, 115–118.
- [22] Lai, D. (2004). Estimating the Hurst effect and its application in monitoring clinical trials. Computational Statistics and Data Analysis, 45, 549–562.
- [23] Lo, A.W. (1991). Long-term memory in stock market prices. Econometrica, 59, 1279–1313.
- [24] Mandelbrot, B.B., & Van Ness, J.W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Review, 10(4), 422–437.
- [25] McCoy, E.J., & Walden, A.T. (1996). Wavelet analysis and synthesis of stationary long-memory processes. Comput. Graph. Stat., 5, 26–56.
- [26] Nourdin, I. (2012). Selected Aspects of Fractional Brownian Motion. Bocconi Springer.
- [27] Prohorov, Y. V. (1956). Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. Theor. Prob. Appl., 1, 157–214.
- [28] Revuz, D., & Yor, M. (1999). Continuous Martingales and Brownian Motion. Third Edition, Springer-Verlag.
- [29] Robinson, P.M. (1995). Log-periodogram regression of time series with long range dependence. The Annals of Statistics, 23, 1048–1072.
- [30] Robert, C.P. (2006). Le choix bayésien : Principes et pratique. Springer-Verlag France, Paris.
- [31] Russo, F., & Vallois, P. (2000). Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes. Stochastics Rep, 70(1–2), 1–40.
- [32] Samorodnitsky, G., & Taqqu, M.S. (1994). Stable non-Gaussian random processes. Chapman Hall/CRC.
- [33] Nicolas Savy. Mouvement Brownien Fractionnaire, applications aux télécommunications. Calcul stochastique relativement à des processus fractionnaires. Thèse de doctorat, Université Rennes 1, 2003.
- [34] Tommi Sottinen. Fractional Brownian motion, random walks and binary market models. Finance and Stochastics, vol. 5, no. 3,
- [35] Taqqu, M., Teverovsky, V., & Willinger, W. (1995). Estimators for long-range dependence : an empirical study. Fractals, 3, 785–798.

## Bibliographie

---

- [36] Taqqu, M. S. (1975). Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 31(4), 287–302.
- [37] Veitch, D., & Abry, P. (1999). A wavelet based joint estimator of the parameters of long-range dependence. *IEEE Trans. Info. Theory*, 45, 878–897.
- [38] Whittle, P. (1953). Estimation and information in stationary time series. *Ark. Mat.* 2, 423–434.
- [39] Wood, A., & Chan, N. (1994). Simulation of fractional Brownian motion. *Journal of Computational and Graphical Statistics*.