République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etude De MASTER ACADEMIQUE

Spécialité : Commande des systèmes
Filière : **Automatique**

Présenté par
Lamia kacimi
Nora Lhadj

Mémoire dirigé par **Ahmed Maidi**

Thème

Planification de trajectoires des systèmes à paramètres distribués

Mémoire soutenu publiquement le09/09 /2015 devant le jury composé de :

M. Djenoune Said
Professeur, UMMTO, Président

M. Ahmed Maidi
Maitres de conférences classe A, UMMTO, Promoteur

M. Mellah Rabeh
Maitres de conférences classe A, UMMTO, Examinateur

M. Touat Mohand Achour
Maitre de conférences classe B, UMMTO, Examinateur

Ce travail a été préparé au sein du laboratoire de conception et de conduite des systèmes de production (L2CSP), UMMTO.

Remerciements

Nous devons tout d'abord remercier ALLAH le tout puissant pour toute la volonté et le courage qui nous a donné tout au long de notre vie.

On tiens à exprimer nos remerciements les plus distingués à Monsieur ***A. Maidi****, non seulement pour avoir proposé le sujet et accepté d'encadrer ce travail, mais surtout pour avoir insufflé le désir et la passion de la recherché, qu'il trouve dans ces mots l'expression de nos vifs remerciements.*

Nous remercions le président du jury et les examinateurs devant qui nous avons l'honneur d'exposer notre travail, et qui ont pris la peine de lire avec soin, ce mémoire pour juger son contenu.

On remercie nos chers parents infiniment pour leur amour, leur confiance et leur soutien inconditionnel pendant ces années, sans eux on ne serait pas là.

Nous remerciements, vont aussi à tous ceux qui nous ont aidés, et contribués, de prés et de loin à la réalisation de notre modeste travail.

Merci

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

A la lumière de ma vie ma mère qui m'a toujours soutenus

A la mémoire de mon père et de ma grande mère

A mes très chères sœurs Cilia et Lydia

A mes chers oncles et chères tantes

A mes cousines et cousins surtout Moumouh, Sofiane, Abd rehmane et sa femme Yamina

A mes meilleurs amies Kahina, Nouara, Nassima, Malha, Amel et Samia

Pour mon binôme Lamia et sa famille

A toute la section d'automatique M2

Lhadj Nora

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

A ma très chère mère qui a été toujours à mes coté, et que Dieu le tout puissant te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mon père, ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A mes grands parents surtout ma grand-mère paternelle et que Dieu la bénie parmi ses chers aimés, et toute ma famille.

A mes très chères frères et sœurs pour l''aide et le soutien qu'ils m'apportent.

A tous mes amis (es) pour leur présence rassurante et leur amitié sincère.

Kacimi Lamia

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est de développer une des méthodes appliqué pour résoudre le problème de planification de trajectoires pour les systèmes à paramètres distribué qui est le développement en séries formelles, et l'application de cette méthode pour l'équation de chaleur et l'équation d'onde.

Mots Clés

Systèmes à paramètres distribués, équations aux dérivées partielles, planification de trajectoires, système de réaction-diffusion, méthode des différences finies, équation de chaleur, équation d'onde.

SOMMAIRE

Y (z, t) : La sortie du système.

M, L, H : Opérateurs matriciels différentiels comportant que des dérivées par rapport à z.

R : Ensemble des nombres réels.

T : Sous-ensemble de l'ensemble réel qui représente le domaine temporel.

Ω : Sous-ensemble de l'ensemble réel représente le domaine spatial.

z : Variable d'espace

t : Variable de temps

: La condition initiale

: La sortie a l'instant

: Le temps initial

Fr(Ω) : L'ensemble des frontières de Ω.

$\delta(\; - \;)$: Le pic de Dirac.

C(z) : La structure géométrique des capteurs.

T_0 (t), T_f (t) : Les conditions aux limites de Dirichlet.

F_0(t), F_f (t) : Les conditions aux limites de Neumann.

λ : Coefficient de diffusivité thermique.

a_k(t) : Coefficient variant dans le temps d'une série formelle.

a, b : Les frontières de domaine de discrétisation. (Chapitre II)

h=Δt : Pas de discrétisation.

x' (t) : La première dérivée par apport au temps.

x'' (t) : La deuxième dérivée par rapport au temps.

l : Longueur de la barre métallique.

N : Nombres de points de discrétisation.

q_1, q_2 : Les flux de la chaleur.

k : La conductivité thermique.

ΔQ : La quantité de chaleur.

: Champs électrique.

: Champs magnétique.

c : Célérité (m/s).

T : Période = λ/c 5 (s).

: La longueur d'onde (m).

f : Fréquence= 1/T (Hz).

n : La force a l'extrémité.

θ : L'angle de vecteur de force avec l'horizontale.

: La densité de la corde

: La sortie de référence

ω : La pulsation

Abréviations utilisées

EDP : Equation aux dérivées partielles.

EDO : Equation aux dérivées ordinaires.

SPD : Système à paramètres distribués.

Introduction Générale

L’un des problèmes récemment introduit dans le cas des systèmes à paramètres distribués est celui de la planification des trajectoires qui consiste à concevoir une commande en boucle ouverte pour construire des trajectoires souhaitées pour les états ou les sorties du système à des positions données.

Pour la solution de ce problème pour les systèmes de dimension linéaires et non linéaires finie plusieurs recherches ont été effectuées et parmi ces recherches on a celle introduite par Fliess [6], la platitude différentielle, qui a évolué pour devenir une technique d’inversion bien établie.

La platitude peut être adaptée à des systèmes régit par des équations aux dérivées partielles et pour ceci différentes techniques ont été développées. Ces dernières seront étudies dans ce mémoire.

En effet, dans des nombreuses applications industrielles (réacteur chimique, bioréacteurs, bio-filtre, décanteurs, propagation d’onde, diffusion de la chaleur, mécanique des fluides, …), les variables caractéristiques du système dépendent fréquemment de coordonnées spatiales d’où la nécessité de caractériser leurs évolutions par des modèles dynamiques à paramètres distribués. Ceci fait intervenir des EDP, c'est-à-dire des équations mettant en jeu des dérivées partielles spatiales et temporelles des différentes variables caractéristiques des systèmes.

La description mathématique d’un système à paramètres distribués (SPD) doit être complétée par des conditions aux limites qui représentent des contraintes physique auxquelles sont soumises les frontières du système, et permettant la résolution des équations du modèle. Par conséquent, elles doivent être en nombre suffisant dépendant de l’ordre des EDP par rapport à la variable d’espace.

Les EDP que l’on rencontre en pratique sont rarement d’ordre élevé en temps et en espace, le plus souvent d’ordre deux en espace et d’ordre un en temps, et de type linéaire.

La modélisation mathématique des systèmes est considérée comme élément de base dans l'automatique. Elle s'impose pour simulation, la conception, la détection de défaut, le diagnostique de panne et la commande.

Le présent mémoire est organisé comme suit :

Le chapitre I donne quelques définitions et la description mathématique des systèmes à paramètres distribués (ou répartis), à savoir les types de commande et d'observation utilisées lors de l'analyse et de la commande de ce type de systèmes. Cette partie est suivie de la définition et les différents types de conditions aux limites des systèmes à paramètres distribués.

Le chapitre II présente le couplage de phénomène de transport (réaction et diffusion). En effet, la modélisation du phénomène de transport conduit fréquemment à des modèles à paramètres distribués. Ce chapitre débute par la formulation du problème de réaction-diffusion à savoir son sens physique, et afin de résoudre ce problème on part d'une trajectoire de sortie de référence, ensuite on combine ce résultat avec une loi de commande pour stabilisé la trajectoire et pour forcer la sortie à suivre la trajectoire de sortie de référence imposée.

Par la suite, on aborde la planification des trajectoires des systèmes à paramètres distribués. Cette partie présente aussi la méthode d'approximation par les différences finies, utilisé par la simulation.

Le chapitre III présente en premier lieu les différents modes de transfert thermique, la représentation mathématique de l'équation de chaleur. Ensuite, on établit le modèle de cette dernière. La deuxième partie est consacrée à la planification de trajectoires.

Le chapitre IV présente au début des généralités sur les ondes et les différents types des ondes. Ensuite, on aborde la modélisation de l'équation d'onde d'une corde vibrante. On commence par la formulation du problème de planification de trajectoire, suivi de sa résolution et des résultats de simulation obtenus.

Enfin on termine notre travail par la conclusion générale sur le travail réalisé, tout en proposant des perspectives de continuité.

Chapitre

1

Système à paramètres distribués

I. 1. Introduction

Pour comprendre et développer des automatismes, il est nécessaire de connaître le comportement des éléments qui font partie du système et de la commande, donc il faut un modèle mathématique qu'est une expression mathématique qui représente le comportement dynamique du système. Ces expressions permettent de déterminer analytiquement (ou numériquement) la réponse (sortie) d´un système quand l'entrée est soumise à des variations dans le temps et dans l'espace.

Les modèles mathématiques des systèmes à paramètres distribues sont donnés sous forme des équations aux dérivées partielles. Elles peuvent êtres linéaires ou non linéaires suivant le système et la gamme de fonctionnement sur lequel on veut l'étudier.

Le contenu de ce chapitre est consacré essentiellement à la définition, à la description mathématique ainsi que les types d'observation et de commande pour les systèmes à paramètres distribués.

I. 2. Définition d'un système à paramètre distribués

Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes décrits essentiellement par des équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé) linéaires ou non linéaires, éventuellement couplées avec des équations différentielles ordinaires (EDO en abrégé), des équations intégrales ou intégra-différentielles et des équations algébriques.

Les systèmes à paramètres distribués sont représentés dans des espaces fonctionnels de dimension infinie.

Les variables indépendantes sont le temps et l'espace, les variables spatiales pouvant être mono- ou multidimensionnels.

I. 3. Représentation mathématique des systèmes à paramètre distribués

Les équations aux dérivées partielles sont des équations différentielles qui dépendent des variables de temps et d'espace. Ce type de systèmes est de dimension infinie.
Dans le cas général d'un système d'ordre 2, dont la solution y (z, t) est fonction de deux variables indépendantes z et t, le modèle mathématique s'écrit comme suit [1]:

$$a\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} + 2\mathrm{b}\,\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z \partial t} + \mathrm{c}\,\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} + [\dots\dots\dots] = 0 \qquad (\mathrm{I.1})$$

Où le terme entre crochets dépend de y, z, t et des dérivées premières de y.
Par analogie avec l'équation des coniques, l'équation (I.1) est dite :

- Hyperbolique, si b^2-ac > 0
- Elliptique, si b^2-ac < 0
- Parabolique, si b^2-ac = 0

Si les trois coefficients a, b et c sont nuls, le type d'équation dépend des seules dérivées premières de y (équation hyperbolique d'ordre 1).

Si b=c=0 l'équation d'évolution (I.1) est dans ce cas soit parabolique (a≠0), ou hyperbolique (a=0).

On considère la classe de systèmes définie par l'équation d'état [1] :

$$\frac{\partial y(z,t)}{\partial t} = \mathrm{M}\,[\mathrm{y}\,(\mathrm{z},\mathrm{t})] + \mathrm{H}\,(\mathrm{z})\mathrm{u}\,(\mathrm{z},\mathrm{t}) \qquad (\mathrm{I.2})$$

Sur un domaine spatial $\Omega \subset R$ est un domaine temporel $T \subset R$ avec $y_0 = y(z, t_0)$ est l'état initial.

Des conditions aux limites doivent aussi être fixées sur la fonction de Ω, elles prennent la forme suivante :

$$\mathrm{L}\,[\mathrm{y}\,(z',\mathrm{t})] = u_1(z',t) \qquad z' \in Fr(\Omega) \qquad (I.3)$$

L, M et H sont des opérateurs matriciels différentiels agissant sur le vecteur d'état y.
u (z, t) et $u_1(z^{'}, t)$ sont les entrées ou commandes du système.

I. 4. Commandes et des observations d'un système à paramètres distribués

I. 4. 1. Commandes d'un système à paramètres distribués

On distingue plusieurs classes de commande [2]

- **Commande répartie**

Représentées par des fonctions définit sur Ω×T, en générale u (z, t) peut être décomposé comme suit :

$$\mathrm{u}\ (\mathrm{z}, \mathrm{t}) = \mathrm{q}(\mathrm{z}).\, u_e(\mathrm{t}) \qquad (\mathrm{I.}\,4)$$

$q\ (z)$: représente la structure géométrique de l'actionneur.
u_e : représente le signal d'entrée.

Cette formulation permet de simplifier le calcul dans la transformation du modèle et la détermination de la commande.

- **Commande par zone**

Définit sur un sous-ensemble Ω×T, si la commande est appliquée sur n zones on a :

$$u\ (z, t) = \sum_{i=1}^{n} q_i\ (z) u_{ei}(t) \qquad (I.5)$$

- **Commande ponctuelle**

Agissant sur un ou plusieurs points de **Ω**, cette commande est un cas particulier où la commande par zone se réduit à un point particulier dans **Ω**, la fonction q_i(z) est remplacée par un pic de Dirac.

$$u\ (z, t) = \sum_{i=1}^{n} u_{ie}\ (t) \delta(z - z_i) \qquad (I.6)$$

δ : La fonction (pic) de Dirac.

- **Commande aux frontières**

Définit sur Fr(**Ω**) ×T, cette commande peut être elle-même par zones, ponctuelle, fixe ou à balayage dans le cas ou (Ω ⊂ R^2 ou R^3).

I. 4. 2. Observation d'un système à paramètres distribués

Il est nécessaire d'adjoindre à l'équation d'état, une fonction caractéristique de la sortie ou de l'observation du système pour tout le problème de commande en boucle fermée. On distingue plusieurs classes d'observation [2] :

- **Observation répartie**

Définit sur un ensemble **Ω**×T ou sur un sous-ensemble **Ω**×T

$$y\,(z,t) = P(z)\,y\,(z,t) \qquad (I.7)$$

$P(z)$: caractérise la structure géométrique du système d'observation.

- **Observation ponctuelle**

Définit sur un ou plusieurs points de Ω ou de $\partial\Omega$.

$$y_i(t) = y(z_i,t) = \int_\Omega \delta(z-z_i)\,y(z,t)\,dz \qquad (I.8)$$

- **Observation par moyennage spatial**

Définit par l'intégrale suivante :

$$y_m(t) = \int_\Omega C(z) y(z,t)\,dz \qquad (I.9)$$

$C(z)$: est la structure géométrique des capteurs.

- **Observation à la frontière (ou à la frontières)**

Les limites sont définies sur $F_r\Omega \times\ t_f$; elles peuvent être par zones, ponctuelles, fixes.

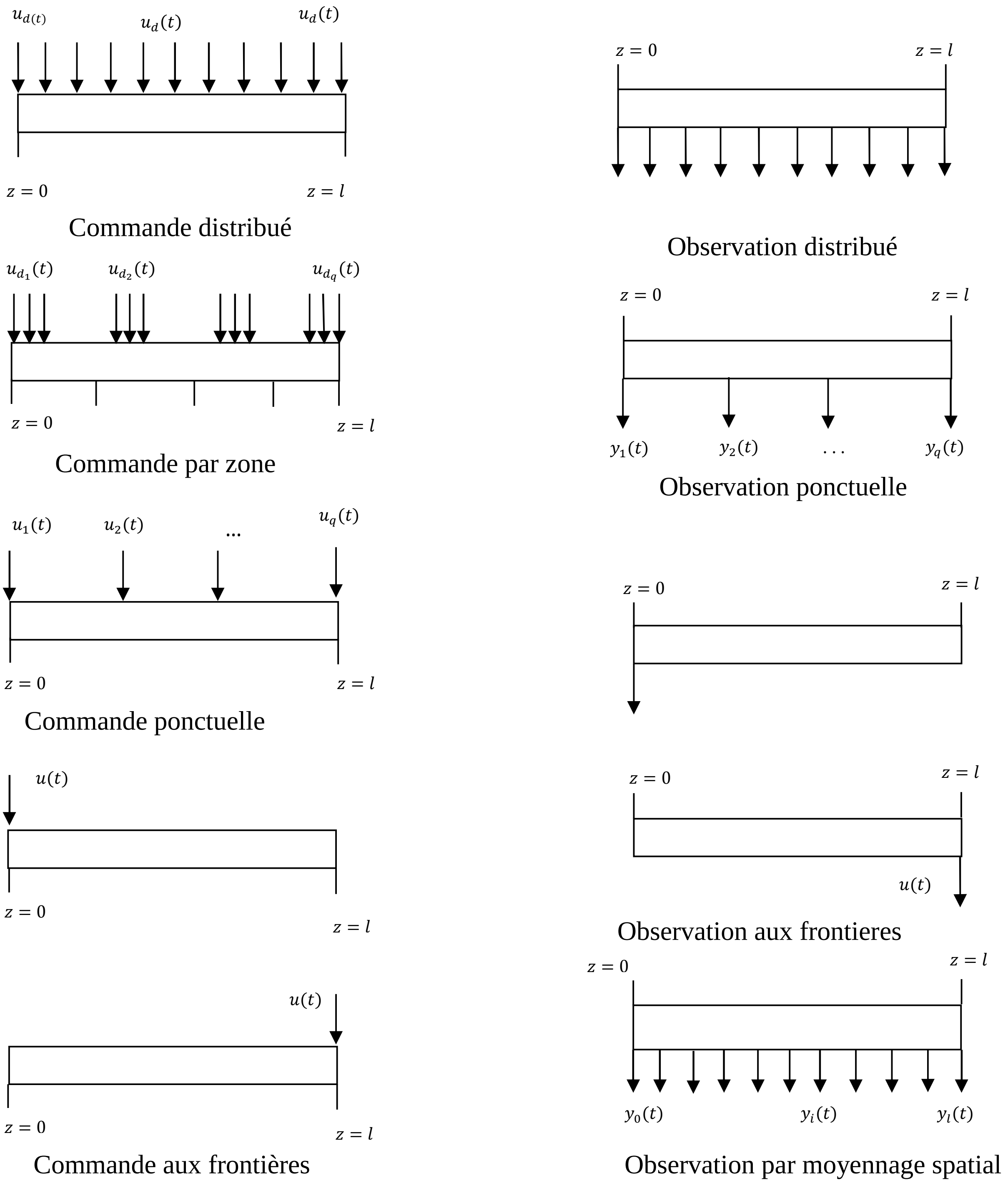

Figure I. 1. Différents types de commandes et d'observations d'un SPD.

I. 5. Condition aux limites

Une condition aux limites est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution en cas des dérivées doit vérifier sur les frontières du domaine.

On considère une barre métallique, assimilée à un segment de droite de longueur l, en négligeant la variation de la température dans les autres dimensions de la barre, il existe plusieurs types de conditions aux limites [3] :

- **Conditions de Dirichlet**

La condition aux limites de Dirichlet est parmi les conditions aux limites les plus faciles à comprendre. La valeur de la solution de cette condition est imposée aux bornes d'un domaine spatial considéré.

Si on prend une barre métallique on fixe à ses extrémités des températures données $T_0(t)\ et\ T_f(t)$, on aura :

$$x\ (0,t) = T_0(t), \quad x\ (f,t) = T_f(t) \tag{I.9}$$

- **Condition de Neumann :**

Si le flux de chaleur est donné au bord, c'est le gradient de la température qui est fixé et les conditions aux limites sont comme suit :

$$-\alpha \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} = F_0(t) \qquad\qquad -\alpha \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=f} = F_f(\mathrm{t}) \tag{I.10}$$

- **Condition mixte**

Dans certains cas, on peut utiliser des conditions aux bords différentes (Neumann et Dirichlet).

I. 6. Exemples d'un système à paramètres distribués

Soit une barre métallique assimilée à un segment de droite de longueur l (donc les variations de la température dans les autres dimensions négligeables). L'évolution de la température x (z, t) en un point z∈] 0 ; 1[est décrite par l'équation de la chaleur suivante [4] :

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} - c\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} = u(z,t)$$

c : caractérise la diffusion de la chaleur (conductivité thermique) à l'intérieur du solide. (c'est ici supposé constante, autrement dit le matériau est supposé parfaitement homogène).

Pour décrire parfaitement le phénomène, il faut préciser :

- La condition initiale $x(z,0) = x_0(z)$.
- Les conditions aux limites c'est-à-dire en $z = 0\ et\ z = 1$, plusieurs cas peuvent se présenter comme a été expliqué dans la section précédente.

I. 7. Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté des généralités, et quelques notions de bases relatives aux systèmes à paramètres distribués. Ces systèmes sont souvent décrits par des équations aux dérivées partielles, à espace d'état de dimension infinie. Ils sont caractérisés par des variables caractéristiques qui dépendent du temps et de l'espace.

Dans certaines applications, on désire imposer un certain profile par la commande pour avoir un autre profile désirée à une position de l'espace. Ce problème s'appelle planification de trajectoires qui sera abordé dans le chapitre suivant.

Chapitre

2

Planification de Trajectoires

II.1. Introduction

La planification des trajectoires consiste à déterminer une trajectoire temporelle ou spatio-temporelle, en général, qu'on souhaite avoir pour les états ou les sorties d'un système. On les appelle aussi trajectoire de référence.

Dans ce mémoire on va se limité à résoudre le problème de la planification des trajectoires pour les systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP).

II.2. Illustration de la planification de trajectoires

La planification de trajectoires est illustrée par la figure II.1 elle consiste à chercher une commande à appliquer à un point ou une partie pour assurer un comportement souhaité dans une autre position.

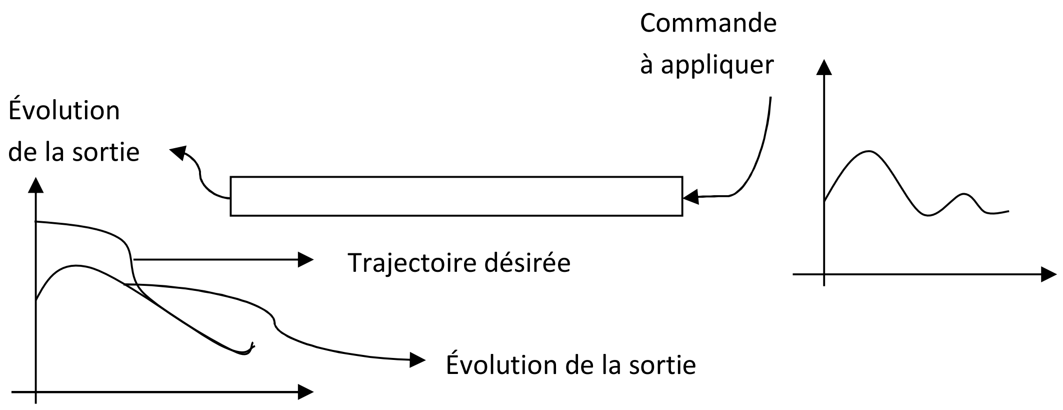

Figure II.1. Exemple d'illustration de la planification de trajectoire.

II.3. Formulation et résolution d'un problème de planification de trajectoires :

D'un point de vu physique, la trajectoire doit suivre un état de référence. Afin de résoudre un tel problème, on part d'une trajectoire de sortie de référence, ensuite on combine ce résultat avec une loi de commande pour stabiliser la trajectoire et pour forcer la sortie à suivre la trajectoire de sortie de référence.

Sans perte de généralités, pour expliquer mathématiquement la génération des trajectoires, on considère l'exemple d'un système réaction-diffusion [6]

II.3.1. Système de réaction-diffusion

On considère l'équation de réaction-diffusion monodimensionnel décrite par l'EDP suivante :

$$\partial_t u(z,t) = \partial_z^2 u(z,t) + \lambda u(z,t) \qquad (II.1)$$

Avec la condition à la limite suivante :

$$\partial_z u(0,t) = 0 \qquad (II.2)$$

On désire imposer une trajectoire de référence à $z = 0$ définie comme suit :

$$u^r(0,t) = e^{\alpha t} \qquad (II.3)$$

Du point de vue physique, on veut générer une trajectoire de température à z = 1 de sorte que l'évolution de la température à z = 0 est donnée par (II.3), c'est-à-dire déterminer l'évolution de $u^r(1,t)$.

II.3.2. Développement en série formelle de puissance

Pour trouver l'entrée de référence $u^r(1,t)$ nous devons d'abord construire la trajectoire de base complète $u^r\,(z,t)$ qui satisfait simultanément (II.1), (II.2) et (II.3). Dans ce cas on propose de chercher la trajectoire de l'état sous la forme suivante:

$$u^r(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\frac{z^k}{k!} \qquad (II.4)$$

Il s'agit d'une série de Taylor en z avec des coefficients variant dans le temps $a_k(t)$ à déterminer de (II.1) - (II.3) et de (II.3) - (II.4), on remarque que :

$$a_0(t) = u^r(0,t) \ = e^{\alpha t} \qquad (II.5)$$

La condition à la limite $z = 0$ (II.2) donne :

$$a_1(t) = 0 \qquad (II.6)$$

De l'équation (II.1) nous obtenons :

$$a_{k+2}(t) = \dot{a}_k(t) - \lambda a_k(t) \qquad (II.7)$$

Ces conditions donnent :

$$a_{2k+1} \ = \ 0$$

$$a_{2k+2} = \dot{a}_{2k} - \lambda a_{2k}$$

$$a_2 = (\alpha - \lambda)e^{\alpha t}$$

$$a_4 = (\alpha - \lambda)^2 e^{\alpha t}$$

$$a_{2k} = (\alpha - \lambda)^k e^{\alpha t}$$

Ainsi la trajectoire d'état de référence est :

$$\begin{aligned} u^r(z,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha - \lambda)^k \, e^{\alpha t} \, \frac{e^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha t} \, \frac{\left(\sqrt{\alpha - \lambda z}\right)^{2k}}{(2k)!} \end{aligned} \qquad (II.8)$$

Cet exemple traite une fonction de référence exponentielle, la formule suivante est utiles lors de calcul de ces trajectoires :

$$\cosh(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k)!} \qquad (II.9)$$

En utilisant la formule (II.9) l'équation (II.8) peut s'écrire comme suit :

$$u^r(z,t) = e^{\alpha t} \begin{cases} cosh\left(\sqrt{\alpha - \lambda z}\right) & \alpha \geq \lambda \\ cos\left(\sqrt{\lambda - \alpha z}\right) & \alpha < \lambda \end{cases}$$

Ce qui donne l'entrée de référence suivante :

$$u^r(1,t) = e^{\alpha t} \begin{cases} cosh\left(\sqrt{\alpha - \lambda}\ \right) & \alpha \geq \lambda \\ cos\left(\sqrt{\lambda - \alpha}\right) & \alpha < \lambda \end{cases}$$

II.4. Simulation de l'exemple

Pour simuler cet exemple, on doit discrétiser le système. Pour cela on a besoin des définitions suivantes :

II.4.1. Définition de l'approximation

L'approximation est l'utilisation des différentes méthodes de calcul numérique pour approcher un modèle à paramètres distribués (dimension infinie) par un modèle à paramètres localisés (de dimension finie).

II.4.2. Définition de la discrétisation

La discrétisation consiste à diviser un ou plusieurs domaines en parties égales et d'utiliser des méthodes de calcul et de subdivision afin de simplifier les équations complexes qui décrivent les dynamiques des systèmes.

II.4.3. Méthodes d'approximation (discrétisation) des équations aux dérivées partielles

Notons que les méthodes numériques passent toujours par des discrétisations des problèmes analytiques en des problèmes numériques et qu'il existe plusieurs de méthodes de discrétisation d'une équation. Nous ne pouvons jamais les énumérer toutes mais les plus couramment utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles sont:

1. la méthode des différences finies,
2. la méthode des éléments finis,
3. la méthode des volumes finis,

Dans ce mémoire on utilise la méthode des différences finies.

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou des combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets. L'avantage de cette méthode est qu'il y a une grande simplicité d'écriture. Elle est couramment pratique et facile à utiliser. Elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation ou différentiation et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu. Son inconvénient est qu'on se limite à des géométries simples, et qu'il y a des difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

II.4.3.1. Méthode des différences finies

Toutes les méthodes numériques passent par la discrétisation du domaine géométrique afin de passer d'un problème continu avec une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant qu'un nombre fini d'inconnues.

Dans le cas des différences finies en dimension un, on discrétise l'intervalle continu [a, b] en un nombre fini de points z_i comme est illustrée par la figure II.2.

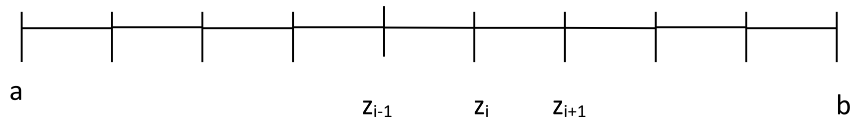

Figure II.2 : Discrétisation d'un segment [a, b].

On remplace ainsi le problème continu par celui de la recherche de valeurs approchées x_i des solutions exactes x (z_i) aux points z_i de la discrétisation.

Mais on ne peut plus, dans ce cas, conserver les opérateurs de dérivation qui s'appliquent à des fonctions continues. On les remplace par des analogues discrets, les différences divisées ou différences finies.

Le type des conditions aux limites conditionne le nombre d'inconnues du problème discret. Dans le cas des conditions de Dirichlet, la solution est fixée, et donc en ces points, les valeurs sont connues. Dans tous les autres cas de conditions aux limites, la valeur de la solution reste inconnue et fait donc partie du vecteur inconnu.

Il existe deux classes de formules simples d'approximation des dérivées par différences divisées ou finies qui sont :

a)- Méthode des différences finies en arrière

La méthode des différences finies en arrière prend les différences divisées qui se suit de la plus grande à la plus petite, utilisée pour discrétiser le domaine spatial (semi-discrétisation) afin d'obtenir des équations différentielles ordinaires (représentation d'état), qui ont la forme suivante en utilisant des différences divisées d'ordre 1 :

- **La première dérivée**

$$x'(t_i) = \frac{dz}{dt}\,(t_i) = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{h}$$

$h = t_i - t_{i-1} = \Delta t$: le pas de discrétisation.

- **La deuxième dérivée**

$$x''(t_i) = \frac{d^2x}{dt^2}\,(t_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}(t_i)\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\Delta t}\right] = \frac{x(t_i) - 2x(t_{i-1}) + x(t_{i-2})}{(\Delta t)^2}$$

En utilisant le même raisonnement on peut calculer les dérivées d’ordre supérieur.

b)- Méthode des différences finies centrales

La méthode des différences centrales est une méthode de semi-discrétisation utilisée pour l’approximation des systèmes à paramètres distribués, elle est utilisée de manière à prendre la dérivée de l’équation au point z_i qui est le centre des deux points z_{i-1} et z_{i+1}.

Les dérivées ordinaires prendront les structures suivantes en utilisant toujours les différences divisées d’ordre 1 :

- **La première dérivée**

$$x'(t_i) = \frac{dx}{dt}\,(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1})}{2\Delta t}$$

- **La deuxième dérivée**

$$x''(t_i) = \frac{d^2x}{dt^2}(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - 2x(t_i) + x(t_{i-1})}{(\Delta t)^2}$$

De la même manière, on peut calculer les autres dérivées d'ordre supérieur.

II.4.4. Discrétisation de l'équation de réaction-diffusion

On propose d'appliqué la différence finie pour approximer l'équation de réaction-diffusion précédente, et pour cela on décompose le domaine d'espace [0,1] en N intervalles égaux, correspondant à un pas de discrétisation $\Delta z = \frac{1}{N}$.

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial u^2(z,t)}{\partial z^2}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\lambda u(z,t)}_{\text{Réaction}} \qquad (II.10)$$

L'approximation de la dérivée première de u est donné par :

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}|_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta z}$$

Donc pour i=1 on aura :

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial z} = \frac{u_2 - u_0}{2\Delta z} = 0$$

D'où :

$$u_2 = u_0$$

L'approximation de la dérivée seconde de u est donnée par :

$$\frac{\partial u^2(z,t)}{\partial z^2}|_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta z)^2} \qquad (II.11)$$

On remplace (III.2) dans (III.1), on obtient :

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta z^2}[u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}] + \lambda u_i$$

D'où l'équation différentielle :

$$\dot{u}_i = \frac{1}{\Delta z^2} u_{i+1} + \left(\lambda - \frac{2}{\Delta z^2}\right) u_i + \frac{1}{\Delta z^2} u_{i-1}$$

Pour i=1, 2,3,…, n

On aura :

$$\dot{u}_1 = \frac{2}{\Delta z^2} u_2 + \left(\lambda - \frac{2}{\Delta z^2}\right) u_1$$

$$\dot{u}_2 = \frac{2}{\Delta z^2} u_3 + \left(\lambda - \frac{2}{\Delta z^2}\right) u_2$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$\dot{u}_{n-1} = \frac{2}{\Delta z^2} u_n + \left(\lambda - \frac{2}{\Delta z^2}\right) u_{n-1}$$

Qu'en peut écrire sous forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \dot{u}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\lambda - \frac{2}{\Delta z^2}\right) & \frac{2}{\Delta z^2} & . & . & & . & 0 \\ \frac{1}{\Delta z^2} & \left(\lambda - \frac{2}{\Delta z^2}\right) & \frac{1}{\Delta z^2} & . & & . & 0 \\ & & . & . & & . & . \\ & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & . & & \frac{1}{\Delta z^2} \\ 0 & 0 & . & . & & \frac{1}{\Delta z^2} & \left(\lambda - \frac{2}{\Delta z^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

II.5. Résultats de la simulation

Pour simuler cet exemple, on prend $\mathrm{N} = 100$, $l = 1m$, $\alpha = -0.25$ et $\lambda = -1$ on obtient le résultat de la figure II.3. On constate que l'évolution de la température au point z=0 suit la référence désirée.

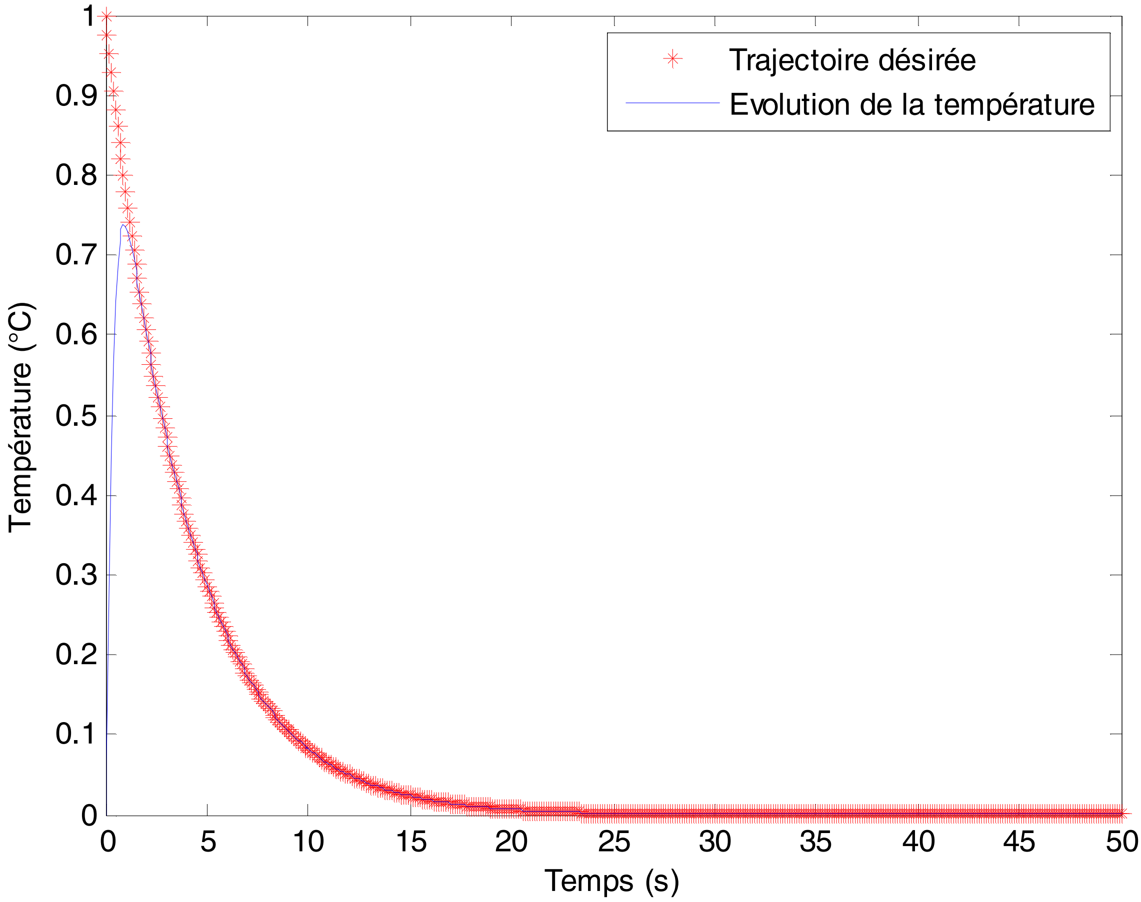

Figure II.3 : Résultat de la simulation de l'exemple de réaction-diffusion.

On peut voir sur la figure qu'après une période de temps à 0.68s la trajectoire d'évolution de la température coïncide avec la trajectoire désirée.

II.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une des méthodes récemment développé pour résoudre les problèmes de la planification de trajectoire basée sur l'utilisation des séries formelle. Cette dernière a été illustrée en considérant l'exemple réaction-diffusion dont l'objectif est d'imposer une trajectoire de référence au point z=0.

En deuxième lieu on a utilisé la méthode des différences finie pour discrétiser les résultats de la simulation obtenus en vue de montrer une convergence de la trajectoire contrôlée vers la trajectoire désirée.

Dans le chapitre suivant, on considère la planification de trajectoires dans le cas d'une équation de chaleur.

Chapitre

3

Planification de Trajectoires d'une équation de chaleur

III. 1. Introduction

Un transfert thermique correspond au déplacement d'une température chaude, aussi appelée énergie microscopique désordonnée, qui résulte de la rencontre dans l'air de différentes particules créant une énergie thermique, plus communément appelée chaleur.

La modélisation d’un problème physico-chimique, consiste en la formulation mathématique des différents phénomènes intervenant dans le processus, sous forme d’équations aux dérivées partielles.

Dans ce chapitre on s’intéresse à la planification de trajectoire de l’équation de chaleur dont l’objectif est d’imposer une évolution de la température à une position bien définie.

III. 2. Modes de transfert thermique

Le transfert thermique est un processus complexe qui peut-être réalisé par la superposition de trois modes fondamentaux : conduction, convection et rayonnement. Dans le cas où l’un de ces trois modes dominant, les autres peuvent être négligés, ce qui simplifie considérablement l’analyse du cas concerné.

- **Conduction thermique**

Le transfert de chaleur par conduction correspond à un transfert d'énergie interne dû aux interactions entre les particules qui constituent le système thermodynamique (exemple : chocs de molécules dans les gaz, vibrations dans les solides cristallins, etc.). Il est présent dans tous les corps, quelque soit leur état (solide, liquide ou gaz). On peut faire directement l'expérience de ce mode de transfert en tenant à la main un barreau métallique, et en mettant l'autre extrémité au contact d'une flamme. Au bout d'un certain temps, on est obligé de lâcher le barreau, pour éviter de se bruler [5].

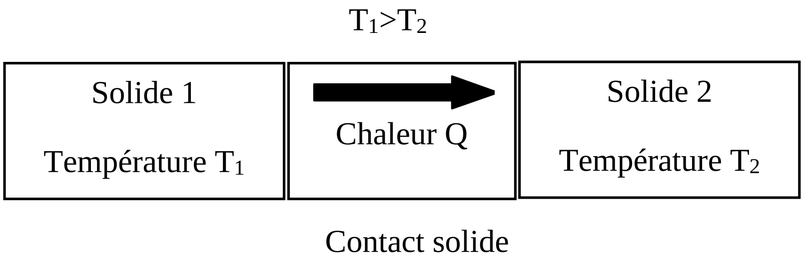

Figure III. 1 : Représentation schématique du transfert thermique par conduction.

- **Convection**

Ce mode de transfert est spécifique aux fluides. En plus du transfert de chaleur par conduction toujours présent dans la matière, il y a dans les fluides un transfert de chaleur provoqué par l'écoulement du fluide, c'est à dire par le mouvement d'ensemble des particules qui le composent. Ce phénomène est appelé advection : une masse de fluide qui se déplace transporte avec elle son énergie interne. On peut donc définir la convection comme la réunion de deux modes de transfert de chaleur : la conduction, qui s'effectue à l'échelle microscopique, et l'advection, qui est de nature macroscopique [5].

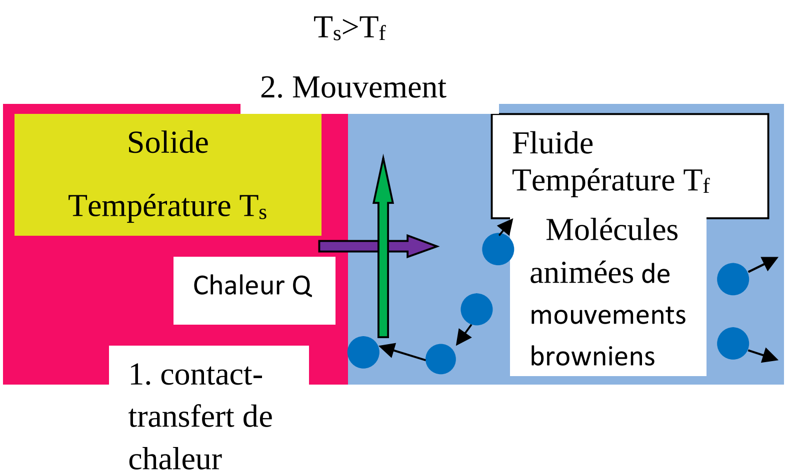

Figure III. 2 : Représentation schématique de la convection.

- **Rayonnement**

Le rayonnement est un transfert de chaleur entre deux corps, séparés par du vide ou un milieu transparent, par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques [5].

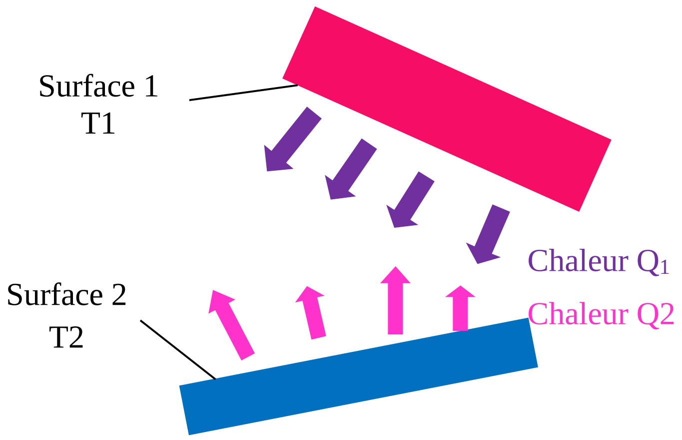

Figure III. 3 : Représentation schématique du transfert de chaleur par rayonnement.

III. 3. Equation de conduction de la chaleur

➢ **La modélisation de l'équation de chaleur**

On suppose qu'une barre est composée d'un matériau homogène. La barre est placée le long de l'axe des x et on va mesurer toutes les quantités (i.e. flux, température, ...) en chaque point $x \in R$, comme une valeur moyenne le long d'une couche qui est transversale à l'axe des x. L'isolant entoure la tige sauf aux extrémités en x= 0 et x= l ou des conditions frontières seront imposées. Le transfert de chaleur dans un matériau homogène est semblable à la diffusion des atomes dans un gaz. Pour simplifier, nous examinerons une situation unidimensionnelle où l'on considère des quantités uniquement dans les directions parallèles à x. Soit un tube métallique et q_1 et q_2 sont les flux de la chaleur (quantité de chaleur par unité de temps qui traverse la surface dans la direction x) [10]:

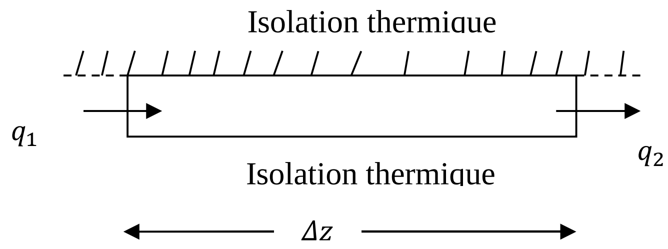

Figure III. 4: Schématisation du transfert de chaleur.

Le flux de chaleur satisfait la loi de Fourier :

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

Avec k est la conductivité thermique et T la température.

Cette loi explique que la conduction thermique est un transfert thermique spontané d’une région de température élevée vers une région de température plus basse. Ainsi le flux de chaleur est proportionnel à la dérivée de la température par rapport à sa position suivant l’axe z.

D’après la première loi de la thermodynamique, la quantité de chaleur ΔQ qui est emmagasinée dans un matériau de densité ρ, de longueur Δz, durant une augmentation de température ΔT est :

$$\Delta Q = c_p \rho \Delta z \Delta T \qquad (III.1)$$

c_p : Capacité calorifique

Par définition la quantité de la chaleur qui entre dans la barre pendant un intervalle de temps $\Delta\tau$ est donc :

$$\Delta Q = -(q_2 - q_1)\Delta\tau \qquad (III.2)$$

Qu’on peut écrire, en utilisant la définition de la dérivée, comme suit :

$$\Delta Q \approx -\left(\Delta z \frac{\partial q}{\partial z}\right)\Delta\tau \qquad (III.3)$$

L’application de la loi de Fourier pour l’équation (III.3) donne :

$$\Delta Q = -\Delta z \frac{\partial}{\partial z}(-k\frac{\partial T}{\partial z})\Delta\tau$$

Donc :

$$\Delta Q = \Delta z\, k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\Delta\tau \qquad (III.4)$$

Des équations (III.1) et (III.4), il vient :

$$c_p\rho\Delta z\Delta T = \Delta z\, k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\Delta\tau$$

On divise les deux termes de cette dernière équation par $\Delta z\Delta\tau$, on obtient :

$$c_\rho\rho\frac{\Delta T}{\Delta\tau} = k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Ou encore :

$$\frac{\partial T}{\partial\tau} = \frac{k}{c_\rho\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad (III.5)$$

On pose la quantité $\frac{k}{c_\rho\rho} = \lambda$ qui représente le coefficient de diffusivité thermique (m^2s^{-1}) qui caractérise la vitesse de diffusion de la chaleur dans le matériau.

L'équation aux dérivées partielles (III.5) est l'équation de la chaleur qui dépend de deux variables z (espace) et t (temps).

- **Conditions aux limites et condition initial**

Pour pouvoir résoudre ce problème comme on a déjà vue dans le deuxième chapitre on a besoin de savoir comment la chaleur circule aux extrémités de la barre et nous devons connaitre la répartition de la température sur la barre à un moment initial.

Si les extrémités de la barre sont parfaitement isolées, de sorte que le flux de chaleur à travers les extrémités est égal à zéro, alors il faut poser

$$\frac{\partial T}{\partial z}(0,\tau) = 0 \qquad et \qquad \frac{\partial T}{\partial z}(l,\tau) = 0$$

Et la condition initiale est :

$$T(z,0) = T_0(z)$$

Donc on peut mettre le problème sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad (III.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(0,\tau) = 0 \qquad (III.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(l,\tau) = 0 \qquad (III.8)$$

Remarque

- Si les extrémités de la barre sont maintenues à la température fixe à zéro, on obtient :

$$T(0,\tau) = 0 \qquad et\, T(l,\tau) = 0$$

- Chacune de ces conditions aux limites peuvent être non homogène (qui possède un côté différent de zéro à droite), et nous pourrions, bien sûr, avoir des conditions différents aux extrémités (une extrémité isolée, l'autre tenue à température fixe).

III. 4. Résolution de problème de la planification

On veut que la température à $z = 0$ suit la trajectoire décrit par l’équation suivante :

$$u^r(0,t) = 1 + 2t - t^2 \qquad (III.9)$$

En premier lieu, on cherche à trouver l’entrée de référence $u^r(1,t)$. Nous cherchons à nouveau la trajectoire de référence de l'état complet sous la forme :

$$u^r(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \frac{z^k}{k!} \qquad (III.10)$$

Où $a_k(t)$ sont des coefficients variant dans le temps à déterminer.
De (III.9) - (III.10), on constate que :

$$a_0(t) = u^r(0,t) = 1 + 2t - t^2 \qquad (III.11)$$

La condition à la limite $z = 0$ donne :

$$a_1(t) = u_z^r(0,t) = 0 \qquad (III.12)$$

L'étape suivante consiste à substituer (III.10) dans (III.6) comme suit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dot{a}_k(t)\frac{x^k}{k!} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\frac{z^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k(t)\frac{k(k-1)z^{k-2}}{k!}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k(t)\frac{z^{k-2}}{(k-2)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(t)\frac{z^k}{k!} \qquad (III.13)$$

Nous obtenons la relation récursive suivante :

$$a_{k+2}(t) = \dot{a}_k(t) \qquad (III.14)$$

D'après les équations (III.11), (III.12) et (III.14), on aura les résultats :

$a_0 = 1 + 2t - t^2,$ $\qquad a_1 = 0,$

$a_2 = 2 - 2t,$ $\qquad a_3 = 0,$

$a_4 = -2,$ $\qquad a_5 = 0$

$a_6 = 0,$ $\qquad a_i = 0$ Pour i>6

Cela donne la trajectoire de l'état de référence suivante :

$$u^r(z,t) = 1 + 2t + t^2 + (1-t)z^2 - \frac{1}{12}z^4$$

Pour z=1, on obtient le signal à appliquer à cette frontière comme suit :

$$u^r(1,t) = \frac{23}{12} + t - t^2$$

On note que la sortie correspondante à la trajectoire de sortie de référence est unique si la condition initiale est satisfaite par la trajectoire de l'état, qui est $u(z,0) = 1 + z^2 - \frac{1}{12}z^4$

III. 5. Simulation de la trajectoire

Comme on a déjà vue dans le deuxième chapitre pour simuler un SPD il faut qu'on le discrétise, le résultat est donnée sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta z^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \cdot & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta z^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u_l$$

Les résultats de la simulation obtenus sont donnés par la Figure III.5. L'évolution de la température au point $z = 0$ est la même que celle désirée.

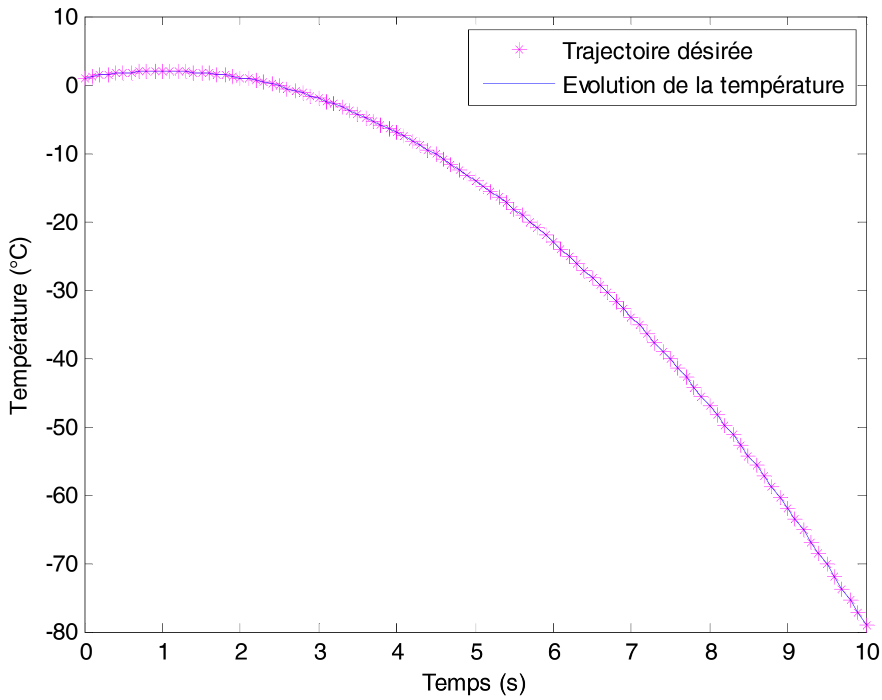

Figure III. 5 : Simulation de la trajectoire désirée et celle d'évolution.

III. 6. Conclusion :

Nous avons vu que le phénomène de transfert de chaleur dans une barre satisfait l’équation de chaleur. On a commencé par les différents modes de transfert, après on a passé à la modélisation de l’équation de chaleur. La résolution de cette équation permet donc de mieux comprendre le concept de diffusion de chaleur dans les matériaux.

Dans la deuxième partie de chapitre, on a abordé la planification de trajectoire pour l’équation de chaleur.

Dans le chapitre suivant, on s’intéresse à la planification de trajectoire dans le cas d’une équation aux dérivées partielles de second ordre en temps, en l’occurrence l’équation d’onde.

Chapitre

4

Planification de Trajectoire d'une équation d'onde

IV. 1. Introduction

La propagation d’ondes de toutes natures est l’un des phénomènes physique les plus simple et les plus usuels auxquels nous sommes confrontés dans la vie courante (sons, vibrations, vagues, télécommunications, radar) et même a l’échèle de l’univers (ondes électromagnétique, de gravité) et celui de l’atome (émission, spontanée ou stimulé, interférence entre particules). Ce sont l’émission et la réception des ondes qui constituent notre moyen de privilège de connaissance du monde qui nous entoure.

L’objectif de ce chapitre est de modéliser le phénomène de propagation d’ondes et de résoudre le problème de planification de trajectoires.

IV. 2. Généralités sur les ondes

IV. 2. 1. Définition d’une onde

Une onde est la propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation des propriétés physiques du milieu. Il est important de remarquer que l'onde se traduit par un transport d'énergie et non de matière. Elle se déplace avec une vitesse déterminée qui dépend des caractéristiques du milieu de propagation.

IV. 2. 2. Définition de l’équation d’onde

On appelle équation d’onde (linéaire) l’équation aux dérivées partielles d’évolution, du second ordre en temps (t) et en espace (z).

L'équation d'ondes est l'équation générale qui décrit la propagation d'une onde qui peut être représentée par une grandeur scalaire ou vectorielle [8].

IV.2.3. Types d'ondes

On rencontre essentiellement trois types d'ondes :

- **Les ondes acoustiques**

C'est-à-dire les ondes qui se propagent dans un fluide (eau ou air par exemple), et sont le support de propagation du son.

Figure IV.1 : Les ondes qui se propagent dans l'eau.

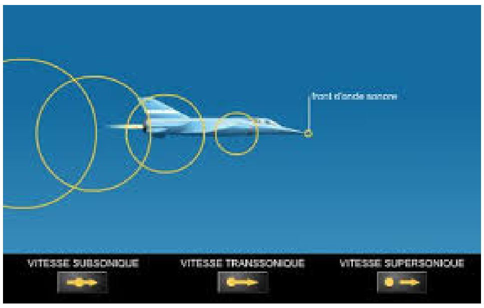

Figure IV.2 : Les ondes qui se propagent dans l'air.

- **Les ondes élastiques**

C'est-à-dire les ondes qui se propagent dans un solide. L'inconnue est la distribution du champ des déplacements dans le solide.

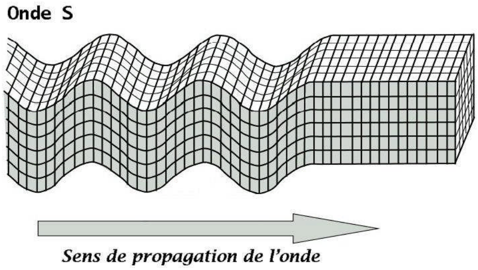

Figure IV.3 : mouvement relatif au passage d'une onde transversale

- **Les ondes électromagnétiques**

Ces ondes n'ont pas besoin du support matériel pour se propager (par exemple la lumière). Elles comportent à la fois un champ électrique et un champ magnétique oscillant à la même fréquence. Ces deux champs, perpendiculaires l'un par rapport à l'autre se propagent dans un milieu selon une direction orthogonale (figure IV.4).

La propagation de ces ondes s'effectue à une vitesse qui dépend du milieu considéré. Par exemple dans le vide, la vitesse de propagation est égale à 3.10^8 m.s^{-1}.

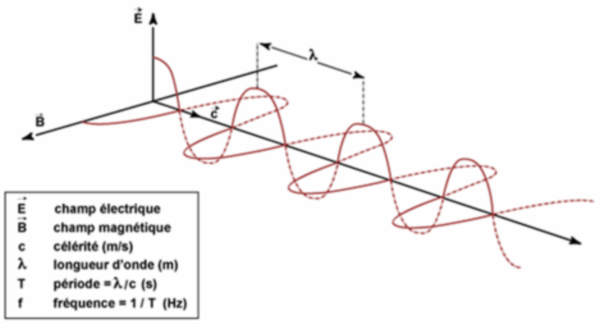

Figure IV.4 : La propagation des ondes électromagnétique.

IV.3.Modélisation de l'équation d'onde

Une application particulière de modèle numérique de la propagation des ondes acoustiques c'est l'acoustique musicale. L'équation d'onde ci-dessous décrit les petites vibrations transversales d'une corde élastique (comme une corde de guitare), ça modélisation est réaliste.

Nous supposons que la corde est tendue et de longueur L et ses deux extrémités sont fixes.

La corde vibre dans le plans x y occupant l'intervalle [0, L] sur l'axe des x au repos et que le point [z, 0] dans la configuration de références se déplace vers (z, u (z, t)) au temps t.

Nous supposons donc que le mouvement de la corde est entièrement dans le sens transversal.

Aussi, nous supposons que la force de rappel interne de la corde sous tension est tangente à la corde elle-même à chaque point par T (z, t).

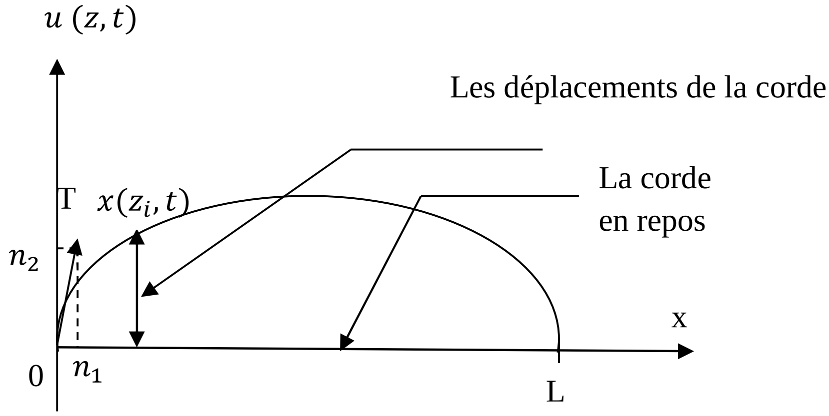

Figure IV.5 : déplacement d'une corde vibrante dans le sens transversal.

Nous écrivons $n = n(z,t)$ pour la force à l'extrémité et θ pour l'angle de ce vecteur de force avec l'horizontale. Nous avons alors :

$$n_1^2 + n_2^2 = T^2(z,t) \qquad \text{(IV.1)}$$

Avec

$$n_1 = -T(z,t)\cos(\theta)\,, n_2 = -T(z,t)\sin(\theta) \qquad \text{(IV.2)}$$

En supposant qu'à $\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \ll 1$ chaque point, on a :

$$\tan(\theta) = \frac{\partial u}{\partial z}(z,t) \tag{IV.3}$$

Une approximation raisonnable est (θ faible)

$$\cos(\theta) = 1, \quad \sin(\theta) = \tan(\theta) = \frac{\partial u}{\partial z}(z,t) \tag{IV.4}$$

On obtient alors

$$n(z,t) = \left(-T(z,t), -T(z,t)\frac{\partial u}{\partial z}(z,t)\right) \tag{IV.5}$$

De même, la force à l'extrémité droite est :

$$n(z+\Delta z,t) = \left(T(z+\Delta z,t), T(z+\Delta z,t)\frac{\partial u}{\partial z}(z+\Delta z,t)\right) \tag{IV.6}$$

La différence suivante :

$$T(z+\Delta z,t) - T(z,t) \tag{IV.7}$$

est (une approximation de) la composante horizontale de la force totale sur la corde et

$$T(z+\Delta z,t)\frac{\partial u}{\partial z}(z+\Delta z,t) - T(z,t)\frac{\partial u}{\partial z}(z,t) \tag{IV.8}$$

est (une approximation de) la composante verticale. Par hypothèse, la composante horizontale de l'accélération de la corde est égale à zéro, et donc les résultats de la deuxième loi de Newton permettent d'écrire :

$$T(z+\Delta z,t) - T(z,t) = 0 \tag{IV.9}$$

Ainsi la tension est constante tout au long de la corde à chaque point dans le temps. Nous supposons que la longueur de la corde ne change jamais dans la configuration de référence (qui est égale à L), et donc il est logique de supposer que T est indépendant de t ainsi, à savoir que T est une constante. L'application de la deuxième loi de Newton pour les résultats des composantes verticales, on obtient :

$$\int_z^{z+\Delta x} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(z,t)dz = T\frac{\partial u}{\partial z}(z+\Delta z,t) - T\frac{\partial u}{\partial z}(z,t) \quad \text{(IV.10)}$$

$$= \int_z^{z+\Delta z} T\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z,t)dz \quad \text{(IV.11)}$$

Où ρ est la densité de la corde (en unités de masse par unité de longueur). Puisque cela est vrai pour tous les x et Δx suffisamment petit, on obtient l'équation différentielle :

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad ,0 < z < l, t > 0 \quad \text{(IV.12)}$$

Nous remarquons que l'équation d'onde est homogène. Elle est souvent écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \;\; 0 < z < l, t > 0 \quad \text{(IV.13)}$$

Où $c^2 = \frac{T}{\rho}$.

Dans notre exemple on prend $c^2 = 1$ on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \;\; 0 < z < l, t > 0 \quad \text{(IV.14)}$$

Dans le cas où une force de corps externe est appliquée à la corde (dans la direction verticale), l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(z,t), \;\; 0 < z < l, t > 0 \quad \text{(IV.15)}$$

IV. 4. Planification de trajectoires

Un système à paramètres distribués modélisé par une équation d'ondes est représenté dans l'espace d'état par le modèle donné ci-dessous, muni des conditions initiales, et des conditions aux limites définis comme suit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (IV.16)$$

La condition initiale

$$u(0) = 0 \qquad \text{(IV.17)}$$

Soit la sortie de référence définie comme suit :

$$u_z^r(0,t) = \sin(\ \ t) \qquad \text{(IV.18)}$$

On doit chercher $u^r(z,t)$ l'entrée de référence sous la forme :

$$u^r(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(t)\,\frac{z^k}{k!} \qquad (IV.19)$$

Nous obtenons :

a_0 de la condition initiale (z =0)

$$a_0 = 0, \qquad a_1(t) = \sin(\ \ t) = Im\{e^{j\ \ t}\} \qquad \text{(IV.20)}$$

$$a_{i+2} = \ddot{a}_i(t) \qquad \text{(IV.21)}$$

Ce qui donne

$$a_{2k} = 0 \qquad \text{(IV.22)}$$

$$a_{2k+1}(t) = (j\ \ )^{2k} Im\{e^{j\ \ t}\} \qquad \text{(IV.23)}$$

La référence de l'état est donnée comme suit :

$$u^r(z,t) = Im\left\{\frac{e^{j\ \ t}}{j\ \ }\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(j\ \ z)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\}$$

Le problème traite une fonction sinusoïdale, pour simplifier les calcule on utilise cette formule :

$$\sinh(a) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Donc on peut écrire :

$$u^r(z,t) = Im\left\{\frac{e^{j\ \ t}}{j\ \ }\sinh(j\ \ z)\right\}$$

$$= Im\left\{\frac{e^{j\ \ t}}{\ \ }\sin(\ \ z)\right\}$$

$$= \frac{1}{\ \ }\sin(\ \ z)\sin(\ \ t) \qquad \text{(IV.24)}$$

Si on considère comme entrée la condition à la limite z=1, on obtient :

$$u^r(1,t) = \frac{\sin(\ \ )}{\ \ }\sin(\ \ t) \qquad \text{(IV.25)}$$

Pour programmé l'équation d'onde on doit suive les étapes suivante :

On considère le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} z_1 = u \\ z_2 = \frac{du}{dt} \end{cases} \qquad (IV.26)$$

Donc :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \dfrac{d^2u}{dt^2} = \dfrac{d^2u}{dz^2} \end{cases} \qquad (IV.27)$$

Pour simuler le modèle de l'équation d'onde, on procède par la méthode décrite dans le chapitre II (la méthode des différences finie).

On discrétise $\frac{d^2u}{dt^2}$ avec l'utilisation de la méthode des différences finie :

$$\left.\frac{d^2u_n}{dz^2}\right|_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta z^2} \qquad (IV.28)$$

On a u (0) = 0 $\leftrightarrow$ $\left.\frac{du}{dz}\right|_{z=0} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta z} = 0$

$$= \frac{u_2 - u_0}{2\Delta z} = 0 \qquad \text{(IV.29)}$$

Donc

$$u_2 = u_0 \qquad \text{(IV.30)}$$

On aura

$$\dot{u}_1 = \frac{-2}{\Delta z^2} u_1 + \frac{2}{\Delta z^2} u_2 = \dot{z}_{21}$$

$$\dot{u}_2 = \frac{1}{\Delta z^2} u_1 + \frac{-2}{\Delta z^2} u_2 + \frac{1}{\Delta z^2} u_3 = \dot{z}_{22}$$

$$\dot{u}_3 = \frac{1}{\Delta z^2} u_2 + \frac{-2}{\Delta z^2} u_3 + \frac{1}{\Delta z^2} u_4 = \dot{z}_{23}$$

$$\dot{u}_n = \frac{1}{\Delta z^2} u_{n-1} + \frac{-2}{\Delta z^2} u_n + \frac{1}{\Delta z^2} u_l = \dot{z}_{2n}$$

Et on aura le modèle sous la forme matricielle suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{11} \\ \dot{z}_{12} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z}_{1n} \\ \dot{z}_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{-2}{\Delta Z^2} & \frac{-2}{\Delta Z^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta Z^2} & \ddots & \frac{1}{\Delta Z^2} & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\Delta Z^2} & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\Delta Z^2} & \frac{-2}{\Delta Z^2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{1n} \\ z_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u_l$$

IV. 5. Simulation de trajectoires :

Le résultat de simulation obtenu est donné par la figure (IV.6).

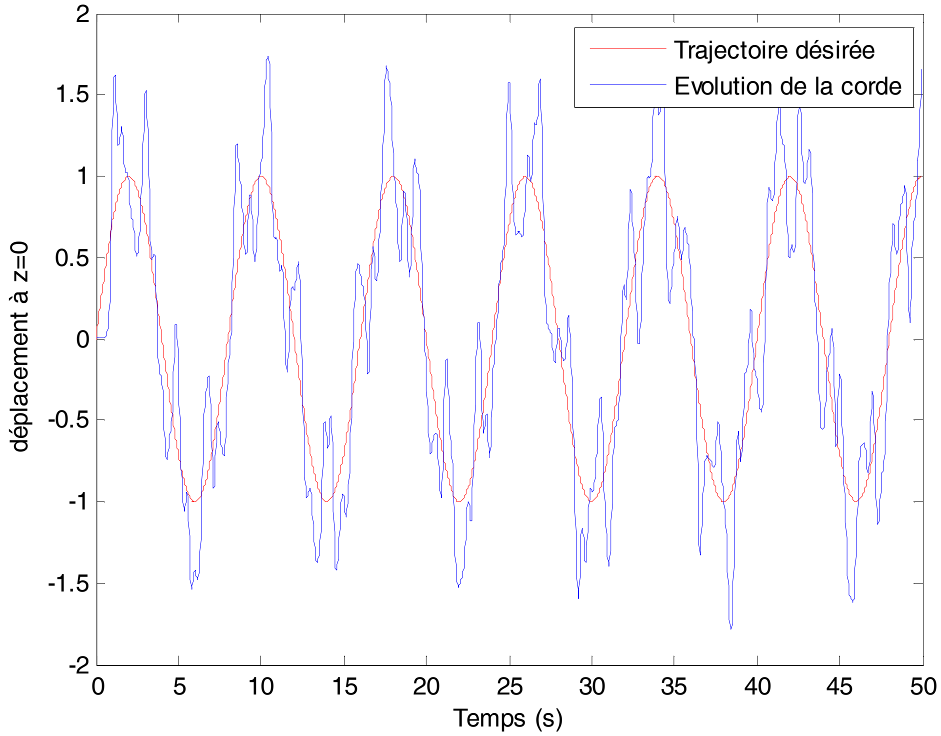

Figure IV.6 : Simulation de l'équation d'onde.

Il est remarquable que la trajectoire de l'évolution de l'équation d'onde suit celle de la trajectoire désirée avec erreurs raisonnables due aux approximations numériques.

IV. 6. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons modélisé le phénomène de propagation d'ondes par une équation d'ondes.

Puis nous avons résolu le problème de planification de trajectoires. L'approche utilisée a permis de déterminer la commande à appliquer à la frontière pour garantir une certaine évolution dans l'autre frontière.

Conclusion Générale

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur la commande en boucle ouverte de système à paramètres distribués. L'objectif est de calculer la commande à appliquer pour assurer un certain comportement à certaines positions. Ceci est appelé planification des trajectoires.

Ainsi après avoir présenté des généralités sur les systèmes à paramètres distribués, nous avons expliqué c'est quoi la planification de trajectoires et la simulation en utilisant la méthode des différences finis. Ensuite, nous avons étudié la planification de trajectoire dans le cas des équations de chaleur et d'onde.

La méthode de planification de trajectoires étudiée est basée sur l'écriture de la solution sous forme d'une série dont l'identification des coefficients temporels permet de déduire la commande en boucle ouverte permettant d'assurer la poursuite de trajectoires.

Les exemples étudiés ont démontrés l'intérêt de cette méthode et ses performances sont montrées par simulation.

Comme perspectives du présent travail, on propose de s'intéresser à la planification de trajectoires de d'autres systèmes à paramètres distribués et à paramètres variant.

Références Bibliographiques

Référence Bibliographiques :

[1] **A. RACHID.** *Systèmes de Régulation. Masson, Paris, 1997.*

[2] **J.-P. BABARY et W. PELCZEWSKI**. *Commande Optimale des systèmes continus déterministes. Masson, Paris, 1985.*

[3] **P. FAURRE., M. ROBBIN.** *Elément d'automatique. Edition Dunod, Paris, 1984.*

[4] **M. AMROUCHE**. *Commande d'un procédé a paramètres distribues par un régulateur proportionnel intégral et dérivé, Application : Echangeur de chaleur. Université Mouloud Mammeri Tizi- Ouzou Département électronique. 2005.*

[5] **D**. **FREDERIC**. *Cour Thermiques L2. Université Pierre et Marie Curie Paris Département Mécanique .2009/2010.*

[6] **M. OKRSTIC** *and* **A. OSMYSHLYAEV.** *Boundary control of PDEs: A course on back stepping designs. SIAM, 2008.*

[7] **A. MAIDI**. *Commande des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles hyperboliques. Thèse de doctorat en Automatique. Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou.,2008.*

[8] **A. GHERFI**. *Etude de la propagation de l'onde élastique dans les corps continu. Université de Constantine, 2006.*

[9] **G. DERVEAUX**. *Modélisation de la guitare acoustique. L'école polytechnique, 4 juin 2002.*

[10] ***N.KHATTABI****. Applications des mathématiques: Modélisation du transfert de la chaleur dans une tige. école polytechnique .Montréal.*