

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou**

Faculté du Génie et de la Construction  
Département de Génie Civil



## **THÈSE DE DOCTORAT 3<sup>ème</sup> CYCLE LMD**

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures et matériaux

Présenté par :

**ALIOUA NACEREDDINE**

Sujet

### **Contribution à la modélisation du comportement monotone et cyclique des ossatures en béton armé**

Devant le jury composé de :

HANNACHI	Naceur eddine	Professeur, UMMTO	Président
MESSAFER	Tahar	MCA, UMB Boumerdes	Rapporteur
KACHI	Mohand Said	Professeur, UMMTO	Co-Rapporteur
BOUAFIA	Youcef	Professeur, UMMTO	Examineur
SANDJAK	Khaled	MCA, UMB Boumerdes	Examineur
MOHRI	Foudil	Professeur, U Lorraine, France	Invité

Soutenue le 16/10/2018

## **Remerciements**

*Toute notre gratitude, grâce et remerciement à Allah le plus puissant qui nous a donné la force, le courage et la volonté pour élaborer ce travail.*

*C'est avec une profonde reconnaissance et considération particulière que je remercie en premier lieu mon directeur de thèse **Dr MESSAFER Tahar** pour la sollicitude avec laquelle il a suivi et guidé ce travail.*

*Je souhaite exprimer ma reconnaissance à mon co-directeur de thèse **Pr KACHI Mohand Said** qui a suivi de près mon travail.*

*Je tiens à remercier vivement **Pr MOHRI Foudil** pour son aide et ses encouragements tout au long de ce travail.*

*Je remercie **Pr HANNACHI Naceureddine** d'avoir accepté de présider le jury et mes remerciements également au **Pr BOUAFIA Youcef** et **Dr SANDJAK Khaled**, d'avoir accepté d'être membres du jury et d'y apporter leurs remarques constructives.*

*Les remerciements seraient incomplets sans ceux, les plus sincères, adressés à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant toutes ces années d'études.*

# DÉDICACES

*A mes très chers parents.*

*A tous les membres de ma famille.*

*A la mémoire de mes encadreurs Messieurs DRIZI Said et*

*BENMANSOUR Mohammed Bénali.*

## Résumé :

Dans le domaine de génie civil, le milieu extérieur impose aux structures des charges variables dans le temps à savoir : actions du vent, vagues, vibrations des machines et séismes. Ces actions imposent aux structures des sollicitations de type dynamique et cyclique, et l'évaluation de la réponse de la structure vis-à-vis de ces actions nécessite une bonne connaissance de leurs comportements linéaire et non linéaire sous chargement monotones et cycliques.

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à l'étude et à la modélisation des comportements statiques non linéaires sous charges monotones et cycliques, des structures planes en béton armé ainsi que des matériaux acier et béton les constituant. Dans cet objectif, un modèle numérique a été développé et implémenté dans un programme de calcul dédié. Il permet de calculer numériquement le comportement non linéaire de n'importe quelle structure plane en béton armé en prenant compte les différents phénomènes tels que la non linéarité du comportement du béton, la plasticité du béton en compression et de l'acier en traction, les interactions acier-béton ainsi que l'endommagement et la dégradation des matériaux sous les effets d'un cycle à l'autre. Le modèle est validé en se basant sur des essais de référence trouvés dans la littérature.

**Mots clés :** comportement, non linéarité, béton, monotone, cyclique, ossatures, modélisation élément poutre.

## **Abstract:**

In the field of civil engineering, the external environment imposes on the structures variable loads over time, namely: action of wind, waves, vibrations of machines and earthquake. These actions lead to dynamic and cyclic solicitations on the structures, and the evaluation of the structure's behaviour to these actions requires a good knowledge of their non-linear behavior, both monotonic and cyclic.

In the framework of this work, we are interested in the study and the modeling of the nonlinear static behavior under monotonous and cyclic loads, of the reinforced concrete plane structures as well as the constituent's materials: steel and concrete. For this purpose, a numerical model has been developed and implemented in a dedicated computing program. It allows the numerical calculation of the nonlinear behavior of any reinforced concrete plane structure by taking into account different phenomena such as the non-linearity of concrete behavior, the plasticity of concrete in compression and the steel in tension, steel-concrete interactions as well as the damage and degradation of materials under the effects of one cycle to another. Based on reference tests found in the literature, the model has been compared and validated. Interactions as well as the damage and the degradation of the materials under the effects of one cycle to another.

**Key words:** behavior, nonlinearity, concrete, monotonic, cyclic, frameworks, beam element modeling.

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE .....</b>	<b>1</b>
<b>1. Revue Bibliographique.....</b>	<b>3</b>
1.1. Introduction.....	3
1.2. Comportement non linéaire des matériaux .....	4
1.2.1. Béton.....	4
1.2.1.1. Comportement monotone.....	4
1.2.1.2. Comportement cyclique.....	6
1.2.2. Acier.....	24
1.3. Calcul non linéaire des ossatures en béton armé.....	30
1.3.1. Choix de l'échelle de modélisation.....	30
1.3.2. Comportement non linéaire des structures.....	30
1.3.3. Résolution numérique .....	32
1.3.4. Étude bibliographique des travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures.....	34
1.4. Conclusion.....	47
<b>2. Formulation des éléments poutre en comportement 2D .....</b>	<b>48</b>
2.1. Introduction.....	48
2.2. Hypothèses de base.....	49
2.3. Cinématique.....	50
2.4. Relation contrainte-déformation.....	51
2.5. Relation déformations-déplacements.....	52
2.6. Relation entre efforts et déformations.....	52
2.7. Principe des travaux virtuels.....	55

2.8.	Modélisation par méthode des éléments finis et calcul de la matrice de rigidité .....	57
2.8.1.	Élément poutre à deux nœuds .....	57
2.8.2.	Élément poutre à trois nœuds.....	64
2.8.3.	Élément poutre à quatre nœuds.....	70
2.9.	Discrétisation de la section transversal.....	77
2.10.	Évaluation des vecteurs de forces résiduelles.....	78
2.11.	Conclusion.....	80
<b>3.</b>	<b>MODÉLISATION DE COMPORTEMENT NON LINÉAIRE DES MATÉRIAUX ET LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE .....</b>	<b>81</b>
3.1.	Introduction.....	81
3.2.	Lois de comportements des matériaux .....	82
3.2.1.	Béton .....	82
3.2.1.1.	Comportement monotone.....	82
3.2.1.2.	Comportement cyclique.....	89
3.2.2.	Loi de comportement des armatures .....	93
3.2.2.1.	Comportement monotone.....	93
3.2.2.2.	Comportement cyclique.....	94
3.3.	MÉTHODE DE RÉSOLUTION NON LINÉAIRE.....	96
3.4.	Conclusion.....	99
<b>4.</b>	<b>PRÉSENTATION DU PROGRAMMATION INFORMATIQUE.....</b>	<b>100</b>
4.1.	Introduction.....	100
4.2.	Language Fortran.....	100
4.3.	Présentation du programme.....	101
4.4.	Présentation des différentes procédures (subroutines).....	102
4.5.	Description du fichier donnée.....	108

4.6.	Description du fichier des résultats .....	114
4.7.	Conclusion .....	117
<b>5.</b>	<b>APPLICATIONS ET VALIDATION DU MODÈLE .....</b>	<b>118</b>
5.1.	Introduction .....	118
5.2.	Structures sous chargement monotone .....	119
5.3.	Structures sous chargement cyclique .....	126
5.4.	Étude des différents phénomènes du comportement cyclique du béton .....	135
5.5.	Étude comparative des trois types d'éléments élaborés précédemment .....	137
5.6.	Influence de la prise en compte du béton tendu sur le comportement cyclique des structures en béton armé .....	142
5.7.	Conclusion.....	143
	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>144</b>
	<b>Références .....</b>	<b>146</b>
	<b>Annexes .....</b>	<b>156</b>

# Liste des figures

Figure 1 : Comportement de béton en compression uni-axial (Ghannoum [47]).....	4
Figure 2 : comportement de béton en traction simple (Terrien [117]).....	6
Figure 3 : Courbes expérimentales contrainte - déformation sous chargement cyclique (SINHA [115]).....	7
Figure 4 : Courbe cyclique charge - déformation (KARSAN [65]).....	7
Figure 5 : Model mathématique du béton propose par Seckin [111] .....	8
Figure 6 : Comparaison du modèle [YANKELEVSKI [126] avec les essais de (a)Karsan et Jirsa [65] et (b) Sinha et col [115].....	10
Figure 7 : Schéma des points focaux, Yankelevsky et de Reinhardt (béton en compression) .....	11
Figure 8 : Schéma des points focaux, Yankelevsky et de Reinhardt (béton en traction).....	12
Figure 9 : Courbe Contrainte-déformation model-essai (BENMANSOUR [17]).....	15
Figure 10 : Courbe de déchargement et rechargement (Bahn et Hsu [13]) .....	17
Figure 11 : Modèles d'hystérésis de béton à la compression : (a) déchargement ; et (b) rechargement [89].....	18
Figure 12 : Comparaison du modèle proposé par les résultats expérimentaux [89].....	20
Figure 13 : Modèles d'hystérésis de béton en traction : (a) déchargement ; et (b) rechargement [89].....	21
Figure 14. Comparaison entre SINHA [114] et ASLANI [12].....	24
Figure 15 : Courbe contrainte-déformation de l'acier (NAITO [81]).....	25
Figure 16 : Réponse de l'acier sous un chargement cyclique inversé (Ma et al [72]).....	26
Figure 17 : Model de Menegotto [76].....	27
Figure 18 : les courbes de Menegotto-Pinto en variant la valeur du paramètre b.....	28
Figure 19: Model de Menegotto-Pinto [76].....	29
Figure 20 : Graphe représentatif des types de non linéarité en mécanique des structures.....	31

Figure 21. Méthodes itératives pour la résolution des systèmes non linéaires.....	33
Figure 22 : Organigramme générale (Sulayfani [10]).....	36
Figure 23 : Organigramme de calcul de la courbure dans une section (Sulayfani [10]).....	37
Figure 24 : Schéma de la discrétisation d'un élément (Sulayfani [10]).....	38
Figure 24 : Éléments quadratique utilisé (Girard [49]).....	39
Figure 25 : Définition des configurations initiale et déformée (Girard [49]).....	40
Figure 26 : Réponse du modèle sous chargement uniaxial cyclique (Bouzaiene [19]).....	41
Figure 27 : Courbe contrainte-déformation du béton (Girard [49]).....	42
Figure 28 : Organigramme général de l'étude d'une section (Kachi [64]).....	46
Figure 29: Schéma représentatif des relations entre Déplacement-Déformation-Contrainte...	49
Figure 30 : Schématisation de l'élément poutre étudié.....	50
Figure 31: Définition de la cinématique de la poutre.....	51
Figure 32 : Modélisation de la section transversale.....	52
Figure 33 : Représentation des efforts internes.....	53
Figure 34 : Représentation du chargement agissant sur la poutre et de la section transversale de la poutre.....	55
Figure 35 : Élément fini à 2 nœuds et 6 d.d.l.....	57
Figure 36: Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement longitudinal des éléments à 2 nœuds.....	58
Figure 37 : Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement transversal des éléments à deux nœuds .....	60
Figure 38: Représentation graphique des abscisses des points de Gauss .....	63
Figure 39: Élément fini à 3 nœuds.....	64
Figure 40 : Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement longitudinal des éléments à trois nœuds .....	65
Figure 41 : Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement transversal (N2 et N3) des éléments à trois nœuds .....	66

Figure 42 : Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement transversal (N5, N6, N8 et N9) des éléments à trois nœuds .....	67
Figure 43: Représentation graphique des abscisses des points de Gauss .....	69
Figure 44: Élément fini à 04 nœuds .....	70
Figure 45 : Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement longitudinal des éléments à quatre nœuds .....	72
Figure 46 : Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement transversal des éléments à quatre nœuds .....	75
Figure 47: Représentation graphique des abscisses des points de Gauss.....	75
Figure 48 : Discrétisation de la section transversale en couches trapézoïdales.....	78
Figure 49 : Courbe contrainte-déformation de Sargin [110].....	83
Figure 50 : Courbe contrainte – déformation de la loi de SARGIN avec un tronçon.....	83
Figure 51 : diagramme contrainte –déformation (loi parabolique) [20] .....	84
Figure 52 : Courbe contrainte-déformation de la loi parabole-rectangle.....	85
Figure 53 : diagramme contrainte –déformation (élastique-fragile) .....	86
Figure 54 : diagramme contrainte –déformation (Loi élastique adoucissante avec branche décroissante linéaire) .....	86
Figure 55 : diagramme contrainte déformation (Loi de Grelat) [50] .....	87
Figure 56 : Courbe contrainte déformation Vecchio [121].....	89
Figure 57 : modélisation du comportement cyclique du béton.....	90
Figure 58 : Organigramme représentatif de la loi de comportement cyclique du béton .....	93
Figure 59 : Comportement des aciers .....	94
Figure 60 : comportement cyclique des aciers.....	94
Figure 61 : Organigramme représentatif de la loi de comportement cyclique d'acier.....	95
Figure 62 : Schéma représentatif de la méthode de la rigidité sécante.....	96
Figure 63 : Organigramme de l'algorithme de résolution.....	98
Figure 64 : Organigramme générale du programme poutre_cycle .....	101

Figure 65 : Organigramme représentatif de la subroutine input.....	103
Figure 66 : Organigramme représentatif de la subroutine « stifbl ».....	106
Figure 67 : Organigramme représentatif de la subroutine residu_reforbl.....	108
Figure 68 : représentation du fichier donnée.....	111
Figure 69 : représentation du fichier des résultats« fout » .....	116
Figure 70 : Donnée géométrique de la poutre [118].....	119
Figure 71 : diagramme contrainte déformation des matériaux utilisés.....	120
Figure 72 : Courbes charge-flèche[118].....	120
Figure 73 : Courbes charge-déformation du béton [118].....	121
Figure 74 : Caractéristiques géométriques de la poutre [78].....	122
Figure 75: Courbes Charge-flèche [78] .....	122
Figure 76 : Donnée géométrique et ferrailage de la poutre [120] .....	123
Figure 77 : Comportement de la poutre en flexion 3 points (courbe charge-flèche) [120]...	124
Figure 78: Caractéristiques géométriques et ferrailage du poteau Low-Moehle [71].....	125
Figure 79: Courbes charge-déplacement de l'essai de Low-Moehle [71].....	126
Figure 80: Donnée géométrique de la poutre [77].....	127
Figure 81: Courbe charge-déplacement Essai de Christia (1 <sup>er</sup> cycle) [77].....	127
Figure 82: Courbe charge-déplacement Essai de Christia (2 <sup>ème</sup> cycle) [77].....	128
Figure 83: Courbes charge-déplacement des huit cycles [103].....	129
Figure 84: Courbes Charge-déplacement du 6 <sup>ème</sup> cycle de Benchmark [103].....	129
Figure 85: Courbes Charge-déplacement du 7 <sup>ème</sup> cycle de Benchmark [103].....	130
Figure 86: Courbes Charge-déplacement du 8 <sup>ème</sup> cycle de Benchmark [103].....	130
Figure 87: Caractéristiques géométrique et ferrailage de la poutre de Sulayfani [10].....	131
Figure 88: Courbe Charge-Flèche du premier cycle [10].....	132
Figure 89: Courbe Charge-Flèche du deuxième cycle [10].....	132

Figure 90: Données géométriques de l'élément et mécaniques des matériaux-essai de Qiu [97].....	134
Figure 91: Courbe charge-déplacement – essai de Qiu [97].....	134
Figure 92 : Courbe contrainte-déformation du béton.....	135
Figure 93 : Variation de la rigidité en fonction de la charge .....	136
Figure 94 : Relation entre déformation résiduelle et la déformation du début de déchargement [89].....	136
Figure 95 : Résultats de la simulation donnés par un élément poutre à deux nœuds [78] ....	137
Figure 96 : Résultats de la simulation donnés par l'utilisation d'un élément à trois nœuds [78] .....	128
Figure 97 : Résultats de la simulation donnés par l'utilisation d'un élément à quatre nœuds.....	138
Figure 98: Comparaison des courbes force-déplacements des différents éléments utilisés [78] .....	139
Figure 99 : courbes erreur relative (en %) sur la charge de ruine - Nombre d'élément pour trois modèles d'élément.....	140
Figure 100 : courbes erreur relative (en %) sur le déplacement - Nombre d'élément pour les trois types d'éléments utilisés.....	140
Figure 101 : Influence de la négligence du béton tendu .....	143

# Liste des tableaux

Tableau 1: Abscisses et poids d'intégration de Gauss utilisé pour l'intégration numérique de l'élément à deux nœuds.....	63
Tableau 2: Abscisse et poids d'intégration de Gauss utilisé pour l'intégration numérique de l'élément à trois nœuds.....	69
Tableau 1 : abscisse et poids d'intégration de Gauss utilisé pour l'intégration numérique de l'élément à quatre nœuds.....	76
Tableau 4 : Caractéristiques des matériaux [93].....	119
Tableau 5 : Comparaison des résultats Calcul-Test [78].....	123
Tableau 6 : Caractéristiques mécaniques des matériaux [120].....	124
Tableau 7 : Comparaison des résultats Calcul-Flèche [120].....	125
Tableau 8: Caractéristiques des matériaux [77].....	127
Tableau 9 : Caractéristiques des matériaux [103].....	128
Tableau 10 : Caractéristique mécanique du béton [10].....	131
Tableau 11: Caractéristiques mécanique des aciers [10].....	131
Tableau 12 : Comparaison des résultats essai-calcul [10].....	133
Tableau 13 : Récapitulation des principaux résultats donnés par les différentes versions du programme. ....	141

# Liste des symboles

$\varepsilon_1$  : est la déformation plastique.

$\varepsilon_0$  : est la déformation à la contrainte maximale.

$\varepsilon_m$  : Déformation de déchargement à partir de la courbe enveloppe.

$f_{bc}$  : Résistance du béton à la compression.

$f_{bt}$  : Résistance du béton à la traction.

$f_r$  : Contrainte de déchargement.

$E_0$  : Module d'élasticité initial du béton.

$E_1$  : Rigidité de déchargement à la contrainte nulle.

$E_2$  : La rigidité de la courbe rechargement.

$D_c$  : Variable d'endommagement du béton en compression.

$D_t$  : Variable d'endommagement du béton en traction.

$Y_{ot}$  : Seuil d'endommagement en traction.

$Y_{oc}$  : Seuil d'endommagement en compression.

$S_{pu}$  : Rapport de la déformation plastique.

$S_{eu}$  : Le rapport de la déformation de déchargement sur la courbe enveloppe.

$U_{unlo}$  : La contrainte de déchargement.

$U_{eu}$  : L'enveloppe de rapport de la contrainte de déchargement.

$U_{pu}$  : Rapport de la contrainte de déchargement partiel.

$S$  : Rapport de la déformation sur la branche de déchargement.

$S_{eu}$  : Rapport de déformation de déchargement sur la courbe enveloppe.

$U_{relo}$  : est le rapport de contrainte sur la courbe de rechargement,

$U_{ppu}$  : Le rapport de contrainte partielle de déchargement ou le rechargement commence.

$U_{erpu}$  : est le rapport de contraintes de rechargement de l'enveloppe considérant des effets du déchargement partiel.

$S_{ppu}$  : Rapport de la déformation partielle de déchargement.  
 $S_{erpu}$  : Rapport de la déformation de rechargement.  
 $\varepsilon_c^p$  : Déformation plastique du béton.  
 $\varepsilon_p$  : Déformation correspondante au pic des contraintes.  
 $\varepsilon_{2c}$  : La première déformation de déchargement sur la courbe enveloppe.  
 $E_{c1}$  Est la rigidité rechargement.  
 $f_{1c}$  : La contrainte de déchargement à partir de la courbe enveloppe.  
 $E_{c5}$  : La rigidité initiale de déchargement.  
 $E_{c6}$  : La rigidité de déchargement.  
 $E_{s0}$  : Module initiale tangent de la courbe contrainte-déformation de l'acier.  
 $E_\infty$  : Module tangent secondaire.  
 $\sigma_{sr}$  : Contrainte au point de la dernière inversion de contrainte.  
 $\varepsilon_{sr}$  : Déformation au point de la dernière inversion de contrainte.  
 $y_{i,n}$  : Flèche.  
 $u_0(x)$  : Le déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la poutre.  
 $w(x)$  : Le déplacement transversal.  
 $\theta(x)$  : La rotation de la normale de la section transversale d'abscisse  $x$ .  
 $\gamma$  : La rotation due au cisaillement transversal.  
 $\varepsilon_{0x}$  : Déformation longitudinal au niveau de l'axe de référence.  
 $\emptyset$  : Courbure.  
 $N$  : l'effort normal dans la section.  
 $M$  : Moment fléchissant dans la section.  
 $W$  : Travail virtuel.  
 $N_i$  : Fonction d'interpolation pour un déplacement.  
 $\xi_i$  : Abscisse du point de gauss.

$n$  : nombre des point de gauss.

$f_{bc}$  : Résistance à la compression du béton.

$E_{b0}$  : Module élastique du béton à l'origine.

$\varepsilon_{b0}$  : Déformation correspondant au pic des contraintes.

$\varepsilon_{bft}$  : Déformation correspondante à la contrainte à la traction de béton.

$\varepsilon_{bft}$  : Déformation de traction correspondant à  $f_{bt}$  .

$\varepsilon_{btu}$  : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendus.

$f_{ae}$  : Limite d'élasticité de l'acier.

$\varepsilon_{ae}$  : Déformation correspondante à la limite d'élasticité.

$E_a$  : Module d'élasticité de l'acier.

$\varepsilon_{au}$  : Déformation ultime de l'acier.

$\varepsilon_{at}$  : Déformation de l'acier le plus tendu.

$\varepsilon_{r(i)}$  : Déformation résiduelle.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Sous l'action des sollicitations de type sismique, le comportement des structures en béton armé peut subir une large incursion hors du domaine linéaire. Par ailleurs, les actions sismiques imposent aux structures des sollicitations cycliques et dynamiques.

Par conséquent, l'évaluation de la réponse des structures en béton armé, sous des actions de type sismique, nécessite une bonne connaissance de leurs comportements non linéaires aussi bien monotones que cycliques.

Le calcul des structures en béton sous charges monotones est relativement connu et compris au niveau théorique et réglementaire. Dans le cas d'un chargement cyclique, le comportement est très complexe en présence de la plasticité et du comportement fortement non linéaire du matériau en présence des non linéarités matérielles et des phénomènes de fissuration qui apparaissent en plasticité. De ce fait les modèles analytiques et les solutions réglementaires sont inexistantes. Seuls les modèles numériques basés essentiellement sur la méthode des éléments finis et utilisant des lois de comportement contraintes déformations rigoureuses peuvent aider à comprendre le comportement de ces structures. D'où l'intérêt porté à ce projet de recherche qui est l'objet de la thèse.

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse à l'étude et à la modélisation des comportements statiques non linéaires, monotones et cycliques, des éléments des ossatures en béton armé ainsi que des matériaux acier et béton les constituant.

L'objectif principal est de développer un outil numérique efficace pour modéliser le comportement en flexion des structures en béton armé en prenant en compte le comportement non linéaire sous charges de flexion monotones ou cycliques.

Dans cette modélisation, on tient compte des non linéarités matérielles qui englobent les comportements non linéaires des matériaux aciers et béton et le phénomène de fissuration. Le présent travail portera essentiellement sur des structures en béton armé.

La présente étude est limitée à la modélisation des structures planes avec des sections minces dont le comportement n'est pas influencé par l'effort tranchant et pour lesquelles les non-linéarités géométriques ne sont pas considérées.

Le rapport de thèse est structuré comme suit:

- Le chapitre 1 débute par une synthèse bibliographique sur les travaux relatifs à la modélisation des comportements non linéaires monotone et cycliques des matériaux béton et acier, ensuite, un aperçu sur le calcul non linéaire des structures en béton armé est présenté avec les différents phénomènes liés à cette non linéarité.
- Dans le chapitre 2, nous avons développé une formulation détaillée pour la modélisation du comportement en flexion d'un élément poutre plane multicouches à deux nœuds, trois nœuds et à quatre nœuds, en se basant sur l'hypothèse de Navier – Bernoulli.
- Dans le chapitre 3, nous avons présenté la procédure de calcul numérique pour la résolution non linéaire, les méthodes d'intégration numérique ainsi que les modèles de comportement non linéaire monotone et cyclique des différents matériaux utilisés.
- Le chapitre 4 est consacré à la présentation du programme informatique élaboré en fortran 90, permettant la simulation numérique du comportement non linéaire monotone et cyclique des ossatures planes en béton armé.
- Le chapitre 5, porte sur la validation de la modélisation développée dans le cadre de notre étude et cela par la simulation numérique des exemples expérimentaux existant en littérature et la comparaison des résultats obtenus par notre programme avec les résultats de ces essais.
- Une conclusion générale des résultats obtenus ainsi que les perspectives possibles à donner à ce travail clôtureront le rapport.

# **Chapitre I :**

## **Revue Bibliographique.**

---

### **1. Introduction :**

Le calcul des structures en béton sous charges monotone est très abordé au niveau théorique et réglementaire. Mais dans le cas des charges cycliques, le calcul des structures au niveau théorique ou réglementaire est très complexe pour ne pas dire impossible. Dans le cas des structures en béton, le calcul est encore plus complexe en présence des non linéarités matérielles et de la fissuration. Seuls les modèles numériques comme ceux basés sur la méthode des éléments finis peuvent être efficaces et aider la compréhension du comportement de ces structures. La modélisation d'une structure par éléments finis nécessite les étapes suivantes : le choix d'une échelle de description à laquelle le calcul doit être réaliste et efficace, la modélisation des différents matériaux constituant la structure et enfin la mise en œuvre numérique dans un code de calcul par élément finis.

Afin de mieux situer notre travail, nous allons présenter dans ce chapitre les différentes modélisations du comportement cyclique et monotone des matériaux acier et béton, ensuite, une brève présentation des différentes méthodes de calcul non linéaire des structures ainsi que les phénomènes liés à cette non linéarité et enfin un aperçu sur les différents travaux consacrés à la modélisation des structures en béton armé existant en littérature.

## 2. Comportement non linéaire des matériaux :

Les structures se déforment sous l'action des forces extérieures qui leur sont appliquées, mais diverses structures ne différant que par le matériau qui les compose peuvent avoir des comportements très distincts sous des charges identiques : certains cassent, d'autres changent irrémédiablement de forme, d'autres encore se déforment plus ou moins mais retrouvent leur forme initiale après suppression du chargement pour cela on doit connaître d'abord leurs comportements et les lois qui les traduisent.

Le béton armé est un matériau composé d'acier et de béton, deux matériaux aux réponses mécaniques très différentes quand ils subissent des déformations, surtout en traction. Il est alors nécessaire, de bien assimiler les théories développées et les lois considérées dans la définition du comportement de chacun de ces matériaux.

Ces lois sont exposées ci après.

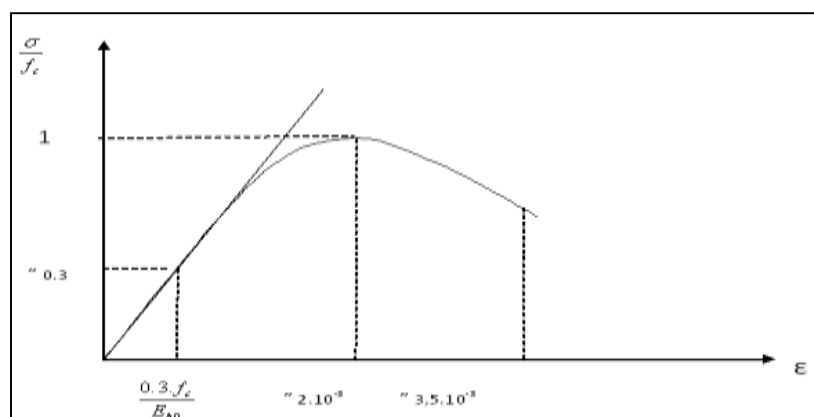
### 2.1. Béton :

#### 2.1.1. Comportement monotone :

Le béton est un matériau hétérogène, il montre un comportement hautement non linéaire différent en traction et en compression.

##### 2.1.1.1. Comportement en compression :

La résistance en compression du béton est déterminée en utilisant des essais de compression uni-axiale sur des éprouvettes cylindriques normalisées (16 x 32 cm). L'allure générale de la courbe contrainte déformation est donnée par le diagramme illustré par la figure 1 :



**Figure 1: Comportement de béton en compression uni-axial (Ghannoum [47]).**

On distingue les phases suivantes :

- la déformation croît de façon linéaire jusqu'à environ 30% de la contrainte ultime.
- entre 30% et 100% de la contrainte ultime, la courbe s'incurve et le comportement devient non -linéaire. Ceci correspond à l'apparition puis au développement des fissures verticales dans l'éprouvette.
- L'atteinte du pic définit la contrainte ultime qui caractérise la résistance du béton à la compression. Elle correspond à une déformation de l'ordre de 2 ‰.
- La rupture se produit au delà du pic avec fissuration verticale et écrasement de l'éprouvette. Une légère augmentation des déformations observée et la rupture totale est produite pour des déformations de 3.5‰.

### **2.1.1.2. Comportement en traction :**

La résistance est mesurée, soit par un essai de traction directe, soit indirectement par un essai de fendage ou de flexion. Dans un essai de traction directe, la courbe contrainte – déformation à l'allure présentée par la figure 2, d'après Terrien [117] on distingue les phases suivantes :

- avant le pic ( $\sigma < f_t$ ), le comportement est presque linéaire ( $f_t$  : la limite de traction).
- une légère non -linéarité apparaît à l'approche du pic correspondant à la décohérence de quelques liaisons à l'interface pâte – granulat et à la propagation des microfissures.
- l'après pic où la contrainte chute brutalement avant de se stabiliser, les déformations peuvent continuer à accroître (apparition des déformations résiduelles dues à l'hétérogénéité du matériau).

Le béton est un matériau fragile en traction. La résistance en traction est très faible par rapport à celle de compression. Le rapport entre la résistance à la traction et la résistance à la compression varie généralement de 0,05 à 0,1. Ce rapport varie alors entre 10 et 20. Le module d'élasticité sous traction uni-axiale est un peu plus élevé et le coefficient de Poisson quelque peu plus bas que dans la compression uni-axiale.

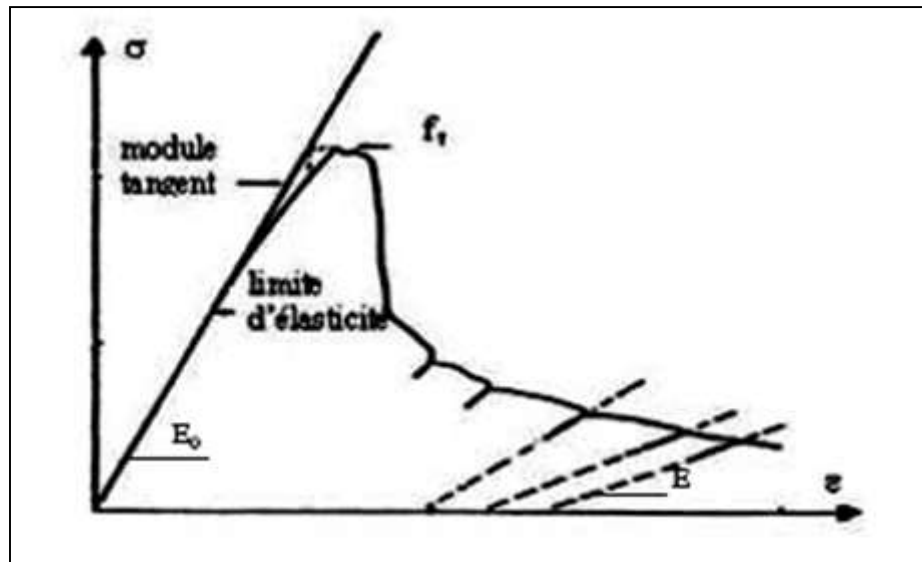


Figure 2 : comportement de béton en traction simple Terrien [117].

Pour approcher les divers aspects de la réponse du béton un grand nombre de lois de comportement ont été proposées à savoir : **Picard [95]**, **Collins et Mitchell [25]**, **Elmorsi [33]**, **Said et al [107]**. Dans le cadre de la présente étude, vu le nombre important des modèles existants en littérature, nous avons retenu celle de :

- Sargin [110] et CEB [20] pour le béton en compression.
- Grelat [50], Vecchio [121] et Quast [96] pour le béton en traction

### 2.1.2. Comportement cyclique :

L'effet des chargements cycliques sur le béton est principalement associé, au niveau microscopique, par le développement de la microfissuration et plusieurs phénomènes connexes (effets de frottement entre les surfaces des microfissures qui empêchent leur re-fermeture complète après déchargement, endommagement de l'interface pâte-granat, notamment par abrasion des granulats). Ces endommagements microscopiques se traduisent par des modifications au niveau des propriétés macroscopiques, soit par une diminution de la rigidité et de la résistance ainsi que par l'apparition de déformations permanentes irréversibles. Ces phénomènes doivent être pris en compte dans l'élaboration d'une loi de comportement incluant l'endommagement du béton.

Il existe une littérature très abondante à propos de lois de comportement cycliques du béton. Quelques modèles sont décrits ci-dessous.

### 2.1.2.1. Sinha et al [115] :

En modélisant le béton, Sinha et al ont tenté de modéliser le béton soumis aux charges cycliques répétées de compression (figure 3). Ont développé une équation polynomiale du second degré pour la courbe enveloppe, une équation parabolique du second degré pour la courbe de déchargement et une droite pour le rechargement. Quatre constantes expérimentales et deux paramètres sont nécessaires pour définir le comportement cyclique du béton.

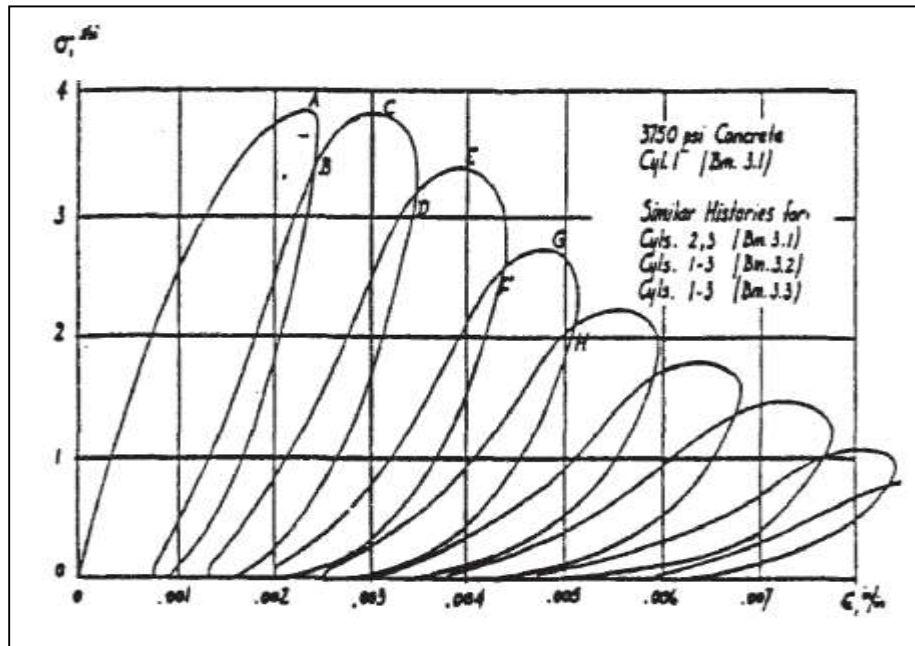


Figure 3 : Courbes expérimentales contrainte - déformation sous chargement cyclique SINHA [115].

### 2.1.2.2. Karsan et Jirsa [65] :

Les auteurs ont fait une investigation expérimentale sur des poteaux rectangulaires courts soumis à des charges cycliques répétées de compression (figure 4). Le modèle développé donne une relation exponentielle entre la contrainte et la déformation pour la courbe enveloppe et des équations paraboliques du second degré pour les courbes de déchargement et de rechargement.

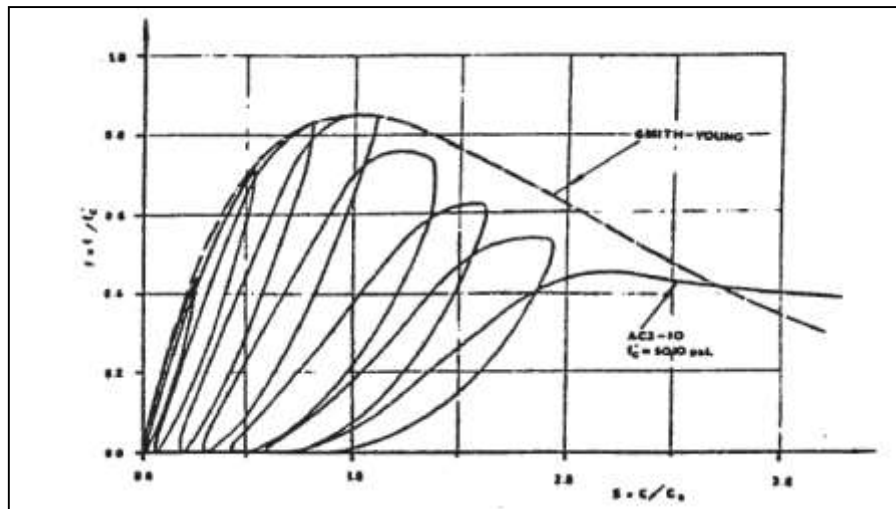


Figure 4 : Courbe cyclique charge - déformation KARSAN [65].

2.1.2.3. Seckin [111] :

Seckin a mené un projet de recherche sur le comportement poutre-poteau assemblées. La figure 5 montre une représentation schématique du modèle proposé pour comportement cyclique du béton.

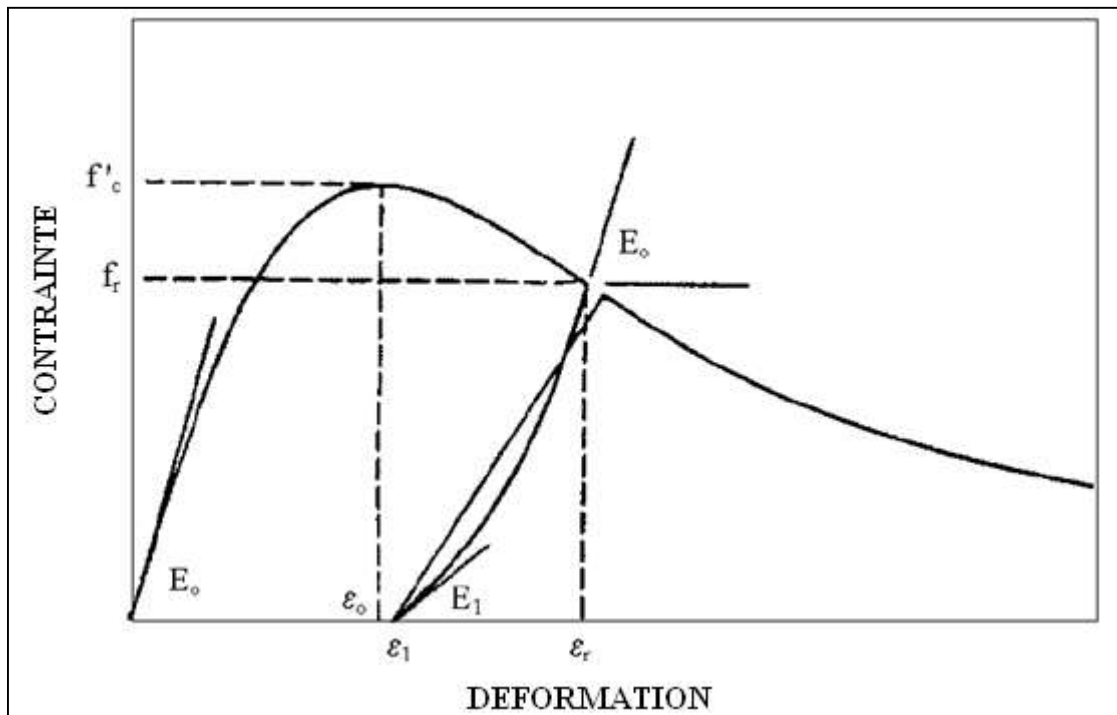


Figure 5 : Model mathématique du béton propose par Seckin [111].

Le modèle se base sur hypothèses suivantes :

1. La résistance à la traction du béton est négligeable.
2. les courbes de rechargement sont représentées par des lignes droites.
3. La courbe de chargement monotone est une limite supérieure aux courbes de rechargement.

4. Le point de contrainte-déformation de la courbe enveloppe au moment du déchargement définit la courbe de déchargement. L'accumulation de déformations plastiques se produit uniquement à partir de la courbe enveloppe.

Les courbes de déchargement, exprimées sous forme polynomiale, ont été dérivés en considérant les conditions aux limites de l'apparition de déchargement à partir de la courbe enveloppe et à la fin du déchargement. La contrainte de déchargement est calculée comme suit:

$$f_c = E_1(\varepsilon - \varepsilon_1) + G(\varepsilon - \varepsilon_1)^N \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N = \frac{(E_0 - E_1)(\varepsilon - \varepsilon_1)}{f_r - E_1(\varepsilon - \varepsilon_1)} \\ G = \frac{f_r - E_0(\varepsilon - \varepsilon_1)}{(\varepsilon - \varepsilon_1)^N(1 - N)} \end{cases} \dots \dots \dots (1)$$

La variation des modules d'élasticité en fonction des déformations obéit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} E_1 = E_0(1 - 0.7\varepsilon_m^{0.41}) \\ E_1 = 0.071E_0 \end{cases} \quad \begin{cases} Si \ \varepsilon_r < 2\varepsilon_0 \\ Si \ \varepsilon_r \geq 2\varepsilon_0 \end{cases} \dots \dots \dots (2)$$

¶

$$\varepsilon_1 = (\varepsilon_m - 0.60)\varepsilon_0 \geq 0 \dots \dots \dots (3)$$

Une relation linéaire plus simple de rechargement a été adoptée, ¶ et modelé comme suite:

$$f_c = E_2(\varepsilon - \varepsilon_1) \quad \text{Ou} \quad E_2 = \frac{7.5E_0}{\varepsilon_1E_0 + 7.5} \dots \dots \dots (4)$$

Les termes utilisés dans les relations (1-3) sont :

$\varepsilon_1$  : est la déformation plastique.

$\varepsilon_0$  : est la déformation à la contrainte maximale.

$\varepsilon_m$  : Déformation de déchargement à partir de la courbe enveloppe.

$f_c$  : Contrainte du béton.

$f_r$  : Contrainte de déchargement.

$E_0$  : Module d'élasticité initial du béton.

$E_1$  : Rigidité de déchargement à la contrainte nulle.

$E_2$  la rigidité de la courbe rechargement.

#### 2.1.2.4. Yankelevski et Reinhardt [127] :

Ces auteurs ont développé un modèle basé sur la construction géométrique où la décharge se fait de la courbe enveloppe. A la fin du rechargement, la courbe rejoint la courbe enveloppe (figure 6). Les auteurs ont développé des modèles unidimensionnels séparément pour le béton en compression et en traction basés sur les propriétés géométriques du béton.

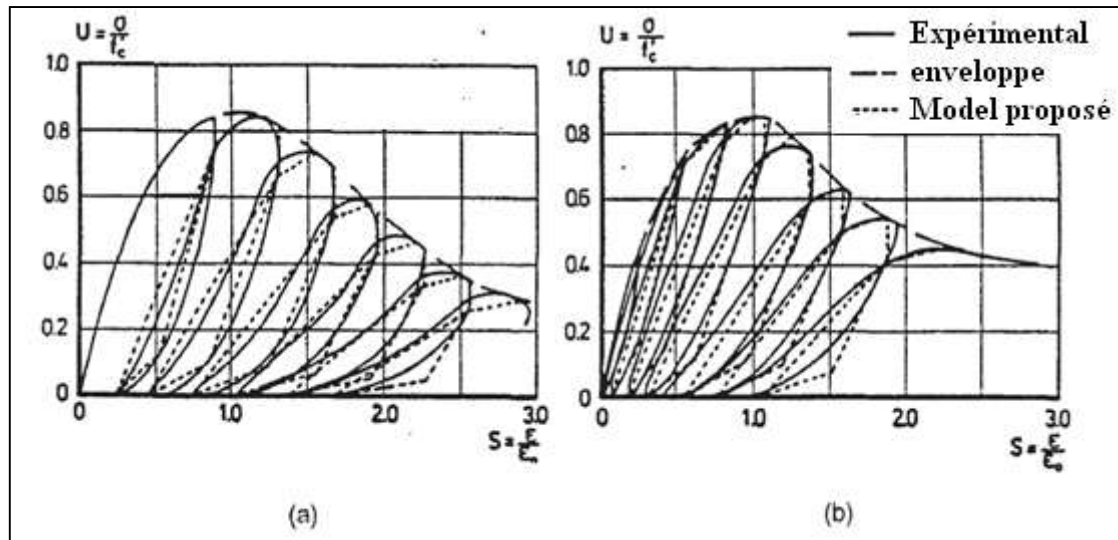
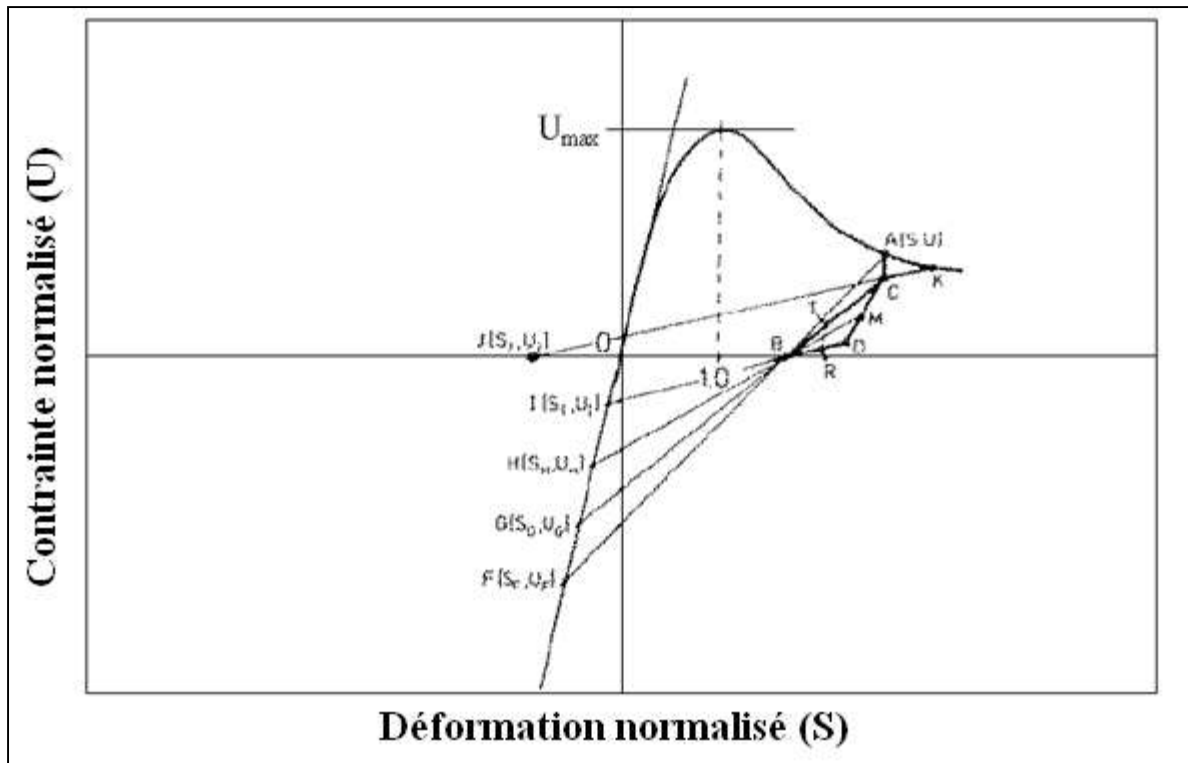


Figure 6 : Comparaison du modèle [YANKELEVSKI [126]] avec les essais de (a) Karsan et Jirsa [65] et (b) Sinha et col [115].

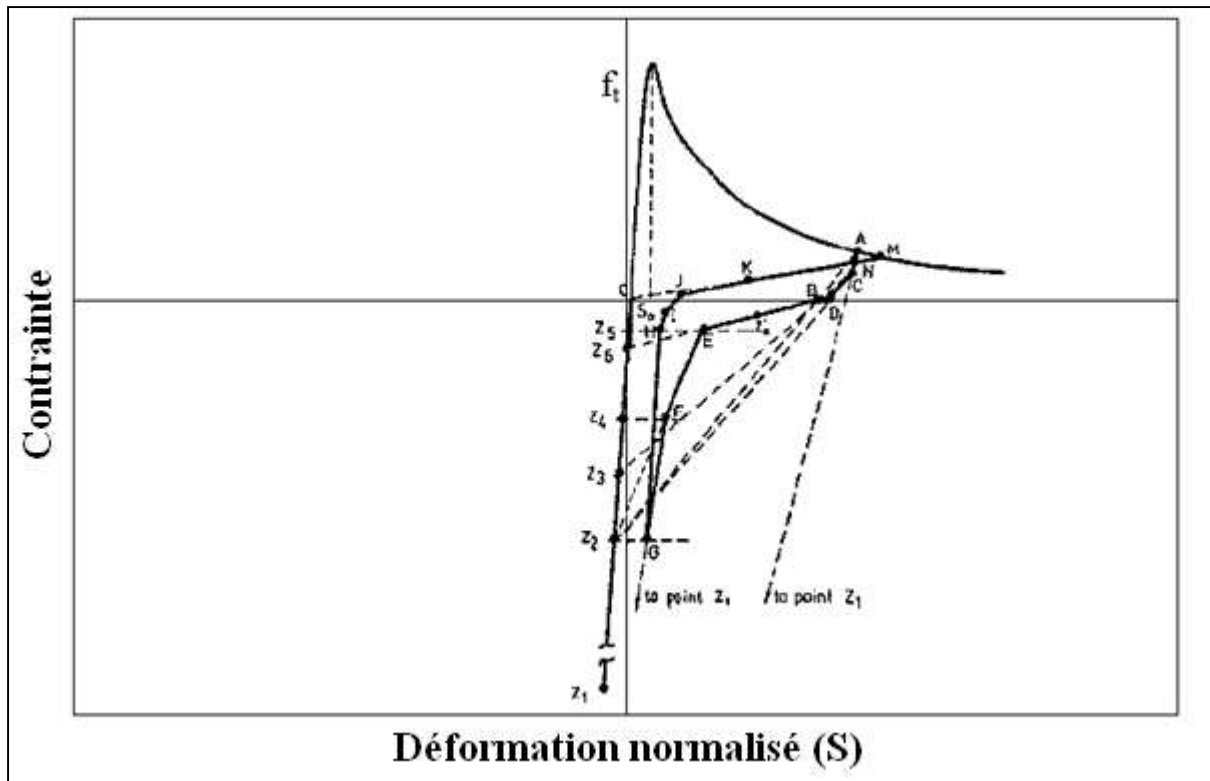
En compression, le modèle détermine un ensemble de six points focaux qui permettent de reconstituer les branches linéaires pour le déchargement et le rechargement. Ces points focaux sont uniquement dépendants de la contrainte maximale en compression du béton, et sont situés le long de la tangente du module initial. Ce modèle est pratique pour visualiser graphiquement le comportement unidimensionnel du béton sous chargement cyclique en compression. La figure 7 montre les procédures graphiques utilisées pour former un ensemble de réponses déchargement et de rechargement dans un système de coordonnées uni-axiales contrainte-déformation.



**Figure 7 : Schéma des points focaux, Yankelovsky et de Reinhardt (béton en compression) [127].**

Ce modèle sert plus comme un outil graphique. Il est difficilement exploitable numériquement par un modèle élément fini.

La même procédure a été utilisée pour décrire le comportement du béton soumis à une traction cyclique. Le modèle a été formulé dans le système de coordonnées déplacement-contrainte, Sept points focaux, placés le long de la tangente à la courbe enveloppe, ont été définis et considérés dépendants de la résistance à la traction du béton. Comme dans la compression, les branches linéaires décrivent le déchargement et le rechargement en traction. La figure 8 montre le model des points focaux.



**Figure 8 : Schéma des points focaux, Yankelevsky et de Reinhardt [127] (béton en traction).**

Le modèle ci-dessus fournit un excellent outil graphique. Il capture les dommages causés par l'effet de rechargement sur le béton, et considère la fermeture de fissures. Dans ce dernier cas, le béton subit des forces de compression avant que les fissures ne soient complètement fermées. Cependant, la mise en œuvre de ce modèle dans un algorithme par éléments finis peut être délicat compte tenu des nombreuses réponses linéaires nécessaires pour capturer le comportement cyclique global. Le modèle de point focal, décrivant le comportement cyclique du béton, peut-être non propice à la programmation des éléments finis mais offre une représentation graphique simple du comportement complexe du béton sous chargement cyclique.

#### **2.1.2.5. Modèle BENMANSOUR [17] :**

Benmansour a développé un modèle de comportement cyclique du béton basé sur la théorie de l'endommagement, sur la mécanique des milieux continus et la thermodynamique des processus irréversibles. Ce modèle tient compte des déformations résiduelles et de la perte de raideur due à la fissuration. Une amélioration importante pour l'application du modèle a été de définir une méthode d'identification des paramètres à partir des données physiques obtenues

dans les essais classiques de contrôle du béton et d'une expression analytique de la loi de comportement d'usage courant.

**- Contrainte positive (Compression):**

La déformation positive liée à une contrainte positive est associée à un état de compression, La loi contrainte - déformation s'écrit :

$$\sigma = \varepsilon E_0(1 - D_c) - \beta_c f_c D_c - \frac{\beta_t f_t D_t (1 - D_c)}{(1 - D_t)} \dots \dots \dots (5)$$

Cette relation peut se mettre sous la forme :

$$\sigma = \sigma_e - \sigma_{an} \text{ avec: } \begin{cases} \sigma_e = \varepsilon E_0(1 - D_c) & \text{la partie élastique non linéaire} \\ \sigma_{an} = B_c f_c D_c - \frac{\beta_t f_t D_t (1 - D_c)}{(1 - D_t)} & \text{la partie anélastique de la contrainte} \end{cases} (6)$$

**- Contrainte négative (Traction):**

L'état de traction du béton est associé à la contrainte négative quel que soit le signe de la déformation. La loi contrainte - déformation s'écrit :

$$\sigma = \varepsilon E_0(1 - D_t) - \beta_t f_t D_t - \frac{\beta_c f_c D_c (1 - D_t)}{(1 - D_c)} \dots \dots \dots (7)$$

De la même façon, elle peut se mettre sous la forme :

$$\sigma = \sigma_e - \sigma_{an} \text{ avec: } \begin{cases} \sigma_e = \varepsilon E_0(1 - D_t) & \dots \dots \dots \text{.. la partie élastique non linéaire} \\ \sigma_{an} = \beta_t f_t D_t - \frac{\beta_c f_c D_c (1 - D_t)}{(1 - D_c)} & \text{la partie anélastique de la contrainte} \end{cases} (8)$$

Dans les relations ci-dessus, onze paramètres sont nécessaires pour caractériser le comportement du béton en compression et en traction. Ils sont classés en quatre groupes, à savoir :

- le paramètre d'élasticité  $E_0$  (module d'élasticité à l'origine),
- les résistances de compression et de traction,  $f_t$  et  $f_c$  ,
- les paramètres d'anélasticité  $\beta_c$  et  $\beta_t$  .
- les paramètres caractérisant les variables d'endommagement  $D_c$  et  $D_t$  :
  - de traction :  $a_t$  ,  $b_t$  et  $Y_{ot}$  ,
  - de compression :  $a_c$  ,  $b_c$  et  $Y_{oc}$

On doit noter que les paramètres  $\beta_c$  et  $\beta_t$  permettent de décrire les évolutions des déformations permanentes, respectivement, en traction et en compression. Ils peuvent être identifiés sur des essais cycliques répétés, respectivement, en traction et en compression. Ces paramètres apparaissent dans la partie anélastique de la déformation.

Dans le cas général on adoptera :  $\beta_c = 1$  et  $\beta_t = -0.1$

Aussi, pour calculer le seuil d'endommagement en traction, Benmansour a considéré que l'endommagement ne débute que si la contrainte atteint 95% de la résistance à la traction.

$$(Y = Y_{ot}, \sigma = 0.95f_t \text{ et } D_t = 0) \rightarrow Y_{ot} = \frac{f_t^2(1 + 1.9|\beta_t|)}{2E_0} \dots \dots \dots (9)$$

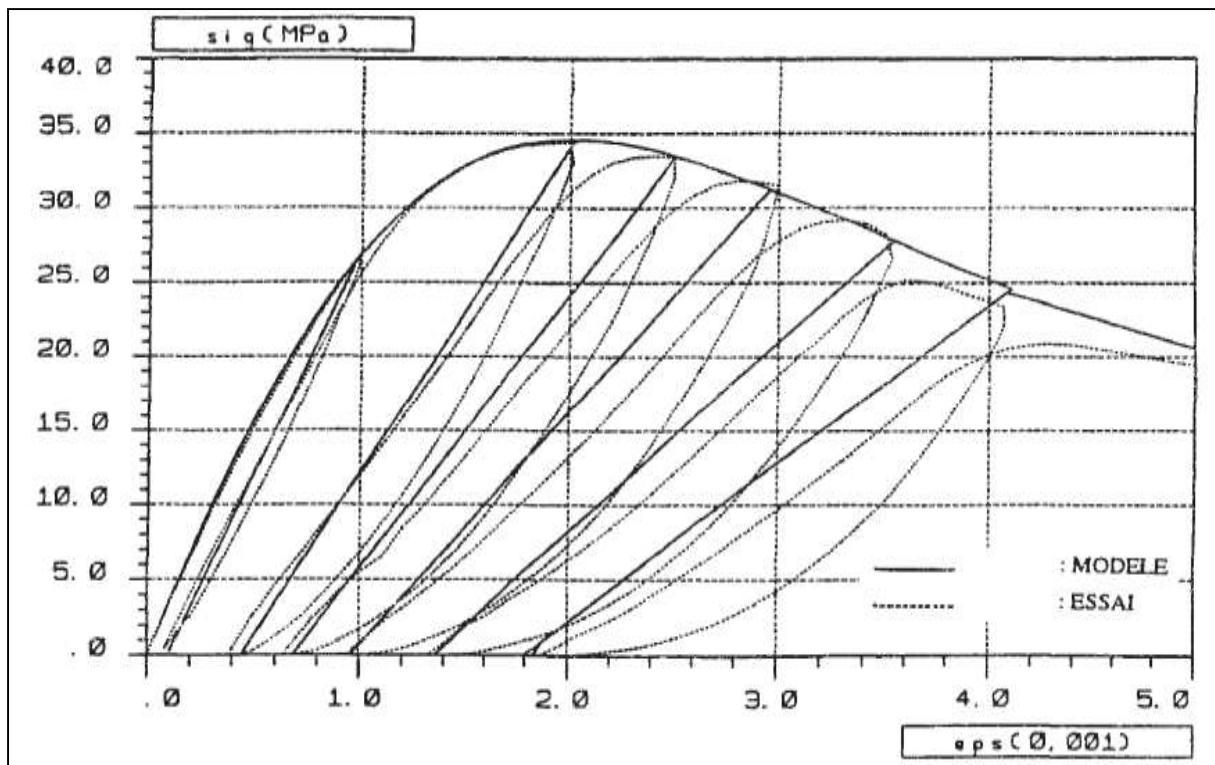
Pour la détermination du seuil d'endommagement de compression, il a utilisé la loi de Sargin des Règles BPEL 91 et la droite tangente à l'origine pour déterminer la contrainte limite d'élasticité linéaire avec un seuil de non-linéarité de 2% :

$$(Y = Y_{oc}, \sigma = \sigma_e \text{ et } D_c = 0) \rightarrow Y_{oc} = \frac{\sigma_e^2 + 2\beta_c f_c \sigma_e}{2E_0} \dots \dots \dots (10)$$

L'identification des paramètres  $a_c, b_c, a_t$  et  $b_t$  nécessite l'utilisation du modèle soit en traction soit en compression monotones (enveloppe des cycles) appliqué à un cylindre.

L'ajustement de  $a_c$  et  $b_c$  se fait jusqu'à ce que les valeurs obtenues pour la résistance à la compression et la déformation correspondante coïncident avec celles déterminées par les Règles BAEL 91 ou par des essais. La détermination de  $a_t$  et  $b_t$  se fait en ajustant les valeurs données par le modèle pour la contrainte au pic de traction et sa déformation correspondante coïncident, respectivement, avec  $f_t$  et  $f_t/E_0$

$$D_t = \frac{\left(\frac{Y_t}{Y_{ot}} - 1\right)^{b_t}}{a_t + \left(\frac{Y_t}{Y_{ot}} - 1\right)^{b_t}} \text{ et } D_c = \frac{\left(\frac{Y_c}{Y_{oc}} - 1\right)^{b_c}}{a_c + \left(\frac{Y_c}{Y_{oc}} - 1\right)^{b_c}} \dots \dots \dots (11)$$



**Figure 9 : Courbe Contrainte-déformation model-essai [17].**

#### 2.1.2.6. Bahn et Hsu [13] :

Bahn et Hsu ont mené un programme expérimental pour examiner l'effet des cycles aléatoires en compression sur le comportement des éprouvettes en béton. Cette recherche a consisté à tester 18 cylindres de béton (76 x 152 mm), et de proposer des modèles pour les conditions générales de chargement du béton en compression. D'après les tests réalisés, ils ont confirmé ce qui suit :

1. La courbe enveloppe pour le chargement cyclique peut être représenté par la courbe de chargement monotone.
2. Les déformations résiduelles sont en fonction de la déformation de déchargement, et une augmentation de déformation de déchargement provoque à peu près la même augmentation de déformation résiduelle accumulée.
3. Les lignes de déchargement et de rechargement ne coïncident pas. La pente moyenne de la courbe de déchargement et de rechargement est inversement proportionnelle à la déformation plastique. Cela suggère qu'il ya dégradation de la rigidité.

Des formules semi-empiriques ont été proposées sur la base des résultats des tests expérimentaux et de vastes simulations numériques et géométriques pour capturer le

comportement global de béton. Pour définir les déformations plastiques, une expression parabolique a été adoptée, comme suit, en fonction des données expérimentales:

$$S_{pu} = c_p (S_{eu})^{n_p} \dots \dots \dots (11)$$

Ou:  $S_{pu}$  est le rapport de la déformation plastique.

$S_{eu}$  Le rapport de la déformation de déchargement sur la courbe enveloppe,

$c_p$  Coefficient de la déformation plastique.

$n_p$  est l'ordre optimal pour le type de l'équation proposée.

Sur la base des données de test, les valeurs  $c_p = 0.3$  et  $n_p = 2$  ont été retenues.

La courbe de déchargement a été modélisée en adoptant une fonction de puissance de type linéaire. La contrainte de déchargement est calculée à partir de:

$$U_{unlo} = U_{pu} + c_u (U_{eu} - U_{pu}) \left( \frac{S - S_p}{S_{eu} - S_p} \right)^{n_u} \dots \dots \dots (12)$$

Ou  $U_{unlo}$  est le rapport de la contrainte sur la courbe de déchargement,

$U_{eu}$  : Enveloppe de rapport de la contrainte de déchargement,

$U_{pu}$  : Rapport de la contrainte de déchargement partiel,

$S$  : rapport de la déformation sur la branche de déchargement,

$S_{eu}$  : Rapport de déformation de déchargement sur la courbe enveloppe,

$c_u$  : Paramètre de déchargement égal a 0.95 et  $n_u$  est un terme de puissance pour refléter la courbure de déchargement et est calculé comme  $:(1 + \sqrt{S_p})$ .

Pour formuler une réponse rechargement, une relation linéaire a été supposée et calculé comme suit:

$$U_{relo} = U_{ppu} + c_r (U_{erpu} - U_{ppu}) \left( \frac{S - S_{ppu}}{S_{erpu} - S_{ppu}} \right)^{n_r} \dots \dots \dots (13)$$

Ou  $U_{relo}$  : est le rapport de contrainte sur la courbe de rechargement,

$U_{ppu}$ : Le rapport de contrainte partielle de déchargement ou le rechargement commence.

$U_{erpu}$  : est le rapport de contraintes de rechargement de l'enveloppe considérant des effets du déchargement partiel,

$S_{ppu}$  : Rapport de la déformation partielle de déchargement.

$S_{erpu}$  : Rapport de la déformation de rechargement.

Le coefficient de rechargement  $c_r = 1$ , et le terme de la puissance  $n_r = 1$  pour refléter la réponse linéaire supposé.

La figure 10 montre graphiquement la réponse des formulations ci-dessus, considérant ¶le cas plus général du déchargement partiel et du rechargement partiel.¶

Le modèle proposé par Bahn [13] est en excellent accord avec les tests de cylindres menés dans le cadre de la recherche, et avec des cylindres testés ailleurs. Le modèle a également examiné le cas général de déchargement partiel et rechargement partiel. Cependant, les formulations ont été fortement influencées par l'histoire de la contrainte précédente, ainsi la courbe enveloppe peut affecter les résultats. En outre, de vastes simulations graphiques étaient réalisées pour modéliser le comportement cyclique global du béton, ce qui peut ne pas refléter le comportement réel. Les nombreux tests effectués fournissent des données indispensables pour modéliser le cas général de déchargement partiel et le rechargement partiel couramment ignorées dans la plupart des modèles.

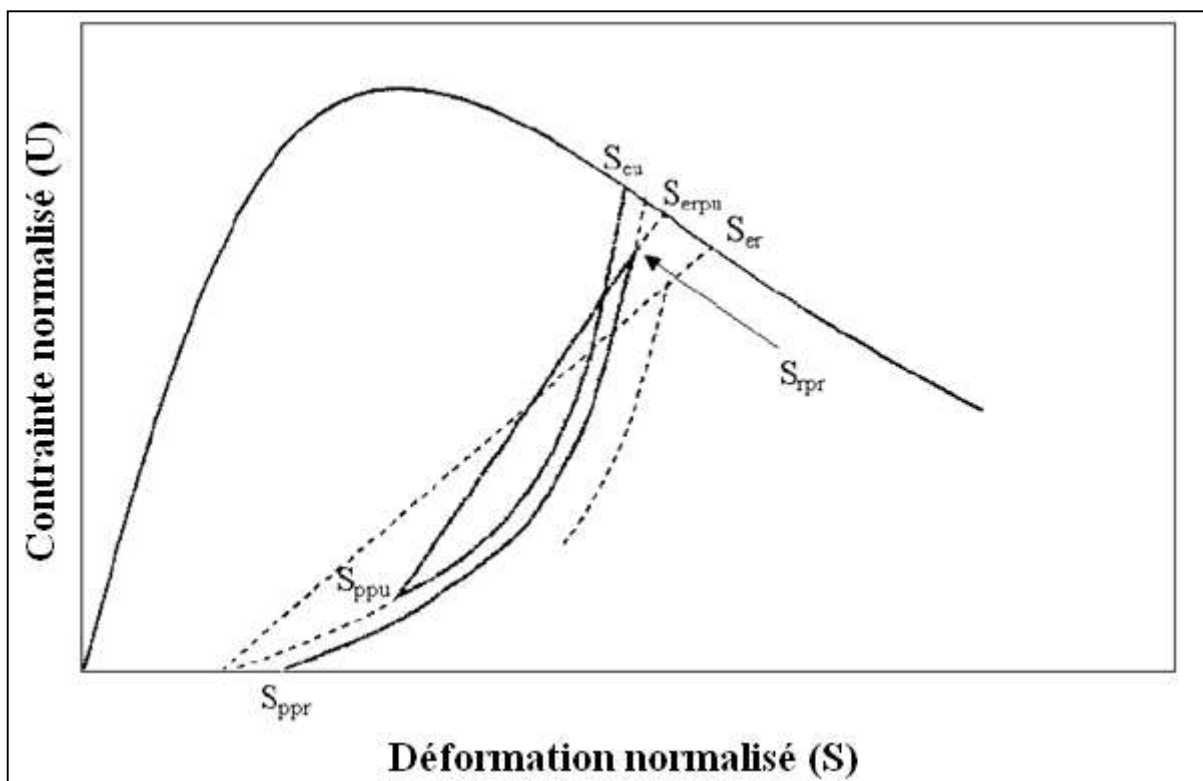


Figure 10 : Courbe de déchargement et rechargement Bahn et Hsu [13].

2.1.2.7. Palermo et Vecchio [89] :

Les auteurs ont présenté des formulations constitutives pour le béton soumis à un chargement cyclique inversé compatible avec la méthode « **compression field approach** ». Les caractéristiques de la modélisation comprennent: le déchargement non linéaire en utilisant une formulation de Ramberg-Osgood, le rechargement linéaire qui comprend la dégradation de la rigidité de rechargement sur la base de la quantité de déformation récupérée pendant la phase de déchargement.

La réponse en compression proposé par Palermo est illustrée dans la Figure 11 a,b. Ces courbes illustrent les réponses de déchargement et de rechargement en compression, La forme de la pente de la réponse du déchargement et du rechargement sont en fonction de la déformation plastique  $\epsilon_c^p$ . Cette dernière est utilisée en tant que paramètre pour définir le chemin de déchargement et pour déterminer le degré de l'endommagement du béton due au chargement cyclique.

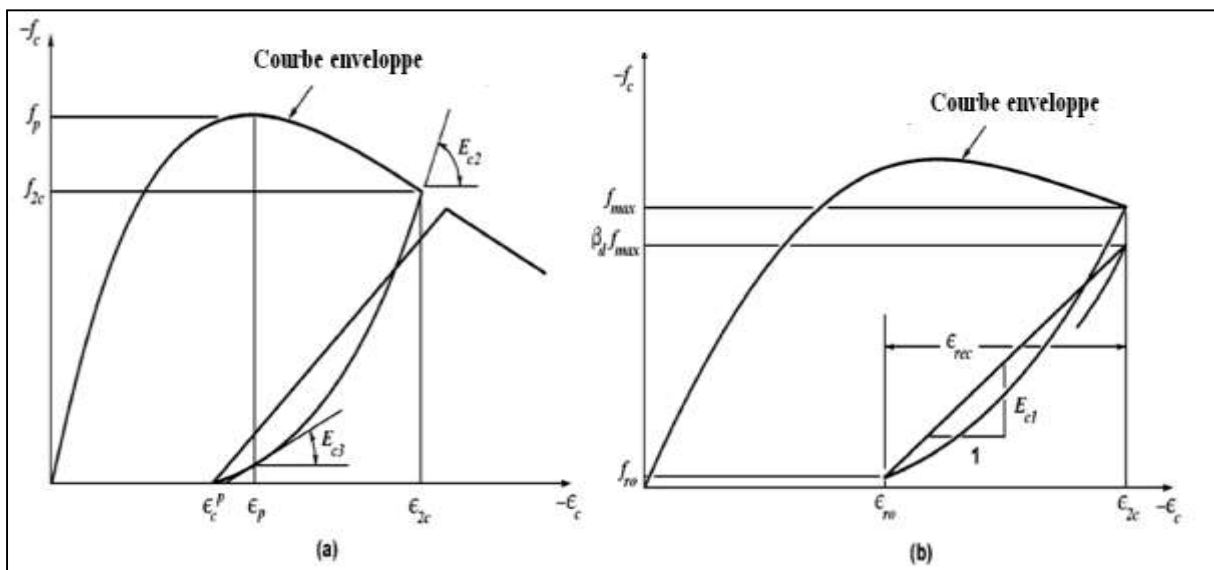


Figure 11 : Modèles d'hystérésis de béton à la compression : (a) déchargement ; et (b) rechargement [89].

En outre, la courbe de réponse en traction est décalée de telle sorte que son origine coïncide avec la déformation plastique de compression. La formule déformation plastique proposée est décrite comme suit :

$$\epsilon_c^p = \epsilon_p \left[ 0.166 \left( \frac{\epsilon_{2c}}{\epsilon_p} \right)^2 + 0.132 \left( \frac{\epsilon_{2c}}{\epsilon_p} \right) \right] \dots \dots \dots (14)$$

Où :  $\varepsilon_p$  : déformation correspondante au pic des contraintes;

$\varepsilon_{2c}$  : la première déformation de déchargement sur la courbe enveloppe.

Pour dériver une expression capable de décrire la branche de déchargement du béton, une formulation de Ramberg-Osgood [99] similaire à celle utilisée par Seckin [111] a été adoptée.

La forme générale de la courbe de déchargement du modèle proposé est exprimée par :

$$f_c(\Delta\varepsilon) = A + B\Delta\varepsilon + C\Delta\varepsilon^N \dots \dots \dots (15)$$

Où  $f_c$  : contrainte du béton sur la courbe de déchargement,

$\Delta\varepsilon$  : Incrément de déformation, mesurée à partir de la déformation instantanée sur le trajet de déchargement jusqu'à la déformation de déchargement,

$A$ ,  $B$ , et  $C$  sont des paramètres utilisés pour définir la forme générale de la courbe, et  $N$ : terme de puissance de Ramberg-Osgood.

L'application des conditions aux limites de la Fig.11 (a) :

$$f_c(\Delta\varepsilon) = f_{2c} + E_{c2}(\Delta\varepsilon) + \left[ \frac{(E_{c3} - E_{c2})\Delta\varepsilon^N}{N(\varepsilon_c^p - \varepsilon_{2c})^{N-1}} \right] \text{ ou } \left\{ N = \frac{\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_{2c}}{f_{c2} + E_{c2}(\varepsilon_c^p - \varepsilon_{2c})} \dots \dots (16) \right.$$

Où  $\varepsilon$  : est la déformation instantanée du béton,

La rigidité initiale de déchargement  $E_{c2}$  est attribuée une valeur égale à la rigidité initiale du béton  $E_c$ , la rigidité de déchargement  $E_{c3}$ , qui définit la rigidité à la fin de la phase de déchargement est celle adopté par Seckin [111]  $0,071 E_c$ .

$f_{2c}$  Est la contrainte calculée à partir de la courbe à  $\varepsilon = \varepsilon_{2c}$  . Les auteurs ont modélisé la courbe de rechargement par une réponse linéaire comme font la plupart des chercheurs. Par contre, ils ont pris en considération une caractéristique importante généralement ignorée par les chercheurs, à savoir la dégradation de la rigidité de rechargement résultant du chargement cyclique.

Ils ont déterminé la réponse du rechargement par :

$$f_c = f_{ro} + E_{c1}(\varepsilon_c - \varepsilon_{ro}) \dots \dots \dots (17)$$

Où  $f_c$  et  $\varepsilon_c$  notent la contrainte et la déformation sur la courbe de rechargement;

$f_{ro}$  est la contrainte du béton au rechargement et correspond à une déformation  $\varepsilon_{ro}$

$E_{c1}$  est la rigidité rechargement, donnée par :

$$E_{c1} = \frac{(\beta_d f_{max}) - f_{ro}}{\varepsilon_{2c} - \varepsilon_{ro}} \quad \text{Ou : } \begin{cases} \beta_d = \frac{1}{1 + 0.10(\varepsilon_{rec}/\varepsilon_p)^{0.5}} & \text{for } |\varepsilon_c| < |\varepsilon_p| \\ \beta_d = \frac{1}{1 + 0.175(\varepsilon_{rec}/\varepsilon_p)^{0.6}} & \text{for } |\varepsilon_c| > |\varepsilon_p| \end{cases} \dots (18)$$

$$\text{et } \varepsilon_{rec} = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min} \dots \dots \dots (19)$$

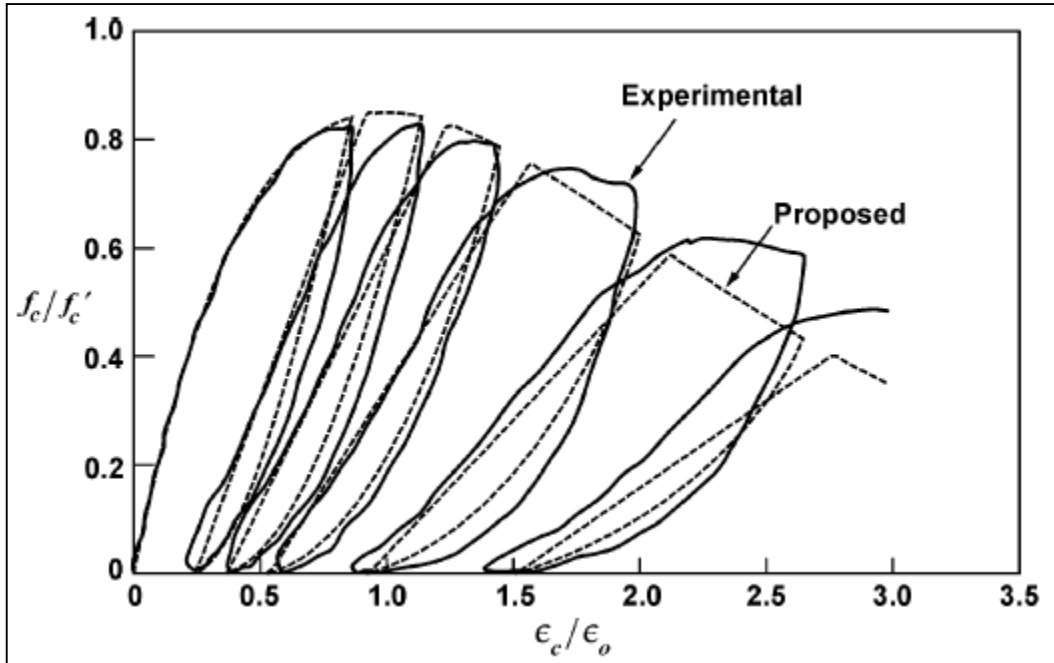


Figure 12 : Comparaison du modèle proposé par les résultats expérimentaux [89].¶

Le modèle Palermo saisit généralement le comportement du béton sous chargement de compression cyclique. Par contre, une attention moins importante a été attribuée au comportement en présence de la traction cyclique. Par conséquent, Le modèle proposé en traction suit la philosophie employée pour modéliser le béton sous des chargements cycliques de compression. La figure 13 (a) ¶ et (b) illustrent les réponses du déchargement et du rechargement respectivement.

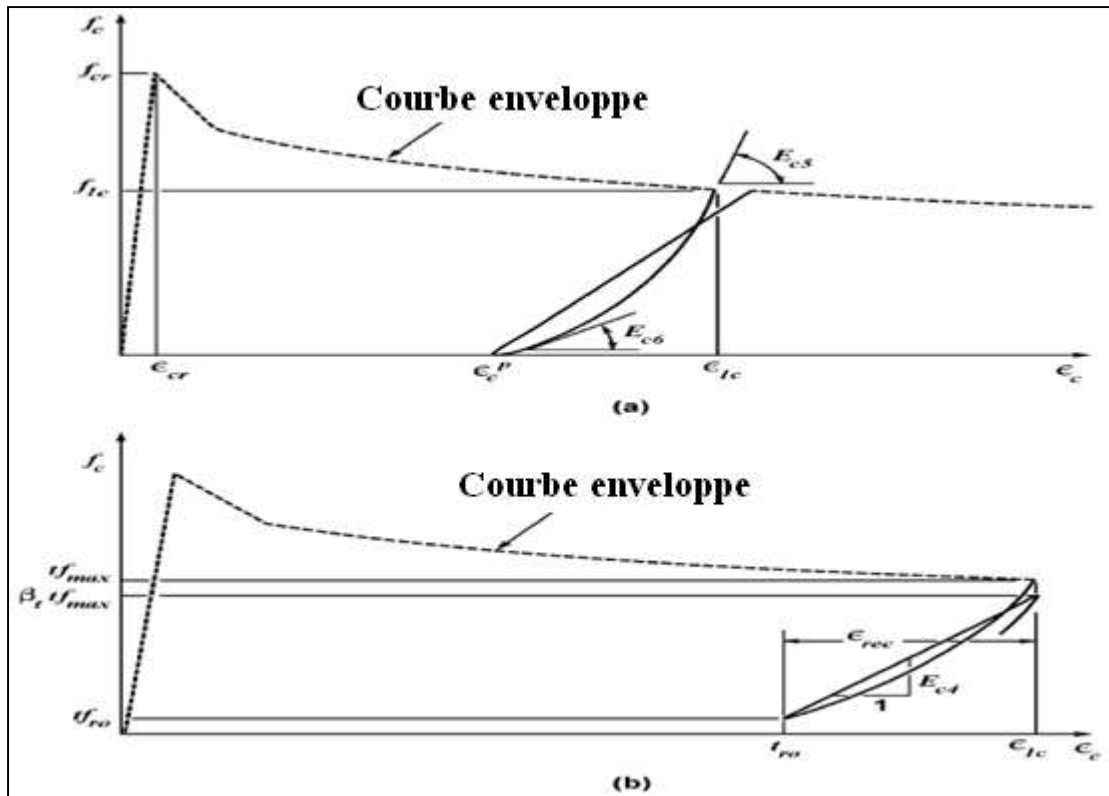


Figure 13 : Modèles d'hystérésis de béton en traction : (a) déchargement ; (b) rechargement PALERMO [89].

Dans le modèle proposé en traction, la déformation plastique  $\epsilon_c^p$  est utilisée pour définir la forme de la courbe de déchargement, la pente de la courbe de rechargement. Celle-ci est exprimée en fonction de la déformation de déchargement de la courbe enveloppe  $\epsilon_{1c}$ . La relation suivante est utilisée :

$$\epsilon_c^p = 146\epsilon_{1c}^2 + 0.523\epsilon_{1c} \dots \dots \dots (20)$$

En raison des cycles de traction. Palermo [89] a formulé une expression non linéaire pour le béton, qui est capable de générer des boucles d'hystérésis réalistes. Pour obtenir un modèle cohérent avec l'approche dans le domaine de la compression, il a utilisé la formulation de **Ramberg-Osgood [99]**, similaire à celle utilisé pour le béton en compression :

$$f_c = D + F\Delta\epsilon + G\Delta\epsilon^N \dots \dots \dots (21)$$

Où :  $f_c$  est la contrainte de traction dans le béton,  $\Delta\epsilon$  est l'incrément de déformation.

D, F, et G sont des paramètres qui définissent la forme de la courbe de déchargement, et N est un terme de puissance. Ces termes décrivent le degré de non-linéarité de la réponse.

En appliquant les conditions aux limites de la figure 13 :

$$f_c(\Delta\varepsilon) = f_{1c} + E_{c5}(\Delta\varepsilon) + \left[ \frac{(E_{c5} - E_{c6})\Delta\varepsilon^N}{N(\varepsilon_{1c} - \varepsilon_c^p)^{N-1}} \right] \text{ ou } \begin{cases} \Delta\varepsilon = \varepsilon_{1c} - \varepsilon \\ N = \frac{(E_{c5} - E_{c6})(\varepsilon_{1c} - \varepsilon_c^p)}{E_{c5}(\varepsilon_{1c} - \varepsilon_c^p) - f_{1c}} \dots \end{cases} \quad (22)$$

$f_{1c}$  est la contrainte de déchargement à partir de la courbe enveloppe, et  $E_{c5}$  est la rigidité initiale de déchargement, affectée d'une valeur initiale égale à  $E_c$ . La rigidité de déchargement  $E_{c6}$ , qui définit la rigidité à la fin de la phase de déchargement, a été déterminée à partir de données communiquées par **Yankelevsky et Reinhardt [127]**:

$$\begin{cases} E_{c6} = 0.071E_c(0.001/\varepsilon_{1c}) \dots \dots \dots \varepsilon_{1c} \leq 0.001 \\ E_{c6} = 0.053E_c(0.001/\varepsilon_{1c}) \dots \dots \dots \varepsilon_{1c} > 0.001 \end{cases} \dots \dots \dots (23)$$

La contrainte de rechargement est calculée à partir de l'expression suivante :

$$f_c = \beta_t t f_{max} - E_{c4}(\varepsilon_{1c} - \varepsilon_c) \dots \dots \dots (24)$$

$$\text{ou : } E_{c4} = \frac{(\beta_t t f_{max}) - t f_{ro}}{\varepsilon_{1c} - t_{ro}} \dots \dots \dots (25)$$

$f_c$  est la contrainte de traction sur la courbe de rechargement et correspond à la déformation de  $\varepsilon_c$ .  $E_{c4}$  est la rigidité de rechargement,  $\beta_t$  est un indicateur d'endommagement à la traction,  $t f_{max}$  est la contrainte de déchargement, et  $t f_{ro}$  est la contrainte dans le béton au rechargement correspondant à une déformation de  $t_{ro}$ . Le paramètre  $\beta_t$  est calculé à partir de la relation suivante :

$$\beta_t = \frac{1}{1 + 1.15(\varepsilon_{rec})^{0.25}} \text{ ou : } \varepsilon_{rec} = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min} \dots \dots (26)$$

$\varepsilon_{rec}$  est la déformation récupérée au cours d'une phase de déchargement. C'est la différence entre la déformation de déchargement  $\varepsilon_{max}$  et la déformation minimale au début de déchargement  $\varepsilon_{min}$ , qui est limitée par la déformation plastique.

**2.1.2.8. Aslani Farhad [12] :**

Un modèle de contrainte-déformation hystérétique est développé pour le béton avec l'intention de fournir une modélisation efficace pour le comportement de la structure du béton dans les régions sismiques. Le modèle proposé est basé sur les résultats des études expérimentales et analytiques précédentes. Le modèle pour le béton soumis à une charge monotone et cyclique comprend quatre composants en compression et en traction, une courbe enveloppe (pour le chargement monotone et cyclique), une courbe de déchargement, une courbe de rechargement et d'une courbe de transition. Les formulations pour le déchargement partiel et les courbes de rechargement partielles sont également présentées.

- **Courbe enveloppe :**

La courbe enveloppe proposée en compression est basée sur le modèle de Carreira et Chu [21], tel que donné par les équations :

$$\frac{\sigma_c}{f'_c} = \frac{n(\varepsilon_c/\varepsilon'_c)}{n-1+(\varepsilon_c/\varepsilon'_c)^n} \begin{cases} n = n_1 = [1.02 - 1.17(E_{sec}/E_c)]^{-0.74} \text{ si } \varepsilon_c \leq \varepsilon'_c \\ n = n_1 + (a + 28b) \text{ si } \varepsilon_c \geq \varepsilon'_c \end{cases} \dots (27)$$

Ou :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 3.5(12.4 - 1.66 \times 10^{-2} f'_c)^{-0.46} \\ b = 0.83 \exp(-911/f'_c) \\ E_{sec} = f'_c/\varepsilon'_c \\ E_c = 3320(f'_c)^{0.5} + 6900 \\ \varepsilon'_c = \left(\frac{f'_c}{E_c}\right) \left(\frac{r}{r-1}\right) \\ r = \frac{f'_c}{17} + 0.8 \end{array} \right. \dots (28)$$

- **Courbe de déchargement :**

$$\sigma_c = \left( \frac{1 - [(\varepsilon_c - \varepsilon_{un})/(\varepsilon_{pl} - \varepsilon_{un})]}{1 + 1.2[(\varepsilon_c - \varepsilon_{un})/(\varepsilon_{pl} - \varepsilon_{un})]} \right)^{1.2} \sigma_{un} \begin{cases} \varepsilon_{pl} = \varepsilon_{un} - \frac{\sigma_{un}}{E_r} \\ E_r = E_c \left( \frac{(\sigma_{un}/E_c \varepsilon'_c) + 0.57}{(\varepsilon_{un}/\varepsilon'_c) + 0.57} \right) \end{cases} \dots (29)$$

- **Courbe de rechargement :**

$$\sigma_c = \sigma_{ro} + E_{c1}(\varepsilon_c - \varepsilon_{ro}) \text{ ou } \begin{cases} E_{c1} = \frac{\sigma_{ro} - \sigma_{new}}{\varepsilon_{ro} - \varepsilon_{un}} \\ \sigma_{new} = \sigma_{un}[1 - 0.09(\varepsilon_{un}/\varepsilon_{ro})^{0.5}] \end{cases} \dots (30)$$

L'équation proposée pour la branche de déchargement comprend les caractéristiques moyennes des courbes de déchargement obtenues expérimentalement, tel que la courbure de la courbe de déchargement, la raideur du décharge initial, la rigidité du déchargement final et le rapport de contrainte de déformation plastique de déchargement. La figure 14 montre la réponse du béton en compression proposé par Aslani [12] et superposé sur celle de Sinha [115].

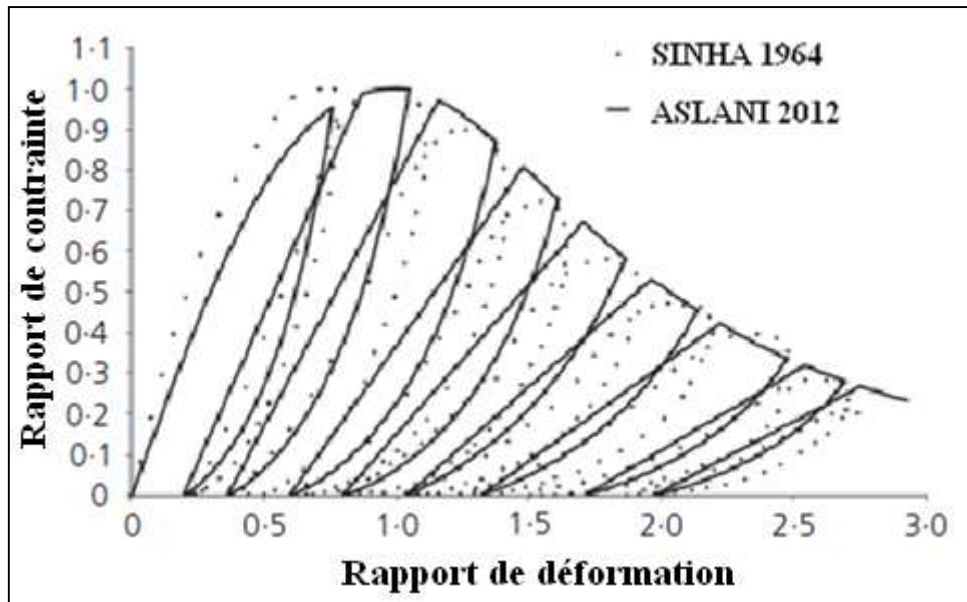


Figure 14. Comparaison entre SINHA [114] et ASLANI [12].

## 2.2. L'acier :

Les données expérimentales définissent la réponse de l'acier soumis à un chargement statique uni-axial de traction monotone et cyclique.

La figure suivante montre sa réponse sous chargement monotone :

1. La réponse initiale est linéaire, c'est la phase dite « élastique »
2. Pour une déformation supérieure à celle correspondant à la limite d'élasticité initiale, une légère baisse de résistance inférieure à la limite d'élasticité initiale est maintenue (rendement faible pour une augmentation modérée des déformations).
3. L'augmentation de la résistance entraîne une augmentation de la déformation. Ce régime d'écrouissage des déformations est maintenu jusqu'à une contrainte qui dépasse généralement la limite d'élasticité par trente à soixante pour cent (figure 15). Ce pourcentage est dépend de la spécification, la composition et la qualité de l'acier.

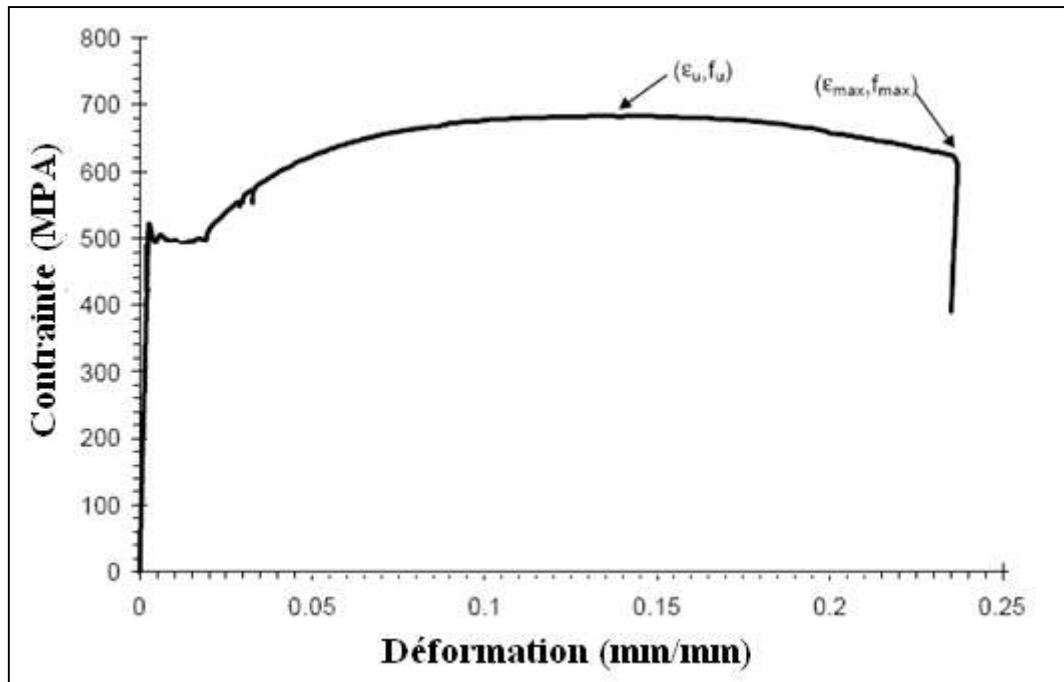


Figure 15 : Courbe contrainte-déformation de l'acier NAITO [81]

Sur la figure 16, nous observons l'allure du comportement des aciers soumis à un chargement cyclique :

1. Tant que l'on reste en dessous du point de la limite élastique, le comportement reste élastique, c'est-à-dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge.
2. Quand le chargement dépasse la limite élastique, des déformations permanentes apparaissent lors la phase de déchargement, et contrairement au béton, le module de décharge est pratiquement le même que le module d'élasticité initial.

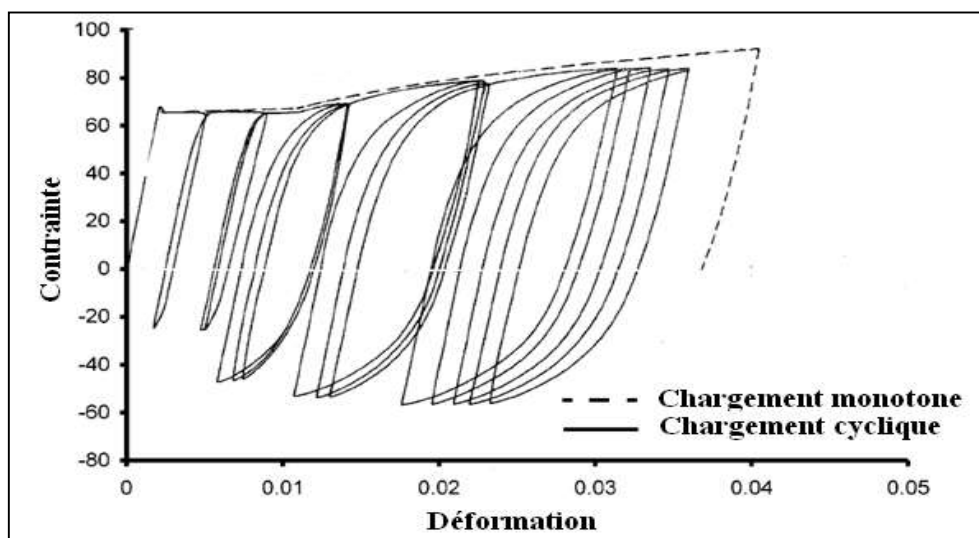


Figure 16 : Réponse de l'acier sous un chargement cyclique inversé Ma et al [72].

Un certain nombre de chercheurs ont proposé des modèles pour caractériser la réponse de l'acier dans l'analyse des structures en béton armé. Certains de ces modèles sont développés sur la base de théories constitutives matérielles; cependant, la majorité d'entre eux sont des modèles phénoménologiques qui caractérisent la réponse macroscopique sur la base de données expérimentales. Les caractéristiques fondamentales de la réponse de l'acier sont relativement simples. Ainsi, le modèle de comportement approprié prédit non seulement cette réponse avec un niveau de précision raisonnable, mais est également capable de s'adapter aux données expérimentales avec une facilité et efficacité sur le plan informatique (du point de vue calcul).

Diverses théories ont été proposées pour caractériser la réponse de l'acier de renforcement soumis à une charge cyclique inversée sur la base de la réponse microscopique du matériau. Le modèle le plus simple et le plus efficace en termes de calcul pour prédire le comportement de l'acier est celui développé sur la base de la théorie de la plasticité moderne. Le comportement unidimensionnel de l'acier de renfort est représentatif d'une matière élasto-plastique. En particulier, les résultats des essais expérimentaux montrent l'accumulation de déformation plastique non récupérable et une rigidité de déchargement qui est approximativement égale à la rigidité initiale du matériau élastique.

L'un des premiers modèles de ce type est celui proposé par Ramberg et Osgood [99]. Divers autres modèles ont suivi. Récemment, un certain nombre de modèles ont été développés à savoir : Monti-Nuti [79], El-morsi [33], Vecchio [122], Mansour et coll [73], Said et coll [107] et Melina bosco [18], la plupart de ces modèles sont développés sur la base du travail effectué par Menegotto et Pinto [76].

### 2.2.1. Modèle de Menegotto et Pinto [76] :

La loi utilisée est illustrée sur la Figure 17, avec les paramètres de calcul. La loi générale de Menegotto et Pinto [76] est écrite comme suit :

$$\sigma_s = E_\infty \varepsilon_s + \frac{(E_0 - E_\infty) \varepsilon_s}{[1 + (\varepsilon_s / \varepsilon_0)^R]^{1/R}} \dots \dots \dots (31)$$

Avec :

$E_0$  : Module initiale tangent de la courbe contrainte-déformation.

$E_\infty$  : Module tangent secondaire.

R : paramètre Independent qui définit la courbure.

$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_{s0}}$ : Déformation au point d'intersection entre les deux droites de pente  $E_0$  et  $E_\infty$ .

Ces paramètres sont représentés sur la Figure 17.

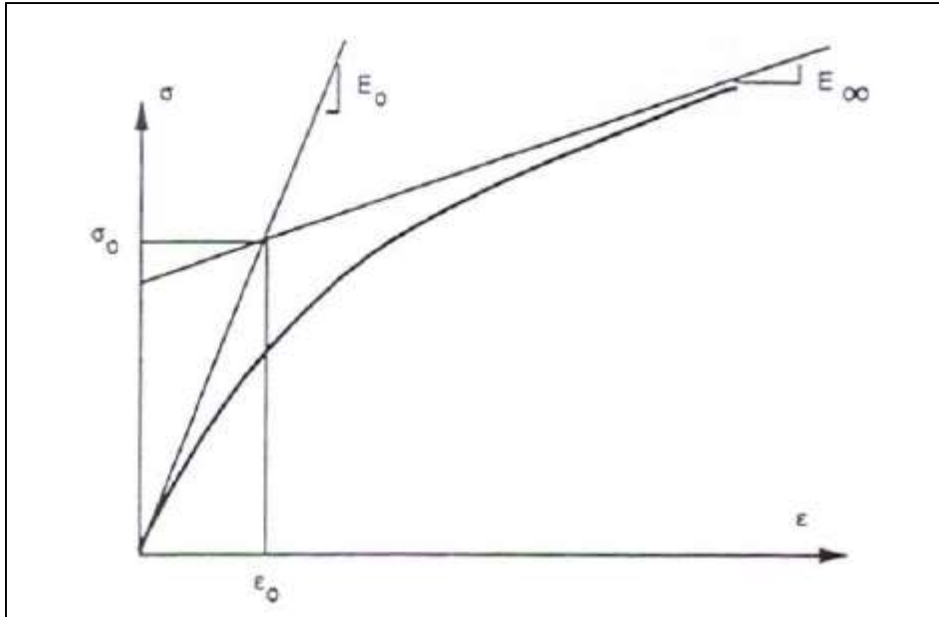


Figure 17 : Model de Menegotto [76].

Pour la réponse cyclique la loi est écrite comme suit :

$$\sigma_s^* = b\epsilon_s^* + \frac{(1 - b)\epsilon_s^*}{(1 + \epsilon_s^{*R})^{1/R}} \dots \dots \dots (32)$$

Où :

$$\epsilon_s^* = \frac{\epsilon_s - \epsilon_{sr}}{\epsilon_0 - \epsilon_{sr}} \quad , \quad \sigma_s^* = \frac{\sigma_s - \sigma_{sr}}{\sigma_0 - \sigma_{sr}} \dots \dots \dots (33)$$

Dans la relation (32),  $b$  définit le taux d'écrouissage ( $b = \frac{E_\infty}{E_{s0}}$ ).

En fonction de ce paramètre, on choisit le modèle approprié : élastique parfaitement plastique ou élastique avec écrouissage (voir figure 18)

$\sigma_0$  et  $\epsilon_0$  : sont la contrainte et la déformation au point où se rencontrent les deux droites ( $E_{s0}$  et  $E_\infty$ )

$\sigma_{sr}$  et  $\epsilon_{sr}$  : Contrainte et déformation au point de la dernière inversion de contrainte (voir la figure 19) qui montre les deux points :  $P_0(\sigma_0, \epsilon_0)$  et  $P_r(\sigma_r, \epsilon_r)$  qui correspond au premier chargement inversé de l'acier.

$R$  : paramètre indépendant qui définit la courbure, après chaque inversion de chargement la courbure diminue avec l'excursion plastique précédente  $\xi_p$  selon les expressions suivantes :

$$R^n = R_0 - \frac{A_1 \xi_p^n}{A_2 + \xi_p^n} \dots \dots \dots (34)$$

$$\xi_p^n = \left| \xi_{sr}^n - \xi_p^{n-1} + \frac{\sigma_{sr}^n - \sigma_{sr}^{n-1}}{E_{s0}} \right| \dots \dots \dots (35)$$

Ou :

$R_0$  : Valeur de R lors du premier chargement ( $R_0 = 20$  pour l'acier ordinaire et  $R_0 = 6$  pour l'acier précontraint)

$A_1$  et  $A_2$  : Paramètres dépendants du matériau déterminés expérimentalement.

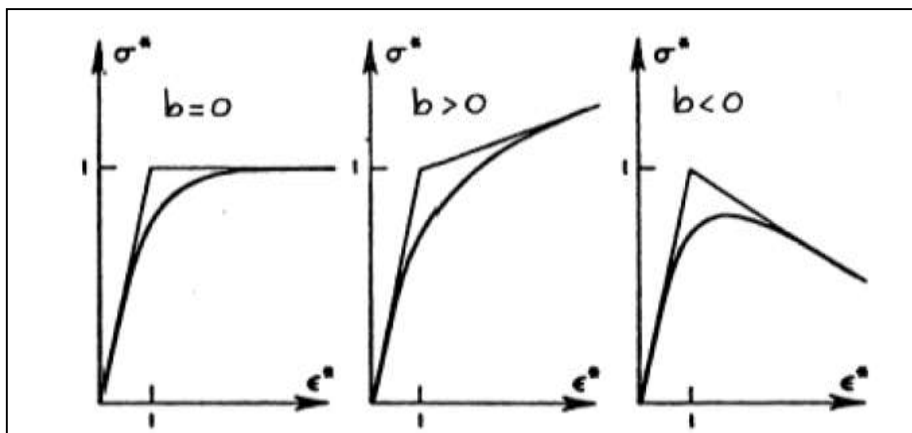
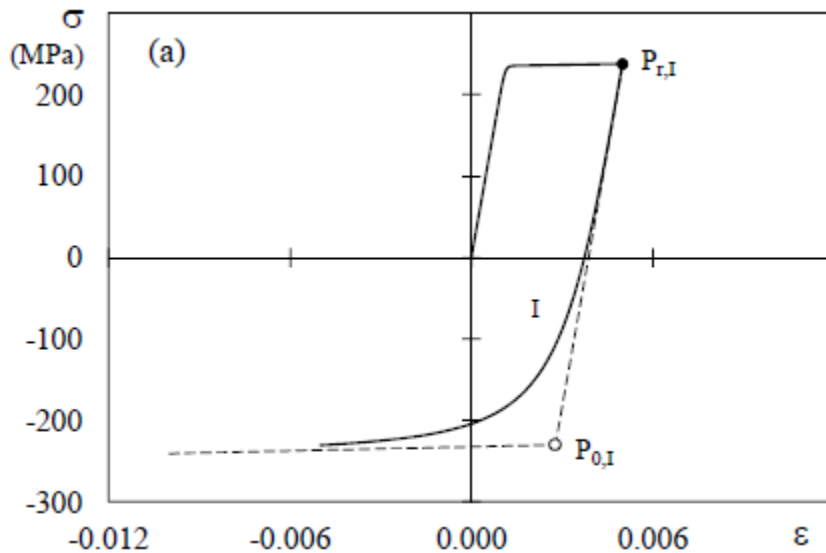


Figure 18 : les courbes de Menegotto-Pinto [76] en variant la valeur du paramètre b.



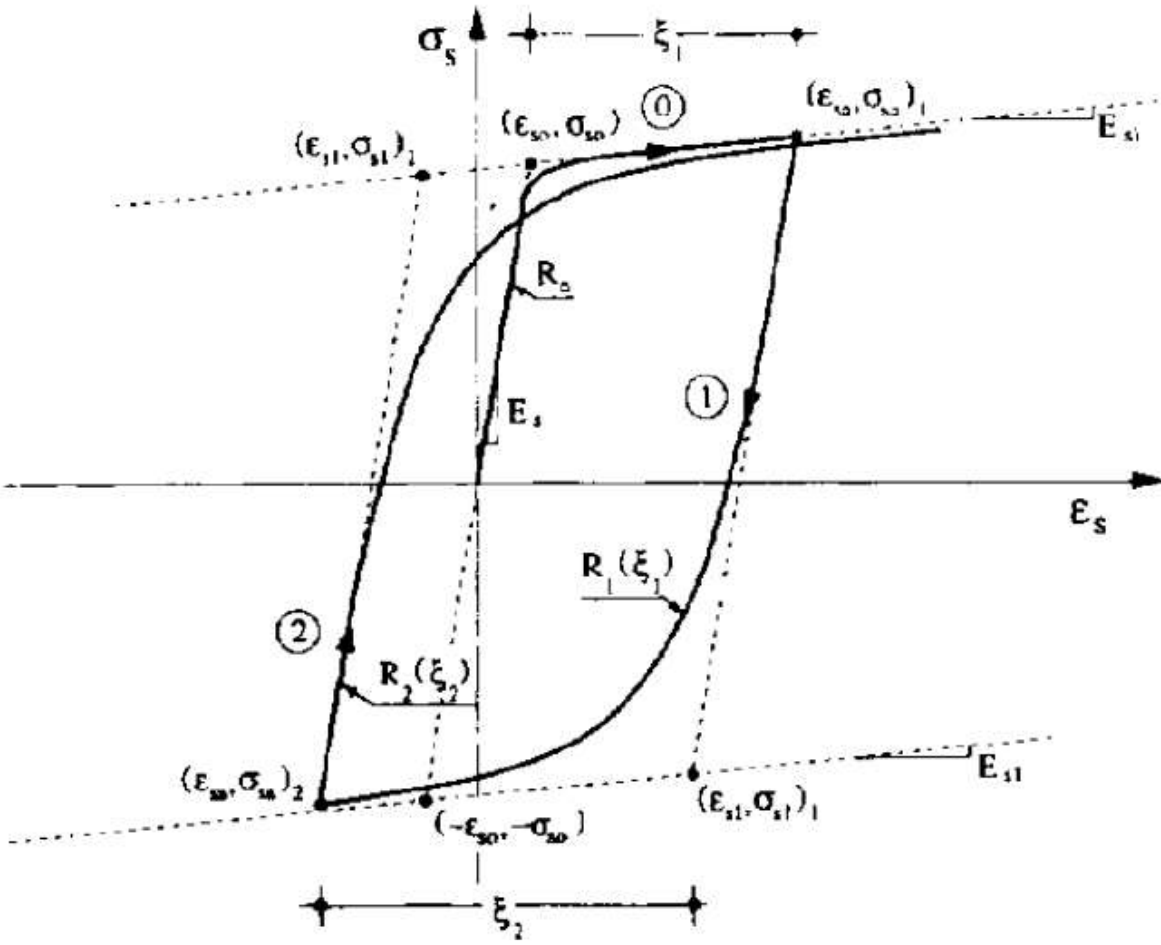


Figure 19: Model de Menegotto-Pinto [76].

### **3. Calcul non linéaire des structures en béton armé :**

#### **3.1. Choix de l'échelle de modélisation :**

En littérature, on rencontre deux types d'approches pour la modélisation du comportement non linéaire des structures en béton armé :

##### **3.1.1. Approche local :**

Elle consiste à modéliser la structure étudiée par des éléments finis plans ou tridimensionnels et d'évaluer finement les champs de contraintes, de déplacements et de déformations par l'utilisation de lois de comportement locales multidimensionnelles des matériaux constitutifs, Cette approche permet une analyse fine des phénomènes non linéaires tels que l'interaction acier – béton et la fissuration mais, l'utilisation de cette approche est très limitée suite à la lourdeur des calculs qui empêche bien souvent le traitement de structures de grandes tailles.

##### **3.1.2. Approche global :**

Contrairement à l'approche local, l'approche globale s'est caractérisé par une souplesse de mise en œuvre et engendre bien souvent un coût réduit, car elle décrit le comportement d'éléments complets de structures au moyen de lois de fonctionnement reliant des quantités structurelles globales (moment, effort tranchant, rotation, déplacement). Cette dernière approche permet la modélisation des phénomènes non linéaires en utilisant des lois de comportement uni-axiales.

Dans le présent travail, le choix s'est porté sur l'approche globale car elle est bien adoptés au calcul non linéaire des structures planes de type poutre.

#### **3.2. Comportement non linéaire des structures :**

Les éventuelles non-linéarités dans le comportement des structures appartiennent à l'une des deux classes suivantes :

##### **3.2.1. Non linéarité géométrique :**

Elle intervient lorsque le déplacement et éventuellement les déformations sont suffisamment importants, ou la relation déplacement-déformation est représenté sous forme non linéaire  $\varepsilon = D(u, u^2..)$ , Où D c'est un opérateur non linéaire.

### 3.2.2. Non linéarité matérielle :

Elle est présentée quand la relation contrainte-déformation n'obéit pas la loi classique linéaire (Loi de Hooke). Les relations non linéaires contrainte-déformation des matériaux acier et béton sont une cause fréquente du comportement non linéaire de la structure, Elles sont classées en deux grandes familles :

- Les non - linéarités dues au comportement des matériaux :

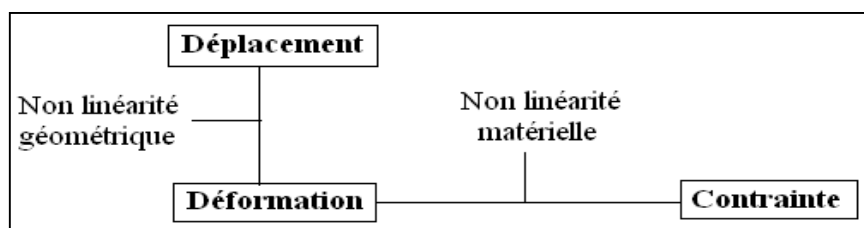
Elles peuvent se présenter dans les situations suivantes :

- Cas du béton en sollicitations uni-axiales ou multiaxiales dont le comportement est régi par la rupture par écrasement, quand la compression est prépondérante.
- Cas aussi du béton sollicité en traction dont le comportement est régi par la rupture par fissuration, lorsque la traction est prépondérante.
- Dans le cas des matériaux viscoélastiques où les déformations ne sont pas constantes dans le temps en présence des contraintes constantes (le fluage et le retrait).
- Dans le cas des armatures d'acier quand les déformations excessives irréversibles sont présentes suite au dépassement de sa limite d'élasticité.

- Les non- linéarités dues à l'apparition des discontinuités :

- les fissures dans le béton qui peuvent avoir des configurations et des effets mécaniques variant selon l'état de contraintes qui entraîne leurs formations, la forme des éléments , la quantité et la disposition des armatures .
- Le glissement d'interface entre le béton et l'acier d'armatures, autrement dit les phénomènes liés à l'adhérence acier –béton.
- Les autres discontinuités réelles ou potentielles dans le béton, et aussi dans les armatures (surface de bétonnage, jonction d'armature ...).

La figure 20 résume les types de non linéarités décrits ci-dessus.



**Figure 20 : Graphe représentatif des types de non linéarité en mécanique des structures.**

### 3.3. Résolution numériques :

Le souci du calcul non linéaire des structures est très complexe parce que les paramètres à prendre en compte sont extrêmement nombreux, ce sont essentiellement :

- Les forces extérieures agissant sur la structure.
- Les déformations.
- Les caractéristiques des matériaux et les différents comportements des matériaux.
- Les formes de la structure, ce sont les paramètres qui définissent la géométrie de la structure.

La plupart des méthodes de résolution des problèmes non linéaires que l'on observe sont des méthodes incrémentales itératives. Cela signifie que les charges ne sont pas prises en compte dans les calculs dans leur totalité, mais elles sont incrémentées et les états d'équilibre successifs sont résolus, donc nous aboutissons à une suite de problèmes linéaires. La courbe d'équilibre non linéaire est ainsi obtenue par les solutions pendant la résolution du problème pour les différents incréments après convergence de la solution selon un critère d'erreur défini. Les travaux de recherche récents sur les méthodes incrémentales sont extrêmement nombreux, à titre d'indicatif pour les problèmes en petites déformations, on peut citer :

- Les méthodes à plusieurs pas : Gear [45], Park-Felippa [91], Hughes [60].
- Les développements sur la méthode de Newton : Ortiz-Martin [87], Simo-Taylor [114], Ortiz-Simo [88], Corigliano-Perego [26].

Le chargement étudié  $[0, F]$  est décomposé en une succession d'intervalles généralement petits, on étudie un nouvel intervalle  $[F_1, F_1 + \Delta F] \in [0, F]$  ou  $\Delta F$  est l'incrément, on adopte alors une méthode incrémentale itérative.

Aucune méthode itérative ne contient l'ensemble des paramètres en simultané efficacement. Différents algorithmes existent avec chacun leurs avantages et inconvénients.

Pour faire le choix de l'algorithme de résolution, il est important de tenir compte de la présence ou non des facteurs suivants :

- Assurance de la convergence.
- Vitesse de la convergence.
- Stabilité de l'algorithme – précision des résultats.

- Efficacité des calculs (nombre de fonction à calculer à chaque itération).

Les plus fréquemment utilisés en calculs de structures par éléments fini sont les méthodes de Newton. Cette méthode a généralement la faveur des utilisateurs car elle est effectivement efficace.

### 3.3.1. Les méthodes de Newton :

Selon le mode de calcul de la matrice de rigidité  $[K]$ , on distingue trois méthodes :

#### 3.3.1.1. la méthode de Newton Raphson :

Elle est basée sur la matrice de rigidité tangente qui est recalculée après chaque itération. Cette méthode exige un nombre réduit d'itérations pour arriver à la solution (**figure 21.a**).

#### 3.3.1.2. La méthode de Newton Raphson modifiée :

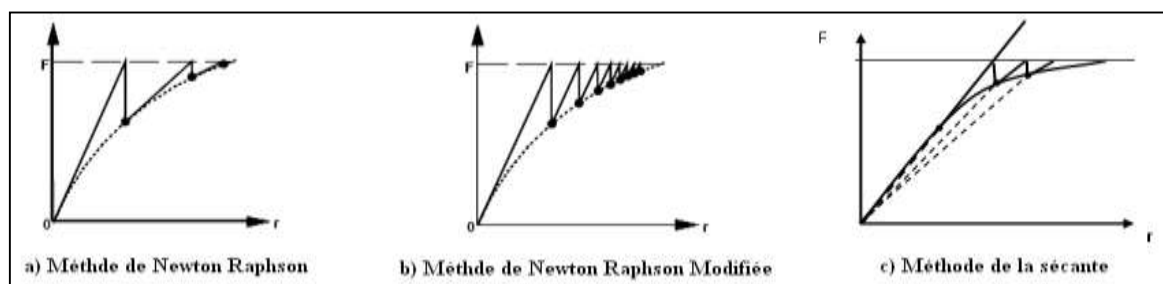
Dans ce cas la matrice de rigidité tangente est calculée, une seule fois au début de l'incrément de charge, pour la première itération (**figure 21.b**). Cette méthode exige un grand nombre d'itérations pour atteindre la convergence et arriver à la solution

#### 3.3.1.3. la méthode de la rigidité sécante :

Si on veut une méthode d'application plus universelle, la méthode de la sécante (**figure 21.c**) est plutôt à conseiller car :

- elle est relativement rapide et ne nécessite qu'une évaluation de fonction à chaque itération.
- Elle est mieux adaptée pour les cas des structures ayant un comportement adoucissant ou on peut aller au delà du pic des contraintes. C'est bien le cas du béton tendu fissuré dans les structures.
- Aussi pour le cas d'un chargement cyclique ou on ne peut pas faire un déchargement en utilisant la matrice de rigidité tangente.

C'est les raisons pour lesquelles cette méthode est adoptée dans le cadre de notre étude.



**Figure 21. Méthodes itératives pour la résolution des systèmes non linéaires.**

### **3.4. Étude bibliographique des travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures :**

Les premiers calculs non linéaires des structures en béton armé datent de la fin des années 1960, suite aux travaux de **Ngod [84]** et **Nilson [85]** qui proposent une analyse non linéaire des structures en béton armé en utilisant la méthode des éléments finis.

Au cours de ces dernières décennies, des progrès considérables ont été réalisés dans le développement des méthodes et des techniques pour le calcul non linéaire des structures et dans l'élaboration des lois de comportements des matériaux les constituants en particulier le béton.

Cette énorme quantité des travaux de recherche s'explique par la complexité et le nombre de facteurs à prendre en compte et les diverses approches utilisées par chacun.

En 1970 **Franklin [42]** a développé une étude en tenant compte des effets des non -linéarités matérielles. Il a utilisé un élément de poutre à 3 degrés de liberté (2 translations et une rotation) basé sur la théorie de premier ordre des déplacements. Ensuite en 1975 **Gunin** a introduit la non linéarité géométrique en négligeant la rigidité du béton tendu.

**En 1978, Grelat [50]** a proposé un programme de calcul des ossatures planes en béton armé. En se basant sur le diagramme parabolique pour le béton tendu, **Gilbert et Warner [48]** ont introduit l'effet rigidifiant de partie tendue (the tension stiffening) dans l'étude du comportement des dalles. **Fouré [41]** a contribué par des études expérimentales sur le comportement non -linéaire de plusieurs poutres consoles et portiques sous sollicitations cycliques.

En 1984, **Mazars [74]** a mené une étude reposant sur l'application de la mécanique d'endommagement et de rupture des structures en béton armé. Ce travail tient compte de la fissuration du béton et du béton tendu.

En 1986, **Espion [35]** a introduit un élément de poutre plane à 9 ddl, la tension stiffening et les effets différés (fluage) sont pris en compte.

**Sulayfani [10], Merabet [78] et Djerroud [30]** ont apporté des contributions à l'analyse non linéaire des structures en béton armé sous des sollicitations cycliques en se basant sur l'analyse non linéaire global de la structure étudiée.

**Vecchio et Collins [123], Vecchio [121] et Vecchio [89]** ont réalisé des travaux de recherches sur la modélisation non linéaire des structures. Cela a entraîné le développement

de programme de calcul Vector2 à l'université de Toronto. Ce programme est basé sur la théorie des champs de compression modifié (MCFT) de Vecchio et Collins [123] et sur le modèle de champ de contrainte distribué (DSFM) de Vecchio [122].

**En 2006, Kachi et col** [64] ont développé un programme qui tient en compte de l'effet combiné de la flexion plane et de l'effort tranchant en élasticité non linéaire appliqué aux poutres en béton armé et en béton précontraint.

**Spacone [116], Mazars [75] et Kwak et kim [68]**, ont utilisé la méthode des fibres dans laquelle l'élément est divisé en un certain nombre de fibres de béton et d'acier.

Les contributions de l'équipe de **Bathe** [14] dans ce domaine est très importantes et ont permis d'évaluer le comportement des structures avec des lois complexes de comportement des matériaux. Ils ont été chargés de développer le système d'analyse du code de calcul commercial ADINA.

Une étude détaillée des modèles ayant contribué au développement des structures sous chargement monotone et cyclique est décrite ci-dessous en se basant sur les différents travaux.

#### **3.4.1. Travaux de Sulayfani [10] :**

Sulayfani a développé un programme informatique « ASIM » qui permet la simulation numérique du comportement cyclique des éléments en béton armé. La simulation proposée par Sulayfani comporte deux objectifs :

- Connaître l'équilibre d'une section, en particulier la loi liant le moment et la courbure au cours du chargement.
- Connaître la réponse globale de la structure, en particulier la relation liant la charge et la flèche en toute section.

La figure 22 montre l'organigramme général du modèle.

##### **3.4.1.1. L'équilibre d'une section :**

Pour connaître l'équilibre d'une section, Sulayfani [10] a utilisé un modèle de discrétisation par fibres. Il s'est basé sur les hypothèses suivantes :

- Les sections droites restent planes au cours des chargements cycliques (hypothèse de Navier Bernoulli)
- Le glissement relatif entre les armatures et le béton n'est pas pris en compte.

- Il est supposé que les effets du temps (vitesse de chargement, fluage) sont négligeables pour des cycles de chargement quasi statique de courte durée.
- Les effets secondaires tels que le confinement et le poinçonnement ne sont pas pris en compte ainsi que les effets bi axiaux locaux qui peuvent apparaître aux points d'application des charges.

Pour le calcul de la courbure dans une section il a suivi les étapes illustré sur la figure 23.

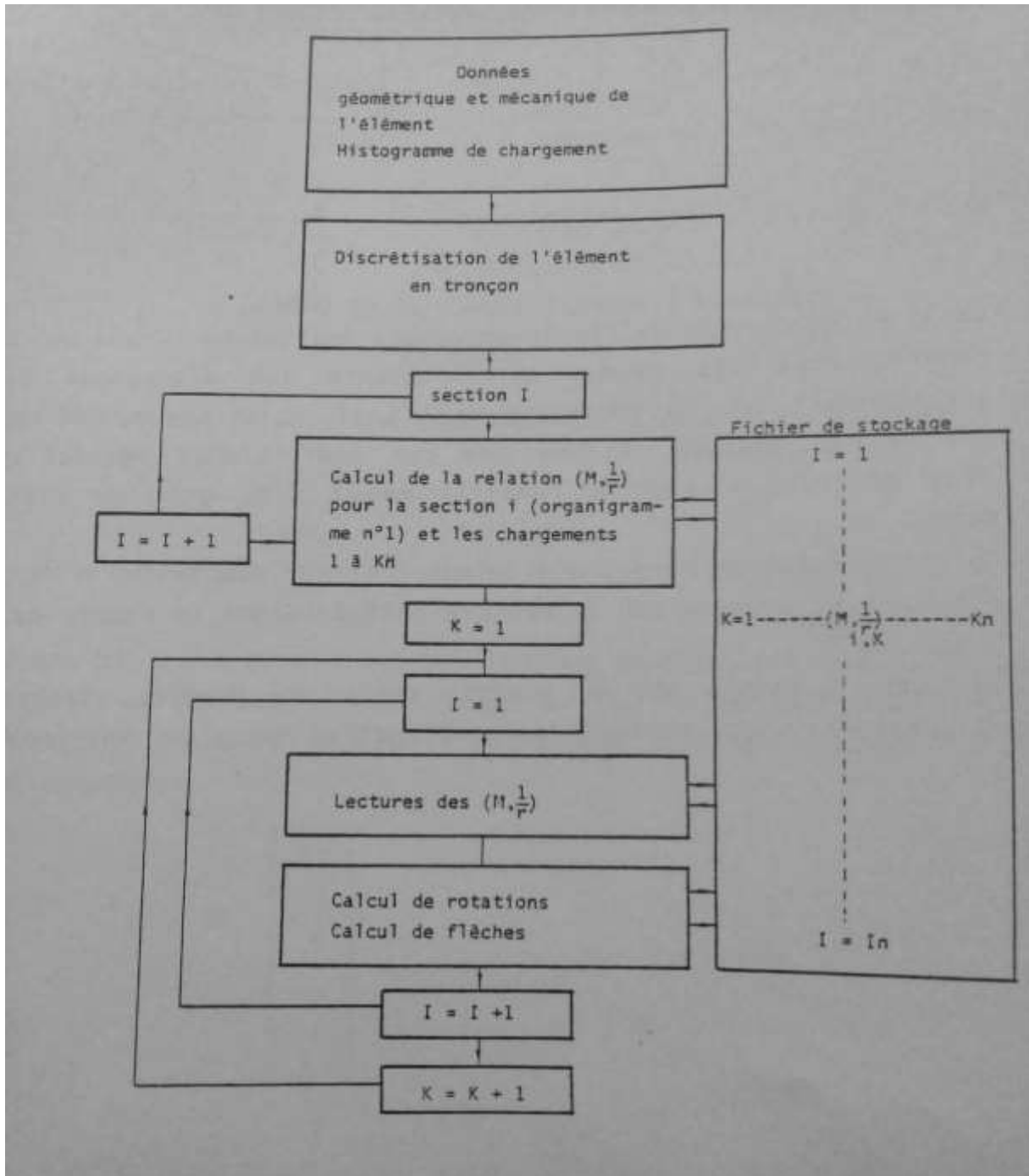


Figure 22 : Organigramme générale Sulayfani [10].

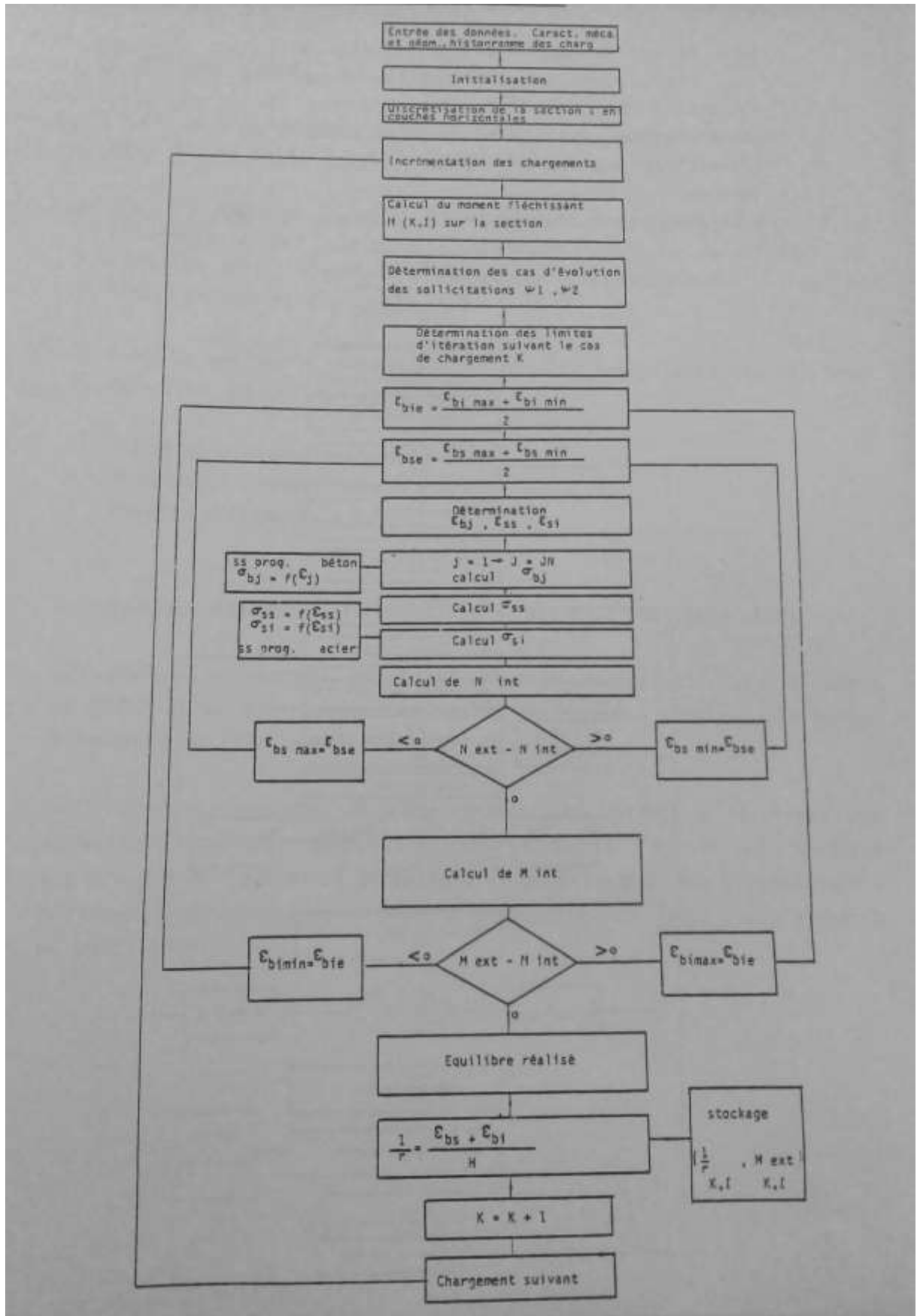


Figure 23 : Organigramme de calcul de la courbure dans une section Sulayfani [10]

### 3.4.1.2. Relation reliant la charge et la flèche :

Pour le calcul de la flèche, Sulayfani [10] a choisi la formulation de LAMIRAULT [70] :

$$y_{i,n} = -\frac{L^2}{6n^3} \left[ (n-1) \sum_{j=1}^{j=i} j \left( \frac{1}{r_j-1} + \frac{4}{r_j} + \frac{1}{r_{j+1}} + i \right) \right. \\ \left. \alpha \sum_{j=i+1}^{j=n-1} (n-j) \left( \frac{1}{r_j-1} + \frac{4}{r_j} + \frac{1}{r_{j+1}} \right) \right] \quad (36)$$

avec  $\alpha = 0$  si  $i+1 > n-1$ , sinon  $\alpha = 1$

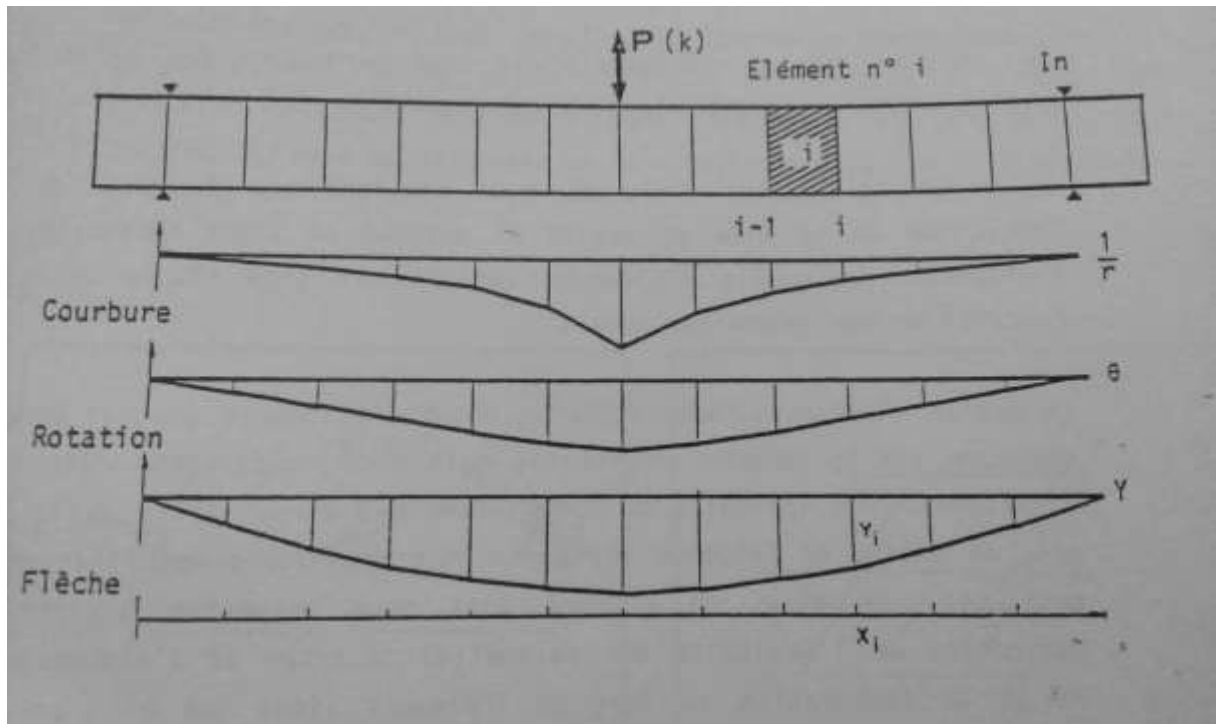


Figure 24 : Schéma de la discrétisation d'un élément Sulayfani [10].

### 3.4.2. Travaux de Rezendi-Martins [102] :

Martins a enrichi un logiciel de calcul qui permet d'analyser le comportement des poutres isostatiques en béton armé et précontraint, il a utilisé l'approche développée par GURIANI [53] pour tenir compte des aspects propres aux câbles extérieurs, la variation de tension liée aux déformations de la poutre et les particularités de distribution des déformations du béton basé sur l'approche classique de l'élasticité non linéaire, et de la dégradation de l'adhérence des armatures qui les traversent.

La formulation de Martins est basée sur les données expérimentales des 11 poutres testées dans le cadre de son programme de recherche et d'autres essais qui existent dans la littérature.

Martins s'est basé sur les hypothèses suivantes pour le cas des poutres coulées en place :

- Les déplacements sont petits et donc la relation moment courbure est donnée par :

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} \dots \dots \dots (37)$$

- Les sections restent planes après déformation, l'hypothèse de Navier-Bernoulli reste valable dans tout le domaine de travail.
- L'adhérence acier béton est parfaite jusqu'à rupture.
- Les lois de comportements des matériaux sont celle de la sollicitation unidirectionnelle
- Le chargement est quasi-statique, monotone et croissant.
- Les effets différés sont négligés.
- Il tient compte de la contribution du béton tendu entre les fissures.

La section transversale est discrétiser en un nombre fini des fibres et le système d'équations est résolu par la méthode de Newton-Raphson.

### 3.4.3. Travaux de Girard [49] :

Les travaux de Desjardins et Farfard [29] à l'université de Laval ont consistés à développer un programme de calcul « CLEF » basé sur la méthode des éléments finis rédigé en langage C.

Les éléments utilisés sont des éléments avec interpolation quadratique, pour le béton ils ont utilisé un élément 3D hexaédrique à 20 nœuds alors que pour modéliser l'acier et l'interface entre l'acier et béton des éléments de barre a 3 nœuds, ainsi un autre élément pour faciliter l'application de sollicitations uniformément réparties un élément 2D quadratique à 8 nœuds est utilisé (voir figure 24).

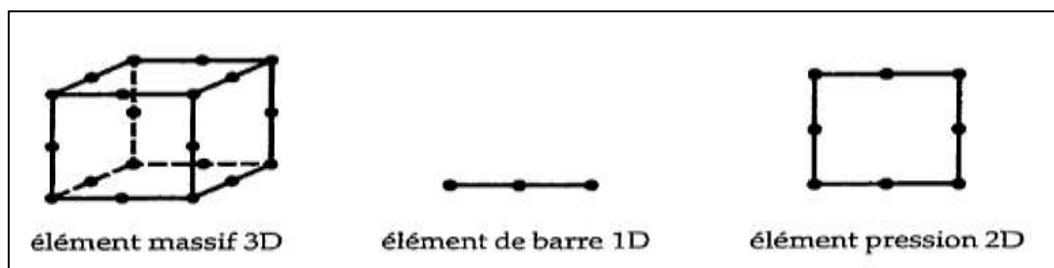


Figure 24 : Éléments quadratique utilisé Girard [49].

Pour l'aspect cinématique ils ont adopté la formulation lagrangienne total (FLT), le vecteur  $\{dx^0\}$  se transforme en  $\{dx\}$  suite a une sollicitation mécanique (Figure 25).

Un élément différentiel  $\{dx^0\}$  dans la configuration initial devient  $\{dx\}$  alors que dans la configuration déformée, ils sont reliés par la relation biunivoque suivante :

$$\{dx\} = [F]\{dx^0\}$$

Ou  $[F]$  est le tenseur gradient de déplacement entre la configuration initiale et la configuration déformée.

$$[F] = \frac{\partial x}{\partial x^0} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x^0} & \frac{\partial u}{\partial y^0} & \frac{\partial u}{\partial z^0} \\ \frac{\partial v}{\partial x^0} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y^0} & \frac{\partial v}{\partial z^0} \\ \frac{\partial w}{\partial x^0} & \frac{\partial w}{\partial y^0} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z^0} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (38)$$

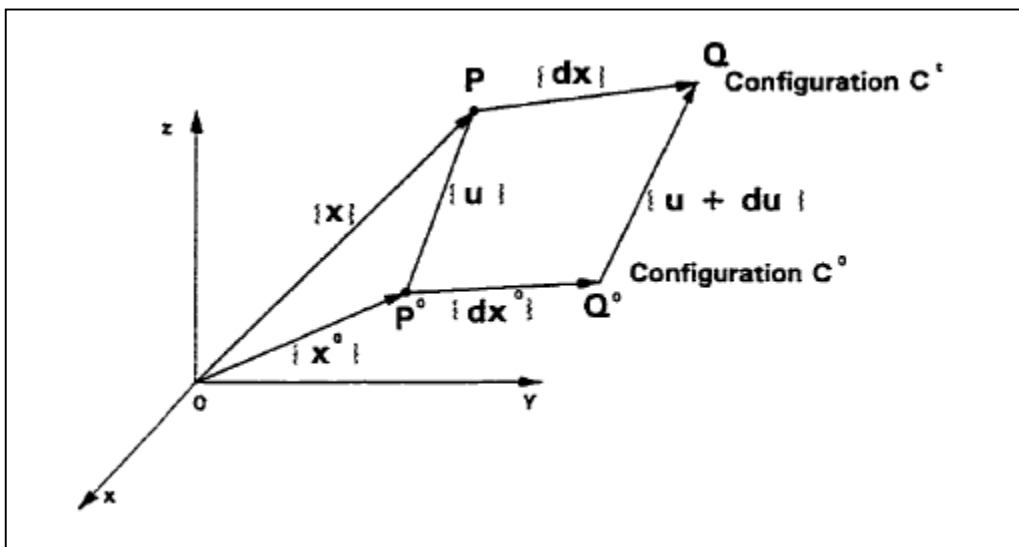


Figure 25 : Définition des configurations initiale et déformée GIRARD [49].

La mesure des déformations est évaluée par la variation du carré de la distance entre ces deux points dans les deux configurations :

$$(ds)^2 = \langle dx \rangle \{dx\} = \langle dx^0 \rangle [F]^T [F] \{dx^0\} \dots \dots \dots (39)$$

$$(ds)^2 - (ds^0)^2 = 2 \langle dx^0 \rangle [E] \{dx^0\} \dots \dots \dots (40)$$

Ou  $[E]$  est le tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$[E] = \frac{1}{2} ([F]^T [F] - [I]) \dots \dots \dots (41)$$

Les gradients des déplacements sont petits et les déplacements u,v et w sont minimes par rapport aux dimensions du solide donc les produits et les carrés des premières dérivées sont négligeables :

$$[E] = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \text{sym.} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \text{sym.} & \text{sym.} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (42)$$

Girard a enrichi ce programme de calcul pour lui permettre de modéliser le comportement de colonnes en béton armé sous chargement cyclique. Dans une première étape, il a intégré la loi de comportement du béton rédigé en FORTRAN de Bouzaiene [19] au programme CLEF dans l'objectif d'effectuer des analyses de structures tridimensionnelles. Ensuite pour rendre le modèle fonctionnel sous chargement cyclique inversé, il a apporté des modifications sur la loi de comportement de Bouzaiene [19] pour assurer le passage adéquat de la compression à la traction et inversement (voir figure 26 et 27).

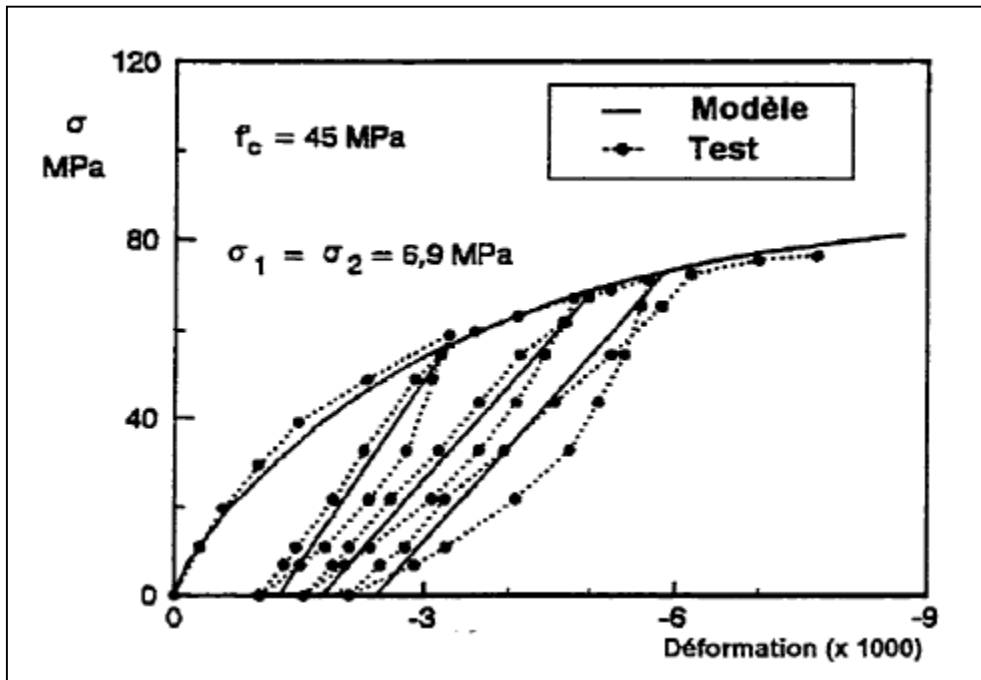


Figure 26 : Réponse du modèle sous chargement uniaxial cyclique Bouzaiene [19].

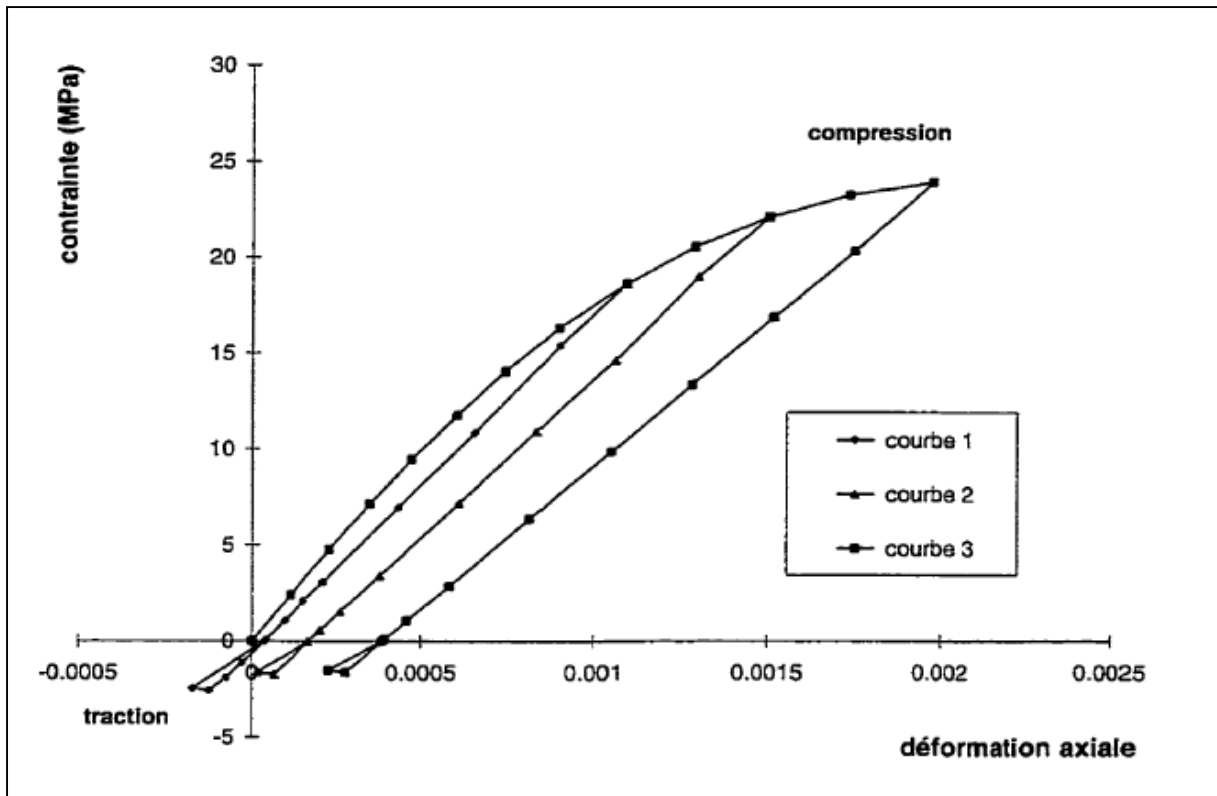


Figure 27 : Courbe contrainte-déformation du béton Girard [49]

**3.4.4. Proposition de palermo [89] :**

Plusieurs travaux de recherches ont été réalisés sur la modélisation non linéaire des structures en béton armé par Vecchio et Palermo à l’université de Toronto. Cela a permis le développement du programme informatique VECTOR2. Ce programme, connu auparavant par le nom TRIX1, était initialement restreint aux calculs des structures sous chargement monotone en béton armé et précontraint. Le programme développé est basé sur la méthode de rigidité sécante en utilisant les formulations de comptabilité, d’équilibre et les relations constitutives de la théorie du champ de compression modifié MCFT et des éléments à quatre nœuds (8 ddl), ainsi que des éléments triangulaires à 3 nœuds (6 ddl).

**3.4.4.1. Conditions de compatibilité :**

La compatibilité exige que tous changements de la déformation du béton engendrent le même changement de la déformation des aciers. On a alors :

$$\varepsilon_{sx} = \varepsilon_{cx} = \varepsilon_x \text{ et } \varepsilon_{sy} = \varepsilon_{cy} = \varepsilon_y \dots \dots \dots (43)$$

Dans cette relation,  $\varepsilon_{sx}$ ,  $\varepsilon_{cx}$  et  $\varepsilon_x$  notent respectivement la déformation de l’acier, celle du béton et la déformation globale de l’élément dans la direction x.

De même  $\varepsilon_{sy}, \varepsilon_{cy}$  et  $\varepsilon_y$  : notent respectivement la déformation de l'acier, du béton et l'élément dans la direction y.

**3.4.4.2. Relation d'équilibre :**

Les forces appliquées sur l'élément engendrent des contraintes internes dans le béton et l'acier. L'équilibre donc est satisfait par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_x = f_{cx} + \rho_x f_{sx} \text{ et } \sigma_y = f_{cy} + \rho_y f_{sy} \\ \tau_{xy} = \vartheta_{cxy} \end{cases} \dots \dots \dots (44)$$

Où :  $f_{cx}$  et  $f_{cy}$  : contrainte du béton dans les deux directions x et y.

$f_{sx}$  et  $f_{sy}$  : Contrainte de l'acier dans les deux directions x et y.

$\vartheta_{cxy}$  : Contrainte de cisaillement dans le béton.

$\rho_x$  et  $\rho_y$  : Rapport de renforcement dans la direction x et y.

**3.4.4.3. Relations constitutives :**

Pour relier les contraintes aux déformations pour les deux matériaux, Palermo [89] a utilisé la parabole de Hognestad [58] pour modéliser la réponse du béton en compression :

$$\begin{cases} f_{c2} = f_p \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_p} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_p} \right)^2 \right] & \text{si } \varepsilon_p < \varepsilon_{c2} < 0 \\ f_{c2} = f_p \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_p}{-2\varepsilon_0 - \varepsilon_p} \right)^2 \right] & \text{si } -2\varepsilon_0 < \varepsilon_{c2} < \varepsilon_p \end{cases} \dots \dots (45)$$

Où :  $f_{c2}$  et  $\varepsilon_{c2}$  : sont la contrainte et la déformation principale

$f_p$  et  $\varepsilon_p$  : Contrainte maximale de compression et la déformation correspondante.

$\varepsilon_0$  : Déformation correspondant à la contrainte maximale du cylindre.

La contrainte maximale et la déformation correspondante sont calculées comme suit :

$$f_p = -\beta f'_c \dots \dots \dots (46)$$

$$\varepsilon_p = -\beta \varepsilon_0 \dots \dots \dots (47)$$

$$\beta = 0.35 \left( \frac{-\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 0.28 \right)^{0.8} \dots \dots \dots (48)$$

La réponse du béton en traction est modélisée comme suit :

$$f_{c1} = E_c \varepsilon_{c1} \quad \text{si } 0 < \varepsilon_{c1} < \varepsilon_{cr} \dots \dots \dots (49)$$

$$E_c = 2 \frac{f'_c}{\varepsilon_0} \quad \text{et } \varepsilon_{cr} = \frac{f'_t}{E_c} \dots \dots \dots (50)$$

Avec respectivement :  $E_c$  le module initial tangent de compression,  $\varepsilon_{c1}$  : la déformation principale de traction et  $f'_t$  : la contrainte de traction.

La contrainte de traction  $f'_t$  est basée sur des expressions réalisées avec des agrégats de la région de Toronto, est décrite par :

$$f'_t = 0.65(f'_c)^{0.33} \dots \dots \dots (51)$$

La contrainte de traction après fissuration qui résulte des interactions entre l'acier et le béton est calculée à partir de :

$$f_{c1} = \frac{f'_t}{1 + \sqrt{C_t + \varepsilon_{c1}}} \dots \dots \dots (52)$$

Où  $C_t = 200$  pour des éléments relativement petits et égale à 500 pour des éléments a grande échelle.

Pour la réponse des aciers, une réponse tri-lineaire est utilisée en compression et en traction :

$$\begin{cases} f_s = E_s \varepsilon_s & \text{si } 0 < \varepsilon_s < \varepsilon_y \\ f_s = f_y & \text{si } \varepsilon_y < \varepsilon_s < \varepsilon_{sh} \\ f_s = f_y + E_{sh}(\varepsilon_s - \varepsilon_{sh}) & \text{si } \varepsilon_{sh} < \varepsilon_s < \varepsilon_u \\ f_s = 0 & \text{si } \varepsilon_s > \varepsilon_u \end{cases} \dots \dots \dots (53)$$

Avec  $f_s$  : la contrainte de l'acier,  $f_y$  : la limite d'élasticité,  $E_s$  : le module d'élasticité,  $E_{sh}$  : le module d'écrouissage et  $\varepsilon_u$  : la déformation ultime.

Pour analyser les structures sous chargement cycliques, Palermo [89] a enrichi le programme par des relations constitutives du béton et acier pour tenir compte les effets du chargement cyclique (voir paragraphe 2.1.2.7).

**3.4.5. Travaux de KACHI [64] :**

Kachi a développé un programme qui permet la simulation numérique du comportement jusqu'à rupture des poutres hyperstatiques en béton armé et précontraint, en tenant compte de l'effort tranchant et les non linéarités matérielle et géométrique, en utilisant deux types d'élément poutre et câble liés aux éléments poutres par des éléments rigides.

Pour la résolution du système des équations d'équilibre de la structure, il a utilisé une méthode itérative basée sur la méthode des déplacements, dans laquelle il recalcule à chaque étape la matrice de rigidité tangente qui lie les accroissements des déplacements aux accroissements des efforts extérieurs, son organigramme générale pour l'étude d'une section est illustré sur la figure 28. Dans le modèle les hypothèses suivantes sont admises :

- l'analyse est effectuée en élasticité non linéaire.
- Les déformations sont petites.
- La longueur des éléments est faible et donc la non linéarité géométrique attaché à la déformation de l'élément est négligeable.
- Les déformations des nœuds situés à la jonction de plusieurs éléments sont négligeables.

L'élément poutre utilisé est modélisé par des éléments à 6 ddl. La section transversale de ces éléments est étudiée dans l'hypothèse de petites déformations et du comportement élastique non-linéaire. Aussi l'élément est discrétisé en un nombre fini des fibres pour lesquelles Kachi [64] a utilisé la loi de comportement de SARGIN [110] pour les fibres de béton comprimés, la loi de GRELAT [50] pour les fibres de béton tendu et la loi préconisé par les règles BAEL 83 et BPEL pour les aciers.

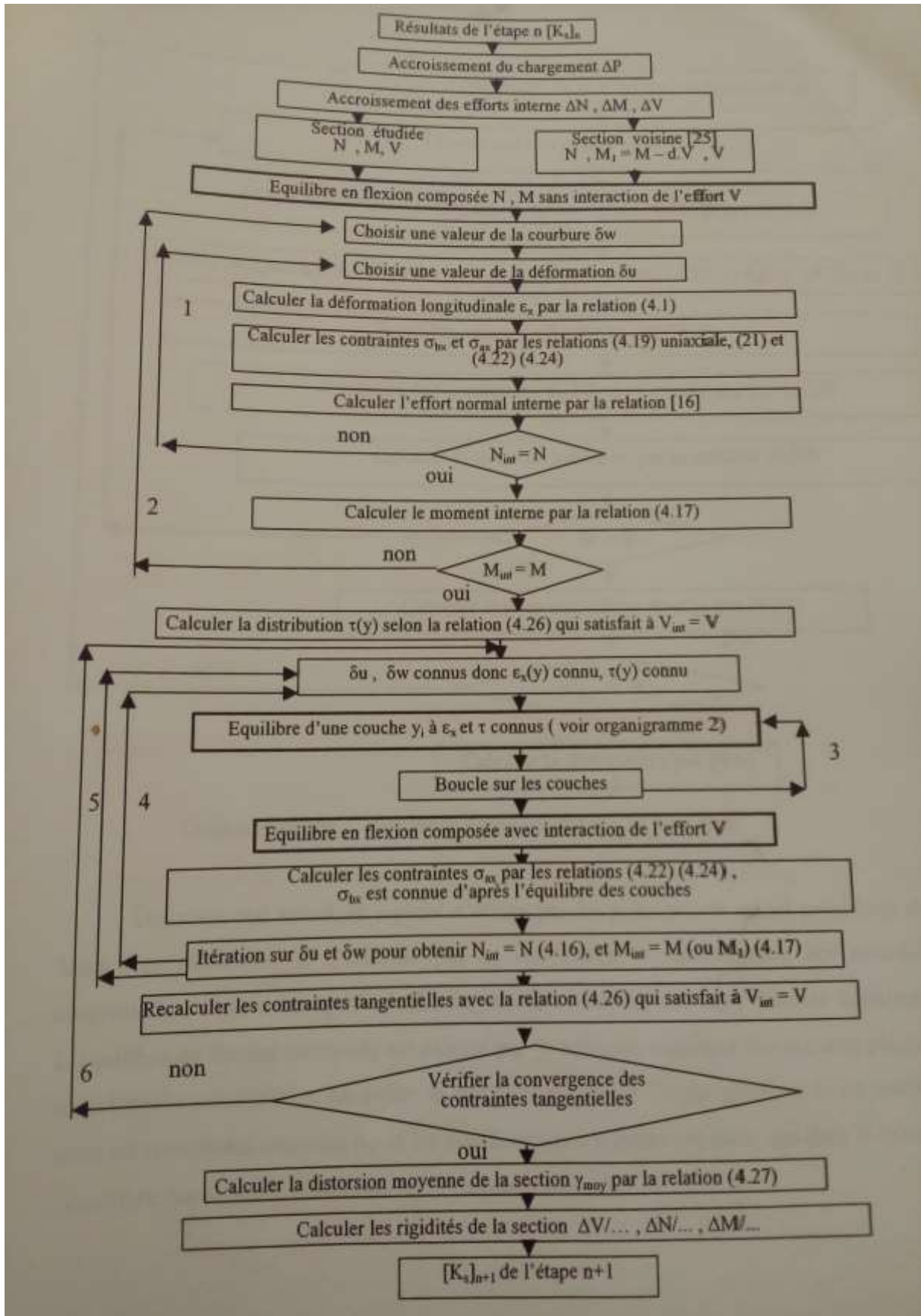


Figure 28 : Organigramme général de l'étude d'une section Kachi [64].

#### **4. Conclusion :**

Cette recherche bibliographique nous a permis de voir les différents travaux existant en littérature consacré à la modélisation du comportement non linéaire des structures en béton armé ainsi que les méthodes de calcul utilisés.

Dans la première partie, une présentation des différents modèles du comportement non linéaire des matériaux a été faite, et à partir de cette dernière nous avons choisi dans notre étude ce qui suit :

- La loi de Sargin [110] et la loi parabole rectangle de BAEL pour le béton en compression.
- La loi de Grelat [50], Quast [96] et Vecchio [121] pour le béton en traction.
- La loi élasto-plastique pour les aciers.
- À la base des phénomènes constatés sur les différents lois de comportement cyclique des matériaux, nous avons développé un modèle du comportement cyclique du béton présenté dans le chapitre 3.

Et dans la deuxième partie nous avons présenté les différents travaux de calcul non linéaire des structures, dont nous avons utilisé la méthode des éléments finis. Pour la résolution des équations non linéaires, la méthode sécante a été adoptée dans la solution.

## **Chapitre II:**

# **Formulations des éléments finis poutre en comportement 2D.**

---

### **1. Introduction :**

La méthode des éléments finis est un outil puissant qui permet de modéliser et d'analyser divers types de structures, dont le traitement conduit d'une façon générale à discrétiser la structure en un nombre fini d'éléments.

Néanmoins, pour obtenir une précision suffisante dans les résultats des calculs, il est nécessaire d'affiner le maillage surtout dans les zones de fortes non linéarités.

Pour cela, et dans le cadre de ce travail nous avons d'abord utilisé les éléments finis poutre 2D classiques à deux nœuds avec trois degrés de liberté (ddl) par nœud, soit 6 ddl par élément existant déjà en littérature. Afin d'enrichir notre modèle, deux nouveaux éléments plus performants à trois nœuds (9 ddl) et à quatre nœuds (12 ddl) dont Charles E. Augarde [23] ont présentés dans leurs travaux un élément à trois nœuds et uniquement deux fonctions de formes pour l'élément à quatre nœuds.

En plus de la discrétisation le long de la poutre nous avons aussi utilisé la discrétisation de la section transversale en adoptant l'approche multi couches suivant la hauteur de la section. Ceci va permettre d'évaluer l'état de contrainte-déformation et de déterminer la matrice de rigidité et des efforts dans la section droite et dans l'élément poutre dans sa totalité.

Ci après, les formulations des éléments finis poutre à deux nœuds (6 ddl), trois nœuds (9 ddl) et quatre nœuds (12 ddl), basées sur la méthode des éléments finis et l'hypothèse de Navier-Bernoulli seront développés.

La formulation d'un élément consiste à étudier trois champs vectoriels ainsi que leur relation : le champ des déplacements, des déformations et des contraintes.

Les différentes relations entre ces quantités sont schématisées ci-dessous (figure 29) :

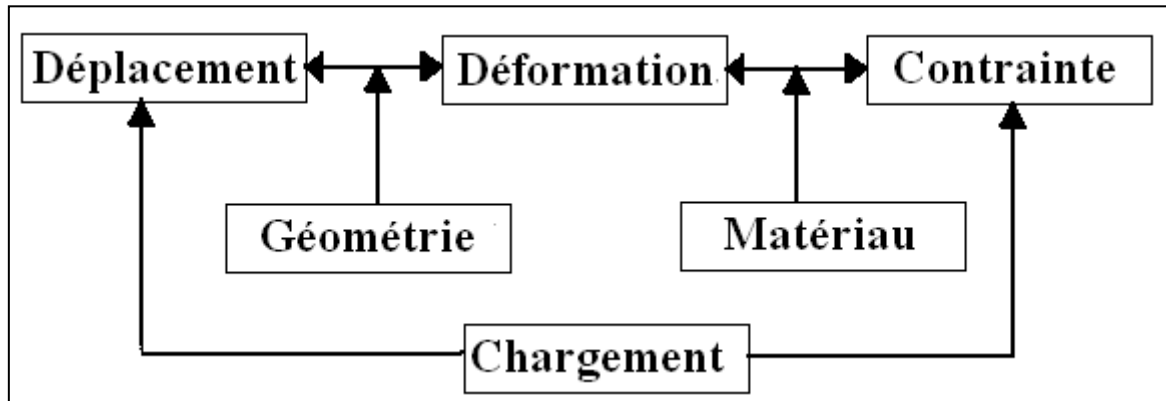


Figure 29: Schéma représentatif des relations entre Déplacement-Déformation-Contrainte.

## 2. Hypothèses de base :

On s'intéresse à un élément poutre 2D qui est un volume particulier avec une dimension (la longueur) très supérieure aux deux autres dimensions (dimensions de la section). Pour cela notre élément est orienté selon l'axe longitudinal  $x$  et dont les dimensions dans le plan  $yz$  normal à  $x$  sont relativement petites par rapport à la portée  $L$  de la poutre (**voir figure 30**).

On se base sur les hypothèses suivantes :

- a) L'axe longitudinal de la poutre est droit.
- b) La section droite est symétrique par rapport au plan  $yz$ .
- c) Les chargements agissant sur la poutre sont appliqués dans le plan  $xz$ . Seuls les chargements dans le sens axial  $x$  et vertical  $z$  peuvent être appliqués (cas 2D).
- d) Trois champs de déplacements sont possibles : le déplacement axial  $u(x)$ , le déplacement vertical  $w(x)$  et la rotation  $\theta(x)$ .
- e) La poutre plane transmet des efforts normaux  $N_x(x)$  suivant  $x$ , les efforts tranchants  $T_z(x)$  suivant  $z$  et des moments fléchissant  $M_y(x)$  autour de l'axe local de flexion  $y$  orthogonal au plan  $xz$ .

- f) Les sections planes et droites avant déformation restent planes et orthogonale à la fibre neutre après déformation. Les déformations d’effort tranchant sont négligées (Hypothèse de Navier-Bernoulli).
- g) Les déplacements et les déformations du second ordre sont négligés (relation linéaire entre déformations et déplacements).

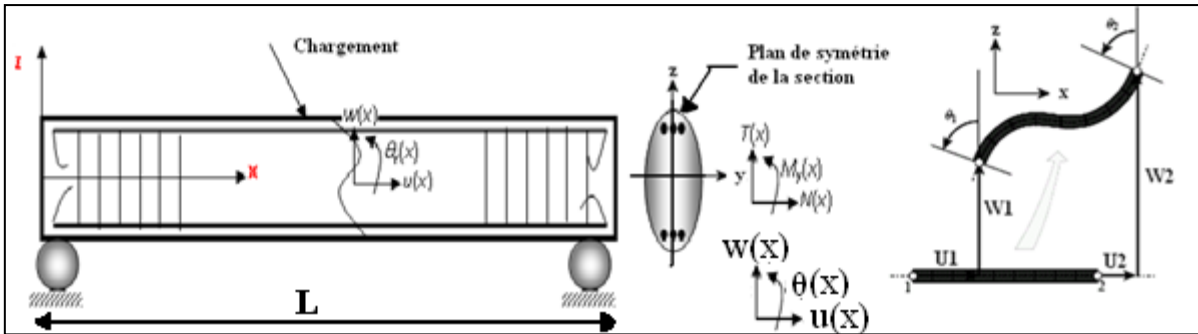


Figure 30 : Schématisation de l’élément poutre étudié.

**3. Cinématique :**

La cinématique de l’élément est régie par trois degré de liberté par nœud définis par les composantes : u, w et  $\theta$  :

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x) + z \times \theta(x) \\ w(x, z) = w(x) \\ \theta(x) = -\frac{dw}{dx} + \gamma \end{cases} \dots \dots \dots (54)$$

Où :  $u_0(x)$  Le déplacement axial au niveau de l’axe de référence de la poutre.

$w(x)$  : Le déplacement transversal.

$\theta(x)$  : La rotation de la normale de la section transversale d’abscisse x.

$\gamma$  : La rotation due au cisaillement transversal.

Dans le cadre de l’hypothèse de Navier Bernoulli, les déformations dues à l’effort tranchant (ou cisaillement) sont négligées, d’où  $\gamma = 0$ ).

Donc :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} \dots \dots \dots (55)$$

La relation (54) devient :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \times \frac{dw(x)}{dx} \dots \dots \dots (56)$$

La relation (56) exprime l’hypothèse de Navier- Bernoulli, valable dans le cas des poutres minces.

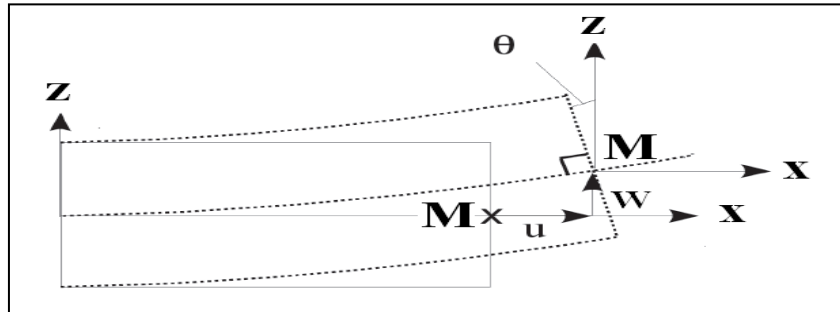


Figure 31: Définition de la cinématique de la poutre.

**4. Relation contrainte –déformation :**

Les contraintes internes de l’élément {σ} sont reliées aux déformations {ε} avec la relation :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \dots \dots \dots (57)$$

[D] : Matrice d’élasticité qui contient les caractéristiques mécaniques de l’élément.

Dans l’hypothèse d’un comportement en contraintes planes, élastique linéaire et isotrope l’équation (57) s’écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (58)$$

Avec : E : module de Young.

ν : Coefficient de poisson.

Dans le cas des poutres, on considère un état de contraintes uni-axial, alors :

$$\sigma_z = 0 \dots \dots \dots (59)$$

D’après les relations (58) et (59), on obtient :

$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \dots \dots \dots (60)$$

En remplaçant (60) dans (58), on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_x = E \varepsilon_x \\ \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \dots \dots \dots (61) \end{cases}$$

Où  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  définit le module de cisaillement.

**5. Relation déformations – déplacements :**

Selon l’hypothèse (g) du paragraphe 3.2 ou la non linéarité géométrique est négligé, et pour un problème d’élasticité plane, les déformations correspondent aux dérivées premières des déplacements sont :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} \dots \dots \dots (62)$$

En tenant compte de la relation (56), on obtient :

$$\varepsilon_x = \frac{du_0(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \dots \dots \dots (63)$$

Ou bien :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + z\phi \dots \dots \dots (64)$$

Avec :  $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} : \text{Déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence} \\ \phi = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} : \text{Courbure.} \end{array} \right.$

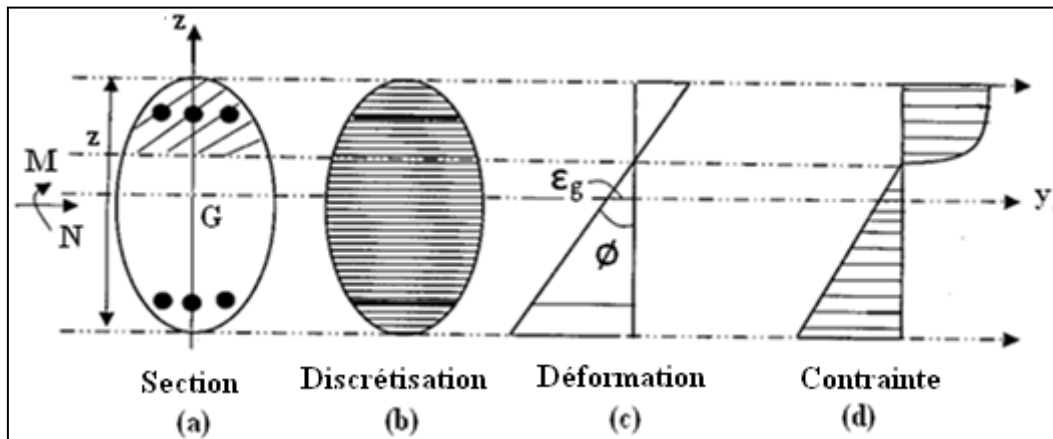


Figure 32 : Modélisation de la section transversale.

**6. Relation entre efforts et déformations :**

Pour le cas d’une section d’un élément poutre mince soumis à une flexion composée (cas 2D), le torseur de cohésion ne fait apparaitre qu’un moment fléchissant et un effort normal :

$$\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} N_x & M_x \\ T_y & M_y \\ T_z & M_z \end{Bmatrix} \rightarrow \{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & M_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (65)$$

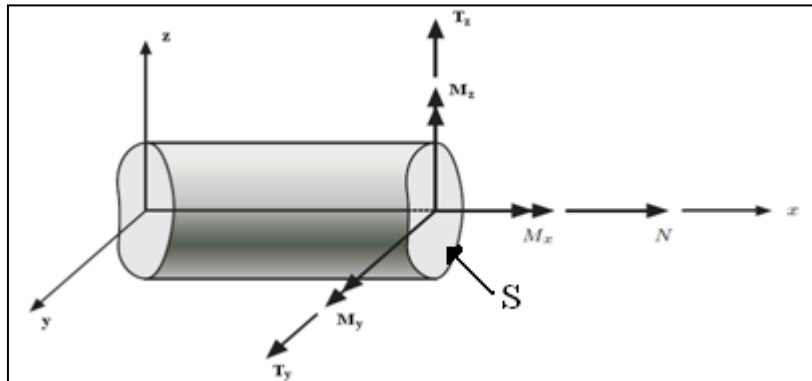


Figure 33 : Représentation des efforts internes.

L'effort normal dans la section transversale d'abscisse x est la résultante des contraintes axiales appliquée à la section droite S.

$$N = N(x) = \int_s \sigma_x ds \dots \dots \dots (66)$$

En tenant compte de la relation (61), on obtient :

$$N = \int_s E \varepsilon_x ds \dots \dots \dots (67)$$

$$N = \int_s E (\varepsilon_{0x} + z\phi) ds \dots \dots \dots (68)$$

$$N = \int_s E \varepsilon_{0x} ds + \int_s E z \phi ds \dots \dots \dots (69)$$

$$N = \varepsilon_{0x} \int_s E ds + \phi \int_s E z ds \dots \dots \dots (70)$$

On pose :  $\overline{EA} = \int_s E ds$  = rigidité à l'effort normal (de membrane).

$\overline{ES} = \int_s E \cdot z \cdot ds$  = rigidité de couplage effort normal + flexion.

L'expression de l'effort normal s'écrit comme suit :

$$N = \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \cdot \phi \dots\dots\dots (71)$$

De même, le moment fléchissant dans la section transversale d'abscisse x, par rapport à l'axe de référence est :

$$\begin{aligned} M &= \int_s \sigma_x \cdot z ds \\ &= \int_s E \varepsilon_x \cdot z ds \\ &= \int_s E (\varepsilon_{0x} + z\phi) z ds \\ &= \varepsilon_{0x} \int_s E \cdot z ds + \phi \int_s E \cdot z^2 ds \end{aligned}$$

En définissant la rigidité de flexion par :  $\overline{EI} = \int_s E \cdot z^2 ds$

En tenant compte du terme de couplage effort normal-flexion défini plus haut, l'expression du moment fléchissant devient :

$$M = \overline{ES} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{EI} \cdot \phi \dots\dots\dots (72)$$

Ainsi, dans la section transversale d'abscisse x, la relation entre les efforts et les déformations est donnée en notation matricielle par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (73a)$$

En définissant les vecteurs suivants :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \delta \hat{\varepsilon}_{0x} \\ \delta \hat{\phi} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}$$

On peut écrire :

$$\{\sigma\} = [D]\{\gamma\} \dots\dots\dots (73b)$$

[D] est la matrice de comportement. Elle regroupe les constantes élastiques et géométriques de la poutre. Cette relation est écrite dans le cas d'un axe de référence de flexion quelconque. Le couplage flexion-Effort normal est présent. La matrice de comportement est pleine. Néanmoins dans le cas où l'axe de référence passe par le centre de gravité de la section, le

couplage disparaît car le coefficient ES est nul. Les relations classiques de la théorie des poutres sont alors obtenues. Dans la présente étude, la relation (73) est retenue.

**7. Principe des travaux virtuels (P.T.V) :**

Dans le cas d'un chargement statique, les équations d'équilibre sont obtenues à partir du principe des travaux virtuels où le travail des forces appliquées  $W$  est restitué en énergie interne dans la structure par déformation  $U$ . Dans le cas d'une variation cinématiquement admissibles des déplacements, l'équilibre est obtenue par :

$$\delta U - \delta W = 0 \tag{74}$$

$\delta U$  et  $\delta W$  notent les variationnelles de  $U$  et  $W$ . Ces termes sont développés ci-après en relation avec le modèle d'une poutre 2D en flexion composée soumise à des chargements réparties  $f_x$  et  $f_z$ . On considère une poutre mince droite de longueur  $l$ , ayant une section transversale de hauteur  $h$  et de longueur  $b(z)$  variant avec la hauteur (**voir figure 34**).

Dans le cas d'un déplacement virtuel,  $\delta W$  est donné par:

$$\delta W = \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx + \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx$$

En notation matricielle, on peut l'écrire :

$$\delta W = \int_l \{\delta d\}^T \{f\} dx \dots \dots \dots \tag{75}$$

Où :  $\{\delta d\} = \begin{Bmatrix} \delta \hat{u} \\ \delta \hat{w} \end{Bmatrix}$  et  $\{f\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix}$

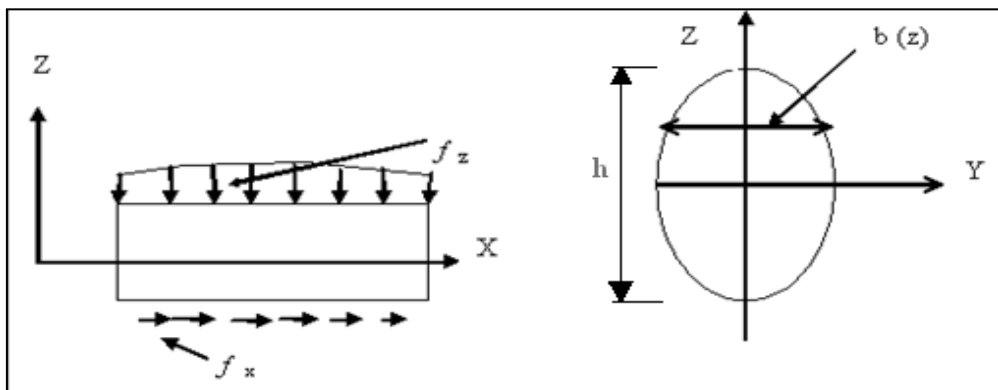


Figure 34 : Représentation du chargement agissant sur la poutre et de la section transversale de la poutre.

La variationnelle de l'énergie de déformation  $\delta U$  par unité de volume est donnée par :

$$\delta U = \int_v \langle \delta \varepsilon_x \rangle \{ \sigma \} dv = \int_0^l \int_s \delta \widehat{\varepsilon}_x \sigma_x ds dx$$

D'après l'équation (64) :

$$\delta \varepsilon_x = \delta \widehat{\varepsilon}_{0x} + z \delta \widehat{\varphi}$$

Donc on obtient :

$$\delta U = \int_0^l \int_s (\delta \widehat{\varepsilon}_{0x} + z \delta \widehat{\varphi}) \sigma_x ds dx$$

$$\delta U = \int_0^l \int_s (\delta \widehat{\varepsilon}_{0x} \sigma_x + z \delta \widehat{\varphi} \sigma_x) ds dx$$

$$\delta U = \int_0^l \left[ \delta \widehat{\varepsilon}_{0x} \int_s \sigma_x ds + \delta \widehat{\varphi} \int_s z \sigma_x ds \right] dx$$

En tenant compte des relations (71 et 72) cette dernière peut se réécrire sous la forme :

$$\delta U = \int_0^l [\delta \widehat{\varepsilon}_{0x} \cdot N + \delta \widehat{\varphi} \cdot M] dx$$

$$\delta U = \int_0^l \{ \delta \widehat{\varepsilon}_{0x}, \delta \widehat{\varphi} \}^T \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} dx$$

En utilisant la définition des vecteurs contraintes  $\{ \sigma \}$  et déformation  $\{ \gamma \}$  de la relation (73b), on peut écrire

$$\delta U = \int_l \{ \delta \gamma \}^T \{ \sigma \} dx \dots \dots \dots (76a)$$

En utilisant la loi de comportement (73b) liant  $\{ \sigma \}$  et déformation  $\{ \gamma \}$ ,  $\delta U$  peut s'écrire aussi :

$$\delta U = \int_l \{ \delta \gamma \}^T [D] \{ \gamma \} dx \dots \dots \dots (76b)$$

Après la formulation matricielle de  $\delta W$  (Eq 75) et celle de  $\delta U$  (Eq 76b), les équations d'équilibre et la loi de comportement du matériau sont regroupés dans le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_l \{\delta\gamma\}^T \{\sigma\} dx - \int_l \{\delta d\}^T \{f\} dx = 0 \\ \{\sigma\} = [D]\{\gamma\} \end{array} \right.$$

## 8. Modélisation par éléments finis et calcul de la matrice de rigidité :

### 8.1. Élément poutre à deux nœuds :

Pour la discrétisation des déplacements, on utilise un élément fini à deux nœuds (Figure 35). Chaque nœud est caractérisé par deux déplacements et une rotation qui constituent les degrés de liberté du nœud.

Un élément à 2 nœuds aura ainsi 6 ddl dont les composantes sont définies par:

$$\{u\}^T = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2\}$$

A l'intérieur de l'élément, les déplacements ( $u(x)$ ,  $w(x)$ ,  $\theta(x)$ ) peuvent être exprimés en fonction des déplacements des nœuds 1 et 2 et des fonctions de forme judicieusement choisies. Ces fonctions sont définies ci-dessous pour le déplacement axial  $u_0(x)$  et le déplacement vertical  $w(x)$ .

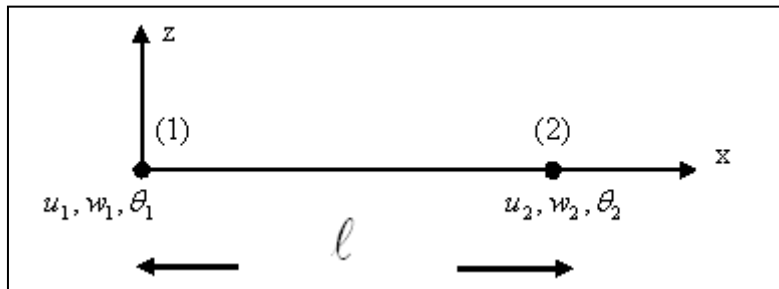


Figure 35 : Élément fini à 2 nœuds et 6 d.d.l.

#### 8.1.1. Calcul des fonctions de forme pour les déplacements $u_0(x)$ et $w(x)$ :

Le déplacement longitudinal  $u_0(x)$ , au niveau de l'axe de référence, est approché par des fonctions d'interpolation de type Lagrange de degré 1 dans la base polynomiale :

$$u_0(x) = A + Bx$$

Conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{l}{2} \rightarrow u\left(-\frac{l}{2}\right) = A - \left(\frac{l}{2}\right)B = u_1 \\ x = +\frac{l}{2} \rightarrow u\left(+\frac{l}{2}\right) = A + \left(\frac{l}{2}\right)B = u_2 \end{array} \right.$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} A = \frac{u_1 + u_2}{2} \\ B = \frac{u_2 - u_1}{l} \end{cases}$$

En remplaçant A et B on obtient :

$$u_0(x) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{l}x \rightarrow u_0(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)u_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right)u_2 \dots \dots \dots (77)$$

On pose :

$$N_1 = \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \text{ et } N_2 = \frac{1}{2} + \frac{x}{l}$$

Les fonctions  $N_1(x)$  et  $N_2(x)$  sont les fonctions de forme de la poutre pour le déplacement axial  $u(x)$ . Ces fonctions sont linéaires (Fig 36).

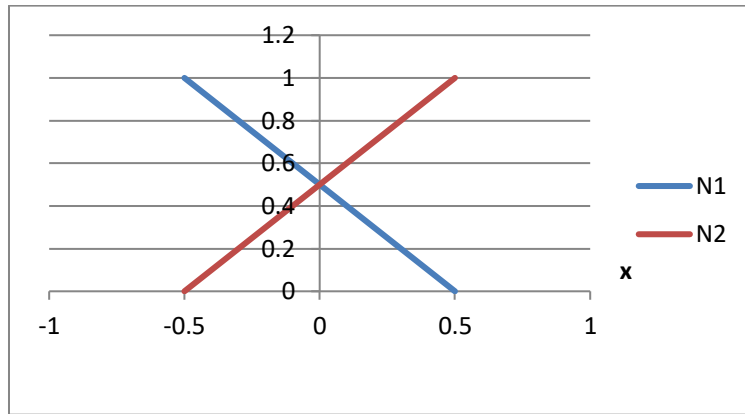


Figure 36: Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement longitudinal des éléments à 2 nœuds.

L'expression du déplacement longitudinal devient :

$$u_0(x) = N_1u_1 + N_2u_2$$

Avec  $u_1, u_2$  les valeurs du déplacement longitudinal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

En posant :  $\xi = \frac{2x}{l}$ , l'expression du déplacement devient :

$$u_0(x) = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)u_1 + \left(\frac{1+\xi}{2}\right)u_2 \dots \dots \dots (78)$$

Pour le déplacement transversal  $w(x)$ , on utilise des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré 3 dans la base polynomiale :

$$w(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \dots \dots \dots (79)$$

Sachant que :  $\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2$

Les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{l}{2} \rightarrow w\left(-\frac{l}{2}\right) \rightarrow w_1 = A - \frac{l}{2}B + \frac{l^2}{4}C + \frac{l^3}{8}D \\ x = +\frac{l}{2} \rightarrow w\left(+\frac{l}{2}\right) \rightarrow w_2 = A + \frac{l}{2}B + \frac{l^2}{4}C + \frac{l^3}{8}D \\ \theta(-l/2) \rightarrow \theta_1 = B - lC + \frac{3l^2}{4}D \\ \theta(+l/2) \rightarrow \theta_2 = B + lC + \frac{3l^2}{4}D \end{array} \right.$$

La résolution de ce système d'équation (79), donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{w_1 + w_2}{2} - \frac{l}{8}(\theta_2 - \theta_1) \\ B = \frac{-3}{2l}w_1 + \frac{3}{2l}w_2 - \frac{1}{4}\theta_1 - \frac{1}{4}\theta_2 \\ C = \frac{1}{2l}(\theta_2 - \theta_1) \\ D = \frac{2}{l^3}w_1 - \frac{2}{l^3}w_2 + \frac{1}{l^2}\theta_1 + \frac{1}{l^2}\theta_2 \end{array} \right.$$

En remplaçant A, B, C et D dans l'équation (79), on obtient :

$$w(x) = N_3w_1 + N_4w_2 + N_5\theta_1 + N_6\theta_2$$

Dans cette expression,  $(w_1, w_2)$  sont les valeurs des déplacements verticaux respectivement aux nœuds 1 et 2.  $(\theta_1, \theta_2)$  sont les rotations respectivement aux nœuds 1 et 2. Les fonctions  $N_3(x)-N_6(x)$  sont les fonctions de forme pour le déplacement  $w(x)$ . Elles ont pour expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_3 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{2x}{l} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{l} \right)^3 \right] \\ N_4 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{2x}{l} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{l} \right)^3 \right] \\ N_5 = \frac{l}{8} \left[ 1 - \left( \frac{2x}{l} \right) - \left( \frac{2x}{l} \right)^2 + \left( \frac{2x}{l} \right)^3 \right] \\ N_6 = \frac{l}{8} \left[ - \left( \frac{2x}{l} \right) + \left( \frac{2x}{l} \right)^2 + \left( \frac{2x}{l} \right)^3 - 1 \right] \end{array} \right.$$

En coordonnée adimensionnelle  $\xi=2x/l$ , ces fonctions s'écrivent :

$$Ou : \begin{cases} N_3 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3}{2}(\xi) + \frac{1}{2}(\xi)^3 \right] \\ N_4 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{3}{2}(\xi) - \frac{1}{2}(\xi)^3 \right] \\ N_5 = \frac{l}{8} [1 - (\xi) - (\xi)^2 + (\xi)^3] \\ N_6 = \frac{l}{8} [-(\xi) + (\xi)^2 + (\xi)^3 - 1] \end{cases}$$

Leurs variations le long de l'élément sont représentées dans la fig.37. Ces fonctions ne sont pas linéaires. Elles sont couramment appelées les fonctions de l'Hermite dans la littérature des éléments finis.

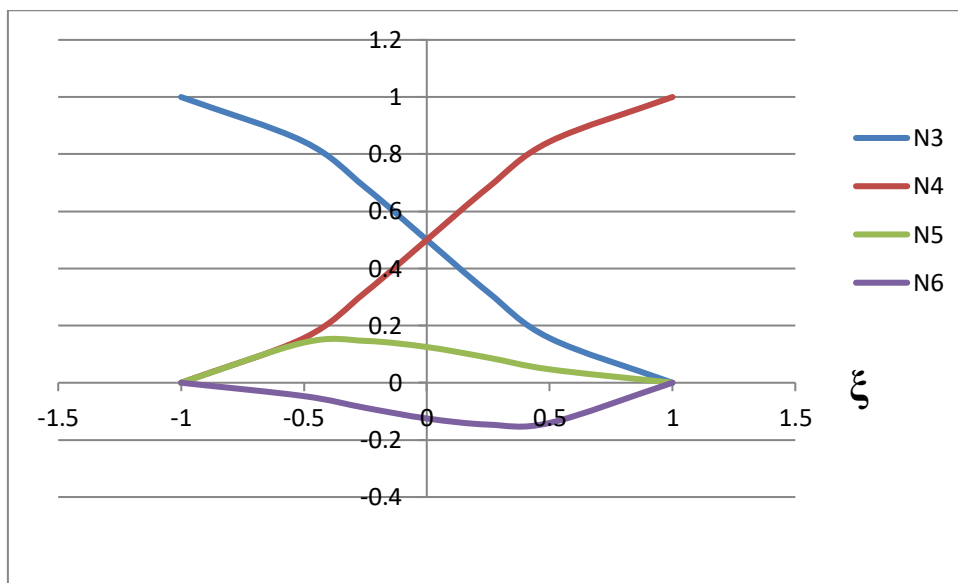


Figure 37: Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement transversal des éléments à 2 nœuds.

L'expression de  $w(\xi)$  devient :

$$w(\xi) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3}{2}(\xi) + \frac{1}{2}(\xi)^3 \right] w_1 + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{3}{2}(\xi) - \frac{1}{2}(\xi)^3 \right] w_2 + \frac{l}{8} [1 - (\xi) - (\xi)^2 + (\xi)^3] \theta_1 + \frac{l}{8} [-(\xi) + (\xi)^2 + (\xi)^3 - 1] \theta_2 \dots (80)$$

**8.1.2. Calcul des déformations en fonction des fonctions de forme :**

La déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence de l'élément poutre est donnée par :

$$\varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} = \left\langle \frac{\partial N_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_2(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \langle N'_1, N'_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

La rotation  $\theta(x)$  est donnée par :

$$\theta(x) = -\frac{dw(x)}{dx} = \langle N'_3, N'_4, N'_5, N'_6 \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

La courbure  $\phi$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi(x) = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \langle -N''_3, -N''_4, -N''_5, -N''_6 \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

On déduit que :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & -N''_3 & -N''_4 & 0 & -N''_5 & -N''_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Ce qui s'écrit sous la forme matricielle :

$$\{\gamma\} = [B]\{u\} \dots \dots \dots (81)$$

A partir de l'expression (76) du Principe des Travaux Virtuels (PTV), on obtient :

Avec  $\{\sigma\} = [D]\{\gamma\} = [D][B]\{u\}$  et  $\{\delta\gamma\}^T = \{\delta u\}^T [B]^T$

La formulation élément finis de  $\delta U$  développé dans l'Eq 76b devient:

$$\delta U = \int_l \{\delta u\}^T [B]^T [D] [B] \{u\} dx$$

Comme  $\{u\}$  et  $\{\delta u\}$  sont indépendants de  $x$ , on peut écrire :

$$\delta U = \{\delta u\}^T \left( \int_l [B]^T [D] [B] dx \right) \{u\}$$

De même, la formulation élément finis de  $\delta W$  développé dans (75), s'écrit avec:

$\{d\} = [N(x)]\{u\}$  et  $\{\delta d\}^T = \{\delta u\}^T [N(x)]^T$

$$\delta W = \int_l \{\delta d\}^T \{f\} dx = \int_l \{\delta u\}^T [N(x)]^T \{f\} dx = \{\delta u\}^T \left( \int_l [N(x)]^T \{f\} dx \right)$$

$$\delta W = \{\delta u\}^T \{F\}_e$$

$\{F\}_e = \int_l [N(x)]^T \{f\} dx$  : est le vecteur forces nodales.

L'expression élément finis de l'équilibre devient alors:

$$\begin{cases} \{\delta u\}^T \left( \int_l [B]^T [D] [B] dx \right) \{u\} - \{\delta u\}^T \{F\}_e = 0 \\ \{\sigma\} = [D] \{\gamma\} \end{cases} \quad \forall \{\delta u\} \dots \dots \dots (82)$$

Soit alors :

$$\begin{cases} \left( \int_l [B]^T [D] [B] dx \right) \{u\} = \{F\}_e \\ \{\sigma\} = [D] \{\gamma\} \end{cases}$$

Elle peut se mettre sous la forme classique :

$$[K]_e \{u\} = \{F\}_e$$

Où  $[K]_e$  est la matrice de rigidité élémentaire définie par:

$$\int_{-l/2}^{l/2} [B(x)]^T [D(x)] [B(x)] dx$$

**8.1.3. Calcul de la matrice de rigidité par intégration numérique :**

La matrice de rigidité élémentaire est définie par :

$$[K]_e = \int_{-l/2}^{+l/2} [B(x)]^T [D(x)] [B(x)] dx$$

Par changement de variable  $-1 \leq \xi \leq 1$ , cette matrice devient :

$$\frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi$$

Dans la méthode des éléments finis, les intégrales sont souvent calculées par intégration numérique en utilisant les méthodes d'intégration numériques comme la méthode de Gauss.

L'évaluation de  $[K]_e$  calculée par intégration numérique s'écrit:

$$\int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi = \sum_{i=1}^n [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] \alpha_i$$

Où:  $\begin{cases} n : \text{nombre de point de Gauss} \\ \xi_i : \text{Abscisse du point de Gauss } i \\ \alpha_i : \text{Poids d'intégration au point de Gauss } i \end{cases}$

La précision de l'intégration dépend du degré du polynôme à intégrer dans l'intégrale. En fonction du degré, un nombre défini de points de Gauss est nécessaire. Pour intégrer les

fonctions de l’Hermite adoptées ici, le nombre minimum de points de Gauss est 2. Dans notre cas, on a utilisé trois points de Gauss  $n=3$ . La position est les coordonnées de ces points dans l’élément de référence sont données dans la fig.38. Les coordonnées de ces points et leur poids se trouvent dans le tableau 1.

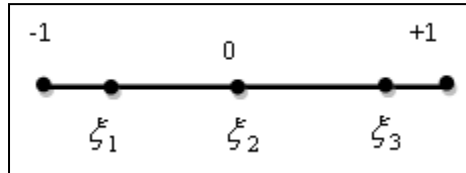


Figure 38: Représentation graphique des abscisses des points de Gauss

Tableau 1: Abscisses et poids d’intégration de Gauss utilisé pour l’intégration numérique de l’élément à deux nœuds.

Les Abscisse des points de Gauss	Les poids d’intégration aux points de Gauss $i$
$\xi_1 = -\sqrt{3/5}$	$\alpha_1 = 5/9$
$\xi_2 = 0$	$\alpha_2 = 8/9$
$\xi_3 = +\sqrt{3/5}$	$\alpha_3 = 5/9$

**Calcul des expressions des  $N'_i$  et des  $N''_i$ :**

On a :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Dans notre cas :

$$\xi = \frac{2x}{l} \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{l}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{2}{l} \rightarrow \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} \left(\frac{2}{l}\right)^2$$

Donc les expressions des  $N'_i$  et  $N''_i$  sont données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = 1/2 - \xi/2 \rightarrow N_1' = -\frac{1}{l} \\ N_2 = \frac{1}{2} + \xi/2 \rightarrow N_2' = \frac{1}{l} \\ N_3 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3}{2}(\xi) + \frac{1}{2}(\xi)^3 \right] \rightarrow N_3'' = \frac{6}{l^2} \xi \\ N_4 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{3}{2}(\xi) - \frac{1}{2}(\xi)^3 \right] \rightarrow N_4'' = \frac{-4}{l^2} \left( \frac{l}{4} - \frac{3l}{4} \xi \right) \\ N_5 = \frac{l}{8} [1 - (\xi) - (\xi)^2 + (\xi)^3] \rightarrow N_5'' = \frac{-6}{l^2} \xi \\ N_6 = \frac{l}{8} [-(\xi) + (\xi)^2 + (\xi)^3 - 1] \rightarrow N_6'' = \frac{4}{l^2} \left( \frac{l}{4} + \frac{3l}{4} \xi \right) \end{array} \right.$$

**8.2.Élément poutre à trois nœuds (9 ddl):**

**8.2.1. Calcul des fonctions de forme :**

Pour la discrétisation des déplacements, on utilise des éléments finis poutres à 3 nœuds et à 3 ddl par nœud. La fig 39 donne l'élément dans le repère naturel et dans la coordonné de référence.

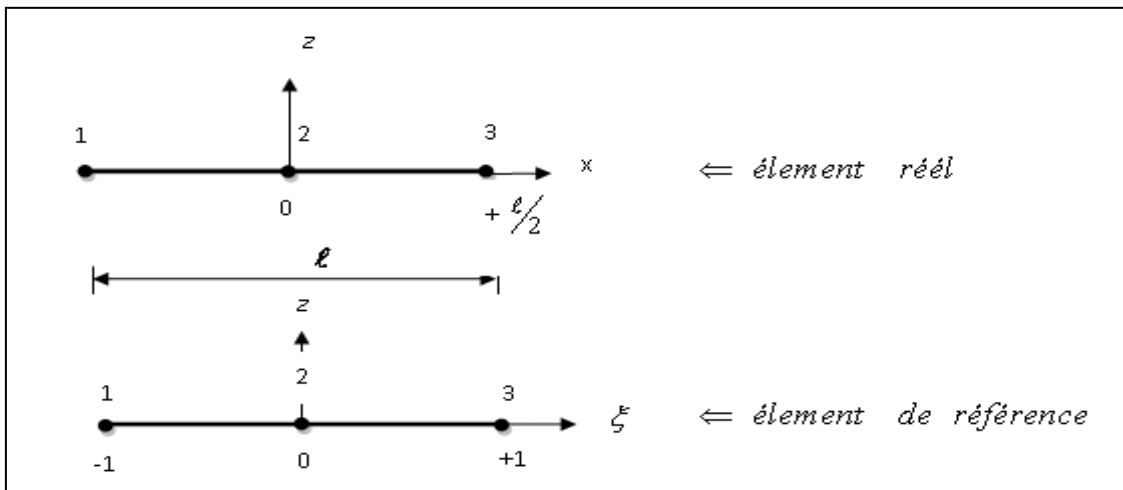


Figure 39: Élément fini à 3 nœuds.

Le déplacement longitudinal  $u_0(x)$  au niveau de l'axe de référence est approché par des fonctions d'interpolation de type Lagrange de degré 2, dans la base polynomiale.

$$u_0(x) = N_1u_1 + N_4u_2 + N_7u_3$$

Où :  $u_1, u_2$  et  $u_3$  sont les valeurs de déplacement longitudinal au 1,2 et 3 respectivement.

Avec :

$$\begin{cases} N_1(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ N_4(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\left(1 + \frac{x}{l}\right) \\ N_7(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)\left(1 + \frac{x}{l}\right) \end{cases}$$

$$\text{Ou : } \begin{cases} N_1(x) = -\frac{1}{2}(\xi)(1 - \xi) = -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \\ N_4(x) = (1 - \xi)(1 + \xi) = 1 - \xi^2 \\ N_7(x) = \frac{1}{2}(\xi)(1 + \xi) = \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_0(x) = \left(-\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2}\right)u_1 + (1 - \xi^2)u_2 + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2}\right)u_3 \dots \dots \dots (83)$$

La figure 40 donne la représentation graphique de ces fonctions.

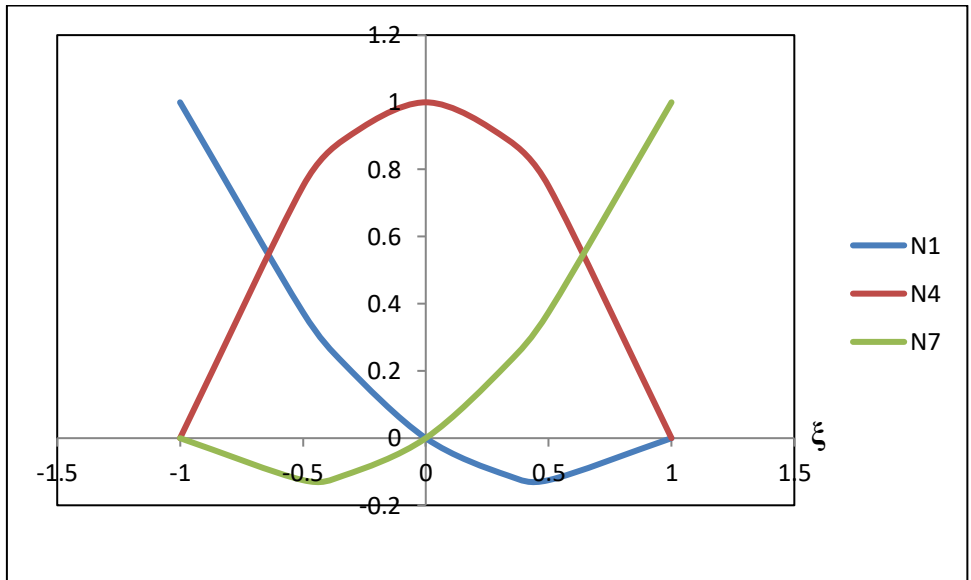


Figure 40: Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement longitudinal des éléments à trois nœuds.

Pour le déplacement transversal  $w(x)$ , on utilise des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré 5 dans la base polynomiale :

$$w(x) = N_2w_1 + N_3\theta_1 + N_5w_2 + N_6\theta_2 + N_8w_3 + N_9\theta_3 \dots \dots \dots (84)$$

Où les fonctions d'interpolation sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2(x) = 4 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 10 \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 8 \left(\frac{x}{l}\right)^4 + 24 \left(\frac{x}{l}\right)^5 \\ N_3(x) = l \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^4 + 4 \left(\frac{x}{l}\right)^5 \right] \\ N_5(x) = 1 - 8 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 16 \left(\frac{x}{l}\right)^4 \\ N_6(x) = l \left[ \left(\frac{x}{l}\right) - 8 \left(\frac{x}{l}\right)^3 + 16 \left(\frac{x}{l}\right)^5 \right] \\ N_8(x) = 4 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 10 \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 8 \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 24 \left(\frac{x}{l}\right)^5 \\ N_9(x) = l \left[ -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 + 2 \left(\frac{x}{l}\right)^4 + 4 \left(\frac{x}{l}\right)^5 \right] \end{array} \right.$$

Où bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2(\xi) = \xi^2 - \frac{5}{4} \xi^3 - \frac{1}{2} \xi^4 + \frac{3}{4} \xi^5 \\ N_3(\xi) = \frac{l}{8} [\xi^2 - \xi^3 - \xi^4 + \xi^5] \\ N_5(\xi) = 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \\ N_6(\xi) = \frac{l}{2} [\xi - 2\xi^3 + \xi^5] \\ N_8(\xi) = \xi^2 + \frac{5}{4} \xi^3 - \frac{1}{2} \xi^4 - \frac{3}{4} \xi^5 \\ N_9(\xi) = \frac{l}{8} [-\xi^2 - \xi^3 + \xi^4 + \xi^5] \end{array} \right.$$

Avec :

$w_1, w_2$  et  $w_3$  : les valeurs de déplacement transversal aux nœuds 1, 2 et 3 respectivement.

$\theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$  : les valeurs de la rotation aux nœuds 1,2 et 3 respectivement. La fig.41 donne la représentation graphique de ces fonctions  $N_2$  et  $N_3$ . Les autres fonctions sont représentées dans la fig 42.

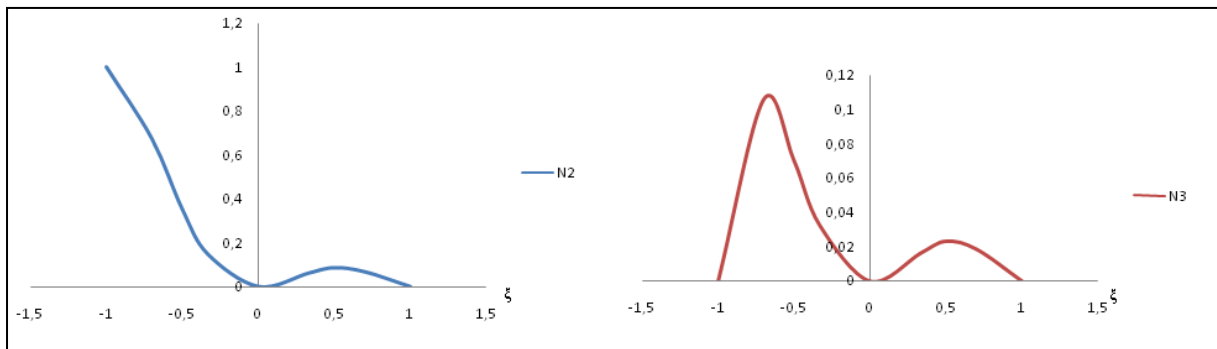


Figure 41: Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement transversal ( $N_2$  et  $N_3$ ) des éléments à trois nœuds.

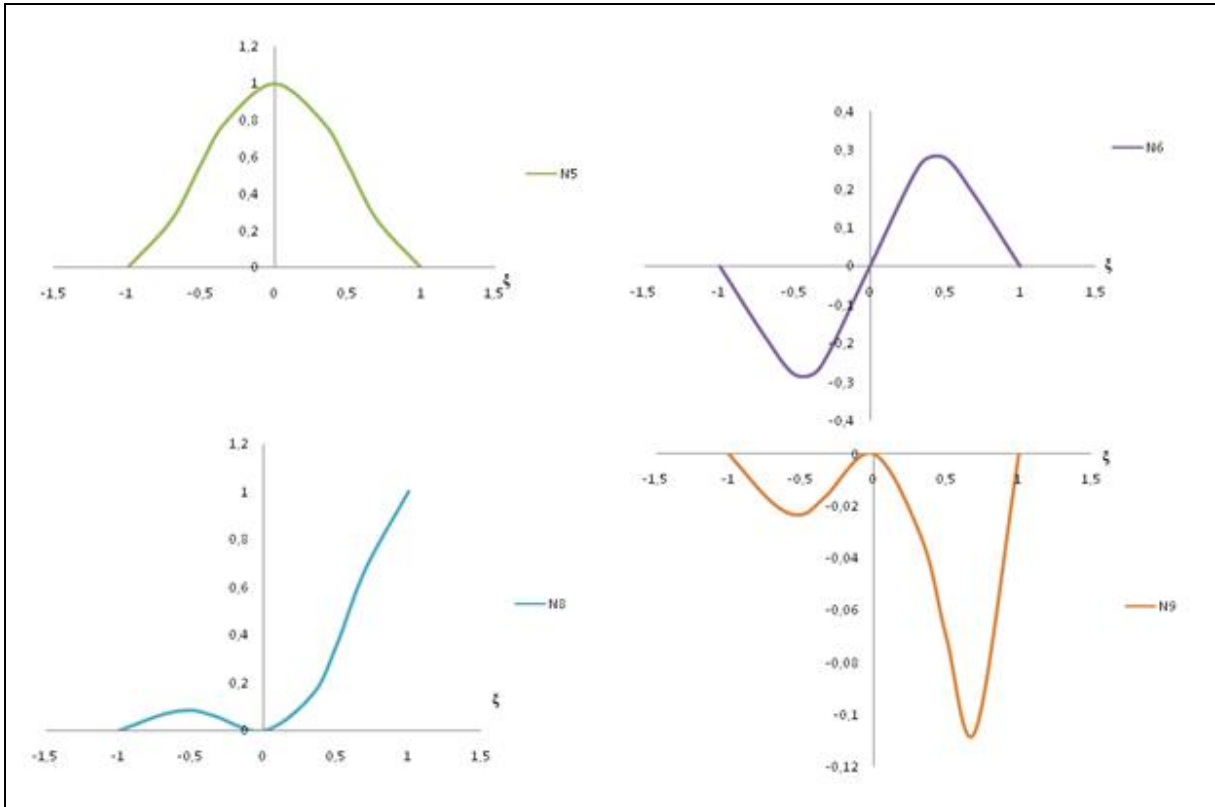


Figure 42: Graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement transversal (N5,N6,N8 et N9) des éléments à trois nœuds.

**8.2.2. Calcul des déformations en fonction des fonctions de forme :**

La déformation longitudinale, au niveau de l'axe de référence de l'élément est donnée par :

$$\epsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} = \left\langle \frac{\partial N_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_4(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_7(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{0x} = \left\langle N'_1, N'_4, N'_7 \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

La rotation :

$$\theta(x) = -\frac{dw(x)}{dx} = \left\langle -N'_2, -N'_3, -N'_5, -N'_6, -N'_8, -N'_9 \right\rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Et la courbure :  $\varphi(x) = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \langle -N_2'', -N_3'', -N_5'', -N_6'', -N_8'', -N_9'' \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$

la relation entre les déformations ( $\varepsilon_{0x}, \varphi$ ) et les déplacements nodaux s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & N_4' & 0 & 0 & N_7' & 0 & 0 \\ 0 & -N_2'' & -N_3'' & 0 & -N_5'' & -N_6'' & 0 & -N_8'' & -N_9'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Où plus simplement :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varphi \end{Bmatrix} = [B]\{u\} \dots \dots \dots (85)$$

Avec :  $[B] = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & N_4' & 0 & 0 & N_7' & 0 & 0 \\ 0 & -N_2'' & -N_3'' & 0 & -N_5'' & -N_6'' & 0 & -N_8'' & -N_9'' \end{bmatrix}$

et :  $\{u\} = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ u_3 \ w_3 \ \theta_3\}$

**8.2.3. Calcul de la matrice de rigidité par intégration numérique :**

$$[K]_e = \int_{-l/2}^{+l/2} [B(x)]^T [D(x)] [B(x)] dx = \frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi$$

La matrice  $[K]_e$  est évaluée par intégration numérique :

$$\int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi = \sum_{i=1}^n [B(\xi_i)]^T [D(\xi_i)] [B(\xi_i)] \alpha_i$$

Ou:  $\begin{cases} n : \text{nombre de point de Gauss} \\ \xi_i : \text{Abscisse du point de Gauss } i \\ \alpha_i : \text{Poids d'intégration au point de Gauss } i \end{cases}$

Dans notre cas, on utilise cinq points de Gauss n=5. La position est les coordonnées de ces points dans l'élément de référence sont données dans la fig.43. Les coordonnées de ces points et leur poids se trouvent dans le tableau 2.

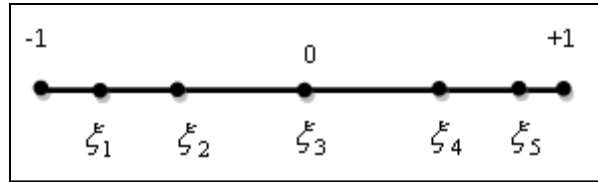


Figure 43: Représentation graphique des abscisses des points de Gauss.

Tableau 2: Abscisse et poids d'intégration de Gauss utilisé pour l'intégration numérique de l'élément à trois nœuds.

Les Abscisse du point de Gauss	Les poids d'intégration au point de Gauss i
$\xi_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{5+4\sqrt{5/14}}$	$\alpha_1 = \frac{161}{450} - \frac{13}{180\sqrt{5/14}}$
$\xi_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{5-4\sqrt{5/14}}$	$\alpha_2 = \frac{161}{450} + \frac{13}{180\sqrt{5/14}}$
$\xi_3 = 0$	$\alpha_3 = 128/225$
$\xi_4 = -\xi_2$	$\alpha_4 = \alpha_2$
$\xi_5 = -\xi_1$	$\alpha_5 = \alpha_1$

**Calcul des expressions des N<sub>i</sub>' et des N<sub>i</sub>'':**

On a :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Dans notre cas :

$$\xi = \frac{2x}{l} \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{l}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{2}{l} \rightarrow \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} \left(\frac{2}{l}\right)^2$$

Donc les expressions des  $N_i'$  sont données comme suit :

$$\begin{cases} N_1(\xi) = -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \rightarrow N_1'(\xi) = \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \frac{2}{l} \\ N_4(\xi) = 1 - \xi^2 \rightarrow N_4'(\xi) = (-2\xi) \frac{2}{l} \\ N_7(\xi) = \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \rightarrow N_7'(\xi) = \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \frac{2}{l} \end{cases}$$

Et pour les expressions des  $N_i''$  :

$$\begin{cases} N_2(\xi) = \xi^2 - \frac{5}{4}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^4 + \frac{3}{4}\xi^5 \rightarrow N_2''(\xi) = \left(15\xi^3 - 6\xi^2 - \frac{15}{2}\xi + 2\right) \left(\frac{2}{l}\right)^2 \\ N_3(\xi) = \frac{l}{8}[\xi^2 - \xi^3 - \xi^4 + \xi^5] \rightarrow N_3''(\xi) = \left(\frac{l}{8}\right) (20\xi^3 - 12\xi^2 - 6\xi + 2) \left(\frac{2}{l}\right)^2 \\ N_5(\xi) = 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \rightarrow N_5''(\xi) = (12\xi^2 - 4) \left(\frac{2}{l}\right)^2 \\ N_6(\xi) = \frac{l}{2}[\xi - 2\xi^3 + \xi^5] \rightarrow N_6''(\xi) = \left(\frac{l}{2}\right) (20\xi^3 - 12\xi) \left(\frac{2}{l}\right)^2 \\ N_8(\xi) = \xi^2 + \frac{5}{4}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^4 - \frac{3}{4}\xi^5 \rightarrow N_8''(\xi) = \left(-15\xi^3 - 6\xi^2 + \frac{15}{2}\xi + 2\right) \left(\frac{2}{l}\right)^2 \\ N_9(\xi) = \frac{l}{8}[-\xi^2 - \xi^3 + \xi^4 + \xi^5] \rightarrow N_9''(\xi) = \left(\frac{l}{8}\right) (20\xi^3 + 12\xi^2 - 6\xi - 2) \left(\frac{2}{l}\right)^2 \end{cases}$$

### 8.3.Élément poutre à quatre nœuds (12 ddl):

#### 8.3.1. Calcul des fonctions de forme :

Pour la discrétisation des déplacements On utilise des éléments finis poutres à 4 nœuds et à 3 d.d.l par nœud (Figure 44).

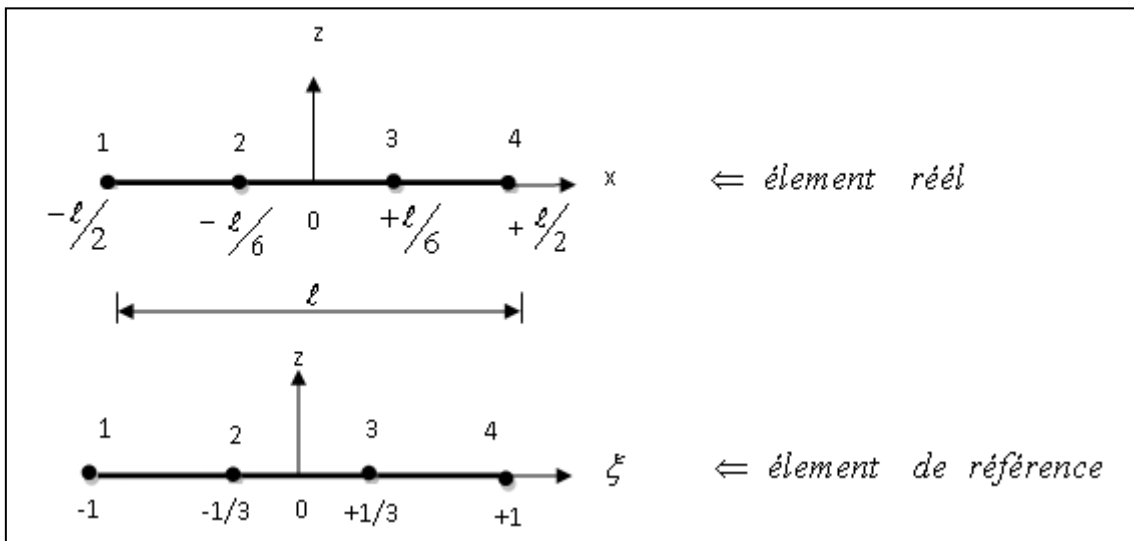


Figure 44: Élément fini à quatre nœuds.

Le déplacement longitudinal  $u_0(x)$  au niveau de l'axe de référence est approximé par des fonctions d'interpolation de type Lagrange de degré 3, dans la base polynomiale.

$$u_0(x) = N_1 u_1 + N_4 u_2 + N_7 u_3 + N_{10} u_4 \dots \dots \dots (86)$$

Où  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  sont les valeurs de déplacement longitudinal au 1,2, 3 et 4 respectivement.

Avec :

$$\begin{cases} N_1(x) = -\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) \\ N_4(x) = -\left(\frac{27}{2}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{27}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right) + \left(\frac{9}{16}\right) \\ N_7(x) = -\left(\frac{27}{2}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{27}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right) + \left(\frac{9}{16}\right) \\ N_{10}(x) = \left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) \end{cases}$$

Où encore :

$$\begin{cases} N_1(\xi) = -\left(\frac{9}{2}\right)\xi^3 + \left(\frac{9}{4}\right)\xi^2 + \left(\frac{1}{8}\right)\xi - \left(\frac{1}{16}\right) \\ N_4(\xi) = -\left(\frac{27}{2}\right)\xi^3 - \left(\frac{9}{4}\right)\xi^2 - \left(\frac{27}{8}\right)\xi + \left(\frac{9}{16}\right) \\ N_7(\xi) = -\left(\frac{27}{2}\right)\xi^3 - \left(\frac{9}{4}\right)\xi^2 + \left(\frac{27}{8}\right)\xi + \left(\frac{9}{16}\right) \\ N_{10}(\xi) = \left(\frac{9}{2}\right)\xi^3 + \left(\frac{9}{4}\right)\xi^2 - \left(\frac{1}{8}\right)\xi - \left(\frac{1}{16}\right) \end{cases}$$

Avec :

$$\xi = \frac{x}{l/2} \rightarrow \xi = \frac{2x}{l}$$

La Figure 45 donne la représentation graphique de ces fonctions.

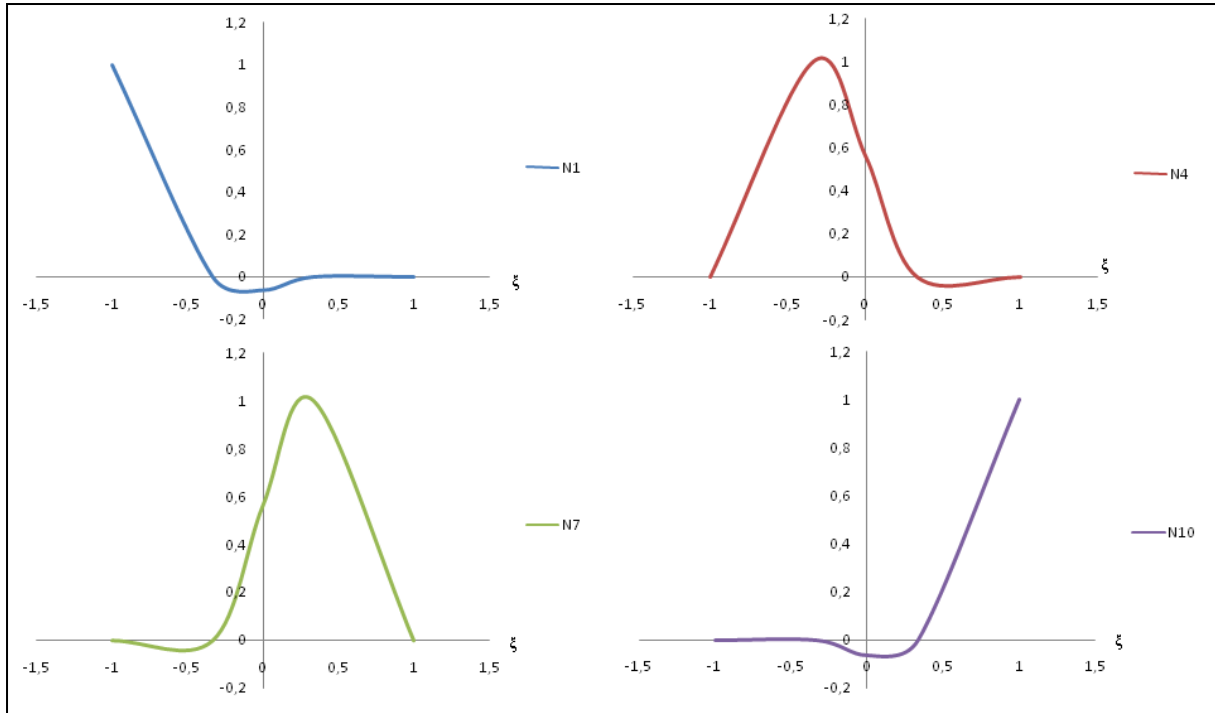


Figure 45 : Graphes des fonctions d'interpolation pour le déplacement longitudinal des éléments à quatre nœuds.

Pour le déplacement transversal  $w(x)$ , on utilise des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré 7 dans la base polynomiale.

$$w(x) = N_2 w_1 + N_3 \theta_1 + N_5 w_2 + N_6 \theta_2 + N_8 w_3 + N_9 \theta_3 + N_{11} w_4 + N_{12} \theta_4 \dots \dots \dots (87)$$

Où les fonctions d'interpolation sont données par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2(x) = \left(\frac{13}{512}\right) - \left(\frac{15}{256}\right)\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{243}{128}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{281}{64}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{1215}{32}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \left(\frac{1413}{16}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^5 - \left(\frac{729}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^6 + \left(\frac{891}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^7 \\ N_3(x) = l \left[ \left(\frac{1}{512}\right) - \left(\frac{1}{256}\right)\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{19}{128}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{19}{64}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{99}{32}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \left(\frac{99}{16}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^5 - \left(\frac{81}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^6 + \left(\frac{81}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^7 \right] \\ N_5(x) = \left(\frac{243}{512}\right) - \left(\frac{1215}{256}\right)\left(\frac{x}{l}\right) + \left(\frac{243}{128}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{4617}{64}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{1215}{32}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \left(\frac{5589}{16}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^5 + \left(\frac{729}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^6 + \left(\frac{2187}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^7 \\ N_6(x) = l \left[ \left(\frac{27}{512}\right) - \left(\frac{81}{256}\right)\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{297}{128}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{891}{64}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{513}{32}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \left(\frac{1539}{16}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^5 - \left(\frac{243}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^6 + \left(\frac{729}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^7 \right] \\ N_8(x) = \left(\frac{243}{512}\right) + \left(\frac{1215}{256}\right)\left(\frac{x}{l}\right) + \left(\frac{243}{128}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{4617}{64}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{1215}{32}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \left(\frac{5589}{16}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^5 + \left(\frac{729}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^6 - \left(\frac{2187}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^7 \\ N_9(x) = l \left[ -\left(\frac{27}{512}\right) - \left(\frac{81}{256}\right)\left(\frac{x}{l}\right) + \left(\frac{297}{128}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{891}{64}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{513}{32}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \left(\frac{1539}{16}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^5 + \left(\frac{243}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^6 + \left(\frac{729}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^7 \right] \\ N_{11}(x) = \left(\frac{13}{512}\right) + \left(\frac{15}{256}\right)\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{243}{128}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{281}{64}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{1215}{32}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \left(\frac{1413}{16}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^5 - \left(\frac{729}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^6 - \left(\frac{891}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^7 \\ N_{12}(x) = l \left[ -\left(\frac{1}{512}\right) - \left(\frac{1}{256}\right)\left(\frac{x}{l}\right) + \left(\frac{19}{128}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{19}{64}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{99}{32}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \left(\frac{99}{16}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^5 + \left(\frac{81}{8}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^6 + \left(\frac{81}{4}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^7 \right] \end{array} \right.$$

Où bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2(\xi) = \left(\frac{13}{512}\right) - \left(\frac{15}{256}\right)\xi - \left(\frac{243}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{281}{64}\right)\xi^3 + \left(\frac{1215}{32}\right)\xi^4 - \left(\frac{1413}{16}\right)\xi^5 - \left(\frac{729}{8}\right)\xi^6 + \left(\frac{891}{4}\right)\xi^7 \\ N_3(\xi) = l \left[ \left(\frac{1}{512}\right) - \left(\frac{1}{256}\right)\xi - \left(\frac{19}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{19}{64}\right)\xi^3 + \left(\frac{99}{32}\right)\xi^4 - \left(\frac{99}{16}\right)\xi^5 - \left(\frac{81}{8}\right)\xi^6 + \left(\frac{81}{4}\right)\xi^7 \right] \\ N_5(\xi) = \left(\frac{243}{512}\right) - \left(\frac{1215}{256}\right)\xi + \left(\frac{243}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{4617}{64}\right)\xi^3 + \left(\frac{1215}{32}\right)\xi^4 - \left(\frac{5589}{16}\right)\xi^5 + \left(\frac{729}{8}\right)\xi^6 + \left(\frac{2187}{4}\right)\xi^7 \\ N_6(\xi) = l \left[ \left(\frac{27}{512}\right) - \left(\frac{81}{256}\right)\xi - \left(\frac{297}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{891}{64}\right)\xi^3 + \left(\frac{513}{32}\right)\xi^4 - \left(\frac{1539}{16}\right)\xi^5 - \left(\frac{243}{8}\right)\xi^6 + \left(\frac{729}{4}\right)\xi^7 \right] \\ N_8(\xi) = \left(\frac{243}{512}\right) + \left(\frac{1215}{256}\right)\xi + \left(\frac{243}{128}\right)\xi^2 - \left(\frac{4617}{64}\right)\xi^3 - \left(\frac{1215}{32}\right)\xi^4 + \left(\frac{5589}{16}\right)\xi^5 + \left(\frac{729}{8}\right)\xi^6 - \left(\frac{2187}{4}\right)\xi^7 \\ N_9(\xi) = l \left[ -\left(\frac{27}{512}\right) - \left(\frac{81}{256}\right)\xi + \left(\frac{297}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{891}{64}\right)\xi^3 - \left(\frac{513}{32}\right)\xi^4 - \left(\frac{1539}{16}\right)\xi^5 + \left(\frac{243}{8}\right)\xi^6 + \left(\frac{729}{4}\right)\xi^7 \right] \\ N_{11}(\xi) = \left(\frac{13}{512}\right) + \left(\frac{15}{256}\right)\xi - \left(\frac{243}{128}\right)\xi^2 - \left(\frac{281}{64}\right)\xi^3 + \left(\frac{1215}{32}\right)\xi^4 + \left(\frac{1413}{16}\right)\xi^5 - \left(\frac{729}{8}\right)\xi^6 - \left(\frac{891}{4}\right)\xi^7 \\ N_{12}(\xi) = l \left[ -\left(\frac{1}{512}\right) - \left(\frac{1}{256}\right)\xi + \left(\frac{19}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{19}{64}\right)\xi^3 - \left(\frac{99}{32}\right)\xi^4 - \left(\frac{99}{16}\right)\xi^5 + \left(\frac{81}{8}\right)\xi^6 + \left(\frac{81}{4}\right)\xi^7 \right] \end{array} \right.$$

Avec :

$w_1, w_2, w_3$  et  $w_4$  : les valeurs de déplacement transversal aux nœuds 1, 2, 3 et 4 respectivement.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$  et  $\theta_4$  : les valeurs de la rotation aux nœuds 1,2, 3 et 4 respectivement.

La fig.46 donne la représentation graphique de ces fonctions.

### 8.3.2. Calcul des déformations en fonction des fonctions de forme :

La déformation longitudinale, au niveau de l'axe de référence de l'élément est donnée par :

$$\varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} = \left\langle \frac{\partial N_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_4(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_7(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_{10}(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{0x} = \left\langle N'_1, N'_4, N'_7, N'_{10} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

La rotation :

$$\theta(x) = -\frac{dw(x)}{dx} = \left\langle -N'_2, -N'_3, -N'_5, -N'_6, -N'_8, -N'_9, -N'_{11}, -N'_{12} \right\rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ w_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

Et la courbure :

$$\phi(x) = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \langle -N_2'', -N_3'', -N_5'', -N_6'', -N_8'', -N_9'', -N_{11}'', -N_{12}'' \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ w_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

la relation entre les déformations ( $\epsilon_{0x}, \phi$ ) et les déplacements nodaux s'écrit alors :

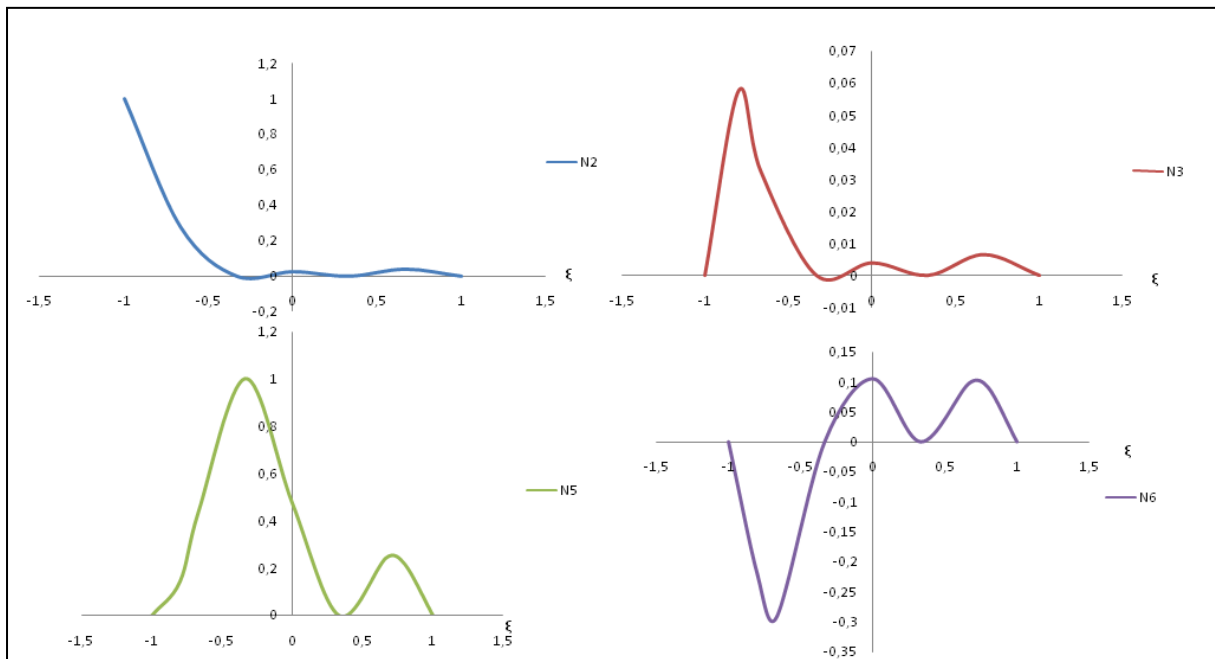
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & N_4' & 0 & 0 & N_7' & 0 & 0 & N_{10}' & 0 & 0 \\ 0 & -N_2'' & -N_3'' & 0 & -N_5'' & -N_6'' & 0 & -N_8'' & -N_9'' & 0 & -N_{11}'' & -N_{12}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ w_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

Où plus simplement :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} = [B]\{u\} \dots \dots \dots (88)$$

Avec :  $[B] = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & N_4' & 0 & 0 & N_7' & 0 & 0 & N_{10}' & 0 & 0 \\ 0 & -N_2'' & -N_3'' & 0 & -N_5'' & -N_6'' & 0 & -N_8'' & -N_9'' & 0 & -N_{11}'' & -N_{12}'' \end{bmatrix}$

et :  $\{u\} = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ u_3 \ w_3 \ \theta_3 \ w_4 \ \theta_4\}$



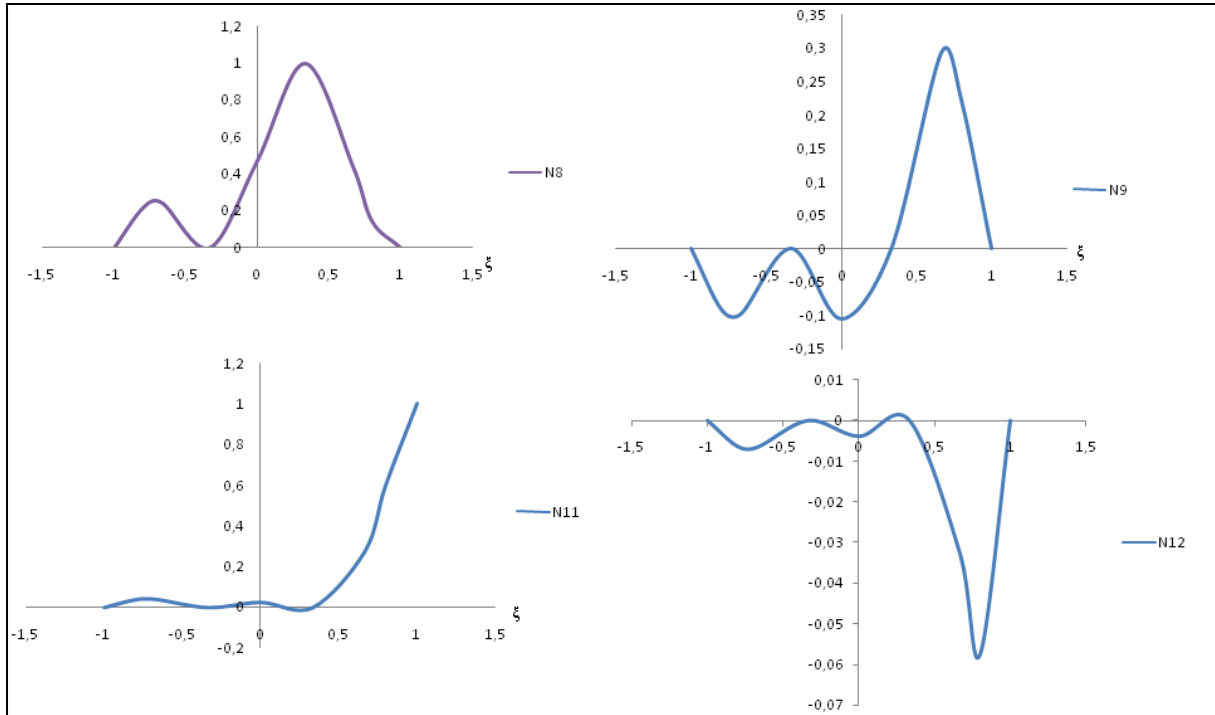


Figure 46 : Graphe des fonctions d’interpolation pour le déplacement transversal des éléments à quatre nœuds.

**8.3.3. Calcul de la matrice de rigidité par intégration numérique :**

$$[K]_e = \int_{-l/2}^{+l/2} [B(x)]^T [D(x)] [B(x)] dx = \frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi$$

La matrice  $[K]_e$  est évaluée par intégration numérique :

$$\int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi = \sum_{i=1}^n [B(\xi_i)]^T [D(\xi_i)] [B(\xi_i)] \alpha_i$$

Ou:  $\left\{ \begin{array}{l} n : \text{nombre de point de Gauss} \\ \xi_i : \text{Abscisse du point de Gauss } i \\ \alpha_i : \text{Poids d'intégration au point de Gauss } i \end{array} \right.$

Dans notre cas, on utilise sept points de Gauss n=7

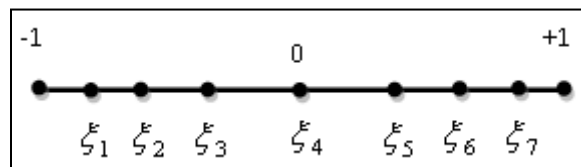


Figure 47: Représentation graphique des abscisses des points de Gauss.

Tableau 3 : abscisse et poids d'intégration de Gauss utilisé pour l'intégration numérique de l'élément à quatre nœuds.

Les Abscisse du point de Gauss	Les poids d'intégration au point de Gauss i
$\xi_1 = -0.949107912342759$	$\alpha_1 = 0.129484966168870$
$\xi_2 = -741531185599394$	$\alpha_2 = 0.279705391489277$
$\xi_3 = -0.405845151377397$	$\alpha_3 = 0.381830050505119$
$\xi_4 = 0$	$\alpha_4 = 0.417959183673469$
$\xi_5 = -\xi_3$	$\alpha_5 = \alpha_3$
$\xi_6 = -\xi_2$	$\alpha_6 = \alpha_2$
$\xi_7 = -\xi_1$	$\alpha_7 = \alpha_1$

**Calcul des expressions des  $N'_i$  et des  $N''_i$  :**

On a :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Dans notre cas :

$$\xi = \frac{2x}{l} \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{l}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{2}{l} \rightarrow \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} \left(\frac{2}{l}\right)^2$$

Donc les expressions des  $N'_i$  sont données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi) = -\left(\frac{9}{2}\right)\xi^3 + \left(\frac{9}{4}\right)\xi^2 + \left(\frac{1}{8}\right)\xi - \left(\frac{1}{16}\right) \rightarrow N'_1(\xi) = \left[-\left(\frac{27}{16}\right)\xi^2 + \left(\frac{9}{8}\right)\xi - \left(\frac{1}{16}\right)\right] \frac{2}{l} \\ N_4(\xi) = -\left(\frac{27}{2}\right)\xi^3 - \left(\frac{9}{4}\right)\xi^2 - \left(\frac{27}{8}\right)\xi + \left(\frac{9}{16}\right) \rightarrow N'_4(\xi) = \left[\left(\frac{81}{16}\right)\xi^2 - \left(\frac{9}{8}\right)\xi - \left(\frac{27}{16}\right)\right] \frac{2}{l} \\ N_7(\xi) = -\left(\frac{27}{2}\right)\xi^3 - \left(\frac{9}{4}\right)\xi^2 + \left(\frac{27}{8}\right)\xi + \left(\frac{9}{16}\right) \rightarrow N'_7(\xi) = \left[-\left(\frac{81}{16}\right)\xi^2 - \left(\frac{9}{8}\right)\xi + \left(\frac{27}{16}\right)\right] \frac{2}{l} \\ N_{10}(\xi) = \left(\frac{9}{2}\right)\xi^3 + \left(\frac{9}{4}\right)\xi^2 - \left(\frac{1}{8}\right)\xi - \left(\frac{1}{16}\right) \rightarrow N'_{10}(\xi) = \left[\left(\frac{27}{16}\right)\xi^2 + \left(\frac{9}{8}\right)\xi - \left(\frac{1}{16}\right)\right] \frac{2}{l} \end{array} \right.$$

Et pour les expressions des  $N''_i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2''(\xi) = -\left(\frac{4}{l^2}\right) \left[ -\left(\frac{243}{256}\right) + \left(\frac{15}{256}\right)\xi + \left(\frac{3645}{128}\right)\xi^2 - \left(\frac{7065}{128}\right)\xi^3 - \left(\frac{10935}{256}\right)\xi^4 + \left(\frac{18711}{256}\right)\xi^5 \right] \\ N_3''(\xi) = \frac{4}{l} \left[ \left(\frac{19}{256}\right) - \left(\frac{57}{256}\right)\xi - \left(\frac{297}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{495}{128}\right)\xi^3 + \left(\frac{1215}{256}\right)\xi^4 - \left(\frac{1701}{256}\right)\xi^5 \right] \\ N_5''(\xi) = \left(\frac{4}{l^2}\right) \left[ \left(\frac{243}{256}\right) + \left(\frac{13851}{256}\right)\xi - \left(\frac{3645}{128}\right)\xi^2 - \left(\frac{27945}{128}\right)\xi^3 + \left(\frac{10935}{256}\right)\xi^4 + \left(\frac{45927}{256}\right)\xi^5 \right] \\ N_6(\xi) = \left(\frac{4}{l}\right) \left[ \left(\frac{297}{256}\right) - \left(\frac{2673}{256}\right)\xi - \left(\frac{1539}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{7695}{128}\right)\xi^3 + \left(\frac{3645}{256}\right)\xi^4 - \left(\frac{15309}{256}\right)\xi^5 \right] \\ N_8(\xi) = \left(\frac{4}{l^2}\right) \left[ \left(\frac{243}{256}\right) + \left(\frac{13851}{256}\right)\xi + \left(\frac{3645}{128}\right)\xi^2 - \left(\frac{27945}{128}\right)\xi^3 - \left(\frac{10935}{256}\right)\xi^4 + \left(\frac{45927}{256}\right)\xi^5 \right] \\ N_9(\xi) = \left(\frac{4}{l}\right) \left[ \left(\frac{297}{256}\right) + \left(\frac{2673}{256}\right)\xi - \left(\frac{1539}{128}\right)\xi^2 - \left(\frac{7695}{128}\right)\xi^3 + \left(\frac{3645}{256}\right)\xi^4 + \left(\frac{15309}{256}\right)\xi^5 \right] \\ N_{11}(\xi) = -\left(\frac{4}{l^2}\right) \left[ \left(\frac{243}{256}\right) + \left(\frac{843}{256}\right)\xi - \left(\frac{3645}{128}\right)\xi^2 - \left(\frac{7065}{128}\right)\xi^3 + \left(\frac{10935}{256}\right)\xi^4 + \left(\frac{18711}{256}\right)\xi^5 \right] \\ N_{12}(\xi) = \frac{4}{l} \left[ \left(\frac{19}{256}\right) + \left(\frac{57}{256}\right)\xi - \left(\frac{297}{128}\right)\xi^2 - \left(\frac{495}{128}\right)\xi^3 + \left(\frac{1215}{256}\right)\xi^4 + \left(\frac{1701}{256}\right)\xi^5 \right] \end{array} \right.$$

**9. Discrétisation de la section transversale**

Pour la discrétisation de la section transversale, on adopte l’approche multi couches qui signifie la subdivision de la section totale en un nombre finis des couches horizontales, pour permettre d’évaluer l’état de contraintes et des déformation et de déterminer la matrice de rigidité et des efforts dans la section droite et dans l’élément poutre dans sa totalité.

Les quantités  $\overline{EA}$ ,  $\overline{ES}$  et  $\overline{EI}$  sont évaluées en divisant la section transversale en un certain nombre de trapèze. Chaque trapèze est subdivisé en un certain nombre de couches horizontales de module  $E_j$ , d’épaisseur  $h_j$  et de largeur  $b_j$ , l’origine est placée en bas de la section (voir figure 48).

Soit  $n_c$  le nombre total de couches horizontales. Les expressions des différentes rigidités équivalentes de la section s’écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{EA} &= \int_s E ds = \sum_{j=1}^{n_c} E_j \cdot b_j \cdot h_j \\ \overline{ES} &= \int_s E \cdot z ds = \sum_{j=1}^{n_c} E_j \cdot b_j \cdot h_j \cdot z_j \dots\dots\dots (89) \\ \overline{EI} &= \int_{sE} E \cdot z^2 ds = \sum_{j=1}^{n_c} E_j \cdot b_j \cdot h_j \cdot z_j^2 \end{aligned}$$

$z_j$ : ordonnée du milieu de la couche j par rapport à l’axe de référence.

$b_j$ : largeur du milieu de la couche j.

$h_j$ : hauteur de la couche j.

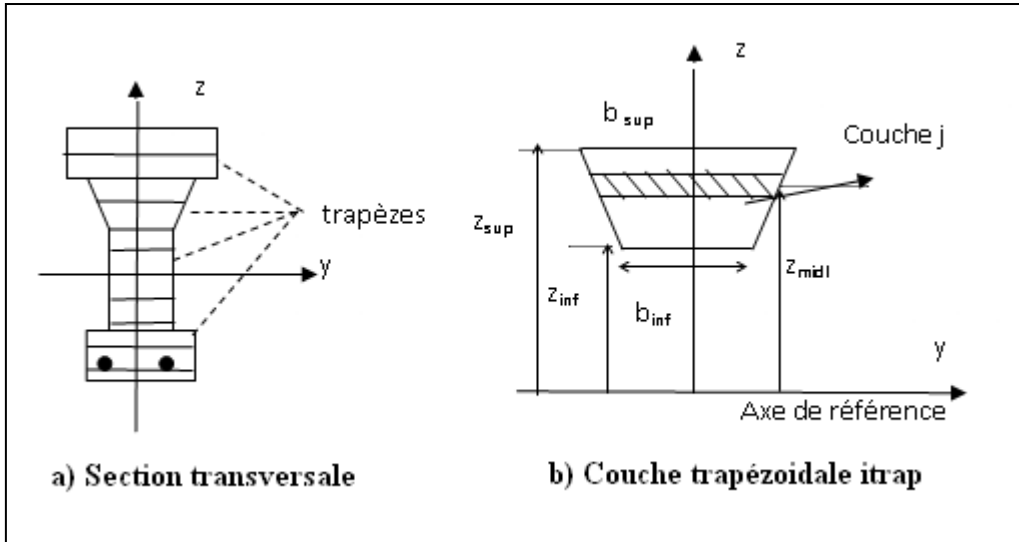


Figure 48 : Discretisation de la section transversale en couches trapézoïdales.

Sachant que chaque trapèze est caractérisé par :

$b_{inf}$  = largeur inférieure du trapèze.

$b_{sup}$  = largeur supérieure du trapèze.

$z_{inf}$  = position inférieure par rapport à l'axe de référence.

$z_{sup}$  = position supérieure par rapport à l'axe de référence.

Pour chaque couche, on considère la déformation au milieu de la couche.

La position de la couche en cours par rapport à l'axe de référence est définie par  $z_{midl}$ .

$$z_{midl} = z_{inf} + h_{layr} (j - 0.5)$$

Où :  $h_{layr}$  est l'épaisseur de la couche  $j$ .

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + z\phi \text{ D'après l'équation (64).}$$

La largeur au niveau du milieu de la couche est :

$$b_{layr} = b_{inf} + (b_{sup} - b_{inf}) \frac{h_{layr}}{h_{trap}} (j - 0.5) \dots\dots\dots (90).$$

Où  $h_{trap}$  est la hauteur du trapèze en cours ( $i_{trap}$ ).

**10. Évaluation du vecteur des forces résiduelles  $\{R\}_e$  pour chaque élément :**

D'après la relation (82) du P.T.V, on a :

$$\left\{ \int_l \{\delta\gamma\}^T \{\sigma\} dx - \int_l \{\delta d\}^T \{f\} dx = 0 \dots \dots \dots (91) \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \{\sigma\} = [D]\{\gamma\} \end{matrix} \right.$$

$$\{\gamma\} = [B]\{u\} \quad \text{et} \quad \{d\} = [N]\{u\}$$

Qui peut s'écrire encore sous la forme :

$$\int_l \{\delta\gamma\}^T \left\{ \begin{matrix} \int_s \sigma_x ds \\ \int_s \sigma_x z ds \end{matrix} \right\} dx - \int_l \{\delta d\}^T \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx = 0 \dots \dots \dots (92)$$

Ou :  $\{\delta\gamma\}^T = [B]^T \{\delta u\}^T$

$\{\delta d\}^T = [N]^T \{\delta u\}^T$

Où  $[B]$  est donné par les relations : (81) pour un élément à deux nœud, (85) pour un élément à trois nœuds et (88) pour un élément à quatre nœuds.

Avec  $\{u\}$  : Vecteur des déplacements nodaux

$[N]$  : Matrice des fonctions d'interpolation (de forme)

En posant :

$$\int_s \sigma_x ds = N(x) \quad \text{Effort normal à l'abscisse } x \text{ de l'élément}$$

$$\int_s \sigma_x \cdot z \cdot ds = M(x) \quad \text{Moment fléchissant à l'abscisse } x \text{ de l'élément}$$

L'expression devient :

$$\int_l \{\delta u\}^T [B]^T \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx - \int_l [N]^T \{\delta u\}^T \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx = 0$$

Ce qui donne :

$$\int_l \{\delta u\}^T [B]^T \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx = \int_l [N]^T \{\delta u\}^T \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx \quad \forall \delta u \dots \dots \dots (93)$$

Ou :

$$\int_l [B]^T \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx = \int_l [N]^T \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx \dots \dots \dots (94)$$

Ou plus simplement :

$$\{p\}_e - \{f\}_e = 0 \dots\dots\dots (95)$$

Avec :

$\{p\}_e$ : Vecteur des forces nodales résultant des efforts intérieurs.

$\{f\}_e$ : Vecteur des forces nodales résultant des efforts réparties appliqués à l'élément en Cours.

**Remarque** : Dans le cas non linéaire, les efforts intérieurs dépendent de la solution  $\{u\}_e$ . A chaque étape de la résolution, il reste des forces résiduelles qu'il faut équilibrer à l'étape suivante :

$$\{p\}_e - \{f\}_e = \{\psi\}_e \neq \{0\}$$

Le processus de calcul non linéaire consiste à rechercher la solution  $\{u\}$  qui rend les forces résiduelles aussi proches que possible de zéro.

### 11. Conclusion :

Cette étude et ces formulations, nous a permis d'enrichir notre programme et de modéliser n'importe quel structure plane d'une façon proche de la réalité surtout dans des zones de forte non linéarité ou il est nécessaire de raffiner le maillage, c'est exactement notre objectif de développer des éléments plus performant pour mieux représenter l'élément et de minimiser les données à introduire pour le traitement.

## **Chapitre III :**

# **Modélisation du comportement non linéaire des matériaux et la résolution numérique.**

---

### **1. Introduction :**

La formulation élément finis de comportement 2D des poutres a été présentée dans le chapitre précédent. Les équations d'équilibre sont d'abord établies dans le cas continu. Elles sont ensuite discrétisées à l'aide des fonctions de forme et les équations d'équilibre sous forme algébrique sont établies, accompagnées de la loi de comportement du matériau. L'objet principal de la thèse est le comportement des structures en béton sous chargement cycliques et monotones en présence de la plasticité et de la fissuration. La loi de comportement contrainte déformation est non linéaire.

L'utilisation des lois de comportement non linéaire des matériaux constituant la structure étudiée, induira une non linéarité dans le comportement global de la structure. L'analyse de cette dernière par éléments finis nécessite l'utilisation d'une méthode incrémentale itérative pour résoudre le système d'équation non linéaire.

Pour cela, ce chapitre a été divisé en deux parties. La première partie présente les différentes lois de comportement des matériaux utilisés, et la deuxième partie présente la méthode de résolution du système d'équations non linéaires. Cette méthode est basée sur une formulation incrémentale de l'équilibre où les équations incrémentales sont résolues par les méthodes itératives de Newton-Raphson. Ci-après les différents modèles utilisés dans la loi de comportement des bétons et des armatures en acier sont présentées. Les relations contraintes déformations sont alors exposées.

## 2. Lois de comportement des matériaux :

### 2.1.Béton :

#### 2.1.1. Comportement monotone (Courbe enveloppe) :

##### 2.1.1.1.Comportement en compression :

Pour le comportement du béton en compression, nous avons choisi quatre lois de comportement à savoir :

##### 2.1.1.1.1. Loi de SARGIN [110]:

C'est la loi préconisée par BPEL 91. Elle admet un comportement élastique non linéaire dont la courbe contrainte déformation est définie par :

$$\sigma = f_{bc} \frac{k \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}}\right) + (k' - 1) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}}\right)^2}{1 + (k - 2) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}}\right) + k' \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}}\right)^2} \dots \dots \dots (96)$$

$$\text{avec : } k = \frac{E_{b0} \varepsilon_{b0}}{f_{bc}}$$

$$\text{et : } \begin{cases} k' = k - 1 & \text{pour } f_{bc} \leq 30 \text{ MPA} \\ k' = 0 & \text{pour } f_{bc} \geq 55 \text{ MPA} \\ k' = (k - 1) \left(\frac{55 - f_{bc}}{25}\right) & \text{pour } 30 \text{ MPA} < f_{bc} < 55 \text{ MPA} \end{cases}$$

Avec :

$f_{bc}$  : Résistance à la compression du béton.

$E_{b0}$  : Module élastique du béton à l'origine.

$\varepsilon_{b0}$  : Déformation correspondant au pic des contraintes.

$k'$  et  $k$  : Paramètres du modèle.

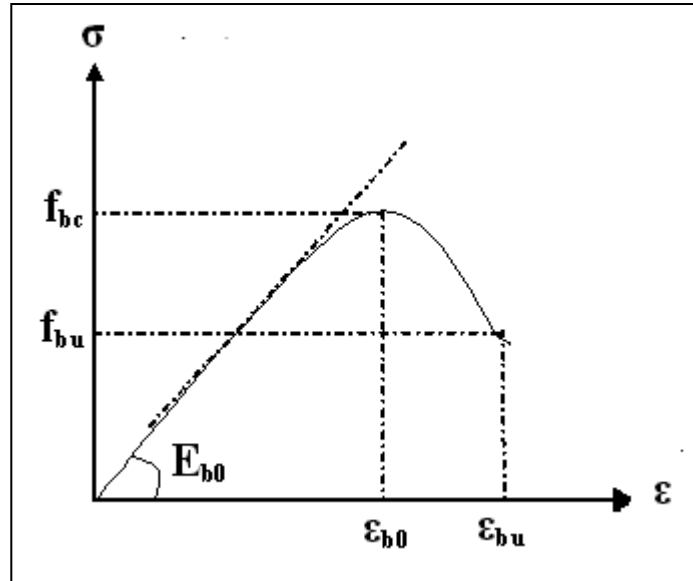


Figure 49 : Courbe contrainte-déformation de Sargin [110].

**2.1.1.1.2. Loi de SARGIN avec branche linéaire :**

C'est la même loi de Sargin [110] pour des déformations inférieures à la déformation qui correspondante au pic des contraintes. Au delà du pic, la loi se présente par une droite qu'est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma = f_{bc} \left[ 1 - \frac{\left(1 - \frac{f_{bu}}{f_{bc}}\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} - 1\right)}{\left(\frac{\varepsilon_{bu}}{\varepsilon_{b0}} - 1\right)} \right] \dots \dots \dots (97)$$

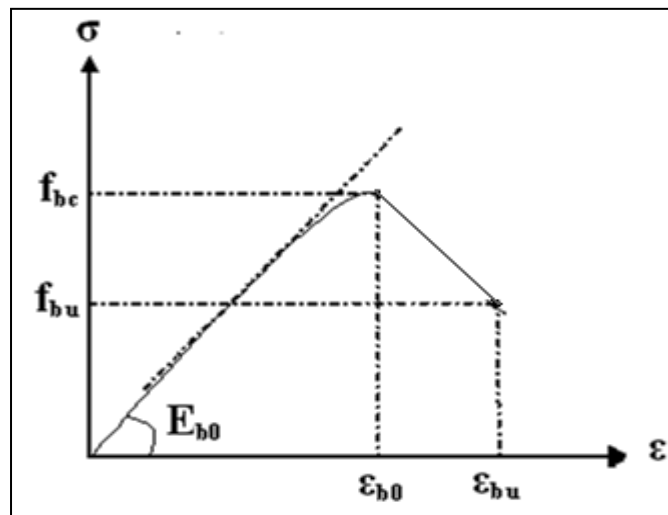


Figure 50 : Courbe contrainte – déformation de la loi de **SARGIN** avec un tronçon droit.

**2.1.1.1.3. Loi de CEB [20]:**

C'est un cas particulier de la loi de Sargin, en posant :  $k = 2$  et  $k' = 0$ . On obtient alors l'expression de la loi sous la forme suivante :

$$\sigma = f_{bc} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (98)$$

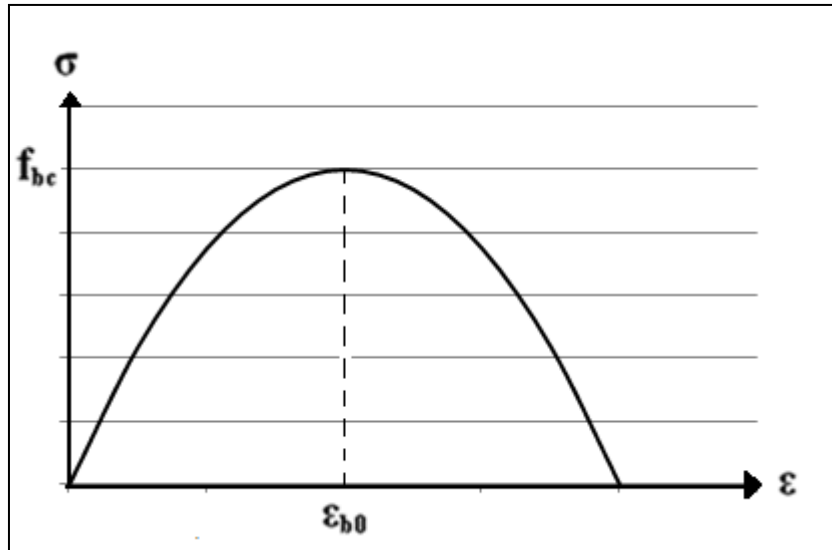


Figure 51 : diagramme contrainte –déformation (loi parabolique) [20]

**2.1.1.1.4. Loi parabole rectangle :**

Cette loi admet une partie parabolique pour les déformations inférieures à la déformation correspondant au pic des contraintes, au delà du pic, la contrainte est supposé constante jusqu'à la déformation ultime  $\varepsilon_{bu}$ . Cette loi de comportement élasto-plastique est modélisée par :

$$\begin{cases} \sigma = f_{bc} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \right)^2 \right] & \text{pour } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{b0} \\ \sigma = f_{bc} & \text{pour } \varepsilon_{b0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{bu} \end{cases} \dots \dots \dots (99)$$

C'est la loi parabole-rectangle adoptée par le règlement BAEL 91 pour le calcul des structures en béton.

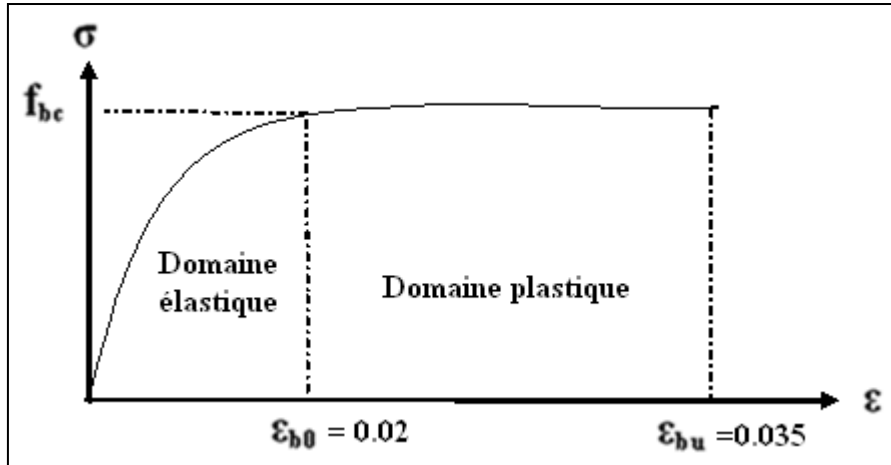


Figure 52 : Courbe contrainte-déformation de la loi parabole-rectangle.

**2.1.1.2. Comportement en traction :**

Pour bien simuler le comportement réel du béton, et le comportement globale de la structure, nous avons pris en considération la contribution non négligeable du béton tendu, cette négligence engendre une sous estimation de la rigidité des éléments de la structure et une sur estimation des déformations. Pour cela notre programme dispose de quatre lois de comportements du béton en traction à savoir :

**2.1.1.2.1. Loi élastique fragile :**

Cette loi a modélisé le béton d'une manière simple, les contraintes sont proportionnelle aux déformations dont la pente correspond au module d'élasticité du béton en compression jusqu'à la contrainte a la traction du béton  $f_{bt}$  (Figure 53). Au delà de cette valeur la contrainte est nulle :

$$\begin{cases} \sigma = E_{b0}\varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{bft} \\ \sigma = 0 & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_{bft} \end{cases} \dots \dots \dots (100)$$

Avec :

$E_{b0}$  : Module d'élasticité du béton à la compression

$f_{bt}$  : Contrainte pic de traction de béton

$\varepsilon_{bft}$  : Déformation correspondante à la contrainte à la traction de béton.

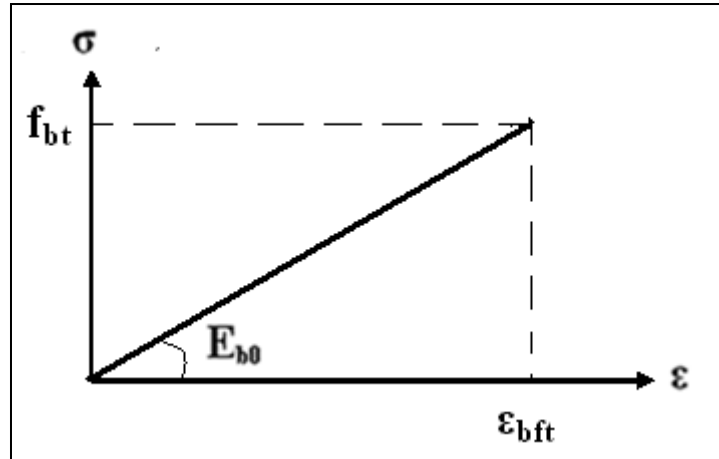


Figure 53 : diagramme contrainte –déformation (élastique-fragile).

**2.1.1.2.2. Loi avec branche descendante linéaire :**

Pour une déformation inférieure à  $\epsilon_{bft}$ , nous avons la même loi élastique fragile présentée ci-dessus. Au delà de cette déformation le présent model a une partie d'adoucissement linéaire décroissante selon une pente  $E_t$  :

$$E_t = \frac{f_{bt}}{\epsilon_{bft} - \epsilon_{btu}} \dots \dots \dots (101)$$

L'équation qui représente le diagramme contrainte déformation s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \sigma = E_{b0}\epsilon & \text{si } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{bft} \\ \sigma = E_t\epsilon & \text{si } \epsilon_{bft} < \epsilon \leq \epsilon_{btu} \end{cases} \dots \dots \dots (102)$$

La Figure 54 donne la représentation graphique de cette loi.

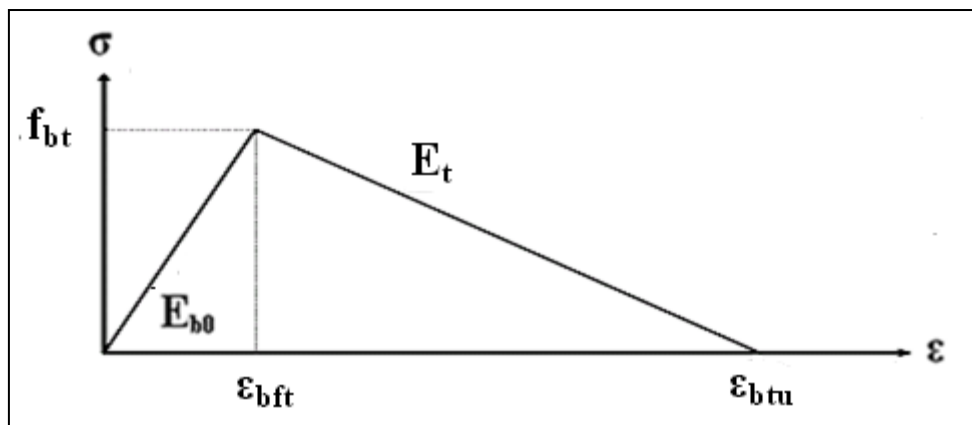


Figure 54 : diagramme contrainte –déformation (Loi élastique adoucissante avec branche décroissante linéaire)

**2.1.1.2.3. Loi de Grelat [50] :**

Avant fissuration Grelat [50] admet une branche linéaire et pour la partie après fissuration, il a représenté la réponse par une branche parabolique décroissante (Figure 54). L'équation de la loi s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = E_{b0}\varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{bft} \\ \sigma = f_{bt} \left( \frac{\varepsilon_{btu} - \varepsilon}{\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{bft}} \right)^2 & \text{si } \varepsilon_{bft} < \varepsilon \leq \varepsilon_{btu} \end{array} \right. \dots \dots \dots (103)$$

Avec :

$E_{b0}$  : Module d'élasticité longitudinale du béton.

$\varepsilon_{bft}$  : Déformation de traction correspondant à  $f_{bt}$  .

$\varepsilon_{btu}$  : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendus.

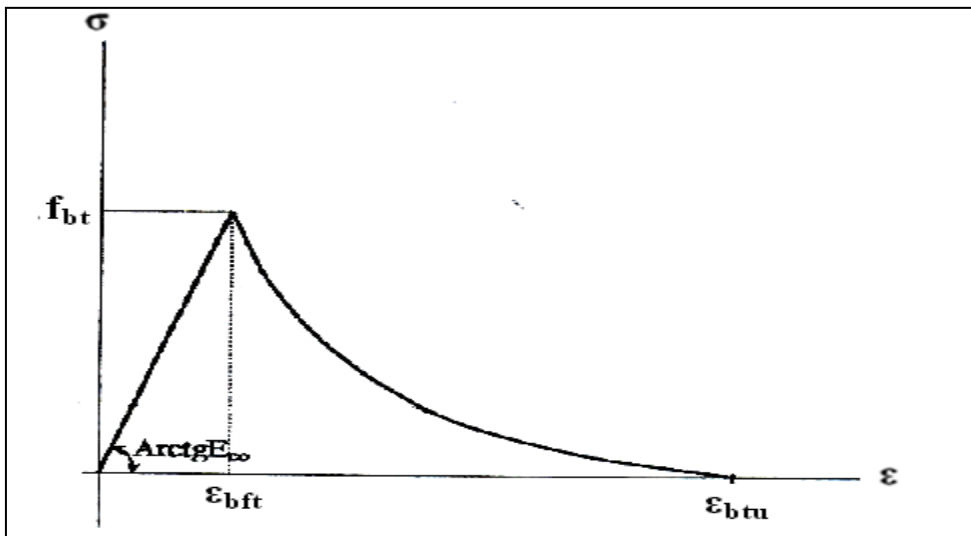


Figure 55 : diagramme contrainte déformation (**Loi de Grelat**).[50]

**2.1.1.2.4. Loi de Quast [96]:**

Quast [96] a pris en compte la plastification des aciers dans l'élaboration de la loi fictive du béton en traction. Avant fissuration du béton, une forme parabolique a été admise. Après fissuration du béton, une branche linéaire est adoptée, sauf que la valeur de la résistante du béton à la traction est en fonction de la déformation de l'acier le plus tendu. Les relations contraintes déformations utilisées sont données ci-dessous.

$$\begin{cases} \sigma = f_{bt1} \left[ 1 - \left( \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon_{bft}} \right)^2 \right] & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_{bft} \dots \dots \dots (104) \\ \sigma = f_{bt1} & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_{bft} \end{cases}$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} f_{bt1} = f_{bt} & \text{si } \varepsilon_{at} \leq \varepsilon_{bft} \\ f_{bt1} = f_{bt} \left( \frac{\varepsilon_{at} - \varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ae} - \varepsilon_{bft}} \right) & \text{si } \varepsilon_{bft} < \varepsilon_{at} \leq \varepsilon_{btu} \\ f_{bt1} = 0 & \text{si } \varepsilon_{at} > \varepsilon_{btu} \end{cases}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ae} = \frac{f_{ae}}{E_a} : \text{La déformation correspondant a la limite d'élasticité de l'acier } f_{ae} \\ E_a : \text{module d'élasticité de l'acier.} \\ \varepsilon_{at} : \text{Déformation de l'acier le plus tendu.} \end{array} \right.$$

**2.1.1.2.5. Loi de Vecchio [121]:**

Vecchio a décomposé la réponse du béton en deux parties, avant fissuration et après fissuration. Avant fissuration, la réponse du béton est modélisée comme suit:

$$f_{c1} = E_c \varepsilon_{c1} \quad \text{si } 0 < \varepsilon_{c1} < \varepsilon_{cr} \dots \dots \dots (105)$$

$$\text{ou: } \begin{cases} E_c = \frac{2f_c}{\varepsilon_0} \\ \varepsilon_{cr} = \frac{f_t}{E_c} \\ f_t = 0.65(f_c)^{0.33} \end{cases}$$

Après fissuration, la relation suivante est adoptée :

$$f_{c1} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{C_t \varepsilon_{c1}}} \dots \dots \dots (106)$$

Ou  $C_t = 200$  pour des petits éléments et pour le cas contraire  $C_t = 500$ . La figure 56 donne la représentation graphique de cette loi.

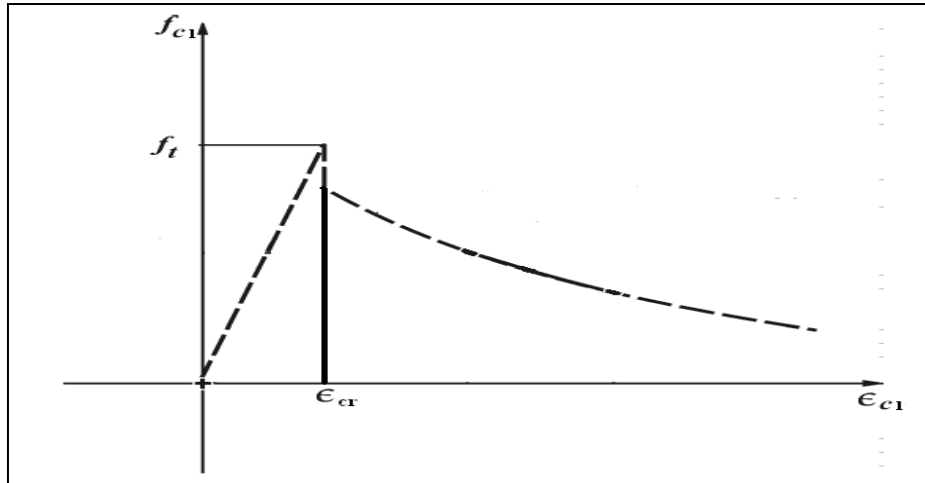


Figure 56 : Courbe contrainte déformation Vecchio [121].

**2.1.2. Comportement cyclique :**

Le modèle uni-axial proposé est basé sur des observations expérimentales et permet de décrire correctement le comportement non linéaire du béton sous chargement cyclique, à savoir:

- a. la dégradation de la rigidité.
- b. l'apparition des déformations résiduelles.
- c. la restitution de la raideur en cours d'un chargement cyclique alterné.

Suivant la figure 57 et jusqu'à une nouvelle inversion du chargement, le béton suit la loi non linéaire en compression du modèle Sargin [110] (**Courbe enveloppe, Trajet 1**).

Quand la sollicitation change du signe en présence d'une décharge, le béton se décharge selon une droite de pente  $E_2$  passant par un point focal de coordonnée  $(f_{bc}, \epsilon_0)$  comme l'ont suggéré Park et coll [91] et cela conformément aux essais de Ramtani [100] qui montrent que le module à la décharge est différent du module initial  $E_0$  du fait de l'endommagement du béton comprimé. (**Décharge endommagé,  $E_2 \leq E_{b0}$ , Trajet 2**) :

$$E_2(i) = \frac{f_{bc} - \sigma_{i-1}}{\frac{f_{bc}}{E_{b0}} - \epsilon_{i-1}} \dots \dots \dots (107)$$

La déformation résiduelle est donnée par la formule 108. Elle est approximativement le cinquième de la déformation maximale atteinte lors du chargement selon les essais réalisés par Neild [83] :

$$\epsilon_r(i) = \frac{f_{bc}}{E_{b0}} - \frac{\frac{f_{bc}}{E_{b0}} - \epsilon_{i-1}}{1 - \frac{\sigma_{i-1}}{f_{bc}}} \dots \dots \dots (108)$$

Lorsque le béton est sollicité en traction, nous conservons le module endommagé  $E_2$  calculé précédemment jusqu'à atteindre de la résistance en traction  $f_t$ . Ce constat est conforme aux essais de Morita et Kaku [80] qui montrent que le béton fortement endommagé en compression voit son module diminuer sensiblement en traction. Xudong [126] a constaté que la rigidité de la structure varie avec l'historique du chargement et déchargement. Au delà du pic des contraintes, le béton suit la courbe enveloppe de Grelat [50] (**Trajet 3**).

Lorsque la sollicitation change du signe, la fissure se referme progressivement selon une droite de pente  $E_1$  (Trajet 4), la fissure est supposée complètement fermée pour une contrainte inférieure à  $-f_t$ . Celle-ci la est approximativement la même contrainte que Aslani Farhad [12] a pris en considération ( $\sigma_f=f_c/10$ ). Au delà de cette contrainte on retrouve la droite de pente  $E_2$  de décharge en compression (**Rechargement en compression, Trajet 5**). Dans le cas d'un point initialement tendue on rejoint la loi non linéaire du béton en compression (**Chargement en compression**) :

$$E_{1(i)} = \frac{\sigma_{i-1} + f_{bt}}{\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{p'}} \text{ et } \varepsilon_{p'} = \frac{f_{bc}}{E_{b0}} - \frac{(f_{bc} + f_{bt})}{E_{2(i-1)}} \dots \dots \dots (109)$$

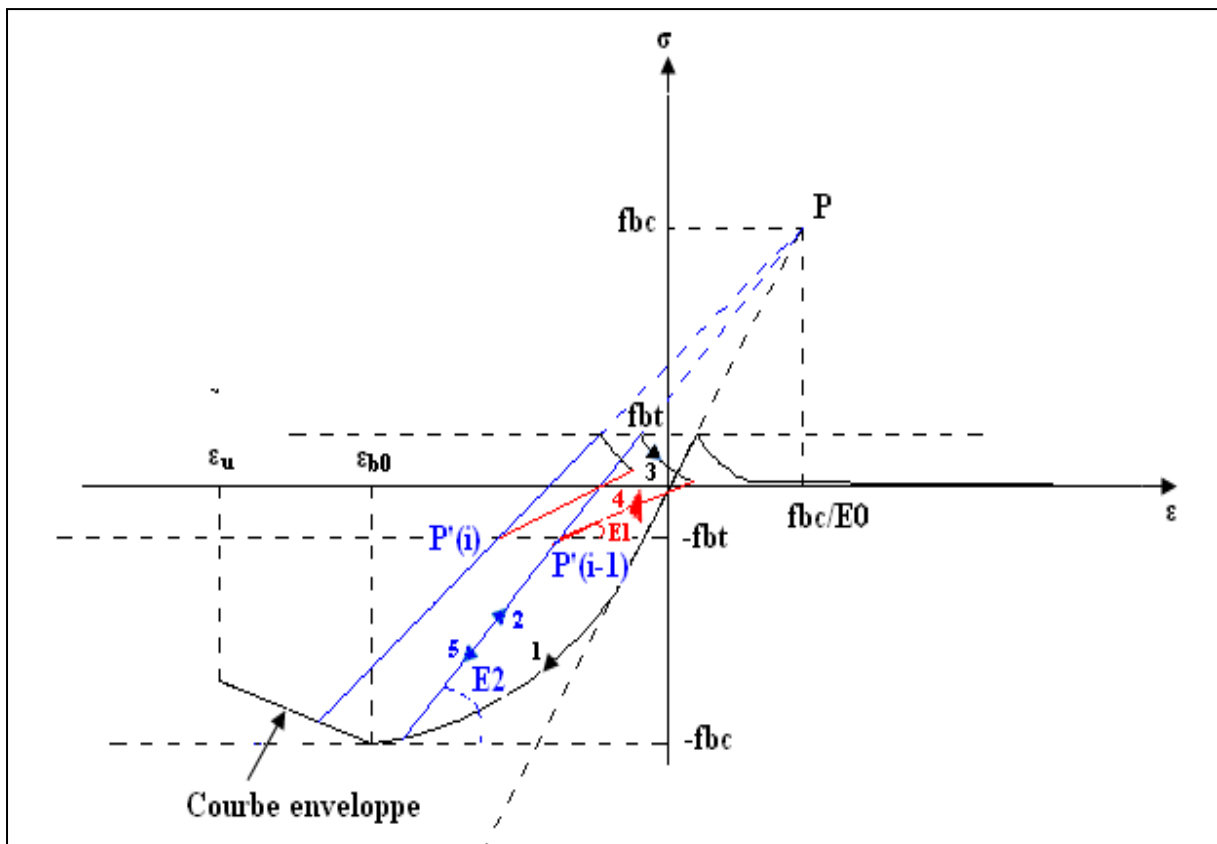
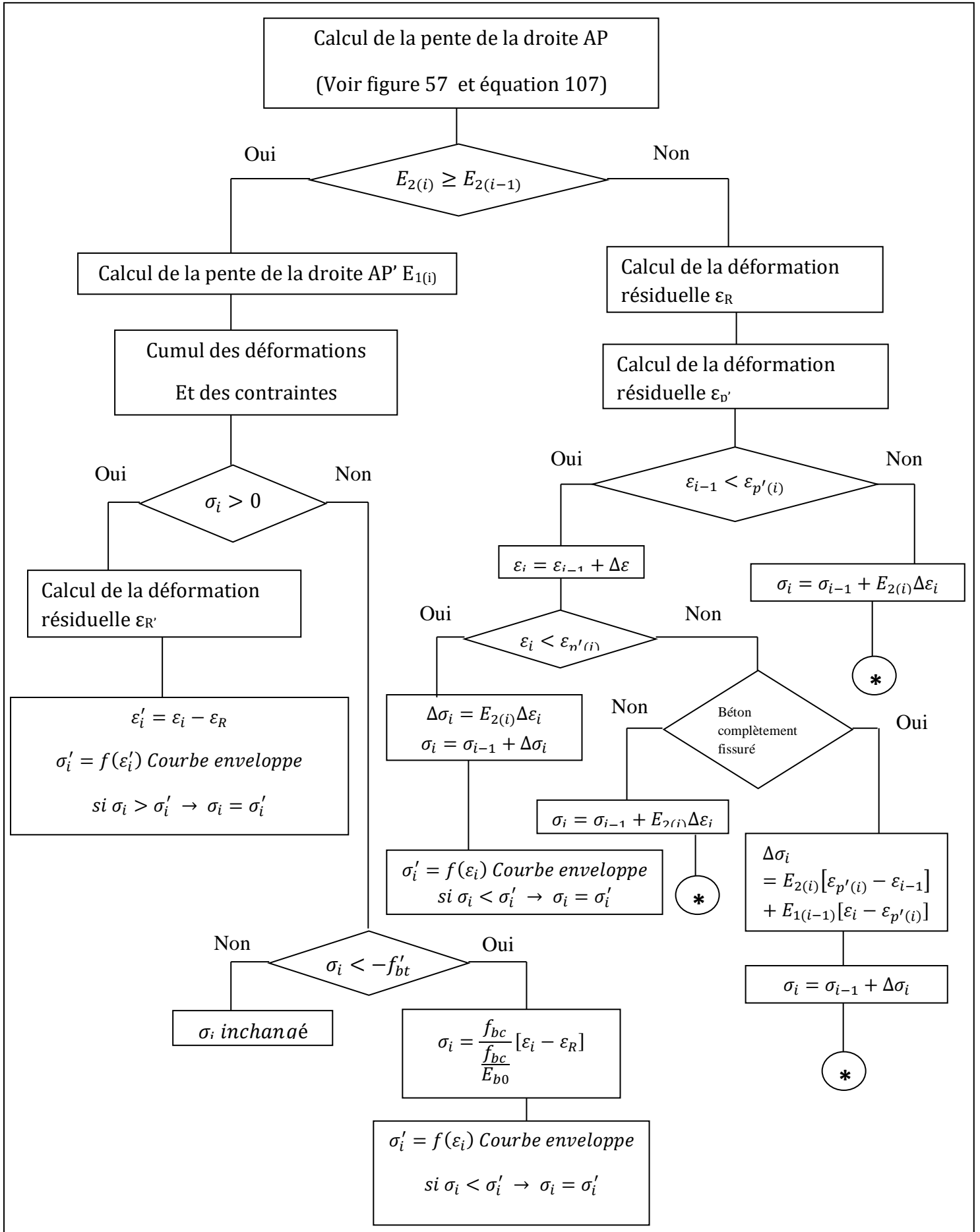


Figure 57 : modélisation du comportement cyclique du béton.

### **Chapitre III/Modélisation du comportement non linéaire des matériaux et la résolution numérique.**

Les différentes lois de comportement présentées ci-dessus ont été implémentées dans notre programme de calcul numérique. Il est basé sur une formulation par élément finis et utilisant des lois de comportement contraintes déformation non linéaire pour des chargements monotones ou cycliques. L'organigramme suivant résume l'inclusion de ces différentes lois et étapes dans notre programme de calcul numérique (Fig 58) :



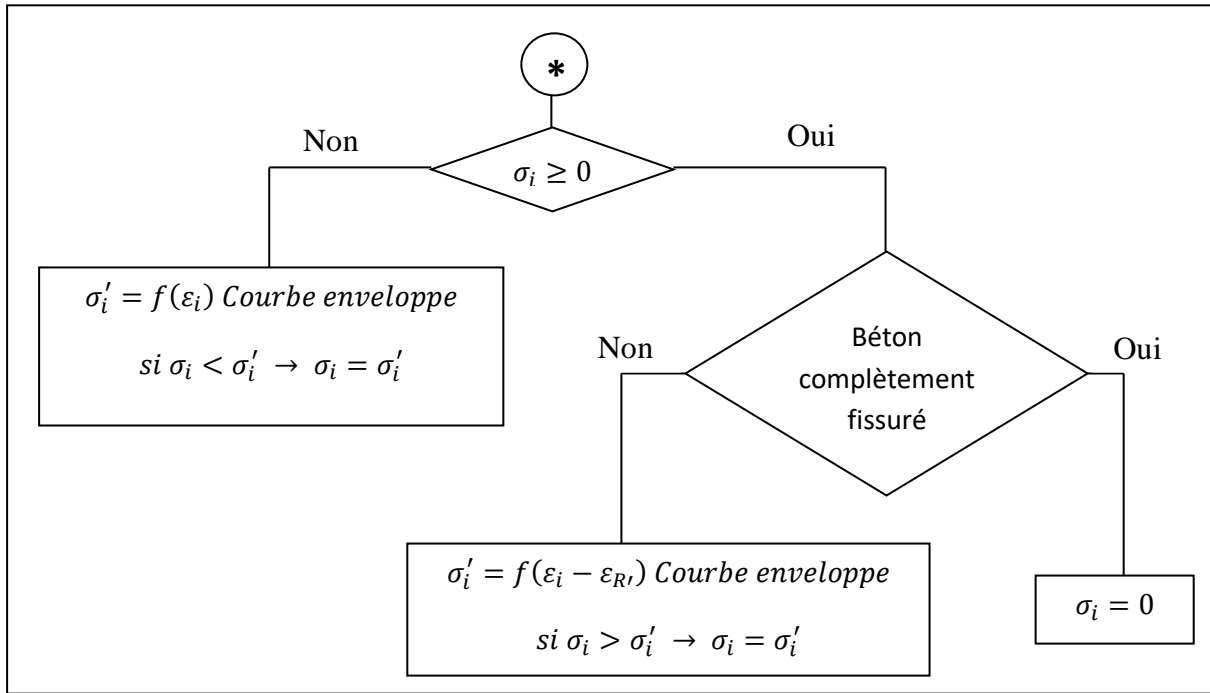


Figure 58 : Organigramme représentatif de la loi de comportement cyclique du béton.

## 2.2. Loi de comportement des armatures :

### 2.2.1. Comportement monotone (courbe enveloppe) :

Pour les armatures en acier, une loi élasto-plastique parfaite est adoptée. Pour les armatures, le comportement est symétrique en compression et en traction. La loi de comportement utilisée est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma = E_a \varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_{ae} \\ \sigma = \sigma_e & \text{si } \varepsilon_{ae} < \varepsilon \leq \varepsilon_{au} \dots \dots \dots (110) \\ \sigma = 0 & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_{au} \end{cases}$$

avec :  $\begin{cases} E_a : \text{module longitudinal de l'acier} \\ \varepsilon_{ae} : \text{déformation limite élastique de l'acier} \\ \sigma_e : \text{contrainte limite élastique de l'acier} \\ \varepsilon_{au} : \text{déformation ultime de l'acier.} \end{cases}$

La figure 59 donne la représentation graphique de la loi.

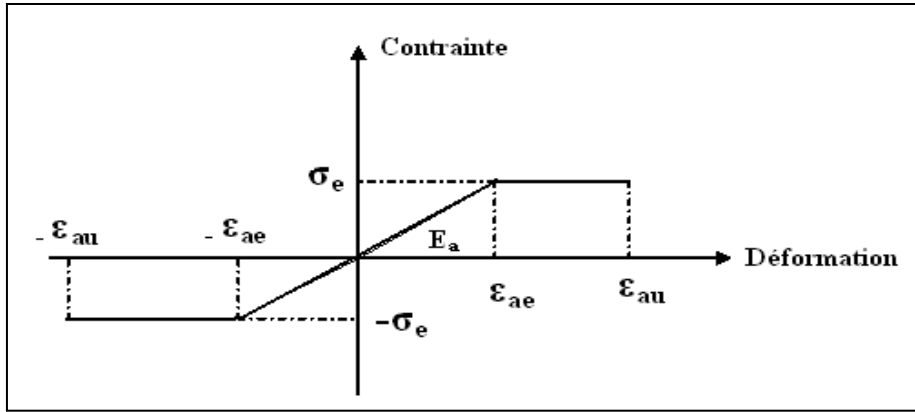


Figure 59 : Comportement des aciers.

### 2.2.2. Comportement cyclique :

Contrairement au béton, le module de déchargement et rechargement est pratiquement le même que le module d'élasticité initial pour les aciers :

$$\begin{cases} \sigma_s = E_a \varepsilon & \text{Si } \varepsilon \leq \varepsilon_{ae} \\ \sigma_s = \sigma_e & \text{Si } \varepsilon_{ae} < \varepsilon \leq \varepsilon_{au} \dots \dots \dots (111) \\ \sigma_s = 0 & \text{Si } \varepsilon > \varepsilon_{au} \end{cases}$$

Avec la condition :  $\begin{cases} \sigma_s > \sigma_e \rightarrow \sigma_s = \sigma_e \\ \sigma_s < -\sigma_e \rightarrow \sigma_s = -\sigma_e \end{cases}$

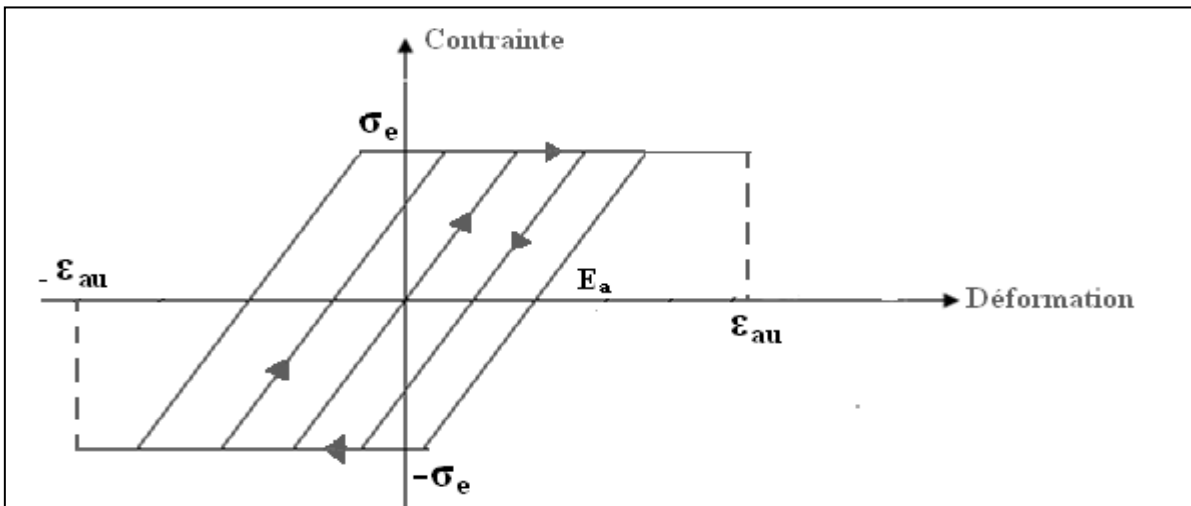


Figure 60 : comportement cyclique des aciers.

L'organigramme suivant résume l'inclusion de ces différentes lois et étapes dans notre programme de calcul numérique (Figure 61).

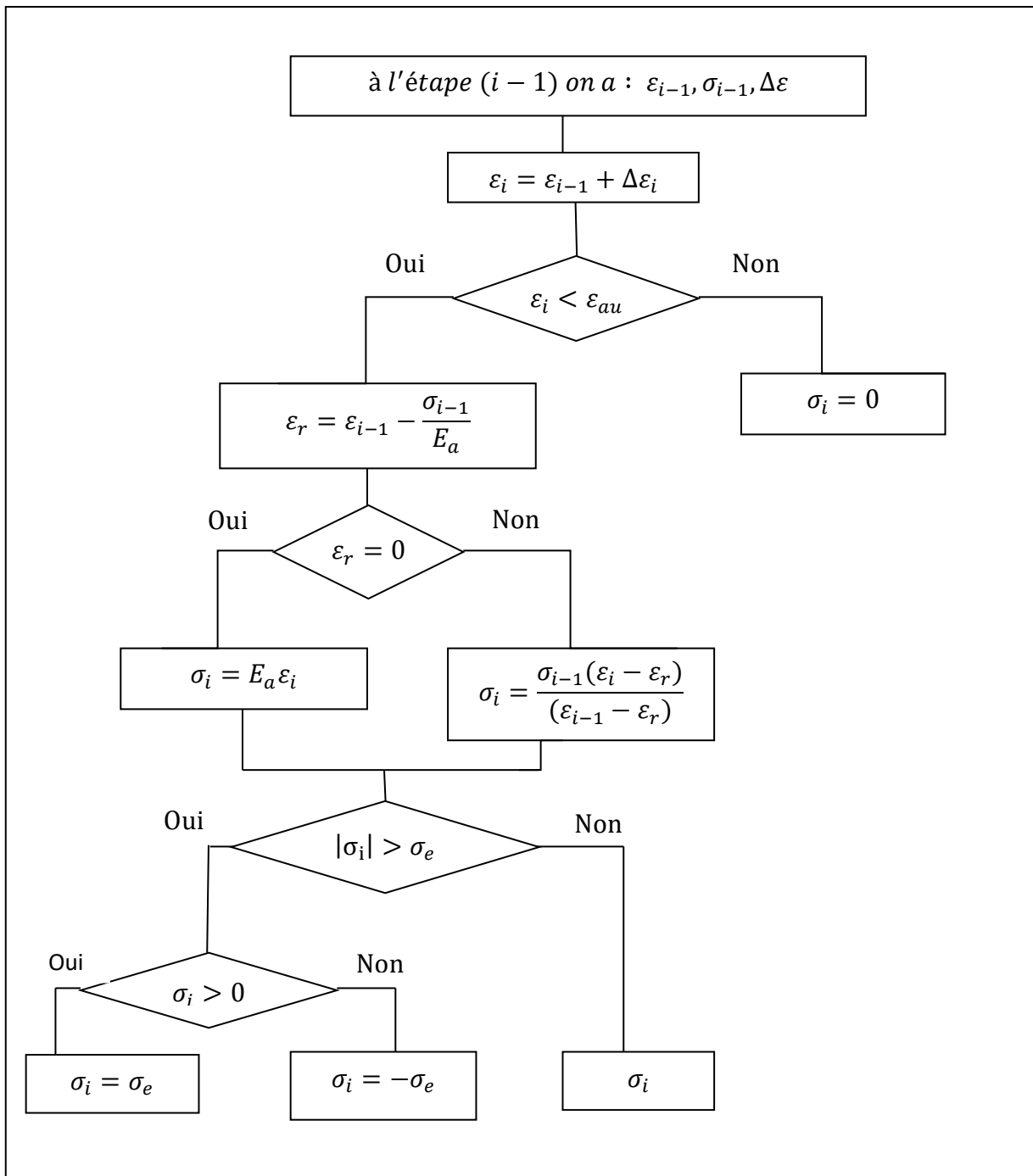


Figure 61 : Organigramme représentatif de la loi de comportement cyclique d'acier.

**3. Méthode de résolution non linéaire :**

Pour la résolution du système d'équation présenté dans l'équation (112), nous avons choisi la méthode de la rigidité sécante. C'est une méthode itérative incrémentale qui consiste à chercher la solution  $\{U_i\}$  calculé à partir de  $\{U_{i-1}\}$  qui rend le résidu  $\psi\{U_n\}$  aussi proche que possible de zéro :

$$\{F\} - [K(U)]\{U\} = \{\psi(U)\} \neq 0 \dots \dots \dots (112)$$

Avec :

$[K(U)]$  : Matrice de rigidité de la structure dépendant de vecteur des déplacements nodaux  $\{U\}$ .

$\{F\}$  : Vecteur des forces nodales appliqués à la structure.

$\{\psi(U)\}$  : Vecteur des forces résiduelles.

Le principe de cette méthode c'est d'approcher par itérations la valeur de  $\{U_i\}$  au moyen de la relation suivante (voir figure 62):

$$u_{i+1} = u_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{f(u_i) - f(u_{i-1})} \dots \dots \dots (113)$$

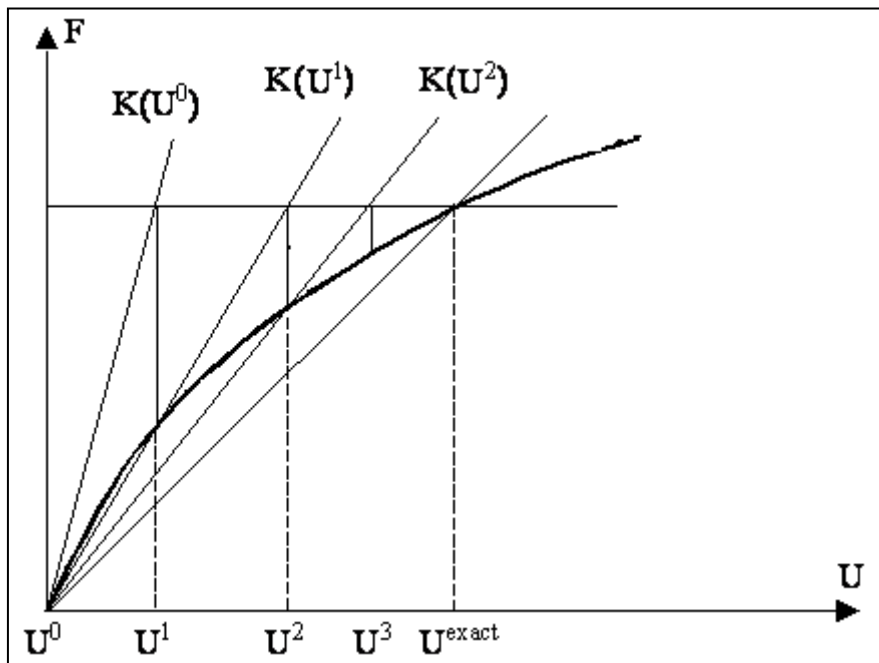


Figure 62 : Schéma représentatif de la méthode de la rigidité sécante.

L'algorithme de la résolution non linéaire se présente alors comme suit :

- 1- A l'étape j-1 on connaît :  $\begin{cases} \{F\}^{j-1}: \text{chargement appliqué} \\ \{U\}^{j-1}: \text{Vecteur des déplacements} \end{cases}$
- 2- Démarrage du compteur des types de chargements (horizontale et verticale).
- 3- Évaluation des charges nodales équivalentes aux nœuds pour chaque élément dans le vecteur load.
- 4- Incrémentation du chargement appliqué :

$$\{F\}^j = \{F\}^{j-1} + \{\Delta F\}^j$$

- 5- Démarrage du compteur des incréments du chargement : jincs = 1, nincs.
- 6- Démarrage du compteur des itérations : i = 1, n.
- 7- Assemblage du vecteur de chargement appliqué dans le vecteur load.
- 8- Évaluation du vecteur des forces résiduelles à équilibrer :

$$\{\Psi\}^i = \{F\}^j - [K]\{U\}^{i-1}$$

- 9- Évaluation et assemblage des matrices de rigidité en utilisant le module sécant :

$$E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

- 10- Résolution du système d'équations :

$$[K]^i \{\Delta u^i\} = \{\Psi\}^i$$

- 11- Cumul du vecteur des déplacements nodaux :

$$\{u\}^i = \{u\}^{i-1} + \{\Delta u\}^i$$

- 12- Calcul des forces nodales internes équivalentes (N et M pour chaque point de Gauss) et les assemblées dans le vecteur global : eload.
- 13- Test de convergence :

$$ratio = 100 \sqrt{\frac{gload - eload}{gload}}$$

$$\begin{cases} \text{si } ratio < \text{tolérance} : \text{l'étape actuelle est convergente} \\ \quad \rightarrow \text{passer à l'incrément de charge suivant } j + 1 \\ \text{sinon} : \text{n'est pas convergente passer à l'itération suivante } i + 1 \end{cases}$$

Le schéma de l'algorithme de calcul est résumé dans la figure 63

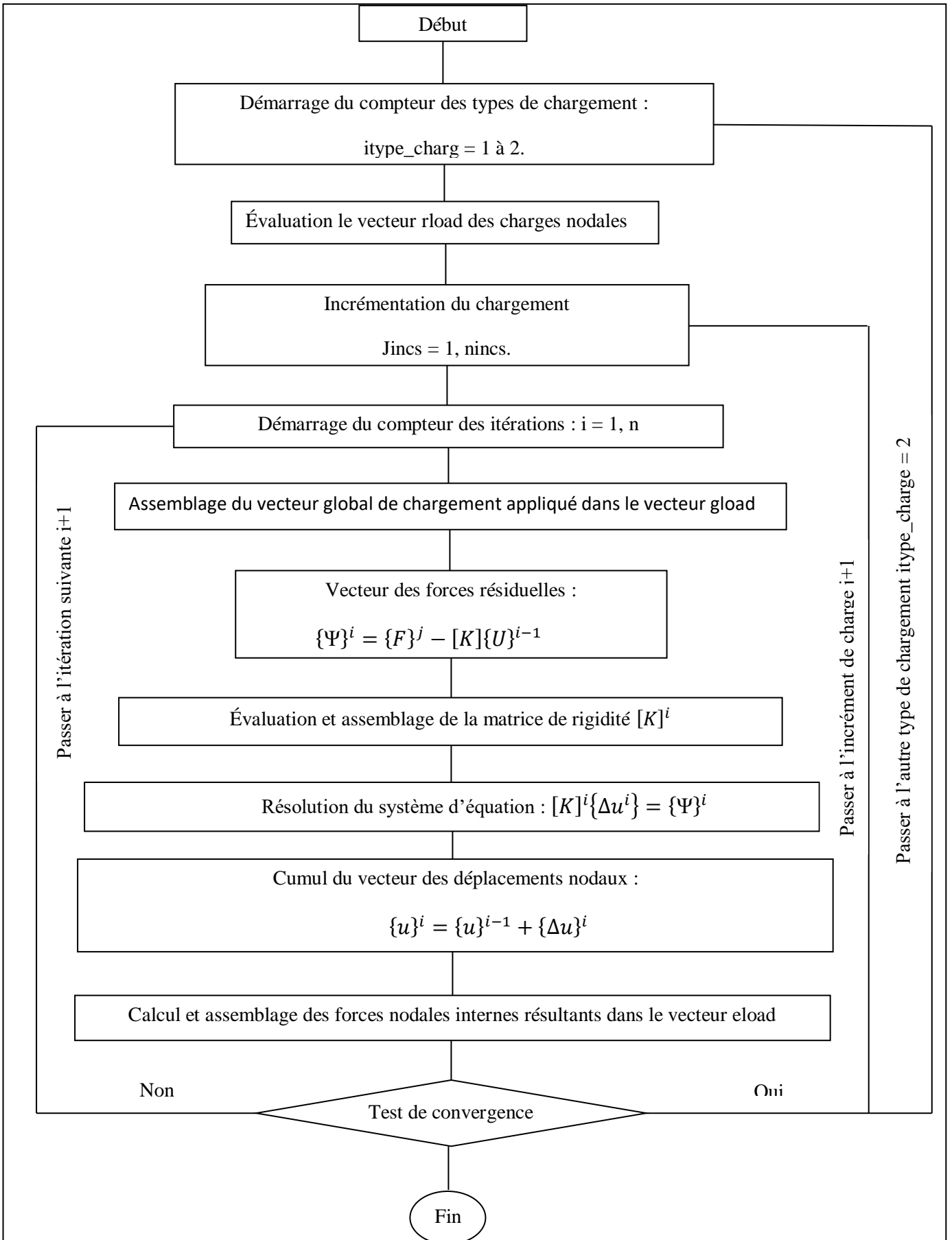


Figure 63 : Organigramme de l'algorithme de résolution.

#### **4. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons présenté dans la première partie les différentes lois représentatives du comportement non linéaire monotone utilisé et intégré dans notre programme informatique à savoir :

- Loi de Sargin, CEB pour le béton en compression.
- Loi de Grelat, Quast et Vecchio pour le béton en traction.

Par la suite, nous avons développé une loi de comportement cyclique du béton à la base des différentes observations expérimentales des plusieurs chercheurs.

Enfin, une méthode de résolution des équations non linéaire, basée sur les méthodes itératives de Newton-Raphson et utilisant la méthode de la rigidité sécante a été présentée à la fin. Cet algorithme permet de résoudre un système d'équations non linéaire avec des lois de comportement non linéaire en présence de la plasticité. Il permet de résoudre des problèmes en présence des chargements monotones ou cycliques.

## **Chapitre IV :**

# **Présentation du programme informatique.**

---

### **1. Introduction :**

Dans le calcul des structures et on se basant sur les hypothèses, les méthodes et les modélisations présentés précédemment, surtout quand il s'agit de l'utilisation des méthodes incrémentales itératives le calcul numérique devient indispensable.

Pour cela et dans le cadre de notre travail, nous avons développé un programme informatique rédigé en Fortran 90 « poutre\_cycle » pour qu'il soit capable de simuler correctement le comportement cyclique ainsi que monotone de n'importe quel structure plane en béton armé.

Le présent chapitre est réservé pour la présentation de ce programme développé.

### **2. Langage Fortran :**

C'est un ensemble de syntaxiques et des mots permettant d'écrire des opérations mathématiques pour les calculs scientifiques. Le premier compilateur a été créé en 1957. Après plusieurs versions ont été développées à savoir : Fortran 77, Fortran 90, Fortran 95, Fortran 2003 et Fortran 2008, mais la véritable évolution a été faite en passant du Fortran 77 au Fortran 90 car à l'époque les ordinateurs fonctionnaient avec des cartes perforées, les autres nouvelles normes 1995, 2003 et 2008 n'apportent que des nouvelles fonctionnalités.

A ce jour le langage Fortran est très utilisé dans les gros codes de calcul industriel.

### 3. Présentation du programme :

On se base sur les hypothèses, méthodes de calcul et les modélisations présentées précédemment, nous avons structuré notre programme informatique rédigé en Fortran comme suite :

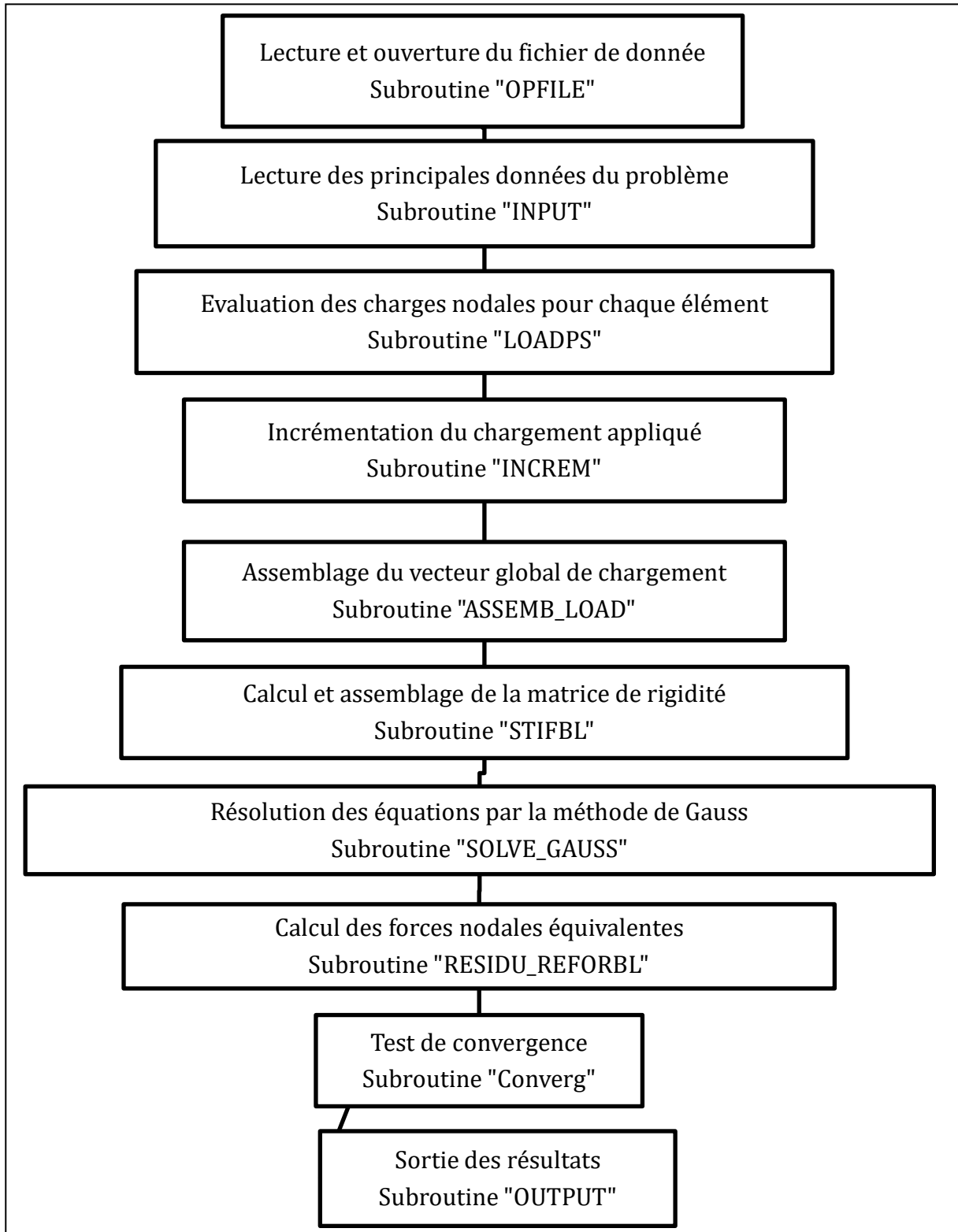


Figure 64 : Organigramme générale du programme poutre\_cycle.

#### 4. Présentation des différentes procédures (subroutines) :

Afin de bien organiser et faciliter la tâche de programmation, on partage notre programme a des sous-programmes appelés « subroutines » ou « procédures » (voir figure 64) :

- **Subroutine opfile** : lecture et ouverture des fichiers de donnée « finp » et de résultats « fout »
- **Subroutine input** : lecture des principales données de l'exemple traité à savoir (Fig 65):
  - Lecture de premières données (nombre des points, nombre d'éléments, nombre des sections ...).
  - Dimensionnement des tableaux et vecteurs en utilisant une autre subroutine « **dim\_tab** ».
  - Lecture des connectivités des éléments et types de sections.
  - Lecture et écriture des coordonnées nodales.
  - Localisation des débuts de colonnes dans la matrice globale en utilisant la **subroutine** « **kld** ».
  - Dimensionnement des vecteurs vkgi, vkgd et vkgs pour les stocké dans la matrice de rigidité globale en utilisant la subroutine « **dim\_tab2** ».
  - Calcul de la position du centre de chaque type de section par rapport à l'axe de référence en utilisant la **subroutine** « **centre\_gravité** ».
  - Calcul des positions des trapèzes et des lits d'acier constituant la section par rapport au centre de gravité de la section.
  - Lecture des déplacements imposés (conditions aux limites CL).
  - Lecture des propriétés des groupes des matériaux utilisés.
- **Subroutine dim\_tab(itab)** : dimensionnement et initialisation des tableaux.
- **Subroutine kld** :
  - Calculer les hauteurs de bande pour chaque colonne de la matrice de rigidité globale.

- Calcul du vecteur « kld » de localisation des débuts de colonnes dans la matrice globale.
- **Subroutine centre\_gravité** : calcul de la position du centre de gravité de la section par rapport à l'axe de référence en faisant des boucles sur toutes les sections de l'élément en cours et sur les trapèzes constituant la section en cours.

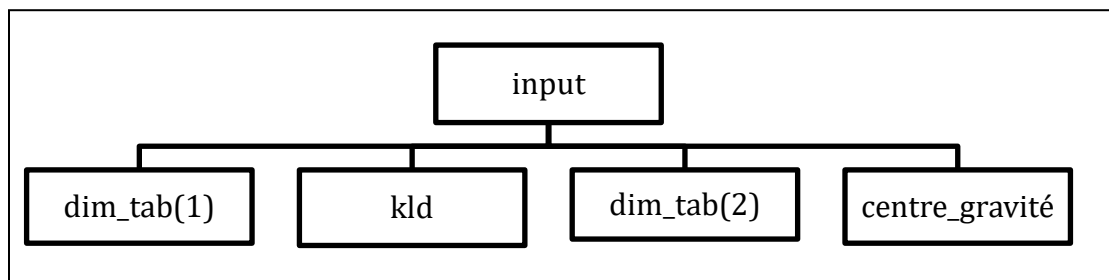


Figure 65 : Organigramme représentatif de la subroutine input.

- **Subroutine loadps** : elle permet de :
  - lecture des données de control sur le chargement.
  - Lecture des charges nodales concentrées.
  - Associer le chargement nodal avec un élément.
  - Lecture des sollicitations réparties sur les éléments.
  - Déterminer les coordonnées des nœuds de l'élément en cours.
  - calcul du vecteur des charges nodales équivalentes aux nœuds de l'élément en cours en utilisant la **subroutine** « **equivalent\_node** ».
  - calcul de la matrice de passage [T] pour l'élément en cours.
  - transformation du vecteur des charges nodales équivalentes dans le repère globale en utilisant la **subroutine** « **produit\_mat\_vect** » :  $\{f\}_{global} = t[T] * \{f\}_{local}$
  - stockage des charges nodales équivalentes dans le vecteur « rload ».
- **Subroutine equivalent\_node** : évaluation du vecteur forces nodales équivalentes dues aux charges réparties sur l'élément en cours pour les différents types de chargements : charge longitudinale uniformément répartie, charge transversale uniformément répartie et charge transversale triangulaire.

- **Subroutine produit\_matrices** ( $m,n,l,A,B,C$ ) : calcul du produit matriciel  $A(m*n)*B(n*l)$  et le résultats dans la matrice  $C(m*l)$ .
- **Subroutine produit\_mat\_vect** ( $m,n,A,V,W$ ) : calcul du produit matriciel  $A(m*n)*V(n)$  et le résultats dans le vecteur  $W(m)$ .
- **Subroutine increm** : elle permet de :
  - Lecture des incréments de chargement.
  - Cumul de l'incrément de charge dans les vecteurs « eload » et « tload ».
  - Interprétation des conditions aux limites sous forme d'un vecteur « globalfixed ».
- **Subroutine algor** : pour faire le choix de l'algorithme de résolution utilisé parmi les quatre propositions à savoir :
  - Nalgo = 1 : matrice de rigidité initial.
  - Nalgo = 2 : matrice de rigidité recalculée pour chaque itération.
  - Nalgo = 3 : matrice de rigidité est recalculée pour la première itération pour chaque incrément de charge.
  - Nalgo = 4 : la matrice de rigidité est recalculée pour la première et la deuxième itération pour chaque incrément de charge.
- **Subroutine assemb\_load** : assemblage du vecteur global de chargement dans le vecteur « gload ».
- **Subroutine stifbl** : (Figure 66)
  - Initialiser la matrice de rigidité globale stockée en ligne de ciel dans le vecteur vkgi, vkgd et vkgs.
  - Calcul de la matrice de rigidité élémentaire en utilisant la **subroutine** « **elem\_stiff** »
  - Calcul de la matrice de rigidité élémentaire dans le repère globale en utilisant la matrice de passage [T] et la matrice transposé « tpassage » :  $t[T][K][T]$
  - Stockage de la matrice élémentaire « estif » dans le vecteur global « gstif ».

- Assemblage de la matrice élémentaire « estif » dans la matrice globale en utilisant la **subroutine** « **assemb\_stifbl** ».
- **Subroutine elem\_stiff** : calcul de la matrice de rigidité élémentaire :
  - Intégration numérique en utilisant trois points de Gauss.
  - Calcul de EA, ES et EI en utilisant la **subroutine** « **layer** ».
- **Subroutine matrice\_B** : calcul de la matrice B (6x2) pour un élément à deux nœuds, B (9x2) pour un élément à trois nœuds et B (12x2) pour un élément à quatre nœuds.
- **Subroutine layer** : calcul des valeurs de EA, ES et EI par intégration sur la hauteur de la section transversale de l'élément en cours :
  - Calcul des coordonnées des nœuds ainsi que la longueur de l'élément en cours.
  - Calcul de la contrainte normal sur les fibres en utilisant la **subroutine** « **cycle\_beton** ».
  - Calcul du module sécant  $E_s$  au niveau de chaque fibre.
  - Calcul des valeurs de  $\begin{cases} EA = E_s bh \\ ES = E_s bhz \\ EI = E_s bhz^2 \end{cases}$
  - Pour la prise en compte des aciers on fait les mêmes étapes, en faisant des boucles sur toutes les lits d'acier, calcul des contraintes en utilisant la **subroutine** « **cycle\_acier** », calcul du module sécant et enfin les valeurs de EA, ES et EI.
  - Stockage de l'histoire du comportement de chaque fibre à savoir : déformation, la contrainte correspondante à cette déformation, déformation résiduelle, la pente de déchargement et rechargement.
- **Subroutine assemb\_stifbl** : assemblage de la matrice élémentaire « estif » dans la matrice globale (en ligne de ciel).

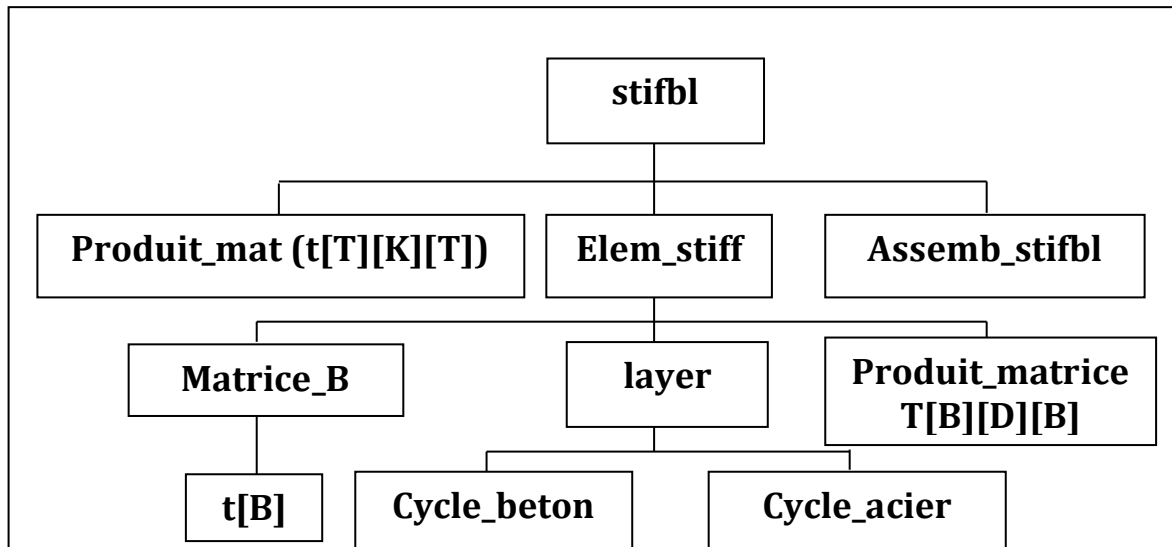
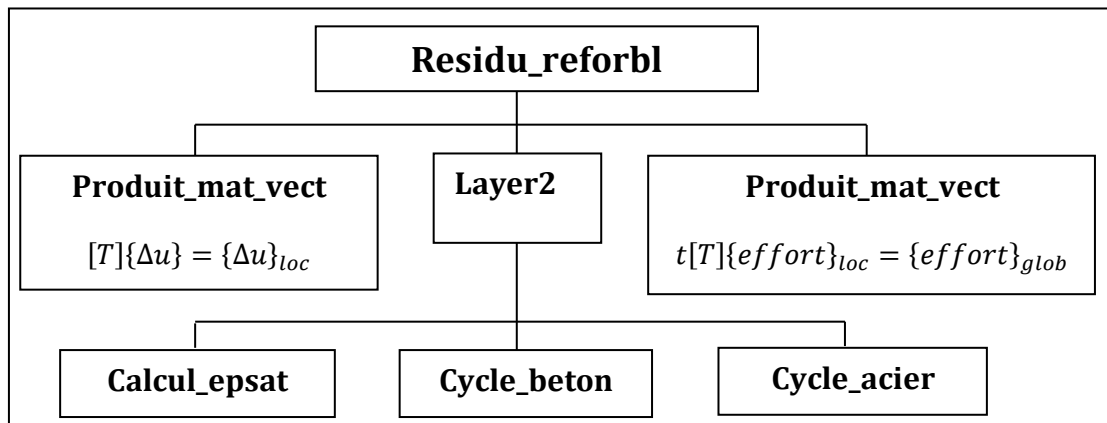


Figure 66 : Organigramme représentatif de la subroutine « stifbl ».

- **Subroutine solve\_gauss** : pour la résolution du système d'équation par la méthode d'élimination de Gauss :
  - Étape de triangulation.
  - Étape de résolution par substitution arrière.
  - Cumul des déplacements.
  - Cumul des réactions.
  - Ajouter les réactions au chargement total cumulé « tload ».
  
- **Subroutine residu\_reforbl** : elle permet de calculer les forces nodales internes équivalentes (Figure 67) :
  - Calcul des incréments des déformations dans le repère local en utilisant la **subroutine « produit\_mat\_vect »**.
  - Intégration numérique en utilisant trois points de gauss.
  - Calcul des efforts N et M au point igauss en utilisant la **subroutine « layer2 »**.
  - Calcul des efforts nodaux équivalents (résiduels) dans le repère local.
  - Calcul de forces nodales équivalentes dans le repère global.
  
- **Subroutine layer2** : calcul des valeurs des efforts internes N et M au point de igauss de la section transversale de l'élément en cours :

- Calcul des coordonnées des nœuds de l'élément en cours.
  - Calcul de la longueur de l'élément en cours.
  - Calcul de la déformation au niveau de l'acier le plus tendu en utilisant la **subroutine** « **calcul\_epsat** » toute en faisant des boucles sur les différents trapèzes de la section, boucle sur les fibres du trapèze en cours.
  - Calcul de la déformation longitudinale au niveau de la fibre en cours.
  - Calcul de la contrainte normale sur la fibre en cours en utilisant la **subroutine** « **cycle\_beton** ».
  - Calcul des efforts normaux et moment fléchissant.
  - Calcul de la déformation longitudinale au niveau du lit d'acier en cours (cumul des déformations).
  - Calcul de la contrainte normal sur la fibre en cours en acier en utilisant la **subroutine** « **cycle\_acier** ».
  - Calcul de l'effort normal et le moment fléchissant (acier).
  - Calcul de l'effort normal et le moment fléchissant (béton + acier).
- **Subroutine calcul\_epsat** : calcul de la déformation au niveau de l'acier le plus tendu.
  - **Subroutine cycle\_beton** : calcul des contraintes pour chaque fibre de la section transversale de l'élément en cours en utilisant la loi de comportement cyclique du béton.
  - **Subroutine cycle\_acier** : calcul des contraintes pour chaque fibre de la section transversale de l'élément en cours en utilisant la loi de comportement cyclique de l'acier.



- **Subroutine converg** : pour le test de convergence.
- **Subroutine output** : sortie des résultats :
  - Les déplacements nodaux.
  - Les efforts internes N, T et M.
  - Réactions aux appuis.

### 5. Description du fichier de données finp :

Afin de faciliter l'utilisation de ce programme, un fichier de donnée a été créé selon le format illustré sur la figure (68), les données sont :

#### 5.1.Partie données globales :

Dans cette ligne, le programme il fait une lecture des données globale de la structure (11 données) :

- npoin : nombre total des points nodaux.
- nelem : nombre total des éléments.
- nsect : nombre de types de sections.
- maxtrap : nombre maximum de trapèzes par section.
- maxacier : nombre maximum de lits d'acier par section.
- nvfix : nombre des nœuds ayant des conditions aux limites.
- nmats : nombre maximum de groupes de matériaux.
- nprop : nombre maximum des propriétés de matériaux.

- ninc : nombre d'incrément de chargement.
- nalgo : type d'algorithme de résolution.
- ntype\_charge : nombre de types de chargement.

**5.2. Partie « element » :**

- numel : numéro de l'élément considéré.
- itype\_elem : type de l'élément (si = 1 →élément poutre, sinon élément barre).
- sectno(numel) : numéro du type de la section de l'élément.
- lnods(numel,1) : numéro du 1<sup>er</sup> nœud de l'élément numel.
- lnods(numel,2) :numéro du 2<sup>ème</sup> nœud de l'élément numel.
- lnods(numel,3) :numéro du 3<sup>ème</sup> nœud de l'élément numel (si on utilise un élément à trois nœuds).
- lnods(numel,4) :numéro du 4<sup>ème</sup> nœud de l'élément numel (si on utilise un élément à quatre nœuds)
- nelem : nombre total des éléments.

**5.3. Partie « coordonnées » :**

- ipoin : point considéré.
- coord(ipoin,1) : valeur de l'abscisse x pour le nœud ipoin.
- coord(ipoin,2) : valeur de l'ordonné y pour le nœud ipoin.
- npoin : nombre des points.

**Debut\_titre**

\$ Titre de l'exemple traité

**Fin\_titre****Donnees\_globales**

Npoin nelem nsect maxtrap maxacier nvfix nmats nprop nincs nalgo ntype\_charge

**Elements**

{ numel itype\_elem secton(numel) lnods(numel,1) lnods(numel,2 à nnode)  
 { nombre de lignes = nelem (boucle sur toutes les éléments)

**Coordonnees**

{ ipoin coord(ipoin,1) coord(ipoin,2)  
 { nombre de lignes = nombre des points npoin

**Section**

{ { numsect h\_section nbre\_trapeze nbre\_acier  
 { itrap b\_inf b\_sup zi\_trapeze zs\_trapeze numat  
 { z\_acier aire\_acier matno\_acier  
 { nbr de lignes = nbre\_acier (boucle sur toutes les lits d'acier du trapèze en cours)  
 { nbr de lignes = nbre\_trapeze (boucle sur toutes les trapèzes de la section en cours)  
 { nbr de lignes = nsect (boucle sur toutes les sections)

**Conditions\_limites**

{ nofix ifpre presc(ivfix, idofn = 1 à ndofn)  
 { nbr de lignes = nvfix (boucle sur toutes les noeuds ayant C.L)

**Materiaux**

{ numat itype\_materiau props(numat, iprop) ou iprop = 1 à nprop  
 { nbr de lignes = nmats (boucle sur toutes les groupes de matériaux)

**Charges**

Indice\_charge\_N indice\_charge\_E

**Charges\_nodales**

Nbre\_charge\_N

{ lodpt  $F_x$   $F_y$  M  
 { nbr de lignes = nbre\_charge\_N (boucle sur toutes les charges nodales)

**Increment**

{ facto toler miter noutp  
 { nbr de lignes = nincs (boucle sur toutes les incréments de chargement)

<p><b>Charges_reparties</b></p> $\left\{ \begin{array}{l} \text{numel} \quad \text{ncas} \quad \text{numcas(icas)} \quad \text{charge(icas)} \\ \text{nbr de lignes} \leq \text{nelem(boucle sur toutes les éléments chargés)} \\ \text{nbr de lignes} = \text{nbre\_charge\_E} \end{array} \right.$ <p><b>Increment</b></p> $\left\{ \begin{array}{l} \text{facto} \quad \text{toler} \quad \text{miter} \quad \text{noutp} \\ \text{nbr de lignes} = \text{nincs(boucle sur toutes les incréments de chargement)} \end{array} \right.$	2/2
--	-----

Figure 68 : représentation du fichier donnée.

#### 5.4. Partie section :

- numsect : numéro de la section.
- h\_section : la hauteur de la section.
- nbre\_trapeze : nombre des trapèzes par section.
- nbre\_acier : nombre des lits d'aciers par trapèze.
- itrap : trapeze de la section en cours.
- b\_inf : largeur inferieure de la section.
- b\_sup : largeur supérieure de la section.
- zi\_trapeze : l'ordonnée inferieure du trapèze par rapport à l'axe de référence.
- zs\_trapeze : l'ordonnée supérieure du trapèze par rapport à l'axe de référence.
- numat : numéro du groupe du matériau.
- z\_acier : l'ordonnée du lit d'acier par rapport à l'axe de référence.
- aire\_acier : surface du lit d'acier.
- matno\_acier : numéro du groupe de matériau du lit d'acier.
- nbre\_acier : nombre des lits d'aciers par trapèze.
- nbre\_trapeze : nombre des trapèzes par section.
- nsect : nombre des types de section.

### 5.5. Partie conditions\_limites :

- Ivfix : nœud ayant les conditions aux limites.
- Nofix(ivfix) : numéro de l'élément ayant les conditions aux limites.
- Ifpre : code des conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ifpre} = 100 \rightarrow \text{déplacement longitudinal } U \text{ imposé.} \\ \text{ifpre} = 010 \rightarrow \text{déplacement transversal } V \text{ imposé.} \\ \text{ifpre} = 001 \rightarrow \text{rotation } \theta \text{ imposée} \\ \text{ifpre} = 110 \rightarrow \text{déplacements } U \text{ et } V \text{ imposées (si nuls } \rightarrow \text{ appuis double)} \\ \text{ifpre} = 111 \rightarrow \text{déplacements } U, V \text{ et } \theta \text{ imposées (si nuls } \rightarrow \text{ encastrement)} \end{array} \right.$$

- Presc(ivfix, idofn) : valeur imposé du déplacement au nœud ivfix selon le ddl idofn.
- Nvfix : nombre des nœuds ayant les conditions aux limites.

### 5.6. Partie « materiau » :

- Numat : numéro du groupe de matériau.
- Itype\_materiau : types de matériaux.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{itype\_materiau} = 1 \rightarrow \text{matériau élastique linéaire.} \\ \text{itype\_materiau} = 2 \rightarrow \text{béton.} \\ \text{itype\_materiau} = 3 \rightarrow \text{acier.} \end{array} \right.$$

- Nmats : nombre de groupes des matériaux.
- Nprop : nombre maximal de propriétés élémentaires.
- Matériau élastique (si itype\_materiau = 1  $\rightarrow$  nprop = 2) :  $\left. \begin{array}{l} E = (lprop, 1) \\ \nu = (lprop, 2) \end{array} \right\}$
- Béton (si itype\_materiau = 2  $\rightarrow$  nprop = 10) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = (lprop, 1) \\ \nu = (lprop, 2) \\ f_{bc} = (lprop, 3) \\ f_{bu} = (lprop, 4) \\ \varepsilon_{b0} = (lprop, 5) \\ \varepsilon_{bu} = (lprop, 6) \\ f_{bt} = (lprop, 7) \\ \varepsilon_{btu} = (lprop, 8) \\ itbc = (lprop, 9) \\ itbt = (lprop, 10) \end{array} \right.$$

Ou :

Itbc : indice de choix de loi de comportement du béton en compression :

$$\left\{ \begin{array}{l} itbc = 1 \rightarrow \text{loi de Sargin} \\ itbc = 2 \rightarrow \text{loi de Sargin avec branche linéaire} \\ itbc = 3 \rightarrow \text{loi parabole du CEB} \\ itbc = 4 \rightarrow \text{loi parabole rectangle} \end{array} \right.$$

Et itbt : indice de choix de loi de comportement du béton en traction :

$$\left\{ \begin{array}{l} itbt = 1 \rightarrow \text{loi élastique fragile} \\ itbt = 2 \rightarrow \text{loi avec branche descendante} \\ itbt = 3 \rightarrow \text{loi de Grelat} \\ itbt = 4 \rightarrow \text{loi de Quast} \\ itbt = 5 \rightarrow \text{loi de Quast} \end{array} \right.$$

### 5.7. Partie « charge » :

- Indice\_charg\_N : paramètre de control du chargement nodal :

$$\left\{ \begin{array}{l} indice\_charg\_N = 0 \rightarrow \text{pas de chargement} \\ indice\_charg\_N = 1 \rightarrow \text{chargement nodal à introduire} \end{array} \right.$$

- Indice\_charg\_E : paramètre de control du chargement répartie :

$$\left\{ \begin{array}{l} indice\_charg\_E = 0 \rightarrow \text{pas de chargement} \\ indice\_charg\_E = 1 \rightarrow \text{chargement répartie à introduire} \end{array} \right.$$

#### 5.7.1. Partie « charge\_nodal » :

- Nbre\_charge\_N : nombre des charges nodales.
- Lodpt : numéro du nœud chargé.
- F<sub>x</sub> : force nodale selon l'axe x.

- $F_y$  : force nodale selon l'axe y.
- M : moment fléchissant agissant au nœud.

### 5.7.2. Partie « charge\_repartie » :

- Nbre\_charge\_E : nombre des charges réparties.
- Numel : numéro de l'élément chargé.
- Ncas : nombre des cas de chargement répartie (ncas = 4).
- Numcas : numéro du cas de chargement :

$$\left\{ \begin{array}{l} numcas = 1 \rightarrow \text{charge longitudinale uniformément répartie} \\ numcas = 2 \rightarrow \text{charge transversale uniformément répartie} \\ numcas = 3 \rightarrow \text{charge triangulaire croissant de gauche à droite} \\ numcas = 4 \rightarrow \text{charge triangulaire croissant de droite à gauche} \end{array} \right.$$

- Charge (icas) : valeur de la charge répartie (force/unité de longueur).
- Nelem : nombre des éléments de la structure étudiée.

### 5.8. Partie « incrément » :

- Facto : facteur d'incrément du chargement.
- Toler : tolérance de convergence.
- Miter : nombre maximal d'itérations.
- Noutp : paramètre de control des sorties des résultats.
- Nincs : nombre total des incréments.

## 6. Description du fichier des résultats « fout » :

C'est le fichier où on présente les résultats obtenus après l'introduction des données via le fichier « fint » présenté ci-dessus et l'exécution du programme « poutre\_cycle », ce dernier a la forme illustrée sur la figure 69, d'une façon de récapituler les données principales de l'exemple traité puis la présentation des résultats obtenus à savoir les déplacements nodaux ainsi que les réactions aux appuis :

==> **début\_titre**

\$ Intitulé de l'exemple traité

**fin\_titre**

==> **donnees globales:**

nombre total des points nodaux = ....  
 nombre total d'éléments = .....  
 nombre de types de sections = ....  
 nombre max de trapèzes/section = ....  
 nre max de lits d aciers/section = ....  
 nombre des nœuds ayant des CL = ....  
 nombre de groupes de matériaux = ....  
 nbre max de propriétés de matériaux = ....  
 nombre de nœuds par élément = ....  
 nbre d'incrémentes de chargement = ....  
 type d algorithme de résolution = ....  
 nombre de ddl/nœud = ....  
 nbre de types chargements = ....

==> **Connectivites nodales et types de sections:**

element num\_section numeros noeuds

-----  
 .... ....

==> **Coordonnees nodales:**

noeud abscisse ordonnee

-----  
 .... ....

==> **nombre de types de sections = .....**

type section nombre trapeze hauteur section

.....  
 n°trapeze b\_inf b\_sup zi\_trapeze zs\_trapeze n° materiau  
 ....

zi\_trapeze = ....

zs\_trapeze = ....

z\_acier = ....

z\_acier = ....

```

==> Conditions aux limites      (CL):
noeud   code      valeurs fixees
-----
....     ....     ....

==> proprietes des groupes de materiaux:
groupe  module young   module tran G   sigmay
-----
....     ....     ....     ....

==> indice du chargement nodal =   ...
==> indice du chargement repart =  ...

==> charges_nodales:
noeud   force Fx   force Fy   Moment
-----
....     ....     ....     ....

=> increment
-----

facteur de chargement   : ....
tolerance de convergence : ....
nbre maximal d iterations : ....
parametre de sortie     : ....

***** Resultats du calcul *****

==> Deplacements nodaux:
noeud      depl Ux      depl Uy      rotation teta
-----
....     ....     ....     ....

==> Reactions aux appuis:
noeud      React Rx      React Ry      Moment M
-----
....     ....     ....     ....
    
```

Figure 69 : représentation du fichier des résultats « fout ».

**7. Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons présenté notre programme « poutre\_cycle » développé par les différentes formulations présentées auparavant.

Lorsqu'on développe un programme informatique, il est important de connaître ses limites, nous analysons les paramètres de convergence et les limites inhérentes à la méthode utilisée.

Les valeurs suivant sont les optima trouvés :

- Nombre des sections par élément :
  - { l'utilisation d'un élément à 2 noeuds → 3 sections
  - { l'utilisation d'un élément à 3 noeuds → 5 sections
  - { l'utilisation d'un élément à 4 noeuds → 7 sections
- Nombre des fibres horizontales discrétisées pour une section : jusqu'à 50 fibres.
- Nombre moyen d'itération dans le processus d'équilibre = 500.
- La tolérance de test de convergence : 0.05.
- Facteur d'incrément du chargement varient entre 0.25 à 0.5.

## **Chapitre V :**

# **Applications et validation du modèle**

---

### **1. Introduction :**

Les différents modèles et lois de comportement des structures en béton armé ainsi que le modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis ont été présentés dans les chapitres précédents (Chapitres II, III et IV). En présence des non linéarités matérielles les méthodes de résolution des équations non linéaires basées sur les méthodes itératives de Newton-Raphson sont présentées dans le chapitre III. Sur la base des lois de comportement et du modèle numérique, un programme de calcul a été implémenté. Il permet de traiter des structures en béton armé avec des lois de comportement non linéaire. Le chargement appliqué peut être monotone ou cyclique. Afin de valider notre programme, nous avons mené des calculs sur des structures testées expérimentalement ou en utilisant des solutions de référence de la littérature. Pour cela nous avons traité cinq exemples des structures sous chargement monotone, un exemple d'une structure sous chargement cyclique de même signe, trois exemples des structures sous chargement cyclique alterné et enfin une étude de performance des différents éléments finis poutre développés auparavant.

## 2. Structures sous chargement monotone :

### 2.1.Poutre de Pera et Tuest :

Il s'agit d'une poutre sur armé proposé par PERA [93] et TUSET [118], testée à l'INSA de Lyon (France). La poutre est soumise à une flexion centrée. Les données géométriques sont définies sur la figure 70. Les caractéristiques des matériaux utilisés sont résumées dans le tableau 4. Les lois de comportement des matériaux béton et acier sont présentées dans la figure 71.

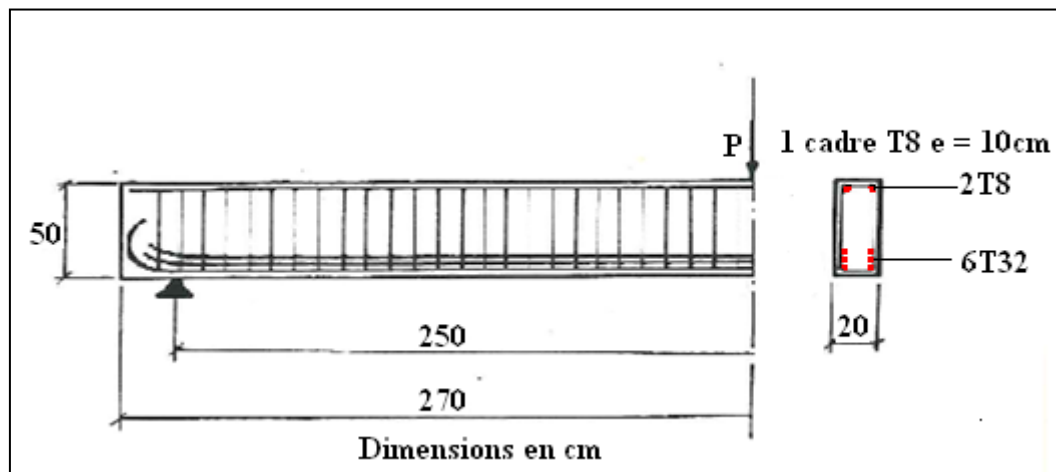


Figure 70 : Donnée géométrique de la poutre [118].

Tableau 4 : Caractéristiques des matériaux [93].

Béton	Acier
Module d'élasticité initial : 37600 MPA	Module de Young : 220000 MPA
Coefficient de Poisson : 0.22	Limite élastique : 368 MPA
Contrainte limite en compression : 41 MPA	Contrainte de rupture : 488 MPA
Contrainte limite en traction : 3.9 MPA	Allongement à la rupture : 24%

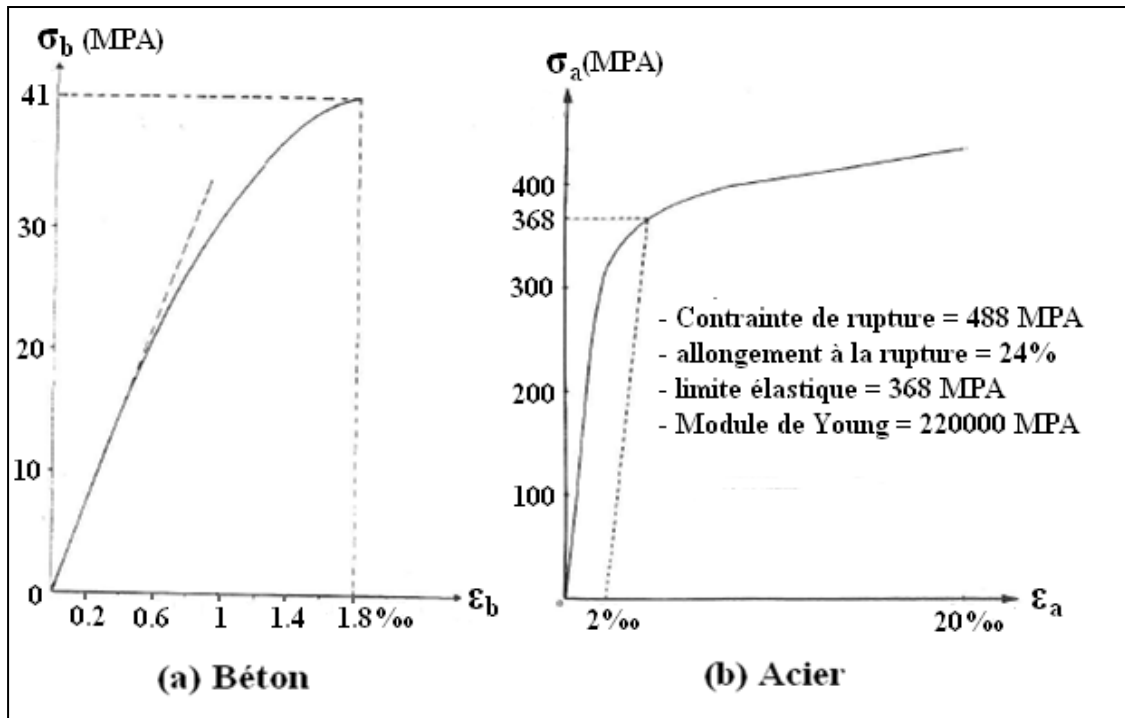


Figure 71 : diagramme contrainte déformation des matériaux utilisés [118].

Dans cet essai, la poutre a été sollicitée en flexion de façon monotone jusqu'à la limite ultime. Afin de faire une première validation du modèle présenté ici, un calcul numérique est mené sur la même poutre. Les courbes de réponses numériques sont reportées sur les courbes expérimentales en figure 72 et figure 73. La réponse de la poutre en déplacement est reportée dans la Figure 70. La courbe de déformation du béton en fonction du chargement est donnée en figure 73.

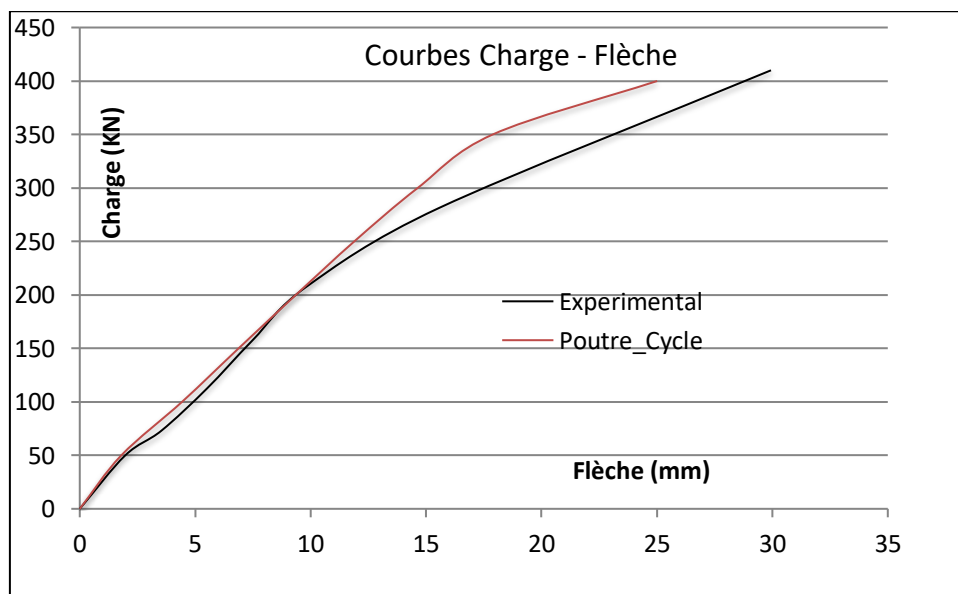


Figure 72 : Courbes charge-flèche [118].

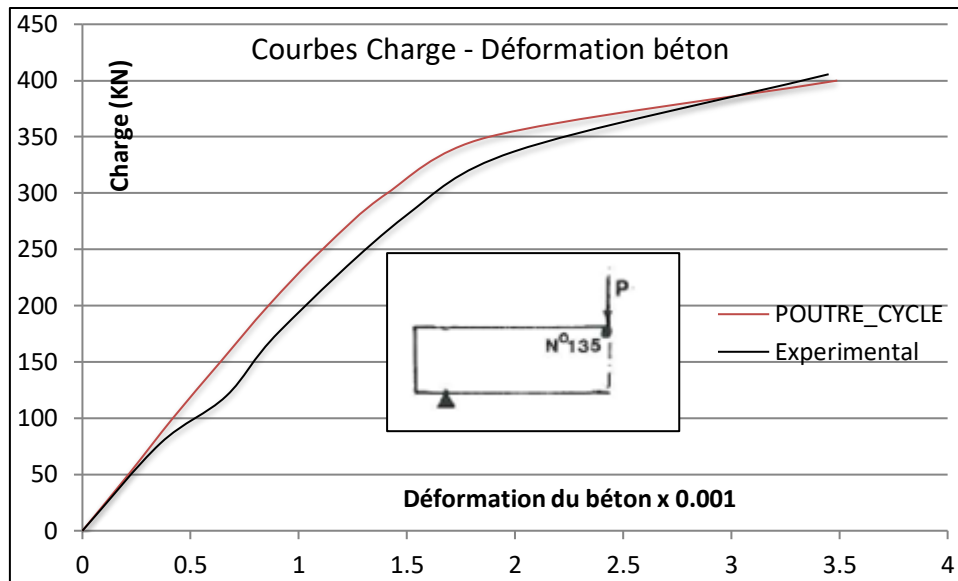


Figure 73 : Courbes charge-déformation du béton [118].

Le comportement expérimental est bien simulé jusqu'à la charge 250 kN. Au-delà, la courbe de calcul semble légèrement plus rigide que la courbe expérimentale. Cependant, la charge de rupture est bien simulée par le calcul 400 kN (écart de 2%) ainsi que la flèche correspondante à la charge de ruine avec un écart de 16%. Le mode de ruine théorique est le même observé expérimentalement, nous constatons sur la figure 71 un écrasement du béton comprimé au point d'application de la charge.

Cet essai est un comportement sous charge monotone, dans le modèle numérique nombre d'éléments 8.

## 2.2. Comportement non linéaire d'une poutre sous-armée :

Il s'agit d'une poutre à faible pourcentage d'acier (1.79%) testée à L'INSA de Lyon [78]. La poutre a une portée de 2\*2,7m. Les appuis sont positionnés à 20 cm des bords. La poutre a une section rectangulaire (50\* 20 cm). 2 armatures longitudinales en Ø32 se trouvent en partie inférieure et 2Ø8 en partie supérieure des cadres en Ø8 espacés de 10 cm lient les inférieures et supérieures. La poutre est soumise à une flexion centrée (flexion trois points). Les caractéristiques géométriques sont définies à la figure 74 :

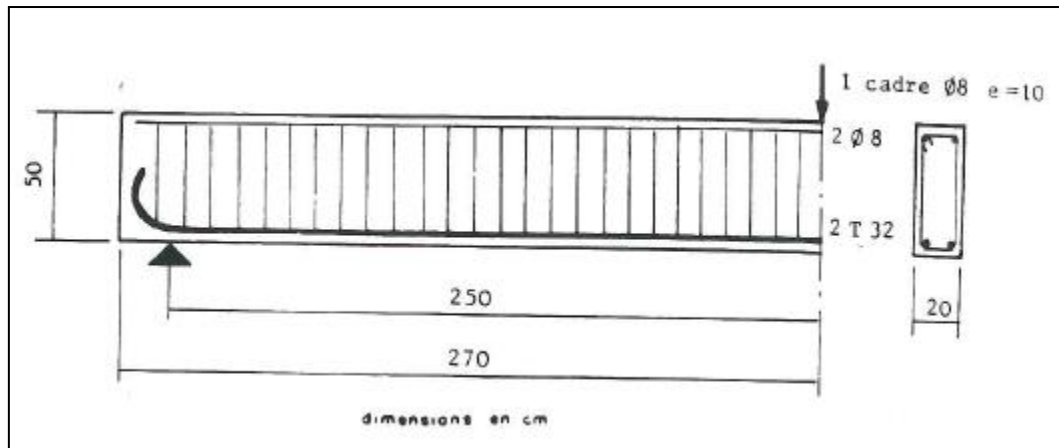


Figure 74 : Caractéristiques géométriques de la poutre [78].

Les caractéristiques des matériaux acier et béton sont identiques à celles de la poutre sur-armé de PERA [93] (voir tableau 4 et figure 71 ci-dessus). Les résultats de la simulation numérique par le programme `poutre_cycle` sont reportés sur les résultats du test expérimental en figure 75.

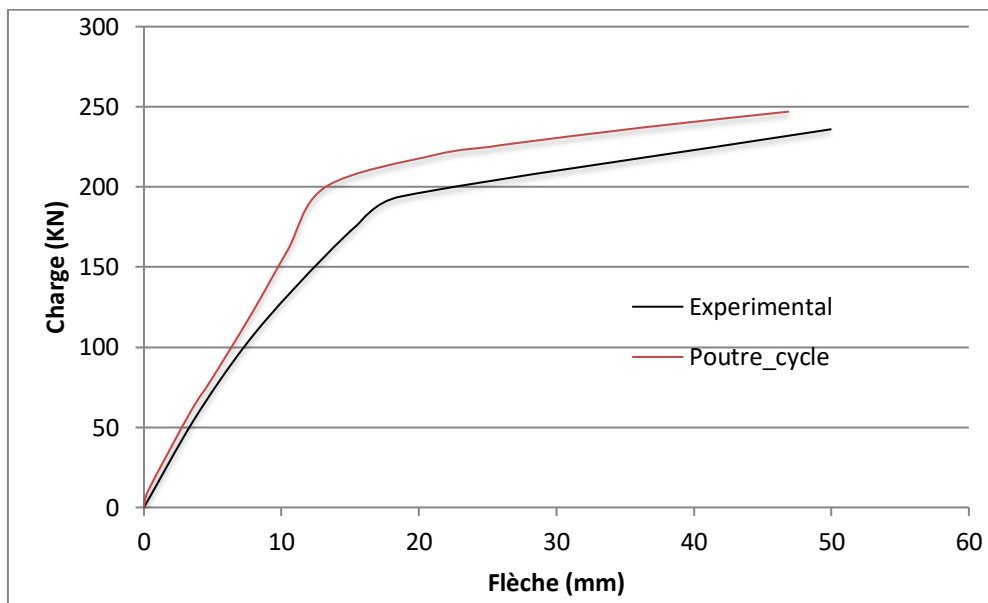


Figure 75: Courbes Charge-flèche [78].

La superposition des résultats obtenus sur les résultats expérimentaux en figure 75 montre que le comportement de cette poutre est bien simulé par notre programme avec uniquement un écart de 4,66% de la charge de rupture et 6,18% pour la flèche correspondante à la charge de ruine. Quand la charge est inférieure à 180, le comportement est essentiellement linéaire. Au-delà, il devient non linéaire à cause de la plasticité. La ruine est atteinte à 236 (test) et 247 (numérique).

Tableau 5 : Comparaison des résultats Calcul-Test [78].

	Charge de ruine (KN)	Flèche (mm)
Test	236	50
Calcul numérique	247	46.91
Écart (%)	4,66	6,18

### 2.3.Poutre de Varastehpeur [120] :

C'est une poutre isostatique testée à l'université de Claude Bernard de Lyon par Varastehpeur en 1996. La poutre a une portée de 2m. La poutre a une section rectangulaire (250\* 150cm). 2 armatures longitudinales en  $\Phi 14$  se trouvent en partie inférieure et 2 $\Phi 8$  en partie supérieure des cadres en  $\Phi 6$  espacés de 8 cm lient les inférieures et supérieures. De ce fait, la poutre en béton armé testée présente un faible pourcentage d'acier 1.09%. Elle est soumise à une flexion à quatre points comme elle est représentée sur la figure 76. Les forces sont appliquées à 30 cm du milieu. Les caractéristiques des matériaux de la poutre sont données par le tableau 6.

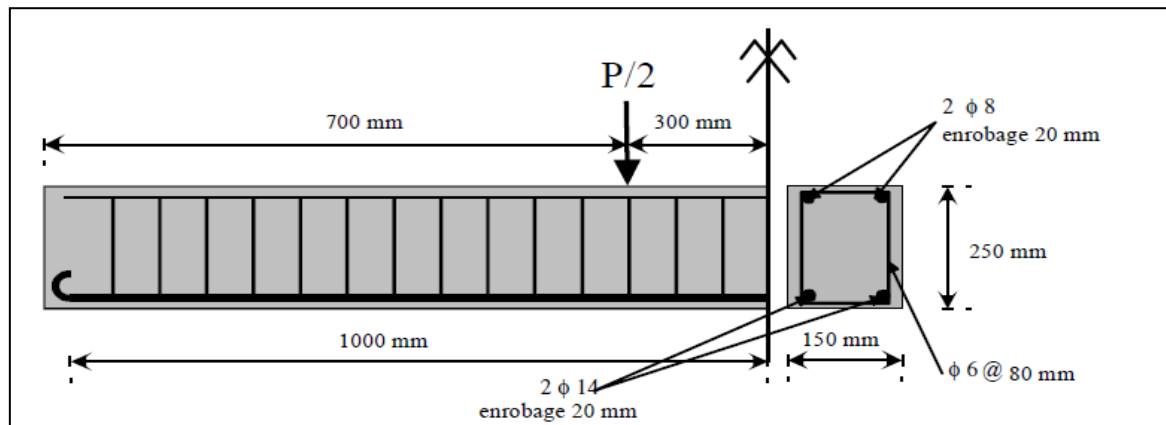


Figure 76 : Donnée géométrique et ferrailage de la poutre [120].

Tableau 6 : Caractéristiques mécaniques des matériaux [120].

Béton	Acier
Module d'élasticité initial : 37600 MPA	Module de Young : 210900 MPA
Coefficient de Poisson : 0.22	Limite élastique : 580 MPA
Contrainte limite en compression : 39 MPA	
Contrainte limite en traction : 3.9 MPA	
Rapport $\beta = \frac{f_{bc}}{f_c} = 1.16$	

Les résultats obtenus par la simulation numérique de notre programme sont illustrés sur la figure 77. La courbe numérique issue des simulations est en parfait accord et est pratiquement identique aux celle de l'essai de Varasthepeur. Dans cet essai, nous constatons que la charge de ruine de 110 kN est bien simulée par notre programme et juste un écart de 6,74 % de l'estimation de la flèche. Les courbes de réponse dans les parties élastique et plastique sont similaires. La zone élastique est atteinte pour une force de 95 kN et une flèche de 7 mm. Dans les simulations numériques, le nombre d'éléments dans le maillage est 6.

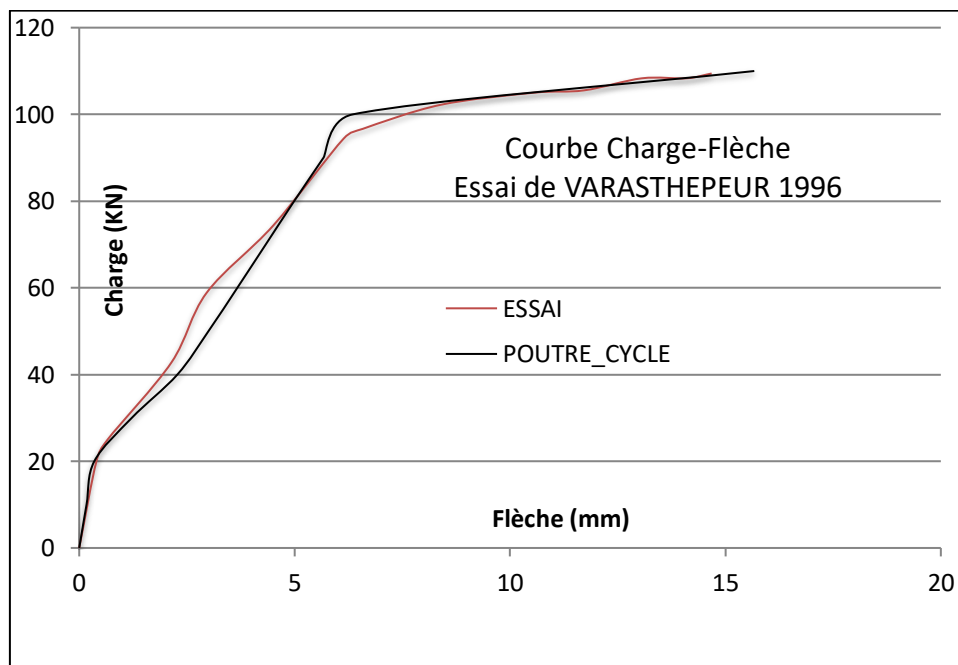


Figure 77 : Comportement de la poutre en flexion 3 points (courbe charge-flèche) [120].

Tableau 7 : Comparaison des résultats Calcul-Flèche [120].

	Charge de ruine (KN)	Flèche (mm)
Test	109.43	14,68
Calcul numérique	110	15,67
Écart (%)	0,52	6,74

#### 2.4.Poteau de Low-Moehle [71]:

Il s'agit d'un poteau en béton armé encasté à sa base, soumis à un chargement vertical constant de 44,5 KN et un chargement horizontale monotone jusqu'à la rupture à son extrémité libre. Les caractéristiques géométriques du poteau et le ferrailage sont présentés sur la figure 78.

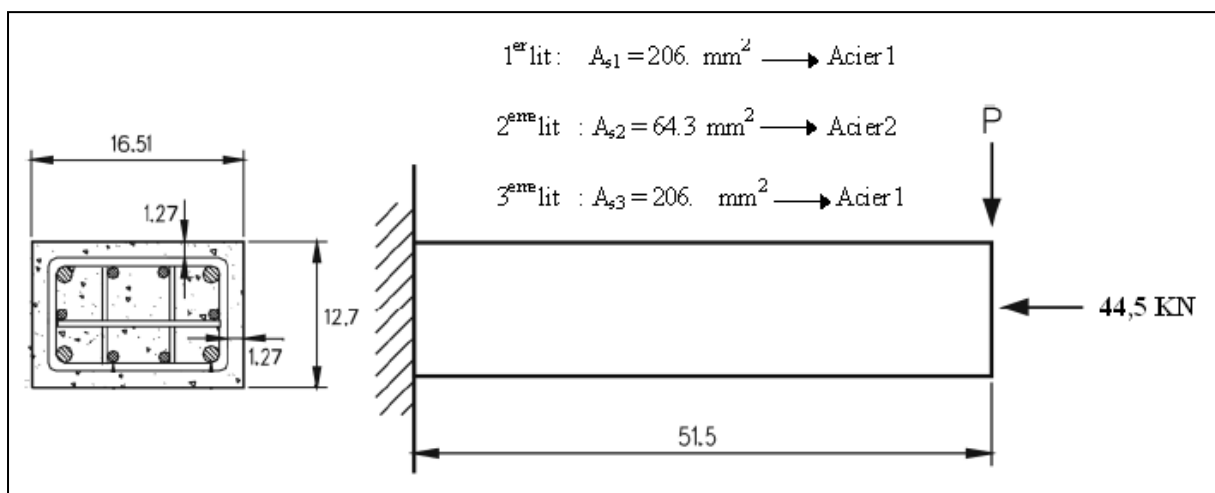


Figure 78: Caractéristiques géométriques et ferrailage du poteau Low-Moehle [71].

Après l'analyse numérique avec une discrétisation en 16 éléments de longueur homogène nous avons obtenu les résultats illustrés sur la figure 79 et cela après la superposition sur la courbe des résultats expérimentaux de Low-Moehle [71].

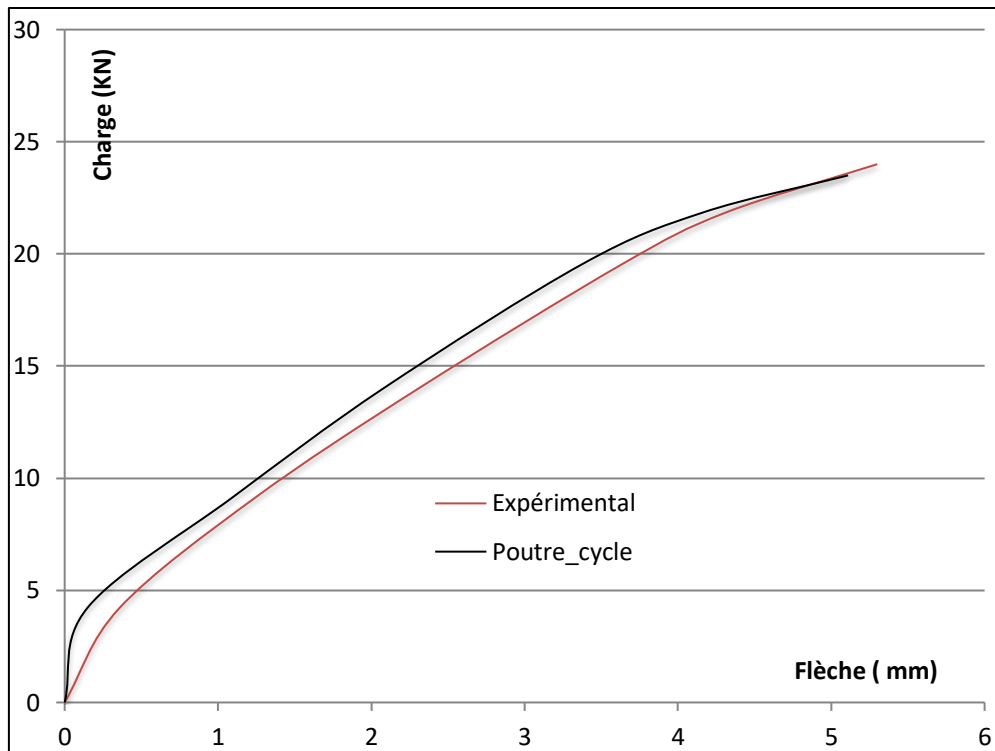


Figure 79: Courbes charge-déplacement de l'essai de Low-Moehle [71].

La figure 79 montre que notre programme a bien simulé le comportement de ce poteau que ce soit en terme de déplacement (un écart de 4%) ou bien la charge de ruine de 24 KN (un écart de 2%). Ici le comportement du poteau est non linéaire et la zone linéaire est inexistante. D'où l'intérêt des méthodes itératives adoptées ici dans le modèle. Dans les simulations numériques, le nombre d'éléments dans le maillage est 16.

### 3. Structures sous chargement cyclique :

#### 3.1.Poutre de Christia [77]:

Il s'agit d'une poutre en béton armé testé à l'INSA de Lyon soumise à une flexion cyclique alterné, La poutre a une portée de 4,5 m. Les appuis sont positionnés à 25 cm des bords. La poutre a une section rectangulaire (15\*25 cm). 2 armatures longitudinales en Ø25 se trouvent en partie inférieure et 2Ø25 en partie supérieure des cadres en Ø10 espacés de 10 cm lient les inférieures et supérieures. Les données géométriques sont définies sur la figure 80 et les caractéristiques matériaux sur le tableau 8:

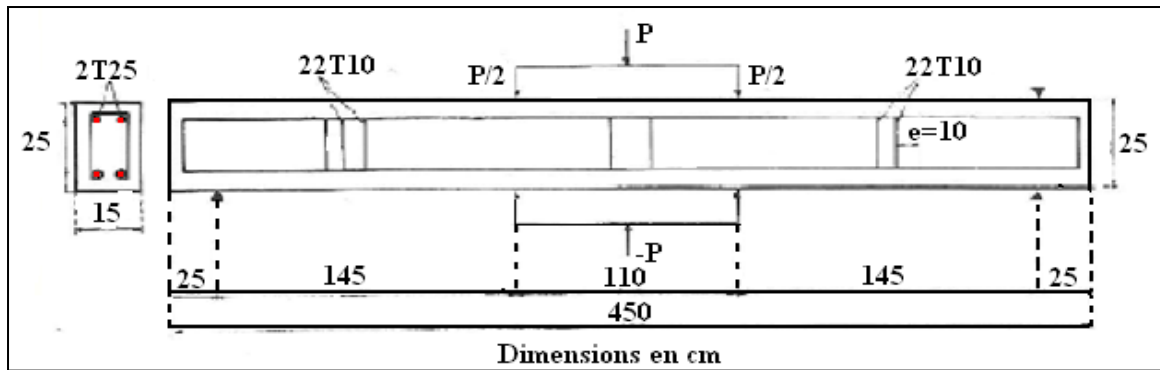


Figure 80: Donnée géométrique de la poutre [77].

Tableau 8: Caractéristiques des matériaux [77].

Béton	Acier
Module d'élasticité initial : 35000 MPA	Module de Young : 200000 MPA
Coefficient de Poisson : 0.2	Limite élastique : 400 MPA
Contrainte limite en compression : 28 MPA	
Contrainte limite en traction : 2.8 MPA	

Avec une discrétisation en 8 éléments nous avons modélisé cette poutre par notre programme poutre\_cycle. Plusieurs cycles de chargements ont été simulés. Parmi les nombreux résultats, nous présentons sur les figures 81 et 82, ceux relatifs au 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> cycle. Dans le premier cycle, le chargement a été varié de 0 jusqu'à 16,8 kN d'abord et jusqu'à -27 kN après. Dans le second cycle, le chargement a été varié de 0 jusqu'à 52kN et jusqu'à -63,4 kN.

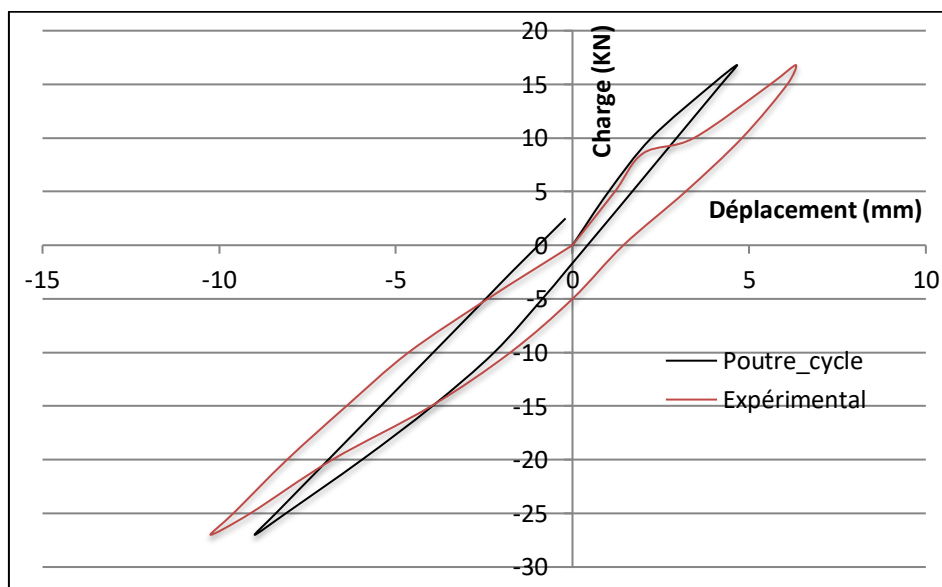


Figure 81: Courbe charge-déplacement Essai de Christia (1<sup>er</sup> cycle) [77].

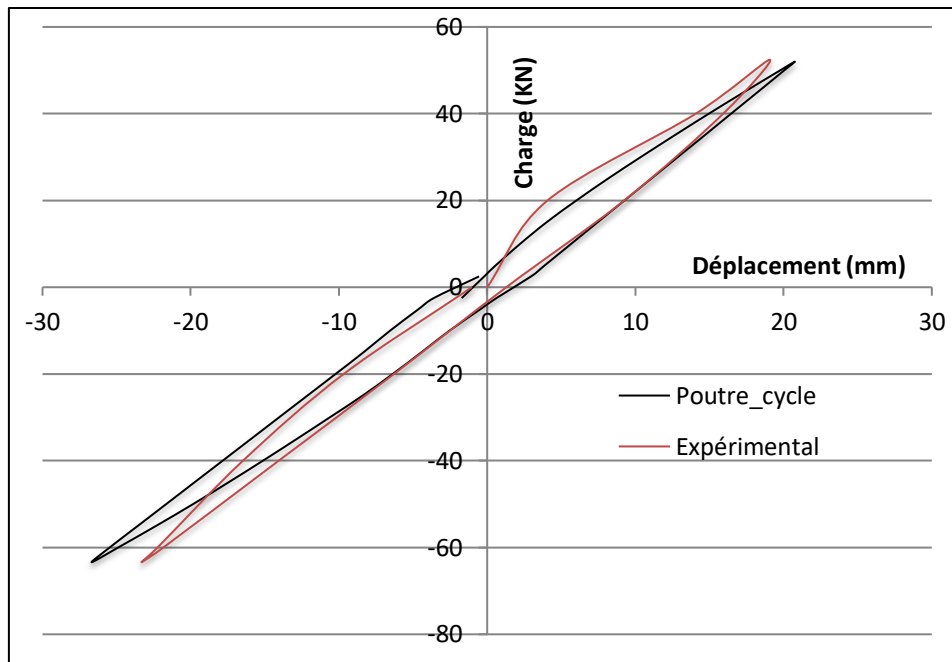


Figure 82 : Courbe charge-déplacement Essai de Christia (2<sup>ème</sup> cycle) [77].

Les résultats obtenus sont très satisfaisants, les réponses globales sont pratiquement superposées, avec toutefois une légère sur estimation de la pente de chargement-déchargement au 1<sup>er</sup> cycle.

### 3.2.Poutre de Benchmark-Nantes [103]:

La poutre a été testée sur appuis simples en flexion à l'école centrale de Nantes (France). La poutre considérée possède une section rectangulaire de largeur de 0.2 m et une hauteur de 0.5 m. La longueur totale de la poutre est de 5.4 m. Elle est soumise à un chargement cyclique de même signe. Concernant l'acier, les barres utilisées pour le ferrailage principal (nappe inférieure) ont un diamètre de 32 mm, la nappe supérieure et des étriers, elles ont un diamètre de 8 mm. Les caractéristiques matériaux sont sur le tableau 9:

Tableau 9 : Caractéristiques des matériaux [103].

Béton	Acier
Module d'élasticité initial : 37200 MPA	Module de Young : 195302 MPA
Coefficient de Poisson : 0.2	Limite élastique : 466 MPA
Contrainte limite en compression:36.08 MPA	Contrainte de rupture : 615 MPA
Contrainte limite en traction : 3.45 MPA	

Après l'analyse numérique en utilisant poutre\_cycle et en décrivant la poutre en six éléments nous avons eu les résultats illustré sur les figures 83, 84, 85 et 86.

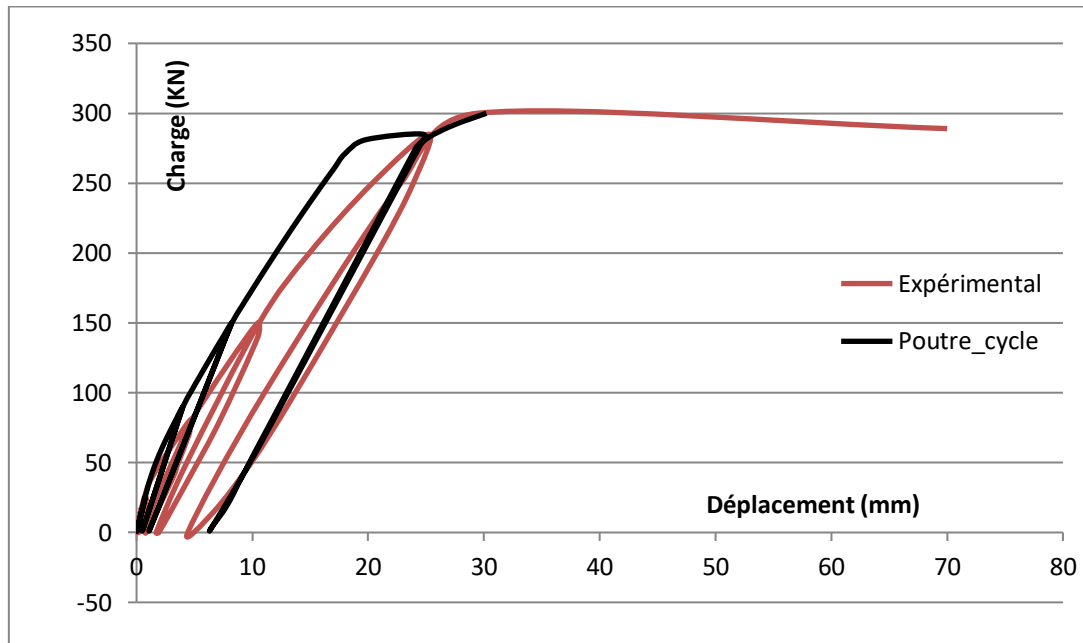


Figure 83: Courbes charge-déplacement des huit cycles [103].

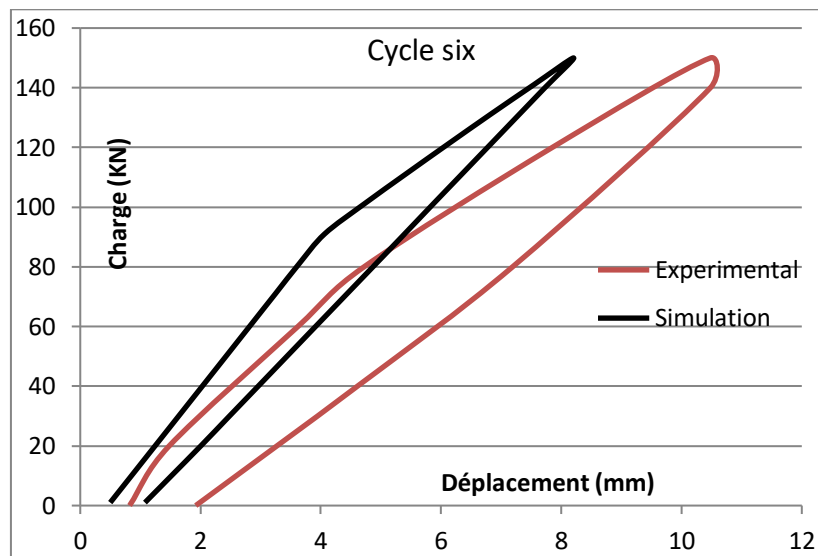


Figure 84: Courbes Charge-déplacement du 6<sup>ème</sup> cycle de Benchmark [103]

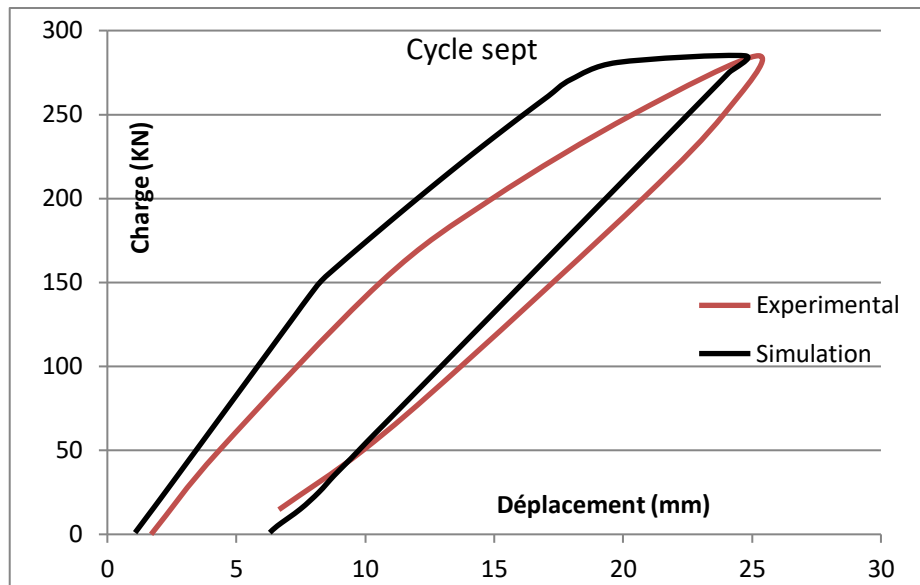


Figure 85: Courbes Charge-déplacement du 7<sup>ème</sup> cycle de Benchmark [103].

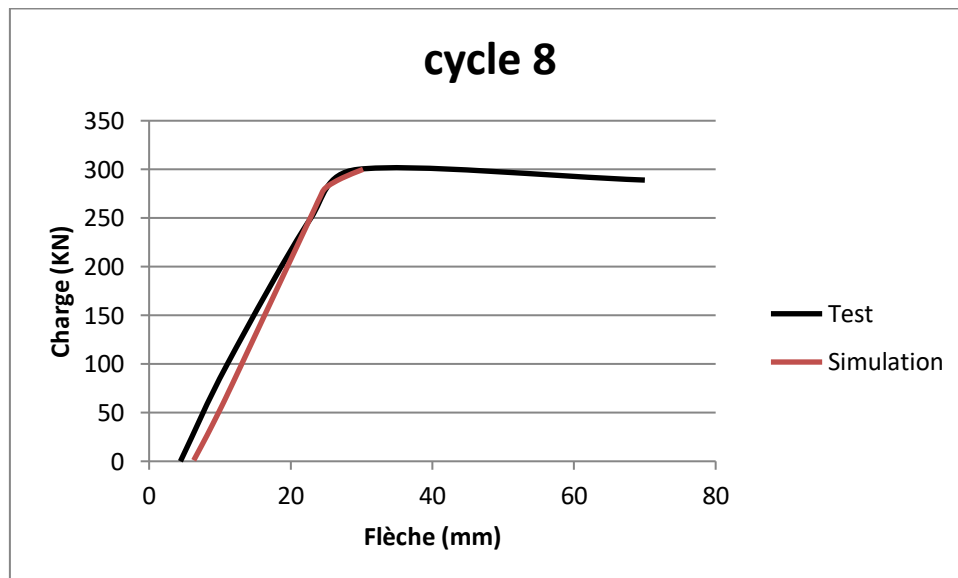


Figure 86: Courbes Charge-déplacement du 8<sup>ème</sup> cycle de Benchmark [103].

Le comportement cyclique est bien simulé par notre programme pour les 8 cycles de chargement (figure 83). Cela prouve que le modèle adopté et utilisé ici a été capable de prédire avec succès la dégradation de rigidité d'un cycle à l'autre. L'estimation des déformations résiduelles et les valeurs de la flèche surtout pour les deux derniers cycles sont en bon accord (figures 85 et 86).

### 3.3.Essai de Sulayfani [10] :

Il s'agit d'une poutre en béton armé sous sollicitation alterné en flexion, testé sur la dalle d'essais du laboratoire de Génie Civil de l'ENSM de Nantes par Sulayfani. Les essais ont été réalisés après 90 jours. La résistance en compression du béton est évaluée par la moyenne des résultats d'écrasement sur six cylindres, dont les données sont affichées sur le tableau 9:

Tableau 10 : Caractéristiques mécaniques du béton [10].

Béton	$E_b$ (MPa)	$\nu$	$f_{bc}$ (MPa)	$f_{bt}$ (MPa)
	23000	0.2	23	2

Pour les aciers, des aciers de type Fe E500 ont été utilisés. Les caractéristiques mécaniques des armatures obtenues d'après des essais en traction sont données par le tableau 10 :

Tableau 11: Caractéristiques mécanique des aciers [10].

Diamètre	$\epsilon_e$ %	Limite élastique $f_e$ (MPa)	Résistance ultime $f_u$ (MPa)	Allongement de palier plastique %	Allongement à la rupture %
Ø16	2.0	573	643	2	20

Les caractéristiques géométriques ainsi que le ferrailage de la poutre sont illustrés sur la figure 87:

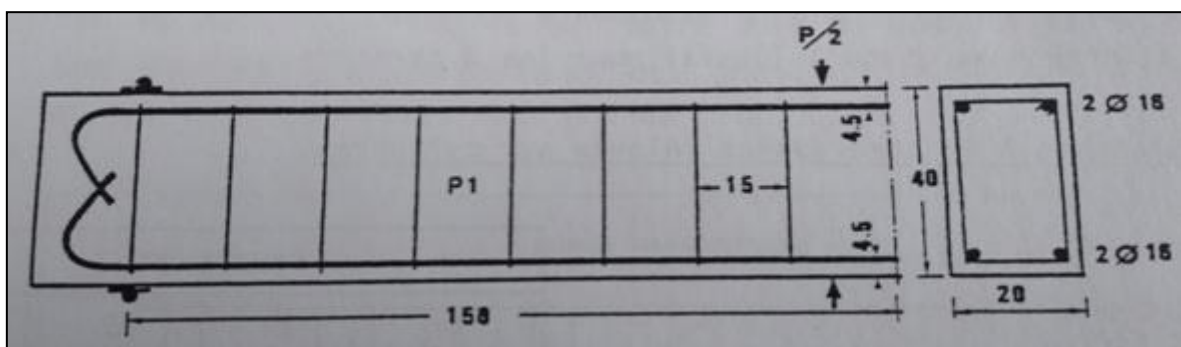


Figure 87: Caractéristiques géométriques et ferrailage de la poutre de Sulayfani [10].

Après l'analyse numérique en utilisant poutre\_cycle et en décrivant la poutre en dix éléments nous avons eu les résultats illustré sur les figures 85 et 86.

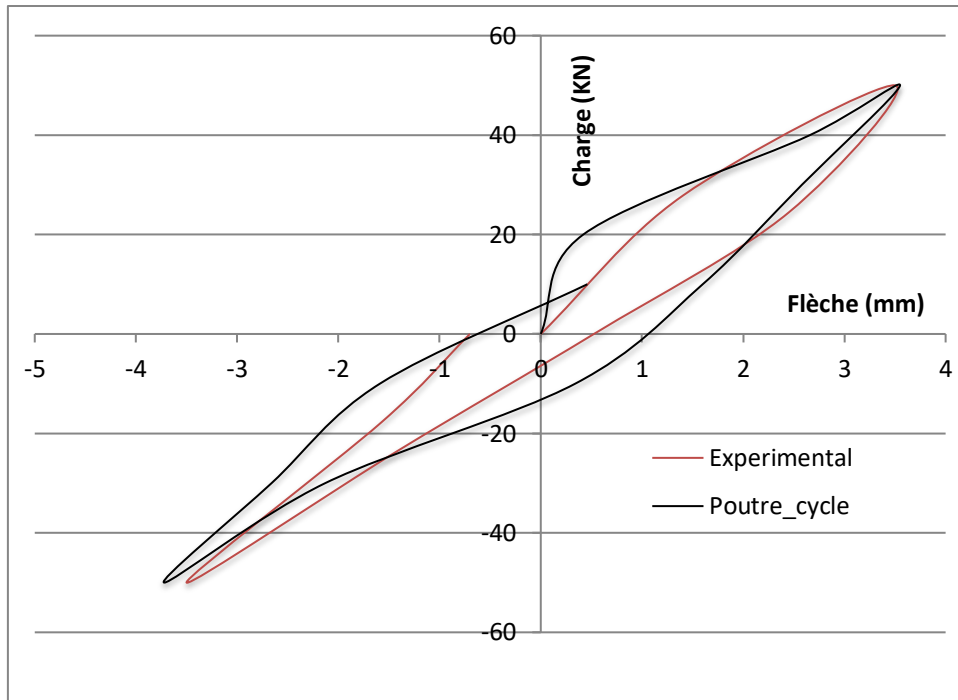


Figure 88: Courbe Charge-Flèche du premier cycle [10].

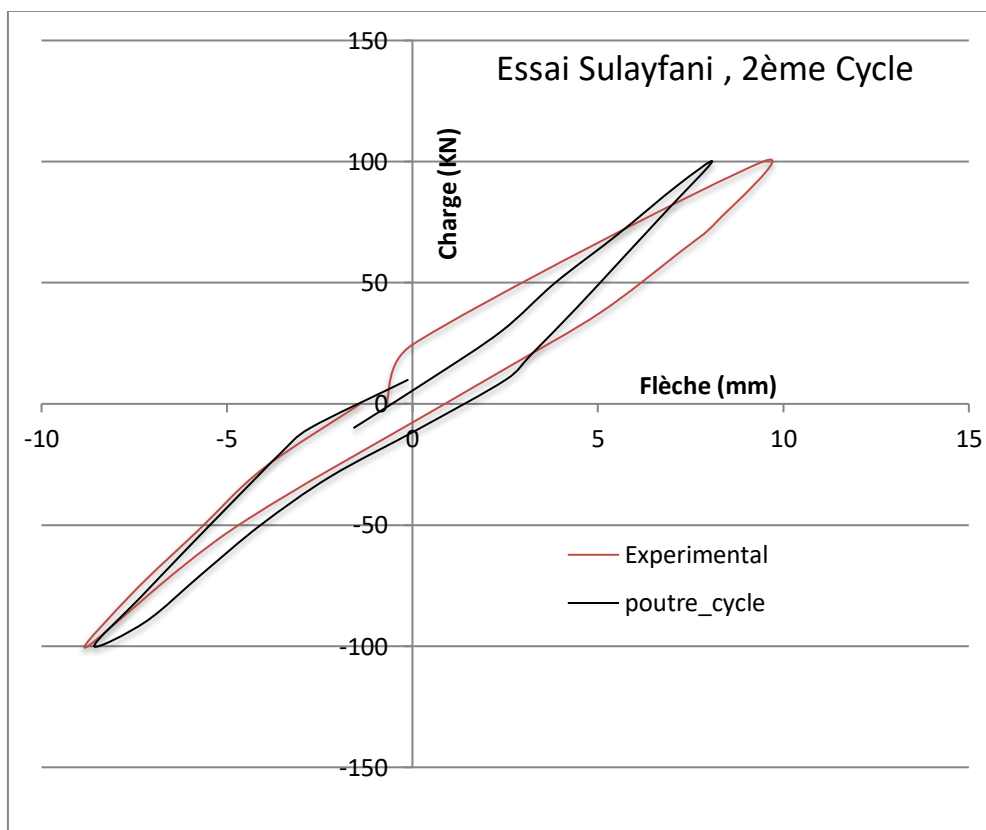


Figure 89: Courbe Charge-Flèche du deuxième cycle [10].

Les résultats obtenus permettant de confirmé la validation de l'approche utilisé sous sollicitations cyclique, en particulier pour l'évaluation de la relation charge-flèche des

sections fléchies. La comparaison entre les flèches expérimentale et numérique obtenu par notre programme, à mis en évidence un décalage minimum, sauf pour le deuxième cycle sous la charge de 100 kN où nous avons enregistré un écart de 14.97% . Un écart similaire (15%) a été obtenu par Sulayfani lors de la comparaison de son modèle avec les tests. Le tableau 11 dresse une comparaison entre les modèles numériques et les résultats expérimentaux.

Tableau 12 : Comparaison des résultats essai-calcul [10].

	Premier cycle		Deuxième cycle	
	Charge = 50 KN	Charge = -50 KN	Charge = 100 KN	Charge = -100 KN
Flèche relevé par Sulayfani	3,5 mm	-3,5 mm	9,45 mm	-8,75 mm
Flèche estimé par Poutre_cycle	3,55 mm	-3,72 mm	8,08 mm	-8,58 mm
<b>Ecart (%)</b>	<b>1.42%</b>	<b>6,28%</b>	<b>14,97%</b>	<b>1,94%</b>

### 3.4.Exemple de Qiu [97] :

C'est une colonne en béton armé testée par Qiu et col [97], cette dernière est soumise à un chargement vertical constant de 350 KN et un chargement horizontal cyclique alterné, dont les caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux sont définies à la figure 90. Dans le modèle numérique, la colonne est discrétisé en neuf éléments. Les résultats obtenus pour le 1<sup>er</sup> cycle sont superposés sur les résultats de l'essai de Qiu et illustrés sur la figure 91. On constate que le programme développé a bien simulé le comportement de cette poutre. Néanmoins, lors du cycle de déchargement compression-traction, on constate une sous-estimation de la flèche avec un écart de 17,96%.

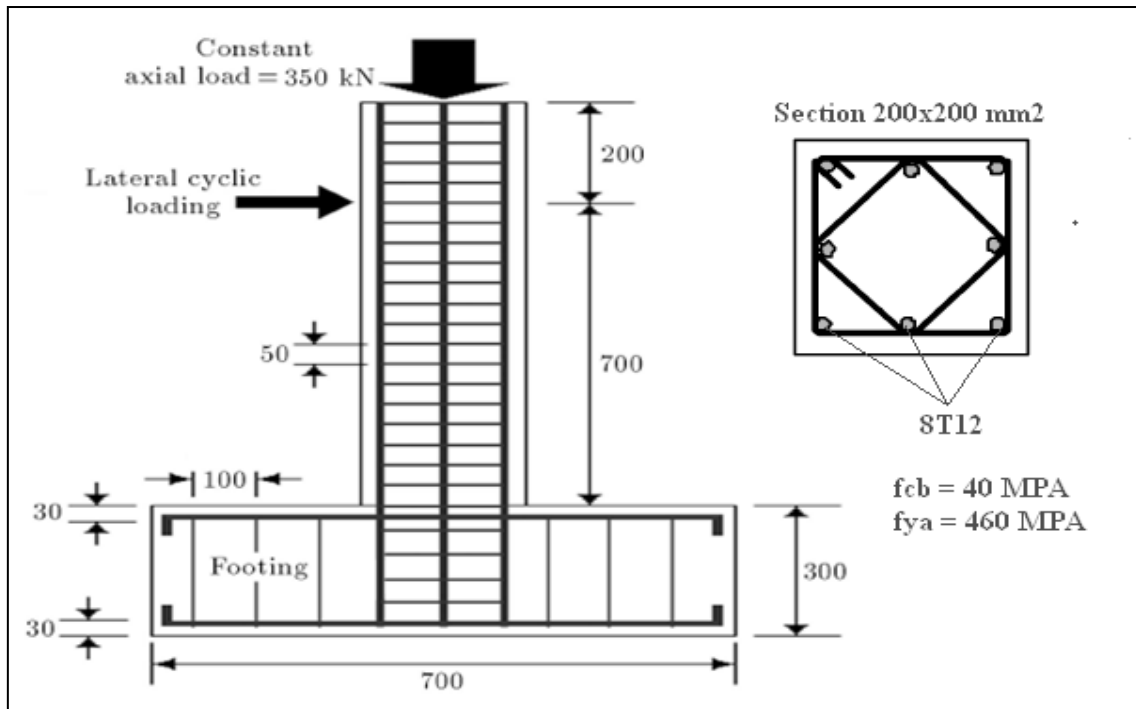


Figure 90: Données géométriques de l'élément et mécaniques des matériaux-essai de Qiu [97].

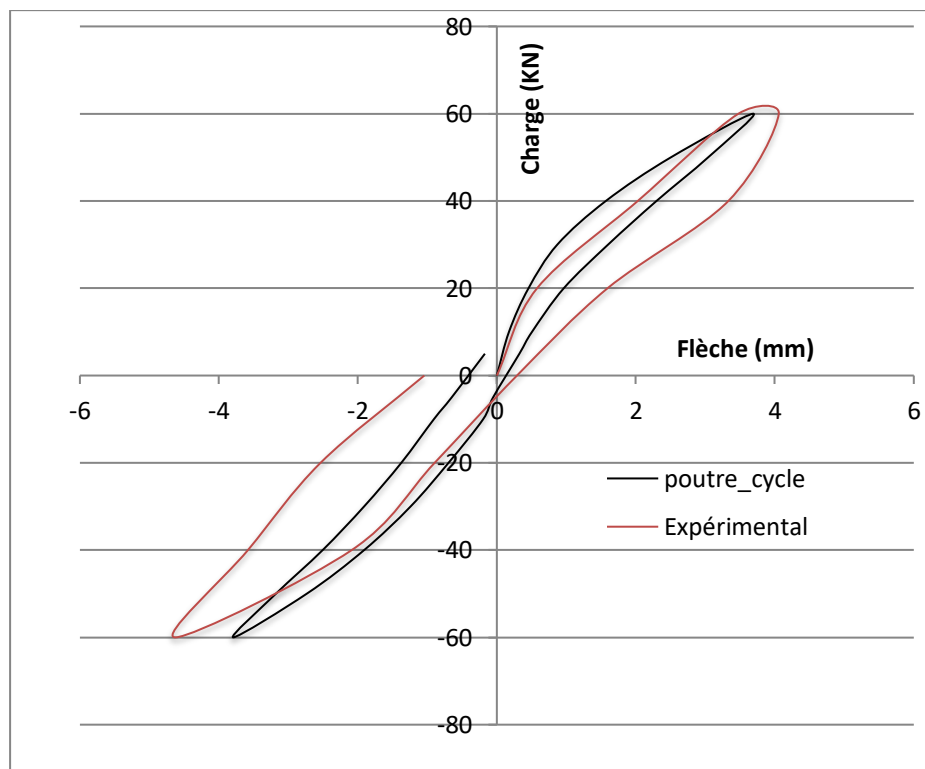


Figure 91: Courbe charge-déplacement – essai de Qiu [97].

#### 4. Étude des différents phénomènes du comportement cyclique du béton

Comme nous avons dit auparavant, le chargement cyclique en plasticité, provoque des microfissures au niveau microscopique. Ces endommagements microscopiques se traduisent par des modifications au niveau des propriétés macroscopiques de la poutre, à savoir : une diminution de la rigidité et l'apparition des déformations résiduelles (permanentes).

La Figure 92 présente la réponse du béton sous un chargement cyclique alterné. Afin de mieux comprendre le phénomène de la dégradation de la rigidité nous avons présenté sur la figure 93 la variation de la rigidité en fonction de chargement appliqué à travers les huit cycles de chargement de l'essai de Benchmark [103].

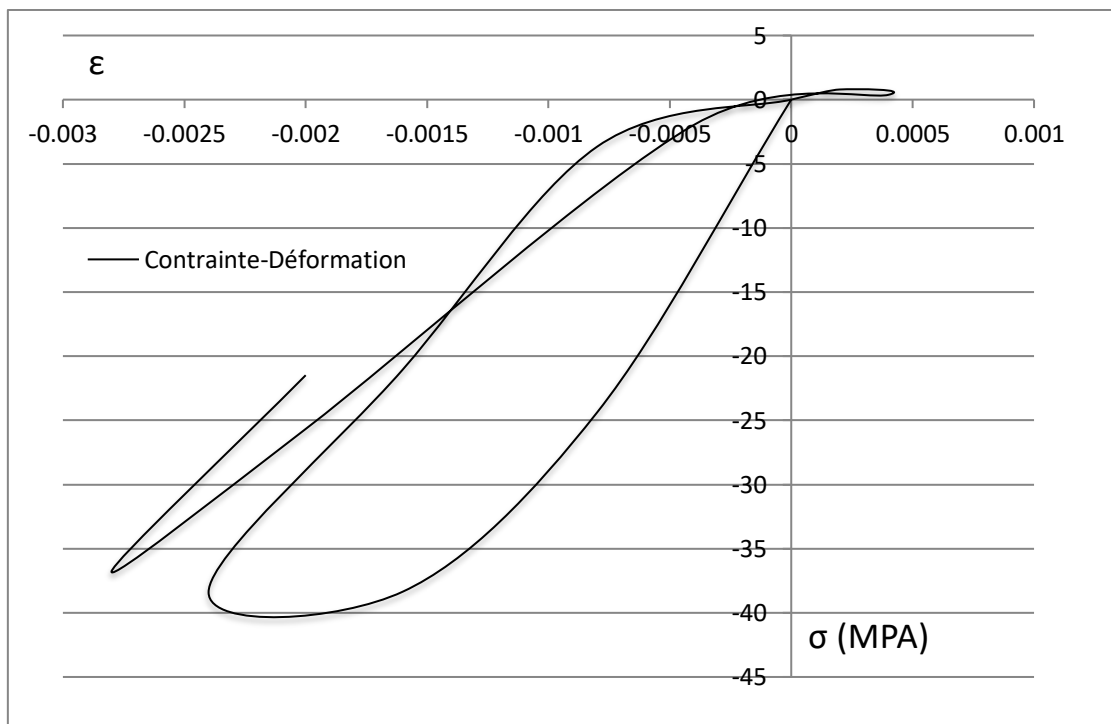


Figure 92 : Courbe contrainte-déformation du béton.

À travers cette loi uni-axiale, nous constatons que notre modèle a bien assuré la continuité du passage d'un cycle de compression à un cycle de traction et a montré aussi sa capacité de prendre en compte l'effet unilatéral ainsi que l'effet anélastique. La figure 94 illustre la relation entre la déformation résiduelle et la déformation du début de déchargement du cycle en cours. Les courbes de réponse des autres modèles disponibles dans la littérature sont aussi représentées.

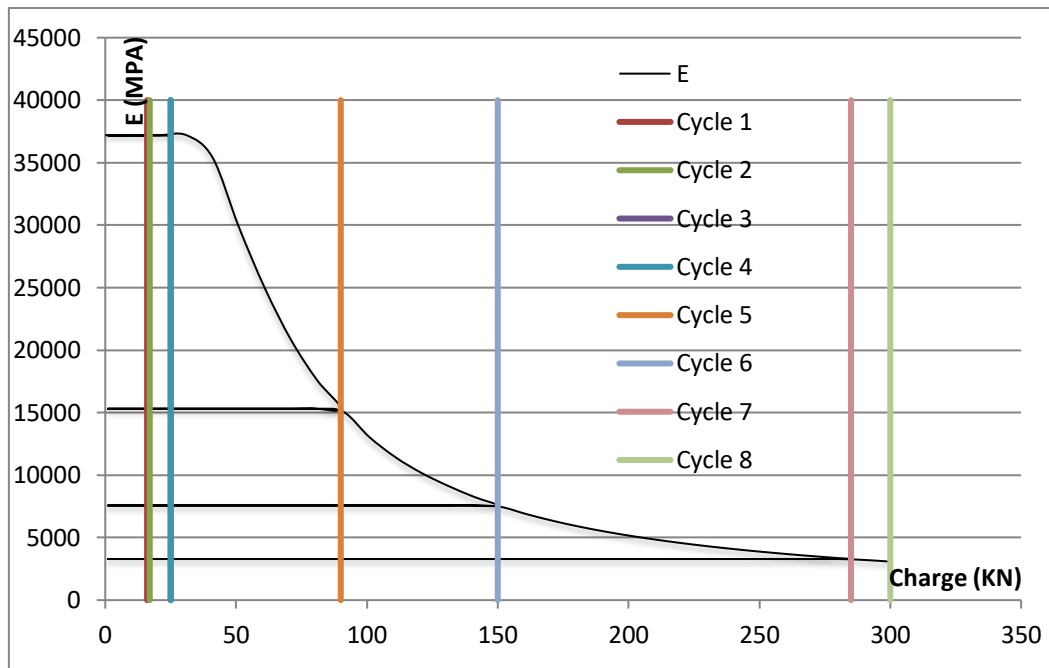


Figure 93 : Variation de la rigidité en fonction de la charge.

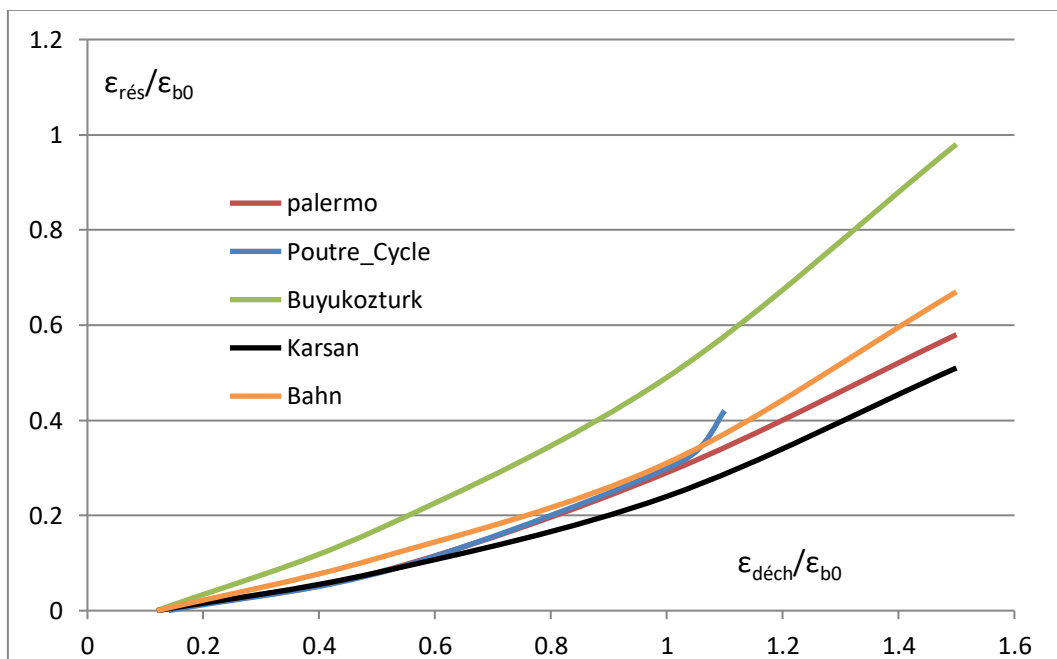


Figure 94 : Relation entre déformation résiduelle et la déformation du début de déchargement [89].

L'examen des diverses formulations révèle qu'aucun modèle ne semble le plus approprié et que le modèle proposé par Karsan représente une solution de limite inférieure et celui de Buyukozturk de la limite supérieure. Le modèle proposé prédit des déformations résiduelles pratiquement les mêmes du Palermo [89] et proche de celle de Bahn et Hsu [13] aussi.

### 5. Étude comparative des trois types d'éléments élaborés précédemment :

Dans cette partie, nous présentons les résultats des simulations numériques, sur la poutre sous armée testée à l'INSA de Lyon [78] (France), en utilisant les trois modèles d'éléments finis poutres à deux, trois et à quatre nœuds dont la formulation a été présentée dans les chapitres précédents (Chapitre II). Pour chaque modèle, nous avons considéré plusieurs discrétisations, en faisant varier le nombre d'éléments finis jusqu'à obtenir une précision suffisante des résultats. Les courbes de comparaison sont illustrées dans les (Figures : 95, 96, 97 et 98). La figure 95 concerne l'élément poutre à 2 nœuds. Le nombre d'éléments a été varié de 3 à 20. La figure 96 présente l'élément poutre à 3 nœuds. Le nombre d'éléments a été varié de 3 à 8. Celle de la figure 97 concerne l'élément à 4 nœuds. Le nombre d'éléments a été varié de 2 à 4.

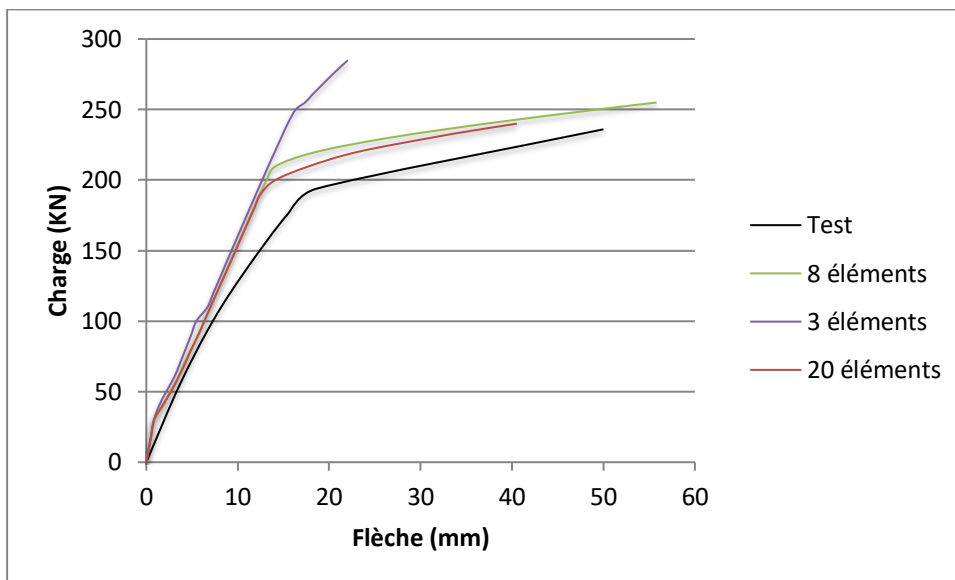


Figure 95 : Résultats de la simulation donnés par un élément poutre à deux nœuds [78].

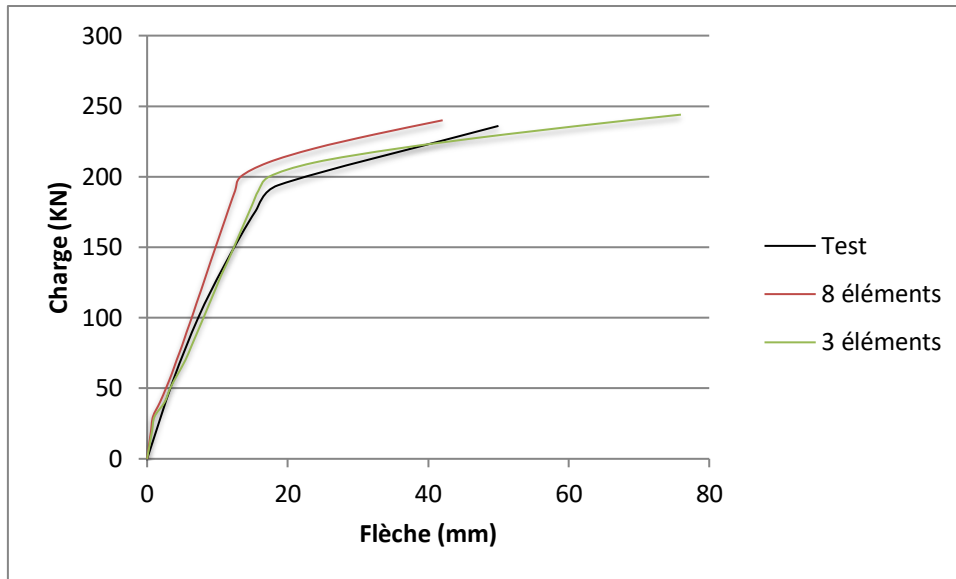


Figure 96 : Résultats de la simulation donnés par l'utilisation d'un élément à trois nœuds [78].

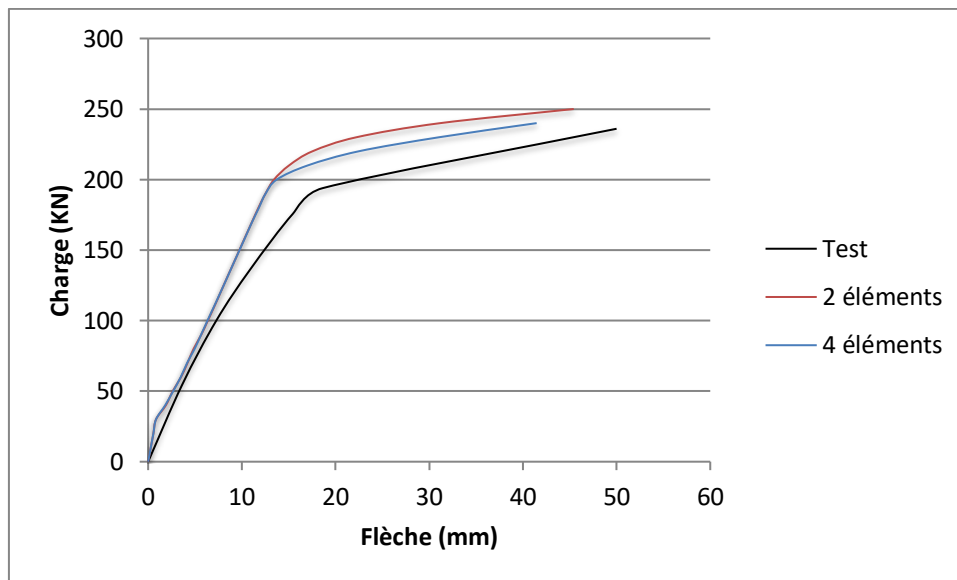


Figure 97 : Résultats de la simulation donnés par l'utilisation d'un élément à quatre nœuds [78].

A partir des résultats présentés sur les figures 95, 96 et 97, nous avons constaté qu'avec une discrétisation en utilisant l'élément finis à quatre nœuds avec un nombre minimale (4 éléments), nous aurons des résultats plus proches qu'à l'utilisation d'élément à deux nœuds avec un nombre de vingt éléments. Cela ça va nous faciliter la tâche d'introduire les données de la structure sachant que dans notre fichier de donnée nous sommes obligés d'introduire le nombre des éléments ainsi que les coordonnées des nœuds et les connectivités des éléments.

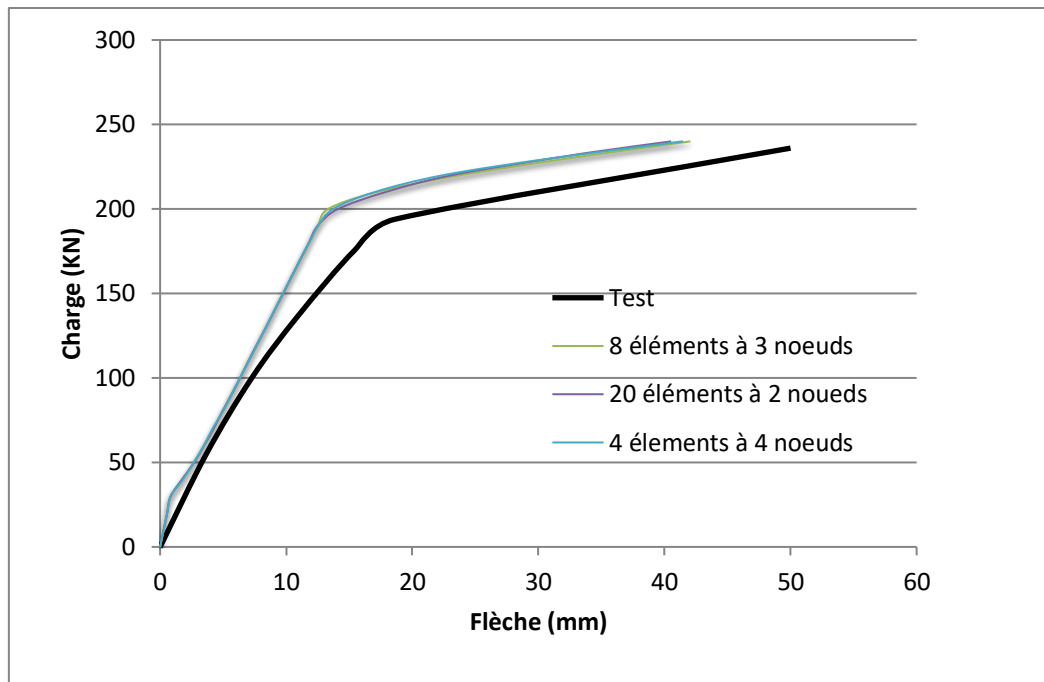


Figure 98: Comparaison des courbes force-déplacements des différents éléments utilisés [78].

Sur la figure 98, nous avons constaté une équivalence entre les trois modèles d'élément finis utilisé avec les discrétisations suivante :

- 20 éléments à 2 noeuds.
- 8 éléments à 3 noeuds.
- 4 éléments à 4 noeuds.

### 5.1. Étude de la performance des trois modèles d'élément finis type poutre:

Pour pouvoir comparer la performance des trois modèles d'éléments finis élaborés précédemment, nous avons tracé deux courbes représentatives (erreurs relatives sur les charges figure 99 et les déplacements à la rupture figure 100) en fonction de nombre d'éléments. Le tableau 12 présente les principaux résultats obtenus par les trois modèles d'éléments poutre. Dans ce tableau :

$F$  et  $d$  notent la force maximale et le déplacement maximal en fonction du nombre d'éléments finis utilisés.

$F_{disr\ max}$  et  $d_{disr\ max}$  notent la force et le déplacement correspondant à la discrétisation maximale en fonction du modèle d'éléments finis utilisé.

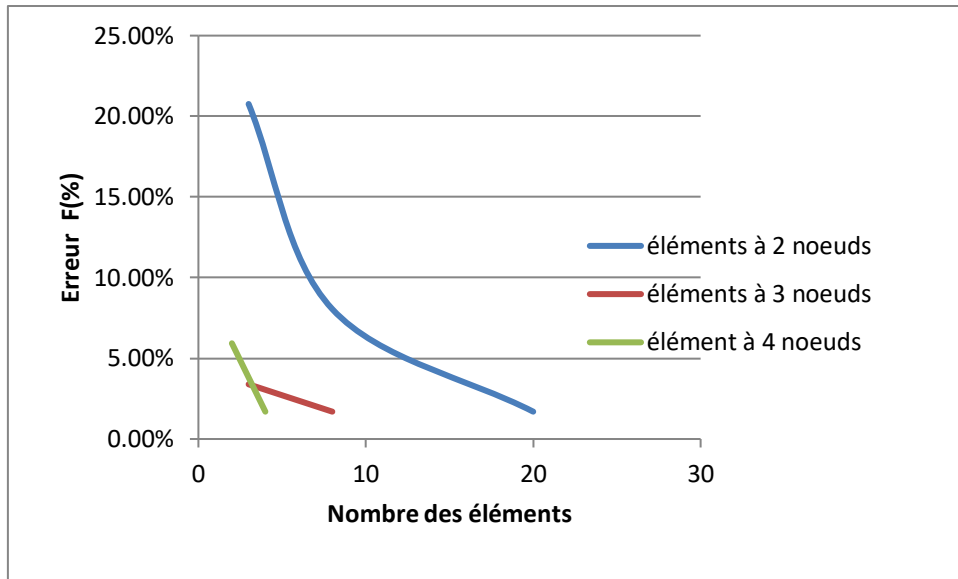


Figure 99 : courbes erreur relative (en %) sur la charge de ruine - Nombre d'élément pour trois modèles d'élément.

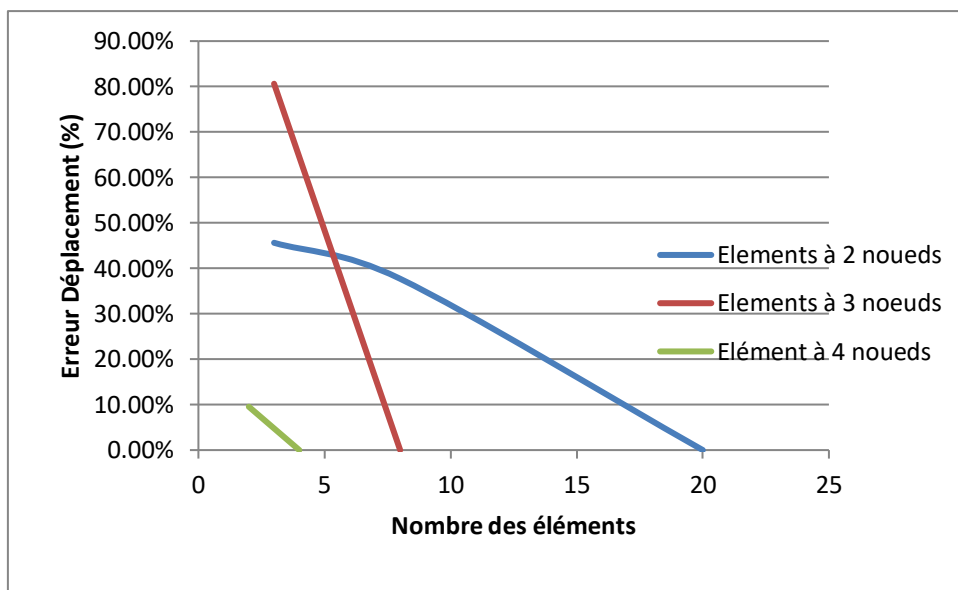


Figure 100 : courbes erreur relative (en %) sur le déplacement - Nombre d'élément pour les trois types d'éléments utilisés.

Tableau 13 : Résumé des principaux résultats donnés par les différentes versions du programme.

Modèle d'élément fini utilisé	N d'éléments	Forces (KN)	Déplacement (mm)	$\frac{F}{F_{discr\ max}}$	Erreur relative Err F (%)	$\frac{d}{d_{discr\ max}}$	Erreur relative Err d (%)
Élément à deux nœuds	3 éléments	285	22.04	1.18	18.75	0.54	45.62
	8 éléments	255	55.81	1.06	6.25	1.37	37.70
	20 éléments	240	40.53	1	0	1	0
Élément à trois nœuds	3 éléments	244	75.97	1.01	1.66	1.80	80.62
	8 éléments	240	42.06	1	0	1	0
Élément à quatre nœuds	2 éléments	250	45.43	1.04	4.16	1.09	9.54
	4 éléments	240	41.47	1	0	1	0

En s'appuyant sur les figures 96 et 97, on peut tirer les points suivants :

- La performance des trois modèles apparaît clairement en comparant les variations des erreurs relatives de forces et des déplacements en fonction du nombre d'éléments finis utilisés dans la discrétisation.
- Il est clair que les erreurs relatives sur la charge et le déplacement à la rupture diminuent. Autrement dit la précision s'améliore, lorsque le nombre d'éléments finis augmente.
- Concernant la précision dans l'évaluation de la charge maximale et les déplacements, les modèles de poutre à 3 et 4 nœuds sont largement plus performants que le modèle de poutre à 2 nœuds.

- En conclusion le modèle de poutre à 4 nœuds est plus performant que les deux autres modèles.

#### **6. Influence de la prise en compte du béton tendu sur le comportement cyclique des structures en béton armé :**

Le béton est un matériau à comportement différent en compression et en traction. Cette différence réside essentiellement dans sa faible résistance en traction qui représente environ le dixième de sa résistance en compression. Cette faible résistance en traction conduit la plupart des chercheurs à négliger la contribution du béton tendu dans le calcul des structures en béton armé. Dans cette partie, nous avons effectué une étude comparative des simulations numériques, en utilisant le programme informatique « poutre\_cycle », en tenant compte et en négligeant la contribution du béton tendu pour le calcul des structures en béton armé sous chargement cyclique, et cela pour voir son influence sur le comportement global de la structure.

Comme exemple d'application, nous avons choisi l'exemple de Christia [77] traité auparavant, dont les caractéristiques mécaniques de matériaux et géométrique de la poutre sont illustré sur le tableau 8 et la figure 80 respectivement. Afin de voir l'influence de la prise en compte du béton tendu lors du calcul des structures, nous avons simulé le même exemple en négligeant la contribution du béton tendu. Les résultats sont illustrés sur la figure 101.

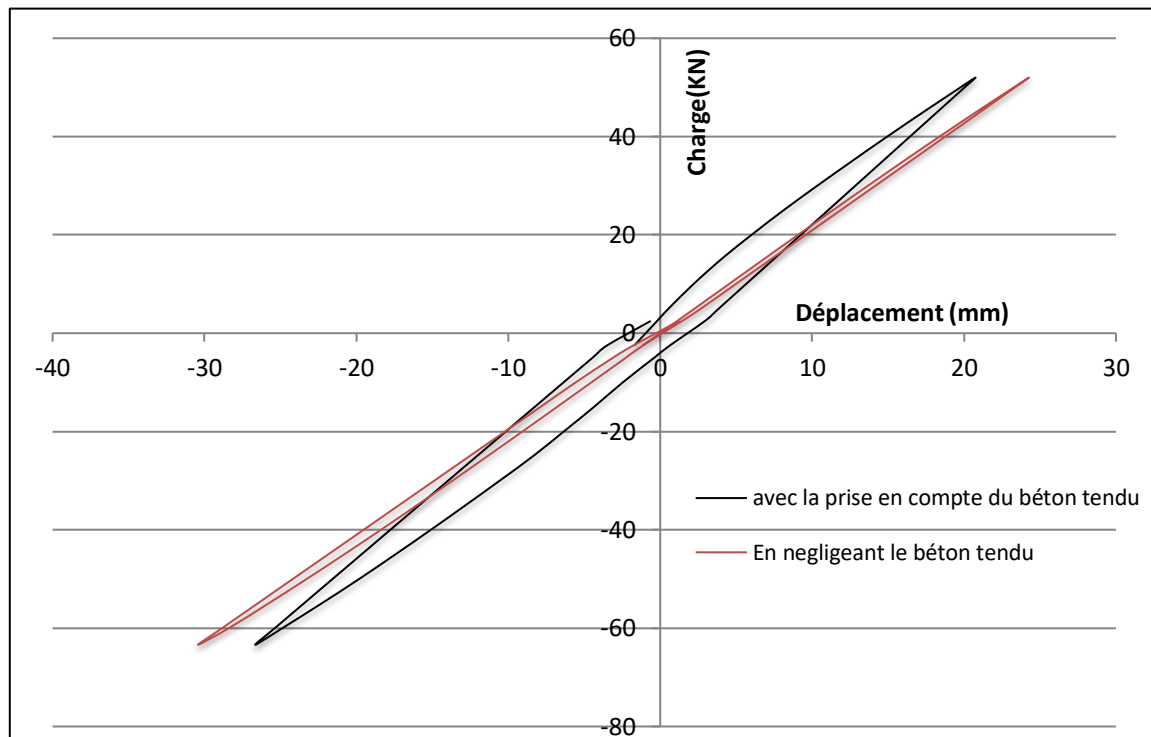


Figure 101 : Influence de la négligence du béton tendu.

En se basant sur cet exemple, nous constatons que la négligence de la contribution du béton tendu engendre une sur estimation des déformations représentées par un écart de 16,96%, et une sous-estimation de la rigidité de la structure par un écart de 14,4%.

## 7. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons simulé numériquement des exemples des essais réalisés existant en littérature des structures sous chargement monotone et cyclique.

Les résultats obtenus et leur comparaison avec ceux des essais expérimentaux, nous a montré que la méthode de calcul proposé pour simuler le comportement des structures sous sollicitations cycliques et monotone permet la prévision de la loi charge-flèche d'une manière satisfaisante.

Ensuite, une étude comparative des différents éléments poutre développé a été faite, par laquelle nous avons confirmé la performance de l'élément finis à quatre nœuds et nous a permis de minimiser le volume des données relative aux éléments constituant la structure étudiée et bien sûr avoir des résultats avec précision.

Et enfin, une étude de l'influence du béton tendu sur le comportement global des structures a été faite, cette dernière nous a montré que le béton tendu contribue d'une façon non négligeable à la rigidité des éléments et à l'évaluation des déformations et des déplacements d'une façon très proche de l'expérience.

## Conclusion générale et perspectives :

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation du comportement non linéaire des structures planes en béton armé sous charges monotones et cycliques.

Après la revue des travaux de la littérature traitant le sujet, un modèle complet de comportement non linéaire des poutres planes en béton armé a été développé. Il prend en compte les effets de plasticité, ainsi que l'endommagement et la dégradation des matériaux sous les effets du chargement monotone ou cyclique alterné combinant les charges et décharges successives.

En présence de la plasticité et des chargements cycliques, les calculs analytiques sont difficiles ou même impossible à appliquer. Le recours aux modèles numériques basés essentiellement sur la méthode des éléments finis paraît important. Dans cet objectif, un modèle en éléments finis basé sur la théorie des poutres a été développé. La formulation de ce dernier est basée sur l'hypothèse de Navier-Bernoulli. Une extension ensuite a été présentée en développant deux autres modèles d'élément finis plus performants à trois nœuds et quatre nœuds ou dans littérature sauf quelques fonctions de formes d'un élément à trois nœuds ont été présenté. Cette extension a été faite dans l'objectif de faciliter le raffinement du maillage dans les zones qui présentent des fortes non linéarités et par la suite avoir des résultats plus proche de la réalité.

Une loi de comportement élasto-plastique pour les matériaux constituant la structure, à savoir le béton et les aciers a été considérée. Cette loi a permis de décrire correctement le comportement non linéaire sous chargement cyclique et monotone tout en prenant en considération les différents phénomènes observés expérimentalement à savoir la dégradation de la rigidité en présence des déformations plastiques résiduelles et de la fissuration, la restitution de la raideur en cours d'un chargement cyclique alterné et la prise en compte du béton tendu. Ceci afin de modéliser le comportement réel du béton alors que la plupart des chercheurs ont négligé ces aspects vu la complexité de modéliser le passage d'un cycle de traction à un cycle de compression et les phénomènes liés à ce passage comme par exemple la re-fermeture des fissures.

Aussi, et à la base de l'algorithme de la rigidité sécante et les différentes hypothèses et méthodes de calcul présentées auparavant, un programme informatique rédigé en Fortran

90 a été développé. Ce programme permet la simulation numérique du comportement de n'importe quelle structure plane en béton armé sous chargements monotones ou cycliques.

La validation du modèle numérique développé dans ce travail a été faite par la simulation numérique de plusieurs exemples existant dans la littérature. Des comparaisons à des résultats des essais réalisés sur des structures en béton armé sous chargement monotone et cyclique ont été faites. Un accord entre le modèle numérique et les résultats des essais est souvent observé.

Une présentation des résultats d'une étude des différents phénomènes observés lors du chargement cyclique des éléments à savoir la dégradation de la rigidité et l'apparition des déformations plastiques permanentes a montré que notre modèle est continu. En effet il assure le passage compression-traction et le passage d'un cycle à l'autre ainsi que la capacité de prendre en compte l'effet unilatéral et anélastique.

Aussi, une étude de l'influence du béton tendu sur le comportement global de la structure a été faite. Elle a montré que le béton tendu contribue d'une façon non négligeable car il engendre une sur estimation des déformations et une sous estimation de la rigidité de la structure.

Enfin, une étude comparative des trois modèles d'éléments finis a montré la performance de l'élément poutre à quatre nœuds développé par rapport aux autres modèles d'éléments.

La comparaison des résultats obtenus par notre programme avec ceux des essais réalisés, montre le bon fonctionnement de l'approche utilisée et l'aptitude de notre programme poutre-cycle à simuler correctement le comportement non linéaire des ossatures en béton armé.

Malgré ces résultats encourageants, le présent modèle mérite d'être étendu et enrichi afin de répondre aux exigences des ingénieurs et des chercheurs. Les domaines d'application sont larges. Il conviendrait de faire progresser notamment :

- La prise en compte du phénomène de fatigue.
- La prise en compte de la non linéarité géométrique et les déformations dues à l'effort tranchant.
- Extension de notre modèle au calcul des structures en béton précontraint et béton de fibres.
- Comparaison du modèle aux simulations issues des codes de calcul commerciaux.

## Références:

- [1] Ahmed. A, Modeling of a reinforced concrete beam subjected to impact vibration using ABAQUS. International Journal of Civil and Structural Engineering, 4-3 (2014) 227-236.
- [2] Ahmer Ali, Dookie Kim and Sung Gook Cho, Modeling of nonlinear cyclic load behavior of shaped Composite steel-concrete Shear walls of nuclear power plants, Nuclear Engineering and Technology, vol.45 no.1, february 2013, pp 89-98.
- [3] Al sulayfani.B .J, Abdullah.M.M, Study of bending behavior of reinforced concrete sections under cyclic loads, Tikrit Journal of Eng. Sciences/Vol.14/No.1/March 2007, pp 1-27.
- [4] Albanesi. T, Nuti. C, Reinforcing steel bar model, dipartimento di strutture, università degli studi di roma tre, maggio, 2007, 32 p.
- [5] Albano antónio, Aspects on nonlinear geometric and material analysis of threedimensional framed structures, Master in civil engineering, Faculty of engineering of the University of Porto, Portugal, 2009, 107 p.
- [6] Alioua.N, Drizi.S, Benmansour.M.B, Debit, Bouazzouni.O, ' ' Formulation and presentation of modeling based on three node beam element and four node ' ', 12<sup>th</sup> International congress on advances in civil engineering, 21-23 September 2016, Istanbul, Turkey.
- [7] Alioua.N, Drizi.S, Meziane.R, Belhoucine.M, ' ' Modeling and simulation of nonlinear behavior of planar structures, of reinforced concrete and fibers concrete by the finite element beams' ', Journal of Science Research, N°7, Pages 3-8, July 2014.
- [8] Alioua.N, Messafer.T, Kachi.M.S, "Modeling the cyclic behavior of concrete", The Second Students Symposium on Engineering application of Mechanics, Chlef, December 13-14, 2017.
- [9] Alioua.N, Messafer.T, Kachi.M.S, Mohri.F, " Contribution to the modeling of the cyclical and monotonic behavior of reinforced concrete structures", Asian Journal of Civil Engineering, Vol 18 N° 7, Pages 1009-1024, November 2017.
- [10] AL-SULAYFANI. B, " Contribution à l'étude du comportement des ossatures en béton armé sous sollicitations cycliques par analyse non-linéaire globale " Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, Nantes , 06 Mars 1986 .
- [11] Aouameur-Mesbah Amel, Analyse non-linéaire matérielle et Géométrique des structures coques en béton Arme sous chargements statiques et Dynamiques, Thèse de Doctorat De l'école nationale des ponts et chaussées, 1998, p 210.

- [12] Aslani F, Jowkarmeimandi. R, Stress-strain model for concrete under cyclic loading, Magazine of Concrete Research, 64-8 (2012) 673-685.
- [13] Bahn, B.Y. & Hsu, C.-T.T., Stress-Strain behavior of concrete under cyclic loading, ACI Materials Journal, 95- 2 (1998) 178-193.
- [14] Bathe K.J, Walcwk J, Welch A, Mistry N. Nonlinear analysis of concrete structures. Computers and Strucutres, 32-314 (1989) 563-590.
- [15] Bathe K.J. and Ramaswamg S. On tree-dimensional nonlinear analysis of concrete structures. Nuclear Engineering and design 52-3 (1979) 385-409.
- [16] Belmouden.Y, Lestuzzi.P, Analytical model for predicting nonlinear reversed cyclic behaviour of reinforced concrete structural walls, Engineering Structures 29 (2007) 1263–1276, 2006.
- [17] Benmansour M.B, Modélisation du comportement cyclique alterné du béton armé, Thèse de Doctorat, l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées de Paris, 1997, 142 p.
- [18] Bosco. M, Ferrara. E, Ghersi. A, Marino. E.M and Rossi. P.P, improvement of the model proposed by menegotto and pinto for steel, Second European Conference on Earthquake Engineering and seismology, Istanbul, Aug 25-29, 2014.
- [19] Bouzaiene. A. K, 1995, Caractérisation et modélisation du comportement non linéaire d'éléments en béton armé et non armé sous sollicitations multiaxiales, Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal. 271 p.
- [20] BULLETIN D'INFORMATION DU CEB ; "Behavior and analysis of reinforced concrete structures under alternate actions inducing inelastic response " , N° 210 , July 1991.
- [21] Carreira, D.J., Chu, K.H, “Stress-strain relationship for plain concrete in compression”, ACI Struct. J., Vol. 82, Issue 11, 1985, pp. 797-804.
- [22] Chajmowicz.H, Modélisation et simulation numérique de structures articulées flexibles, Thèse de Doctorat DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES, 1996, p 201.
- [23] Charles E. Augrade (1998). Generation of shape functions for straight beam elements. Computers and Structures 68, February 1998, pp 555-560.
- [24] Chen. X, Xu. L, and Bu. J, Experimental Study and Constitutive Model on Complete Stress-strain Relations of Plain Concrete in Uniaxial Cyclic Tension, KSCE Journal of Civil Engineering, Published Online September 19, 2016, pp. 1-7.
- [25] Collins, M. P., and Mitchell, D. Prestressed Concrete Basics, Canadian Prestressed Concrete Institute, Ottawa, Canada, 1987, 614 pp.

- [26] Corigliano A, Perego U, Unconditionally stable mid-point time integration in elastic-plastic dynamics, Rend. Acc. Lincei, s. 9,1, 367-376, 1990.
- [27] Cosmin g. Chiorean, Application of pushover analysis on reinforced concrete bridge model, Project pocti/36019/99, July 2013.
- [28] Costa.J .L. D, Reinforced Concrete under Large Seismic Action, Report BYG·DTU R-076 2003 ISSN 1601-2917 ISBN 87-7877-139-0.
- [29] Desjardins. R et Fafard. M, 1992. Développement d'un logiciel pour l'analyse des structures par éléments finis utilisant l'approche de la programmation orientée objets. Rapport technique GCT-92-05, Département de génie ad, Université Laval, Quebec, Canada.
- [30] Djerroud Mourad, Contribution à l'analyse des pièces fléchies en béton armé sous chargements monotone et cyclique : Développement et validation de modèles élasto-plastiques, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Mai 1992, 254 p.
- [31] Drizi S, Contribution à l'étude du comportement des voiles porteurs en béton vis-à-vis des sollicitations sismiques, Thèse de Doctorat, Paris VI, Avril 1993.
- [32] Drizi. S, Kaci. S, Oubraham. C, Amiar. F, Belhocine. M, << Simulation du comportement instantané et différé d'une zone en béton armé>>, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [33] Elmorsi, M. Reza Kianoush, M. & Tso, W.K., Nonlinear analysis of cyclically loaded reinforced concrete structures, ACI Structural Journal, 95-6 (1998) 725-739.
- [34] Enrique Martinez-Rueda. J, Elnashai. A.S, Confined concrete model under cyclic load, Materials and structures/ Matériaux et constructions, Vol 30, April 1997, pp 139-147.
- [35] Espion B, Contribution à l'analyse non linéaire des ossatures planes, application aux structures en béton armé, Thèse de docteur en science appliqués, Université libre de Bruxelles, 1986.
- [36] Fenwick R.C and Fong.A, The behaviour of reinforced concrete beams under cyclic loading, BULLETIN OF THE NEW ZEALAND NATIONAL SOCIETY FOR EARTHQUAKE ENGINEERING, VOL. 12, NO. 3 JUNE 1979, pp 158-167.
- [37] Filippou, F .C, Kwak H .G, (1990), «Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads», rapport N°, department of civil engineering , University of California, p 71
- [38] Filippou. F.C, Issa. A, Nonlinear Analysis Of Reinforced Concrete Frames Under Cyclic Load Reversals, Report No. UCB/EERC-88/12 Earthquake Engineering Research Center College of Engineering University of California, Berkeley, September 1988, p 105.

- [39] Fillipou F.F, Kwak H.G ,( 1997) , «Non linear finite element analysis of R/C structures under monotonic loads» , Computer and structures journal, vol 65,1 Elsevier.
- [40] Fillipou F.F, Kwak H.G, «Non linear finite element analysis of R/C structures under monotonic loads» , Computer and structures journal, 65-1 (1998) Elsevier.
- [41] Fouré B, Béton à haute résistance – essais des poteaux OG, Rapport du SES-CEBTP- Novembre 1985.
- [42] Franklin H A, Non linear analysis of reinforced concrete frames and panels .Dissertation division of structural engineering and structural mechanics. University of California (1970).
- [43] Frantzeskakis.C, Contribution a la modélisation des structures en béton arme par la méthode des éléments finis, Thèse de Doctorat de l'école nationale des ponts et Chaussées, 1987, p160.
- [44] Fronteddu. L. F, Response of reinforced concrete to reverse cyclic loading, Thesis Master of Applied Science, The University of British Columbia, 1972, 118 p.
- [45] Gear G.W, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. USA (1971).253 p.
- [46] Genikomsou A S , Polak MA, Finite element analysis of punching shear of concrete slabs using damaged plasticity model in ABAQUS. Engineering Structures, 98-1 (2015) 38–48.
- [47] Ghannoum .W.M, (1998), «Size effect on shear strength of reinforced concrete beams » .mémoire de master école normale supérieure de Cachan .
- [48] Gilbert. R I , Warner. R.F, (1978), « Tension stiffening in reinforced concrete slabs», journal of structural division, ASCE, vol 104, N° STE 12
- [49] Girard Claire, Modélisation De Colonnes De Pont En Béton Armé Sous Sollicitations Cycliques, Thèse de Doctorat UNIVERSITÉ LAVAL QUÉBEC, Juin 2000, p 240.
- [50] Grelat A, Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1978.
- [51] Güner Serhan, Performance Assessment of Shear-Critical reinforced concrete plane frames, Thesis Doctor of Philosophy University of Toronto, 2008, p 429.
- [52] Guner.S and F.J. Vecchio, M.ASCE2, Analysis of Shear-Critical Reinforced Concrete Plane Frame Elements under Cyclic Loading, JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING © ASCE / AUGUST 2011, pp 834-843.

- [53] Guriani E, On the effective axial stiffness of a bar in cracked concrete bond in concrete, Ed. P. Bartos, Applied science publishers, Londres, 1982.
- [54] Hammoum H, Simulation numérique du comportement non-linéaire des ossatures planes, Thèse de Magister à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 1998.
- [55] Hashemi S.SH, A.A. Tasnimi;\_ and M. Soltani, Nonlinear Cyclic Analysis of Reinforced Concrete Frames utilizing New Joint Element, Transaction A: Civil Engineering, 16-6 (2009) 490-501.
- [56] HASHEMI. S. S, VAGHEFI. M, Cyclic analysis of RC frames with respect to employing different methods in the fiber model for consideration of bond-slip effect, Turkish.J.Eng.Env.Sci.36(2012),1–18.
- [57] Hassani-Manai. S, Étude et modélisation de la stabilité des structures élancées en béton armé, Thèse de Doctorat de l'Université de Cergy-Pontoise, 2003, 143 p.
- [58] Hognestade E, A study of combined bending and axial load in reinforced concrete, Bull. No.399, Members University of Illinois Urbana 1951.
- [59] Houde MJ, Modélisation de poutres en béton armé endommagées par chargements cycliques, Thèse pour l'obtention du grade de maître ès sciences, Université Laval, 2007, 126 p.
- [60] Hughes T.J.R, The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [61] HUGUET. M, KOTRONIS. P, ERLICHER. S, VOLDOIRE. F, Une nouvelle loi de comportement homogénéisée pour des membranes en béton armé, 22ème Congrès Français de Mécanique Lyon, 24 au 28 Août 2015.
- [62] Ile. N, Contribution à la compréhension du fonctionnement des voiles en béton arme sous sollicitation sismique : apport de l'expérimentation et de la modélisation a la conception, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2000, 264p.
- [63] Kachi .M. S, (1997), «Calcul non linéaire, jusqu'à rupture, d'une section en béton armé de fibre métalliques», thèse de magister, Institut de Génie Civil, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
- [64] Kachi .M. S, (2006), « Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieure », thèse de doctorat, Institut de Génie Civil, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
- [65] Karsan, I. D. & Jirsa, J. O., Behavior of concrete under compressive loading, Journal of Structural Division , ASCE, Vol. 95(ST12), 1969, pp.2543-2563.

- [66] Kovacevic.D, FEM model for reinforced concrete frames loaded by seismic forces, Theoret. Appl. Mech., Vol.32, No.4, pp. 283-317, Belgrade 2005.
- [67] Kwak. H. G, Filippou. F.C, Finite Element Analysis Of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads, Structural Engineering Mechanics And Materials Report No.Ucb/Semm-90/14, University Of California, Novembre 1990.
- [68] Kwak. H. G, Kim. S. P and Kim. J. E, Nonlinear dynamic analysis of RC frames using cyclic moment-curvature relation, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 17, No. 3-4 (2004) 357-378
- [69] Labadi. Y, Modélisation du comportement et de l'endommagement des structures en béton sous chargement monotones et cycliques, Thèse de Doctorat d'état, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2006.
- [70] Lamirault J, Contribution à l'étude du comportement des ossatures en béton armé sous sollicitations normales, simulation par analyse non linéaire globale, Thèse du Docteur-Ingénieur présentée à l'ENSM, Université de Nantes, Juillet 1984.
- [71] Low S and Moehle J.P, "Experimental study of reinforced concrete columns subject to multiaxial cyclic loading" Earthq. Engrg. Res. Center, vol. Rep. No UCB/EERC 87-14, Univ. of California, Berkeley, Ca., 1987.
- [72] Ma, S.Y., Bertero, V.V. and Popov, E.P., "Experimental and Analytical Studies on the Hysteretic Behavior of Reinforced Concrete Rectangular and T-Beams," Earthquake Engineering Research Center, Report No. EERC 76-2, University of California, Berkeley, 1976.
- [73] Mansour, M. Lee, J.-Y. & Hsu, T.T.C., Cyclic stress-strain curves of concrete and steel bars in membrane elements, Journal of Structural Engineering, Vol. 127, No. 12, 2001, pp. 1402-1411.
- [74] Mazars J, (1984), «Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non -linéaire et à la rupture de la structure» .Thèse doctorat d'état, université Pierre Marie Curie paris 6.
- [75] Mazars, J., Kotronis, P., Ragueneau, F. and Casaux, G. \Using multi\_ber beams to account for shear and torsion applications to concrete structural elements", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195, pp. 7264-7281 (2006).
- [76] Menegotto M, Pinto P.E, Method of analysis for cyclically loaded R.C frames including changes in geometry and nonelastic behavior of elements under combined normal force and bending, Symposium on resistance and ultimate deformability of structures. Acted on by well defined repeated load, I.A.B.S.E Reports vol. 13, Lisbon, 1973.

[77] Merabet, O, Reynouard, J.M, Juillieu.J.F, Christia.L, Millard.A, Poutre en B.A, en chargement monotone et cyclique, In : Rhéologie des géomatériaux, sols, bétons, roches, GRECO, Aussois (Fr), Grenoble : IMG,1987, p.126-138.

[78] Merabet, O., Modélisation des structures planes en béton armé sous chargements monotones et cyclique - Construction et validation d'un modèle numérique, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1990, 195 p.

[79] Monti G, Nuti C. (1992). "Nonlinear cyclic behaviour of reinforcing bars including buckling." *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 118 (12), 3268-3284.

[80] Morita, S. Kaku. T and Sudo. E, Force strain relationship of reinforced bars embedded in concrete under reversed loading, *Bulletin d'information CEB*, 2-393 (1979) 7-14.

[81] Naito, T., Ueda, I<sub>4</sub> and Kikuchi, M., "Fatigue Behavior of Carburized steel with internal Oxides and Nonmartensitic Microstructure near the Surface," *Metallurgical Transactions*, Vol. 15A, July 1984, p. 1431.

[82] Nechnech Wahid, (2002), «Contribution à l'étude numérique du comportement du béton et des structures en béton armés soumises à des sollicitations thermiques couplés » .thèse de doctorat, école national de l'INSA , Lyon.

[83] Neild, S.A., Williams, M.S. & McFadden, P.D., Non-linear behaviour of reinforced concrete beams under low amplitude cyclic and vibration loads, *Engineering Structures*, 24 (2002) 707-718.

[84] Ngo D, Scordelis. A.C, Finit element analysis of reinforced concrete beams, *J. Am. Concr. Inst*, 1967, Vol 64 N°3, p. 152-163.

[85] Nilson A H, Non linear analysis of reinforced concrete by the finite elements method, *ACI Journal Proceedings*, 65-9 (1968) 757-766.

[86] Okamura H and Maekawa K, *Nonlinear Analysis and Constitutive Models of Reinforced Concrete*. Giho-do Press, University of Tokyo, Japan (1991).

[87] Ortiz M, Martin J-B, Symmetry-preserving return mapping algorithms and incrementally external paths: a unification of concepts, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 28, 1839-1853, 1989.

[88] Ortiz. M, Simo J.C, An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23, 353-366, 1986.

[89] Palermo, D., & Vecchio, F.J., Compression Field Modelling of Reinforced Concrete Subjected to Reversed Loading: Verification, *ACI Structural Journal*, 101-2 (2003) 155-164.

[90] Palermo. D and Vecchio. F.J, Simulation of Cyclically Loaded Concrete Structures Based on the Finite-Element Method, JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING © ASCE / MAY 2007, pp 728-738.

[91] Park K.C, Felippa C.A, Partitionned analysis of coupled systems, Computational Method for Transient Analysis, Belytschko T, - Hugues T. eds, Elsevier, 157-220, 1983.

[92] Park. Y.J, Fatigue of concrete under random loading, Journal of Structural Engineering, 16-11 (1990) 3228-3235.

[93] Pera.J, Poutres hyperstatiques en béton armé, analyse théorique et expérimentale, Thèse de Docteur-Ingénieur, INSA de Lyon, 1973, 186p.

[94] Petrangeli, M, fiber element for cyclic bending and shear of Rc structures. II: Verification, Journal of Engineering Mechanics / SEPTEMBER 1999, pp 1002-1009.

[95] Picard, A., Béton précontraint : Tome 1 – Principes fondamentaux et dimensionnement, Gaëtan Morin Éditeur, Montréal, 1983, 355 p.

[96] Quast. U, « Rechenansatze in form einer spannungsdehnungsbeziehung für das Mitwirken des Betons in der gerisseueur Zugzone von stahlbeton quevschnitten “, Bericht ans dem Institut für Banstoffe, Massivban und Brandschutz der T.U Braunschweig, 64 pp, 1980.

[97] Qiu, F., Li, W., Pan, P. and Qian, J. \Experimental tests on reinforced concrete columns under biaxial quasi-static loading", Engineering Structures, 24, pp. 419-428 (2002).

[98] Ragueneau. F, Fonctionnement dynamique des structures en béton - influence des comportements hystérétiques locaux, Thèse de Doctorat de l'école normale supérieure de Cachan, 1999, 176 p.

[99] Ramberg. W and Osgood W.K, Description of stress-strain curve by three parameters, Technical notes n°902, National advisory committee for aeronotics, Washington, July 1943.

[100] Ramtani. S, Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral, Thèse de docteur de l'université, Paris V I, Avril 1990.

[101] Regal Xavier, Caractérisation du comportement en traction du béton sous fortes sollicitations Essais de flexion trois points aux barres de Hopkinson, Thèse de Doctorat de l'université d'Orléans, Février 2016, 173 p.

[102] Rezendi-Martin. P.L, Modélisation du comportement jusqu'à la rupture en flexion des poutres en béton armé à précontrainte extérieure ou mixte, Thèse de Doctorat à l'école central de Paris, 1989.

- [103] Richard. B, Adelaïde. L, Cremona. C, Benchmark CEOSFR Comportement et Évaluation des Ouvrages Spéciaux Fissuration Retrait, Rapport technique, Laboratoire centrale des ponts et chaussées, Paris, Janvier 2009.
- [104] Robert Florent, Contribution à l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des ossatures spatiales en genie civil application aux ouvrages d'art, these de Doctorat à l'Institut national des sciences appliqués de Lyon, 1999, 249 p.
- [105] Rodrigues. H, Varum. H, Arêde. A and Costa. A.G, Behaviour of reinforced concrete column under biaxial cyclic loading—state of the art, International Journal of Advanced Structural Engineering 2013, 5:4, pp 1-12.
- [106] Sadeghi. K and Nouban.F, A New Stress-Strain Law For Confined Concrete Under Cyclic Loading, International Journal Of Academic Research, Vol. 2. No. 4. July 2010.
- [107] Said. A, Elmorsi. M and Nehdi. M, Non-linear model for reinforced concrete under cyclic loading, Magazine of Concrete Research, 2005, 57, No. 4, May, 211–224.
- [108] Salari R, Spacone E, Finite element formulation of one dimensional elements with bond slip, Engineering structures, 23-7 (2001) 815-826.
- [109] Sanya Johnson, Comparison of Nonlinear Finite Element Modeling Tools for Structural Concrete, CEE561 Project, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2006, 56 p.
- [110] Sargin. M, Stress-strain relationships for concrete and the analysis on the structural concrete section, S.M study n°4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada, 1971.
- [111] Seckin, M., “Hysteretic Behaviour of Cast-in-Place Exterior Beam-Column Sub-Assemblies,” Ph. D. Thesis, University of Toronto, 1981, 266 pp.
- [112] Sharmila. S and Thirugnanam. G.S, Behavior of reinforced concrete flexural member with hybrid fibre under cyclic loading, International Journal of Science, Environment and Technology, vol. 2, no 4, 2013, 725 – 734.
- [113] Sima JF, Roca, P., and Molins, C, Cyclic constitutive model for concrete, Engineering Structures, 30-3 (2008) 695-706.
- [114] Simo J.C, Taylor R.L, Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 48, 101-118, 1985.
- [115] Sinha. B. P, Gerstle. K. H, Tulin. L. G, Stress - strain relations for concrete under cyclic loading, ACI Journal, 61-2 (1964) .
- [116] Spacone E, Salari M, (2000), « Finite element formulation of one dimensional elements with bond slip»

- [117] Terrien. M, Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction, Bulletin de liaison Ponts et Chaussées, 1980, N° 105, p. 65-72.
- [118] Tuset J, Modélisation du comportement des structures en béton armé par prise en compte de la résistance en traction du béton, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Claude Bernard, Lyon, Mai 1980.
- [119] Tuset.J, Modèles de structures en micro-béton armé, thèse de Docteur-Ingénieur, Université Claude Bernard, Lyon, 1973, 277p.
- [120] VARASTEHPOUR H. (1996), Optimisation du renforcement des ouvrages en béton arme par des materiaux composites. Thèse de Génie Civil : Université Claude Bernard-Lyon, 1996. 216p.
- [121] Vecchio, F. J. (2000). "Disturbed stress field model for reinforced concrete: Formulation." J. Struct. Eng., 126(9), 1070–1077.
- [122] Vecchio, F. J. \_1999\_. "Towards cyclic load modeling of reinforced concrete." ACI Struct. J., 96\_2\_, 193–202.
- [123] Vecchio, F. J., and Collins, M. P. \_1986\_. "The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear." J. Am.Concr. Inst., 83\_2\_, 219–231.
- [124] Vila-pouca. N, Arêde1. A, Monteiro. A, Delgado. P, Rocha. P, Guedes. J, Costa. A and Delgado. R, Comparative study of different numerical methodologies for the ciclic behavior of rc members: Experimental validation, the 14<sup>th</sup> world conference on earthquake engineering october 12-17, 2008, beijing, china.
- [125] Xu. Y, Experimental and Numerical Research on Hysteretic Behaviors of Tubular Reinforced Concrete Columns. The 14th World Conference on Earthquake Engineering October 12-17, 2008, Beijing, China
- [126] Xudong Chen, Lingyu Xu, and Jingwu Bu, Experimental Study and Constitutive Model on Complete Stress-strain Relations of Plain Concrete in Uniaxial Cyclic Tension, KSCE Journal of Civil Engineering, sept 2016.
- [127] Yankelevski. D. Z, Reinhardt. H. W; Model for cyclic compressive behavior of concrete, ASCE , ST2 , V.113 , Feb. 1987 .
- [128] Yun Gun Jin, A total strain-based hysteretic material model for reinforced concrete structures: Theory and verifications, Computers and Concrete, Vol. 5, No. 3 (2008), pp 1-25.

# Annexes

## Annexe A : Fichier donnée de l'exemple de la poutre de Benchmark

début\_titre

\$

\$        **poutre de Benchmark Nante**

\$

fin\_titre

### **donnees\_globales**

9 8 1 1        2 2 2 10 157 2 2

### **elements**

1 1 1 1 2

2 1 1 2 3

3 1 1 3 4

4 1 1 4 5

5 1 1 5 6

6 1 1 6 7

7 1 1 7 8

8 1 1 8 9

### **coordonnees**

1 0. 0.

2        625. 0.

3        1250. 0.

4        1875. 0.

5        2500. 0.

6        3125. 0.

7        3750. 0.

8        4375. 0.

9        5000. 0.

### **section**

1 500. 1 2

200. 200. 0. 500. 1

50. 1608. 2

450. 101. 2

### **conditions\_limites**

1        110                0. 0. 0.

9        010                0.        0.        0.

### **materiaux**

1 2 37272. 0.2 36. 32.5 0.002 0.0035 2.7 0.0007 2        1

2 3 200000. 0.3 400. 500. 0.08 0. 0. 0. 0. 0.

5 2 5 2

### **charges**

1 0

### **charges\_nodales**

1

5        0. -20000. 0.

### **increment**

0.5 0.05 600 2

0.3 0.05 600 2

-0.5 0.05 600 2







## **Annexe B : Fichier résultats de l'exemple de la poutre de Benchmark.**

==> début\_titre

\$

\$ poutre de Benchmark Nante

\$

fin\_titre

==> donnees globales:

nombre total des points nodaux = 9  
nombre total d elements = 8  
nombre de types de sections = 1  
nombre max de trapezes/section = 1  
nombre max de lits d aciers/section = 2  
nombre des noeuds ayant des CL = 2  
nombre de groupes de materiaux = 2  
nombre max de proprietes de materiaux = 10  
nombre de noeuds par élément = 2  
nombre d increments de chargement = 157  
type d algorithme de resolution = 2  
nombre de ddl/noeud = 3  
nombre de types chargements = 2

==> Connectivites nodales et types de sections:

element num\_section numeros noeuds

-----

1	1	1	1
2			
2	1	1	2
3			
3	1	1	3
4			
4	1	1	4
5			
5	1	1	5
6			
6	1	1	6
7			
7	1	1	7
8			
8	1	1	8
9			

==> Coordonnees nodales:

noeud abscisse ordonnee

-----

1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.62500E+03	0.00000E+00
3	0.12500E+04	0.00000E+00

```

4  0.18750E+04  0.00000E+00
5  0.25000E+04  0.00000E+00
6  0.31250E+04  0.00000E+00
7  0.37500E+04  0.00000E+00
8  0.43750E+04  0.00000E+00
9  0.50000E+04  0.00000E+00

```

```

==>nombre de types de sections=      1
type section  nombre trapeze  hauteur section
   1           1    500.0000
n°trapeze  b_inf  b_sup  zi_trapeze  zs_trapeze  n°matériau
   1    0.20000E+03  0.20000E+03  0.00000E+00  0.50000E+03  1
   1    0.50000E+02  0.16080E+04  2
   2    0.45000E+03  0.10100E+03  2
zi_trapeze(   1   1)= -250.0000
zs_trapeze(   1   1)=  250.0000
z_acier(     1   1)= -200.0000
z_acier(     2   1)=  200.0000

```

==> Conditions aux limites (CL):

```

noeud  code  valeurs fixees
-----
   1  110  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
   9   10  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00

```

==> proprietes des groupes de matériaux:

```

groupe module young  module tran G  sigmay  H'
-----
   1  2  0.37E+05  0.20E+00  0.36E+02  0.33E+02  0.20E-02  0.35E-02  0.27E+01  0.70E-03
0.20E+01  0.10E+01
   2  3  0.20E+06  0.30E+00  0.40E+03  0.50E+03  0.80E-01  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00
0.00E+00  0.00E+00

```

```

==> indice du chargement nodal =      1
==> indice du chargement reparti =      0

```

==> charges\_nodales:

```

noeud  force Fx  force Fy  Moment
-----
   5  0.00000E+00  -0.20000E+05  0.00000E+00

```

=> increment

```

-----
facteur de chargement : 0.5000000
tolerance de convergence : 5.0000001E-02
nbre maximal d iterations : 600
parametre de sortie : 2

```

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.17464E-03
2	-0.16170E-03	-0.10686E+00	-0.16372E-03
3	-0.64679E-03	-0.20008E+00	-0.13098E-03
4	-0.14553E-02	-0.26602E+00	-0.76404E-04
5	-0.25872E-02	-0.29102E+00	-0.31772E-11
6	-0.37191E-02	-0.26602E+00	0.76405E-04
7	-0.45276E-02	-0.20008E+00	0.13098E-03
8	-0.50127E-02	-0.10686E+00	0.16372E-03
9	-0.51744E-02	0.00000E+00	0.17464E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.25844E-07	0.50000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.50000E+04	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 0.8000000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.27942E-03
2	-0.25872E-03	-0.17098E+00	-0.26196E-03
3	-0.10349E-02	-0.32014E+00	-0.20957E-03
4	-0.23285E-02	-0.42563E+00	-0.12225E-03
5	-0.41395E-02	-0.46563E+00	-0.91107E-11
6	-0.59505E-02	-0.42563E+00	0.12225E-03
7	-0.72440E-02	-0.32014E+00	0.20957E-03
8	-0.80202E-02	-0.17098E+00	0.26196E-03
9	-0.82789E-02	0.00000E+00	0.27942E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.57893E-05	0.80000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.80000E+04	0.00000E+00

```

-----
facteur de chargement   : 0.3000000
tolerance de convergence : 5.0000001E-02
nbre maximal d iterations :   600
parametre de sortie    :     2

```

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.10478E-03
2	-0.97019E-04	-0.64118E-01	-0.98234E-04
3	-0.38808E-03	-0.12005E+00	-0.78588E-04
4	-0.87317E-03	-0.15961E+00	-0.45843E-04
5	-0.15523E-02	-0.17461E+00	0.58427E-11
6	-0.22314E-02	-0.15961E+00	0.45843E-04
7	-0.27165E-02	-0.12005E+00	0.78588E-04
8	-0.30076E-02	-0.64118E-01	0.98234E-04
9	-0.31046E-02	0.00000E+00	0.10478E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.50735E-07	0.30000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.30000E+04	0.00000E+00

```

-----
facteur de chargement   : 5.0000012E-02
tolerance de convergence : 5.0000001E-02
nbre maximal d iterations :   600
parametre de sortie    :     2

```

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.17464E-04
2	-0.16170E-04	-0.10686E-01	-0.16372E-04
3	-0.64679E-04	-0.20009E-01	-0.13098E-04
4	-0.14553E-03	-0.26602E-01	-0.76404E-05
5	-0.25872E-03	-0.29102E-01	-0.71627E-12
6	-0.37191E-03	-0.26602E-01	0.76405E-05
7	-0.45276E-03	-0.20008E-01	0.13098E-04
8	-0.50127E-03	-0.10686E-01	0.16372E-04
9	-0.51744E-03	0.00000E+00	0.17464E-04

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	0.34375E-06	0.50000E+03	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.50000E+03	0.00000E+00

facteur de chargement : 0.5500000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.19210E-03
2	-0.17787E-03	-0.11755E+00	-0.18010E-03
3	-0.71147E-03	-0.22009E+00	-0.14408E-03
4	-0.16008E-02	-0.29262E+00	-0.84045E-04
5	-0.28459E-02	-0.32012E+00	-0.18119E-10
6	-0.40910E-02	-0.29262E+00	0.84045E-04
7	-0.49803E-02	-0.22009E+00	0.14408E-03
8	-0.55139E-02	-0.11755E+00	0.18010E-03
9	-0.56918E-02	0.00000E+00	0.19210E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	0.18161E-06	0.55000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.55000E+04	0.00000E+00

facteur de chargement : 0.8500000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.29689E-03
2	-0.27489E-03	-0.18167E+00	-0.27833E-03
3	-0.10995E-02	-0.34014E+00	-0.22266E-03
4	-0.24740E-02	-0.45223E+00	-0.12989E-03
5	-0.43982E-02	-0.49473E+00	-0.30229E-10
6	-0.63224E-02	-0.45223E+00	0.12989E-03
7	-0.76968E-02	-0.34014E+00	0.22266E-03
8	-0.85215E-02	-0.18167E+00	0.27833E-03
9	-0.87963E-02	0.00000E+00	0.29689E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.26368E-04	0.85000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.85000E+04	0.00000E+00

facteur de chargement : 0.3500000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.12225E-03
2	-0.11319E-03	-0.74805E-01	-0.11461E-03
3	-0.45276E-03	-0.14006E+00	-0.91685E-04
4	-0.10187E-02	-0.18621E+00	-0.53483E-04
5	-0.18110E-02	-0.20371E+00	-0.10220E-10
6	-0.26033E-02	-0.18621E+00	0.53483E-04
7	-0.31693E-02	-0.14006E+00	0.91685E-04
8	-0.35089E-02	-0.74805E-01	0.11461E-03
9	-0.36220E-02	0.00000E+00	0.12225E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	0.21306E-07	0.35000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.35000E+04	0.00000E+00

facteur de chargement : 0.1500000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.52392E-04
2	-0.48509E-04	-0.32059E-01	-0.49117E-04
3	-0.19404E-03	-0.60025E-01	-0.39294E-04
4	-0.43659E-03	-0.79805E-01	-0.22921E-04
5	-0.77615E-03	-0.87306E-01	-0.12640E-10
6	-0.11157E-02	-0.79805E-01	0.22921E-04
7	-0.13583E-02	-0.60025E-01	0.39294E-04
8	-0.15038E-02	-0.32059E-01	0.49117E-04

9 -0.15523E-02 0.00000E+00 0.52392E-04

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.10398E-04	0.15000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.15000E+04	0.00000E+00

facteur de chargement : 0.650000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.22703E-03
2	-0.21021E-03	-0.13892E+00	-0.21284E-03
3	-0.84083E-03	-0.26011E+00	-0.17027E-03
4	-0.18919E-02	-0.34582E+00	-0.99326E-04
5	-0.33633E-02	-0.37833E+00	-0.16634E-10
6	-0.48348E-02	-0.34582E+00	0.99326E-04
7	-0.58858E-02	-0.26011E+00	0.17027E-03
8	-0.65164E-02	-0.13892E+00	0.21284E-03
9	-0.67266E-02	0.00000E+00	0.22703E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.16444E-04	0.65000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.65000E+04	0.00000E+00

facteur de chargement : 1.150000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.40177E-03
2	-0.37191E-03	-0.24585E+00	-0.37666E-03
3	-0.14876E-02	-0.46032E+00	-0.30135E-03
4	-0.33472E-02	-0.61202E+00	-0.17583E-03

5	-0.59610E-02	-0.66958E+00	-0.23755E-10
6	-0.85749E-02	-0.61202E+00	0.17583E-03
7	-0.10434E-01	-0.46032E+00	0.30135E-03
8	-0.11550E-01	-0.24585E+00	0.37666E-03
9	-0.11922E-01	0.00000E+00	0.40177E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.21009E-07	0.11500E+05	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.11500E+05	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 1.250000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.43689E-03
2	-0.40425E-03	-0.26734E+00	-0.40960E-03
3	-0.16170E-02	-0.50057E+00	-0.32774E-03
4	-0.36382E-02	-0.66559E+00	-0.19130E-03
5	-0.64992E-02	-0.72821E+00	-0.33998E-10
6	-0.93601E-02	-0.66559E+00	0.19130E-03
7	-0.11381E-01	-0.50057E+00	0.32774E-03
8	-0.12594E-01	-0.26734E+00	0.40960E-03
9	-0.12998E-01	0.00000E+00	0.43689E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.93798E-08	0.12500E+05	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.12500E+05	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 0.7500001  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.26224E-03
2	-0.24255E-03	-0.16047E+00	-0.24587E-03

3	-0.97019E-03	-0.30048E+00	-0.19675E-03
4	-0.21829E-02	-0.39956E+00	-0.11489E-03
5	-0.39112E-02	-0.43717E+00	-0.82199E-10
6	-0.56394E-02	-0.39956E+00	0.11489E-03
7	-0.68522E-02	-0.30048E+00	0.19675E-03
8	-0.75798E-02	-0.16047E+00	0.24587E-03
9	-0.78224E-02	0.00000E+00	0.26224E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.35529E-07	0.75000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.75000E+04	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 0.2500001  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.87566E-04
2	-0.80849E-04	-0.53586E-01	-0.82109E-04
3	-0.32340E-03	-0.10035E+00	-0.65736E-04
4	-0.72764E-03	-0.13347E+00	-0.38449E-04
5	-0.13207E-02	-0.14607E+00	0.48162E-08
6	-0.19123E-02	-0.13347E+00	0.38446E-04
7	-0.23166E-02	-0.10035E+00	0.65734E-04
8	-0.25591E-02	-0.53585E-01	0.82106E-04
9	-0.26400E-02	0.00000E+00	0.87564E-04

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	0.21768E-06	0.25000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.25000E+04	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 5.0000116E-02  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
-------	---------	---------	---------------

```

-----
1    0.00000E+00    0.00000E+00    -0.17693E-04
2   -0.16170E-04   -0.10830E-01   -0.16602E-04
3   -0.64679E-04   -0.20295E-01   -0.13327E-04
4   -0.14553E-03   -0.27032E-01   -0.78697E-05
5   -0.28391E-03   -0.29624E-01    0.48112E-08
6   -0.42095E-03   -0.27027E-01    0.78670E-05
7   -0.50180E-03   -0.20292E-01    0.13325E-04
8   -0.55031E-03   -0.10828E-01    0.16599E-04
9   -0.56648E-03    0.00000E+00    0.17691E-04

```

==> Reactions aux appuis:

```

noeud   React Rx   React Ry   Moment M
-----
1    0.71479E-09   0.50000E+03  0.00000E+00
9    0.00000E+00   0.50000E+03  0.00000E+00

```

```

-----
facteur de chargement   : 0.5500001
tolerance de convergence : 5.0000001E-02
nbre maximal d iterations : 600
parametre de sortie    : 2

```

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

```

noeud   depl Ux   depl Uy   rotation teta
-----
1    0.00000E+00   0.00000E+00  -0.19238E-03
2   -0.17787E-03  -0.11772E+00  -0.18037E-03
3   -0.71147E-03  -0.22043E+00  -0.14435E-03
4   -0.16008E-02  -0.29313E+00  -0.84318E-04
5   -0.28758E-02  -0.32074E+00   0.48318E-08
6   -0.41494E-02  -0.29313E+00   0.84315E-04
7   -0.50388E-02  -0.22043E+00   0.14435E-03
8   -0.55724E-02  -0.11772E+00   0.18037E-03
9   -0.57502E-02   0.00000E+00   0.19237E-03

```

==> Reactions aux appuis:

```

noeud   React Rx   React Ry   Moment M
-----
1   -0.28601E-05   0.55000E+04  0.00000E+00
9    0.00000E+00   0.55000E+04  0.00000E+00

```

```

-----
facteur de chargement   : 1.050000
tolerance de convergence : 5.0000001E-02
nbre maximal d iterations : 600
parametre de sortie    : 2

```

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.36706E-03
2	-0.33957E-03	-0.22461E+00	-0.34414E-03
3	-0.13583E-02	-0.42057E+00	-0.27537E-03
4	-0.30561E-02	-0.55923E+00	-0.16077E-03
5	-0.54677E-02	-0.61186E+00	0.48323E-08
6	-0.78779E-02	-0.55923E+00	0.16076E-03
7	-0.95757E-02	-0.42057E+00	0.27537E-03
8	-0.10594E-01	-0.22461E+00	0.34413E-03
9	-0.10934E-01	0.00000E+00	0.36706E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.52954E-07	0.10500E+05	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.10500E+05	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 1.250000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.43694E-03
2	-0.40425E-03	-0.26737E+00	-0.40965E-03
3	-0.16170E-02	-0.50064E+00	-0.32779E-03
4	-0.36382E-02	-0.66568E+00	-0.19135E-03
5	-0.65050E-02	-0.72832E+00	0.48268E-08
6	-0.93704E-02	-0.66568E+00	0.19135E-03
7	-0.11392E-01	-0.50063E+00	0.32778E-03
8	-0.12604E-01	-0.26737E+00	0.40965E-03
9	-0.13009E-01	0.00000E+00	0.43693E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.44901E-06	0.12500E+05	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.12500E+05	0.00000E+00

```

-----
facteur de chargement   : 0.7500002
tolerance de convergence : 5.0000001E-02
nbre maximal d iterations :   600
parametre de sortie    :     2

```

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.26226E-03
2	-0.24255E-03	-0.16049E+00	-0.24589E-03
3	-0.97019E-03	-0.30050E+00	-0.19677E-03
4	-0.21829E-02	-0.39959E+00	-0.11491E-03
5	-0.39138E-02	-0.43721E+00	0.47372E-08
6	-0.56433E-02	-0.39959E+00	0.11491E-03
7	-0.68561E-02	-0.30050E+00	0.19677E-03
8	-0.75837E-02	-0.16048E+00	0.24589E-03
9	-0.78263E-02	0.00000E+00	0.26226E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.90040E-09	0.75000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.75000E+04	0.00000E+00

```

-----
facteur de chargement   : 0.2500002
tolerance de convergence : 5.0000001E-02
nbre maximal d iterations :   600
parametre de sortie    :     2

```

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.87551E-04
2	-0.80849E-04	-0.53577E-01	-0.82093E-04
3	-0.32340E-03	-0.10033E+00	-0.65721E-04
4	-0.72764E-03	-0.13344E+00	-0.38434E-04
5	-0.13194E-02	-0.14603E+00	0.70447E-08
6	-0.19091E-02	-0.13344E+00	0.38431E-04
7	-0.23134E-02	-0.10033E+00	0.65718E-04
8	-0.25559E-02	-0.53575E-01	0.82091E-04
9	-0.26368E-02	0.00000E+00	0.87548E-04

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.26308E-08	0.25000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.25000E+04	0.00000E+00

facteur de chargement : 5.0000235E-02  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.17666E-04
2	-0.16170E-04	-0.10813E-01	-0.16574E-04
3	-0.64679E-04	-0.20261E-01	-0.13300E-04
4	-0.14553E-03	-0.26980E-01	-0.78423E-05
5	-0.28133E-03	-0.29557E-01	0.69957E-08
6	-0.41517E-03	-0.26975E-01	0.78394E-05
7	-0.49602E-03	-0.20257E-01	0.13297E-04
8	-0.54453E-03	-0.10811E-01	0.16572E-04
9	-0.56069E-03	0.00000E+00	0.17663E-04

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	0.14763E-08	0.50000E+03	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.50000E+03	0.00000E+00

facteur de chargement : 0.5500003  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.19238E-03
2	-0.17787E-03	-0.11772E+00	-0.18037E-03
3	-0.71147E-03	-0.22044E+00	-0.14435E-03
4	-0.16008E-02	-0.29314E+00	-0.84320E-04
5	-0.28764E-02	-0.32075E+00	0.71070E-08
6	-0.41501E-02	-0.29313E+00	0.84317E-04

7	-0.50394E-02	-0.22043E+00	0.14435E-03
8	-0.55730E-02	-0.11772E+00	0.18037E-03
9	-0.57509E-02	0.00000E+00	0.19238E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	0.85056E-08	0.55000E+04	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.55000E+04	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 1.050000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.36709E-03
2	-0.33957E-03	-0.22463E+00	-0.34417E-03
3	-0.13583E-02	-0.42061E+00	-0.27541E-03
4	-0.30561E-02	-0.55929E+00	-0.16080E-03
5	-0.54715E-02	-0.61193E+00	0.72273E-08
6	-0.78849E-02	-0.55929E+00	0.16080E-03
7	-0.95827E-02	-0.42061E+00	0.27540E-03
8	-0.10601E-01	-0.22463E+00	0.34417E-03
9	-0.10941E-01	0.00000E+00	0.36709E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.16421E-04	0.10500E+05	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.10500E+05	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 1.550000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.88360E-03
2	-0.50127E-03	-0.54517E+00	-0.84976E-03
3	-0.20051E-02	-0.10480E+01	-0.74826E-03

4	-0.45219E-02	-0.14663E+01	-0.57898E-03
5	0.30672E-01	-0.16442E+01	-0.16992E-05
6	0.65698E-01	-0.14681E+01	0.57993E-03
7	0.63181E-01	-0.10492E+01	0.74921E-03
8	0.61678E-01	-0.54576E+00	0.85071E-03
9	0.61176E-01	0.00000E+00	0.88455E-03

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.17635E-07	0.15500E+05	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.15500E+05	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 2.050000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.14856E-02
2	-0.66296E-03	-0.91912E+00	-0.14408E-02
3	-0.26519E-02	-0.17823E+01	-0.13066E-02
4	0.32180E-01	-0.24502E+01	-0.80203E-03
5	0.92299E-01	-0.26982E+01	-0.16078E-05
6	0.15219E+00	-0.24519E+01	0.80295E-03
7	0.18702E+00	-0.17834E+01	0.13075E-02
8	0.18504E+00	-0.91969E+00	0.14417E-02
9	0.18437E+00	0.00000E+00	0.14865E-02

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	0.40158E-07	0.20500E+05	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.20500E+05	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 2.550000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
-------	---------	---------	---------------

1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.18393E-02
2	-0.82466E-03	-0.11379E+01	-0.17836E-02
3	-0.33108E-02	-0.22062E+01	-0.16165E-02
4	0.40053E-01	-0.30315E+01	-0.98961E-03
5	0.11535E+00	-0.33388E+01	-0.15833E-05
6	0.19043E+00	-0.30332E+01	0.99051E-03
7	0.23380E+00	-0.22073E+01	0.16174E-02
8	0.23131E+00	-0.11385E+01	0.17845E-02
9	0.23048E+00	0.00000E+00	0.18402E-02

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	0.30683E-06	0.25500E+05	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.25500E+05	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 3.050000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.23534E-02
2	-0.98636E-03	-0.14569E+01	-0.22868E-02
3	0.78853E-02	-0.28116E+01	-0.19804E-02
4	0.74358E-01	-0.38111E+01	-0.11776E-02
5	0.16478E+00	-0.41780E+01	-0.17895E-05
6	0.25496E+00	-0.38130E+01	0.11786E-02
7	0.32143E+00	-0.28129E+01	0.19814E-02
8	0.33030E+00	-0.14575E+01	0.22878E-02
9	0.32931E+00	0.00000E+00	0.23544E-02

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.16013E-08	0.30500E+05	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.30500E+05	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 3.550000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.29020E-02
2	-0.11481E-02	-0.17975E+01	-0.28245E-02
3	0.34718E-01	-0.34122E+01	-0.22954E-02
4	0.11216E+00	-0.45699E+01	-0.13626E-02
5	0.21773E+00	-0.49963E+01	-0.17251E-05
6	0.32307E+00	-0.45718E+01	0.13636E-02
7	0.40051E+00	-0.34135E+01	0.22964E-02
8	0.43638E+00	-0.17982E+01	0.28256E-02
9	0.43523E+00	0.00000E+00	0.29031E-02

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	0.85674E-07	0.35500E+05	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.35500E+05	0.00000E+00

-----  
facteur de chargement : 4.050000  
tolerance de convergence : 5.0000001E-02  
nbre maximal d iterations : 600  
parametre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Resultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Deplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.33035E-02
2	-0.13098E-02	-0.20462E+01	-0.32151E-02
3	0.39659E-01	-0.38840E+01	-0.26125E-02
4	0.12808E+00	-0.52011E+01	-0.15492E-02
5	0.24879E+00	-0.56879E+01	-0.17576E-05
6	0.36925E+00	-0.52031E+01	0.15503E-02
7	0.45767E+00	-0.38854E+01	0.26136E-02
8	0.49864E+00	-0.20469E+01	0.32162E-02
9	0.49733E+00	0.00000E+00	0.33046E-02

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
1	-0.87735E-07	0.40500E+05	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.40500E+05	0.00000E+00



## Résumé :

Dans le domaine de génie civil, le milieu extérieur impose aux structures des charges variables dans le temps à savoir : actions du vent, vagues, vibrations des machines et séismes. Ces actions imposent aux structures des sollicitations de type dynamique et cyclique, et l'évaluation de la réponse de la structure vis-à-vis de ces actions nécessite une bonne connaissance de leurs comportements linéaire et non linéaire sous chargement monotones et cycliques.

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à l'étude et à la modélisation des comportements statiques non linéaires sous charges monotones et cycliques, des structures planes en béton armé ainsi que des matériaux acier et béton les constituant. Dans cet objectif, un modèle numérique a été développé et implémenté dans un programme de calcul dédié. Il permet de calculer numériquement le comportement non linéaire de n'importe quelle structure plane en béton armé en prenant compte les différents phénomènes tels que la non linéarité du comportement du béton, la plasticité du béton en compression et de l'acier en traction, les interactions acier-béton ainsi que l'endommagement et la dégradation des matériaux sous les effets d'un cycle à l'autre. Le modèle est validé en se basant sur des essais de référence trouvés dans la littérature.

**Mots clés :** comportement, non linéarité, béton, monotone, cyclique, ossatures, modélisation élément poutre.

## Abstract:

In the field of civil engineering, the external environment imposes on the structures variable loads over time, namely: action of wind, waves, vibrations of machines and earthquake. These actions lead to dynamic and cyclic solicitations on the structures, and the evaluation of the structure's behaviour to these actions requires a good knowledge of their non-linear behavior, both monotonic and cyclic.

In the framework of this work, we are interested in the study and the modeling of the nonlinear static behavior under monotonous and cyclic loads, of the reinforced concrete plane structures as well as the constituent's materials: steel and concrete. For this purpose, a numerical model has been developed and implemented in a dedicated computing program. It allows the numerical calculation of the nonlinear behavior of any reinforced concrete plane structure by taking into account different phenomena such as the non-linearity of concrete behavior, the plasticity of concrete in compression and the steel in tension, steel-concrete interactions as well as the damage and degradation of materials under the effects of one cycle to another. Based on reference tests found in the literature, the model has been compared and validated. Interactions as well as the damage and the degradation of the materials under the effects of one cycle to another.

**Key words:** behavior, nonlinearity, concrete, monotonic, cyclic, frameworks, beam element modeling.