

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI OUZOU
FACULTÉ DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : AUTOMATIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

Redouane KARA

Ingénieur en Electronique, UMMTO

Magister en Automatique, UMMTO

Thème

**Contribution à l'Analyse Quantitative et à la Commande
des Réseaux de Petri Continus à Arcs Valués.
Application aux Systèmes de Production Manufacturière**

Thèse soutenue le .././2009 devant le jury composé de MM :

Moussa DIAF	<i>Professeur, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou</i>	Président
Said DJENNOUNE	<i>Professeur, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou</i>	Rapporteur
Jean Jaques LOISEAU	<i>Directeur de Recherches, Ecole Centrale de Nantes, France</i>	Co-Rapporteur
Mohamed AIDENE	<i>Professeur, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou</i>	Examinateur
Hassane ALLA	<i>Professeur, Université Joseph Fourier de Grenoble, France</i>	Examinateur
Djamal BENZAOUZ	<i>Professeur, Université M'Hamed Bougara de Boumerdès</i>	Examinateur
Said AMARI	<i>Maître de Conférences, Université Paris XIII, France</i>	Invité

Avant propos

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à M. Said Djennoune, professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, sous la direction duquel j'ai eu le plaisir de travailler. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Je tiens particulièrement à remercier mon co-encadreur de thèse, M. Jean Jacques Loiseau, Directeur de Recherche au CNRS et responsable de l'équipe Analyse et Commande des Systèmes à Evénements Discrets ACSED de l'Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes IRCCyN pour avoir accepté de m'accueillir dans son équipe. Par ses compétences, ses conseils et son entière disponibilité, il a joué un rôle déterminant dans le développement de mes recherches. Ce travail est le résultat de notre collaboration qui a toujours été agréable et enrichissante. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance et de mon amitié la plus sincère. Simplement, Merci Jean Jacques ...

Je tiens aussi à remercier M. Amer-yahia Chérif qui a initialement proposé ce travail. Son sérieux, sa rigueur et sa disponibilité ont marqué des générations d'étudiants.

J'exprime mes sincères remerciements à M. Moussa Diaf, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

Je suis honoré de la présence dans ce Jury de MM. Hassane Alla, Professeur à l'université Joseph Fourier de Grenoble, de Mohamed Aidene, Professeur à l'université Mouloud

Mammeri de Tizi Ouzou, de Djamel Benazzouz, Professeur à l'université de Boumerdès et de Said Amari, Maître de Conférences à l'université de Paris XIII et de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.

Mes sincères remerciements vont également à M. Mourad Ahmane avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer. Ses conseils m'ont permis d'approfondir certains concepts.

Je remercie mes collègues de la Faculté du Génie Electrique et Informatique en particulier : M. Ahmed Maldi, M. Kamal Hammouche et M. Hamid Hamiche. J'exprime aussi mes sincères remerciements aux membres de l'équipe analyse et commande des systèmes à événements Discrets de Nantes en particulier : Olivier Boutin, Claude Martinez et Roberto Bacos Junior. Je tiens aussi à remercier M. José Eduardo Cury avec qui j'ai eu le plaisir de partager mon bureau.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à Said Amari pour son aide et ses encouragements.

Je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Enfin pour avoir cru en moi, j'exprime ma profonde gratitude à ma famille et à tous mes amis(es); ce modeste travail leur est dédié.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Les réseaux de Petri : un outil de modélisation des systèmes de production	7
1.1 Introduction	7
1.2 Systèmes de Production : Quelques définitions	8
1.2.1 La fonction production	8
1.2.2 Système de production et système de pilotage	8
1.2.3 Typologie des systèmes de production	10
1.2.4 Modélisation des systèmes de production	12
1.3 Réseaux de Petri autonomes	13
1.3.1 Notations matricielles d'un réseau de Petri	14
1.3.2 Dynamique et règle d'évolution	15
1.3.3 Nombre de franchissement et degré de franchissement	15
1.3.4 Propriétés des réseaux de Petri	16
1.3.5 Accessibilité	17
1.3.6 Etat d'accueil et réseau de Petri réinitialisable	17
1.3.7 Réseau de Petri borné	17
1.3.8 Vivacité	17
1.4 Méthodes d'analyse	18
1.4.1 Graphe des marquages et arbre de couverture	18
1.4.2 Matrice d'incidence et équation d'état	20

1.4.3	Réseaux de Petri temporisés	23
1.5	Réseaux de Petri continus	25
1.5.1	Réseaux de Petri continus temporisés	26
1.5.2	Invariant	34
1.6	Réseaux de Petri continus à vitesses variables contrôlées	34
1.7	Conclusion	36
2	Analyse quantitative des graphes d'événements continus valués	39
2.1	Introduction	39
2.2	Graphes d'événements valués	41
2.2.1	Les graphes d'événements	41
2.2.2	Chemins et circuits	41
2.2.3	Forte connexité	42
2.2.4	Gain d'un circuit élémentaire	43
2.2.5	Classification des graphes d'événements	43
2.2.6	Propriété de Munier	44
2.2.7	Propriétés qualitatives et quantitatives des graphes d'événements valués discrets	44
2.3	Temps de cycle d'un graphe d'événements valué neutre	45
2.4	Vitesse de franchissement asymptotique d'un graphe d'événements continu valué neutre	46
2.4.1	Exemple illustratif	50
2.5	Marquage stationnaire d'un graphe d'événements continu	53
2.6	Exemple	60
2.7	Discussion des résultats	64
2.8	Conclusion	65
3	Régulation sous contraintes des réseaux de Petri continus	69
3.1	Introduction	69
3.2	Modèle de réseau de Petri continu contrôlé	71

3.2.1	Ensembles convexes polyédrales et ensembles convexes ellipsoïdales	71
3.2.2	Modèle de réseau de Petri continu	72
3.2.3	Réseau de Petri continu contrôlé en temps discret	73
3.2.4	Exemple	75
3.3	Régulation sous contraintes des réseaux de Petri continus	76
3.3.1	Sur la synthèse sous contraintes	76
3.3.2	Invariance positive et commande sous contraintes	77
3.3.3	Régulation sous contraintes des systèmes linéaires	79
3.3.4	Formulation du problème de commande	81
3.3.5	Stabilité du système non contraint	82
3.3.6	Conditions algébriques d'invariance et de stabilité	82
3.4	Application à un système d'assemblage	87
3.5	Application à une ligne de production	92
3.6	Conclusion	93
	Conclusion générale et perspectives	97
	Annexe. Modèle CGQ	109

Table des figures

1.1	Composition d'un système de production	9
1.2	Commande d'un système de production	10
1.3	Atelier de type flow shop	11
1.4	Atelier de type job shop	11
1.5	Exemple d'une ligne de production linéaire	12
1.6	Exemple d'une ligne d'assemblage	12
1.7	Exemple de réseau de Petri ordinaire	14
1.8	Franchissement d'une transition	16
1.9	Réseau de Petri avec boucle de réentrance	16
1.10	L'arbre de couverture du réseau de la Figure 1.7	19
1.11	Système de production modélisé par réseau de Petri	27
1.12	Un réseau de Petri vivant dans le cas continu et présentant un blocage dans le cas discret	27
1.13	Exemple de réseau de Petri continu	30
1.14	Graphe d'évolution du graphe de la Figure 1.13	31
1.15	Exemple de réseau de Petri continu	32
2.1	Exemple d'un graphe d'événements ordinaire.	42
2.2	Exemple d'un chemin élémentaire.	42
2.3	Exemple d'un circuit élémentaire.	43
2.4	Réseau de Petri continu du système de production.	52

2.5	Réseau de Petri continu avec deux circuits critiques et plusieurs points d'équilibre avec $V = [1, 1, 1, 1]^T$	54
2.6	Influence du marquage initial sur l'ensemble $T - cov(m_s)$	57
2.7	Modèle réseau de Petri d'un système flexible de production	62
3.1	Réseau de Petri continu	75
3.2	Réseau de Petri continu	88
3.3	Evolution du marquage du système d'assemblage	91
3.4	Evolution de la commande du système d'assemblage	92
3.5	Evolution du marquage de la ligne de production	94
3.6	Evolution de la commande de la ligne de production	95

Notations

- \mathcal{R} : Un réseau de Petri non marqué.
- \mathcal{N} : Un réseau de Petri marqué.
- P : L'ensemble des places d'un réseau de Petri.
- T : L'ensemble des transitions d'un réseau de Petri.
- P_i : Place d'un réseau de Petri.
- T_j : Transition d'un réseau de Petri.
- I : Fonction d'incidence avant d'un réseau de Petri.
- O : Fonction d'incidence arrière d'un réseau de Petri.
- $I(P_i, T_j)$: Poids de l'arc reliant P_i à T_j .
- $O(P_i, T_j)$: Poids de l'arc reliant T_j à P_i .
- m_0 : Marquage initial d'un réseau de Petri.
- m_{0i} : Marquage initial de la place P_i .
- $m(t)$: Marquage à l'instant t d'un réseau de Petri.
- $m_{P_i}(t)$: Marquage à l'instant t de la place P_i .
- C : Matrice d'incidence.
- oT_j : Ensemble des places d'entrée de la transition T_j .
- T_j^o : Ensemble des places de sortie de la transition T_j .
- P_i^o : Ensemble des transitions de sortie de la place P_i .
- oP_i : Ensemble des transitions d'entrée de la place P_i .
- σ : Séquence de franchissement.
- $R(m_0)$: L'ensemble de tous les marquages accessibles à partir de m_0 .
- $L(m_0)$: L'ensemble de toutes les séquences de franchissement possibles à partir de

- m_0 .
- x : T-invariant.
- y : P-invariant.
- $\mathbb{P}(y)$: Support d'un P-invariant y .
- $\mathbb{T}(x)$: Support d'un T-invariant x .
- V : Vecteur vitesses maximales de franchissement.
- V_j : Vitesses maximales de franchissement de la transition T_j .
- $v(t)$: Vecteur vitesses de franchissement instantanés.
- $v_j(t)$: Vitesses de franchissement instantanés de la transition T_j .
- ϕ : Vecteur vitesses de franchissement asymptotique.
- ϕ_j : Vitesses de franchissement asymptotique de la transition T_j .
- m_s : Vecteur marquage stationnaire.
- m_{si} : Marquage stationnaire de la place P_i .
- N_{0i} : Marquage valué initial d'une place P_i .
- N_{si} : Marquage valué stationnaire de la place P_i .
- L_k : Circuit élémentaire numéro k .
- $g(P_i)$: Gain de la place P_i .
- $G(L_k)$: Gain du circuit élémentaire L_k .
- f_k : Fréquence du circuit élémentaire L_k .
- $T - cov(m)$: L'ensemble T-coverture au marquage m .
- $T - cov(m_s)$: L'ensemble T-coverture au marquage stationnaire.
- ρ_{ij} : Un chemin élémentaire qui part de la transition T_i vers la transition T_j .
- L_c : Un circuit critique d'un graphe d'événements valué.
- ρ_{ij}^k : Le k^{ime} chemin élémentaire qui part de la transition T_i à la transition T_j .
- S_{ij} : L'ensemble des chemins élémentaires ρ_{ij}^k tel que $T_i \in L_c$ et $T_j \notin L_c$.
- S : L'ensemble des chemins élémentaires qui ont pour transition de départ une transition appartenant à L_c .
- S_c : L'ensemble des chemins élémentaires qui ont toutes leurs places dans $T - cov(m_s)$.

- $f_{\rho_{ij}^k}$: Facteur de criticité du chemin élémentaire ρ_{ij}^k .
- $\mathcal{E}(Q, \rho)$: Un ellipsoïde généré par (Q, ρ) .
- $\mathcal{P}(G, g)$: Un polyèdre généré par (G, g) .
- $u(t)$: Vecteur commande.
- $u_j(t)$: L'action de contrôle sur la transition T_j .
- θ : Période d'échantillonnage.
- (\mathcal{N}, θ) : Réseaux de Petri continu en temps discret.

Introduction générale

Les systèmes de production posent des problèmes de modélisation, de conception et de conduite tout au long de leur cycle de vie. Ces problèmes sont souvent traités à l'aide de différents formalismes et de techniques spécifiques. Parmi les formalismes utilisés, nous citons les réseaux de files d'attente, l'algèbre des dioïdes, les automates, la simulation et les réseaux de Petri. Les réseaux de Petri sont des modèles qui peuvent être utilisés, parfois avantageusement, pour plusieurs de ces problèmes, avec le bénéfice supplémentaire d'améliorer la communication entre les étapes du cycle de vie. La modélisation, l'analyse qualitative (analyse des propriétés), l'analyse quantitative (analyse des performances), le contrôle logique, l'implantation et l'ordonnancement (contrôle des performances) peuvent être traités à l'aide du paradigme des réseaux de Petri.

Nous nous intéressons aux systèmes de production à fonctionnement cyclique (production répétitive) qui peuvent être modélisés à l'aide d'une classe particulière de réseaux de Petri qui sont les graphes d'événements, une classe où chaque place possède exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. Néanmoins, lorsque la taille du graphe d'événements est importante, les techniques développées à ce jour atteignent leur limite. Par conséquent, l'utilisation des graphes d'événements à arcs valués (appelés aussi graphes d'événements généralisés ou weighted T-systems) permet de réduire la taille du modèle. D'autre part, on rencontre des systèmes de production à grande capacité, traitant un grand nombre de produits. Pour ces systèmes à production de masse, leur analyse par le biais des méthodes usuelles devient difficile. Dans cette situation, une approximation continue des phénomènes et des variables peut être plus appropriée. Il s'ensuit une modé-

lisation de type continu où on considère les transferts d'entités comme des flux d'entités. En ce sens, les réseaux de Petri continus à arcs valués (ou réseaux de Petri continus généralisés) sont bien adaptés.

Dans cette thèse, nous considérons le problème de l'analyse quantitative et de la commande de systèmes de production manufacturière modélisés par les graphes d'événements continus à arcs valués.

Dans l'analyse quantitative (ou de performances), des méthodes formelles, basées sur la structure du réseau et la théorie des graphes, permettant de déduire les caractéristiques du système de production modélisé en régime stationnaire sont développées (par exemple : quantité moyenne de produits dans les stocks et cadence de production en régime permanent) .

Le problème de commande de systèmes de production intervient lorsque le débit maximal, de production d'une machine par exemple, peut être varié par une action de contrôle externe. La fluidification permet l'utilisation de la théorie standard de contrôle des systèmes continus aux systèmes de production modélisés par réseaux de Petri continus. En effet, un réseau de Petri continu à vitesses variables contrôlées est un système linéaire par morceaux avec des commutations autonomes et présentant des contraintes sur l'état et sur la commande [24]. L'action de contrôle est formulée par une stratégie de commande en boucle fermée. Des résultats originaux permettant de calculer les gains de retour qui assurent l'invariance positive, le respect des contraintes sur la commande et la contractivité du système bouclé dans un polytope donné sont développés dans cette thèse.

Le travail que nous présentons dans cette thèse est organisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous donnons dans un premier temps, quelques notions sur les systèmes de production. Des éléments de la théorie des réseaux de Petri tels que, les propriétés et les différentes méthodes d'analyse, sont ensuite traitées. Nous insistons dans ce chapitre sur les réseaux de Petri continus, qui peuvent par exemple être obtenus par fluidification

de réseaux de Petri discrets, et sur les différentes sémantiques qui permettent de définir comment les transitions sont franchies dans le modèle fluidifié. Nous présentons également une classe de réseaux de Petri continus à laquelle on s'intéresse dans ce travail : à savoir les réseaux de Petri continu à vitesses variables contrôlées.

Plusieurs travaux traitant de l'analyse quantitative des réseaux de Petri continus existent dans la littérature [10, 15, 22, 43, 46, 58]. Mais très peu de résultats sont donnés sous une forme analytique. C'est l'une des raisons qui nous a motivés à orienter notre recherche dans cette direction afin de développer des relations explicites permettant de calculer la vitesse de franchissement asymptotique des transitions et le vecteur marquage stationnaire pour une classe particulière de réseaux de Petri continus qui est la classe des graphes d'événements continus à arcs valués neutres et fortement connexes. Ce travail est présenté au chapitre 2.

Le chapitre 3 est consacré à la commande sous contraintes des réseaux de Petri continus contrôlés. Le problème posé dans ce chapitre se résume à synthétiser un régulateur qui permet de respecter les contraintes sur l'état et sur la commande et qui en plus assure une convergence asymptotique vers l'état d'équilibre. Nous proposons des résultats théoriques originaux qui permettent via la résolution d'un problème d'inégalité matricielle linéaire (LMI) de calculer les gains de retour d'état qui assurent : l'invariance positive, le respect des contraintes sur le vecteur commande et la contractivité de l'ensemble représentant les contraintes par rapport au système en boucle fermée.

Chapitre 1

Les réseaux de Petri : un outil de modélisation des systèmes de production

Chapitre 1

Les réseaux de Petri : un outil de modélisation des systèmes de production

1.1 Introduction

Les réseaux de Petri sont utilisés pour modéliser le comportement dynamique des systèmes à événements discrets. Ils permettent de modéliser les relations de précédences et les interactions structurelles d'événements stochastiques, concurrents, et asynchrones. De plus, leur nature graphique permet une meilleure visualisation des systèmes complexes. Ils sont de nos jours largement utilisés dans la modélisation, l'évaluation des performances, la commande et le contrôle des systèmes à événements discrets.

Les réseaux de Petri représentent un outil de modélisation hiérarchisé, avec un support mathématique bien développé. Ainsi, ils permettent d'entreprendre l'analyse et la conception de systèmes complexes. L'existence de plusieurs extensions de réseaux de Petri, tel que : Les réseaux de Petri temporisés, les réseaux de Petri colorés, et continus permet une analyse quantitative et qualitative du système étudié.

Dans ce chapitre et après avoir donnée quelque éléments de base concernant les systèmes de production, les concepts fondamentaux des réseaux de Petri sont présentés. Nous abordons ensuite l'étude des réseaux de Petri continus qui nous intéressent particulièrement dans cette thèse.

1.2 Systèmes de Production : Quelques définitions

1.2.1 La fonction production

La production est un ensemble d'activités opérationnelles mobilisant des ressources en vue de créer des biens matériels ou d'assurer des services d'utilité moyennant une ou plusieurs transformations. Ces transformations sont caractérisées par un ensemble d'opérations. L'ensemble de ces transformations constituant la production seront soumises à des impératifs de coût, de délai, de quantité et de qualité.

1.2.2 Système de production et système de pilotage

Généralement un système de production est décomposé selon la nature des flux qui le traversent. Le système est ainsi décomposé en : sous-système physique (flux de matières), sous-système de décision permettant le pilotage (flux de décisions) et le sous-système d'information représentant l'ensemble des informations en circulation dans le systèmes (flux d'informations). La Figure1.1 est une schématisation générale des interactions existant entre les différents sous-systèmes. Le système physique de production est constitué par l'ensemble des ressources permettant de convertir des matières premières en produits finis ou semi-finis. Le système de pilotage est destiné à commander le système physique de production. Les données récupérées par le sous-système informationnel sont traitées par le sous système décisionnel afin de définir les décisions garantissant le bon fonctionnement du système physique compte tenu des multiples contraintes internes (disponibilité des ressources) ou externes (contraintes des clients et fournisseurs) à l'entreprise. On distingue trois niveaux de décisions :

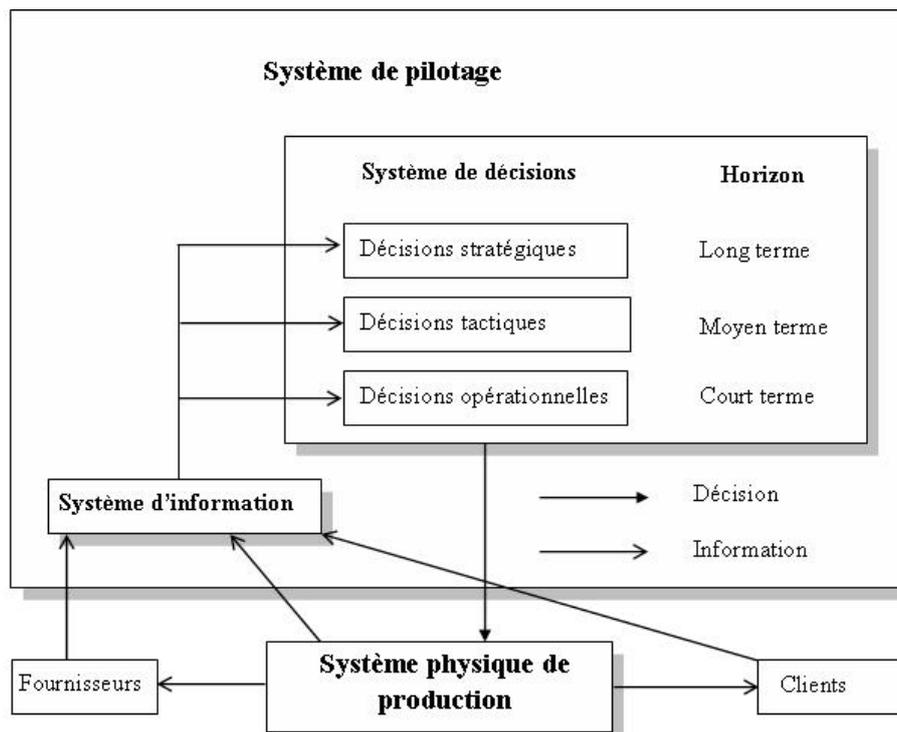


FIG. 1.1: Composition d'un système de production

Les décisions stratégiques définissent des politiques à long terme et concernent par exemple des décisions d'investissement dans une entreprise.

Les décisions tactiques définissent des politiques à moyen terme concernant la production et visent à satisfaire des contraintes de délai, de qualité et de quantité tout en utilisant efficacement les moyens de production.

Les décisions opérationnelles assurent le fonctionnement quotidien de la fabrication. Les décisions élaborées à ce stade permettent une affectation des ressources aux tâches avec une répartition des tâches dans le temps. Elles permettent aussi d'assurer la conduite du système physique quand ce dernier est soumis à des perturbations (pannes, perturbation de la demande, manque d'approvisionnement ...).

La relation entre le système de pilotage et le système physique apparaît donc comme un système en boucle fermée (système asservi) comme illustré par la Figure 1.2.

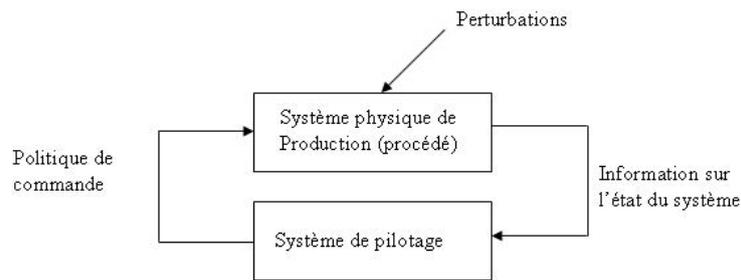


FIG. 1.2: Commande d'un système de production

1.2.3 Typologie des systèmes de production

Il existe fondamentalement deux visions pour classifier les systèmes de production. La première typologie est liée à l'origine de la demande. On distingue alors les systèmes basés sur la production à la commande des systèmes basés sur la production pour stock. La deuxième typologie est liée à la façon dont sont organisées les ressources pour traiter les flux de matière. C'est cette deuxième typologie qui nous intéresse dans cette thèse.

Système à production unitaire ou projet

Ce type d'organisation concerne la réalisation de projets uniques. Le problème dans ce cas consiste à coordonner simultanément les tâches avec les moyens à mettre en oeuvre en planifiant la succession des différentes opérations.

Système de production en petite et moyenne série

Il s'agit dans ce type de système de produire une grande variété de produits en faible quantité tout en utilisant les mêmes moyens de production. Dans cette organisation, les équipements sont regroupés par fonctionnalité équivalente dans un ensemble d'ateliers spécialisés.

La classification de ce type d'ateliers se fait selon l'ordre d'utilisation des machines pour fabriquer un produit ou job, ce qu'on appelle gamme de fabrication. On distingue les trois ateliers suivants :

Atelier de type flow shop : les pièces dans ce type d'atelier possèdent toutes le même

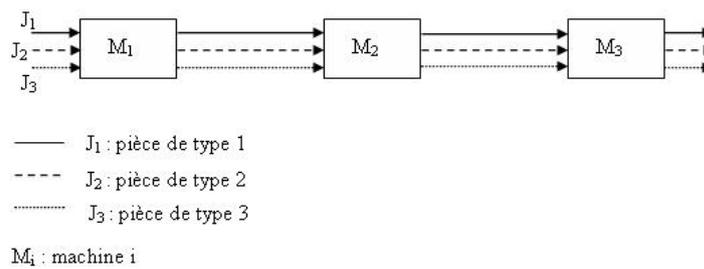


FIG. 1.3: Atelier de type flow shop

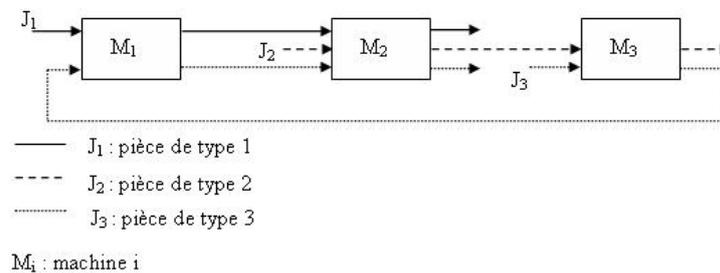


FIG. 1.4: Atelier de type job shop

ordre de passage (i.e. une gamme unique de production) sur les machines du système. La Figure 1.3 montre un exemple de flow shop avec trois machines M_1 , M_2 et M_3 et trois job J_1 , J_2 et J_3 .

Atelier de type job shop : chaque pièce dans ce type d'atelier possède sa propre gamme de production. La Figure 1.4 illustre l'organisation d'un atelier de type job shop avec trois machines M_1 , M_2 et M_3 et trois job J_1 , J_2 et J_3 .

Atelier de type Open shop : dans ce type d'atelier, les pièces ne possèdent aucune gamme de production.

Système de production en grande série

Dans ce type d'atelier le système est organisé en ligne de fabrication, les produits passent successivement et dans le même ordre par une séquence identique de postes de travail. Les Figure 1.5 et Figure 1.6 illustrent ce qu'est une ligne de production linéaire et

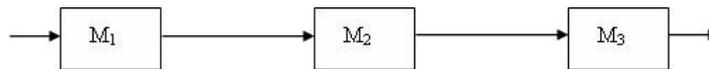


FIG. 1.5: Exemple d'une ligne de production linéaire

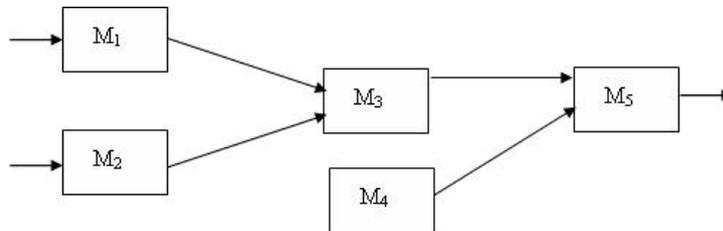


FIG. 1.6: Exemple d'une ligne d'assemblage

une ligne d'assemblage.

Systeme de production continu

Ce mode de production concerne les systèmes où la matière circule en flux continu.

1.2.4 Modélisation des systèmes de production

Les systèmes de production appartiennent à la classe des systèmes dynamiques à événements discrets. Les systèmes à événements discrets sont des systèmes qui évoluent dans le temps par occurrence d'événements. La modélisation d'un système de production est la première étape à franchir lors de l'étude du comportement du système. Deux types d'approches sont disponibles pour effectuer cette étude du comportement : la simulation et l'analyse par des outils de modélisation mathématique tel que : les files d'attentes, les chaînes de Markov, les automates et les réseaux de Petri. Chacun de ces outils vise un problème d'analyse donné. Nous nous intéressons dans cette thèse à l'outil réseau de Petri et plus particulièrement à l'approximation continue des systèmes à événements discrets modélisés par réseaux de Petri.

1.3 Réseaux de Petri autonomes

Les concepts introduits dans cette section sont puisés essentiellement des références de base introduisant les réseaux de Petri [13, 8, 48, 49].

Un réseau de Petri [13, 48] est un graphe biparti constitué de deux types de noeuds : les places et les transitions. Des arcs orientés relient certaines places à certaines transitions et certaines transitions à certaines places. Un arc ne relie jamais deux sommets de même nature. Généralement, les places sont représentées par des cercles et les transitions par des barres (ou rectangles), et les arcs par des segments fléchés. Une place est dite place d'entrée (de sortie) d'une transition s'il existe un arc orienté reliant cette place (transition) à la transition (place). Les places d'entrée (de sortie) modélisent des préconditions (postconditions) et les transitions des événements. Chaque place peut contenir une ou plusieurs marques, représentées par des jetons. Comme nous le verrons plus loin, ces marques vont permettre de modéliser la dynamique du système. Le marquage d'un réseau de Petri est un vecteur à composantes entières positives ou nulles dont la dimension est égale au nombre de places. La i^{me} composante de ce vecteur représente le nombre de marques qui figurent dans la place numéro i du réseau de Petri.

De manière plus formelle, nous dirons qu'un réseau de Petri est un quadruplet $\mathcal{R} = (P, T, I, O)$ où :

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini et non vide de places,

$T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ est un ensemble fini et non vide de transitions,

$I : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application d'incidence avant, où \mathbb{N} est l'ensemble des entiers non négatifs,

$O : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application d'incidence arrière.

Notons que $P \cap T = \emptyset$ et $P \cup T \neq \emptyset$, c'est à dire que les ensembles P et T sont disjoints.

Le marquage du réseau est donné par une application Mar définie par :

$Mar : P \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $Mar(P_i) = m_{P_i}$ qui indique le nombre de jetons dans la place P_i .

Le marquage à un instant t donnée d'un réseau de Petri est donc un vecteur dimension n donné par : $m(t) = [m_{P_1}(t), m_{P_2}(t), \dots, m_{P_n}(t)]^T$.

Un réseau de Petri marqué est le couple $\mathcal{N} = (\mathcal{R}, m_0)$ formé d'un réseau de Petri \mathcal{R} et m_0

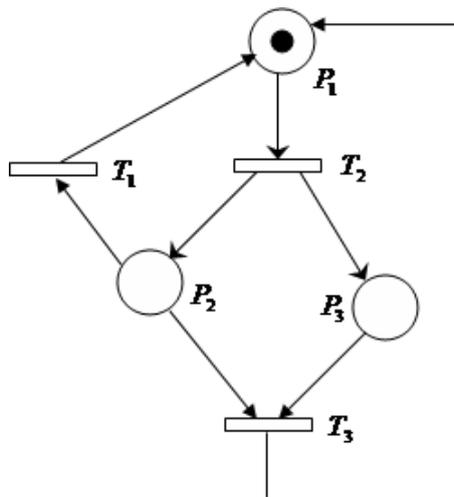


FIG. 1.7: Exemple de réseau de Petri ordinaire

le marquage initial du réseau i.e. à $t = 0$. La Figure 1.7 montre un exemple de réseau de Petri. A chaque arc est associé un poids entier positif (défini par les applications I et O). Lorsque ce poids n'est pas porté sur l'arc, par convention il est égal à 1. Lorsque tous les poids des arcs sont égaux à 1, le réseau de Petri est dit ordinaire (c'est le cas du réseau de Petri de la Figure 1.7). Dans ce qui va suivre, les notations suivantes sont adoptées,

${}^{\circ}T_j$: l'ensemble des places d'entrée de la transition T_j ,

T_j° : l'ensemble des places de sortie de la transition T_j ,

P_i° : l'ensemble des transitions de sortie de la place P_i ,

${}^{\circ}P_i$: l'ensemble des transitions d'entrée de la place P_i .

1.3.1 Notations matricielles d'un réseau de Petri

Pour un réseau de Petri avec m transitions et n places, la matrice d'incidence $C = [C_{ij}]_{n \times m}$ est une matrice de dimension $(n \times m)$ d'entiers, dont les composantes sont données par $C_{ij} = O(P_i, T_j) - I(P_i, T_j)$, où $O(P_i, T_j)$ est le poids de l'arc reliant la transition T_j à sa place de sortie P_i et $I(P_i, T_j)$ est le poids de l'arc reliant T_j à sa place d'entrée P_i ; par conséquent, une transition est validée par un marquage m si et seulement si $I(P_i, T_j) \leq m_{P_i}$

pour $P_i \in {}^o T_j$. Pour le réseau de Petri de la Figure 1.7, la matrice d'incidence est la suivante

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Dynamique et règle d'évolution

Le franchissement des transitions simule le comportement dynamique du système modélisé. Un état ou un marquage est modifié conformément aux règles de franchissement suivantes :

- 1) Une transition T_j est dite validée si chaque place d'entrée P_i contient au moins un nombre de marques égal au poids de l'arc reliant ces places à T_j , formellement, $m_{P_i} \geq I(P_i, T_j)$,
- 2) Le franchissement d'une transition validée T_j retranche de chaque place d'entrée P_i un nombre de marques égal au poids de l'arc P_i, T_j reliant ces places d'entrée à T_j et ajoute dans chaque place de sortie un nombre de marques égal au poids de l'arc P_i, T_j reliant T_j aux places de sortie.

Le franchissement d'une ou plusieurs transitions produit un nouveau marquage m_k tel que $m_{kP_i} = m_{P_i} - I(P_i, T_j) + O(P_i, T_j)$, $P_i \in P$. Le marquage m_k est dit alors accessible à partir du marquage m . En partant de l'état initial m_0 du réseau de Petri \mathcal{N} , on peut aboutir à tous les états accessibles à partir de m_0 . On dit qu'un marquage m_k couvre le marquage m_j , on écrit $m_k \geq m_j$, si $\forall P_i, m_k(P_i) \geq m_j(P_i)$. Un marquage m_k est dit supérieur à un marquage m_j , on écrit $m_k > m_j$, si $m_k \geq m_j$ et il existe au moins une place P_i telle que $m_k(P_i) > m_j(P_i)$.

Les règles de franchissement sont illustrées par la Figure 1.8.

1.3.3 Nombre de franchissement et degré de franchissement

Dans un réseaux de Petri, une transition est dite k -serveurs si elle permet au plus k franchissements simultanés. Une boucle de réentrance contenant k jetons, tel que montré par la Figure 1.9 est alors associée à cette transition. Le degré de franchissement d'une

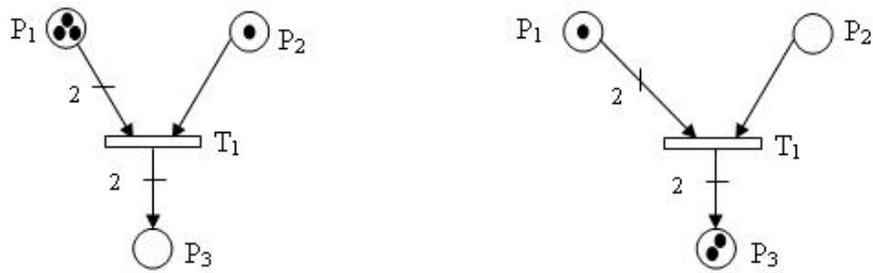


FIG. 1.8: Franchissement d'une transition

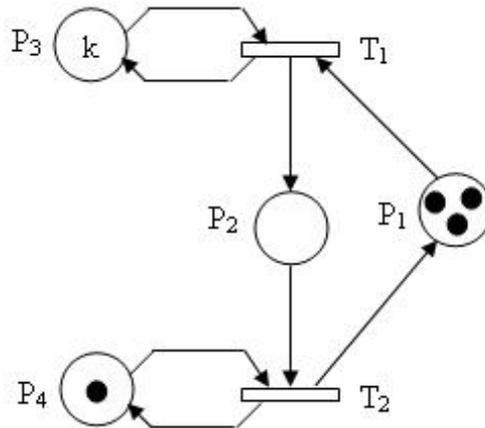


FIG. 1.9: Réseau de Petri avec boucle de réentrance

transition T_j à un marquage m donné, est égal au nombre de franchissement de la transition T_j possible avec ce marquage. Le degré de franchissement est donné explicitement par la formule suivante

$$\text{enab}(T_j, m) = \min_{i|P_i \in {}^o T_j} \left\{ \frac{m_{P_i}(t)}{I(P_i, T_j)} \right\}.$$

La transition T_1 de la Figure 1.9 possède un degré de franchissement égal à $\text{enab}(T_1) = \min \{k, m_{P_1}\}$.

1.3.4 Propriétés des réseaux de Petri

En tant qu'outil mathématique, les réseaux de Petri possèdent un certain nombre de propriétés. Quand ces propriétés sont interprétées dans le contexte du système modélisé, elles permettent d'identifier la présence ou l'absence des propriétés fonctionnelles spécifiques au domaine d'application du système. Les propriétés définies dans cette section

sont l'accessibilité, l'état d'accueil, la bornitude et la vivacité. Ces propriétés dépendent du marquage initial du réseau de Petri.

1.3.5 Accessibilité

Le franchissement d'une transition validée dans un réseau de Petri apporte une modification au marquage initial du réseau. Un marquage m_k est dit accessible à partir du marquage m_0 , s'il existe une séquence de franchissement $\sigma = T_1 T_2 \dots T_k$ qui transforme m_0 en m_k [13]. Dans ce cas, on écrit $m_0[\sigma > m_k$ ce qui signifie que m_k est accessible à partir de m_0 par σ . L'ensemble de tous les marquages accessibles à partir de m_0 dans un réseau de Petri \mathcal{N} est noté $R(m_0)$. L'ensemble de toutes les séquences de franchissement possibles à partir de m_0 dans un réseau de Petri \mathcal{N} est noté $L(m_0)$.

1.3.6 Etat d'accueil et réseau de Petri réinitialisable

Un réseau de Petri possède un état d'accueil m_a pour un marquage initial m_0 si pour tout marquage accessible $m \in R(m_0)$, il existe une séquence de franchissement σ tel que $m[\sigma > m_a$ [13]. Un réseau de Petri est réinitialisable pour un marquage initial m_0 si m_0 est un état d'accueil.

1.3.7 Réseau de Petri borné

Un réseau de Petri est dit k -borné si le nombre de marque dans chaque place ne dépasse pas un nombre fini k pour tout marquage accessible à partir du marquage initial m_0 [13]. Formellement, $m_{P_i} \leq k$ pour chaque place P_i et chaque marquage $m \in R(m_0)$. Un réseau de Petri \mathcal{N} est dit borné s'il est 1-borné.

1.3.8 Vivacité

Un réseau de Petri \mathcal{N} est dit vivant si, quel que soit le marquage atteint à partir de m_0 , il est possible de franchir toute transition du réseau en progressant à travers une

certaine séquence de franchissement [13]. Un réseau de Petri vivant est un réseau de Petri sans blocage. Un blocage est un marquage tel qu'aucune transition n'est validée [13].

1.4 Méthodes d'analyse

Une fois qu'un système physique est modélisé par un réseau de Petri, une analyse qualitative du modèle (recherche des propriétés du réseau de Petri) peut être effectuée. On peut ainsi vérifier certaines propriétés au niveau du modèle. Deux méthodes d'analyse nous intéressent dans ce travail. La première est énumérative et repose sur la construction de l'arbre de couverture. La deuxième est structurelle et se base sur la représentation matricielle des réseaux de Petri.

1.4.1 Graphe des marquages et arbre de couverture

Le graphe des marquages est composé de noeuds qui représentent les marquages accessibles et d'arcs correspondant aux franchissements de transitions faisant passer d'un marquage à l'autre. Pour pouvoir construire le graphe des marquages, il est nécessaire d'énumérer tous les marquages accessibles. En commençant par le marquage initial, toutes les transitions validées sont franchies. Ceci conduit à de nouveaux marquages, qui peuvent valider d'autres transitions. Dans le cas où le réseau de Petri est non borné, le graphe de marquages peut être infini. Pour pouvoir limiter la taille du graphe, on introduit le symbole ω , qui peut être considéré comme un nombre entier aussi grand que l'on veut. Il a la propriété suivante : pour tout entier n , $\omega + n = \omega - n = \omega, \forall n < \omega$.

En adoptant cette notation, l'arbre de couverture peut être construit. Quand le symbole ω n'apparaît pas sur l'arbre de couverture, l'arbre est simplement appelé graphe des marquages.

Algorithme de construction de l'arbre de couverture [13]

Algorithme 1

Pas 1. A partir du marquage initial, on indique toutes les transitions validées et les

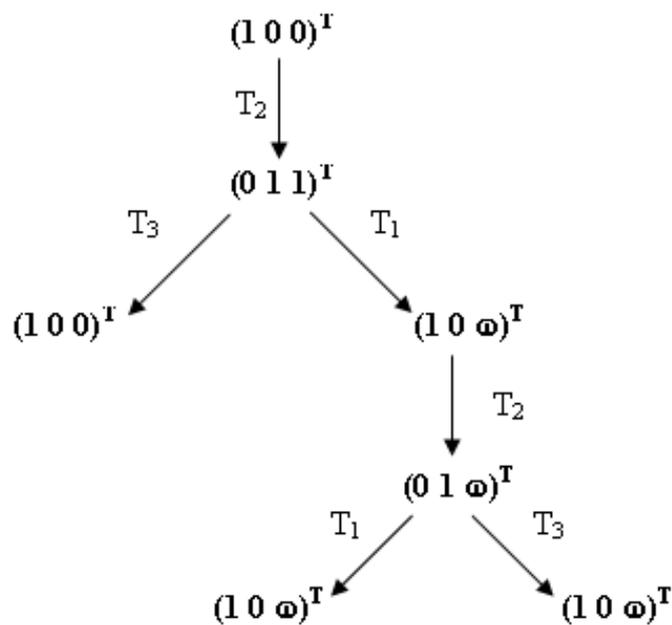


FIG. 1.10: L'arbre de couverture du réseau de la Figure 1.7

marquages successeurs correspondant. Si un de ces marquages est strictement supérieur à m_0 , on remplace par le symbole w chacune des composantes supérieures aux composantes du marquage initial.

Pas 2. Pour chaque nouveau marquage m_i de l'arbre, on exécute le Pas 2.1 ou le Pas 2.2.

Pas 2.1. S'il existe entre m_0 et m_i un marquage $m_j = m_i$, alors m_i n'a pas de successeurs.

Pas 2.2. S'il n'existe pas entre m_0 et m_i un marquage $m_j = m_i$, alors on prolonge l'arbre en ajoutant tous les successeurs de m_i . Pour chaque successeur m_k de m_i :

a. Une composante w de m_i reste une composante w pour m_k .

b. s'il existe entre m_0 et m_k un marquage m_j tel que $m_k > m_j$, alors on remplace par w chacune des composantes supérieures aux composantes de m_j .

L'exemple suivant illustre la méthode de l'arbre de couverture. Considérons le réseau de Petri de la Figure 1.7 et l'arbre de couverture correspondant représenté en Figure 1.10. Pour le marquage initial $m_0 = [1, 0, 0]^T$, la transition T_2 est validée. Le franchissement de T_2 transforme m_0 en $m_1 = [0, 1, 1]^T$. En m_1 , les deux transitions T_1 et T_3 sont validées. Le

franchissement de T_3 nous ramène au marquage initial, tandis que celui de T_1 transforme m_1 en $m_2 = [1, 0, 1]^T$. Comme $m_2 = [1, 0, 1]^T \geq m_0 = [1, 0, 0]^T$, la troisième composante doit être remplacée par le symbole ω . En $m_2 = [1, 0, \omega]^T$, la transition T_2 est validée. Son franchissement donne $m_3 = [0, 1, \omega]^T$. En m_3 , deux transitions sont validées ; la transition T_1 et la transition T_3 . Le franchissement de l'une ou de l'autre transforme m_3 en m_2 .

L'arbre de couverture peut être utilisé pour la détermination des propriétés d'un réseau de Petri. Ainsi, un réseau de Petri est borné, pour un état initial donné, si et seulement si le symbole ω n'apparaît pas dans le graphe de couverture. A cause de la perte d'information due à l'utilisation de w , les propriétés de vivacité et d'accessibilité ne peuvent être analysées par l'arbre de couverture seul. Dans le cas où le graphe est fini, l'analyse des propriétés se fait par inspection du graphe de marquage. Un réseau de Petri est vivant, pour un état initial donné, si et seulement si toutes les transitions du réseau apparaissent dans l'arbre des marquages [13]. Un réseau de Petri est réinitialisable, pour un état initial donné, si et seulement si le graphe des marquages contient un circuit pas nécessairement élémentaire, qui contient toutes les transitions [13].

1.4.2 Matrice d'incidence et équation d'état

La deuxième méthode d'analyse utilise la notion de matrice d'incidence, une matrice qui décrit comment les places et les transitions dans un réseau de Petri sont interconnectées. Comme cette interconnexion n'a aucun lien avec le marquage initial, cette approche permet la vérification des propriétés structurelles des réseaux de Petri. L'avantage de l'analyse matricielle par rapport à l'analyse par arbre de couverture est l'existence d'équations algébriques simples qui permettent la détermination des propriétés des réseaux de Petri.

Notion d'état

Soit m_k le marquage obtenu après la k^{me} exécution du réseau, avec $k > 0$, le marquage m_{k+1} est obtenu comme suit

$$m_{k+1} = m_k + C.S_k$$

où, S_k est un vecteur colonne de dimension $(n \times 1)$ composé d'entiers non-négatifs, appelé vecteur caractéristique de franchissement. L'équation précédente est appelée équation d'état. Puisque le nombre de marques dans une place n'est pas négatif, alors, $m_k + C.S_k \geq 0, \forall k \geq 0$. En supposant que m_f est accessible à partir de m_0 à travers une séquence de franchissement σ , nous obtenons

$$m_f = m_0 + C.S,$$

où : $S = \sum_{k=1}^f S_k$.

La j^{me} composante de S représente le nombre de fois que la transition T_j est franchie dans la séquence σ pour transformer m_0 en m_f .

Les invariants

Définition 1 Un P -invariant est un vecteur y , à composantes entières non négatives solution de $y.C = 0$, où C est la matrice d'incidence

Définition 2 On appelle support de y , dénoté $\mathbb{P}(y)$, l'ensemble des places qui correspondent aux composantes non nulles de y . Le vecteur y est dit minimal si et seulement si $\mathbb{P}(y)$ ne contient d'autre support $\mathbb{P}(y')$ que lui-même et l'ensemble vide.

Propriété 1 Si y est un P -invariant alors, quel que soit le marquage initial m_0 et, pour tout marquage accessible m , on a

$$y^T.m = y^T.m_0.$$

Cette relation exprime la conservation du marquage des places appartenant à $\mathbb{P}(y)$ indépendamment de l'évolution du réseau.

Définition 3 On appelle composante conservative d'un réseau de Petri le support du P -invariant. De plus, si l'ensemble de toutes les places P est lui-même une composante conservative, on dira que le réseau est conservatif.

Définition 4 *Un T-invariant est un vecteur x à composantes entières non négatives solution de $C.x = 0$.*

Définition 5 [13] *Le support d'un T-invariant est noté $\mathbb{T}(x)$, l'ensemble des transitions qui correspondent aux composantes non nulles de x .*

Propriété 2 *Considérons une séquence de franchissement σ telle que son vecteur caractéristique x soit T-invariant, on a*

$$m = m_0 + C.x.$$

Comme x est T-invariant, $C.x = 0$, par conséquent $m = m_0$.

Autrement dit, si σ est réalisable, le franchissement de σ nous ramène au marquage initial du réseau. De ce fait, la séquence σ est indéfiniment reproductible et le fonctionnement du réseau est caractérisé par une répétition stationnaire de franchissement des transitions de σ .

Définition 6 *Le support d'un T-invariant est appelé composante répétitive stationnaire du réseau. Si de plus, l'ensemble de toutes les transitions est lui-même une composante répétitive stationnaire, on dira que le réseau est répétitif stationnaire.*

Il est à signaler que l'existence d'un T-invariant couvrant toute les transitions du réseau, est une condition nécessaire mais pas suffisante de vivacité.

Algorithme de recherche des P-invariants [41]

Algorithme 2

Pas 1. *Soit C la matrice d'incidence d'un réseau de Petri et soit I la matrice identité de dimension n . Construire la matrice $[I|C]$.*

Pas 2. *Pour chaque indice j de transition T_j , faire ce qui suit :*

Pas 2.1. *Ajouter à la matrice $[I|C]$ autant de lignes i qu'il y a de combinaisons linéaires de deux lignes, à coefficients entiers positifs, annulant l'élément (i, j) .*

Pas 2.2. Oter de la matrice $[I|C]$ les lignes i dont l'éléments (i, j) n'est pas nul.

Pas 3. Les P -invariants correspondent aux lignes non nulles de la matrice I résultante.

Le même algorithme est utilisé pour la recherche des T – invariants associés à C . Il suffit de remplacer C par sa transposée dans l'algorithme de recherche des P -invariants.

1.4.3 Réseaux de Petri temporisés

Les réseaux de Petri autonomes étudiés précédemment permettent une analyse qualitative des systèmes modélisés. L'introduction des temporisations dans un réseau de Petri permet de décrire un système dont le fonctionnement dépend du temps et permet ainsi d'envisager une analyse quantitative (de performance) du système étudié. Dans un réseau de Petri temporisé, les temporisations sont associées aux places (RdP P -temporisé) ou aux transitions (RdP T -temporisé). Ces deux façons d'envisager les temporisations conduisent à des outils équivalents, même si la mise en oeuvre est différente. Les réseaux de Petri temporisés sont utiles pour l'évaluation des performances des systèmes modélisés. Deux approches existent dans l'évaluation des performances, l'approche déterministe et l'approche probabiliste.

Dans l'approche déterministe, il est nécessaire de connaître au préalable les temps d'arrivée et de traitement des tâches avant l'analyse. Cette approche est utilisée pour les systèmes à choix libre qu'on peut modéliser par certaines classes de réseaux de Petri tels que les graphes d'événements [59, 60]. Dans l'approche probabiliste, les taux d'arrivée et de service des tâches sont donnés par des distributions probabilistes. Le réseau de Petri résultant, appelé réseau de Petri stochastique, peut être transformé en une chaîne de Markov à partir de laquelle on peut déterminer les performances du système [19, 20, 45]. Dans la suite, nous ne présentons que les réseaux de Petri avec des temporisations déterministes sur les transitions.

Un réseau de Petri T -temporisé [13] est une paire $\langle \mathcal{N}, Tempo \rangle$ tel que \mathcal{N} est un

réseau de Petri marqué ;

$Tempo$ est une application de l'ensemble des transitions dans l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls avec, $Tempo(T_j) = d_j$. d_j est appelée, temporisation de la transition T_j .

Principe de fonctionnement

Une marque peut avoir deux états : elle peut être réservée pour le franchissement d'une transition T_j ou elle peut être non réservée. La transition T_j est validée si les marques non réservées sont en nombre suffisant pour la valider. On peut alors réserver, à l'instant t , les marques nécessaires à son franchissement. Les marques restent réservées dans l'intervalle $]t, t + d_j[$ et le franchissement est effectué à l'instant $t + d_j$. A l'instant initial, toutes les marques sont non réservées. Pour un réseau de Petri T-temporisé, on peut aussi définir un fonctionnement à vitesse maximale [13] (dès qu'une transition est validée, les marques nécessaires à son franchissement sont réservées) et un fonctionnement à vitesse propre [13] (dès qu'une marque est déposée dans une place, elle est réservée pour le franchissement d'une transition).

Fonctionnement périodique

Si l'évolution du réseau nous mène à un état identique au bout d'un temps fini, on dit que le régime stationnaire est établi. Soit $\langle \mathcal{N}, Tempo \rangle$ un réseau de Petri temporisé. Le fonctionnement à vitesse maximale conduit à un fonctionnement périodique, au bout d'un temps fini, pour tout marquage initial tel que $\langle \mathcal{N}, Tempo \rangle$ soit borné [13]. Le régime stationnaire assure le caractère répétitif d'un système. Ainsi, il assure un fonctionnement sans blocage. On définit la fréquence de franchissement stationnaire f_j d'une transition T_j comme étant le nombre moyen de franchissement de T_j par unité de temps lorsque le régime stationnaire est établi.

1.5 Réseaux de Petri continus

L'explosion du nombre des états atteignables est un problème fréquent dans l'analyse et la commande des systèmes à événements discrets. Ce qui rend l'analyse par graphe des marquages souvent impraticable. L'exemple de la Figure 1.11, nous donne une idée du nombre des états que peut avoir un système modélisé par réseau de Petri discret. En effet le nombre d'états atteignables avec le marquage initial donné la Figure 1.11 est égal à 1125 états. Avec dix jetons dans S_1 et dix jetons dans S_2 , le système passe à 544500 états atteignables. L'analyse par arbre de couverture devient impraticable au delà d'une certaine taille du graphe de marquage.

La fluidification est une approximation qui permet d'outrepasser le problème d'énumération des états atteignables. L'application de cette idée a permis de définir le concept de réseau de Petri continu. Un autre avantage de l'introduction des réseaux de Petri continus est qu'ils permettent de modéliser des systèmes continus qui ne peuvent être modélisés par les réseaux discrets.

Dans un réseau de Petri continu le marquage d'une place est un nombre réel non-négatif et les transitions sont franchies avec des quantités réelles [13]. Ainsi, lorsqu'une transition est franchie, une quantité réelle de marques est enlevée des places d'entrée et une quantité réelle de marques est ajoutée aux places de sortie.

L'approximation continue des réseaux de Petri discrets, permet de raisonner sur des flux de matière plutôt que sur des entités discrètes. C'est l'une des raisons fondamentales qui ont poussé à l'introduction des réseaux de Petri continu. Ainsi, ils trouvent une application intéressante pour la recherche de certaines propriétés du régime stationnaire tel que le flux de matière asymptotique et le marquage stationnaire. Beaucoup de travaux utilisant les réseaux de Petri continus ont été dédiés à l'étude des systèmes de production. On trouve, néanmoins, des applications dans le domaine des processus chimiques et biologiques.

Dans [58] le modèle initial introduit par David et Alla [1, 12] a été utilisé pour calculer l'état stationnaire des lignes de Production ouvertes et fermées et des lignes d'assemblage modélisées par réseaux de Petri continus à vitesses variables. Des formules explicites permettant de calculer le taux de franchissement asymptotique des transitions et le marquage stationnaire représentant les moyens des en-cours sont données. En outre, la qualité de l'approximation continue dans le cas des lignes de production a été évaluée en comparant l'écart entre le marquage du réseau de Petri continu à vitesses variables et celui du réseau de Petri T-temporisé discret. Il a été montré que cet écart dépend fortement de la configuration du réseau de Petri.

Le modèle initial, introduit par David et Alla a été revisité par la suite par Recalde et Silva [53, 55] par une interprétation stochastique des vitesses maximales. En effet dans le modèle de Recalde et Silva, la vitesse maximale correspond à la moyenne d'occurrence d'événements. Dans le modèle initial de David et Alla, la fluidification n'était pas totale à cause des boucles de réentrance sur les transitions. En outre, il a été montré [55] qu'on ne peut pas toujours fluidifier un réseau de Petri discret, de même qu'on ne peut pas toujours linéariser un système continu. Ceci est dû au fait que certaines propriétés des réseaux discrets ne se conservent pas dans le cas continu. Le réseau de Petri donné à la Figure 1.12 est vivant avec l'approximation continue alors qu'il présente un blocage dans le cas discret. Ceci est dû au fait que le marquage $m_s = [0, 0]^T$, correspondant à un blocage, n'est jamais atteint avec des séquences de franchissement finies. Le lecteur est orienté vers [55, 56] pour plus de détails.

1.5.1 Réseaux de Petri continus temporisés

Un réseau de Petri continu temporisé marqué est un couple $\langle \mathcal{R}, m_0 \rangle$ avec $\mathcal{R} = (P, T, I, O, V)$ un quintuplet tel que

- $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini et non vide de places de cardinalité n ,
- $T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ est un ensemble fini et non vide de transitions de cardinalité m ,
- $I : P \times T \rightarrow \mathbb{Q}_+$ et $O : P \times T \rightarrow \mathbb{Q}_+$ sont définies comme dans 1.2,

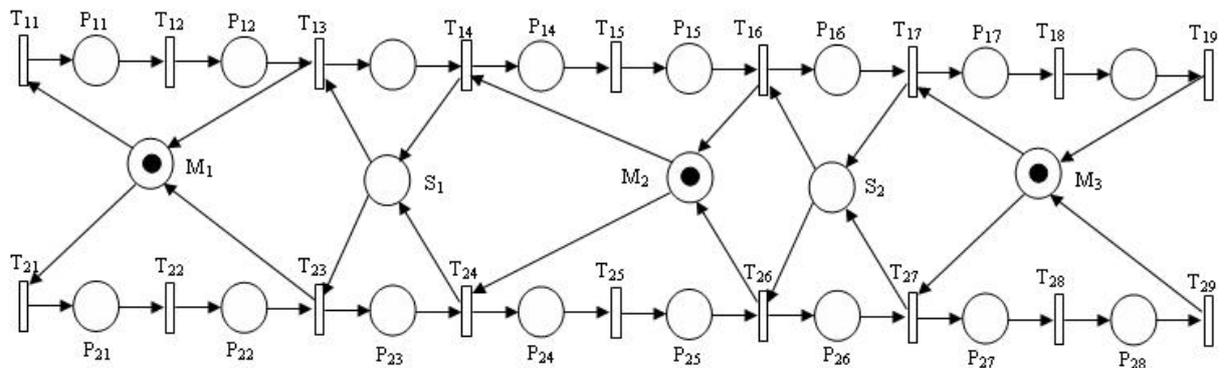


FIG. 1.11: Système de production modélisé par réseau de Petri

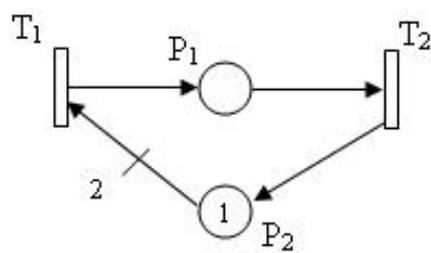


FIG. 1.12: Un réseau de Petri vivant dans le cas continu et présentant un blocage dans le cas discret

- $V : T \times T \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une application qui associe à chaque transition T_j , une vitesse maximale de franchissement V_j .
- $m_0 \in \mathbb{R}_+^n$ représente le vecteur marquage initial et \mathbb{R}_+ est l'ensemble des réels non-négatifs,

Une transition T_j est validée pour un marquage m si et seulement si $\forall P_i \in {}^o T_j, m_{P_i} > 0$. Comme dans le cas discret, le degré de validation d'une transition T_j est défini comme suit

$$\text{enab}(T_j, m) = \min_{i|P_i \in {}^o T_j} \left\{ \frac{m_{P_i}(t)}{I(P_i, T_j)} \right\}.$$

Plusieurs classes de réseaux de Petri continus temporisés ont été proposées dans la littérature. Les plus importants sont les modèles à débits introduits par David et Alla [13, 14] et revisités par Recalde et Silva [55, 56], et le modèle de Cohen Gaubert et Quadrat [10] (CGQ). Dans les modèles à débits, on associe à chaque transition T_j une vitesse maximale de franchissement V_j , chaque transition est franchie avec une vitesse instantanée (ou débit instantané) qui représente la quantité de marques qui franchit la transition par unité de temps à cet instant. Il existe fondamentalement deux variantes de modèle réseau de Petri continu temporisé : le modèle réseau de Petri continu à vitesses constantes et le modèle réseau de Petri continu à vitesses variables. Les deux modèles diffèrent par la manière dont la vitesse instantanée de franchissement associée à chaque transition est calculée. Dans le modèle (CGQ), des temporisations sont associées à chaque place du réseau de Petri. Le système est caractérisé par un ensemble d'équation linéaire ou linéarisable dans l'algèbre $(\min, +)$. L'état du système modélisé est défini par des compteurs de franchissement représentant le nombre cumulé de franchissement des transitions à un instant donné. Dans cette thèse, on ne s'intéresse qu'aux modèles à débits, plus particulièrement à la sémantique vitesses variables. Le modèle CGQ est défini en Annexe.

Equation fondamentale

Quelque soit la sémantique définie pour les vitesses de franchissement, l'évolution du marquage d'une place P_i est donnée par le bilan dynamique des débits instantanées entrants moins les débits instantanés sortant, comme indiquée par l'équation suivante :

$$m_{P_i}(t + dt) = m_{P_i}(t) + \int_t^{t+dt} \sum_{k=1}^m O(P_i, T_k) \cdot v_k(t) \cdot dt - \int_t^{t+dt} \sum_{k=1}^m I(P_i, T_k) \cdot v_k(t) \cdot dt,$$

où $v_k(t)$ représente la vitesse instantanée de la transition T_k .

L'évolution du marquage d'un réseau de Petri continu est donc donné par,

$$\dot{m}(t) = C \cdot v(t), \quad (1.1)$$

avec $C = [C_{ij}]_{n \times m}$ la matrice d'incidence ($C_{ij} = O(P_i, T_j) - I(P_i, T_j)$) définie précédemment et $v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)]^T$ le vecteur vitesse de franchissement instantanée, associé aux transitions du réseau.

Réseaux de Petri continus à vitesses constantes

Dans la sémantique vitesses constantes, l'expression de la vitesse instantanée de franchissement d'une transition $v_j(t)$ dépend des conditions de validation de la transition T_j . Une transition T_j donnée, peut être dans les trois cas de validation suivants :

cas 1 : Si à un instant t donné, toutes les places en amont de T_j ont un marquage strictement positif alors la transition est dite fortement validée. Sa vitesse de franchissement instantanée est alors égale à sa vitesse maximale de franchissement, c'est à dire :

$$v_j(t) = V_j.$$

cas 2 : Si à un instant t donné, certaines places en amont de T_j ont un marquage nul mais alimentées alors la transition est dite faiblement validée. Sa vitesse de franchissement instantanée est alors donnée par :

$$v_j(t) = \min \left\{ \min_{P_i \in {}^{\circ}T_j | m_{P_i}=0} \left\{ \sum_{T_l \in {}^{\circ}P_i} \frac{V_l \cdot O(T_l, P_i)}{I(P_i, T_j)} \right\}, V_j \right\}.$$

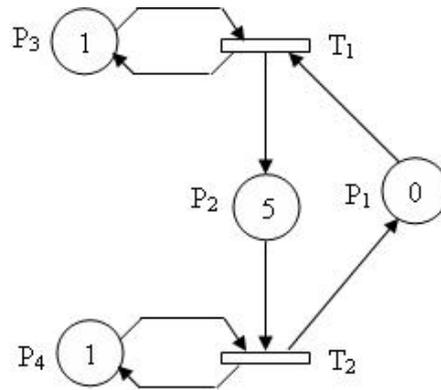


FIG. 1.13: Exemple de réseau de Petri continu

cas 3 : Si à un instant t donné, il existe une place en amont de T_j avec un marquage nul mais non alimentée alors la transition est non validée. Sa vitesse de franchissement instantanée est alors nulle i.e. $v_j(t) = 0$.

On voit bien que la vitesse instantanée d'une transition est limitée supérieurement par sa vitesse maximale. Le calcul des vitesses de franchissement est un calcul du point fixe de la forme $v^* = G(v^*)$ où v^* est un vecteur de nombre réels de dimension égale à celle de l'ensemble des transitions validées à chaque instant t .

Un graphe d'évolution semblable au graphe de marquages dans le cas discret est construit pour les réseaux de Petri continus à vitesses constantes. Un noeud dans ce graphe correspond à une période d'évolution appelée phase (appelée aussi IB-état) dans laquelle le vecteur vitesse instantanée de franchissement est constant i.e. les conditions de validation des transitions restent inchangées. Le passage d'une phase à une autre s'effectue lorsqu'une place s'annule. Il a été montré [13] que dans le cas d'un réseau de Petri continu à vitesses constantes borné, on atteint une phase dans laquelle le marquage des places reste constant, en un temps fini. Cette phase est appelée : phase finale.

Pour illustrer le fonctionnement d'un réseau de Petri continu à vitesses constantes, nous considérons l'exemple de la Figure 1.13 : Les vitesses maximales de T_1 et T_2 sont $V_1 = \frac{1}{3}$ et $V_2 = \frac{1}{2}$. Le graphe d'évolution du réseau est donné par la Figure 1.14, la Figure

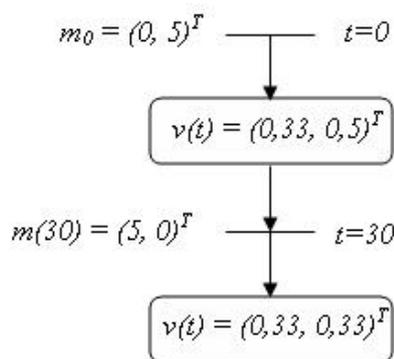


FIG. 1.14: Graphe d'évolution du graphe de la Figure 1.13

1.14 montre que le système admet deux phases. Chaque phase est caractérisée par des vitesses instantanées constantes.

Réseaux de Petri continus à vitesses variables

Dans une modélisation par réseau de Petri à vitesses variables, les vitesses ne sont plus constantes sur toute la durée d'une phase, mais sont fonction du marquage dans toutes les phases d'évolution. La vitesse instantanée de franchissement d'une transition T_j est donnée par la relation suivante

$$v_j(t) = V_j \cdot \min_{i|P_i \in \circ T_j} \left\{ \frac{m_{P_i}(t)}{I(P_i, T_j)} \right\}. \quad (1.2)$$

Cette vitesse instantanée de franchissement dépend du marquage et de la vitesse maximale de franchissement associée à la transition. Cette vitesse s'annule lorsque le marquage d'une des places d'entrée de la transition est nul. Dans le cas d'un réseau de Petri continu à vitesses variables, la notion de faible et de forte validation n'existe pas.

En posant $m(0) = m_0$, le système d'équations (1.1-1.2) possèdent une unique solution $m(t)$ pour $t \geq 0$. La résolution du système d'équations (1.1) donne l'évolution du modèle. Dans ce cas, le marquage des places et les vitesses de franchissement sont des fonctions continues du temps. Le changement de phase est lié à l'expression du vecteur vitesse de franchissement instantanée des transitions. Ainsi, une phase est définie comme étant une

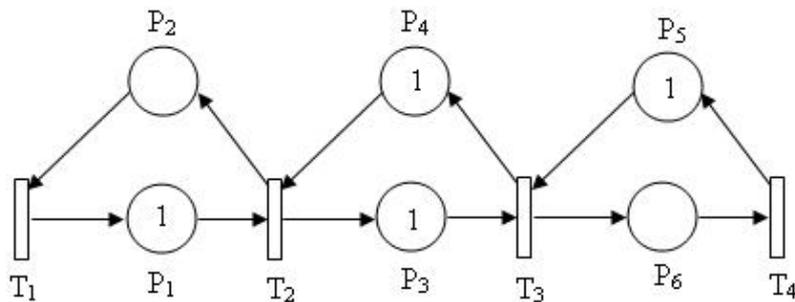


FIG. 1.15: Exemple de réseau de Petri continu

période durant laquelle l'expression du vecteur vitesse instantanée de franchissement des transitions reste inchangée. Dans ([40]), Les auteurs montre que l'évolution du marquage d'un système à événements discret modélisé par un réseau de Petri continu à vitesses variables peut être écrit sous forme canonique d'état comme suit,

$$\dot{m}(t) = C.\Lambda.\Gamma(m(t)).m(t),$$

avec Λ est une matrice diagonale de dimension $m \times m$ et $\Lambda_{ij} = V_j$ si $i = j$ et 0, autrement ; $\Gamma(m(t))$ est une matrice (de switcheurs) définie pour chaque phase (région) de l'espace d'état du réseau de Petri continu. Le nombre de phase est ainsi limité par $N = \prod_{T_j \in T} |{}^o T_j|$ (voir ([24])). Nous écrivons $\Gamma(m(t)) = \Gamma_k$ si le marquage $m(t)$ appartient à la région R_k . Dans chaque phase, la vitesse de franchissement est définie par le même ensemble de places. Dans la région R_k , la matrice des switcheurs est définie comme suit

$$\Gamma_k(T_j, P_i) = \begin{cases} \frac{1}{I(P_i, T_j)} & \text{si } \frac{m_{P_i}(t)}{I(P_i, T_j)} = \min_{h|P_h \in {}^o T_j} \frac{m_{P_h}(t)}{I(P_h, T_j)}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Considérons l'exemple de la Figure1.15, l'expression des vitesses instantanées avec la sémantique vitesses variables, est donnée comme suit,

$$\begin{cases} v_1(t) = V_1.m_{P_2}(t), \\ v_2(t) = V_2.\min(m_{P_1}(t), m_{P_3}(t)), \\ v_3(t) = V_3.\min(m_{P_4}(t), m_{P_5}(t)), \\ v_4(t) = V_4.m_{P_6}(t). \end{cases}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_{P_1}(t) = v_1(t) - v_2(t) = V_1 \cdot m_{P_2}(t) - V_2 \cdot \min(m_{P_1}(t), m_{P_3}(t)), \\ \dot{m}_{P_2}(t) = v_2(t) - v_1(t) = V_2 \cdot \min(m_{P_1}(t), m_{P_3}(t)) - V_1 \cdot m_{P_2}(t), \\ \dot{m}_{P_3}(t) = v_3(t) - v_2(t) = V_3 \cdot \min(m_{P_4}(t), m_{P_5}(t)) - V_2 \cdot \min(m_{P_1}(t), m_{P_3}(t)), \\ \dot{m}_{P_4}(t) = v_2(t) - v_3(t) = V_2 \cdot \min(m_{P_1}(t), m_{P_3}(t)) - V_3 \cdot \min(m_{P_4}(t), m_{P_5}(t)), \\ \dot{m}_{P_5}(t) = v_4(t) - v_3(t) = V_4 \cdot m_{P_6}(t) - V_3 \cdot \min(m_{P_4}(t), m_{P_5}(t)), \\ \dot{m}_{P_6}(t) = v_3(t) - v_4(t) = V_3 \cdot \min(m_{P_4}(t), m_{P_5}(t)) - V_4 \cdot m_{P_6}(t). \end{array} \right.$$

L'évolution du réseau est donnée par un des systèmes linéaires ci-dessous.

Pour $m_1(t) \leq m_3(t)$ et $m_4(t) \leq m_5(t)$, nous avons la configuration active suivante,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_{P_1}(t) = V_1 \cdot m_{P_2}(t) - V_2 \cdot m_{P_1}(t), \\ \dot{m}_{P_2}(t) = V_2 \cdot m_{P_1}(t) - V_1 \cdot m_{P_2}(t), \\ \dot{m}_{P_3}(t) = V_3 \cdot m_{P_4}(t) - V_2 \cdot m_{P_1}(t), \\ \dot{m}_{P_4}(t) = V_2 \cdot m_{P_1}(t) - V_3 \cdot m_{P_4}(t), \\ \dot{m}_{P_5}(t) = V_4 \cdot m_{P_6}(t) - V_3 \cdot m_{P_4}(t), \\ \dot{m}_{P_6}(t) = V_3 \cdot m_{P_4}(t) - V_4 \cdot m_{P_6}(t). \end{array} \right.$$

Pour $m_1(t) \leq m_3(t)$ et $m_5(t) \leq m_4(t)$, nous avons,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_{P_1}(t) = V_1 \cdot m_{P_2}(t) - V_2 \cdot m_{P_1}(t), \\ \dot{m}_{P_2}(t) = V_2 \cdot m_{P_1}(t) - V_1 \cdot m_{P_2}(t), \\ \dot{m}_{P_3}(t) = V_3 \cdot m_{P_5}(t) - V_2 \cdot m_{P_1}(t), \\ \dot{m}_{P_4}(t) = V_2 \cdot m_{P_1}(t) - V_3 \cdot m_{P_5}(t), \\ \dot{m}_{P_5}(t) = V_4 \cdot m_{P_6}(t) - V_3 \cdot m_{P_5}(t), \\ \dot{m}_{P_6}(t) = V_3 \cdot m_{P_5}(t) - V_4 \cdot m_{P_6}(t). \end{array} \right.$$

Pour $m_3(t) \leq m_1(t)$ et $m_4(t) \leq m_5(t)$, nous avons la configuration active suivante,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_{P_1}(t) = V_1.m_{P_2}(t) - V_2.m_{P_3}(t), \\ \dot{m}_{P_2}(t) = V_2.m_{P_3}(t) - V_1.m_{P_2}(t), \\ \dot{m}_{P_3}(t) = V_3.m_{P_4}(t) - V_2.m_{P_3}(t), \\ \dot{m}_{P_4}(t) = V_2.m_{P_3}(t) - V_3.m_{P_4}(t), \\ \dot{m}_{P_5}(t) = V_4.m_{P_6}(t) - V_3.m_{P_4}(t), \\ \dot{m}_{P_6}(t) = V_3.m_{P_4}(t) - V_4.m_{P_6}(t). \end{array} \right.$$

Pour $m_3(t) \leq m_1(t)$ et $m_5(t) \leq m_4(t)$, nous avons,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_{P_1}(t) = V_1.m_{P_2}(t) - V_2.m_{P_3}(t), \\ \dot{m}_{P_2}(t) = V_2.m_{P_3}(t) - V_1.m_{P_2}(t), \\ \dot{m}_{P_3}(t) = V_3.m_{P_5}(t) - V_2.m_{P_3}(t), \\ \dot{m}_{P_4}(t) = V_2.m_{P_3}(t) - V_3.m_{P_5}(t), \\ \dot{m}_{P_5}(t) = V_4.m_{P_6}(t) - V_3.m_{P_5}(t), \\ \dot{m}_{P_6}(t) = V_3.m_{P_5}(t) - V_4.m_{P_6}(t). \end{array} \right.$$

1.5.2 Invariant

Les invariants sont définis de la même manière que dans le cas discret sauf que dans le cas continu les composantes d'un invariant sont des réels positifs.

1.6 Réseaux de Petri continus à vitesses variables contrôlées

La notion de commande dans les Réseaux de Petri a été introduite par Krogh [35] et Moalla [44] dans l'objectif d'imposer des séquences d'événements à réaliser au système modélisé et pour éviter des situations indésirables telles que les blocages et les conflits.

Ce type de commande ne répond pas aux problèmes de contrôle de flux d'un grand nombre d'entités qui nous intéressent dans cette thèse. Dans ce sens l'idée de passer d'un

réseaux de Petri continu à vitesses constantes à un réseau de Petri à vitesses constantes contrôlées a été introduite par Ghabri [23], le modèle réseau de Petri à vitesses constantes contrôlées est présenté comme une généralisation du modèle réseaux de Petri continu à vitesses constantes. Dans Dubois [17], un modèle avec des vitesses maximales constantes par morceaux est développé. Dans [32], une loi de commande optimale est synthétisée pour les réseaux de Petri continus à vitesses constantes contrôlées écrit sous forme de systèmes hybrides en anglais Mixed logical dynamical systems, en utilisant la programmation linéaire avec variables mixtes. Dans [3, 4, 36], la commande est introduite dans le modèle réseaux de Petri continus à vitesses variables en variant les vitesses maximales de franchissement des transitions. Les auteurs ont proposé des applications dans le domaine des systèmes de production. Dans le modèle vitesses variables de Recalde et Silva, un vecteur de commande permettant de ralentir les vitesses instantanées de franchissement des transitions est introduit [40, 39], le vecteur de commande est dans ce cas limité supérieurement par le vecteur des vitesses instantanées du réseau non contrôlé. Les réseaux de Petri continus à vitesses variables contrôlées ont été utilisés par Amrah *et al* pour la commande en boucle ouverte [3] et en boucle fermée [4] des chaînes de production ouvertes et fermées. Dans [40], des lois de commande en boucle fermée prédictives ont été synthétisées pour les réseaux de Petri continus à vitesses variables contrôlées.

Un réseau de Petri continus à vitesses variables contrôlées est un réseau de Petri à vitesses variables dont les vitesses instantanées peuvent être ralenties ou stoppées à n'importe quel instant. Pour chaque transition T_j contrôlée, on définit un contrôle u_j qui va permettre de ralentir ou stopper la vitesse instantanée de franchissement $v_j(t)$ du système non contrôlé i.e. $0 \leq u_j(t) \leq v_j(t)$. La transition va donc fonctionner avec une vitesse égale à $\varphi_j(t) = v_j(t) - u_j(t)$. L'équation fondamentale du réseau contrôlé est donc donnée par

$$\dot{m}(t) = C.\varphi(t) = C.(\Lambda.\Gamma(m(t)).m(t) - u(t)), \quad (1.3)$$

sachant que $v(t) = \Lambda.\Gamma(m(t)).m(t)$.

Les vitesses instantanées de franchissement des transitions contrôlées sont contraintes

à être positives ou nulles et à être inférieures aux vitesses de franchissement instantanées du réseau non contrôlé i.e. pour une transition T_j , $0 \leq \varphi_j(t) \leq \Lambda \cdot \Gamma(m(t)) \cdot m(t)$.

L'évolution du réseau de Petri à vitesses variables contrôlées dépend de la franchissabilité de ses transitions. Une transition T_j est franchissable à un instant t si et seulement si T_j est validée à cet instant et si la vitesse de franchissement instantanée associée à la transition contrôlée T_j est strictement positive à l'instant t , i.e. si $\varphi_j(t) > 0$.

Lors de l'évolution d'un réseau de Petri continu à vitesses variables contrôlées, deux types d'événement peuvent se produire :

- 1) Un événement de type interne qui est un événement du réseau de Petri non contrôlé.
- 2) Un événement de type externe qui est associé au contrôle u .

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit brièvement les réseaux de Petri discrets, leurs propriétés et les principales méthodes d'analyse qu'on rencontre dans la littérature. L'explosion du nombre des états atteignables limite le domaine d'utilisation des réseaux de Petri discrets. L'outil réseau de Petri continu a été défini pour palier au problème d'explosion des états atteignables et permet de raisonner sur des flux de matière plutôt que sur des entités discrètes. Les deux sémantiques à savoir : le modèle à vitesses constantes ou le modèle à vitesses variables qui permettent de définir comment sont franchies les transitions dans un réseaux de Petri continu ont été présentées. La sémantique vitesses variables donne une meilleure approximation et constitue le modèle de base de notre étude. Nous avons par la suite présenté un modèle réseau de Petri continu où les vitesses de franchissement des transitions sont sujets à une commande extérieure. Ce qui permet de ralentir ou de stopper les vitesses instantanées de franchissement des transitions.

Chapitre 2

Analyse quantitative des graphes d'événements continus valués

Chapitre 2

Analyse quantitative des graphes d'événements continus valués

2.1 Introduction

La connaissance de l'état stationnaire d'un système de production modélisé par réseau de Petri continu nous permet de savoir la quantité de matière que notre système produit par unité de temps à l'état stationnaire. Elle permet en outre, de connaître l'état des stocks tampons en régime permanent.

La caractérisation de l'état stationnaire des systèmes à événements discrets modélisés par réseaux de Petri continus a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. On peut citer les travaux de Zerhouni [58], de Mostéfaoui *et al.* [46], de Demongodin *et al.* [15], de Julvez *et al.* [43], de Cohen *et al.* [10] et de Gaujal et Giua [22]. Dans [58] l'auteur propose des formules analytiques permettant le calcul du taux de production et l'état moyen des stocks à l'état stationnaire des lignes de production ouvertes et/ou fermées et des lignes d'assemblage modélisées par les réseaux de Petri continus à vitesses variables, il est à noter que les modèles obtenus sont des graphes d'événements. Dans [10], les auteurs utilisent les équations $(\min,+)$ obtenues pour les graphes d'événements fluides avec multiplieurs pour proposer d'abord, une linéarisation des équations obtenues puis en s'appuyant sur les propriétés spectrales des matrices à coefficients dans l'algèbre $(\min,+)$, pour établir une

forme explicite à la vitesse de franchissement asymptotique des transitions. Les travaux rapportés dans [46] et [15] donnent une caractérisation complète de l'état stationnaire des graphes d'événements valués neutres sous la sémantique vitesse constante. Des formules explicites pour le calcul du vecteur des vitesses de franchissement asymptotique et du vecteur de marquage stationnaire sont données. Sous la même sémantique, Balduzi *et al.* [5] et Recalde *et al.* [53] ont proposé des programmes linéaires pour le calcul de la vitesse asymptotique de franchissement des transitions d'une certaine classe de réseaux de Petri continus qui englobe les graphes d'événements valués (les graphes consistents et conservatifs, appelés aussi, les systèmes mono-T-semiflow). Dans [22], le modèle CGQ a été utilisé pour le calcul de la vitesse de franchissement asymptotique d'une classe de réseau de Petri continu en utilisant des techniques de programmations linéaires. Dans [43], les auteurs utilisent le branch and bound et des techniques de programmation linéaire pour le calcul de la vitesse asymptotique de franchissement des transitions d'une classe de réseaux de Petri continus à vitesses variables (la classe des systèmes mono-T-semiflow).

Néanmoins, à notre connaissance aucun travail n'a été dédié à formaliser analytiquement, dans le cas général, le comportement asymptotique des graphes d'événements valués continu à vitesses variables sans passer par les techniques de programmation linéaire proposées par Julvez *et al.* [43]. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas d'avoir une formulation analytique de l'état et de la vitesse des transitions du réseau en régime stationnaire. Par conséquent, à chaque fois que l'on modifie une seule caractéristique, il faut reformuler le programme linéaire et lancer la résolution.

En ce qui concerne le marquage stationnaire, peu de travaux ont été réalisés [58] et [46]. Dans [58], des formules explicites donnant le marquage stationnaire représentant les en cours moyen stationnaires des lignes de production ouvertes, fermées et des lignes d'assemblage modélisées par les réseaux de Petri continus à vitesses variables sont établies. Dans [46], des formules analytiques donnant le marquage stationnaire des graphes d'événements continus valués neutre fortement connexes, sous la sémantique vitesses constantes, sont

données. Le résultat s'appuie sur certaines propriétés des chemins élémentaires dans de tels graphes.

Dans ce chapitre, nous établissons de nouveaux résultats concernant l'état stationnaire des graphes d'événements continus neutres et fortement connexes. En premier, une formule explicite permettant le calcul des vitesses de franchissement asymptotiques des transitions est établie en utilisant la structure du graphe et la matrice d'incidence. Par la suite, et sous l'hypothèse qu'il n'existe, dans le graphe d'événements continu valué fortement connexes, qu'un seul circuit critique, une approche formelle permettant le calcul du vecteur marquage stationnaire est présentée. On termine le chapitre par un exemple sur un système flexible de production.

2.2 Graphes d'événements valués

Dans cette section, des résultats concernant les graphes d'événements valués sont donnés.

2.2.1 Les graphes d'événements

Les graphes d'événements sont une classe particulière des réseaux de Petri sans conflits tel que chaque place est reliée à exactement une transition d'entrée et à une transition de sortie [47]. Le réseau de Petri de la Figure 2.1 est un graphe d'événements ordinaire.

Dans le cas où les arcs ont des poids supérieurs à un, le réseau de Petri est un graphe d'événements valué.

2.2.2 Chemins et circuits

Un chemin dans un graphe est une succession de sommets alternés tel que, le sommet de sortie d'un arc du chemin est le sommet d'entrée de l'arc qui le suit dans le chemin [25].

Un chemin est dit élémentaire si en parcourant le chemin, on ne rencontre pas deux

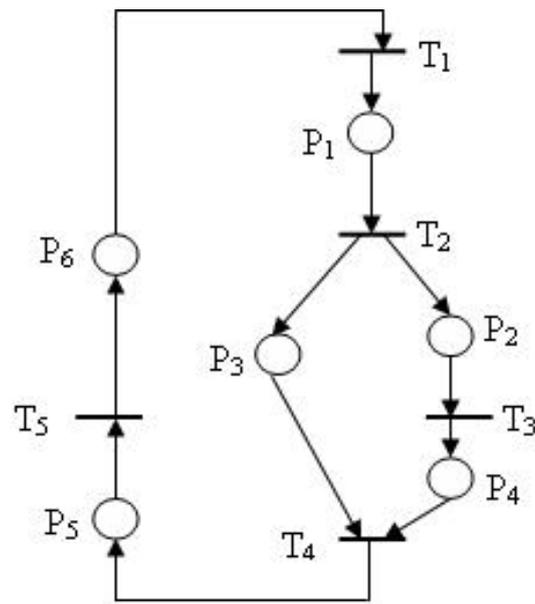


FIG. 2.1: Exemple d'un graphe d'événements ordinaire.

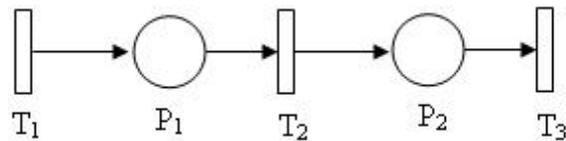


FIG. 2.2: Exemple d'un chemin élémentaire.

fois le même sommet [25]. La Figure 2.2 nous donne un exemple de chemin élémentaire dans un réseau de Petri.

Un circuit élémentaire est un chemin élémentaire fermé tel que le sommet de fin du circuit est aussi son sommet de début [25]. La Figure 2.3 illustre le concept de circuit élémentaire dans un réseau de Petri.

2.2.3 Forte connexité

Un graphe d'événements est fortement connexe si et seulement si il existe un chemin orienté qui relie tout sommet du graphe à tout autre sommet du graphe [25].

Tout graphe fortement connexe est décomposable en un nombre fini de circuits élémentaires [25].

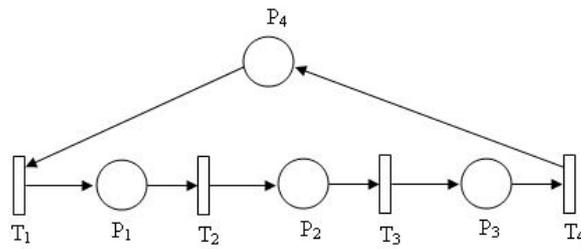


FIG. 2.3: Exemple d'un circuit élémentaire.

2.2.4 Gain d'un circuit élémentaire

La notion de gain d'un circuit élémentaire valué a été introduite par Chao *et al.* [9] et Teruel *et al.* [57] et définie comme étant le produit des gains des places du circuit. Le gain d'une place P_i , est donné comme suit : $g_i = \frac{O(P_i, T_i)}{I(P_i, T_i)}$. Formellement, le gain G d'un circuit L est le produit des gains des places sur le circuit,

$$G(L) = \prod_{P_i \in L} (g_i).$$

Selon la valeur de son gain, un circuit peut être classé dans l'une des catégories suivantes :

Circuit générateur si $G(L) > 1$,

Circuit neutre si $G(L) = 1$,

Circuit absorbant si $G(L) < 1$.

la valeur du gain nous renseigne sur la conservation des marques dans un circuit. Si le nombre de marque augmente dans un circuit alors le circuit est générateur et son gain est supérieur à 1. Si par contre, les marques diminuent dans un circuit alors le circuit est absorbant et le gain du circuit est inférieur à 1. Si le circuit possède une loi de conservation de marque (i.e. le circuit est un P-invariant) alors le circuit est neutre.

2.2.5 Classification des graphes d'événements

Un graphe d'événements \mathcal{N} valué est classé selon la nature de ses circuits élémentaires, comme suit [57] :

- \mathcal{N} est neutre, si et seulement si, tous ses circuits sont neutres.

- \mathcal{N} est absorbant si et seulement si, il existe au moins un circuit absorbant dans \mathcal{N} .
- \mathcal{N} est générateur si et seulement si, il n'existe pas de circuit absorbant dans \mathcal{N} et qu'il contient au moins un circuit générateur.

2.2.6 Propriété de Munier

Si un graphe d'événements valué est consistant et conservatif alors il est forcément neutre et fortement connexe [57]. De plus la propriété suivante [47] (dite de Munier) est vérifiée

$$\frac{O(P_i, T_l)}{I(P_i, T_j)} = \frac{x_j}{x_l}, \quad (2.1)$$

avec x_j et x_l sont la j^{me} et la l^{me} composante du T-semiflow minimal du graphe respectivement.

2.2.7 Propriétés qualitatives et quantitatives des graphes d'événements valués discrets

Dans cette section, les principaux résultats concernant les propriétés quantitatives et qualitatives des graphes d'événements valués sont présentés.

Bornitude

Théorème 1 [57] *Un graphe d'événements valué fortement connexe \mathcal{N} est borné si et seulement si, tous ses circuits élémentaires sont neutres ou absorbants.*

On déduit aisément de ce Théorème que la forte connexité garantie la bornitude dans le cas particulier des graphes d'événements ordinaires.

Vivacité

L'étude de la vivacité des graphes d'événements valués fait intervenir la notion de marquage valué introduite par Chao *et al.* [9]

Définition 7 [9] Soit P_i une place d'entrée de la transition T_j , le marquage valué de P_i à l'instant t est donné par

$$N_i(t) = \frac{m_{P_i}(t)}{x_j \cdot I(P_i, T_j)},$$

où x_j est la j^{me} composante du T -semiflow minimal du graphe.

L'étude de la vivacité des graphes d'événements valués s'est avérée très difficile. Cependant et avec des hypothèses limitatives, des résultats ont été proposés dans [9], [57]. Il a été montré dans Chao *et al.* [9] et Teruel *et al.* [57] qu'un graphe d'événements est vivant si le réseau vérifie les conditions suivantes : d'une part, une seule place est marquée par circuit élémentaire, avec un marquage valué supérieure à 1, et, d'autre part, le réseau doit être fortement connexe .

De plus, il a été montré que si un graphe d'événements valué fortement connexe est vivant alors tous ses circuits élémentaires sont neutres ou générateurs.

On dispose pour le cas des graphes d'événements ordinaire d'un théorème, donné ci-dessous, qui donne une condition nécessaire et suffisante de vivacité

Théorème 2 [11] Un graphe d'événements ordinaire fortement connexe \mathcal{N} est vivant si et seulement si, chacun de ses circuits élémentaires contient au moins un jeton.

2.3 Temps de cycle d'un graphe d'événements valué neutre

Le temps de cycle d'un graphe d'événements valué neutre et fortement connexe \mathcal{N} , sous l'hypothèse qu'initialement chaque circuit possède une unique place P_i marquée (avec $N_i \geq 1$), est donnée comme suit [9]

$$C(\mathcal{N}) = \max_{k=1, \dots, q} \left\{ \frac{\sum_{T_j \in L_k} d_j}{\sum_{P_i \in L_k} N_{0i}} \right\},$$

avec q , le nombre de circuits élémentaires.

Dans le cas d'un graphe d'événements ordinaire fortement connexe \mathcal{N} le temps de cycle est donné par

$$C(\mathcal{N}) = \max_{k=1,\dots,q} \left\{ \frac{\sum_{T_j \in L_k} d_j}{\sum_{P_i \in L_k} m_{0i}} \right\}.$$

La fréquence de franchissement de toutes les transitions, en régime permanent, est donnée par la formule qui suit,

$$F(\mathcal{N}) = \min_{k=1,\dots,q} \left\{ \frac{\sum_{P_i \in L_k} m_{0i}}{\sum_{T_j \in L_k} d_j} \right\}.$$

Une autre manière de calculer le temps de cycle des graphes d'événements valués neutres et fortement connexes est l'utilisation de l'expansion de Munier [47]. Cette expansion nous ramène au cas des graphes d'événements ordinaires. L'inconvénient majeur de cette méthode est l'augmentation de la taille du réseau.

2.4 Vitesse de franchissement asymptotique d'un graphe d'événements continu valué neutre

Dans cette section, une formule explicite donnant la vitesse de franchissement asymptotique des transitions dans un graphe d'événements continu valués neutres est établie. Néanmoins, avant d'énoncer le résultat, quelques définitions et résultats intermédiaires sont nécessaires. Ainsi, les notions de place critique et l'ensemble de T-couverture sont définies et utilisées dans ce chapitre.

Définition 8 *On appelle état stationnaire, l'état où le marquage de toutes les places du réseau de Petri continu sont constante (i.e. $\dot{m}(t) = 0$).*

Quand l'état stationnaire existe nous avons $m_s = \lim_{t \rightarrow \infty} m(t)$, avec m_s désignant le marquage stationnaire. Dans ce cas, nous avons $\dot{m}(t) = 0$ asymptotiquement. Le vecteur vitesse de franchissement asymptotique est noté $\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$. Le vecteur vitesse de franchissement asymptotique ϕ est un T-invariant de C (puisque $C \cdot \phi = 0$), ce qui implique qu'il est proportionnel au T-invariant minimal de C .

Dans ce qui suit, on notera le marquage valué stationnaire et le marquage valué initial par N_s et N_0 respectivement.

Proposition 1 [34] *Dans un graphe d'événements continu valué neutre et fortement connexe, la somme des marques valuées le long de chaque circuit élémentaire est constant pour n'importe quelle évolution à partir du marquage initial m_0 .*

Preuve :

Soit une place P_i avec une transition d'entrée T_l et une transition de sortie T_j . Le marquage de P_i à l'instant t est donné par

$$m_{P_i}(t) = m_{0i} + O(P_i, T_l) \cdot \int_0^t v_l(\tau) \cdot d\tau - I(P_i, T_j) \cdot \int_0^t v_j(\tau) \cdot d\tau. \quad (2.2)$$

En divisant cette dernière par $x_j \cdot I(P_i, T_j)$, on obtient

$$\frac{m_{P_i}(t)}{x_j \cdot I(P_i, T_j)} = \frac{m_{0i}}{x_j \cdot I(P_i, T_j)} + \frac{O(P_i, T_l)}{x_j \cdot I(P_i, T_j)} \int_0^t v_l(\tau) \cdot d\tau - \frac{1}{x_j} \int_0^t v_j(\tau) \cdot d\tau,$$

En utilisant la propriété énoncée dans l'équation (2.1), on obtient

$$N_i(t) = N_{0i} + \frac{1}{x_l} \int_0^t v_l(\tau) \cdot d\tau - \frac{1}{x_j} \int_0^t v_j(\tau) \cdot d\tau. \quad (2.3)$$

En additionnant les marques valuées sur un circuit élémentaire, on obtient la preuve de la proposition.

$$\sum_{P_i \in L} N_i(t) = \sum_{P_i \in L} N_{0i}.$$

□

Définition 9 [14] *Etant donné un marquage $m \in \mathbb{R}^{+n}$, une place $P_k \in {}^oT_j$ est dite critique si la condition suivante est vérifiée*

$$\frac{m_{P_k}}{I(P_k, T_j)} = \min_{P_i \in {}^oT_j} \frac{m_{P_i}}{I(P_i, T_j)}.$$

Définition 10 [31] *On définit l'ensemble T -couverture au marquage $m \in \mathbb{R}^{+n}$ ou $T - cov(m)$ l'ensemble donné par*

$$T - cov(m) = \left\{ P_i | \exists T_j \in P_i^o \text{ tel que } v_j(t) = V_j \cdot \frac{m_{P_i}}{I(P_i, T_j)} \right\}.$$

Proposition 2 [34] *Etant donné un marquage $m \in \mathbb{R}^{+n}$, l'ensemble $T - cov(m)$ contient au moins le support d'un circuit élémentaire.*

Preuve :

Du fait qu'on a traité les graphes d'événements, il existe une transition d'entrée pour n'importe quelle place de $T - cov(m_s)$ sachant que toute place de $T - cov(m_s)$ possède une transition de sortie. En parcourant en sens inverse le chemin qui commence par une transition quelconque du réseau, on peut toujours construire des chemins contenant plus de m transitions. Par conséquent, le passage une seconde fois par un sommet du chemin est inévitable, ce qui va former un circuit élémentaire. \square

Définition 11 Soit L_k un circuit élémentaire d'un graphe d'événements continu neutre et fortement connexe \mathcal{N} , on appelle fréquence du circuit L_k , la quantité

$$f_k = \frac{\sum_{P_i \in L_k} N_{0i}}{\sum_{T_j \in L_k} \frac{1}{V_j}}.$$

Théorème 1 [34] La vitesse de franchissement asymptotique des transitions d'un graphe d'événements continu neutre et fortement connexe \mathcal{N} est donnée par

$$\phi_j = x_j \cdot \min_{k=1, \dots, q} \left\{ \frac{\sum_{P_i \in L_k} N_{0i}}{\sum_{T_j \in L_k} \frac{1}{V_j}} \right\},$$

où q représente le nombre de circuits élémentaires et x_j la $j^{ième}$ composante du T -semiflow minimal du graphe.

Preuve : La preuve de ce théorème est faite en deux étapes. En premier lieu, nous montrons que la vitesse asymptotique d'une transition T_j divisée par la composante du T -invariant minimale qui lui correspond est inférieure ou égale à la fréquence des circuits élémentaires du graphe. Puis, nous montrons qu'il existe un circuit élémentaire qui réalise l'égalité.

1) La vitesse de franchissement instantanée d'une transition $T_j \in \mathcal{N}$ est donnée par

$$v_j(t) = V_j \cdot \min_{i|P_i \in \circ T_j} \left\{ \frac{m_{P_i}(t)}{I(P_i, T_j)} \right\}.$$

A l'état stationnaire, nous avons

$$\phi_j = V_j \cdot \min_{i|P_i \in \circ T_j} \left\{ \frac{m_{si}}{I(P_i, T_j)} \right\}. \quad (2.4)$$

En relaxant l'équation (2.4), (sachant que $\phi = \varphi.x$), nous obtenons

$$\frac{m_{si}}{I(P_i, T_j)} \geq \varphi \cdot \frac{x_j}{V_j},$$

ce qui mène à

$$N_{si} \geq \varphi \cdot \frac{1}{V_j}. \quad (2.5)$$

En additionnant les marquages valués sur chaque circuit, nous obtenons

$$\sum_{P_i \in L_k} N_{si} \geq \varphi \cdot \sum_{T_j \in L_k} \frac{1}{V_j}, \quad k = 1, \dots, q.$$

D'où

$$\varphi \leq \frac{\sum_{P_i \in L_k} N_{si}}{\sum_{T_i \in L_k} \frac{1}{V_j}} = \frac{\sum_{P_i \in L_k} N_{0i}}{\sum_{T_i \in L_k} \frac{1}{V_j}} = f_k$$

Ainsi,

$$\phi_j \leq x_j \cdot f_k, \quad \text{pour } k = 1, \dots, q, \quad \text{et } j = 1, \dots, m. \quad (2.6)$$

2) Soit P_i la place critique à l'état stationnaire de la transition $T_j \in \mathcal{N}$, nous avons,

$$N_{si} = \frac{\varphi}{V_j}. \quad (2.7)$$

Soit L_c un circuit élémentaire dont le marquage des places est entièrement défini par $T - cov(m_s)$. Nous avons sur L_c

$$\sum_{P_i \in L_c} N_{0i} = \sum_{P_i \in L_c} N_{si}.$$

A partir de (2.7), nous pouvons écrire

$$\sum_{P_i \in L_c} N_{0i} = \varphi \cdot \sum_{T_j \in L_c} \frac{1}{V_j},$$

alors

$$\varphi = \frac{\sum_{P_i \in L_c} N_{0i}}{\sum_{T_j \in L_c} \frac{1}{V_j}}.$$

Finalement

$$\phi_j = x_j \cdot \frac{\sum_{P_i \in L_c} N_{0i}}{\sum_{T_j \in L_c} \frac{1}{V_j}}. \quad (2.8)$$

Nous avons montré que le vecteur vitesse de franchissement asymptotique d'un graphe d'événement continu valué neutre et fortement connexe est inférieur ou égal à $x \cdot f_k$ (Equation (2.6)) et nous avons aussi montré qu'il existe un circuit élémentaire qui réalise l'égalité de l'équation (2.8). Nous concluons ainsi que la vitesse de franchissement asymptotique d'une transition T_j dans un graphe d'événements continu valué neutre fortement connexe est donnée par,

$$\phi_j = x_j \cdot \min_{k=1, \dots, q} \left\{ \frac{\sum_{P_i \in L_k} N_{0i}}{\sum_{T_j \in L_k} \frac{1}{V_j}} \right\}.$$

□

Remarque 1 *La formule obtenue ressemble à celle donnant la fréquence asymptotique de franchissement des transitions dans le cas des graphes d'événements discret fortement connexes. La formule ressemble aussi à celle obtenue par Cohen et al, 1998 pour les graphes d'événements fluides avec multiplicateurs (voir Annexe). Ceci est très surprenant car les deux modèles sont à priori très différents. Les dynamiques qui en découlent ne sont pas identiques, et en particulier les régimes transitoires des solutions sont différents.*

2.4.1 Exemple illustratif

Le système de production modélisé à la Figure 2.4 permet de fabriquer deux produits, A et B , à l'aide de trois types de machine, M_1 , M_2 et M_3 . La machine M_1 existe en deux exemplaires. Le produit A est obtenu en assemblant deux pièces de types A_1 et

une pièce de type A_2 . L'ordonnancement des pièces sur les machines est le suivant : La machine M_1 reçoit le produit A_1 puis le produit A_2 , La machine M_2 reçoit en premier le produit B puis le produit A et la machine M_3 reçoit d'abord le produit B puis le produit A .

La première opération sur le produit A_1 , modélisée par la transition T_1 , nécessite la disponibilité d'une machine de type M_1 , modélisé par la place P_8 , et d'une pièce dans le stock d'entrée du produit A_1 , modélisé par la place P_1 . La première opération sur le produit A_2 , modélisée par la transition T_2 , nécessite la disponibilité des deux exemplaires de la machine de type M_1 , modélisé par la place P_9 , et d'une pièce dans le stock d'entrée du produit A_2 , modélisé par la place P_2 . L'assemblage de deux pièces de types A_1 et d'une pièce de type A_2 est réalisé par la machine M_2 , modélisé par la transition T_3 . La dernière opération du produit A nécessite la disponibilité de la machine M_3 , modélisée par la place P_{13} , et trois types de pièces dans le stock intermédiaire modélisé par la place P_5 .

La première opération sur le produit B , modélisée par la transition T_5 , nécessite la disponibilité d'une machine de type M_1 , modélisée par la place P_{11} , et d'une pièce dans le stock d'entrée du produit B , modélisé par la place P_6 . La deuxième et dernière opération sur le produit B , modélisée par la transition T_6 , nécessite la disponibilité de la machine de type M_3 , modélisée par la place P_{12} , et de cinq pièces semi-finies dans le le stock intermédiaire, modélisé par la place P_7 .

Le modèle réseau de Petri est un graphe d'événements valué neutre et fortement connexe. Il possède les circuits élémentaires suivants :

$$L_1 = \langle P_8, T_1, P_9, T_2, P_8 \rangle;$$

$$L_2 = \langle P_1, T_1, P_3, T_3, P_5, T_4, P_1 \rangle;$$

$$L_3 = \langle P_2, T_2, P_4, T_3, P_5, T_4, P_2 \rangle;$$

$$L_4 = \langle P_2, T_2, P_8, T_1, P_3, T_3, P_5, T_4, P_2 \rangle;$$

$$L_5 = \langle P_1, T_1, P_9, T_2, P_4, T_3, P_5, T_4, P_1 \rangle;$$

$$L_6 = \langle P_{10}, T_5, P_{11}, T_3, P_{10} \rangle;$$

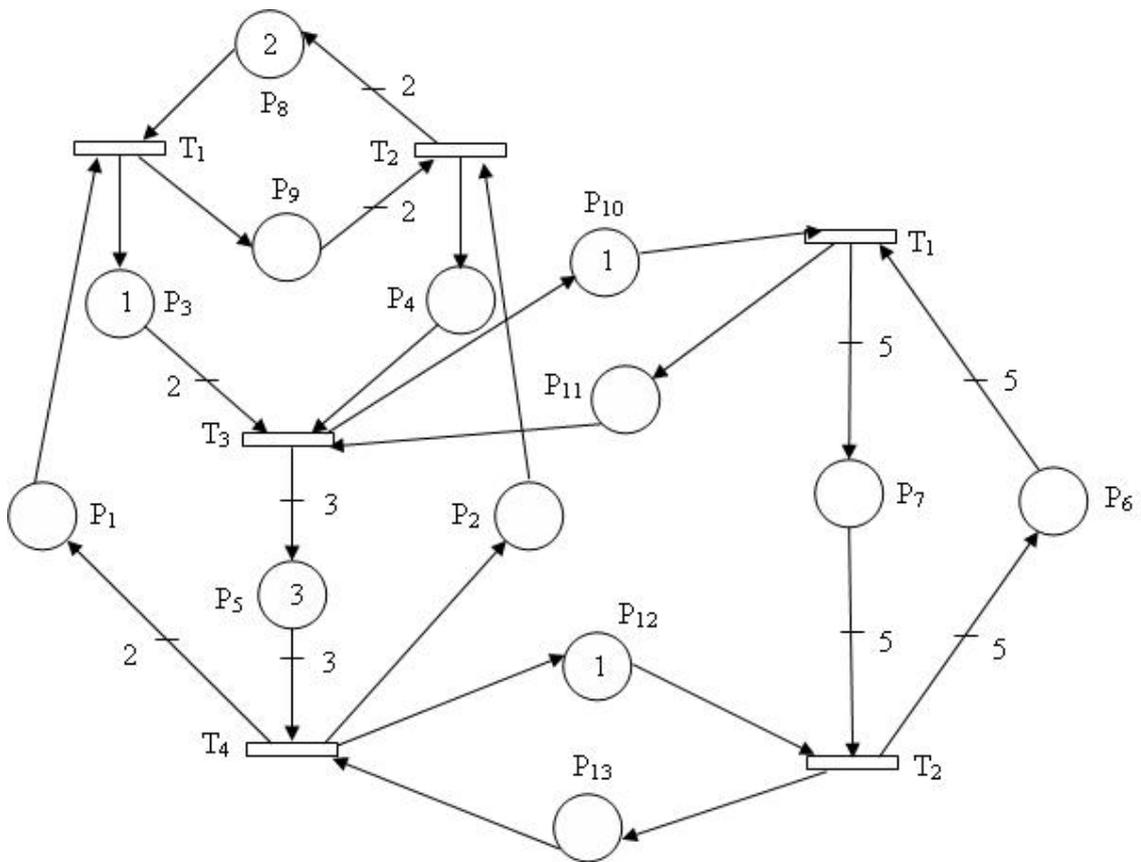


FIG. 2.4: Réseau de Petri continu du système de production.

$$L_7 = \langle P_{12}, T_6, P_{13}, T_4, P_{12} \rangle;$$

$$L_8 = \langle P_6, T_5, P_7, T_6, P_6 \rangle;$$

$$L_9 = \langle P_5, T_4, P_{12}, T_6, P_6, T_5, P_{11}, T_3, P_5 \rangle;$$

$$L_{10} = \langle P_1, T_1, P_3, T_3, P_{10}, T_5, P_7, T_6, P_{13}, T_4, P_1 \rangle;$$

$$L_{11} = \langle P_2, T_2, P_4, T_3, P_{10}, T_5, P_7, T_6, P_{13}, T_4, P_2 \rangle;$$

$$L_{12} = \langle P_2, T_2, P_8, T_1, P_3, T_3, P_{10}, T_5, P_7, T_6, P_{13}, T_4, P_2 \rangle;$$

$$L_{13} = \langle P_1, T_1, P_9, T_2, P_4, T_3, P_{10}, T_5, P_7, T_6, P_{13}, T_4, P_1 \rangle .$$

Le T-invariant minimal est $x = [2, 1, 1, 1, 1, 1]^T$ et le vecteur vitesse maximale des franchissement des transitions est donné par $V = [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1]^T$. En appliquant le Théorème 1 et avec le marquage initial donné en Figure 2.4, nous obtenons

$$\varphi = \min \left\{ \frac{1}{7}, \frac{3}{22}, \frac{1}{10}, \frac{5}{28}, \frac{1}{14}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{3}{28}, \frac{1}{13}, \frac{5}{34}, \frac{1}{17} \right\} = \frac{1}{17}.$$

Le circuit critique est L_{13} . Le vecteur vitesse asymptotique est donné par

$$\phi = \left[\frac{2}{17}, \frac{1}{17}, \frac{1}{17}, \frac{1}{17}, \frac{1}{17}, \frac{1}{17} \right]^T .$$

2.5 Marquage stationnaire d'un graphe d'événements continu

La simulation est l'approche la plus utilisée pour le calcul du marquage stationnaire des réseaux de Petri continus. La caractérisation de l'état stationnaire des graphes d'événements continus valués neutres a fait l'objet de peu de travaux [58].

L'état stationnaire des réseaux de Petri continus à vitesses variables ne vérifie aucune propriété de continuité ni par rapport au marquage initial ni par rapport au vecteur vitesses maximales. L'exemple de la Figure 2.5 illustre bien notre propos. En effet, avec le marquage initial de la Figure 2.5 et en prenant le vecteur vitesses maximales égal à

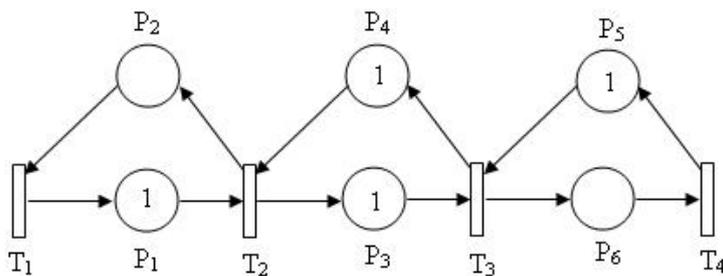


FIG. 2.5: Réseau de Petri continu avec deux circuits critiques et plusieurs points d'équilibre avec $V = [1, 1, 1, 1]^T$.

$V = [1, 1, 1, 1]^T$, le marquage stationnaire est $m_s = [0.5, 0.5, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0.5, 0.5]^T$. Si la vitesse maximale de T_4 est augmenté d'un $\epsilon = 0.001$, nous obtenons un nouveau marquage stationnaire $m_s = [0.5, 0.5, \mathbf{0.5}, \mathbf{1.5}, 0.5005, 0.4995]^T$. De la même manière, lorsqu'on augmente le marquage initial de la place P_5 avec un $\epsilon = 0.001$, le réseau de Petri continu évolue asymptotiquement vers un nouveau marquage stationnaire $m_s = [0.5, 0.5, \mathbf{0.5}, \mathbf{1.5}, 0.5010, 0.5]^T$.

L'équation $\dot{m}_s = C \cdot \phi = 0$ possède généralement plusieurs solutions (i.e. plusieurs points d'équilibre pour un seul vecteur vitesse stationnaire). Dans l'exemple de la Figure 2.5 et pour le marquage initial donné, tous les marquages $m_s = [0.5, 0.5, 0.5+x, 0.5+y, 0.5, 0.5]^T$ tel que $x + y = 1$ sont solutions de l'équation $C \cdot \phi = 0$. De plus, la connaissance de $T - cov(m_s)$ ne permet généralement pas de déterminer entièrement le marquage stationnaire comme dans la Figure 2.5. Néanmoins, lorsqu'un seul circuit critique existe dans le graphe d'événements continus valués neutres, le graphe possède certaines propriétés qui permettent de caractériser complètement l'état stationnaire.

Hypothèse 1 *Nous supposons dans ce qui suit, qu'il n'existe dans le graphe d'événements continus neutres fortement connexe qu'un seul circuit critique.*

Notations 1

L_c est le circuit critique du graphe.

ρ_{ij}^k : est le k^{me} chemin élémentaire qui part de la transition T_i à la transition T_j .

S_{ij} est l'ensemble des chemins élémentaires ρ_{ij}^k tel que $T_i \in L_c$ et $T_j \notin L_c$.

S est l'ensemble des chemins élémentaires qui ont pour transition de départ une transition appartenant à L_c .

S_c est l'ensemble des chemins élémentaires qui ont toutes leurs places dans $T - cov(m_s)$.

Propriété 1 [34] Soit \mathcal{N} un graphe d'événements continu valué neutre fortement connexe, à l'état stationnaire, à partir du circuit critique on peut construire des chemins élémentaires contenant que des places critiques pour atteindre n'importe quelle transition du graphe.

Preuve :

Dans la preuve de la Proposition 2, nous avons montré que dans un graphe d'événements continu valué neutre, nous pouvons construire des chemins ne contenant que des places critiques et qui contiennent au moins le support d'un circuit élémentaire. Lorsque le graphe ne contient qu'un seul circuit critique (Hypothèse 1), il est clair qu'à l'état stationnaire, nous pouvons construire à partir du circuit critique, des chemins élémentaires pour atteindre n'importe quelle transition du graphe. \square

Théorème 2 [34] Le marquage stationnaire m_s d'un graphe d'événements continu valué neutre fortement connexe \mathcal{N} est donné par,

Pour $P_i \in T - cov(m_s)$, tel que $T_j = P_i^o$,

$$m_{si} = \frac{\phi_j \cdot I(P_i, T_j)}{V_j}.$$

et

$$m_{si} = m_{0i} + x_j \cdot I(P_i T_j) \left[\left(\sum_{P_i \in \rho_{kl}} N_{0i} - \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{kl}} \frac{1}{V_i} \right) - \left(\sum_{P_i \in \rho_{kj}} N_{0i} - \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{kj}} \frac{1}{V_i} \right) \right],$$

pour $P_i \notin T - cov(m_s)$, Tel que

ρ_{kj} est un chemin élémentaire appartenant à S_c , et $T_j = P_i^o$ et ρ_{kl} est un chemin élémentaire appartenant à S_c , et $T_l = {}^o P_i$.

Preuve :

1) Pour $P_i \in T - cov(m_s)$, la formule est évidente, puisque $T - cov(m_s)$ contient les

places du circuit critique et les places des chemins élémentaires appartenant à S_c (voir Proposition 2 et équation (2.7)).

2) Pour $P_i \notin T - cov(m_s)$, soient T_l et T_j les transitions d'entrée et de sortie respectivement de la place P_i . A partir de la Propriété 1, on en déduit que T_l et T_j sont reliées au circuit critique par au moins un chemins élémentaire appartenant à S_c pour chaque transition. Soient ρ_{kj} et ρ_{kl} ces chemins élémentaires.

Pour le chemin ρ_{kj} , nous pouvons écrire

$$\sum_{P_i \in \rho_{kj}} N_{si} = \sum_{P_i \in \rho_{kj}} N_{0i} + \frac{1}{x_k} \int_0^\infty v_k(\tau).d\tau - \frac{1}{x_j} \int_0^\infty v_j(\tau).d\tau. \quad (2.9)$$

De la même manière pour le chemin ρ_{kl}

$$\sum_{P_i \in \rho_{kl}} N_{si} = \sum_{P_i \in \rho_{kl}} N_{0i} + \frac{1}{x_k} \int_0^\infty v_k(\tau).d\tau - \frac{1}{x_l} \int_0^\infty v_l(\tau).d\tau. \quad (2.10)$$

En comparant (2.9) et (2.10), nous obtenons

$$\frac{1}{x_l} \int_0^\infty v_l(\tau).d\tau - \frac{1}{x_j} \int_0^\infty v_j(\tau).d\tau = \sum_{P_i \in \rho_{kl}} N_{0i} - \sum_{P_i \in \rho_{kj}} N_{0i} + \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{kj}} \frac{1}{V_i} - \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{kl}} \frac{1}{V_i}.$$

Cependant, le marquage valué stationnaire de la place P_i est donné par

$$N_{si} = N_{0i} + \frac{1}{x_l} \int_0^\infty v_l(\tau).d\tau - \frac{1}{x_j} \int_0^\infty v_j(\tau).d\tau,$$

ce qui mène à

$$N_{si} = N_{0i} + \left(\sum_{P_i \in \rho_{kl}} N_{0i} - \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{kl}} \frac{1}{V_i} \right) - \left(\sum_{P_i \in \rho_{kj}} N_{0i} - \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{kj}} \frac{1}{V_i} \right).$$

Finalement

$$m_{si} = m_{0i} + x_j \cdot I(P_i, T_j) \left[\left(\sum_{P_i \in \rho_{kl}} N_{0i} - \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{kl}} \frac{1}{V_i} \right) - \left(\sum_{P_i \in \rho_{kj}} N_{0i} - \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{kj}} \frac{1}{V_i} \right) \right].$$

□

La détermination des circuits élémentaires appartenant à S_c et les places critiques de $T - cov(m_s)$ n'est en général pas une tâche facile. Ceci est dû au fait que les places critiques de $T - cov(m_s)$ changent avec le marquage initial. Dans le cas où une transition

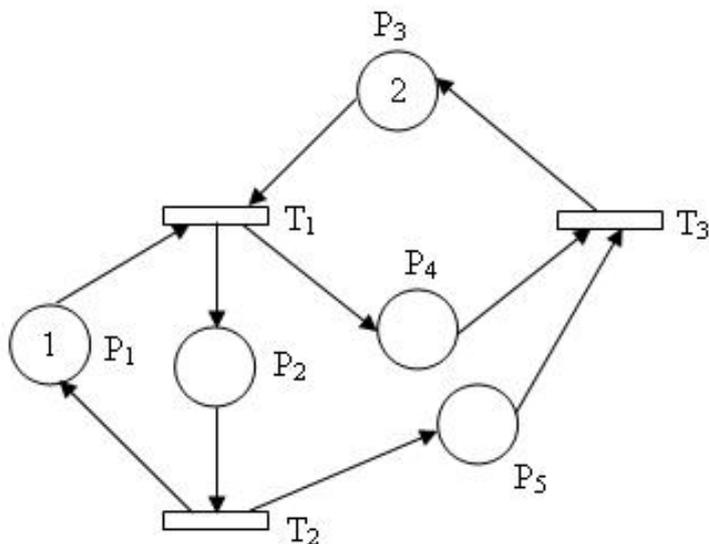


FIG. 2.6: Influence du marquage initial sur l'ensemble $T - cov(m_s)$

est reliée au circuit critique par deux chemins élémentaires appartenant à S , le chemin élémentaire appartenant à S_c n'est à priori pas connu. L'exemple de la Figure 2.6 montre l'influence du marquage initial sur l'ensemble $T - cov(m - s)$.

Exemple

Avec le marquage initial de la Figure 2.6 et un vecteur vitesse maximale $V = [1, 1, 1]^T$, le vecteur vitesse asymptotique est égale à $\phi = [0.5, 0.5, 0.5]^T$ et le marquage stationnaire obtenu est le suivant $m_s = [0.5, 0.5, 1, 1, 0.5]^T$. La transition T_3 est reliée au circuit critique par deux chemins élémentaires appartenant à S qui sont : $\langle T_1, P_1, T_2, P_5, T_3 \rangle$ et $\langle T_1, P_4, T_3 \rangle$. Ainsi, le chemin élémentaire $\langle T_1, P_1, T_2, P_5, T_3 \rangle$ est l'unique chemin qui relie T_3 au circuit critique (i.e. appartenant à S_c). Avec le marquage initial suivant $[1, 0, 0, 2, 1]^T$, un nouveau marquage stationnaire est obtenu $m_s = [0.5, 0.5, 1.5, 0.5, 1]^T$ et le chemin élémentaire $\langle T_1, P_4, T_3 \rangle$ est l'unique chemin qui relie T_3 au circuit critique.

On voit bien que le marquage initial est un facteur important dans la détermination de l'ensemble des chemins élémentaires appartenant à S_c et donc du marquage stationnaire. Le concept suivant sera utile pour la détermination de l'ensemble des chemins élémentaires appartenant à S_c et des places critique de $T - cov(m_s)$.

Définition 12 [34] On appelle facteur de criticité d'un chemin élémentaire $\rho_{ij}^k \in S_{ij}$, la quantité

$$f_{\rho_{ij}^k} = \sum_{P_i \in \rho_{ij}^k} N_{0i} - \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{ij}^k} \frac{1}{V_j}.$$

Proposition 3 [34] Soit $\rho_{ij}^c \in S_{ij}$ un chemin élémentaire, alors $\rho_{ij}^c \in S_c$ si et seulement si la condition suivante est vérifiée

$$f_{\rho_{ij}^c} = \min_{\rho_{ij}^k \in S_{ij}} \left\{ f_{\rho_{ij}^k} \right\}.$$

Preuve :

a) Quand l'ensemble S_{ij} contient seulement un chemin élémentaire alors ρ_{ij} appartient forcément à S_c en terme de la Propriété 1. Les places de ρ_{ij} sont dans $T - cov(m_s)$ et leurs marquages stationnaire est données par le Théorème 2.

b) Quand l'ensemble S_{ij} contient z (tel que $z > 1$) chemins élémentaires alors la transition T_j is reliée au circuit critique par au moins un chemins élémentaire appartenant à S_c . Soit $\rho_{ij}^c \in S_c$ ce chemin élémentaire et ρ_{ij}^k un chemin élémentaire appartenant à S_{ij} .

Pour le chemins ρ_{ij}^k , nous pouvons écrire

$$\sum_{P_i \in \rho_{ij}^k} N_{si} = \sum_{P_i \in \rho_{ij}^k} N_{0i} + \frac{1}{x_i} \int_0^\infty v_i(\tau) \cdot d\tau - \frac{1}{x_j} \int_0^\infty v_j(\tau) \cdot d\tau. \quad (2.11)$$

De la même manière pour le chemin ρ_{ij}^c

$$\sum_{P_i \in \rho_{ij}^c} N_{si} = \sum_{P_i \in \rho_{ij}^c} N_{0i} + \frac{1}{x_i} \int_0^\infty v_i(\tau) \cdot d\tau - \frac{1}{x_j} \int_0^\infty v_j(\tau) \cdot d\tau. \quad (2.12)$$

En comparant (2.11) et (2.12), nous obtenons

$$\sum_{P_i \in \rho_{ij}^k} N_{si} - \sum_{P_i \in \rho_{ij}^c} N_{si} = \sum_{P_i \in \rho_{ij}^k} N_{0i} - \sum_{P_i \in \rho_{ij}^c} N_{0i}. \quad (2.13)$$

Cependant, nous observons que

$$\sum_{P_i \in \rho_{ij}^c} N_{si} = \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{ij}^c} \frac{1}{V_j}, \quad (2.14)$$

et

$$\sum_{P_i \in \rho_{ij}^k} N_{si} \geq \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{ij}^k} \frac{1}{V_j}. \quad (2.15)$$

A partir de (2.13),(2.14) et (2.15), nous obtenons finalement

$$\sum_{P_i \in \rho_{ij}^c} N_{0i} - \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{ij}^c} \frac{1}{V_j} \leq \sum_{P_i \in \rho_{ij}^k} N_{0i} - \varphi \cdot \sum_{T_j \in \rho_{ij}^k} \frac{1}{V_j}. \quad (2.16)$$

Le résultat de la proposition est donc vérifié, de moment que (2.16) est vérifié pour n'importe quel chemins élémentaire appartenant à S_{ij} . \square

Remarques

1. La Proposition 3 permet de déterminer l'ensemble $T - cov(m_s)$ sans la connaissance préalable du marquage stationnaire. Quand $T - cov(m_s)$ est obtenu le marquage stationnaire est calculé en utilisant le Théorème 2.

2. Le nombre de chemins élémentaires augmente exponentiellement avec le nombre de noeud dans un graphe. Quoi qu'il en soit, on remarque que le calcul du marquage stationnaire à partir du Théorème 2 et de la proposition 3 peut être fait avec une complexité polynomiale. Notant que les quantités w_{jk} , donnés ci-après, et qui figurent dans les résultats énoncés au Théorème 2 et de la Proposition 3 peuvent être considérés comme le poids des arcs d'un graphe construit à partir du réseau de Petri considéré et là où les transitions représentent les noeuds.

$$w_{jk} = \begin{cases} N_{0i} - \varphi \cdot \frac{1}{V_j} & \text{si } P_i^o = T_k, {}^oP_i = T_j \quad \forall T_k, T_j \notin L_c, \\ N_{0i} - \varphi \cdot \left(\frac{1}{V_j} + \frac{1}{V_k} \right) & \text{si } P_i^o = T_k, {}^oP_i = T_j \text{ avec } T_j \text{ le noeud source.} \end{cases}$$

Par conséquent, le calcul du marquage stationnaire en utilisant les formules du Théorème 2 revient au calcul du poids minimum de chemins dans le graphe associé, et du chemin avec le poids minimum. Pour être précis, pour chaque transition, on doit calculer le chemin le plus court qui mène du circuit critique à la transition considérée. Comme il est expliqué par Gondran, Minoux et Vojda, par exemple, l'algorithme de Bellman-Ford donne la solution en temps polynomial.

3. Les places du circuit critique et des chemins élémentaires données par l'algorithme

du plus court chemin sont critiques dans le sens de la Définition 8. Le marquage stationnaire de ces places est donné par la première formule du Théorème 2. Ensuite, la deuxième formule du Théorème 2 est utilisée pour calculer le marquage stationnaire des places restantes.

2.6 Exemple

Le graphe d'événements valué de la Figure 2.7 est un système flexible de production avec trois machines M_1 , M_2 , M_3 et avec trois jobs, J_1 , J_2 , J_3 . Le routage de chaque job est donné comme suit,

J_1 visite M_1 , M_2 puis M_3 respectivement,

J_2 visite M_1 puis M_2 respectivement,

J_3 visite M_1 puis M_3 respectivement.

Les séquences d'entrées sur les machines sont les suivantes,

$M_1 = \langle J_1, J_2, J_3 \rangle$,

$M_2 = \langle J_1, J_2 \rangle$,

$M_3 = \langle J_1, J_3 \rangle$.

La première opération du job J_1 modélisée par la transition T_1 requiert la disponibilité de la machine M_1 pour produire le job J_1 , modélisée par la place P_{10} et deux pièces de type J_1 dans le stock intermédiaire modélisée par la place P_1 . La seconde opération du job J_1 modélisée par la transition T_2 requiert la disponibilité de la machine M_2 pour produire le job J_1 , modélisée par la place P_{11} , et une pièce de type J_1 dans le stock intermédiaire modélisé par la place P_2 . La machine M_2 produit deux pièces dans le stock modélisé par la place P_3 . La troisième opération du job J_1 modélisée par la transition T_3 requiert la disponibilité de la machine M_3 pour produire le job J_1 , modélisée par la place P_{14} , et une pièce de type J_1 dans le stock intermédiaire modélisé par la place P_3 .

La première opération du job J_2 modélisée par la transition T_4 requiert la disponibilité de la machine M_1 pour produire le job J_2 , modélisée par la place P_8 et une pièce de

type J_2 dans le stock intermédiaire modélisée par la place P_4 . La seconde opération du job J_2 modélisée par la transition T_5 requiert la disponibilité de la machine M_2 pour produire le job J_2 , modélisée par la place P_{12} , et une pièce de type J_2 dans le stock intermédiaire modélisé par la place P_5 .

La première opération du job J_3 modélisée par la transition T_6 requiert la disponibilité de la machine M_1 pour produire le job J_3 , modélisée par la place P_9 et deux pièces de type J_3 dans le stock intermédiaire modélisée par la place P_6 . La machine M_1 produit deux pièces dans le stock intermédiaire modélisé par la place P_7 . La seconde opération du job J_3 modélisée par la transition T_7 requiert la disponibilité de la machine M_3 pour produire le job J_3 , modélisée par la place P_{13} , et une pièce de type J_3 dans le stock intermédiaire modélisé par la place P_7 .

Les pièces sont transportées sur des palettes pendant les opérations de traitement et de transport. Il est à noter que la machine M_3 permet de prendre en charge deux opération à la fois.

Le graphe d'événements valué continu du système flexible de production est neutre et fortement connexe. Il contient les circuits élémentaires suivants,

$$L_1 = \langle P_1, T_1, P_2, T_2, P_3, T_3, P_1 \rangle,$$

$$L_2 = \langle P_{11}, T_2, P_{12}, T_5, P_{11} \rangle,$$

$$L_3 = \langle P_{13}, T_7, P_{14}, T_3, P_{13} \rangle,$$

$$L_4 = \langle P_4, T_4, P_5, T_5, P_4 \rangle,$$

$$L_5 = \langle P_1, T_1, P_8, T_4, P_5, T_5, P_{11}, T_2, P_3, T_3, P_1 \rangle,$$

$$L_6 = \langle P_8, T_4, P_9, T_6, P_{10}, T_1, P_8 \rangle,$$

$$L_7 = \langle P_2, T_2, P_{12}, T_5, P_4, T_4, P_9, T_6, P_{10}, T_1, P_2 \rangle,$$

$$L_8 = \langle P_6, T_6, P_7, T_7, P_6 \rangle,$$

$$L_9 = \langle P_2, T_2, P_3, T_3, P_{13}, T_7, P_6, T_6, P_{10}, T_1, P_2 \rangle;$$

$$L_{10} = \langle P_3, T_3, P_{13}, T_7, P_6, T_6, P_{10}, T_1, P_8, T_4, P_5, T_5, P_{11}, T_2, P_3 \rangle,$$

$$L_{11} = \langle P_1, T_1, P_8, T_4, P_9, T_6, P_7, T_7, P_{14}, T_3, P_1 \rangle,$$

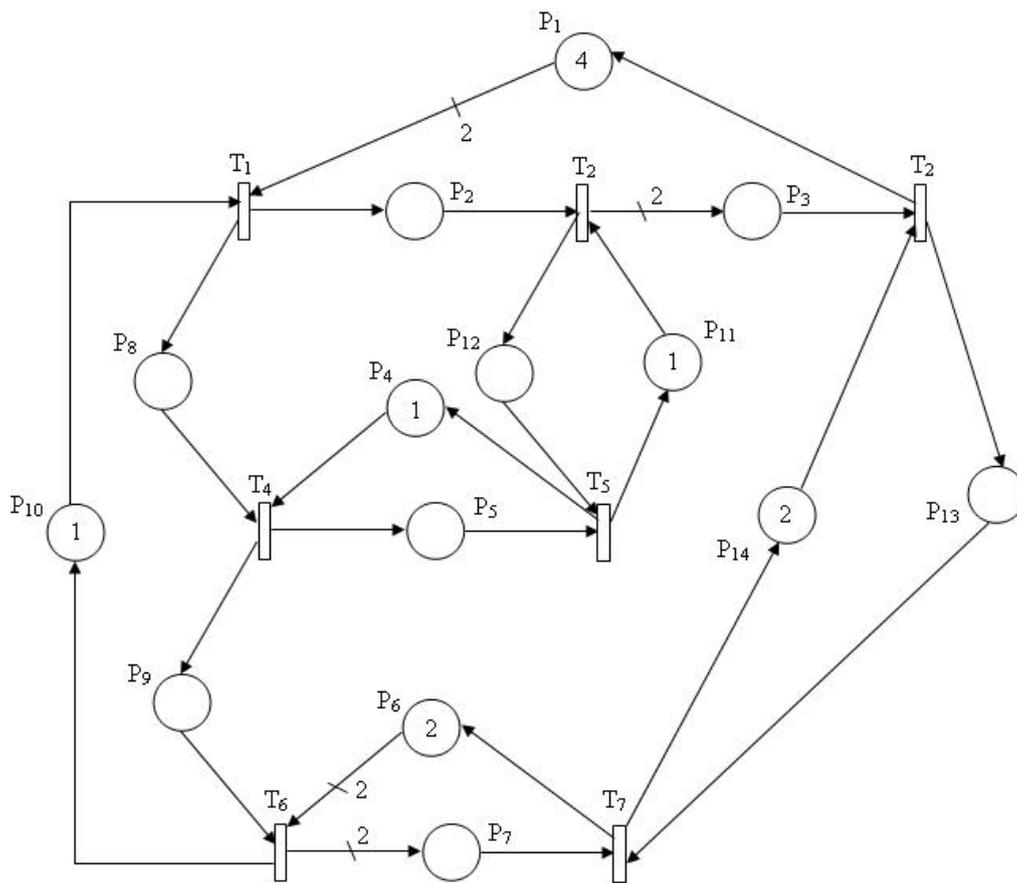


FIG. 2.7: Modèle réseau de Petri d'un système flexible de production

$L_{12} = \langle P_1, T_1, P_2, T_2, P_{12}, T_5, P_4, T_4, P_9, T_6, P_7, T_7, P_{14}, T_3, P_1 \rangle$.

Le T-semiflow minimal du graphe est $x = [1, 1, 2, 1, 1, 1, 2]^T$. Le vecteur des vitesses maximales est égale à $V = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$, en appliquant le Théorème 1 avec le marquage initial donné en Figure 2.7, nous obtenons

$$\varphi = \min \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7} \right\} = \frac{1}{3}.$$

Le circuit critique est L_6 . Le vecteur vitesse asymptotique est

$$\phi = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]^T.$$

Nous avons les ensembles S_{ij} suivants,

$$S_{12} = \{\rho_{12}^1; \rho_{12}^2\}, S_{45} = \{\rho_{45}^1; \rho_{45}^2\}, S_{67} = \{\rho_{67}^1; \rho_{67}^2\}, S_{13} = \{\rho_{13}^1; \rho_{13}^2; \rho_{13}^3\},$$

où

$$\begin{aligned} \rho_{12}^1 &= \langle T_1, P_2, T_2 \rangle, \rho_{12}^2 = \langle T_1, P_8, T_4, P_5, T_5, P_{11}, T_2 \rangle, \rho_{45}^1 = \langle T_4, P_5, T_5 \rangle, \rho_{45}^2 = \langle \\ &T_4, P_9, T_6, P_{10}, T_1, P_2, T_2, P_{12}, T_5 \rangle, \rho_{67}^1 = \langle T_6, P_7, T_7 \rangle, \rho_{67}^2 = \langle T_6, P_{10}, \\ &T_1, P_2, T_2, P_3, T_3, P_{13}, T_7 \rangle, \rho_{13}^1 = \langle T_1, P_2, T_2, P_3, T_3 \rangle, \rho_{13}^2 = \langle T_1, P_8, T_4, P_5, T_5, \\ &P_{11}, T_2, P_3, T_3 \rangle, \rho_{13}^3 = \langle T_1, P_8, T_4, P_9, T_6, P_7, T_7, P_{14} \rangle. \end{aligned}$$

Le calcul du facteur de criticité pour chaque chemins élémentaire donne le résultat suivant,

$$\begin{aligned} f_{\rho_{12}^1} &= 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}, f_{\rho_{12}^2} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}, \\ f_{\rho_{45}^1} &= 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}, f_{\rho_{45}^2} = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}, \\ f_{\rho_{67}^1} &= 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}, f_{\rho_{67}^2} = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}, \\ f_{\rho_{13}^1} &= 0 - \frac{3}{3} = -1, f_{\rho_{13}^2} = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}, f_{\rho_{13}^3} = \frac{2}{2} - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que

$$\{\rho_{12}^1, \rho_{45}^1, \rho_{45}^2, \rho_{67}^1, \rho_{67}^2, \rho_{13}^1\} \subset S_c \text{ et } T - cov(m_s) = \{P_2, P_3, P_5, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{12}, P_{13}\}.$$

En utilisant le Théorème 2, Nous obtenons le marquage stationnaire suivant

$$m_s = \left[\frac{8}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right]^T.$$

2.7 Discussion des résultats

On voit bien à travers l'exemple traité que les résultats proposés dans ce chapitre permettent de caractériser complètement l'état stationnaire des graphes d'événements continus valués neutres avec l'hypothèse 1.

La contribution principale dans ce chapitre est la caractérisation de la vitesse de franchissement asymptotique et du marquage stationnaire par des formules explicites. Les résultats sont originaux, nous les avons publiés dans la référence [34].

Les graphes d'événements sont une classe particulière des réseaux de Petri sans conflits. Cette classe a été largement étudiée dans beaucoup de domaine de recherche, tels que : les systèmes de production cycliques, les systèmes de transport, la théorie de la supervision et les protocoles de communication. Dans le domaine des systèmes de production, ils ont été utilisés pour modéliser des lignes de transfert, job shop, les systèmes kanban et les systèmes d'assemblage. Les graphes d'événements valués permettent de réduire la taille du modèle et permettent de modéliser des lots de pièce. Les graphes d'événements continus peuvent être utilisé dans les même domaines d'application. Notons qu'il existe peu de travaux qui traitent de l'analyse quantitative des graphes d'événements valués continus.

L'approche proposée dans ce chapitre est formelle, elle s'appuie sur la recherche de formules permettant de calculer à la fois le vecteur de franchissement asymptotique et le vecteur marquage stationnaire des graphes d'événements valués continus neutre et fortement connexes. Nous avons montré que le vecteur de franchissement asymptotique est obtenu en calculant la fréquence du circuit critique.

L'avantage de disposer de formules analytiques n'est pas à démontrer car la solution dans ce cas (ou la formule) est obtenue avec un certain nombre d'étapes. Il s'ensuit que lorsqu'on change un paramètre, on n'est pas obligé de refaire toutes les étapes, il faut juste changer le paramètre à l'étape qui lui correspond. De plus, l'analyse de la formule, permet d'étudier la sensibilité du système modélisé au changement des paramètres. Finalement, la représentation analytique nous facilite la comparaison entre modèles (dans notre cas avec le modèle CGQ).

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode originale pour le calcul de la vitesse de franchissement asymptotique des transitions et du marquage stationnaire des graphes d'événements continus valués neutres fortement connexes en utilisant la structure du réseau et la théorie des graphes. Nous avons ainsi donné une formule explicite pour l'obtention du vecteur vitesse de franchissement asymptotique des transitions. La formule ressemble à celle qui existe pour les graphes d'événements discrets et à celle obtenue pour les graphes d'événements fluides valués dans l'algèbre $(\min,+)$. Ce résultat est surprenant vu que les sémantiques et le régime transitoire des deux modèles sont très différents.

Aussi, et sous l'hypothèse que le graphe d'événements continu valué neutre fortement connexe possède un seul circuit critique, une méthode efficace pour le calcul du marquage stationnaire est donné en utilisant la vitesse asymptotique des transition, le concept de

facteur de criticité et les chemins élémentaires.

Chapitre 3

Régulation sous contraintes des réseaux de Petri continus

Chapitre 3

Régulation sous contraintes des réseaux de Petri continus

3.1 Introduction

Beaucoup de travaux ont été dédiés à la commande des systèmes à événements discrets en utilisant les réseaux de Petri continus [2, 3, 4, 33, 36, 39, 40] . La synthèse de lois de commande pour les systèmes à événements discrets et particulièrement pour les systèmes de production n'est pas une tâche facile [18, 39], dans le sens où il n'y a pas une théorie standard pour la synthèse de contrôleurs.

Les approches de contrôle des réseaux de Petri continus, par actions externes sur les vitesses de franchissement des transitions, proposées dans la littérature, peuvent être classifiées en deux catégories : L'approche de contrôle par boucle ouverte et l'approche de contrôle par boucle fermée. Dans l'approche de contrôle par boucle ouverte, un vecteur de vitesse maximale (ou un état initial) est calculé de façon à atteindre un état d'équilibre souhaité. Cette approche a été utilisée dans [4] pour la commande des chaînes de production ouvertes et fermées et des chaînes d'assemblage, modélisées par réseaux de Petri continus à vitesses variables, en utilisant la programmation linéaire. Le calcul des vitesses maximales est, dans ce cas, précédé par un test d'accessibilité. Dans [40], le vecteur de

commande à appliquer au système est calculé en résolvant un problème d'optimisation linéaire. Dans ce cas le marquage désiré et le vecteur commande doivent minimiser un certain critère d'optimalité.

La stratégie de contrôle en boucle fermée consiste à varier la vitesse instantanée de franchissement des transitions en fonction du vecteur marquage instantané du réseau de Petri continu. Un gain est ainsi calculé de telle sorte que le système atteigne l'état d'équilibre souhaité. Cette approche a été utilisée par [3, 33, 36, 39] dans le domaine des systèmes de production. Dans [39], le calcul des gains est basé sur une approche prédictive. Certains résultats ont également été établis en utilisant les réseaux de neurones [28] et la logique floue [29].

Nous considérons dans le présent travail, des réseaux de Petri continus à vitesses variables contrôlées où toutes les transitions sont soumises à un contrôle externe. L'action de contrôle consiste à ralentir la vitesse de franchissement des transitions [39]. Un réseau de Petri continu à vitesses variables contrôlées est un système linéaire par morceaux avec des commutations autonomes et présentant des contraintes sur l'état et sur la commande [39]. Dans [39], le système linéaire par morceaux obtenu est transformé par un changement de variables en un système linéaire invariant en temps discret avec des contraintes sur l'espace commande. Le modèle linéaire invariant en temps discret avec contraintes obtenu, a été utilisé dans [39] pour la conception de lois de commande prédictives (implicites et explicites).

L'objectif de ce chapitre est de concevoir des gains de retour d'état qui permettent d'atteindre un vecteur marquage stationnaire désiré et un vecteur de franchissement asymptotique des transitions désiré pour des réseaux de Petri continus à vitesses variables contrôlées. Les gains doivent assurer le respect des contraintes sur la loi de commande et la stabilité asymptotique du vecteur marquage dans un polytope donné. Pour établir ces résultats, nous utilisons les notions d'invariance positive, de contractivité et de fonction de Lyapunov polyédrique.

Le chapitre est organisé comme suit, après quelques rappels sur les ensembles convexes, le modèle réseau de Petri contrôlé utilisé est présenté à la section 2. A la section 3, Nous présentons une méthode de synthèse des gains de retour d'état. Des résultats importants concernant l'invariance positive, le respect des contraintes sur la commande, la contractivité et la stabilité asymptotique d'une tel classe de systèmes sont décrits. Un exemple illustratif tiré du domaine de la production manufacturière est donné en section 4.

3.2 Modèle de réseau de Petri continu contrôlé

3.2.1 Ensembles convexes polyédrales et ensembles convexes ellipsoïdales

L'étude de l'invariance positive d'un ensemble fait intervenir la notion d'ensembles convexes dont la définition est la suivante.

Definition 13 *Un sous ensemble D de \mathbb{R}^n est dit convexe si pour tout x et y appartenant à D , le point $z = \lambda.x + (1 - \lambda).y$ appartient aussi à D , avec $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Pour le développement de nos résultats, nous traitons deux types d'ensembles convexes : les ensembles convexes polyédraux et les ensembles convexes ellipsoïdaux.

Definition 14 *Un ensemble convexe ellipsoïdale dans \mathbb{R}^n est un sous ensemble borné de \mathbb{R}^n défini par,*

$$\mathcal{E}(Q, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T.Q.x \leq \rho\},$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_+^$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive. La frontière de cet ensemble est décrite par $x^T.Q.x = \rho$.*

Definition 15 *Un ensemble convexe polyédral dans \mathbb{R}^n est un sous ensemble de \mathbb{R}^n défini par,*

$$\mathcal{P}(G, g) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid G.x \leq g\},$$

où $G \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $g \in \mathbb{R}^q$, $q, n \in \mathbb{N}$.

On appelle polytope un polyèdre compact

3.2.2 Modèle de réseau de Petri continu

Dans ce chapitre, nous supposons que toutes les transitions sont mono-serveurs (chaque transition possède une boucle de réentrance). La vitesse de franchissement d'une transition T_j est donc donnée comme suit

$$v_j(t) = V_j \cdot \min_{i|P_i \in {}^oT_j} \left\{ 1, \frac{m_{P_i}(t)}{I(P_i, T_j)} \right\}. \quad (3.1)$$

Dans chaque phase, nous avons pour chaque transition au moins une place qui réalise le minimum (place critique) dans l'équation (3.1). Soit $P_k \in {}^oT_j$ une de ces places critiques, le marquage de P_k est tel que

$$\frac{m_k}{I(P_k, T_j)} \leq \frac{m_i}{I(P_i, T_j)},$$

avec $P_i \in {}^oT_j$.

La dernière équation définit pour chaque phase (région), un ensemble polyédrique donnée par

$$\mathcal{P}(G_r, g_r) = \{m(t), G_r \cdot m(t) \leq g_r\}, \quad (3.2)$$

où les matrices G_r et les vecteurs g_r possèdent des dimensions appropriées.

Le nombre de régions étant fini et donné par $N \in \mathbb{N}$, le vecteur vitesse instantanée de franchissement des transitions peut être écrit comme suit

$$v(t) = \Lambda_r \cdot m(t) + \Pi_r \cdot V,$$

avec $r = 1, \dots, N$, où, Λ_r et Π_r sont des matrices définies pour chaque région (phase) de l'espace d'état du réseau de Petri continu.

Les régions sont numérotées et notées \mathcal{R}_r . Les matrices Λ_r et Π_r sont définies par

$$\Lambda_r(T_j, P_i) = \begin{cases} \frac{V_j}{I(P_i, T_j)} & \text{si } \frac{m_{P_i}(t)}{I(P_i, T_j)} = \min_{h|P_h \in {}^oT_j} \left\{ 1, \frac{m_{P_h}(t)}{I(P_h, T_j)} \right\}, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

$$\Pi_r(T_j, T_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } 1 = \min_{h|P_h \in {}^oT_j} \left\{ 1, \frac{m_{P_h}(t)}{I(P_h, T_j)} \right\}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

En effet, il est facile de voir que l'équation (3.1) donnant la vitesse de franchissement d'une transition T_j , peut se réécrire comme suit,

$$v_j(t) = \rho_j \cdot V_j + \rho_{jk}^* \cdot \frac{V_j}{I(P_k, T_j)} \cdot m_{P_k}(t), \quad (3.3)$$

avec $\rho_j = 1$ si $\min_{h|P_h \in {}^oT_j} \left\{ 1, \frac{m_{P_h}(t)}{I(P_h, T_j)} \right\} = 1$ et 0 sinon
 et $\rho_{jk}^* = 1$ si $\frac{m_{P_k}(t)}{I(P_k, T_j)} = \min_{h|P_h \in {}^oT_j} \left\{ 1, \frac{m_{P_h}(t)}{I(P_h, T_j)} \right\}$ et 0 sinon.

Les équations donnant Λ_r et Π_r se déduisent aisément à partir des équations (3.3) donnant le vecteur des vitesses de franchissement instantanées.

3.2.3 Réseau de Petri continu contrôlé en temps discret

Dans un réseau de Petri continu, une transition T_j est dite contrôlée si sa vitesse instantanée de franchissement peut être modifiée par une action de commande externe [39]. Nous supposons que la seule action qu'on peut appliquer est celle qui consiste à réduire la vitesse de franchissement de la transition. La vitesse de franchissement instantanée de la transition contrôlée devient alors : $v_j(t) - u_j(t)$, où $v_j(t)$ est la vitesse de franchissement de la transition T_j du réseau de Petri continu non commandé et $u_j(t)$, l'action générée par le contrôle. Une transition T_j n'est pas contrôlée si $u_j(t) = 0, \forall t \geq 0$. Dans la suite, nous supposons que toutes les transitions du réseau de Petri continu sont contrôlées. Le vecteur de commande satisfait donc l'inéquation : $0 \leq u(t) \leq v(t)$. Par conséquent, le vecteur commande sera dynamiquement limité par le vecteur vitesse de franchissement instantané du système non commandé. En prenant $w(t) = v(t) - u(t)$, l'équation fondamentale du réseau de Petri continu contrôlé devient linéaire en temps-invariante avec des contraintes sur le nouveau vecteur de commande $w(t)$ comme suit [39]

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = C.w(t), \\ 0 \leq w(t) \leq \Lambda_r.m(k) + \Pi_r.V. \end{cases} \quad (3.4)$$

Une méthode de discrétisation de réseaux de Petri continus décrits par le système d'équations (3.4) est proposée dans [38]. Par la suite, nous donnons la définition de l'approximation en temps discret des réseaux de Petri continus et la condition que doit satisfaire la période d'échantillonnage pour que le marquage du réseau reste positif.

Definition 16 [38] *Considérons un réseau de Petri continu contrôlé décrit par le système d'équation (3.4) et θ une période d'échantillonnage. L'approximation à l'ordre 1 du système (3.4) est définie par*

$$\begin{cases} m(k+1) = m(k) + \theta.C.w(k) \\ 0 \leq w(k) \leq \Lambda_r.m(k) + \Pi_r.V, \end{cases} \quad (3.5)$$

avec $k \equiv k.\theta$. L'état initial de ce système est $m(0) = m_0 \geq 0$. La paire (\mathcal{N}, θ) est appelée réseau de Petri continu en temps discret.

Dans un réseau de Petri continu à vitesses variables non contrôlées, la positivité du marquage est assurée par la positivité du marquage initial, car la vitesse instantanée de franchissement d'une transition est égale à zéro lorsque une des places en amont de la transition est vide [39]. Dans le cas d'un réseau de Petri continu en temps discret, cette affirmation n'est pas toujours vraie.

Exemple

Considérons l'exemple de la Figure 3.1 avec un marquage initial $m_0 = [1.5, 0, 0]^T$, un vecteur de vitesses maximales $V = [1, 3, 2]^T$ et une période d'échantillonnage $\theta = 1$. En supposant la transition T_1 stoppée (i.e. $w_1(k) = 0, \forall k \geq 0$), le marquage de la place P_1 est donné par : $m_{P_1}(1) = m_{P_1}(0) - \theta.w_2(0)$. Le marquage de P_1 devient négatif avec une commande w_2 égale à 3 (la valeur maximale qu'on peut donner à w_2).

Proposition 4 [39] *Soit (\mathcal{N}, θ) un réseau de Petri continu en temps discret avec $m_0 \geq 0$ et une période d'échantillonnage θ telle que*

$$\forall P_i \in P, \quad \sum_{T_j \in P_i^o} V_j.\theta < 1. \quad (3.6)$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées,

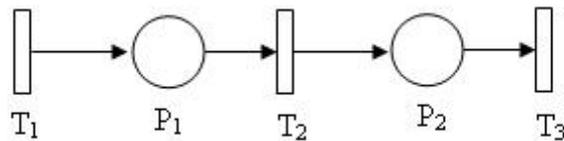


FIG. 3.1: Réseau de Petri continu

1. *Tout marquage accessible à partir de m_0 est non-négatif.*
2. *Une place ne peut être vidée par une séquence finie de franchissement.*

Comme établi dans [39], l'espace des états accessibles d'un réseau de Petri continu \mathcal{N} et celui d'un réseau de Petri continu en temps discret sont égaux si la condition (3.6) est satisfaite.

3.2.4 Exemple

Le système modélisé par le réseau de Petri continu de la Figure 3.1 peut être représenté par un réseau de Petri continu contrôlé en temps discret avec des contraintes sur le vecteur commande comme suit

$$\begin{cases} m(k+1) = m(k) + \theta \cdot C \cdot w(k) \\ 0 \leq w(k) \leq \Lambda_r \cdot m(k) + \Pi_r \cdot V \end{cases}$$

où $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, pour chaque région \mathcal{R}_r les matrices Λ_r, Π_r, G_r et g_r sont données comme suit

$$\mathcal{R}_1 : m_1(k) \geq 1 \text{ et } m_2(k) \geq 1$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{R}_2 : m_1(k) \geq 1 \text{ et } m_2(k) \leq 1$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_3 \end{pmatrix}, \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{R}_3 : m_1(k) \leq 1 \text{ et } m_2(k) \geq 1$$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{R}_4 : m_1(k) \leq 1 \text{ et } m_2(k) \leq 1$$

$$\Lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & V_3 \end{pmatrix}, \Pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, g_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.3 Régulation sous contraintes des réseaux de Petri continus

Dans cette section, une méthode basée sur une stratégie de commande en boucle fermée, est développée pour le contrôle des systèmes modélisés par réseaux de Petri continus à vitesses variables contrôlées, afin d'atteindre deux objectifs principaux, qui sont : faire tendre le marquage asymptotiquement vers un marquage d'équilibre désiré et assurer un taux de franchissement asymptotique pour les transitions du réseau.

3.3.1 Sur la synthèse sous contraintes

Les contraintes correspondent en général à des limitations physiques du domaine de variation de certaines variables. Ainsi, les contraintes font partie intégrante du modèle du système modélisé. L'un des exemples typiques de contraintes est la non négativité de la variable représentant un niveau de stock par exemple.

Les modèles ainsi définis (avec contraintes) posent de nombreux problèmes, que ce soit dans l'étude théorique ou dans la résolution numérique. Si la commande de système avec prise en compte de contraintes sur la commande est possible grâce à la théorie du maximum de Pontryagin [50], les problèmes avec contraintes sur l'état sont difficiles à résoudre. L'une des méthodes utilisées pour la commande sous contraintes sur l'état et la commande est l'utilisation de l'approche de commande prédictive [42].

Dans le cas de système linéaire et invariant, le problème est résolu par un choix de fonction de Lyapunov non quadratique [7]. En outre, il est bien connu dans la théorie de la commande que la stabilité d'un système revient à vérifier l'invariance positive de l'ensemble défini par la fonction de Lyapunov. De plus, il a été montré que la stabilité asymptotique revient à vérifier la contractivité de l'ensemble choisi par rapport au modèle décrivant le système [6].

Lorsqu'on cherche à stabiliser un système, les fonctions de Lyapunov qu'on choisit sont généralement de type ellipsoïdal, or les contraintes sur l'état et/ou sur la commande sont généralement définies par des ensembles de type polyédriques. Le choix d'une fonction de Lyapunov polyédrale pour des systèmes soumis à des contraintes sur l'état et/ou la commande s'avère ainsi judicieux.

3.3.2 Invariance positive et commande sous contraintes

Avant d'introduire le concept d'invariance positive, rappelant quelques notions de base sur les ensembles.

Définition 17 *Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dit ouvert si pour chaque vecteur $x \in \Omega$, un voisinage de x peut être trouvé tel que,*

$$N(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \delta\},$$

avec $N(x, \delta) \subset \Omega$. D'un autre côté, un ensemble E est fermé si et seulement si son complément dans \mathbb{R}^n est un ensemble ouvert.

Définition 18 *La frontière d'un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, désigné par $\partial\Omega$, est un ensemble*

de points x tel que pour chaque point, il existe un voisinage de x contenant au moins un point de Ω et un point n'appartenant pas à Ω .

Définition 19 L'intérieur d'un ensemble Ω est $\Omega - \partial\Omega$. La fermeture d'un ensemble Ω , désigné par $\bar{\Omega}$, est l'union de Ω avec sa frontière. Un ensemble ouvert est égale à son intérieur. Un ensemble fermé est égale à sa fermeture.

Définition 20 Un ensemble Ω est borné s'il existe un scalaire $r > 0$ tel que $\|x\| < 0, \forall x \in \Omega$.

Définition 21 Un ensemble Ω est compact s'il est borné et fermé.

Soit le système dynamique, en temps discret, décrit par

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad (3.7)$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état.

Soit Ω un ensemble non vide et fermé de \mathbb{R}^n . Le concept d'invariance positive de Ω relativement à (3.7) est défini comme suit.

Définition 22 [6] L'ensemble Ω est dit positivement invariant pour le système (3.7) si et seulement si la trajectoire de l'état du système reste dans Ω pour n'importe quel état initial dans Ω .

Soit $\lambda.\Omega$ l'ensemble de tous les vecteurs $\lambda.x, x \in \Omega$. Une propriété plus forte que l'invariance positive, définie uniquement pour les ensembles compacts, est définie comme suit.

Définition 23 [6] L'ensemble Ω est dit contractif pour le système (3.7) s'il existe un réel positif $\lambda < 1$ tel que si $x(k) \in \Omega$ alors $x(k+1) \in \lambda.\Omega$.

Rappelons qu'un ensemble de \mathbb{R}^n est compact s'il est borné et fermé.

3.3.3 Régulation sous contraintes des systèmes linéaires

Considérons un système modélisé par le système d'équations linéaires aux différences suivantes,

$$x(k+1) = A.x(k) + B.u(k). \quad (3.8)$$

La paire (A, B) est supposée commandable. Considérons le retour d'état $u(k) = F.x(k)$, le système en boucle fermée est donné par

$$x(k+1) = A_f.x(k), \quad (3.9)$$

avec $A_f = A + B.F$.

Le système est soumis à des contraintes sur l'état données par le polyèdre

$$\mathcal{P}(P, q) = \{x \mid P.x \leq q\}.$$

Le vecteur de commande est soumis aux contraintes,

$$U_{min} \leq u(k) \leq U_{max}.$$

En remplaçant $u(k)$ par sa valeur, on obtient

$$U_{min} \leq F.x(k) \leq U_{max}.$$

Qui équivaut à :

$$\begin{cases} F.x(k) \leq U_{max} \\ -F.x(k) \leq -U_{min} \end{cases}.$$

Les contraintes sur la commande définissent ainsi un domaine polyédral $\mathcal{P}(\mathcal{L}, v)$ tel que

$$\mathcal{P}(\mathcal{L}, v) = \{x, \mathcal{L}.x \leq v\},$$

avec $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} F \\ -F \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} U_{max} \\ -U_{min} \end{pmatrix}$.

Proposition 5 [30] *Le polyèdre $\mathcal{P}(P, q)$ est positivement invariant pour le système (3.9) si et seulement si, il existe une matrice \mathcal{H} , avec des éléments non-négatifs, tel que les conditions suivantes sont vérifiées*

$$\begin{cases} \mathcal{H}.P = P.A_f \\ \mathcal{H}.q \leq q \end{cases} \quad (3.10)$$

Proposition 6 [30] *Les contraintes sur le vecteur de commande sont satisfaites si et seulement si, il existe deux matrices D et D^* , avec des éléments non-négatifs, tel que les relations suivantes sont satisfaites,*

$$\begin{cases} D.P = F \\ D.q \leq U_{max} \end{cases} \quad (3.11)$$

et

$$\begin{cases} D^*.P = -F \\ D^*.q \leq -U_{min} \end{cases} \quad (3.12)$$

Fonction de Lyapunov polyédrique

Définition 24 [43] *Une fonction continue $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive si $\Psi(0) = 0$ et $\Psi(x) > 0$ si $x \neq 0$.*

Définition 25 ([16]) *Une fonction continue $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour le système (3.9), si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\Psi(x)$ est définie positive,
2. $\Psi(x(k+1)) - \Psi(x(k)) \leq 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Si une telle fonction existe, alors le système est stable. Si de plus, $\Psi(x)$ est strictement décroissante (i.e. $\Psi(x(k+1)) - \Psi(x(k)) < 0$) alors le système (3.9) est asymptotiquement stable.

Il a été montré dans [7], que l'invariance positive d'un polyèdre compact $\mathcal{P}(P, q)$ est équivalente à la non croissance de la fonction

$$\Psi(x(k)) = \max_i \left\{ \frac{P_i}{q_i} . x(k) \right\},$$

le long des trajectoires du système (3.9). L'invariance positive de $\mathcal{P}(P, q)$ par rapport au système (3.9) implique que $\Psi(x)$ est une fonction de Lyapunov polyédrique pour le système (3.9).

3.3.4 Formulation du problème de commande

Hypothèse 2 *Nous supposons dans ce qui suit que le rang de la matrice d'incidence C est égal à n .*

L'hypothèse 2 est une condition suffisante de contrôlabilité pour les systèmes décrits par (3.5), au sens habituel des systèmes linéaires.

On considère la classe des systèmes décrits par l'équation (3.5), et un retour d'état formulé comme suit,

$$w(k) = F_r.(m(k) - m_d) + R, \quad (3.13)$$

où, $m_d \in \mathbb{R}^n$ est le marquage désiré et $R \in \mathbb{R}^m$ le taux de franchissement asymptotique des transitions que l'on désire atteindre.

En posant $x(k) = m(k) - m_d$, le système (3.5) en boucle fermée est donné par

$$x(k+1) = A_{fr}.x(k), \quad (3.14)$$

où $A_{fr} = I_n + \theta.C.F_r$ et I_n la matrice identité de dimension $n \times n$. Il est à noter que le vecteur R doit être choisi tel que $C.R = 0$, ce qui veut dire que R doit être un T-invariant de C .

Le vecteur de commande est soumis aux contraintes suivantes,

$$0 \leq w(k) \leq \Lambda_r.m(k) + \Pi_r.V, \quad (3.15)$$

avec $x(k) = m(k) - m_d$, la dernière inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned} 0 &\leq F_r.x(k) + R \leq \Lambda_r.(x(k) + m_d) + \Pi_r.V, \\ -R &\leq F_r.x(k) \leq \Lambda_r.x(k) + \Lambda_r.m_d + \Pi_r.V - R. \end{aligned}$$

Qui est finalement équivalente à

$$\begin{cases} (F_r - \Lambda_r).x(k) \leq \Lambda_r.m_d + \Pi_r.V - R, \\ -F_r.x(k) \leq R. \end{cases}$$

Par conséquent, pour chaque phase, les contraintes sur les variables de commande génèrent un ensemble polyédral $\mathcal{P}(\mathcal{S}_r, \rho_r)$ défini par

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}_r, \rho_r) = \{x(k), \mathcal{S}_r.x(k) \leq \rho_r\}, \quad r = 1, \dots, N,$$

$$\text{avec } \mathcal{S}_r = \begin{pmatrix} F_r - \Lambda_r \\ -F_r \end{pmatrix} \text{ et } \rho_r = \begin{pmatrix} \Lambda_r.m_d + \Pi_r.V - R \\ R \end{pmatrix}.$$

3.3.5 Stabilité du système non contraint

La loi de commande à commutation assure la stabilité asymptotique du système en boucle fermée (3.14), s'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $A_{f_i}^T.P + P.A_{f_i} < 0$ (3.13)[37].

En prenant $F_i = Z_i.P^{-1}$, $i = 1, \dots, N$, la condition de stabilité devient

$$A_i^T.P + P.A_i + B.Z_i + Z_i^T.B^T < 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Le problème est une inégalité linéaire matriciel (LMI) facile à résoudre avec des outils standards d'optimisation convexe. La stabilité asymptotique génère, dans ce cas, un ensemble ellipsoïdal $\mathcal{E}(P, c)$ défini comme suit

$$\mathcal{E} = \{x, x^T.P.x \leq c\},$$

tel que P est la matrice symétrique définie positive qui assure la stabilité asymptotique du système (3.14).

3.3.6 Conditions algébriques d'invariance et de stabilité

Une seconde famille de polyèdre peut être considérée et qui correspond aux phases d'évolution du système modélisé par réseau de Petri continu.

Rappelons qu'à partir des conditions de saut de phase, chaque phase définit un ensemble polyédrique donné par

$$\mathcal{P}(G_r, g_r) = \{m(t), G_r.m(t) \leq g_r\},$$

où les matrices G_r et les vecteurs g_r possèdent des dimensions appropriées.

En posant $x(k) = m(k) - m_d$, le polyèdre $\mathcal{P}(G_r, g_r)$ devient :

$$\mathcal{P}(G_r, g_r) = \{x(k), G_r \cdot (x(k) + m_d) \leq g_r\},$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathcal{P}(G_r, g_r^*) = \{x(k), G_r \cdot x(k) \leq g_r^*\}, \text{ avec } g_r^* = g_r - G_r \cdot m_d.$$

Considérons maintenant un polytope convexe $\mathcal{P}(Q, \mu)$ contenant l'origine défini par

$$\mathcal{P}(Q, \mu) = \{x(k), Q \cdot x(k) \leq \mu\},$$

avec $Q \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $\mu \in \mathbb{R}^s$ et $\mu > 0$.

Cet ensemble polytopique représente les contraintes sur l'état (marquage) à respecter.

L'intersection entre $\mathcal{P}(Q, \mu)$ et $\mathcal{P}(G_r, g_r^*)$, $r = 1, \dots, N$, donnent naissance à des ensembles polytopiques convexes $\mathcal{P}(Q_r, \mu_r)$ tel que, $Q_r = \begin{pmatrix} Q \\ G_r \end{pmatrix}$ et $\mu_r = \begin{pmatrix} \mu \\ g_r^* \end{pmatrix}$.

Lemme 1 [30] *Étant donné deux polyèdres $\mathcal{P}(P, p) = \{x : P \cdot x \leq p\}$ et $\mathcal{P}(G, q) = \{x : G \cdot x \leq q\}$ où P (resp. G) est une matrice $m \times d$ (resp. $m' \times d$) et p (resp. q) est un vecteur de dimension m (resp. m'). L'assertion suivante*

$$\mathcal{P}(P, p) \subseteq \mathcal{P}(G, q), \tag{3.16}$$

est vraie si et seulement si il existe une matrice H de dimension $m' \times m$ avec des éléments non-négatifs tel que ce qui suit est vérifié :

$$\begin{cases} G = H \cdot P \\ H \cdot p \leq q. \end{cases}$$

Théorème 3 *Le polyèdre $\mathcal{P}(Q, \mu)$ est positivement invariant pour le système (3.14) si et seulement si, il existe des matrices avec des éléments non-négatifs \mathcal{H}_r , pour $r = 1$ à N , tel que les conditions suivantes sont vérifiées*

$$\begin{cases} \mathcal{H}_r \cdot Q_r = Q \cdot A_{fr} \\ \mathcal{H}_r \cdot \mu_r \leq \mu \end{cases} \tag{3.17}$$

Preuve :

A partir de la Définition 18, l'invariance positive de $\mathcal{P}(Q, \mu)$ pour le système (3.14) est vérifiée si et seulement si $x(k) \in \mathcal{P}(Q_r, \mu_r)$, ce qui implique que $x(k+1) = A_{f_r} \cdot x(k) \in \mathcal{P}(Q, \mu)$, pour $r = 1$ à N . La dernière condition s'écrit $Q \cdot A_{f_r} \cdot x(k) \leq \mu$ ce qui est équivalent à $x(k) \in \mathcal{P}(Q \cdot A_{f_r}, \mu)$. Nous avons prouvé jusqu'ici que l'invariance de $\mathcal{P}(Q, \mu)$ pour le système (3.14) est équivalent à

$$\mathcal{P}(Q_r, \mu_r) \subseteq \mathcal{P}(Q \cdot A_{f_r}, \mu),$$

pour $r = 1$ à N , et (3.17) est finalement obtenue en appliquant le Lemme 1 □

Proposition 7 *Les contraintes (3.15) sur le vecteur de commande sont satisfaites si et seulement si ils existent des matrices D_r et D_r^* , $r = 1, \dots, N$, avec des éléments non-négatifs, tel que ce qui suit est vérifié :*

$$\begin{cases} D_r \cdot Q_r = F_r - \Lambda_r \\ D_r \cdot \mu_r \leq \rho_{r1} \end{cases} \quad (3.18)$$

et

$$\begin{cases} D_r^* \cdot Q_r = -F_r \\ D_r^* \cdot \mu_r \leq \rho_{r2} \end{cases} \quad (3.19)$$

Preuve :

Les contraintes sur le vecteur de commande sont satisfaites si et seulement si $\forall x(k) \in \mathcal{P}(Q_r, \mu_r)$, alors $x(k) \in \mathcal{P}(S_r, \rho_r)$, ce qui veut dire que la condition géométrique suivante est vérifiée,

$$\mathcal{P}(Q_r, \mu_r) \subseteq \mathcal{P}(S_r, \rho_r), \quad r = 1, \dots, N. \quad (3.20)$$

En utilisant le Lemme 1, l'assertion (3.20) est vraie si et seulement si, il existe des matrices $J_r = (D_r, D_r^*)^T$ où D_r et D_r^* sont des matrices avec des éléments non-négatifs. telles que

$$\begin{cases} S_r = J_r \cdot Q_r \\ J_r \cdot \mu_r \leq \rho_r \end{cases}$$

En prenant $S_r = \begin{pmatrix} F_r - \Lambda_r \\ -F_r \end{pmatrix}$ et $\rho_r = \begin{pmatrix} \rho_{r1} = \Lambda_r \cdot m_d + \Pi_r \cdot V - R \\ \rho_{r2} = R \end{pmatrix}$, ce qui achève la preuve. □

Proposition 8 *Le polyèdre $\mathcal{P}(Q, \mu)$ est contractif pour le système (3.14) si et seulement si des matrices \mathcal{H}_r , avec des éléments non-négatifs existent et un réel positif $\lambda < 1$ tel que les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \mathcal{H}_r \cdot Q_r = Q \cdot A_{fr} \\ \mathcal{H}_r \cdot \mu_r \leq \lambda \cdot \mu \end{cases} \quad (3.21)$$

pour $r = 1, \dots, N$.

Preuve :

Par définition, $\mathcal{P}(Q, \mu)$ est contractif si et seulement si un réel positif λ existe avec $0 \leq \lambda < 1$, tel que $x(k) \in \mathcal{P}(Q_r, \mu_r)$ implique que $x(k+1) \in \mathcal{P}(Q, \lambda \cdot \mu)$. En prenant (3.14) en considération ; cette condition est exprimée géométriquement par

$$\mathcal{P}(Q_r, \mu_r) \subseteq \mathcal{P}(Q \cdot A_{fr}, \lambda \cdot \mu),$$

pour $r = 1$ à N , le résultat est finalement obtenue en utilisant le Lemme 1. \square

Proposition 9 *Si le polyèdre $\mathcal{P}(Q, \mu)$ est contractif pour le système (3.14) alors la fonction polyédrale $\Psi(x(k)) = \max_{1 \leq i \leq s} \left\{ \frac{Q_i}{\mu_i} \cdot x(k) \right\}$ est une fonction de Lyapunov strictement décroissante pour le système (3.14), où Q_i représente la i^{th} ligne de Q et μ_i la i^{th} composante du vecteur μ . Le système (3.14) est alors asymptotiquement stable*

Preuve :

Du moment que $\mathcal{P}(Q, \mu)$ est compact et contient l'origine ; nous avons $\Psi(x(k)) > 0$, $\forall x(k) \neq 0$ et $\Psi(x(k)) = 0$ si $x(k) = 0$. Quand $\mathcal{P}(Q, \mu)$ est contractif nous avons $\Psi(x(k+1)) \leq \lambda \cdot \Psi(x(k)) < \Psi(x(k))$, $\forall x(k) \neq 0$. Ainsi ; $\Psi(x(k))$ est une fonction de Lyapunov strictement décroissance pour le système (3.14). \square

Les conditions (3.17), (3.18) et (3.19) sont nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un contrôle garantissant le respect des contraintes sur la commande et sur le vecteur marquage. La condition (3.21) est suffisante pour que le contrôle soit stabilisant. Ces conditions sont des inégalités matricielles linéaires qui peuvent être résolues par des outils numériques standard [26, 27]. La solution permet en outre, de calculer les gains de retour d'état F_r qui sont des paramètres des inégalités matricielle linéaires.

Remarques

1. il est bien établi qu'une inégalité matricielle linéaire est résolue en temps polynomial [21]. Dans notre cas, nous avons à résoudre une LMI pour chaque phase. Ce qui veut dire que le nombre de LMI à résoudre est égale à N . Pour une ligne de production à s machine, le nombre de phase est donné par $N = 2^s$ ce qui nous indique clairement que le nombre de phase augmente exponentiellement avec le nombre de synchronisation qu'on a dans le graphe.
2. Le problème peut aussi être traité comme un système linéaire invariant dans le temps en cherchant un seul gain de retour d'état F et en décrivant, comme dans [39], toutes les contraintes de la variable commande $w(k)$ par un seul polyèdre $\mathcal{P}(\mathcal{S}, \rho)$ tel que $\mathcal{S} = \mathcal{G}.F - \Gamma$ et $\rho = \Pi.V + \Gamma.m_d - \mathcal{G}.R$. Les matrices \mathcal{G} , Γ et Π sont obtenues de même manière que dans [39]. Les contraintes sur la commande sont satisfaites si la condition géométrique suivante est vérifiée [30]

$$\mathcal{P}(\mathcal{Q}, \mu) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{S}, \rho).$$

Cette dernière équation est exprimée par la condition algébrique suivante

$$\begin{cases} \mathcal{S} = J.Q \\ J.\mu \leq \rho. \end{cases}$$

avec J une matrice non négative.

L'ensemble polyédrique $\mathcal{P}(\mathcal{Q}, \mu)$ est contractif pour le système bouclé (avec un seul retour d'état, F) si il existe une matrice non négatives \mathcal{H} , et $0 < \lambda < 1$ tel que la condition suivante est vérifiée [30]

$$\begin{cases} \mathcal{H}.Q = Q.A_f \\ \mathcal{H}.\mu \leq \lambda.\mu \end{cases}$$

avec $A_f = I_n + \theta.C.F$.

La complexité est maintenant polynomiale. Par contre, nous remarquons que la LMI obtenue est souvent sans solution.

3.4 Application à un système d'assemblage

Description du système : il s'agit d'un système d'assemblage manufacturier contenant quatre stations ayant chacune un temps opératoire qui peut être changé par la partie commande. Une station ne peut traiter qu'une pièce à la fois. Les vitesses maximales correspondent à : $V_1 = 5$, $V_2 = 5$, $V_3 = 5$ et $V_4 = 5$. On suppose que les deux stations d'alimentation en matière première sont alimentées par des stocks amont supposés n'être jamais vide. Les stocks intermédiaires sont à capacités limitées (places en pointillées).

Objectifs : Notre objectif est de trouver des gains de retour d'état linéaires F_r , tel que la trajectoire du système évolue de l'état initial $m_0 = [0, 0, 0]^T$ vers un état désiré $m_d = [2, 3, 1]^T$ et garantissent le respect des contraintes liées aux capacités limitées des stocks et aux flux maximaux des machines et permettant d'atteindre le vecteur vitesse de franchissement asymptotique suivant : $R = [2, 2, 2, 2]^T$.

Le modèle réseau de Petri continu contrôlé du système d'assemblage : Les stations sont représentées par des transitions T_1 , T_2 , T_3 et T_4 avec des boucles de réentrance (implicite) et les stocks par des places P_1 , P_2 et P_3 tel que montré à la figure 3.2. Les places qui modélisent les limitations des stocks (en pointillées) sont considérées comme des contraintes sur le marquage de ces places. Elle sont donc supprimées du réseau et prises en compte comme contraintes. Le système modélisé par le réseau de Petri continu de la figure 3.2 peut être représenté par un réseau de Petri continu contrôlé en temps discret avec des contraintes sur le vecteur commande comme suit

$$\begin{cases} m(k+1) = m(k) + \theta.C.w(k) \\ 0 \leq w(k) \leq \Lambda_r.m(k) + \Pi_r.V \end{cases}$$

où $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, pour chaque région \mathcal{R}_r les matrices Λ_r, Π_r, G_r et g_r sont données comme suit

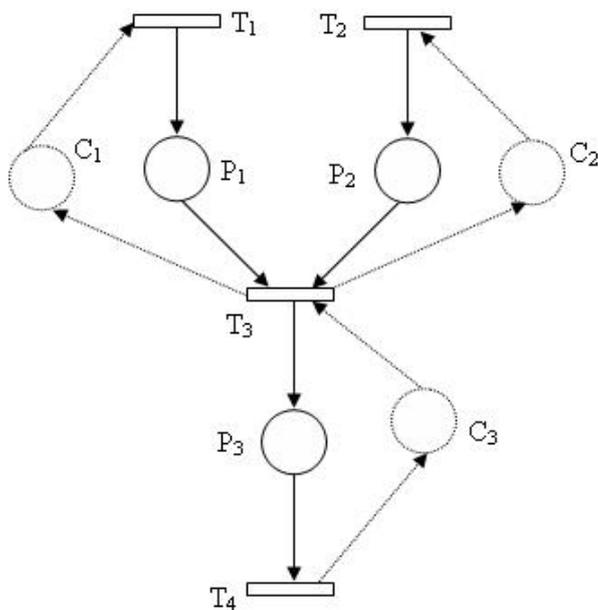


FIG. 3.2: Réseau de Petri continu

$$\mathcal{R}_1 : m_1(k) \geq 1, m_2(k) \geq 1 \text{ et } m_3(k) \geq 1$$

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{R}_2 : m_1(k) \geq 1, m_2(k) \geq 1 \text{ et } m_3(k) \leq 1$$

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_4 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{R}_3 : m_1(k) \leq 1, m_1(k) - m_2(k) \leq 0 \text{ et } m_3(k) \geq 1$$

$$\Pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{R}_4 : m_1(k) \leq 1, m_1(k) - m_2(k) \leq 0 \text{ et } m_3(k) \leq 1$$

$$\Pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_4 \end{pmatrix}, G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{R}_5 : m_2(k) \leq 1, m_2(k) - m_1(k) \leq 0 \text{ et } m_3(k) \geq 1$$

$$\Pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{R}_6 : m_2(k) \leq 1, m_2(k) - m_1(k) \leq 0 \text{ et } m_3(k) \leq 1$$

$$\Pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_3 & 0 \\ 0 & 0 & V_4 \end{pmatrix}, G_6 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur marquage est soumis aux contraintes suivantes :

$$0 \leq m(k) \leq m_{\max}.$$

En posant $x(k) = m(k) - m_d$, les contraintes deviennent

$$-m_d \leq x(k) \leq m_{\max} - m_d,$$

Ce qui correspond à l'ensemble polyédral suivant $\mathcal{P}(Q, \mu)$ donné par

$$\mathcal{P}(Q, \mu) = \{x(k), Q \cdot x(k) \leq \mu\},$$

$$\text{où } Q = \begin{pmatrix} I_n \\ -I_n \end{pmatrix} \text{ et } \mu = \begin{pmatrix} m_{max} - m_d \\ m_d \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre les inégalités matricielles linéaires (3.17),(3.18) et (3.21) nous avons utilisé CVX, un outil spécifique pour la résolution des problèmes convexes [26, 27]. Les gains suivants ont été obtenus,

$$F_1 = \begin{pmatrix} -0.2395 & -0.0036 & -0.0389 \\ 0.0069 & -0.2985 & -0.0704 \\ 0.2219 & 0.2960 & -0.0479 \\ 0.1186 & 0.1231 & 0.4015 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} -0.2080 & 0.0042 & -0.0011 \\ 0.0033 & -0.2795 & -0.0019 \\ 0.3679 & 0.4885 & -0.0562 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} -0.2725 & 0.0351 & 0.1394 \\ 0.4601 & -0.5399 & 0 \\ 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.1622 & 0.0489 & 0.4837 \end{pmatrix},$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} -0.3447 & 0.0657 & -0.0154 \\ 0.4547 & -0.5453 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$F_5 = \begin{pmatrix} -0.5609 & 0.1058 & 0 \\ 0.0279 & -0.2723 & 0.0824 \\ 0 & 0.6667 & 0 \\ 0.0411 & 0.1254 & 0.4525 \end{pmatrix},$$

$$F_6 = \begin{pmatrix} -0.5637 & 0.1030 & 0 \\ 0.0475 & -0.3164 & -0.0104 \\ 0 & 0.6667 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons les résultats de simulation de la Figure 3.3 et de la Figure 3.4. Il apparaît clairement que les valeurs désirées (marquage et taux de franchissement) sont effectivement atteints.

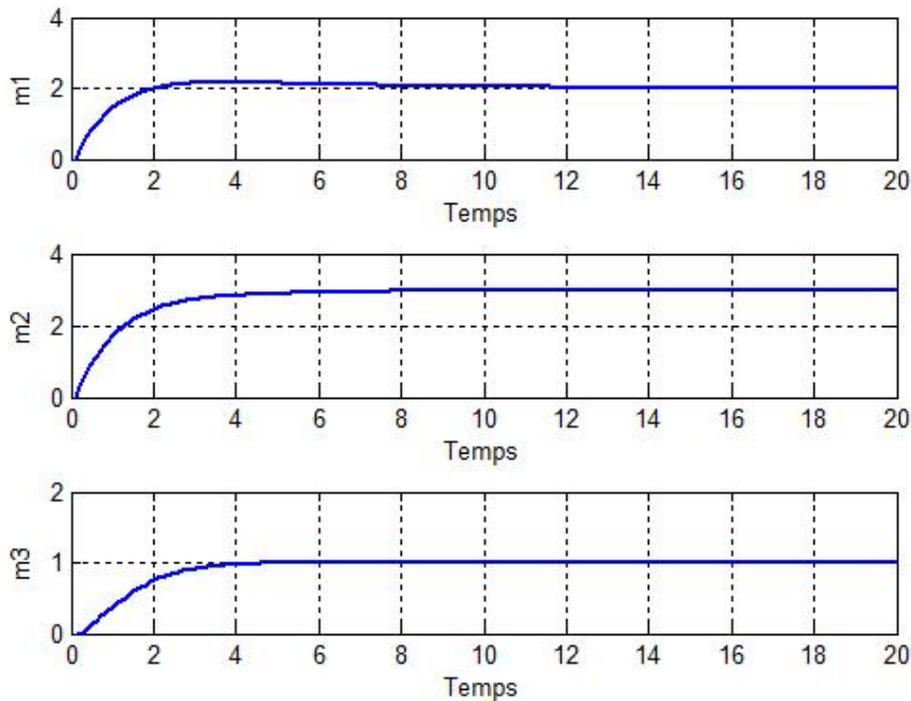


FIG. 3.3: Evolution du marquage du système d'assemblage

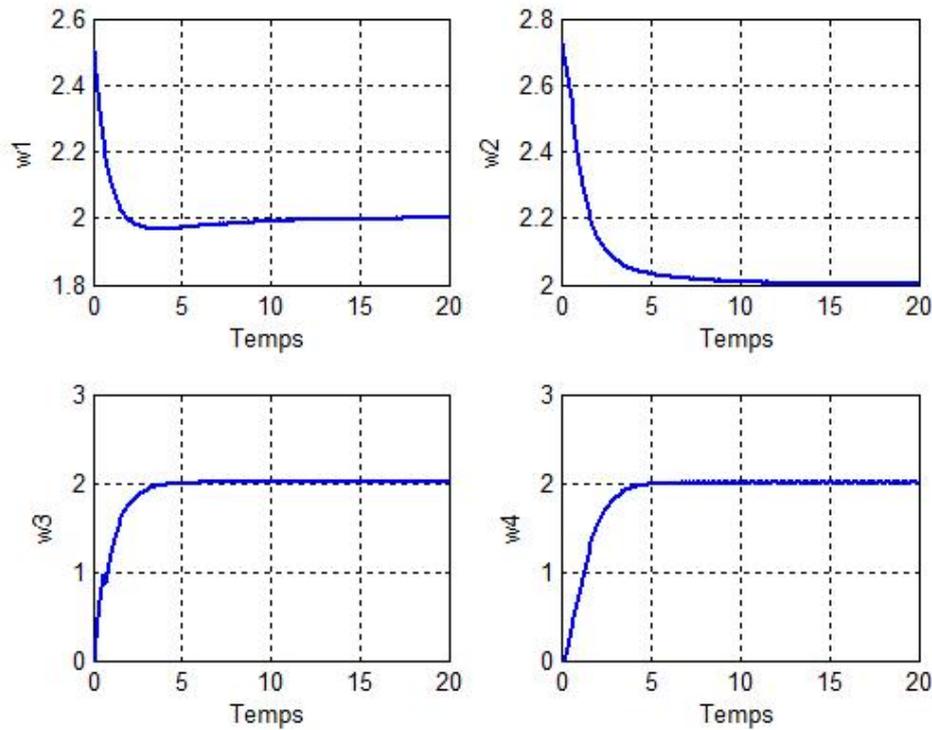


FIG. 3.4: Evolution de la commande du système d'assemblage

3.5 Application à une ligne de production

Le modèle réseau de Petri continu de la Figure 3.1 représente une ligne de production linéaire. Les machines sont modélisées par les transitions T_1 , T_2 , T_3 avec des boucles de réentrance (implicite) et les stocks par les places P_1 et P_2 . Les vitesses maximales correspondent à : $V_1 = 5$, $V_2 = 5$, $V_3 = 5$. La trajectoire du système doit évoluer de l'état initial $m_0 = [0, 0, 0]^T$ vers un état désiré $m_d = [5, 3]^T$ en garantissant le respect des contraintes liées aux capacités limitées des stocks et aux flux maximaux des machines et permettant d'atteindre le vecteur des vitesses de franchissement asymptotique suivant : $R = [5, 5, 5]^T$.

Le vecteur marquage est soumis aux contraintes suivantes

$$0 \leq m(k) \leq m_{\max},$$

avec $m_{\max} = [10, 10]^T$, le marquage maximum.

En posant $x(k) = m(k) - m_d$, les contraintes deviennent

$$-m_d \leq x(k) \leq m_{max} - m_d,$$

ce qui correspond à l'ensemble polyédral $\mathcal{P}(Q, \mu)$ donné par

$$\mathcal{P}(Q, \mu) = \{x(k), Q \cdot x(k) \leq \mu\},$$

où $Q = \begin{pmatrix} I_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$ et $\mu = \begin{pmatrix} m_{max} - m_d \\ m_d \end{pmatrix}$.

La résolution des inégalités matricielles linéaires (3.17),(3.18) et (3.21) relatif à la ligne de production nous donne les gains suivants,

$$F_1 = \begin{pmatrix} -0.4708 & -0.0964 \\ 0.2636 & -0.2501 \\ 0.0199 & 0.4430 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} -0.4079 & 0.0792 \\ 0.2754 & -0.4484 \\ 0 & 1.6667 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} -0.3219 & 0.0169 \\ 1 & 0 \\ 0.2036 & 0.3991 \end{pmatrix}$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} -0.3304 & -0.1122 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1.6667 \end{pmatrix}.$$

Les résultats de simulations obtenues sont donnés par les Figures 3.5 et 3.6 et montrent que le marquage stationnaire désiré et le vecteur taux de franchissement à l'état stationnaire sont effectivement atteints.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une loi de commande en boucle fermée est utilisée pour la commande de systèmes à événements discrets modélisés par les réseaux de Petri continus en temps

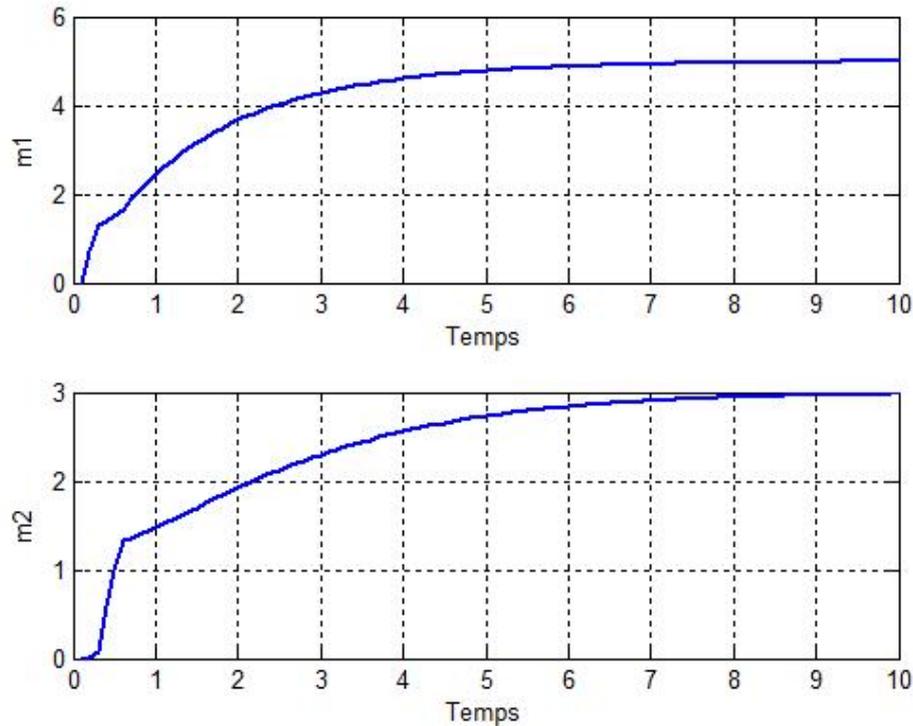


FIG. 3.5: Evolution du marquage de la ligne de production

discret. Les gains de retour d'état sont synthétisés de façon à respecter les contraintes sur la loi de commande, les contraintes sur le vecteur marquage et d'assurer la stabilité asymptotique du système en boucle fermé. Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de lois de commande satisfaisant les contraintes et garantissant le respect des contraintes sur le vecteur marquage sont établies. Une condition additionnelle est donnée pour garantir la stabilité asymptotique. La dernière équation est équivalente à la contractivité du polyèdre donné pour le système en boucle fermé. Les conditions sont exprimées en terme d'inégalité matricielle linéaire pour lesquelles des outils de résolution existent. Un exemple applicatif a permis d'illustrer la stratégie de contrôle adoptée.

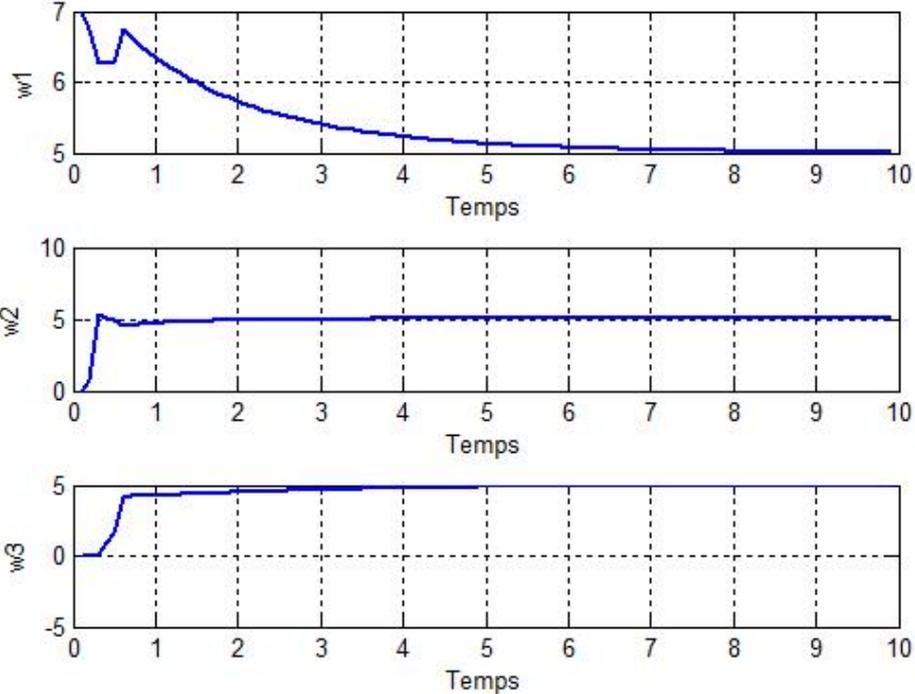


FIG. 3.6: Evolution de la commande de la ligne de production

Conclusion générale et perspectives

Nous avons présenté dans cette thèse un certain nombre de méthodologies pour l'analyse quantitative et la commande des systèmes de production en utilisant le modèle réseau de Petri continu à vitesses variables.

La programmation linéaire est largement utilisée pour le calcul de performances des réseaux de Petri continus. Malheureusement, ces méthodes ne permettent pas d'avoir une représentation explicite de la solution. La contribution à l'analyse quantitative des réseaux de Petri continus à arcs valués par la théorie des graphes concerne le développement de méthodes formelles permettant de calculer la fréquence de franchissement asymptotique des transitions et le marquage stationnaire du réseau. Une méthodologie est développée pour les graphes d'événements continus valués neutres et fortement connexes. En premier, une formule explicite permettant l'obtention du vecteur vitesse de franchissement asymptotique des transitions est proposée. La formule est similaire dans la forme à celle qui existe pour les graphes d'événements discrets et à celle obtenue pour les graphes d'événements fluides valués dans l'algèbre $(\min,+)$. Ce résultat est plus surprenant qu'il n'y paraît. En effet, les deux modèles définissent des sémantiques différentes. Les dynamiques correspondant à un même graphe avec des marquage initiaux identiques sont différentes avec un modèle ou l'autre, en particulier les régimes transitoires des solutions sont différents. Deuxièmement et sous l'hypothèse que le graphe d'événements continu valué neutre et fortement connexe possède un seul circuit critique, une formule permettant le calcul du vecteur marquage stationnaire est donné. Le calcul du marquage stationnaire repose sur les concepts d'ensemble de T-couverture, de place critique, de facteur de criticité et

de chemins élémentaires.

L'introduction d'un vecteur commande dans le modèle réseau de Petri continu à vitesses variables, permettant de ralentir les vitesses instantanées de franchissement, a permis d'envisager l'utilisation de la théorie des systèmes continus aux systèmes de production. Après discrétisation de l'équation d'évolution des réseaux de Petri continus, une loi de commande en boucle fermée a été proposée. L'utilisation des principes d'invariance positive et de contractivité de l'ensemble généré par les contraintes, nous a permis d'obtenir de conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de lois de commande garantissant l'invariance positive et le respect des contraintes sur le vecteur commande. Pour garantir la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, une autre condition suffisante a été proposée. Toutes les conditions sont exprimées en terme d'inégalités matricielles linéaires LMI pour lesquelles des outils standards de résolution existent.

Les travaux développés dans cette thèse laissent apparaître les perspectives suivantes :

La première consiste à faire une étude quantitative pour d'autres structures de réseaux de Petri continus tels que : les réseaux à choix libres et la classe de réseau mono-T-semiflow en utilisant des notions introduites dans cette thèse tel que le facteur de criticité.

Une seconde perspective consiste à étendre les résultats concernant la régulation sous contraintes des réseaux de Petri continus du chapitre 3 au cas non discrétisé.

Une dernière perspective consiste à aborder le problème de régulation sous contrainte des systèmes hybrides à commutations autonomes pour lesquels une amorce de solution est traitée dans cette thèse.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] H. Alla, Réseaux de Petri colorés et réseaux de Petri continus : Application à l'étude des systèmes à événements discrets, Thèse d'état, I.N.P. Grenoble, France, 1987.
- [2] C. Amer-Yahia, N. Zerhouni, M. Ferney and A. El Moudni, Modelling of biological systems by continuous Petri nets. 15th IMACS World ongres on Scientific Computation Modelling and Applied Mathematics, 4, 383-388, Berlin, August, 1997.
- [3] A. Amrah, N. Zerhouni, A. El Moudni and M. Ferney, Constrained state feedback control of a class of discrete event systems modelled by continuous Petri nets, in : Proceedings of ICRACV'96, Westin Stamford, Singapore, 1996.
- [4] A. Amrah, N. Zerhouni, A. El Moudni, On the control of manufacturing lines modeled by controlled continuous Petri Nets, International Journal of System Science, 29(2), 127-137, 1998.
- [5] F. Balduzzi, A. Giua and G. Menga, First-order hybrid Petri nets : a model for optimisation and control, IEEE transation on Robotics and Automation, 16(4), 41-57, 2001.
- [6] F. Blanchini, Set invariance in control, Automatica, 35(11), 1747-1767, 1999.
- [7] G. Bistoris, On the positive invariance of polyedral sets of discrete-time linear systems, International journal of control, 47, 1713-1726, 1998.
- [8] G. W. Brams, Réseaux de Petri, Théorie et pratique, Tome 1 et 2, Eds Masson, 1983.
- [9] D. T. Chao, M. Zhou and D. T. Wang, Multiple-weighted marked graphs, in : Proceedings of the 12th IFAC World Congress, Sydney, Australia, pp. 259-262, 1993.

-
- [10] G. Cohen, S. Gaubet and J. P. Quadrat, Timed event graphs with multipliers and homogeneous Min-Plus systems, *IEEE Transaction on Automatic Control* 43(9) (1998) 43-49.
- [11] F. Commoner, A. W. Holt, Marked directed graphs, *Journal of Computer and System Sciences*, 5, 511-523, 1971.
- [12] R. David and H. Alla, Continuous Petri nets, in : *Proceedings of the 8th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets*, Zaragoza, Spain, 1987, pp. 275-294.
- [13] R. David and H. Alla , *Grafset et Réseaux de Petri*, Hermès, 2nd édition, 1992.
- [14] R. David and H. Alla , *Discrete, Continuous and Hybrid Petri Nets*, Springer-Verlag, 2004.
- [15] I. Demongodin, M. Mostefaoui and N. Sauer, Steady state of continuous neutral weighted marked graphs, in : *Proceedings of the International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, USA, 2000, pp. 3189-3194.
- [16] C.E.T. Dorea, *Sur l'(A, B)-Invariance de Polyèdres Convexes ; Application à la Commande sous Contraintes et au problème \uparrow^1* , Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1997.
- [17] E. Dubois, *Sur les réseaux de Petri à vitesses maximales fonctions du temps et constantes par palier*, Thèse de Doctorat en Automatique et Productique, Institut Nationale polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 1995.
- [18] K. Eglimez and A. Sharifnia, Optimal control of manufacturing system based on a novel continuous flow model with maximal WIP requirement. Rensselaer's, in : *proceedings Conference on SIM*, Albany, USA 1994.
- [19] G. Florin and S. Natkin, Evaluation based upon stochastic Petri nets of the maximum throughput of a full duplex protocol, *Application and Theory of Petri nets*, C. Girault and W. Reisig, Eds, New-York : Springer-Verlag, 208-288, 1982.
- [20] G. Florin, *Réseaux de Petri stochastiques, Théorie et techniques de calcul*, Thèse d'état, Université Pière et Marie Curie, France, 1985.

-
- [21] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A.J. Laub and M. Chilali, LMI Control Toolbox user's guide, the Mathworks Inc. , Natick, MA, 1995.
- [22] B. Gaujal and A. Giua, Optimal stationary behavior for a class of timed continuous Petri nets, *Automatica* 40(9) (2004) 1505-1516.
- [23] M. K. Ghabri, Sur la modélisation et la commande des systèmes de production flexibles, Thèse de Doctorat. I.N.P. Grenoble. France, (1995).
- [24] A. Giua, C. Mahulea, L. Recalde, C. Seatzu and M. Silva, Optimal control of continuous Petri nets via model predictive control, in : Proceedings of the International Workshop on Discrete Event Systems, 235-241, Ann Arbor, USA, 2006.
- [25] M. Gondran, M. Minoux and S. Vajda, *Graphs and Algorithms*, Wiley, 1984.
- [26] M. Grant, S. Boyd and Y. Ye, CVX : Matlab software for disciplined convex programming (web page and software), available at www.stanford.edu/~boyd/cvx/, may 2008.
- [27] M. Grant and S. Boyd, Graph implementations for nonsmooth convex programs, to appear in *Recent Advances in Learning and Control (a tribute to M. Vidyasagar)*, V. Blondel, S. Boyd, and H. Kimura, editors, Springer, 2008, http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html.
- [28] M. Haouani, D. Lefebvre and A. El Moudni, Neural net works implementation for simulation of manufacturing systems with limited buffers capacities, in : Proceedings of AGI'97 Simulation in Industry, Passau, Germany, 1997.
- [29] S. Hennequin, D. Lefebvre and A. El Moudni, Fuzzy control of variable speed continuous Petri nets, in : Proceedings of the 38th conference on decision and control, Phoenix, Arizona USA, December 1999.
- [30] J-C. Hennet, Une extention du lemme de Farkas et son application au problème de régulation linéaire sous contraintes, *comptes rendus de l'académie des sciences Paris*, 308(I), 415-419, 1989.
- [31] J. Jùlvez, L. Recalde and M. Silva, Steady state performance evaluation of continuous mono-T-semiflow Petri nets, *Automatica* 41(4) (2005) 605-616.

- [32] J. Júlvez, A. Bemporad, L. Recalde and M. Silva, Even-driven optimal control of continuous Petri nets, in : proceedings of the 43rd Conference on decision and control, Atlantis, paradise island, Bahamas, december, 2004.
- [33] R. Kara, S. Djennoune and J-J. Loiseau , State feedback control of discrete event systems modeled by continuous Petri nets, in : Proceedings of INCOM'06, Saint Etienne, France, may 2006.
- [34] R. Kara, J-J. Loiseau and S. Djennoune, Quantitative analysis of continuous weighted marked graphs, *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 2(4), 2008.
- [35] B. H. Krogh, controlled Petri nets and maximally permissive feedback logic, in : Proceedings of the 25th Ann. Allerton Conference, universite of Illinois, Urbanna, 1987.
- [36] D. Lefebvre, Feedback control designs for manufacturing systems modeled by continuous Petri nets, *International Journal of Systems Sciences* 30(6), 591-600, 1999.
- [37] D. Liberzon. and A. S. Morse, Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control System Mag*, 19(5), 59-70, October, 1999.
- [38] C. Mahulea, A. Giua, L. Recalde, C. Seatzu, and M. Silva, On sampling continuous timed PNs : reachability equivalence under infinite servers semantics, in : proceedings of the 2nd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, 37-43, Alghero, Italy, June 2006.
- [39] C. Mahulea, A. Giua, L. Recalde, C. Seatzu and M. Silva, Optimal model predictive control of timed continuous Petri Nets, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(7), 1731-1735, august 2008.
- [40] C. Mahulea, A. Ramirez-Trevino, L. Recalde and M. Silva, Steady-State Control Reference and Token Conservation Laws in Continuous Petri net Systems, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 5(2),307-320, 2008.
- [41] J. Martinez, M. Silva, A simple and fast algorithm to obtain all invariants of a generalized Petri net, *Application and Theory of Petri nets*, New-York, Springer-Verlag, 1982.

-
- [42] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao and P. O. M. Scokaert, Constrained model predictive control : stability and optimality, *Automatica*, 26, 789-814, 2000.
- [43] B. E. A. Milani, Piecewise-affine Lyapunov functions for discrete-time linear systems with saturating controls, *Automatica*, 38(12), 2177-2184, 2002.
- [44] M. Moalla, Réseaux de Petri interprété et Grafset, revue TSI, 4(2), 1985.
- [45] M.K. Molloy, Performance analysis using stochastic Petri nets, *IEEE Transactions on Compututer*, 31(9), 913-917, 1982.
- [46] M. Mostefaoui, I. Demongodin and N. Sauer, Final marking of continuous neutral weighted marked graphs, in : *Proceedings of the International Symposium on Intelligent Control*, Mexico, 211-218, 2001.
- [47] A. Munier, Regime asymptotique optimal d'un graphe d'événements temporisé généralisé, application à un problème d'assemblage, *RAIRO APII*, 27(5), 487-513, 1993.
- [48] T. Murata, Petri nets : Properties, analysis and applications, in : *Proceedings of the IEEE*, 77(4), 541-580, 1989.
- [49] J. M. Proth et X. Xie, *Les réseaux de Petri pour la conception et la gestion des systèmes de production*, Eds Masson, Paris, 1994.
- [50] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanski, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal process*, Intersciences Publishers, Wiley, New York, 1962.
- [51] C. V. Ramamoorthy and G. S. Ho, Performance evaluation of asynchronous concurrent systems using Petri nets, *IEEE Transactions on Software Engineering SE-6*(5), 440-449, 1980.
- [52] C. Ramchandani, *Analysis of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets*, Ph.d thesis, MIT, Combridje, Mass, Project MAC-TR 120, 1994.
- [53] L. Recalde and M. Silva, PN fluidification revisited : semantic and steady state, *APII-JESA*, 35, 435-449, 2001.
- [54] J. Sifakis, *Performance evaluation of using Petri nets, Net Theory ans application*, lecture notes in computer science, springer-verlag, Berlin FRG, 1980.

-
- [55] M. Silva and L. Recalde, Petri nets and integrality relaxations : A view of continuous Petri net models, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part C : Applications and Reviews*, 32(4), 314-327, 2002.
- [56] M. Silva and L. Recalde, On fluidification of Petri nets : from discrete to hybrid and continuous models, *Annual Reviews in Control*, 28(2), 253-266, 2004.
- [57] E. Teruel, P. Chrzastowski-Wachtel, J. M. Colom and M. Silva, On weighted T-systems, *Lecture Notes in Computer Science*, vol.616, in : *Proceedings of the 13th International Conference on Applications and Theory of Petri Nets*, Sheffield, 348-360, 1992.
- [58] N. Zerhouni and H. Alla, Sur l'analyse des lignes de fabrication par réseaux de Petri, *RAIRO APII*, 26(3), 253-276, 1992.
- [59] M.C. Zhou, K. McDermott and P.A. Patel, Petri net synthesis and analysis of a flexible manufacturing system cell, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 23(2), 523-531, 1993.
- [60] R. Zurawski and M.C. Zhou, Petri net and applications : A Tutorial, *IEEE Transactions on industrial electronics*, 41(6), 1994.

Annexe

Le modèle CGQ

Annexe. Modèle CGQ

Réseaux de Petri continus

Un réseau de Petri continu est un sextuplet $\mathcal{N} = (P, T, I, O, m_0, Tempo)$ tel que :

- $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini et non vide de places de cardinalité n ,
- $T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ est un ensemble fini et non vide de transitions de cardinalité m ,
- $I : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application d'incidence avant, où \mathbb{N} est l'ensemble des entiers non négatifs,
- $O : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application d'incidence arrière.
- $m_0 : P \rightarrow \mathbb{R}^+$ est le vecteur marquage initial du réseau (vecteur de dimension n),
- $Tempo : P \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une application qui associe à chaque place P_i un réel strictement positif d_i appelé temporisation de la place P_i .

Equation compteur

Soit \mathcal{N} un graphe d'événements continu à arcs valués, un compteur associé à une transition T_j correspond au nombre de franchissement de la transition T_j .

Un graphe d'événements continu avec multiplieurs est régi par les équations compteurs suivantes [10]

$$\theta_j(t) = \min_{i | \circ_{P_i} = T_k} \left\{ \frac{m_{0i}}{I(P_i, T_j)} + \frac{O(P_i, T_k)}{I(P_i, T_j)} \theta_k(t - d_i) \right\}.$$

Fréquence de franchissement asymptotique

La vitesse de franchissement asymptotique des transitions d'un graphe d'événements continu neutre et fortement connexe \mathcal{N} est donnée par

$$\phi_j = x_j \cdot \min_{k=1, \dots, q} \left\{ \frac{\sum_{P_i \in L_k} N_{0i}}{\sum_{T_j \in L_k} d_j} \right\},$$

où q représente le nombre de circuits élémentaires et x_j la j^{ieme} composante du T-semiflow minimal du graphe.