

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud MAMMERI De Tizi-Ouzou

Institut de Génie de Construction

Département de Génie Civil

THESE DE MAGISTER

ETUDE NUMERIQUE (3-D) ET EVALUATION DE L'INTEGRITE STRUCTURALE DES ELEMENTS EN BETON ARME SOUS L'ACTION DES CHARGES MONOTONES

Présentée par :

M^{elle} BOUCHELIL Lynda : Ingénieur d'état en Génie Civil ; Option CCI

Devant le jury d'examen composé de :

Mr DAHMANI Lahlou ; Maître de conférences, U.M.M.T.O ; Rapporteur

Mr KACI Rabah ; Professeur, U.M.M.T.O ; Président

Mr MEHADDENE Rachid: Maître de conférences, U.M.M.T.O ; Examineur

Mr DRIZI Saïd : Maître de conférences, U.M.M.T.O ; Examineur

Mr DERRAJ Mohammed : Maître de conférences, U.M.M.T.O ; Examineur

REMERCIEMENTS

Cette recherche a été aboutie sous la supervision de Dr Dahmani Lahlou. Je suis extrêmement reconnaissante pour toute son aide, sa compréhension, et le temps qu'il a consacré pour m'orienter et compléter cette thèse.

Je remercie mon mari Akli Benali pour tout son encouragement, son aide et sa compréhension.

Une grande appréciation à mes chers parents Rabeh et Ourdia Chebheb. J'avoue que n'aurais jamais pu en arriver jusqu'au là sans leurs sacrifices consentis au cours de mes longues études.

Je remercie mon frère Sofiane, mes sœurs Dyhia et Karima et leurs conjoints Dalila, Djamel Berkani et Djamel Chabni.

Je dédie cette thèse à la mémoire de mon beau père Amar, et je tiens à remercier ma belle mère Djouheur et tous mes beaux frères Hakim, Kamel, Mourad, Farid, et Mokrane, ainsi mes belles sœurs Karima, Fadhma, Zahia, et Malika.

Je dois aussi exprimer ma profonde gratitude à tous les enseignants du département de génie civil qui m'ont aidé durant mon cursus universitaire.

Pour finir, je dédie ce modeste travail à tous les étudiants de la section LMD-S4 de l'année 2008/2009 au tant que premiers étudiants que j'ai eu au département de Génie Civil. Ainsi je le dédie à tous mes amis.

RESUME :

La modélisation de la fissuration constitue un enjeu irréfutable pour l'analyse et la prédiction des structures en béton armé. La fissuration est l'une des principales causes de déformation et de dommage dans les structures en béton armé. La méthode des éléments finis est la mieux adaptée pour la discrétisation d'un ensemble de matériaux à comportement très différents.

Deux techniques de modélisation des fissures sont utilisées :

La première est la modélisation discrète des fissures, qui modélise la fissure comme une quantité géométrique. Donc par déformation du maillage qui mettent en ordre la propagation des fissures.

La deuxième est la modélisation continue des fissures, qui consiste à modéliser le matériau par un changement des propriétés constitutives des éléments finis.

C'est cette dernière qui sera traitée dans cette étude.

La modélisation en éléments finis est faite à l'aide d'un logiciel de calcul (ANSYS).

A la fin, les résultats obtenus sont ainsi confrontés aux résultats du calcul théorique.

MOT CLES : *Modélisation continue, Modèle non linéaire par éléments finis, Fissuration, Modèle de William et Warnke, ANSYS, Analyse statique.*

ABSTRACT:

Numerical modeling of cracking is of a great importance when considering safety and durability of the reinforced concrete structures. Cracking is one of the leading causes of deformation and damage in the reinforced concrete structures. The finite element method is best adapted for the discretisation of a unity of materials with very different behavior.

Two techniques of modeling of the cracks are used:

The first is the discrete modeling of the cracks, which models the crack like a geometrical quantity. Thus by deformation of the grid which puts in order the propagation of the cracks.

The second is the smeared modeling cracks, which consists in modeling material by a change of the properties constitutive of the finite elements.

It is the latter which will be treated in this study.

Modeling in finite elements is made using a computation software (ANSYS) .

Finally, the results obtained are thus confronted with the results of the hand calculation.

KEY WORDS: *Smeared Model, nonlinear modeling by finite elements, Cracking, Model of William and Warnke, ANSYS, static Analysis.*

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 – INTRODUCTION

1-1-Objectif de la thèse et la méthodologie utilisée dans la recherche

1.2 Objectif de la thèse et la méthodologie utilisée dans la recherche 1

1.3 Organisation de la thèse 2

CHAPITRE 2– RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LE COMPORTEMENT

GENERAL DU MATERIAU BETON ARME

2.1 Le comportement du béton 3

2.1.1 Définition 3

2.1.2 Comportement en compression uniaxiale4

2.1.3 Comportement en traction uniaxiale5

2.1.4 Comportement sous contraintes multiaxiale6

2.2 Le comportement de l'acier7

2.2.1 Définition7

2.2.2 Comportement en traction8

2.2.3 Comportement en compression9

2.2.4 Comportement en cisaillement9

2.2.5 Comportement à la fatigue10

2.3 Le comportement du composite béton – acier10

2.3.1 Généralités10

2.3.2 Description de la rupture d'une poutre en béton armé11

2.3.2.1 Densité de l'armature11

2.3.2.2 Etude de l'état de contrainte et de déformation d'une poutre chargée
en flexion simple12

2.3.2.3 Rupture des pièces en béton à haute adhérence	14
2.3.3 Analyse du comportement non linéaire du béton armé	15
2.3.4 Modélisation du béton armé fissuré	19
2.3.4.1 Introduction de la liaison acier - béton dans le calcul	20
2.3.4.2 Présentation des éléments de contact	20
2.4 CONCLUSION	21
CHAPITRE 3– MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DES	
STRUCTURES EN BETON ARME	
3.1 Introduction	22
3.2 Principe de la Méthode des éléments finis (MEF)	23
3.2.1 Étapes logiques du calcul par éléments finis	23
3.2.2 Introduction des conditions aux limites	24
3.2.3 Discrétisation .Approximation nodale par sous - domaines	24
3.2.4 Règles de partition du domaine en éléments	25
3.2.5 Méthodes numériques	26
3.3 Béton non fissuré et modélisation de son comportement	26
3.3.1 Généralités	26
3.3.2 Surface de charge et la règle d'écrouissage	28
3.3.3 Critères tridimensionnels de plasticité	31
3.3.3.1 Critères isotropes	32
3.3.3.2 Critères anisotropes	34
3.3.4 Relation contraintes - déformations	42
3.3.4.1 Equations incrémentales	42
3.4 Béton fissuré et modélisation de son comportement	47
3.4.1 Généralités	47
3.4.2 Fissuration du béton	47
3.4.3 Modélisation des fissures	48

3.4.3.1 La modélisation discrète des fissures (discret crack model)	48
3.4.3.2 La modélisation continue des fissures (smeared crack model)	49
3.4.4 Critère d’amorçage et de propagation de fissures	50
3.4.5 Fermeture et réouverture de fissure	52
3.4.6 Analyse de la traction	54
3.4.7 Calcul du vecteur de contraintes résiduelles après fissuration	55
3.4.8 Fissuration simple du béton	56
3.4.9 Fissuration double du béton	60
3.4.10 Modélisation des armatures	62
3.4.11 Méthodes d’analyse non linéaire	63
3.5 CONCLUSION	65
CHAPITRE 4– PROGRAMMATION AVEC ANSYS	
4.1 Introduction à ANSYS	66
4.1.1 Introduction	66
4.1.2 Structure du programme ANSYS	66
4.1.3 Organisation générale d’un code de calcul	68
4.1.4 Lancement du logiciel ANSYS	70
4.2 Structure du programme non linéaire	75
4.2.1 Description des modules	77
4.2.1.1 Module 1 : Génération du maillage	77
4.2.1.2 Module 2 : Assemblage des matrices de rigidité et résolution du système d’équations	77
4.2.1.3 Module 3 : Analyse non linéaire	77
4.2.1.3.1 Calcul à la plasticité du béton	78

4.2.1.3.2 Calcul à la fissuration du béton	78
4.2.1.3.3 Calcul à la fissuration des armatures	78
4.3 L'effet de fissuration du béton dans l'analyse par éléments finis	80
CHAPITRE 5– APPLICATION ET DISCUSSION DES RESULTATS	
5.1 Introduction	87
5.2 La modélisation en éléments finis	88
5.2.1 Le béton armé	88
5.2.2 L'acier	88
5.2.3 Critère de rupture pour le béton	89
5.2.4 Introduction des données dans ANSYS	90
5.2.5 La discrétisation en éléments finis	96
5. 2.6 L'analyse non linéaire	97
5.2.7 Pas de charge et détermination de la rupture pour le modèle d'élément finis	98
5.3 But de l'étude	98
5.4 Etude d'une poutre en béton armé :(<i>modèle de fissures continues</i>)	98
5.4.1 Etude d'une poutre maillée grossièrement	98
5.4.1.1 Comportement à la première fissure	99
5.4.1.2 Comportement au delà de la fissuration initiale	100
5.4.1.3 Comportement de l'acier au delà de la charge 90000N	103
5.4.2. Etude d'une poutre maillée raffinement	104
5.4.2.1 Comportement à la première fissure	104
5.4.2.2 Comportement au delà des la fissuration initiale	105

5.4.2.3 Comportement de l'acier au delà de la charge 91000 N	108
5.4.2.4 État de la charge ultime	108
5.4.2.5 Réponse Charge - Déformation	111
5.4.2.6 Les contraintes de Von - Mises	112
5.5 Conclusion	112
ANNEXE : Calcul théorique pour le modèle étudié	113
CONCLUSION GENERALE	117
TABLE DE NOTATIONS.....	118
BIBLIOGRAPHIE	121

TABLEAU DE FIGURES

Figure	Titre de la figure	Page
Figure 2-1	comportement du béton en compression uniaxiale	4
Figure 2-2	comportement du béton en traction uniaxiales	5
Figure 2-3	surface de rupture du béton sous chargement biaxial d'après Kupfer [1969]	6
Figure 2-4	comportement de l'acier en traction	8
Figure 2-5	La première réalisation en béton Armé : Barque de Joseph Louis Brignoles Lambot 1849. Musée de Brignoles	10
Figure 2-6	mode de rupture de la poutre fléchie	12
Figure 2-7	état de contrainte et de déformation de la poutre fléchie	13
Figure 2-8	courbe contraintes – déformations pour le béton	17
Figure 2-9	courbe contraintes – déformations pour l'acier doux	17
Figure 2-10	courbe contraintes – déformations pour l'acier écrouis	18
Figure 2-11	diagramme des contraintes dans la section en béton armé	18
Figure 3-1	Courbe contraintes - déformations pour le matériau béton non fissuré.	27
Figure 3-2	Idéalisation du comportement du béton	28
Figure 3-3	représentation d'une surface de charge constante.	30
Figure 3-4	représentation d'écrouissage isotrope	30
Figure 3-5	représentation d'écrouissage cinématique	31
Figure 3-6	Décomposition d'un vecteur dans l'espace des contraintes principales	31
Figure 3-7	Représentation des critères isotropes Tresca et Von Mises	34
Figure 3-8	Représentation du critère de Mohr	35
Figure 3-9	Représentation de critère de Drucker-Prager et Mohr Colomb Dans le plan des contraintes principales.	36
Figure 3-10	surface de rupture du béton sous les conditions triaxiales	37
Figure 3-11	les trois paramètres du modèle (William et Warncke 1974)	37
Figure 3-12	Transition d'un état élastique à un état plastique.	45
Figure 3-13	Définition du repère local lié à la fissure	48
Figure 3-14	Représentation de modèle de fissures discrètes	49
Figure 3-15	Représentation de modèle de fissures continues	50
Figure 3-16	Modes e sollicitation d'une fissure	51
Figure 3-17	Déchargement élastique et sécant pour un modèle élastique	53

Figure	Titre de la figure	Page
Figure 3-18	Modèle (contraintes - déformations) du béton simplement fissuré	60
Figure 3-19	Contraintes dans le béton doublement fissuré	61
Figure 3-20	Représentation répartie des armatures	62
Figure 3-21	Représentation de la méthode itérative	65
Figure 4-1	Interface graphique du logiciel ANSYS	67
Figure 4-2	Interface graphique du Help d' ANSYS	68
Figure 4-3	Introduction du titre dans ANSYS	70
Figure 4-4	définition du type d'élément dans ANSYS	70
Figure 4-5	Définition des constantes réelles dans ANSYS	71
Figure 4-6	Introduction des propriétés des matériaux dans ANSYS	72
Figure 4-7	Création du modèle dans ANSYS	72
Figure 4-8	le maillage en éléments finis	73
Figure 4-9	Introduction d'incrément de charge dans ANSYS	74
Figure 4-10	Etapes de calcul du programme non linéaire	76
Figure 4-11	Etapes de calcul du vecteur de contraintes résiduelles dues à La fissuration	79
Figure 4-12	Surface de rupture projetée pour le béton	81
Figure 5-1	Solide en béton armé Solid65 – 3-D (ANSYS 8.0)	88
Figure 5-2	le modèle discret et le modèle continu	89
Figure 5-3	la courbe contrainte-déformation du béton en compression	93
Figure 5-4	le modèle d'éléments finis et les conditions aux limites	96
Figure 5-5	l'élément en béton avec le renforcement réparti	97
Figure 5-6	modèle d'éléments finis et les conditions aux limites d'une poutre grosse	99
Figure 5-7	la fissuration initiale de la poutre grosse	100
Figure 5-8	la fissuration de la poutre grosse à la charge 50000 et 60000 N	101
Figure 5-9	Fissuration davantage de la poutre grosse à la charge 70000 et 90000N	102
Figure 5-10	Augmentation des fissures dans la poutre grosse après la fatigue de l'acier	103
Figure 5-11	rupture de la poutre grosse	104
Figure 5-12	Réponse charge- déformation de la poutre grosse en béton armé	105
Figure 5-13	Le modèle d'éléments finis et les conditions aux limites d'une poutre raffinée	106
Figure 5-14	la fissuration initiale de la poutre raffinée	107
Figure 5-15	la fissuration de la poutre raffinée à la charge 50000 et 60000 N	108
Figure 5-16	Fissuration davantage de la poutre raffinée à la charge 70000 et 91000 N	109
Figure 5-17	Augmentation des fissures dans la poutre raffinée après la fatigue de l'acier	110
Figure 5-18	Rupture de la poutre raffinée	111
Figure 5-19	Réponse charge- déformation de la poutre raffinée en béton armé	112
Figure 5-20	Les contraintes de Von-Mises-ANSYS	113

INTRODUCTION GENERALE

L'élément fini est un outil important pour l'analyse des structures en béton armé simples et complexes. Le développement des machines de calcul a permis l'analyse des structures en béton armé plus complexes avec des non-linéarités matérielles et géométriques en utilisant la méthode des éléments finis avec la quantité significative d'exactitude [Zienkiewicz, 2000].

La conception des éléments en béton armé avec déformation de cisaillement a été une matière des investigations étendues de recherches. Pour améliorer l'exécution de cisaillement des composantes du béton structural, plusieurs facteurs ayant l'influence primordiale ont été inclus dans l'analyse. En raison de la demande de la haute qualité dans les constructions en béton modernes, des lois constitutives matérielles pour la conception de cisaillement sont préférées par l'intermédiaire de la formule empirique actuellement utilisée conçoivent dans la pratique. Il y a plusieurs méthodes qui sont spécifiquement conçues pour la caractérisation du comportement matériel et la recherche large a été essayée pour formuler le modèle constitutif pour le béton et le béton armé. Physiquement, la formation des fissures signifie la présence de nouvelles surfaces soumises à des contraintes libres dans un corps donné. D'ailleurs, les fissures causent la redistribution des contraintes et donnent un changement de rigidité dans les éléments.

La littérature présente deux procédures fondamentales, qui peuvent modéliser les fissures du béton structural: (1) le modèle de la fissure discrète; et (2) le modèle de la fissure répartie. Les deux modèles sont généralement mis en application pour l'analyse de la réponse des éléments en béton armé par la méthode des éléments finis. Dans le modèle de la fissure discrète [Ngo et Scordelis ,1967], les fissures sont modélisées en tant que deux surfaces soumises à des contraintes libres adjacentes totalement séparées de l'une par rapport à l'autre. [Rashid, 1968] qui représente le béton fissuré comme un matériau élastique orthotrope avec une réduction du module élastique dans la direction normale du plan de fissure. Avec cette approche les discontinuités locales de déplacement aux fissures sont réparties sur un certain secteur attaché dans l'élément fini et le comportement du béton fissuré peut être représenté par les relations moyennes de contraintes-déformations [Dabbagh, 2006].

La représentation de la fissure répartie est celle employée pour prévoir la localisation de déformations. Pour sa facilité et sa simplicité, le modèle de fissure répartie est le plus utilisé pour l'exécution du programme d'éléments finis. D'une façon générale, on assume une relation

élastique adoucissante dans laquelle une diminution progressive d'effort se produit jusqu'à ce que la fissure soit produite. Pour une évaluation augmentée du comportement structural, il est nécessaire d'adopter une modélisation rigoureuse pour le matériau béton et l'interaction entre l'acier et le béton. Pour l'analyse d'éléments finis en béton armé, plusieurs phénomènes devraient être dans des approches analytiques. La variation des propriétés matérielles avant et après la fissuration est un résultat essentiel.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1-1-Objectif de la thèse et la méthodologie utilisée dans la recherche :

La présente thèse a pour objectif l'étude numérique de l'initiation et propagation des fissures dans l'élément béton armé, dans notre étude nous avons choisi un élément poutre soumis à un chargement incrémental mais maillé différemment afin d'apercevoir l'influence de la finesse du maillage sur la précision des résultats. .

La modélisation en éléments finis est faite à l'aide d'un logiciel de calcul (ANSYS) en utilisant le modèle de fissuration continue. Les résultats obtenus sont ainsi confrontés aux résultats du calcul manuel.

Le critère de William et Warnke sous l'état des contraintes multiaxiales sera adopté pour évaluer l'initiation de la rupture et pour identifier les modes de défaillance correspondants (fissuration, écrasement) au centre d'un élément en béton ou dans ses points d'intégration.

Il existe habituellement deux approches par éléments finis pour simuler la fissuration du béton ; l'approche de la fissure discrète et l'approche de la fissure diffuse (répartie).

On assume que les fissures sont spatialement réparties sur le volume entier représenté par un élément fini local, ou seulement par le volume attaché à un point d'intégration dans l'élément fini. la matrice de rigidité de chaque élément du béton est modifiée en conséquence pour s'adapter à la dégradation mécanique due à la fissuration.

Par conséquent l'approche par fissure répartie est un choix raisonnable dans cette étude pour mettre en application la simulation de la propagation des fissures.

Négliger le transfert des contraintes tangentielles à travers la fissure est une déficience du concept de la fissuration répartie. Non seulement une telle hypothèse peut engendrer des difficultés d'ordre numérique, mais l'expérience a montré que des contraintes tangentielles peuvent apparaître dans le plan de rupture et qu'elles sont dues au contact d'aspérité entre les deux surfaces rugueuses opposées de la fissure.

Pour remédier à cela les chercheurs ont réinséré un pourcentage du module de cisaillement initial G dans le calcul de transfert de contraintes. Le facteur de réduction correspondant est appelé facteur de conservation de cisaillement (ou paramètre de cisaillement) .noté β .

Dans le but de validation du modèle numérique élaboré, résultats de la simulation seront confrontés aux résultats obtenus dans le calcul théorique.

1-2-Organisation de la thèse :

Dans le chapitre II, une étude bibliographique portant sur le comportement du béton armé, des courbes du comportement sous contraintes axiales, biaxiales et multiaxiales en traction et compression seront exposées ainsi une étude historique sur la première utilisation du béton armé et son évolution.

Nous verrons un peu plus loin dans le chapitre III comment modéliser le comportement du béton armé quand il est intact (non fissuré) donc son comportement est régi par des lois de comportement linéaires, et quand il est fissuré, donc son comportement est régi par des lois de comportement non linéaires ce qui nous conduit à exposer les différentes méthodes d'analyse non linéaire et les différents critères de rupture. Il est donc nécessaire d'étudier un élément en béton armé et voir comment les fissurations se propagent, c'est l'objet du chapitre V où une étude numérique détaillée est conçue.

Dans le chapitre IV, une description du logiciel de calcul ANSYS sera exposée ainsi une organisation générale d'un code de calcul détaillée, ensuite nous verrons la structure du programme non linéaire dont les étapes de calcul seront présentées sous forme d'organigrammes.

Le chapitre V concerne l'étude d'un élément poutre en utilisant le modèle de fissures continues ensuite une discussion des résultats sera montrée et des éventuelles répercussions seront consignées.

Enfin une conclusion générale sera transcrite ainsi des références bibliographiques seront exposées.

CHAPITRE 2

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LE COMPORTEMENT

GENERAL DU MATERIAU BETON ARME

2-1- le comportement du béton :

2-1-1-Définition :

Le béton est un matériau qui a la particularité d'être hétérogène à plusieurs échelles, ainsi il est constitué de gravillons et de grains de sable noyés dans une pâte de ciment. Le béton est caractérisé par sa faible résistance en traction d'où la nécessité d'armatures afin de réduire les risques de fissuration.

A cette hétérogénéité de composition vient s'ajouter une hétérogénéité dite structurelle. Elle consiste en l'existence de défauts initiaux (microfissures) au sein de la microstructure. La plupart de ces défauts se situent à l'interface entre les granulats et la pâte de ciment, cette interface constituant le lien le plus faible du matériau. Des microfissures peuvent également être générées dans le ciment par différents facteurs tels que le retrait hydraulique (diminution du volume apparent de la matière) engendré par une évaporation d'eau, le retrait thermique engendré par une variation de température ou une consolidation incomplète du ciment entraînant la formation des microcavités. Lorsque la structure est soumise à une sollicitation, des microfissures supplémentaires peuvent se former suite à des concentrations de contraintes de tension isolées dues à des déformations incompatibles entre les granulats et le ciment. Lorsque ce chargement augmente, les microfissures se développent et se connectent éventuellement entre elles pour former une microfissures entraînant la rupture du matériau.

Le béton présente donc un comportement mécanique très complexe englobant un comportement fortement linéaire sous un état de contraintes multiaxiales, une fissuration progressive induite par des contraintes ou des déformations de tension conjuguée à un adoucissement en déformation et un comportement dépendant du temps tel que le fluage et le retrait.

2-1-2-Comportement en compression uniaxiale :

La courbe caractéristique reliant les contraintes aux déformations obtenue lors d'un essai de compression uniaxiale d'un cylindre en béton est présentée sur la figure 2-1. Elle présente un comportement quasiment linéaire élastique jusqu'à environ 40% de sa résistance limite en compression f_c et devient ensuite non linéaire. Après le pic, la partie croissante de la courbe est indépendante de l'élancement du cylindre (le rapport du diamètre sur la hauteur), et la partie décroissante de la courbe caractérise le régime d'adoucissement du béton jusqu'à ce que la ruine en effondrement apparaisse, dans cette partie l'augmentation de la ductilité est observée expérimentalement avec une augmentation de l'élancement.

Le comportement du béton en compression uniaxiale peut être alors divisé en deux zones :

- ❖ la partie ascendante de la courbe contraintes-déformations décrit le comportement du béton non fissuré (présence uniquement de microfissures non visibles à l'œil nu).
- ❖ La partie descendante de la courbe décrit le comportement du béton fissuré (les fissures sont visibles à l'œil nu).

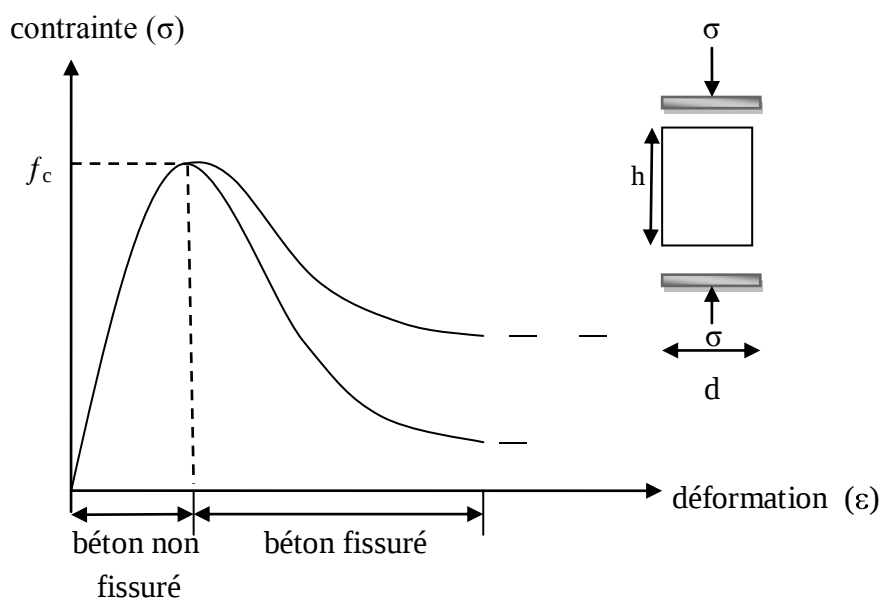


Figure 2-1-comportement du béton en compression uniaxiale.

2-1-3-Comportement en traction uniaxiale :

La courbe contraintes déformations du béton obtenue en traction uniaxiale (figure 2-2) est similaire à celle décrite pour la compression, mis à part le fait que la résistance limite en traction f_t est nettement plus faible que celle en compression ($f_t = 0.1 f_c$), la courbe est linéaire jusqu'à environ 75% de f_t .

Les microfissures commencent à se développer dans la région qui précède le pic, mais s'agrandissent plus rapidement que lors d'un test de compression et donc la rupture survient plus tôt.

Des tests expérimentaux de traction directe d'éprouvettes en béton ont montré que, juste avant le pic, une décohésion des granulats les plus importants apparaissait et que les fissures nées de cette décohésion coalescent ensuite avec les microfissures existantes pour former une macrofissure continue. De plus, les résultats révèlent la présence de nombreux grains reliant les surfaces de la fissure, ce qui explique la branche d'adoucissement de la courbe contrainte-déformation. La ruine des éprouvettes apparaît lors de la rupture de ces grains.

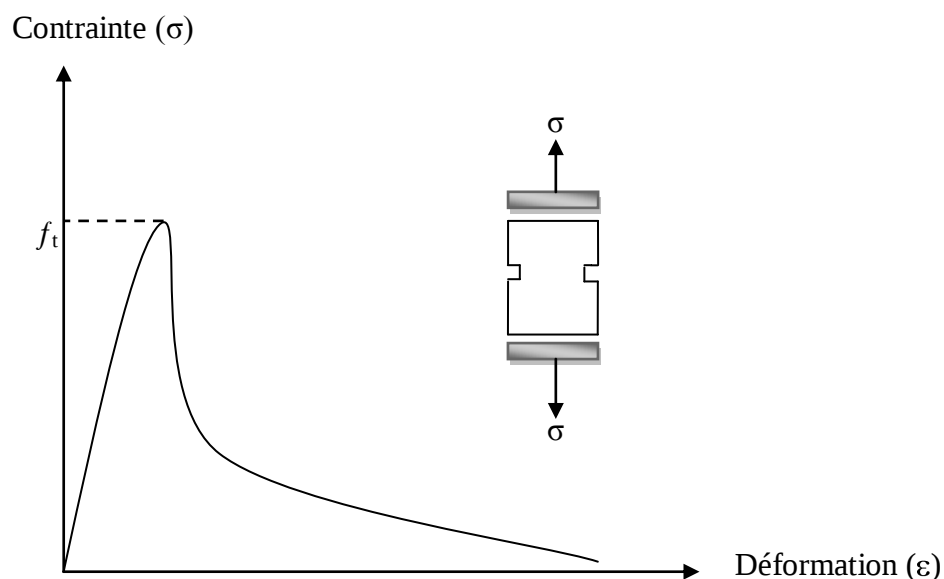


Figure 2-2- comportement du béton en traction uniaxiales.

2-1-4-Comportement sous contraintes multiaxiale :

Le comportement du béton sous sollicitations multiaxiales a mis en exergue la limitation de données expérimentales sur le sujet. Et ce, principalement en raison de la difficulté de mise au point de techniques expérimentales idoines. Celles existantes ne sont juste que des adaptations de méthodes d'essai en dynamique uniaxiales avec confinement.

Les données sur le comportement du béton sous un état de contraintes multiaxiales sont plus rares car les tests expérimentaux sont plus difficiles à mettre en œuvre.

Kupfer & al ont étudié le comportement du béton soumis à des contraintes biaxiales et ont ainsi établi des relations entre les contraintes et les déformations en compression biaxiale, en tension biaxiale et en tension et compression combinées. La figure 2-3 montre les enveloppes des résistances ultimes de différents bétons obtenues par Kupfer et al.

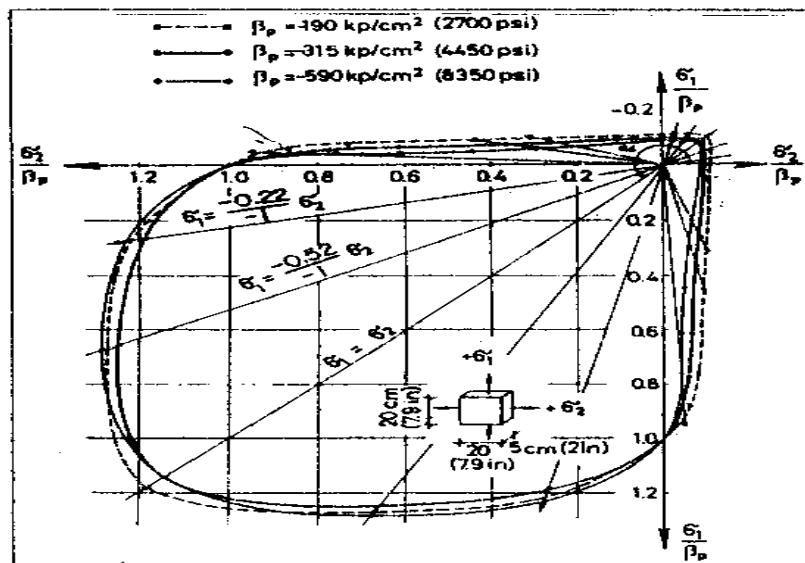


Figure 2-3-Surface de rupture du béton sous chargement biaxial d'après Kupfer et Al [1969]

Avec: (σ_1) et (σ_2) sont les contraintes principales .

B_p est la résistance en compression du béton.

On constate que la résistance ultime du béton sous compression biaxiale est supérieure à celle de la compression uniaxiale. La raison essentielle de cette augmentation est due au confinement des microfissures. La résistance maximale augmente de 25% pour un rapport de contraintes $\sigma_1 / \sigma_2 = 0.5$ et de 16% pour un rapport de contraintes $\sigma_1 / \sigma_2 = 1$ sous un état de compression biaxiale. Dans la zone traction - compression, la résistance à la compression décroît linéairement quand la contrainte de tension augmente. On remarque aussi que la résistance à la tension biaxiale est approximativement égale à la résistance en tension uniaxiale et les courbes contraintes - déformations sont de formes similaires pour les états de traction uniaxiale et biaxiale.

De plus, les enveloppes à la limite d'élasticité et à la rupture ont été établies dans l'espace à deux dimensions des contraintes (figure 2-3). Ces résultats ont été largement exploités pour établir des critères limites et des lois de comportement du béton utilisables dans les codes de calcul par éléments finis.

2-2- le comportement de l'acier :

2-2-1-Définition :

L'acier est un matériau homogène et isotrope, il peut être sollicité de manière identique dans toutes les directions en compression et en traction.

- **Homogène :**

Les cellules qui le composent sont de même nature et répartis de façon uniforme.

- **Isotrope :** Les caractéristiques physiques et mécaniques de l'acier sont les mêmes dans toutes les directions, de sorte qu'il se déforme élastiquement ou plastiquement, et à la limite se rompt, toujours dans les mêmes conditions quelle que soit l'orientation de la microstructure.

2-2-2-Comportement en traction :

La propriété mécanique mise en avant pour l'acier est sa résistance à la traction, elle est liée à la propriété de ductilité du matériau, qui peut subir une grande déformation avant de se rompre. Lorsque l'acier est soumis à un effort de traction, il passe par trois états successifs: le domaine élastique, le domaine plastique et enfin la rupture. Ces trois états sont déterminés à travers une courbe dite de traction.

La figure 2-4 présente la courbe contraintes-allongement d'une éprouvette en acier.

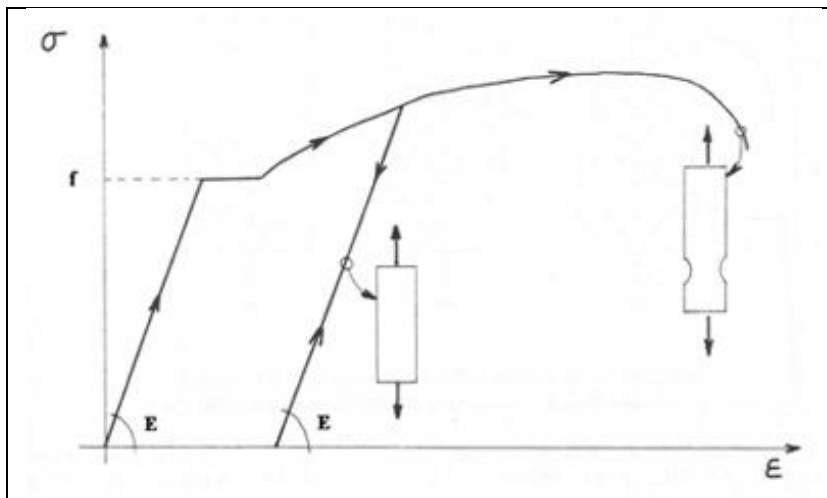


Figure 2-4 : comportement de l'acier en traction

On peut distinguer plusieurs phases dans ce comportement:

- une première phase, **élastique**, où les déformations sont réversibles et proportionnelles à la sollicitation (loi de Hooke).

Lorsque la limite d'élasticité est atteinte, l'acier passe dans le domaine plastique. Cette limite est une caractéristique fondamentale des aciers. La limite d'élasticité est importante à connaître pour le constructeur. On pourra remarquer que pour une même charge, plus le module d'élasticité n'est grand, plus la déformation élastique n'est petite.

- une phase **plastique** où des déformations irréversibles apparaissent. Ces déformations sont très importantes (plusieurs %). Si l'on procède à une décharge puis que l'on sollicite à nouveau le matériau, celui-ci se comporte comme si sa limite élastique était égale au niveau maximal de contrainte atteint avant décharge. C'est ce phénomène que l'on appelle écrouissage. Il peut être utilisé pour augmenter la limite élastique des aciers.

L'acier se déforme jusqu'à la limite de rupture. La propriété associée à cette limite est la limite de résistance à la traction.

Un élément de structure en service ne doit jamais atteindre la limite de résistance à la traction.

- une phase de **striction** qui précède la rupture de l'éprouvette et qui apparaît lorsque l'écrouissage ne compense plus l'augmentation de contraintes causées par la diminution de section. Ce phénomène, instable, se localise dans une section qui diminue alors fortement et où survient la rupture.

L'essai de traction permet à ce niveau de déterminer la propriété de déformation plastique pour mesurer la capacité du matériau à subir des mises en forme. C'est l'allongement à rupture A : allongement maximal admissible avant rupture qui exprime également la ductilité de l'acier, c'est-à-dire la capacité à être déformé, courbé, étiré, etc. sans se rompre.

2-2-3-Comportement en compression :

Le comportement en compression de l'acier est symétrique du comportement en traction. L'acier se raccourcit quand il est comprimé sous l'effet d'une charge. Néanmoins, on parvient rarement dans une structure à une rupture par compression parce qu'entre temps on a lieu à des phénomènes de flambement et de voilement qui provoquent la ruine de la structure avant qu'une sollicitation égale à la résistance à la compression ne soit atteinte .

2-2-4- Comportement en cisaillement :

L'acier est résistant au cisaillement autant qu'en traction et en compression.

Le cisaillement est l'effort de deux forces parallèles, de sens opposés, et très rapprochées, tendant à provoquer le glissement relatif des deux sections de la pièce.

La contrainte de cisaillement est nulle sur les faces et maximale à l'axe neutre.

Contrainte de cisaillement $t = T/S$

S : section de la pièce; T : effort tranchant

2-2-5- Comportement à la fatigue :

Lorsqu'on soumet un matériau à des efforts répétés, alternés et variables, il peut se fissurer et se rompre alors que le niveau de sollicitations est inférieur à la limite de rupture à la traction. Cette perte de résistance qui se produit au cours du temps est appelée « fatigue ».

2-3- le comportement du composite béton-acier :

2-3-1-Généralités:

Le **béton armé** correspond à un assemblage judicieux de matériaux aux caractéristiques Complémentaires : l'acier pour sa capacité à résister aux contraintes de traction et le béton pour sa Capacité à résister à la compression. Le béton étant lui-même un mélange intelligent de granulats, De ciment et d'eau. Le ciment et l'acier résultent quant à eux de processus de fabrication Spécifiques.



Figure 2-5-La première réalisation en béton Armé : Barque de Joseph Louis Lambot 1849. Musée de Brignoles

L'armature du métal dans les mortiers provient des techniques de moulage en sculpture et fut utilisé D'abord par des jardiniers expérimentateurs. Joseph- Louis Lambot à Miraval fabriqua en 1845 des caisses pour Orangers et réservoirs avec du fil de fer et du Mortier, en 1849 une barque armée par un Quadrillage de barres de fer (figure 2-5), et enfin en 1855 il posa un brevet : le "fercement", une combinaison de fer et de mortier pour les constructions navales et les caisses à fleur. Il construisit un canot en 1855 qui passa inaperçu à l'Exposition universelle de Paris. Joseph Monier déposa en 1867, à Paris, une demande pour "un système de caisses bassins mobiles en fer et ciment applicables à l'horticulture". Il réalisa un premier pont bipoutre de 13,80m de portée à Chazelet. Après un long oubli, il fallut attendre l'extrême fin du XIXe siècle pour qu'en France, Hennebique, fasse à nouveau, usage du béton armé, lui donnant un véritable départ.

2-3-2- Description de la rupture d'une poutre en béton armé :

Nous nous intéresserons à l'aspect qualitatif en présentant les différentes phases successives de l'application du chargement jusqu'au stade de la rupture.

2-3-2-1-Densité de l'armature

Une description du mécanisme de la rupture sous deux aspects différents est présentée par A. Guerrin. Selon lui une pièce en béton armé est sujette à la rupture de deux manières différentes selon que la poutre est peu ou fortement armée.

a)- Poutre fortement armé :

Si le pourcentage d'acier est important, la poutre présente des fissures peu ouvertes jusqu'à la fin de l'essai, la rupture intervenant par écrasement brutal du béton comprimé alors que les contraintes dans l'acier restent faibles. C'est le cas appelé rupture fragile, il est surtout à éviter pour la spontanéité de sa survenue et les dégâts qu'il peut causer.

b)- Poutre peu armée :

Si la poutre est armée par des aciers lisses, une à deux fissures voisines s'ouvrent très largement, la poutre se déformant comme si elle était articulée au niveau du béton comprimé (figure 2-6-a). La destruction de la poutre se produit par rupture de l'acier. La très grande ouverture de la fissure

implique un glissement important de l'acier par rapport au béton, donc une rupture d'adhérence. Cette rupture d'adhérence est vraisemblablement facilitée par la striction de l'acier. Par contre si la poutre est armée par des aciers à haute adhérence, la rupture d'adhérence sera évitée et ne peut avoir lieu, et on observera alors des fissures extrêmement nombreuses et peu ouvertes (figure 2-6-b).

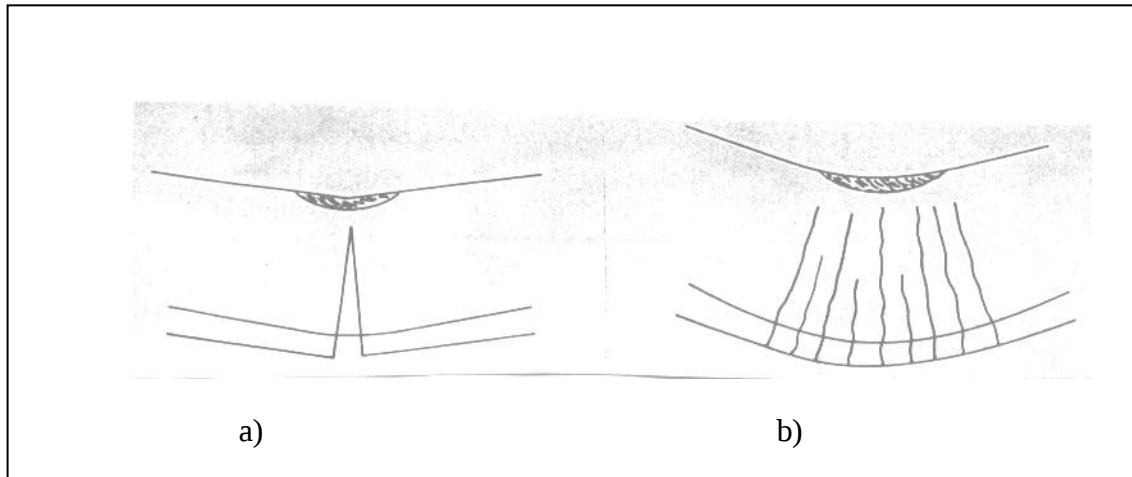


Figure 2-6 : mode de rupture de la poutre fléchie

2-3-2-2- Etude de l'état de contraintes et de déformations d'une poutre chargée en flexion simple :

L'analyse de l'état de contrainte et de déformation d'une pièce chargée en flexion simple dans la zone soumise uniquement à un moment fléchissant est présentée par Baikov et Stronguine. A un certain stade de travail de la poutre, le béton tendu de cette partie présente des fissures normales, c'est-à-dire perpendiculaires à l'axe longitudinal de la poutre. En fonction de la quantité d'armatures dans la zone tendue, ils distinguent deux cas de ruine de la pièce :

a)- Premier cas. Ruine en mode non fragile :

La limite d'élasticité (apparente ou conventionnelle) est atteinte dans l'acier tendu, et la limite de rupture en compression est atteinte dans le béton.

b)- Deuxième cas. Ruine en mode fragile (pièce «sur ferrailée ») :

La limite de rupture en compression est atteinte dans le béton, tandis que la contrainte dans l'acier n'a pas atteint la limite d'élasticité. Les normes en vigueur mettent en gardent le projeteur contre le sur ferrailage car une pièce présentant une proportion d'armatures excessive rompt brusquement sans utiliser complètement la résistance de l'acier travaillant en traction.

De nombreuses expériences ont montré qu'une poutre en béton armé présente dans ses parties exposées à la flexion simple au cours de la croissance progressive de la charge appliquée, trois stades consécutifs d'état de contrainte suivant les sections normales (figure 2-7).

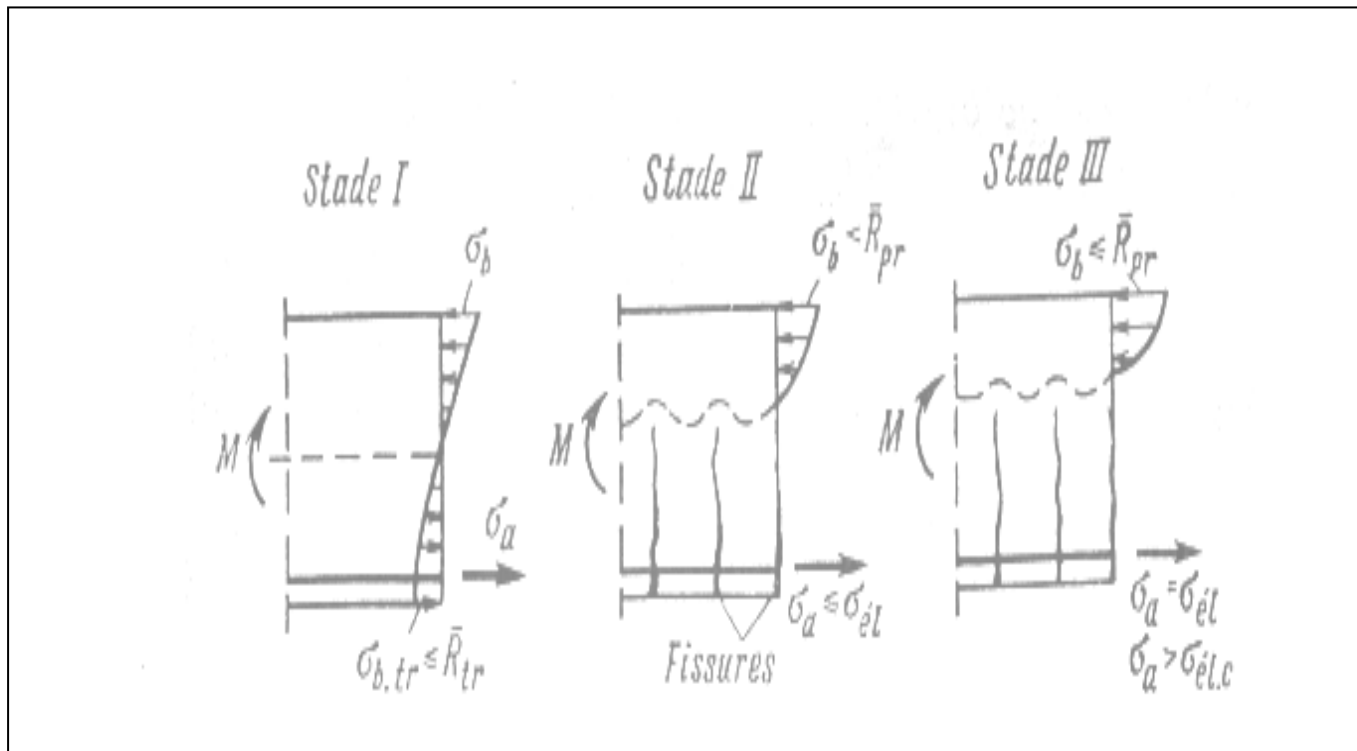


Figure 2-7 : état de contraintes et de déformations de la poutre fléchie

Stade I :

Phase initiale de mise en charge, avant l'apparition des fissures dans la zone tendue du béton. L'acier et le béton s'allongent ensemble grâce à l'adhérence. En fin du stade I le diagramme des contraintes dans le béton tendu travaillant en traction $\sigma_{b, tr}$ devient incurvé, car la relation entre la contrainte et l'allongement relatif cesse d'être linéaire. La plus grande ordonnée devient égale à la charge de rupture du béton en traction (R_{tr} sur la figure 2-7). Dans la zone tendue le diagramme des contraintes σ_b présente un aspect sensiblement triangulaire. Vers la fin de ce stade la pièce est prête à se fissurer. La résistance à la fissuration d'une pièce étant faible, la fin du stade I correspond à des valeurs assez faibles des charges.

Stade II :

La pièce présente des fissures dans le béton tendu. Dans les sections fissurées de la pièce les efforts de traction sont reportés désormais par les armatures. Dans la zone comprimée entre deux fissures voisines, le béton continue à résister à la traction grâce à son adhérence avec l'acier, ce qui fait que les contraintes dans les armatures y sont un peu moins grandes. L'axe neutre de la section occupe donc une position variable suivant la longueur de la poutre. Les contraintes dans le béton comprimé σ_b deviennent très élevées en ce stade ; leur diagramme devient incurvé en raison des propriétés anélastiques du béton. Or la contrainte dans la zone comprimée n'atteint pas encore la valeur de la charge de rupture en compression du béton R_{pr} (voir figure 2-7). Entre deux fissures, le béton subit l'action locale des compressions qui se manifestent dans les sections au-dessus des fissures. C'est la raison pour laquelle les contraintes sont variables dans le béton

compris entre deux fissures voisines, étant légèrement moins grande à mi-distance entre les fissures.

La fin du stade II est marquée par les premières déformations non élastiques visibles de l'acier qui correspondent à la limite d'élasticité.

Stade III :

C'est la phase ultime de la résistance de la pièce aux charges appliquées. La contrainte dans l'acier σ_a devient égale à la limite d'élasticité apparente σ_{el} (voir figure 2-7). La charge devenant encore plus grande, les contraintes dans les armatures cessent de croître si l'acier présente un palier d'écoulement (l'acier s'allonge sensiblement sans augmentation de la contrainte) ou croissent lentement si l'acier n'a pas de palier. Les ordonnées du diagramme en zone comprimée augmentent légèrement et la hauteur de la zone comprimée devient plus petite, ce qui allonge le bras de levier du couple de forces interne. La rupture de la pièce survient par déficience du béton de la zone comprimée au moment où la contrainte du béton σ_b devient égale à sa charge de rupture en compression R_{pr} (rupture en mode non fragile, cas 1). Si la pièce est sur ferraillée elle rompt par déficience du béton comprimé sans que les contraintes de traction dans l'acier atteignent la limite d'élasticité (rupture en mode fragile, cas 2).

2-3-2-3-Rupture des pièces en béton à haute adhérence

T. Tahenni a effectué des essais sur des poutres (référence particulière au béton à haute adhérence) sous l'effet d'un chargement successif et a présenté les différents états de fissuration jusqu'à atteindre la rupture.

a)- Phase de stabilité :

C'est l'étape de la mise en charge de la poutre, avant l'apparition des premières fissures au niveau de la fibre la plus tendue du béton. Durant cette étape la poutre reste stable (non fissurée) grâce à la compatibilité des déformations acier – béton due à la bonne adhérence entre les deux matériaux et la résistance à la traction du béton.

b)- Phase de fissuration :

Sous un chargement précis, le béton tendu présente des fissures verticales de faibles ouvertures. Ce sont des fissures de flexion.

c)- Phase de développement des fissures : Les fissures de flexion formées se développent en largeur et en longueur avec la naissance des autres fissures secondaires.

d)- Phase de rupture :

Le développement des fissures verticales en longueur réduit la zone de compression en poussant l'axe neutre vers le haut.

En remontant vers le haut, l'axe neutre réduit la zone de compression jusqu'à ce que la déformation du béton en compression atteigne sa valeur ultime et l'écrasement du béton se produit. Cependant, avant rupture par écrasement du béton en compression, les fissures ont été très ouvertes et très longues, et donc la rupture est considérée comme étant une rupture par traction (avec beaucoup de ductilité pour les spécimens contenant des fibres).

2-3-3- Analyse du comportement non linéaire du béton armé

Dans la théorie classique du béton armé, on suppose que le béton obéit à la loi de Hooke (matériau élastique linéaire). Cette hypothèse grossière fait que la théorie classique est peu utilisée actuellement et est remplacée par le calcul à la ruine. Pour les bétons à très haute résistance qui se comportent d'une manière pratiquement élastique jusqu'à rupture, l'hypothèse en question est parfaitement justifiée et la théorie classique garde toute sa valeur.

Toutefois pour les bétons ordinaires et à l'issue de nombreux essais et études menés notamment par le Comité Européen du Béton (CEB), la théorie des « états limites » relatives aux pièces en béton armé a été mise au point. Elle permet d'évaluer le moment limite (résistant) d'une section en béton armé.

Les hypothèses de base de la théorie à la rupture sont :

1- La résistance du béton à la traction est supposée nulle.

2- Les sections droites restent planes jusqu'à rupture (loi de Navier). Ceci implique que les allongements d'une fibre restent proportionnels à son ordonnée par rapport à l'axe neutre, ce qui suppose que le diagramme des contraintes dans le béton est homothétique du diagramme contraintes- déformations adopté pour le béton.

3- La loi de Hooke n'est plus respectée. Les diagrammes contraintes- déformations sont les suivants :

Béton (Figure 2-8)

Le diagramme contraintes- raccourcissements est défini par une parabole dont le sommet se trouve à l'abscisse $\epsilon_b=0,002$ prolongée par un palier jusqu'à l'abscisse $\epsilon_b=0,003.5$ raccourcissement maximal à partir duquel apparaît la rupture (diagramme connu sous l'appellation « parabole rectangle »).

Acier doux (Figure 2-9)

Le diagramme est constitué par la loi de Hooke prolongée par un palier d'ordonnée σ_a^* jusqu'à un allongement admis au plus égal à 10 ‰. Ce qui revient à limiter la longueur du palier d'étirage afin d'éviter que l'acier des armatures n'entre dans la zone dangereuse des grands allongements accompagnés d'écrouissage. Dans ce cas là, le calcul manuel devient impossible et la modélisation de la courbe d'écrouissage est obtenue à partir des points expérimentaux en utilisant la méthode des moindres carrés.

Acier écrouis (cas des aciers HA) (Figure 2-10). Le diagramme est constitué par la droite de Hooke jusqu'à la valeur de $0,7\sigma_a^*$ prolongée par la courbe d'équation : $\sigma_a = \sigma_a/E_a + 0,822(\sigma_a^* - 0,7)^5$

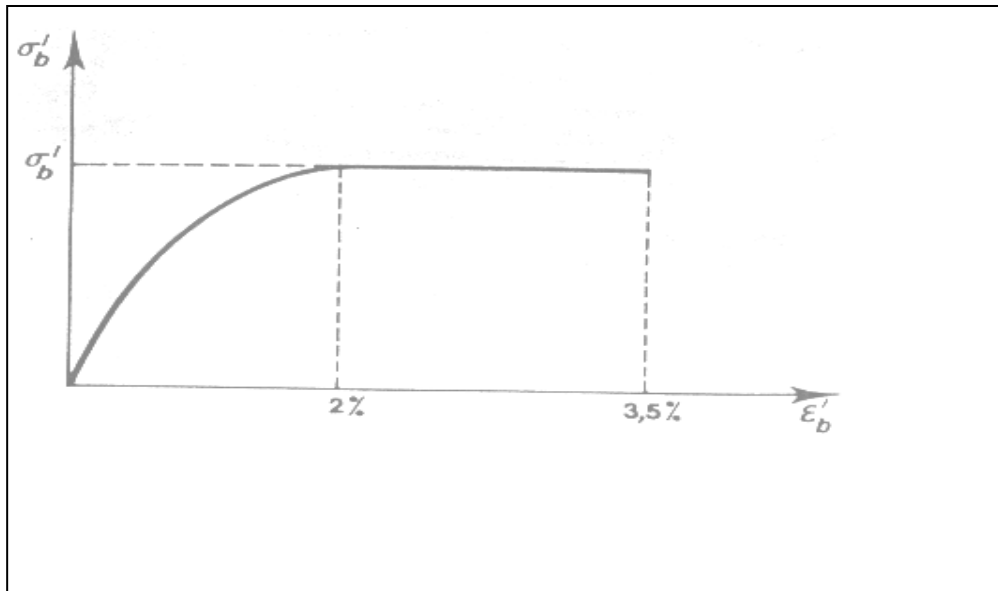


Figure 2-8 : courbe contraintes – déformations pour le béton

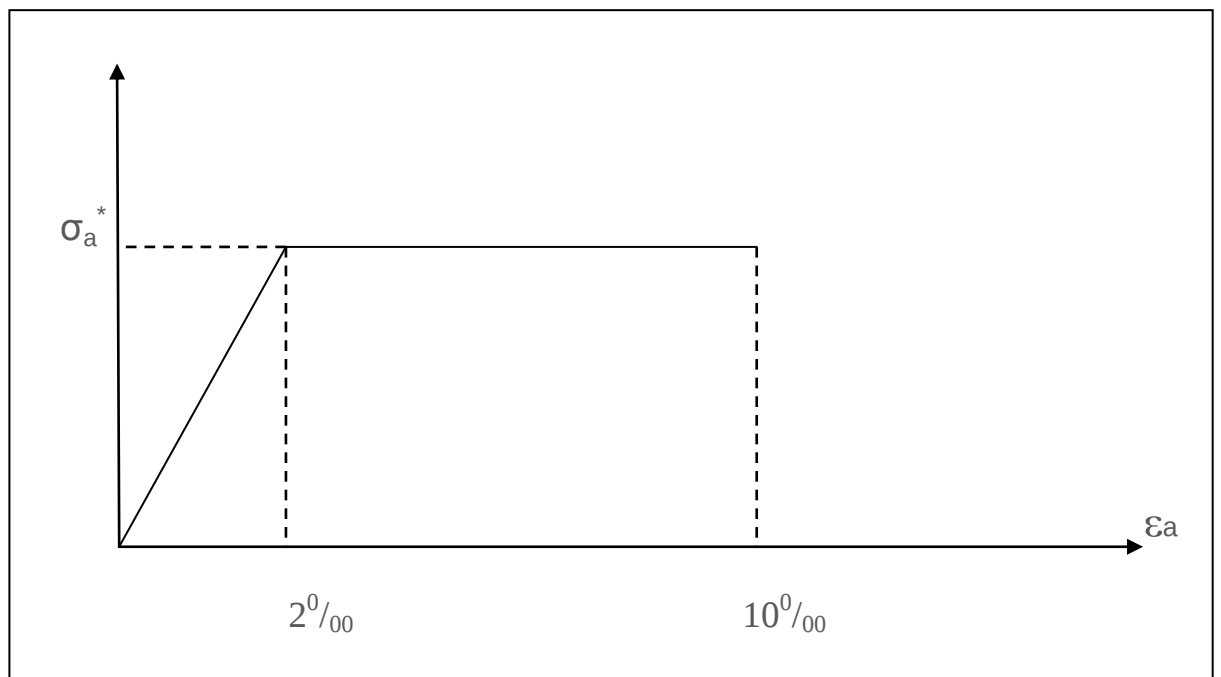


Figure 2-9 : courbe contraintes – déformations pour l'acier doux

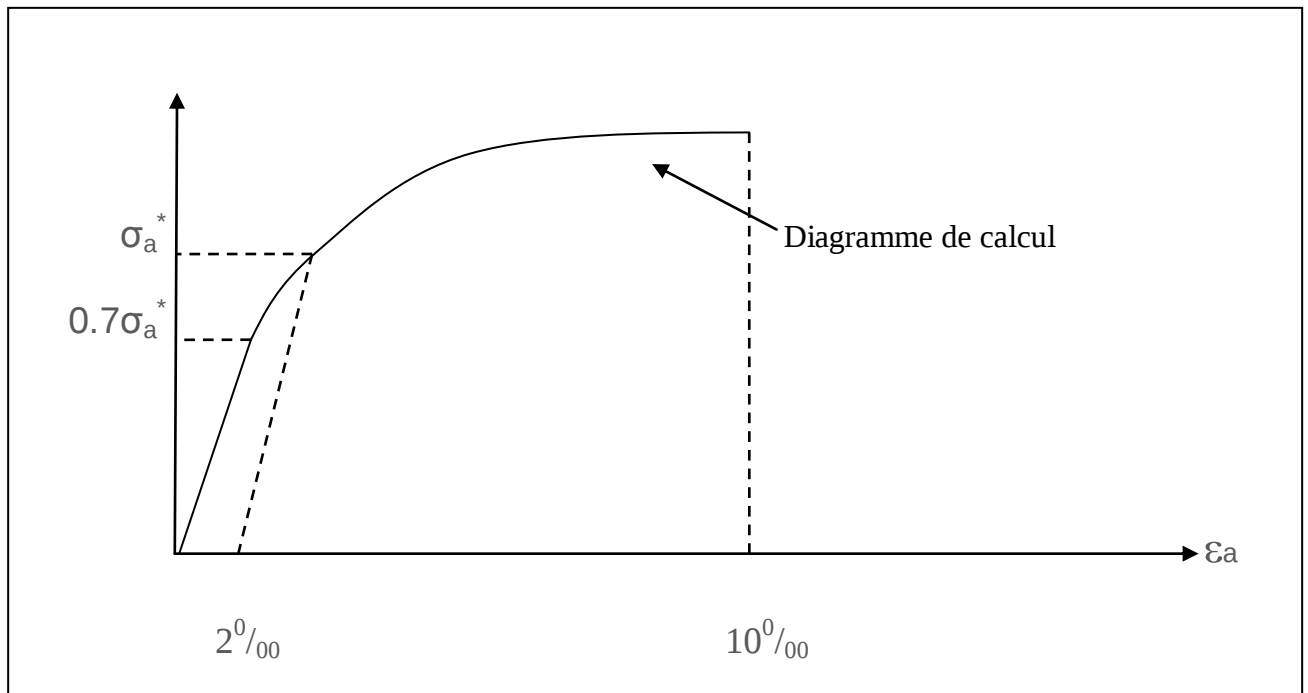


Figure 2-10 : courbe contraintes – déformations pour l’acier écrouis

Remarquons que les diagrammes ainsi définis peuvent difficilement être pris en compte dans un calcul manuel, en particulier le diagramme des aciers écrouis n’est utilisable que sur ordinateur, c’est la raison pour laquelle on utilise généralement des diagrammes simplifiés.

Le diagramme des contraintes dans le béton est remplacé par un diagramme rectangulaire de hauteur y égale à 0,8 fois la hauteur du diagramme théorique parabole rectangle (figure 2-11), le diagramme de l’acier étant celui des aciers doux.

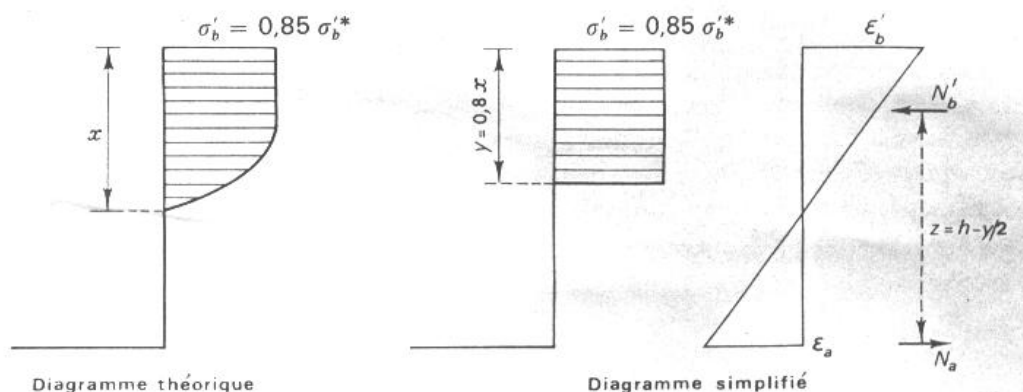


Figure 2-11 : diagramme des contraintes dans la section en béton armé

L'état ultime peut se produire de trois façons différentes :

- a) - L'acier atteint son allongement limite $\varepsilon_a = 10\text{‰}$ sans que le béton n'atteigne son raccourcissement limite ε_{ar}' .
- b) - Le béton atteint son allongement limite ε_{br}' alors que l'acier n'a pas atteint la limite élastique ($\sigma_a < \sigma_e$).
- c) - Le béton atteint son raccourcissement limite, l'acier étant en phase plastique $\sigma_a > \sigma_e$ mais $\varepsilon_a < 10\text{‰}$.

Ce dernier cas correspond à **la solution la plus économique**. Solution laquelle Massonnet a détaillée (les deux autres cas se traitent de façon analogue).

2-3-4-Modélisation du béton armé fissuré

Nous présentons de façon synthétique comment peut être modélisé le comportement d'une structure en béton armé à partir de la méthode des éléments finis selon les derniers travaux de la commission II du CEB dans laquelle a été abordée l'utilisation de la méthode des éléments finis au calcul bidimensionnel des structures en béton armé.

Il est évident que pour traiter ce problème dans son intégralité, il faut tout d'abord s'attacher à déterminer les lois de comportement des matériaux pris séparément, en l'occurrence celles du béton sous chargement biaxial et de l'acier sous chargement monoaxial, mais aussi et surtout celle de la liaison acier-béton qui est beaucoup plus complexe. Nous porterons notre attention surtout sur cette liaison acier-béton et la manière dont on peut la modéliser dans un calcul par éléments finis.

2-3-4-1- Introduction de la liaison acier-béton dans le calcul

La prise en compte dans le calcul numérique de la liaison acier-béton, dépend de la manière dont les éléments acier sont connectés aux éléments béton. Il existe deux manières fondamentalement différentes de modéliser cette liaison :

- a)- On peut utiliser des éléments spéciaux de contact, avec lesquels les caractéristiques de la liaison sont modélisées par la relation contrainte- déplacement de l'élément.
- b)- Les éléments acier et béton peuvent être connectés directement. Cela implique alors l'hypothèse d'une adhérence parfaite entre l'armature et le béton.

Le choix parmi ces deux modélisations de la liaison acier-béton, dépendra du problème spécifique que l'on veut traiter. Dans le cas où le comportement local entre l'armature et le béton doit être correctement apprécié, comme par exemple l'analyse du processus d'ancrage, l'utilisation d'éléments spéciaux de contact sera nécessaire. Par contre pour l'étude du comportement global d'une structure, la liaison directe est utilisée sous l'hypothèse d'adhérence parfaite entre l'acier et le béton.

2-3-4-2- Présentation des éléments de contact

Nous ferons une brève description de certains éléments développés dans la littérature

- a)- Le plus simple est l'élément de liaison développé par Ngo et Scordelis. Il relie un nœud de l'élément béton à un nœud de l'élément acier adjacent. Cet élément de liaison n'a pas de dimension physique et par conséquent les deux nœuds connectés ont les mêmes coordonnées. On peut le représenter en fait par deux ressorts, l'un parallèle et l'autre normal à l'axe longitudinal de la barre d'acier .

- b)- Une deuxième manière de modéliser la liaison acier-béton est l'utilisation d'éléments de contact. Ces éléments développés par Schäfer, réalisent la connexion de tous les nœuds de l'élément acier, avec ceux de l'élément béton adjacent. Cet élément de contact a une dimension finie et possède deux paires de nœuds doubles.

2-4- CONCLUSION :

Après avoir revu sommairement le comportement général du béton sous différents états de sollicitation, on constate qu'il présente deux types de comportement selon l'état de contraintes. Sous des contraintes de tension, il est caractérisé par une rupture brutale accompagnée de petites déformations. Sous des contraintes de compression, il enregistre une rupture ductile. Contrairement au béton, l'acier s'écoule une fois que la contrainte limite élastique est dépassée. Cette propriété est mise à bon escient par les ingénieurs en introduisant l'acier sous forme d'armatures dans le béton. Celles ci jouent un double rôle dans la section du béton. D'une part elles empêchent la propagation des fissures, améliorent la résistance à la traction du matériau béton armé, et d'autre part elles améliorent sa ductilité.

CHAPITRE 3

MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DES STRUCTURES EN BETON ARME

3-1- Introduction :

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour modéliser des structures en béton armé, la méthode des éléments finis est la méthode la plus fréquente. Et pour avoir des résultats rigoureusement satisfaisants il suffit d'introduire les données exactes de chaque matériau considéré. Le développement rapide des techniques d'analyse numériques a fourni aux ingénieurs un outil très puissant d'analyse non linéaire des structures, et ce avec un coût moindre par rapport aux études expérimentales. La méthode des éléments finis est l'une de ces techniques. Elle a été notamment utilisée pour prévoir le comportement des structures jusqu'à la ruine. En compression, les matériaux fragiles ont été considérés comme des matériaux linéaires élastiques. Nilson (1968) a introduit le non linéarité matérielle dans l'analyse en utilisant la résolution par la méthode incrémentale. Quant à la fissuration, elle a été représentée par l'approche dite modèle de *la fissure discrète*. Dans cette approche, quand la contrainte de traction calculée sur deux éléments adjacents dépasse la résistance à la traction du matériau fragile, ces deux éléments sont disjoints le long de leur frontière commune ce qui entraîne la redéfinition du maillage. De plus les éléments triangulaires utilisés ne permettent que des angles de fissures prédéfinis. A cause de ces difficultés numériques, Rashid (1968) a introduit pour la première fois le modèle de *la fissure continue*. Dans cette approche la fissure est représentée mathématiquement. Quand la contrainte de traction calculée en un point de Gauss dépasse la résistance en traction du matériau fragile, le module d'élasticité dans la direction perpendiculaire à la fissure est annulé. Contrairement à l'approche précédente quia le mérite d'avoir une signification physique, cette nouvelle n'en possède pas. Cependant, elle a le mérite d'éviter de redéfinir le maillage et de ne pas fixer au préalable l'angle de la fissure. De plus, Rashid (1968) considère que le matériau fragile est un matériau élastoplastique. Zienkiewicz et al (1972) ont adopté une approche similaire en utilisant des éléments iso paramétriques avec intégration numérique. La deuxième approche est la plus utilisée dans l'analyse des structures par la méthode des éléments finis car elle donne une bonne description de l'état de contraintes et elle évite la redéfinition du maillage. Depuis, des progrès ont été enregistrés d'une part dans la réduction du temps de calcul et d'autre part dans la définition des lois de comportement des matériaux fragiles. Dans ce chapitre on s'intéresse à modéliser le comportement du béton avant et après fissuration.

3-2-Principe de la Méthode des éléments finis (MEF):

La MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (**discrétiser**) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de forme géométrique simple (**éléments finis**) interconnectés en des points appelés **nœuds**.

- Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous **assemblons** ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

- La MEF utilise des **approximations** simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

- Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de **précision de l'approximation**.

3-2-1-Étapes logiques du calcul par éléments finis

- Définir les nœuds et les éléments (Créer le maillage) :
- Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[k^e]$ reliant les degrés de libertés (Déplacements) nodaux $\{u^e\}$ et les forces $\{f^e\}$ appliquées aux nœuds : $[k^e] \{u^e\} = \{f^e\}$
- Construction de la matrice étendue $[K^e]$ et du vecteur étendu $\{F^e\}$ de chaque élément.

$$[K^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k^e] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Addition des matrices et des vecteurs étendus.
- Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $[K]\{U\} = \{F\}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds
- Modifier le système global en tenant compte des conditions aux limites
- Résoudre le système $[K]\{U\} = \{F\}$ et obtenir les déplacements $\{U\}$ aux nœuds
- Calculer les gradients (flux de chaleur, déformations et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont imposées.
- Assemblage $\{k^e\}, \{f^e\} \Rightarrow [K], \{F\}$

3-2-2- Introduction des conditions aux limites : trois méthodes existent

- méthode du terme diagonal dominant ;
- méthode du terme unité sur la diagonal ;
- méthode de suppression des équations ;

3-2-3- Discrétisation -Approximation nodale par sous-domaines :

La construction d'une fonction approchée $U(x)$ est difficile lorsque le nombre de nœuds et donc de paramètres inconnus U_i devient important. Le problème se complique encore si le domaine (V) a une forme complexe et si la fonction $U(x)$ doit satisfaire des conditions aux limites sur la frontière de (V) .

- La méthode d'approximation nodale par sous-domaines simplifie la construction de $u(x)$. Elle consiste à :

1-identifier un ensemble de sous-domaines (V_e) du domaine (V) .

2-définir une fonction approchée $U_e(x)$ différente sur chaque sous- domaine par la méthode d'approximation nodale. Chaque fonction $U_e(x)$ peut dépendre des variables nodales d'autres sous-domaines comme c'est le cas dans l'approximation de type "Spline".

La méthode d'approximation nodale par éléments finis est une méthode particulière d'approximation nodale par sous- domaines qui présente les particularités suivantes :

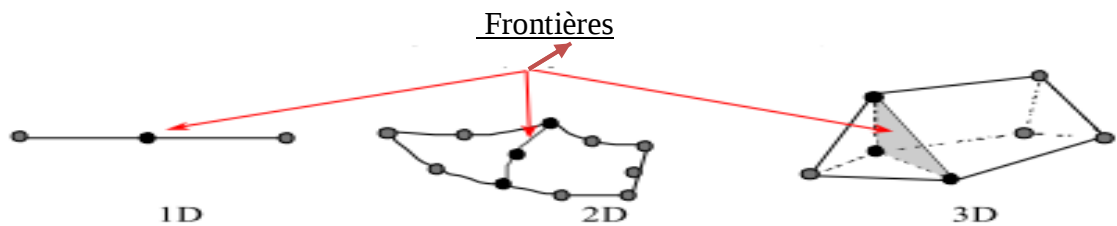
- L'approximation nodale sur chaque sous (V_e) ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur (V_e) et sur sa frontière.

- Les fonctions approchées $U_e(x)$ sur chaque sous-domaine (V_e) sont construites de manière à être continues sur (V_e) et elles satisfont des conditions de continuité entre les différents sous-domaines.

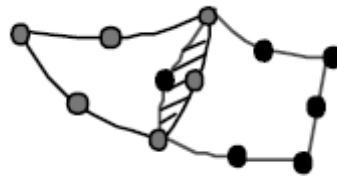
Les sous-domaines (V_e) sont appelés des ELEMENTS connectés par des NOEUDS.

3-2-4 - Règles de partition du domaine en éléments.

- Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des nœuds situés sur leurs frontières si elles existent.



- L'ensemble de tous les éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné.



- Lorsque la frontière du domaine est constituée par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur est inévitable. Cette erreur est appelée "*erreur de discrétisation géométrique*". Elle peut être réduite :

- en diminuant la taille des éléments
- en utilisant des éléments à frontières plus complexes.



- Le recouvrement de deux éléments et les trous entre éléments sont inadmissibles.

Formulation intégrale :

Pour résoudre le système d'équations différentielles avec des conditions aux limites :

$$L(u) + f = 0 \text{ sur un domaine } V$$

$$C(u) = f_s \text{ sur la frontière } S \text{ de } V$$

La meilleure solution est la solution analytique. Mais, en pratique, la méthode analytique est

inapplicable pour des problèmes réels:

- domaine irrégulier
- multi-matériaux
- matériaux anisotropes
- équations non linéaires,

3-2-5- Méthodes numériques :

Trouver des solutions approchées aux points discrets. Les méthodes numériques sont classées en 3 catégories :

- Méthode des différences finies.
 - cette méthode marche plutôt pour des domaines rectangulaires
 - il est très difficile d'écrire un code général pour cette méthode
- Méthode variationnelle
- Méthode des résidus pondérés.

3-3- Béton non fissuré et modélisation de son comportement :

3-3-1- Généralités :

On s'intéresse dans ce paragraphe au comportement du béton non fissuré, on adopte donc une loi de comportement élastoplastique.

Soit à analyser le diagramme contraintes-déformations dans un essai de traction simple sur une éprouvette en béton de section S_0 et de longueur ℓ_0 .

Soient : $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$: l'allongement relatif.

$\sigma = \frac{F}{S_0}$: la contrainte.

L'enregistrement de l'évolution de la force F en fonction de l'allongement relatif ε nous donne la courbe contraintes-déformations représentée sur la figure suivante :

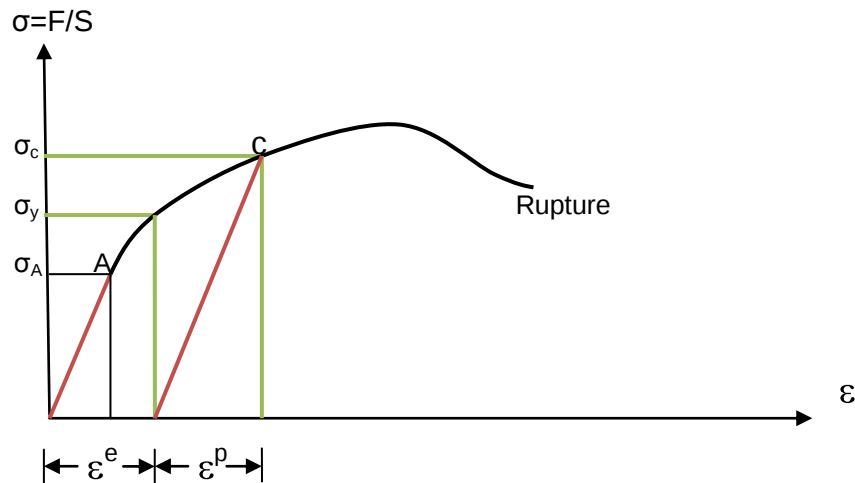


Figure 3-1 : Courbe contraintes - déformations pour le matériau béton non fissuré.

Interprétation :

La droite OA : le comportement est linéaire et réversible $\longrightarrow$ Elasticité linéaire.

L'arc AB : le comportement est non linéaire mais réversible $\longrightarrow$ Elasticité non linéaire.

Au delà du point B (seuil de l'élasticité), si on effectue une décharge au point C, celle-ci suit un chemin

Parallèle à celui d'élasticité linéaire (la droite OA). On constate alors :

-Une déformation résiduelle ϵ , tel que: $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$.

-Une nouvelle contrainte limite σ_c supérieure à σ_y .

On dit qu'il y a : « **écrouissage** ».

On définit donc un module d'écrouissage **H** déterminé comme suit :

Soit $d\sigma$ l'incrément de chargement à partir de l'état actuel tel que :

$$d\sigma = \sigma_0 + \sigma_c. \quad \dots\dots\dots (3-1)$$

$$\text{Avec, } d\sigma = E_t \cdot d\epsilon = E_t (d\epsilon^e + d\epsilon^p) = E_t \left(\frac{d\sigma}{E} + d\epsilon^p \right). \quad \dots\dots\dots (3-2)$$

$$\text{On trouve : } d\sigma = \left[E_t / \left(1 - \frac{E_t}{E} \right) \right] \cdot d\epsilon^p. \quad \dots\dots\dots (3-3)$$

$$\text{D'où le module d'écrouissage } H = E_t / \left(1 - \frac{E_t}{E} \right) \text{ donc } \sigma_c = \sigma_0 + H \cdot d\epsilon^p \quad \dots\dots\dots (3-4)$$

3-3-2- Surface de charge et la règle d'écrouissage :

La surface de charge ou le domaine d'élasticité est une fonction de l'état de contraintes et du paramètre d'écrouissage H qui gouverne son évolution, elle est définie par la fonction de charge

$$F(\bar{\sigma}, k) = f(\bar{\sigma}) - k = 0 \quad \dots\dots\dots (3-7)$$

Avec

k : paramètre d'écrouissage défini expérimentalement.

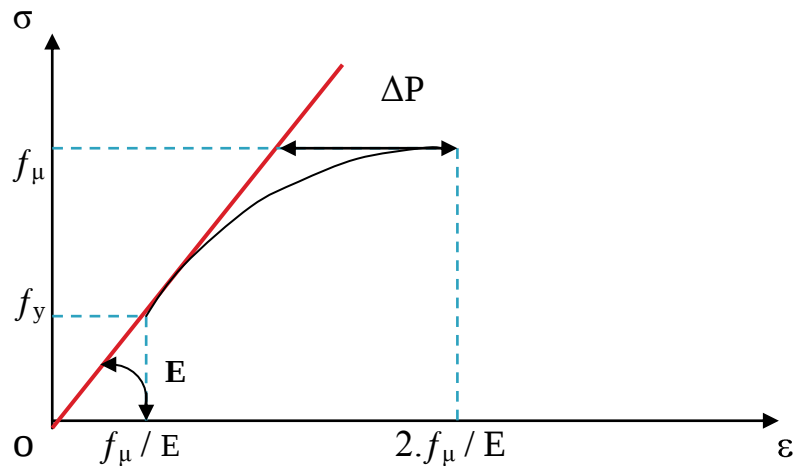


Figure 3-2 –Idéalisation du comportement du béton

On suppose que le matériau béton a un comportement linéaire élastique jusqu'à la limite d'élasticité f_y .

La contrainte effective $\bar{\sigma}$, est considérée comme une fonction de la composante de la déformation plastique dans la courbe uniaxiale contraintes – déformations (figure3.2) et s'exprime en fonction de déformations plastiques multiaxiales moyennant deux méthodes .

Le travail plastique par unité de volume est donné par :

$$dW^p = \bar{\sigma} \cdot d\bar{\epsilon}^p \quad \dots\dots\dots (3-8)$$

La déformation effective plastique, $\bar{\epsilon}^p$, est une simple combinaison des incréments de déformations plastiques.

$$d\bar{\epsilon}^p = c \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \left(d\epsilon_1^p \right)^2 + \left(d\epsilon_2^p \right)^2 + \left(d\epsilon_3^p \right)^2} \quad \dots\dots\dots (3-9)$$

Avec C est une constante.

La relation entre $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ est obtenue en reliant la contrainte à la déformation plastique dans la courbe contraintes – déformations (figure 3-2). Par conséquent, deux méthodes ont été proposées dans la littérature. La première méthode est appelée **Parabole de Madrid** où la courbe uniaxiale contraintes – déformations pour le matériau est assimilée à une parabole.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - \frac{E}{2 \cdot \varepsilon_{\mu}} \varepsilon^2 \quad \dots\dots\dots (3-10)$$

Où E est le module d'élasticité, ε est la déformation totale, ε_{μ} est la déformation ultime correspondant au sommet de contraintes f_{μ}

D'après la loi de Hooke, la déformation élastique s'exprime comme :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \quad \dots\dots\dots (3-11)$$

En substituant l'équation (3-11) dans l'équation (3-10), on trouve :

$$\bar{\sigma} = - E \cdot \bar{\varepsilon}_p + \sqrt{2 \cdot E^2 \cdot \varepsilon_{\mu} \bar{\varepsilon}_p} \quad , \quad 0.3 f_{\mu} < \bar{\sigma} < f_{\mu} \quad \dots\dots\dots (3-12)$$

L'équation précédente donne la relation entre la contrainte effective $\bar{\sigma}$ et la déformation effective $\bar{\varepsilon}_p$.

La deuxième méthode considère la partie non linéaire de la courbe contrainte – déformations comme un quart d'une ellipse. En utilisant l'expression de l'ellipse, la relation entre $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}_p$ s'exprime comme :

$$\left(\frac{\bar{\sigma} - f_y}{f_{\mu} - f_y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta P - \bar{\varepsilon}_p}{\Delta P} \right)^2 = 1 \quad \dots\dots\dots (3-13)$$

La relation elliptique entre σ et ε_p utilisée afin de formuler la relation entre $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}_p$ est :

$$d\bar{\sigma} = H \cdot d\varepsilon_p = \left(\frac{f_{\mu} - f_y}{\Delta P} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta P - \varepsilon_p}{\bar{\sigma} - f_y} \right) \cdot d\bar{\varepsilon}_p \quad \dots\dots\dots (3-14)$$

Avec H étant le paramètre d'écrouissage.

La surface de charge peut être :

- ❖ **Constante** : si la contrainte n'évolue pas avec la déformation $\longrightarrow$ le matériau est parfaitement plastique.

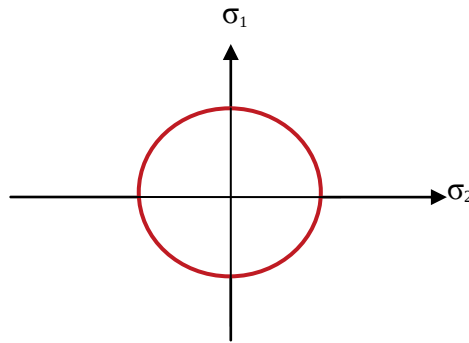


Figure 3-3 : représentation d'une surface de charge constante.

- ❖ **Variable** : si la contrainte évolue avec la déformation $\longrightarrow$ le matériau est plastique avec écrouissage.

Deux cas se présentent :

1-Écrouissage isotrope : On a une expansion de la surface d'écoulement dans l'espace des contraintes sans translation de l'origine.

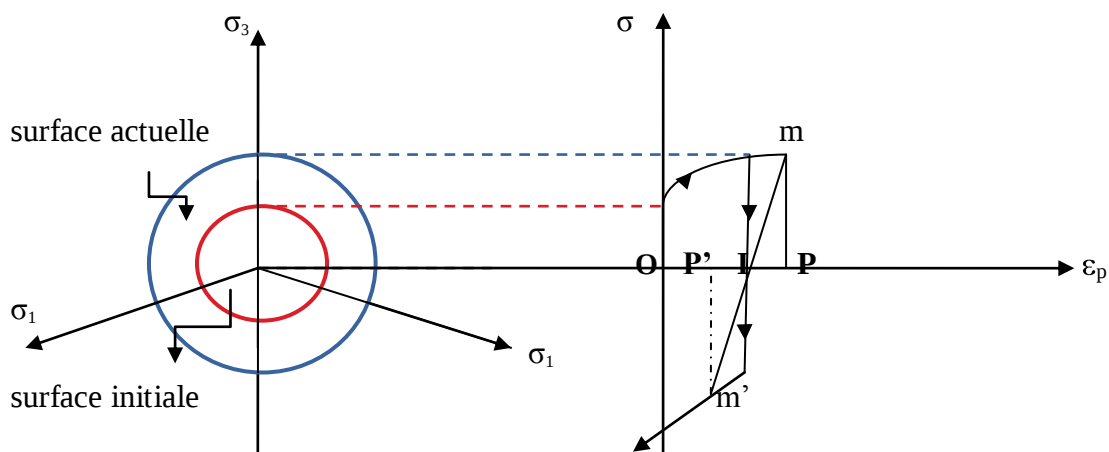


Figure 3-4 : Représentation d'écrouissage isotrope

2- **Écrouissage cinématique ou anisotrope** : On a une translation de la surface de charge dans l'espace des contraintes sans modification de son rayon.

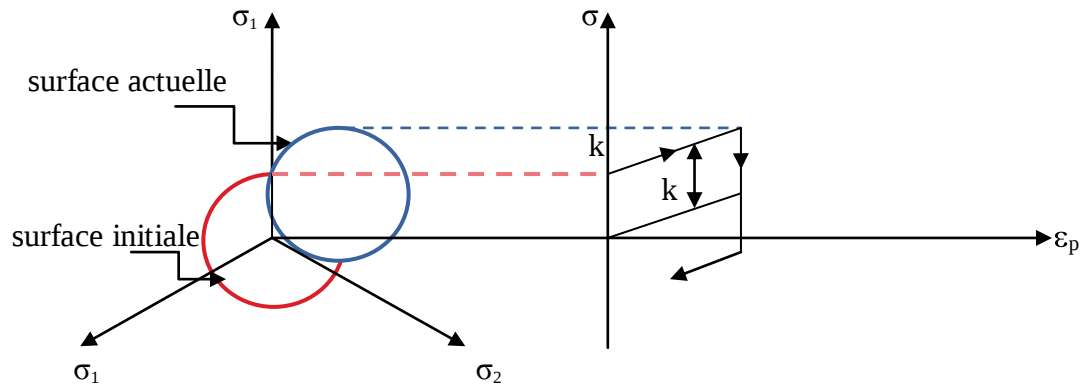


Figure 3-5 : Représentation d'écrouissage cinématique

3-3-3- Critères tridimensionnels de plasticité :

Le principal type de représentation des critères est l'espace de contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 . Cette représentation possède l'avantage d'être valable pour tous les types de critères.

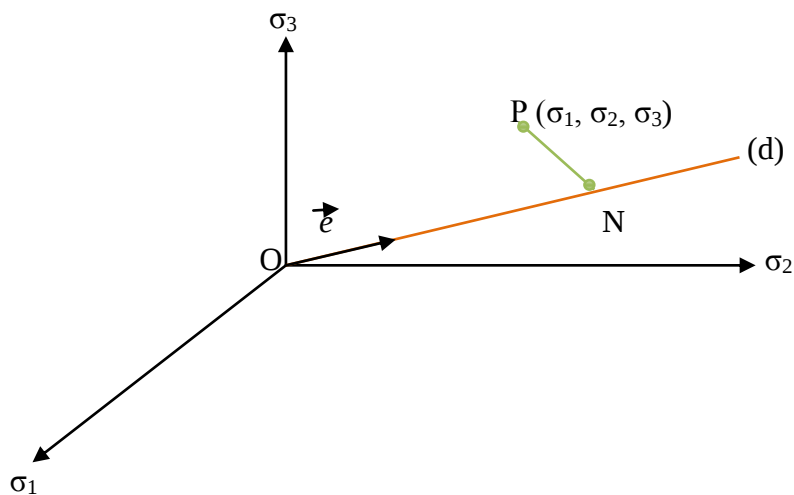


Figure 3-6 : Décomposition d'un vecteur dans l'espace des contraintes principales.

Le segment porté par la diagonale (d) représente l'axe hydrostatique ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$).

Le vecteur unitaire $\vec{e}$ le long de cette diagonale est donné par l'expression suivante :

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1 \quad 1 \quad 1 \rangle \dots\dots\dots (3-14)$$

Le point P appartient à un plan perpendiculaire en N à l'axe hydrostatique. Ce plan est appelé plan octaédrique. Lorsque le point N sera en O, le tenseur sera purement déviatorique, le plan est appelé plan déviatorique.

La relation géométrique donne :

$$\vec{OP} = \vec{ON} + \vec{NP} \dots\dots\dots (3-15)$$

Le vecteur $\vec{OP}$ se décompose en deux parties : la partie hydrostatique est définie par le vecteur $\vec{ON}$ et la partie déviatorique est représentée par le vecteur $\vec{NP}$.

Le critère de plasticité définit le domaine dans l'espace des contraintes à 3 ou 6 dimensions, à l'intérieur duquel toute variation de contraintes n'engendre que des variations de déformation élastique. La modélisation mathématique de ce domaine dépend de la terminologie concernant l'isotropie ou l'anisotropie du critère de limite d'élasticité et de l'écrouissage.

On définit alors deux critères :

3-3-3-1-Critères isotropes :

Ce sont ceux qui correspondent à des états d'écrouissage isotrope .L'équation de la frontière du domaine fait intervenir à priori toutes les composantes du tenseur des contraintes et la variable d'écrouissage ,qui se réduit à une variable scalaire dans le cas de l'écrouissage isotrope. Soit $\sigma_s = k$, la variable seuil de plasticité en traction simple, on définit deux critères isotropes :

1- Critère de contraintes de cisaillement de Tresca (1870) :

Dans ce critère le seuil de plasticité n'est pas lié à l'énergie élastique de cisaillement mais à la contrainte de cisaillement, et le domaine d'élasticité est défini dans l'espace des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Le critère s'écrit :

$$f(\bar{\sigma}, k) \leq 0 \rightarrow \forall i, j \in [1, 3] \max |\sigma_i - \sigma_j| - k \leq 0 \quad \dots\dots\dots (3-15)$$

On définit la contrainte de Tresca σ_T tel que : $\sigma_T = \max |\sigma_i - \sigma_j| \quad \dots\dots\dots (3-16).$

Le critère est appelé critère de cisaillement maximal, tel que la contrainte tangentielle maximale τ est égale à : $\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|$, avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. $\dots\dots\dots (3-17)$

Le comportement reste élastique si $\tau \leq \tau_{\max}$

Dans l'espace des contraintes principales le critère de Tresca est représenté par un prisme droit à base hexagonale dont l'axe est la trisectrice du repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, il est inscrit dans le cylindre de Von Mises comme montré sur la figure (3-7).

2- Critère de Von Mises (1910) :

Dans ce critère on considère que le seuil de plasticité est lié à l'énergie élastique de cisaillement. Cela revient à négliger l'influence du troisième invariant et à prendre une expression linéaire pour la fonction f .

❖ Ce critère est généralement utilisé pour les métaux.

On a $\forall P \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \in De \quad \dots\dots\dots (3-18)$

En utilisant le déviateur des contraintes :

$$\bar{\sigma}_d = \bar{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \cdot \bar{1} \quad \dots\dots\dots (3-19)$$

Dans un essai de traction $k = \sqrt{2/3} \sigma_0$

Critère de Von Mises s'écrit $\bar{\sigma} : \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\sigma}_d : \bar{\sigma}_d} - \sigma_s \leq 0 \quad \dots\dots\dots (3-20)$

Dans l'espace des contraintes à 3 dimensions

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_s \quad \dots\dots\dots (3-21)$$

C' l'équation d'un cylindre à base circulaire axé sur la trisectrice du repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

La contrainte de Von Mises est donnée par :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} \quad \dots\dots\dots (3-22)$$

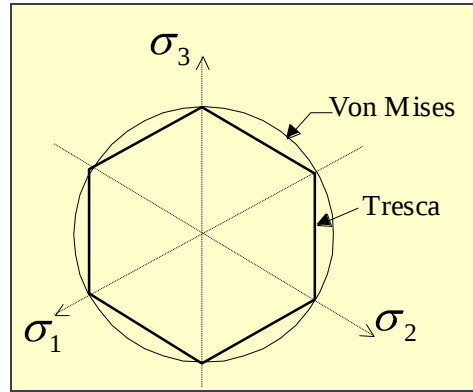


Figure 3-7 : Représentation des critères isotropes Tresca et Von Mises.

Remarque :

- Tresca est plus Sévère de 13 %.
- Les métaux très ductiles étant plus proches du critère du Tresca.

3-3-3-2-Critères anisotropes :

Ce sont ceux dont l'expression ne peut se réduire à une fonction des seuls invariants. Des directions privilégiées d'anisotropie interviennent. Dans le cas du matériau plastiquement incompressibles les critères anisotropes classiques font intervenir une rotation dans l'espace des contraintes, on définit plusieurs critères anisotropes, parmi eux on peut citer :

1-Critère de Hill :

Ce critère plus subtil, il correspond à une anisotropie particulière qui conserve trois plans de symétrie dans l'état d'écrouissage du matériau. Les intersections de ces trois plans sont les axes principaux d'anisotropie qui sont pris comme repère pour l'écriture du critère.

Principe de Hill : $\forall \bar{\sigma} \in \text{Domaine d'élasticité } D_p > \bar{\sigma} : d\bar{\epsilon}_p$

Avec $D_p = \bar{\bar{d\sigma}} : \bar{\bar{d\epsilon_p}}$ (dissipations plastiques $\bar{\bar{d\epsilon_p}}$ associée à $\bar{\bar{d\sigma}}$)

$d\epsilon_p$ est normal à la surface de charge.

2- Critère de Mohr – Coulomb :

Ce critère est utilisé pour les sols et les milieux granulaires, il permet de tenir compte de la cohésion du matériau. il possède une représentation particulièrement simple dans le plan de Mohr.

Ce critère est régi par l'équation :

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin\Phi - 2C \cos\Phi \quad \dots\dots\dots (3-23)$$

Avec : C est la cohésion ;

Φ est le frottement interne du matériau ;

Si C est nul et Φ est non nul, on a un matériau pulvérulent.

Si C est non nul et Φ est nul, on a un matériau cohérent.

-On définit la poussée K_p et la limite d'élasticité en compression R_p :

$$K_p = \frac{1+\sin\Phi}{1-\sin\Phi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right)$$

$$R_p = \frac{2C\cos\Phi}{1-\sin\Phi}$$

On aura donc :

$$f(\sigma) = K_p \sigma_1 - \sigma_3 - R_p \quad \dots\dots\dots (3-24)$$

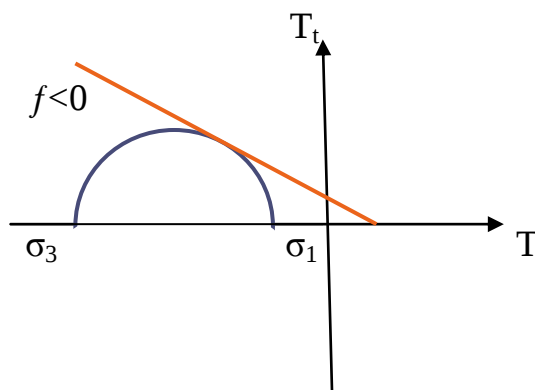


Figure 3-8 : Représentation du critère de Mohr

3- Critère de Drucker – Parger :

Ce critère est utilisé pour le béton et les milieux poreux, il permet de tenir compte de l'influence de la pression sur les déformations. Il se présente dans l'espace des contraintes principales par un cône.

Soit $f(\sigma)$ donnée par :

$$f(\sigma) = (1-\alpha) J + \alpha I_1 - \sigma_y \quad \dots\dots\dots (3-25)$$

Avec : $J = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$ (3-26)

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad \dots\dots\dots (3-27)$$

Le coefficient α est compris entre 0 et 0.5.

L'illustration du critère est donnée par la figure (3-9) :

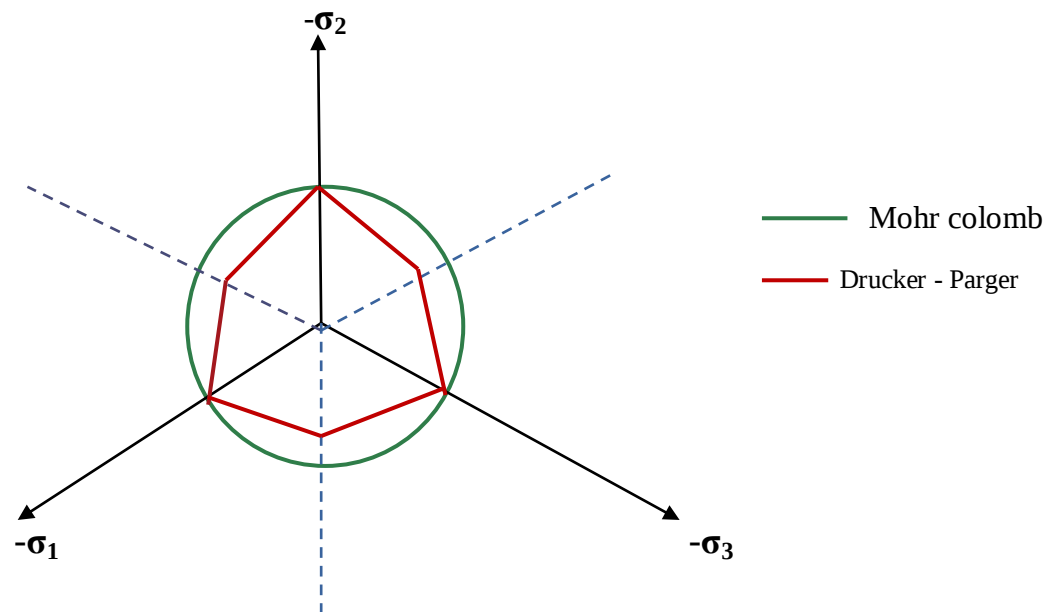


Figure 3-9 : Représentation de critère de Drucker-Prager et Mohr Colomb
Dans le plan des contraintes principales.

4- Critère de Tsai :

Ce critère permet justement de prendre en compte les différences éventuelles d'état d'écrouissage en traction et compression. Sous sa forme la plus générale il s'exprime comme la somme d'une forme linéaire et d'une forme quadratique des 6 composantes des contraintes.

Ce critère est assez représentatif de la limite d'élasticité des matériaux composites fibre-résine et de bois.

5- Critère de William – Warnke (1974):

En 1974 Willam et Warnke ont développé un modèle largement utilisé pour la surface de rupture triaxiale du matériau béton. La surface de rupture dans l'espace des contraintes principales est montrée sur la figure (3-10).

Le modèle mathématique considéré est un sextant dans l'espace des contraintes principales en effet les contraintes principales sont ordonnées selon $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. La surface de rupture est divisée en surface **hydrostatique** (change de volume) et surface **déviatorique** (Change de forme). Comme il est montré sur la figure (3-11) la surface forme un plan méridien qui contient l'équisectrice.

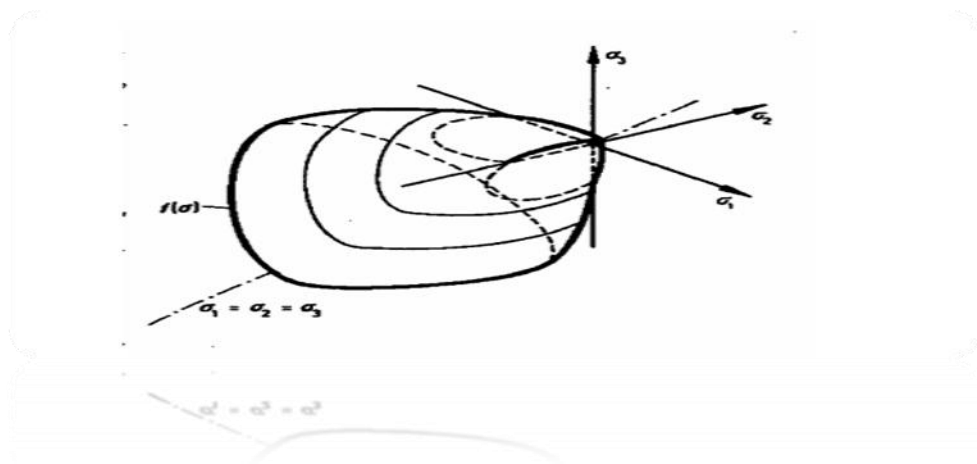


Figure 3-10- surface de rupture du béton sous les conditions triaxiales.

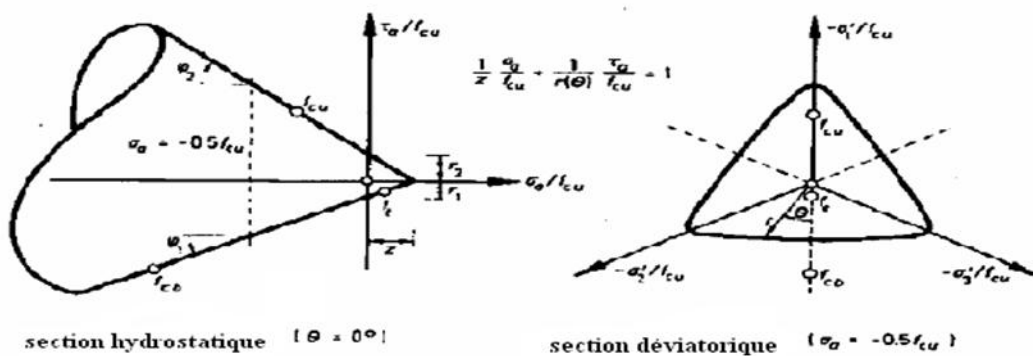


Figure 3-11- les trois paramètres du modèle (William et Warnke 1974)

Le tracé dévia torique est décrit par les coordonnées polaires r et θ où r le vecteur position localisant la surface de rupture avec l'angle θ .

La surface de rupture est définie comme suit :

$$\frac{1}{z} \frac{\sigma_a}{f_{cu}} + \frac{1}{r(\theta)} \frac{\tau_a}{f_{cu}} = 1$$

Avec : (3-28)

σ_a et τ_a = composantes de la contrainte moyenne.

f_{cu} = résistance à la compression uniaxiale.

Les angles d'ouverture du cône hydrostatique sont définis par φ_1 et φ_2 .

Les paramètres de la surface d'ouverture z et r sont identifiés à partir de la résistance à la compression uniaxiale f_{cu} , la résistance à la compression biaxiale f_{bc} et la résistance à la traction uniaxiale f_t .

Le modèle mathématique de Willam et Warnke (1974) de la surface de rupture pour le béton a les avantages suivants :

- 1- Ajustement des données expérimentales dans la plage de fonctionnement.
- 2- identification simple des paramètres du modèle à partir des données d'essai standard.
- 3-douceur (par exemple surface continue avec continuité des contraintes tangentielles sans interruption).

4-convexité (par exemple surface monotonement courbée sans points d'inflexion).

«Le modèle constitutif pour le béton basé sur les critères de Willam et Warnke 1974 assure une description appropriée de la rupture du matériau».

6- Critère de Nadai :

La surface limite de Nadai

de type Drucker- Prager [6] se traduit par deux équations suivantes, en fonction des contraintes octaédrales σ_{oct} et τ_{oct} :

- En compression biaxiale :

$$\tau_{oct} + \sqrt{2} \cdot \frac{\beta - 1}{2 \cdot \beta - 1} \cdot \sigma_{oct} - \frac{\sqrt{2} \cdot \beta}{3 \cdot \beta - 1} \cdot f_{\mu} = 0 \quad \dots\dots\dots (3-29)$$

$$\sigma_1 < 0 \quad \text{Et} \quad \sigma_2 < 0$$

- En traction biaxiale et en traction – compression

$$\tau_{oct} + \sqrt{2} \cdot \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot \sigma_{oct} - \frac{2\sqrt{2} \cdot \alpha}{3 \cdot (1+\alpha)} \cdot f_{\mu} = 0 \quad \dots\dots\dots (3-30)$$

$$\sigma_1 > 0 \quad \text{et / ou} \quad \sigma_2 > 0$$

Avec :

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \quad ; \quad \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

$$\alpha = \frac{f_t}{f_c} : \text{étant le rapport de la résistance du matériau en traction simple à la résistance en}$$

compression simple,

$$\beta = \frac{f_{\mu}}{f_c} : \text{étant le rapport de la résistance maximale du matériau en compression biaxiale}$$

(pour $\sigma_1 = \sigma_2$) à la résistance en compression simple. Les essais de Kupfer montrent que les coefficients α et β sont respectivement voisins de 0,1 et 1,16.

La surface de charge est déduite de la surface limite en compression biaxiale comme :

$$\tau_{oct} + a \cdot \sigma_{oct} + b \cdot f_c \cdot H = 0 \quad \dots\dots\dots (3-31)$$

Où

$$a = \frac{\sqrt{2} \cdot (\beta - 1)}{2 \cdot \beta - 1} \quad ; \quad b = \frac{\sqrt{2} \cdot \beta}{3 \cdot (\beta - 1)} \quad \text{et } H \text{ étant le paramètre d'écrouissage.}$$

Calcul de l'expression du vecteur normal à la surface de charge

On assume que la fonction de charge a la même forme que celle de critère de Nadai. Il suit que l'expression du vecteur normal à la surface de charge s'écrit comme :

$$\vec{a} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad \dots\dots\dots (3-32)$$

L'équation (3-31) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$F(\tau) = \tau_{oct} + a \cdot \sigma_{oct} + b \cdot \bar{\sigma} = 0 \quad \dots\dots\dots (3-33)$$

D'où :

$$\bar{a} = \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \sigma_1} + a \cdot \frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \sigma_1} \quad \dots\dots\dots (3-34)$$

Sachant que :

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \sigma_1} \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \sigma_2} \cdot \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_1} \quad \dots\dots\dots (3-35)$$

Les expressions de la résistance des matériaux donnent :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

D'où :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \right) \quad \dots\dots\dots (3-36)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \vec{a}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau_{xy}} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3-37)$$

De même raisonnement, on trouve :

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial \vec{a}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_x} \\ - \frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau_{xy}} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3-38)$$

D'autre part, on a :

$$\frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \sigma_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \vec{a}} + \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \vec{a}} \dots\dots\dots (3-39)$$

Sachant que :

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2)}}{3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \sigma_1} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)}{6\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}} \\ \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \sigma_2} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sigma_2 - \sigma_1)}{6\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}} \end{array} \right. \dots\dots\dots (3-40)$$

Après substitution des équations (3-35), (3-36), (3-37), (3-38), (3-39) et (3-40) dans l'équation

(3-34), on trouve facilement l'expression analytique du vecteur normal $\vec{a}$.

L'équation (3-33) montre que : $b = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}$

3-3-4- Relation contraintes-déformations :

3-3-4-1- Equations incrémentales

Le vecteur incrémental de déformations plastiques est donné par la règle de flux comme :

$$d\epsilon^p = d\lambda \cdot \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}$$

Avec g étant le potentiel plastique.

Du moment qu'on aborde le comportement du matériau fragile dans le cadre de la plasticité associée

($g \approx f$), l'incrément de déformation plastique s'écrit :

$$d\epsilon^p = d\lambda \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} = d\lambda \cdot \bar{a} \quad \dots\dots\dots (3-41)$$

En substituant l'équation (3-41) dans l'équation (3-9), on trouve :

$$d\bar{\epsilon}_p = d\lambda \cdot A \quad \dots\dots\dots (3-42)$$

Où A est un scalaire défini par la relation suivante :

$$A = \sqrt{\bar{a}^T \cdot \bar{a}}$$

En remplaçant la valeur de $d\lambda$ dans l'équation (3-41), on obtient :

$$d\epsilon^p = d\bar{\epsilon}_p \cdot \frac{\bar{a}}{A} \quad \dots\dots\dots (3-43)$$

Le vecteur incrémental de contraintes est donné par :

$$d\sigma = [D] \cdot d\epsilon^p \quad \dots\dots\dots (3-44)$$

Où $d\epsilon$ représente le vecteur total de déformations, $d\epsilon^p$ le vecteur de déformations plastiques et $[D]$ étant la matrice d'élasticité est donnée comme :

$$\mathbf{p}^- = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-45)$$

Avec :

E : Le module d'élasticité,

ν : Le coefficient de poisson.

L'équation (3-44) peut s'écrire sous la forme condensée comme :

$$d\sigma = \mathbf{p}^{\overline{ep}} \cdot d\epsilon \dots\dots\dots (3-46)$$

Posant :

$$\mathbf{p}^{\overline{ep}} = \mathbf{p}^- + \mathbf{p}^{\overline{p}} \dots\dots\dots (3-47)$$

Avec :

$\mathbf{p}^{\overline{ep}}$: étant la matrice élastoplastique,

$\mathbf{p}^-$: étant la matrice d'élasticité,

$\mathbf{p}^{\overline{p}}$: étant la matrice plastique.

L'équation constitutive de la fonction de charge s'exprime par la relation suivante :

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \overline{\sigma}} \cdot d\overline{\sigma} = 0 \dots\dots\dots (3-48)$$

En substituant la valeur de $d\sigma$ dans l'équation (3-48), on aura :

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \mathbf{p}^{\overline{ep}} d\epsilon + \frac{\partial f}{\partial \overline{\sigma}} \cdot d\overline{\sigma} = 0 \dots\dots\dots (3-49)$$

En substituant $d\overline{\sigma}$ donnée par l'équation (3-14) dans l'équation précédente, on trouve :

$$-\frac{\partial f}{\partial \overline{\sigma}} \cdot H \cdot d\overline{\epsilon}_p = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{p}^{\overline{ep}} d\epsilon^p$$

L'équation (3-43) donne :

$$d\bar{\varepsilon}_p = \frac{A}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \cdot d\varepsilon^p$$

D'où :

$$-\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\mathbf{A}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \left[\mathbf{d}_{\mathcal{E}}^p \right] \left\{ \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \left[\mathbf{p}_{\mathcal{E}} \right] \left[\mathbf{d}_{\mathcal{E}}^p \right] \right\}$$

Ce qui donne :

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{p}^- = \frac{\bar{a} \cdot \bar{a}^T \mathbf{p}^-}{\bar{a}^T \mathbf{p}^- - A \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \text{H}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{p}^- \quad (3-50)$$

En substituant la valeur de $\delta \varepsilon^p$ dans l'équation (3-44), on trouve :

$$\left\{ \left[\mathbf{p}_-^T \frac{\mathbf{p}_-^T \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{p}_-^T}{\bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{p}_-^T \bar{\mathbf{a}} - A \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} H} \right] \right\} \dots \quad (3-51)$$

D'où :

$$\mathbf{p}_{-}^{\bar{p}} = \frac{\mathbf{p}_{\bar{a} \cdot \bar{a}^T} \mathbf{p}_{-}^{\bar{p}}}{\bar{a}^T \mathbf{p}_{\bar{a} - A \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} H}} \dots \dots \dots (3-52)$$

Si la condition $f(\sigma) < 0$ n'est pas vérifiée alors le comportement du matériau devient plastique. Ceci est illustré graphiquement (figure 3.12) suivante :

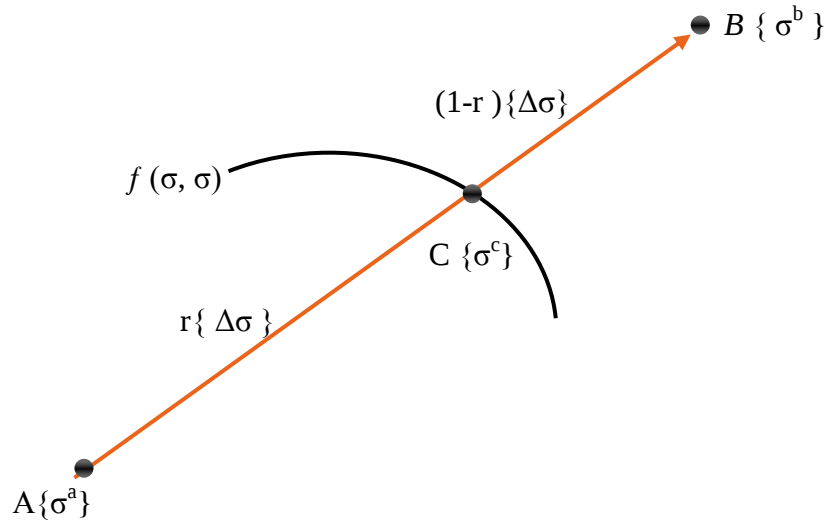


Figure 3-12 : Transition d'un état élastique à un état plastique.

Considérant le comportement élastique au point A, la fonction de charge s'écrit :

$$f(\sigma^a) = f_0 < 0 \quad \dots\dots\dots (3-53)$$

Après un certain nombre d'incréments de charges, l'état de contraintes peut atteindre le point C situé sur la surface ou le point B. la relation précédente devienne :

$$f(\sigma^b) = f_1 > 0 \quad \dots\dots\dots (3-54)$$

Les conditions géométriques montrent que :

$$\sigma^c = \sigma^a + r \cdot \Delta\sigma$$

Au point C, la valeur de la fonction de charge est nulle ce qui donne :

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f = 0$$

D'où :

$$f = f_0 + r \cdot (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) = 0$$

Ce qui donne :

$$r = -\frac{f_0}{f_1 - f_0} \dots\dots\dots (3-55)$$

Où r est un facteur scalaire obtenu par l'interpolation linéaire de la fonction de charge (Zienkiewicz. 1969).

Une meilleure valeur de r est donnée par :

$$r_1 = r - \frac{f_2}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \Delta \sigma} \dots\dots\dots (3-56)$$

Où:

$$f_2 = f(\mathbf{a}) + r \cdot \langle \Delta \sigma \rangle \neq 0$$

$$\Delta \sigma = \frac{f(\mathbf{a})}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{a}} \dots\dots\dots (3-57)$$

Avec $\Delta \sigma$ étant un incrément de contraintes

3-4- Béton fissuré et modélisation de son comportement :

3-4-1- Généralités :

Le comportement interne d'un élément en béton armé ne peut être représenté que grâce à des méthodes numériques développées. La fissuration est l'une des principales causes des déformations et des dommages dans ces éléments, la méthode des éléments finis est mieux adaptée afin de prédire d'une manière plus exacte ce comportement.

L'une des plus importantes caractéristiques du matériau fragile est sa faible résistance à la traction qui donne naissance à la formation des fissures. Ces fissures réduisent considérablement la rigidité du matériau. Les lois constitutives formulées précédemment pour un matériau sain ne sont plus valables lorsqu'il est fissuré. Par conséquent, il existe deux approches pour prendre en compte les phénomènes liés à la fissuration : *l'approche de la fissure discrète et l'approche de la fissure continue.*

En général, si un comportement local détaillé est désiré, les adaptations du modèle de fissures discrètes sont utiles. Pour la plupart des applications structurelles, le modèle de fissures continues est le plus utilisé.

3-4-2- Fissuration du béton

La ruine du béton en traction sous charges statiques ou variables d'après H. D. Bui est le résultat d'un endommagement par le développement de multiples microfissures, qui peuvent coalescer pour aboutir à la création d'une macrofissure. La mécanique de l'endommagement est adaptée au traitement du premier cas. La mécanique de la rupture est l'outil à utiliser dans le second.

Certaines approches ont été envisagées : Une approche discontinue de l'endommagement en utilisant la théorie de l'endommagement brutal qui considère un comportement de type « élastique – fragile » pour le béton. Une approche continue de l'endommagement réalisée expérimentalement sur des éprouvettes afin de localiser la zone endommagée et d'étudier une propagation stable de celle-ci jusqu'à création d'une macrofissure puis rupture. Et enfin une approche par la mécanique de la rupture en vue de déterminer la ténacité du béton et éventuellement l'influence d'une précontrainte sur celle-ci.

Le repère local lié à la fissure est donnée par la figure (3-13) suivante :

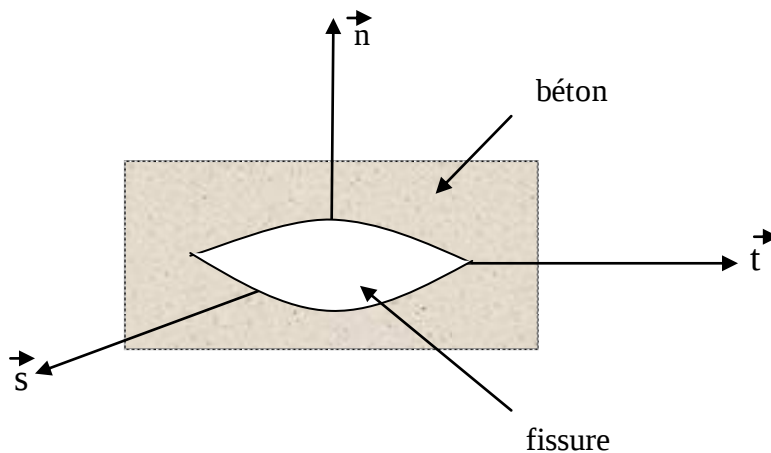


Figure 3-13: Définition du repère local lié à la fissure

3-4-3-modélisation des fissures :

Il existe deux techniques de modélisation des fissures par éléments finis :

3-4-3-1-La modélisation discrète des fissures (discret crack model) :

Le concept de la fissuration discrète se distingue de tous les autres modèles de fissuration et dans le maillage d'éléments à l'endroit de la fissure. Cette approche a été initialement développée par Ngo & Scordelis qui ont modélisé la fissure en séparant par dédoubleage des nœuds deux éléments ayant un côté en commun. Ce modèle possède deux inconvénients majeurs :

- Premièrement, il implique un changement continu de la connexion des nœuds et de la topologie du maillage.
- Deuxièmement, le chemin de propagation de fissure doit nécessairement suivre les côtés des éléments, ce qui rend la solution fortement dépendante du maillage.

Pour palier cette difficulté, l'approche a été affinée en utilisant des méthodes de remaillage adaptatif de façon à ce que des nouveaux éléments soient introduits avec leurs côtés orientés dans la direction de la fissure.

On peut noter également que l'approche de la fissure discrète ne semble pas avoir été développée en trois dimensions. De plus, cette technique semble plus performante si elle est appliquée à une classe des problèmes pour lesquels l'orientation de la fissure est connue en avance puisque les inconvénients liés à la dépendance vis-à-vis du maillage disparaissent.

L'approche proposée par Ngo & Scordelis a donc été améliorée et les fissures discrètes sont à présent généralement modélisées par des éléments d'interface interdisant le recouvrement des faces de la fissure mais permettant leur ouverture et glissement relatifs. Bien que la fissure soit ouverte, des contraintes

normale et tangentielle peuvent être transmises à travers celle-ci du fait de la présence d'aspérités et sont fonction des déplacements relatifs normal et tangentiel de la fissure.

Le renforcement dans le modèle fissures discrètes emploie des éléments barres qui sont reliés aux nœuds de maillage du béton, par conséquent le béton et le renforcement engrent les mêmes nœuds et le béton occupe les mêmes régions occupées par le renforcement comme montré sur la figure (3-14) ci-dessous :

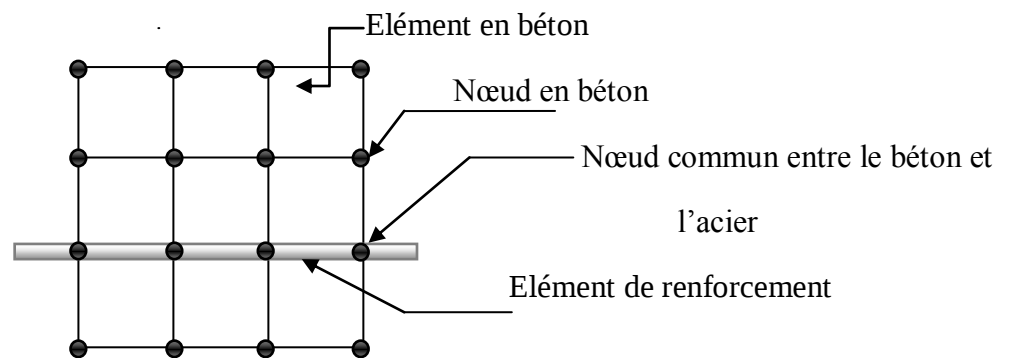


Figure 3-14 : Représentation de modèle de fissures discrètes.

3-4-3-2-La modélisation continue des fissures (smeared crack model) :

Le modèle de fissuration continue est le modèle couramment utilisé dans les modélisations par éléments finis. Les champs de déplacements sont continus. Le processus de la fissuration est caractérisé par une transition d'un état initial de déformation à faible gradient à un état à fort gradient.

Le concept de la fissuration continue n'introduit pas de discontinuité dans le maillage Le béton est considéré comme un milieu continu et la fissuration. Cette approche, développée initialement par Rashid , permet donc une description de l'endommagement du béton du à la fissuration, les axes d'orthotropie étant alignés avec la direction de la fissure. Comme les contraintes et les déformations sont évaluées aux points d'intégration, l'altération des propriétés du matériau affecte la région entourant ces points et diffuse les effets de la fissure dans cette région. Cette procédure est très attractive, non seulement parce qu'elle préserve la topologie originale du maillage d'éléments finis pendant toute l'analyse, mais aussi parce que seule la relation entre les contraintes et les déformations doit être actualisé après l'apparition d'une fissure.

Négliger le transfert des contraintes tangentielles à travers la fissure est une déficience du concept de la fissuration diffuse. Non seulement une telle hypothèse peut engendrer des difficultés d'ordre numérique, mais l'expérience a montré que des contraintes tangentielles peuvent apparaître dans le plan de rupture et

qu'elles sont dues au contact d'aspérités entre les deux surfaces rugueuses opposées de la fissure.

Pour remédier à cela, Ngo and Scordelis ont réinséré un pourcentage du module de cisaillement initial G dans le calcul du transfert de contraintes. Le facteur de réduction correspondant est appelé facteur de conservation de cisaillement, noté β .

Dans de nombreux modèles, le facteur de conservation de cisaillement β est constant et compris entre 0 et 1. Lorsque les faces de la fissure sont totalement séparées (plus d'aspérités ni de ligaments) le transfert de contrainte n'est plus possible. Ce modèle est retenu dans cette étude pour décrire le comportement de la fissuration du béton.

Le modèle des fissures continues suppose donc que le renforcement est uniformément réparti dans l'élément en béton dans une région définie du maillage. Cette approche est employée pour les modèles à grande échelle comme montré sur la figure (3-15) ci-dessous :

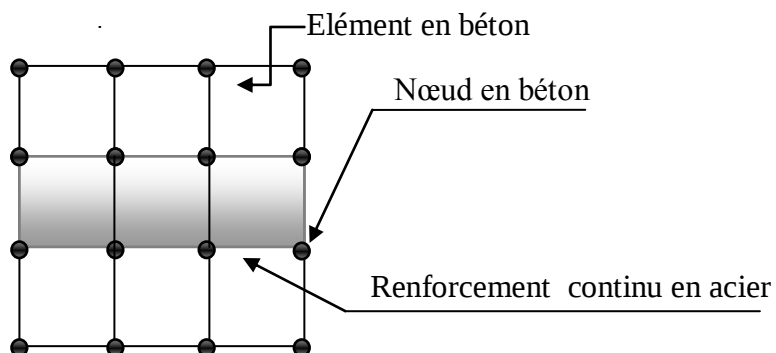


Figure 3-15 : Représentation de modèle de fissures continues

3-4-4-Critère d'amorçage et de propagation de fissures :

On distingue en général trois modes de sollicitation susceptibles d'ouvrir une fissure :

Le mode I (mode d'ouverture) où les contraintes normales ouvrent la fissure, les modes II (mode de cisaillement plan) et III (mode de cisaillement antiplan) où ce sont les contraintes tangentielles qui ouvrent la fissure) figure (3-16) :

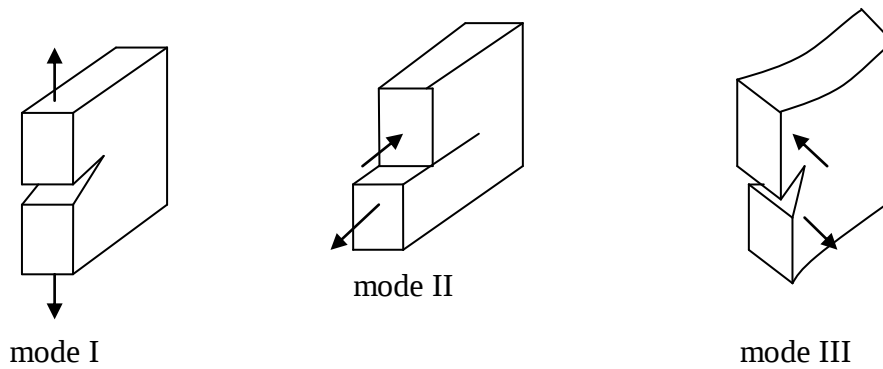


Figure 3-16 : Modes et sollicitation d'une fissure

Les critères principalement utilisés pour la modélisation e la fissuration du béton sont développés à partir des deux constats suivants :

- La non linéarité de la partie croissante de la courbe uniaxiale liant les contraintes aux déformations de traction peut être négligée.
- La principale caractéristique du comportement du béton est probablement sa faible résistance limite en traction qui provoque une fissuration en tension à des niveaux de contraintes faibles comparés à la résistance limite en compression.

Par conséquent, dans la majorité des modèles de fissuration, le béton non fissuré est considéré comme linéaire élastique isotrope en tension et un simple critère de Rankine est utilisé pour détecter l'apparition d'une fissure. L'amorçage d'une fissure s'effectue dans ce cas uniquement en mode I. Ces hypothèses sont justifiées en l'absence de compression latérale significative . Pratiquement les contraintes principales et leurs directions sont calculées en un point d'intégration et si un des contraintes, positive, excède une valeur limite alors un fissure perpendiculaire à la direction de cette contrainte apparaît au point considéré. Selon les modèles, cette valeur limite est égale à la résistance limite en traction f_t (ou est fonction de celle-ci, de la résistance limite en compression et des contraintes de compression).

Si l'état de contraintes en ce point est un état de tension - compression combiné, Bhattacharjee & Leger ont proposé un critère d'amorçage de fissure en mode I, légèrement différent de celui de Rankine. En effet, ils prennent en compte la non linéarité de la partie croissante de la courbe de

traction uniaxiale du béton ainsi que la non proportionnalité, due à l'effet de poisson, de la contrainte principale σ_m et de la déformation correspondante ε_m qui sont utilisées comme indicateurs dans l'analyse. Dans leur modèle une, une fissure s'amorce si le produit $\frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m$ est supérieur à ou égal à l'aire sous la courbe de tension uniaxiale avant le pic (aire égale à $\frac{1}{2} \cdot f_t \cdot \varepsilon_t$ dans le cas où le béton non fissuré est supposé linéaire élastique, avec ε_t la déformation correspondante à f_t).

Le critère de Rankine permet l'amorçage d'une fissure uniquement en mode I. Bien que l'utilisation de ce critère semble justifiée et que de ce fait celui-ci soit abondamment employé dans des modèles de fissuration, il peut paraître restrictif. C'est pourquoi, certains modèles utilisent, en plus du critère de Rankine, un critère d'ouverture de fissure en cisaillement et d'autres emploient une enveloppe de rupture tridimensionnelle avec amorçage d'une fissure si le critère est transgressé avec au moins une contrainte principale de tension. Tous ces modèles conservent le critère de propagation précédent avec un plan de fissure qui se propage perpendiculairement à la contrainte principale maximale.

Il existe également des modèles où le critère d'amorçage de fissure et le critère de propagation de fissure dépendent tous les deux de l'état de contrainte au point considéré. Récemment, Weihe & al. ont proposé un critère bidimensionnel d'amorçage et de propagation de fissure applicable à tout type de matériau prenant en compte la rupture en mode I, mode II et mode mixte mais ils s'accordent

sur le fait qu'une fissure apparaît en mode I si le matériau, tel le béton, est suffisamment fragile.

3-4-5- Fermeture et réouverture de fissure :

La redistribution des contraintes due à la fissuration en d'autres points d'intégration ou à un chargement supplémentaire peut forcer certaines fissures ouvertes précédemment à se fermer partiellement ou totalement. Généralement, ce comportement est pris en compte soit par un déchargement élastique, soit par un déchargement sécant (figure 3-17). Pour le

déchargement élastique, la fissure se ferme immédiatement après un renversement de la déformation et un retour rigoureux au comportement élastique est réalisé. Dans ce cas, le terme "fermeture" au sens strict ne s'applique pas car la déformation de fissure est irréversible. Il est plus pertinent de parler de fissure inactive ou arrêtée. Dans le cas du déchargement sécant, la déformation normale à la fissure est réversible et une fois l'origine du diagramme atteinte la fissure est réellement fermée et le comportement élastique recouvré. Ces deux types de déchargement ne sont que des approximations de la réalité car les tests cycliques ont révélé l'hystérésis . Néanmoins le déchargement sécant est l'option la plus fréquemment utilisée à cause peut-être de sa simplicité et du fait qu'elle prenne en compte la diminution du module d'Young lorsque la déformation d'ouverture de fissure augmente, phénomène observé expérimentalement .

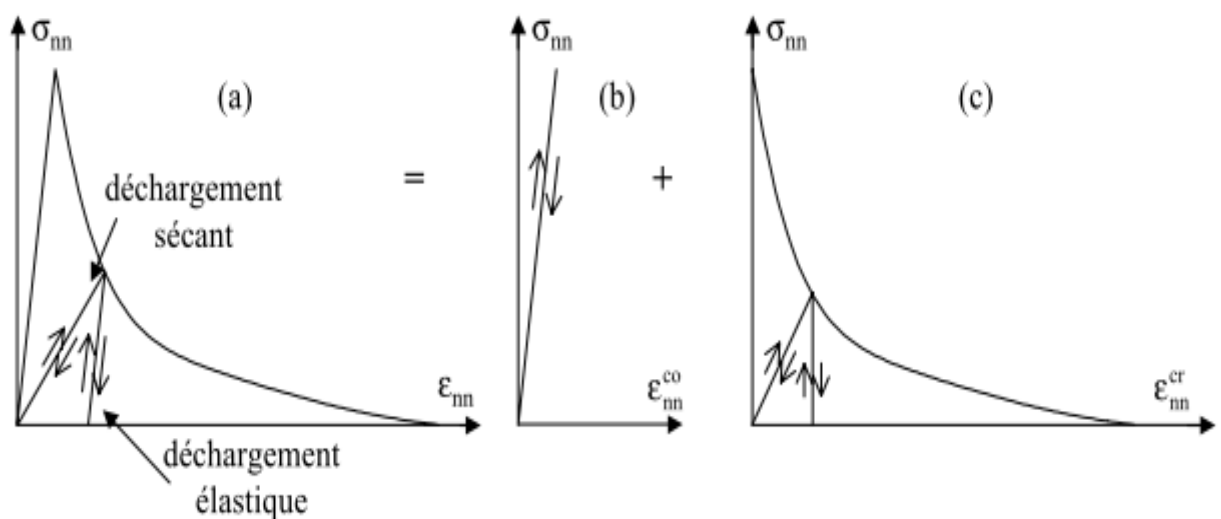


Figure 3-17: Déchargement élastique et sécant pour un modèle élastique - adoucissement en mode I: contrainte normale fonction de la déformation totale (a), de la déformation du béton entre les fissures (b) et de la déformation de fissure (c) .

Afin de modéliser le chargement cyclique d'une fissure, Dahlblom & Ottosen ont proposé un déchargement paramétré. Le paramètre qui contrôle le déchargement est compris entre 0 (déchargement sécant) et 1 (déchargement élastique) et, choisi correctement, il permet d'obtenir des résultats numériques

pour la modélisation de tests cycliques proches de ceux obtenus expérimentalement. Tout comme l'amorçage et la propagation, la fermeture et la réouverture de fissure sont généralement contrôlées en mode I uniquement.

3-4-6-Analyse de la traction

Lorsque la contrainte de traction dépasse la valeur limite de la résistance à la traction du matériau, il se forme une ou plusieurs fissures. Après fissuration, le matériau ne transmet plus de contraintes dans la direction normale à la fissure. La direction de la fissure est supposée normale à la direction de la contrainte principale. Deux fissures orthogonales peuvent se former si les deux contraintes principales dépassent la résistance à la traction du matériau. La direction de la fissure est évaluée par la formule suivante :

$$\tan 2\Psi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad -45^\circ \leq \Psi \leq 45^\circ \quad \dots\dots\dots (3-58)$$

La direction de la fissure actuelle Ψ_{cr} est calculée par rapport à l'axe X (figure 3.13) comme suit :

- calculer les contraintes principales avec l'expression standard suivante :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \dots\dots\dots (3-59)$$

- calculer la contrainte normale associée à l'angle Ψ par :

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \Psi + \sigma_y \cdot \sin^2 \Psi + 2 \cdot \tau_{xy} \cos \Psi \cdot \sin \Psi \quad \dots\dots\dots (3-60)$$

- Si $\sigma_n = \sigma_1$, l'angle de la fissure est : $\Psi_{cr} = \Psi + \pi/2$,
- Si $\sigma_n = \sigma_1$, l'angle de la fissure est : $\Psi_{cr} = \Psi$

3-4-7-Calcul du vecteur de contraintes résiduelles après fissuration :

D'après la formule de transformation géométrique standard, on a :

$$\underline{\sigma}' = \underline{P} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{P}^T$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2.c.s \\ s^2 & c^2 & -2.c.s \\ -c.s & c.s & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-61)$$

Et inversement, on trouve :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2.c.s \\ s^2 & c^2 & 2.c.s \\ c.s & -c.s & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-62)$$

Après l'apparition de la première fissure, les quantités σ'_y et τ'_{xy} sont négligeables.

L'équation (3-62) se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c^2 \\ s^2 \\ c.s \end{Bmatrix} \sigma'_x \dots\dots\dots (3-63)$$

En substituant la valeur de σ_x' de l'équation (3-61) dans l'équation (3-63), on trouve :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c^2 \\ s^2 \\ c.s \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c^2 & s^2 & 2.c.s \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-64)$$

Posant :

$$\sigma_0 = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} c^2 \\ s^2 \\ c.s \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c^2 & s^2 & 2.c.s \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$\sigma_0 = \left(\mathbf{I} - \begin{Bmatrix} c^4 & c^2.s^2 & 2.c.s \\ c^2.s^2 & s^4 & 2.s^3.c \\ c^3.s & c.s^3 & 2.s^2.c^2 \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-65)$$

Avec :

$\{\sigma_0\}$: Vecteur de contraintes ajustées après fissuration,

$[I]$: matrice identique d'ordre 3×3 .

3-4-8-Fissuration simple du béton:

Le béton fissuré est traité comme un matériau orthotrope avec des axes d'orthotropie parallèles et normaux à la direction de la fissure. L'effet de Poisson est négligeable à cause du manque d'interaction entre les deux directions orthogonales après fissuration et le module d'élasticité du matériau normal à la direction de la fissure est réduit à zéro. Les contraintes totales après fissuration sont données par rapport aux axes de coordonnées locales (n,t) par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma G \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} = \mathbf{p}_c \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-66)$$

Avec :

E : est le module d'élasticité du béton,

γ : est le facteur de conservation de cisaillement du matériau ($0 < \gamma < 1$),

G : est le module de cisaillement du matériau,

$\mathbf{P}_c$: la matrice d'élasticité après fissuration dans le repère local (n, t).

Afin de transformer les contraintes du matériau d'un repère local à un repère global, on utilise la procédure suivante :

$$x' = x \cdot \cos \Psi + y \cdot \sin \Psi$$

$$y' = -x \cdot \sin \Psi + y \cdot \cos \Psi$$

Avec Ψ est l'angle que fait l'axe des abscisses du repère local à l'axe des abscisses du repère global.

On pose : $c = \cos \Psi$, $s = \sin \Psi$

Ce qui donne :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-67)$$

Avec $\mathbf{P}$ étant la matrice de passage.

Le changement de repère se fait par la formule standard suivante : $\mathbf{\sigma}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{P}^T$

D'où:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_x & \gamma'_{xy}/2 \\ \gamma'_{xy}/2 & \varepsilon'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-68)$$

Par identification, on trouve :

$$\varepsilon'_x = c^2 \cdot \varepsilon_x + s^2 \cdot \varepsilon_y + c \cdot s \cdot \gamma_{xy} \quad \dots\dots\dots (3-69)$$

$$\varepsilon'_y = s^2 \cdot \varepsilon_x + c^2 \cdot \varepsilon_y - c \cdot s \cdot \gamma_{xy} \quad \dots\dots\dots (3-70)$$

$$\frac{\gamma'_{xy}}{2} = -c \cdot s \cdot \varepsilon_x + c \cdot s \cdot \varepsilon_y + \frac{1}{2} (c^2 - s^2) \gamma_{xy} \quad \dots\dots\dots (3-71)$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & c \cdot s \\ s^2 & c^2 & -c \cdot s \\ -2 \cdot c \cdot s & 2 \cdot c \cdot s & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3-72)$$

L'expression précédente peut s'écrire sous la forme condensée comme :

$$\{\varepsilon'\} = [P^*] \{\varepsilon\} \quad \dots\dots\dots (3-73)$$

Après fissuration la matrice de rigidité du matériau s'exprime comme :

$$\{\sigma'\} = [D_c] \{\varepsilon'\} \quad \dots\dots\dots (3-74)$$

En substituant la valeur de $\{\varepsilon'\}$ dans l'équation précédente, on aura :

$$\{\sigma'\} = [D_c] \{\varepsilon'\} \rightarrow \{\sigma'\} = [D_c] [P^*] \{\varepsilon\} \quad \dots\dots\dots (3-75)$$

Sachant que : $\{\sigma'\} = [D_c] [P^*] \{\varepsilon\} \rightarrow \{\sigma'\} = [D_c] [P^*] \{\varepsilon\}$

Par identification, on trouve :

$$[D] = [D_c]^T \cdot [D_c] [P^*] \quad \dots\dots\dots (3-76)$$

Avec :

$$\mathbf{I}^* = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & c \cdot s \\ s^2 & c^2 & -c \cdot s \\ -2 \cdot c \cdot s & 2 \cdot c \cdot s & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-77)$$

$\mathbf{P}$: la matrice d'élasticité après fissuration dans le repère global (X ,Y).

Le vecteur des contraintes résiduelles après fissuration est donné par la relation suivante :

$$\mathbf{\sigma}_0 = \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} c^4 & c^2 \cdot s^2 & 2 \cdot s \cdot c^3 \\ c^2 \cdot s^2 & s^4 & 2 \cdot s^3 \cdot c \\ c^3 \cdot s & c \cdot s^3 & 2 \cdot s^2 \cdot c^2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-78)$$

Avec :

$\{\sigma_0\}$: vecteur de contraintes ajustées après fissuration,

$[I]$: matrice identique d'ordre 3×3.

La relation incrémentale (contraintes - déformations) dans le béton fissuré est donnée comme suit:

$$\mathbf{\sigma} = \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{\epsilon} \dots\dots\dots (3-79)$$

Les contraintes totales libérées après fissuration $\mathbf{\sigma}_0$ seront distribuées dans les éléments adjacents (Figure3-18).

La variation totale des contraintes sera donc:

$$\mathbf{\sigma} = \mathbf{\sigma}_0 + \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{\epsilon} \dots\dots\dots (3-80)$$

Avec:

$\mathbf{P}_c$: Matrice de rigidité du béton fissuré.

$\mathbf{\sigma}_0$: Contraintes libérées après fissuration du béton.

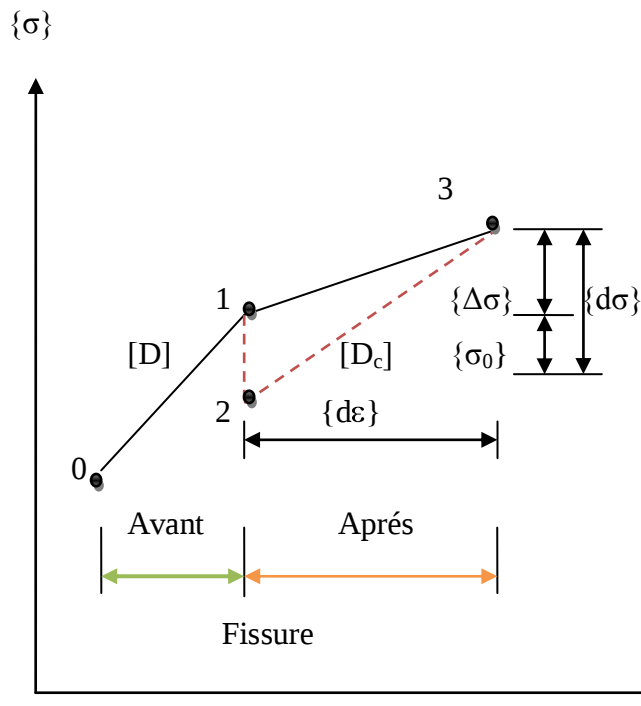


Figure 3-18: Modèle (contraintes - déformations) du béton simplement fissuré

3-4-9- Fissuration double du béton

Le béton peut se fissurer selon deux directions orthogonales si les deux contraintes principales sont de traction et excèdent la résistance à la traction du béton, (Figure3-19). Dans ce cas la relation contraintes - déformations est donnée par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-81)$$

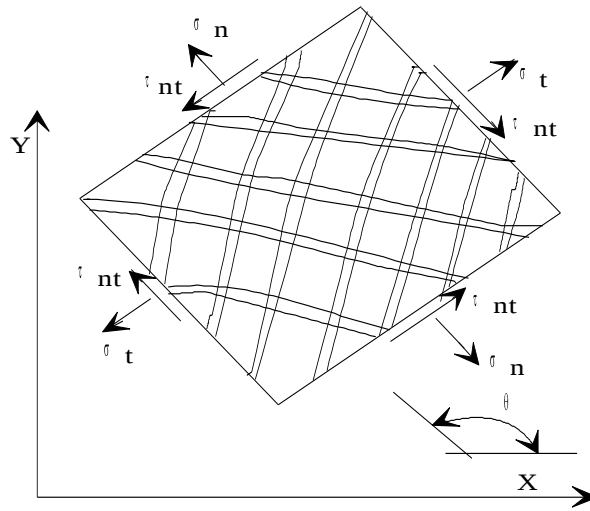


Figure 3-19 : Contraintes dans le béton doublement fissuré

Afin de transformer les contraintes dans le béton fissuré simplement ou doublement, et qui sont définies par rapport aux axes d'orthotropie dans le système de coordonnées globales (X, Y), en utilisant la procédure standard qui s'écrit comme suit:

$$\underline{\underline{\mathbf{p}_c^*}} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}_c \mathbf{T} \dots\dots\dots (3-82)$$

où

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-83)$$

Où

$C = \cos\theta_{cr}$, $S = \sin\theta_{cr}$ et θ_{cr} est l'angle de la fissuration par rapport à l'axe (X), et $[\mathbf{D}_c]$ est la propriété matérielle dans les axes locaux d'orthotropie et dépend du type de fissuration du béton, qui est donnée par les formules (3.27) et (3.33).

Les contraintes finales dans le système de coordonnées globales (X, Y) peuvent être obtenues avec l'équation suivante:

$$\underline{\underline{\mathbf{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{p}_c^*}} \underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}} \dots\dots\dots (3-84)$$

3-4-10- Modélisation des armatures :

Le comportement symétrique de l'acier en traction et en compression est approché par un modèle élastique parfaitement plastique.

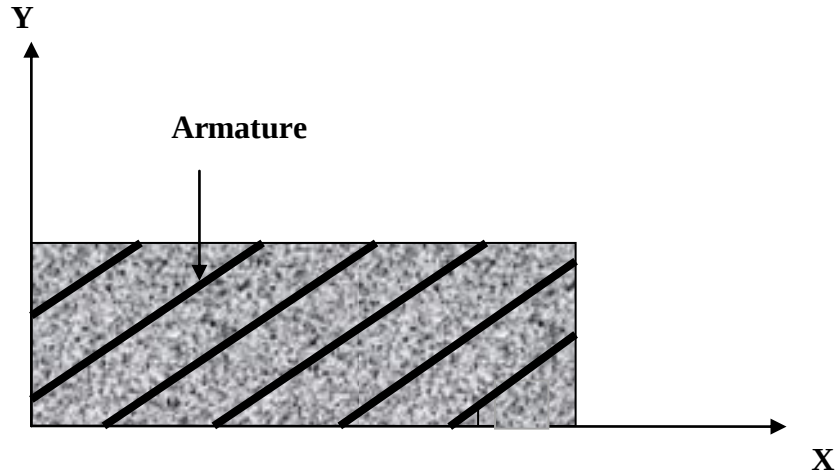


Figure3-20 : Représentation répartie des armatures

La disposition dense des armatures dans le béton conduit nécessairement à une densification du maillage et par conséquent alourdit considérablement le calcul. Cependant, une alternative consiste à supposer les armatures uniformément réparties (figure3-20) dans la masse du béton et considérer l'acier comme matériau ne travaillant que suivant la direction des barres.

La matrice d'élasticité de l'acier est obtenue de la même manière que la matrice d'élasticité du béton après fissuration et est exprimé par :

$$\mathbf{p}_s = \rho \cdot E_s \cdot \begin{bmatrix} c^4 & c^2 \cdot s^2 & 2 \cdot s \cdot c^3 \\ c^2 \cdot s^2 & s^4 & 2 \cdot s^3 \cdot c \\ c^3 \cdot s & c \cdot s^3 & 2 \cdot s^2 \cdot c^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-85)$$

Où

$$c = \cos \alpha, \quad s = \sin \alpha$$

α est l'angle que fait l'axe de la barre avec l'axe X

E_s est le module d'élasticité de l'acier

ρ est le pourcentage d'armatures dans la section du béton.

3-4-11-Méthodes d'analyse non lineaire

Généralement, les matériaux solides sont considérés comme matériaux à comportement linéaire élastique. Cette approximation n'est pas pleinement justifiée pour des applications techniques avancées ; donc, il est nécessaire de prendre en compte le comportement non linéaire et l'irréversibilité des déformations. En mécanique des structures, un problème est non linéaire si la matrice de rigidité ou le vecteur chargement dépend des déplacements. Dans les problèmes linéaires, la solution était toujours unique, il n'en est plus de même dans la plupart des problèmes non linéaires. Ainsi si l'on obtient une solution ce n'est pas nécessairement la bonne. L'analyste doit comprendre avant tout le problème physique et se mettre au courant de diverses stratégies de résolution. Une stratégie unique ne donnera pas forcément de bons résultats et peut être inefficace pour certains types de problèmes. Il n'existe pas de méthodes directes de résolution de ces systèmes. Ces derniers sont solutionnés par la résolution de plusieurs problèmes linéaires successifs où les conditions de non linéarité sont respectées pour certaines tolérances.

Dans l'analyse des structures, le comportement non linéaire est dû essentiellement à deux types de non linéarité à savoir : la non linéarité matérielle ; les lois constitutives du matériau sont non linéaires, et la non linéarité géométrique ; les déplacements et / ou déformations sont suffisamment importants pour que la configuration initiale ne puisse plus être utilisée valablement pour exprimer équilibre et compatibilité. Pour la théorie des petits déplacements, la non linéarité géométrique n'est pas considérée. On se limite seulement à la non linéarité matérielle. Pour le béton, cette dernière est caractérisée par la fissuration, les relations contraintes – déformations, et l'histoire du chargement, etc.

Si une structure est chargée expérimentalement et que ces éléments possèdent une seule relation contraintes – déformations, les déformations ainsi mesurées peuvent être illustrées graphiquement sur la figure 3-21. L'analyse peut être définie simplement en connaissant la géométrie de la structure, les propriétés mécaniques du matériau constituant la structure, les conditions aux limites et le chargement. La solution non linéaire est souvent obtenue par l'une des méthodes itératives suivantes :

- la méthode de la rigidité initiale,
- la méthode de la rigidité sécante,
- la méthode de la rigidité tangente.

La relation contraintes – déformations pour différents éléments de la structure est considérée non linéaire en compression et linéaire en tension. La figure 3.21 illustre graphiquement la résolution

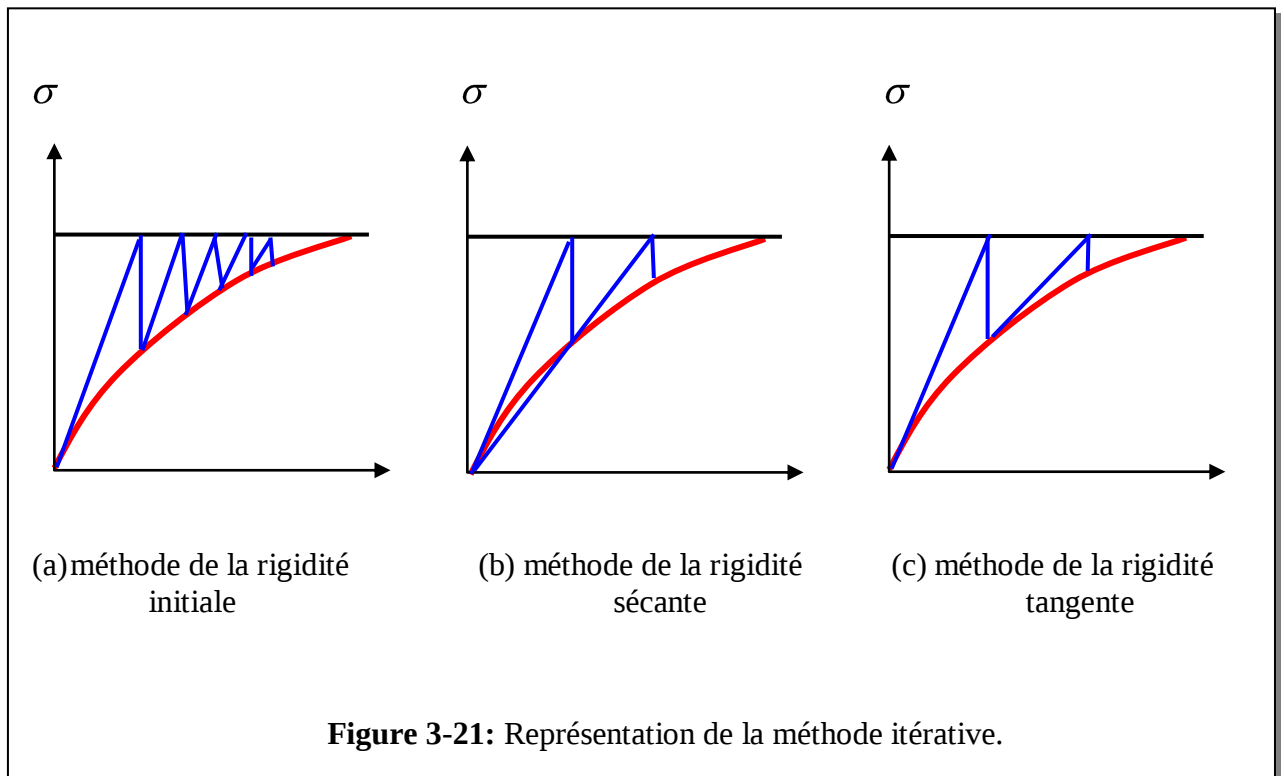
des systèmes d'équations non linéaires par la méthode itérative. Les étapes du calcul sont les suivantes :

1. Pour le segment 0-1 de la figure (3.21), la rigidité initiale est utilisée dans les trois méthodes afin de déterminer la rigidité élémentaire et globale.
2. pour le segment 1-2 des trois méthodes, la contrainte correspondante à une déformation de l'étape 1 est déterminée pour chaque élément. La contrainte tend à la valeur zéro si la contrainte de tension dépasse la valeur limite du critère.
3. Pour les segments 2-3 et 3-4, la procédure est différente pour les trois méthodes de résolution montrées sur la figure 3.14. pour chaque cas de figure, on remarque :
 - (a) - la rigidité initiale de la courbe contraintes – déformations est utilisée de nouveau et les étapes 1 et 2 sont répétées,
 - (b) - la rigidité sécante, 0-2-3, pour la courbe contraintes – déformations est utilisée et les étapes 1 et 2 sont répétées,
 - (c) - la rigidité tangente au point 2 de la courbe contraintes – déformations est utilisée et les étapes 1 et 2 sont répétées,
4. Les étapes 1, 2, 3 sont répétées jusqu'à la restauration de l'équilibre, c'est-à-dire le vecteur résiduel de contraintes est nul.

Pour toutes les méthodes de résolution, la rigidité en un point de Gauss est nulle si une ou plusieurs fissures sont enregistrées en ce point. Quand les trois méthodes illustrées sur la figure 3-19 satisfont la solution finale, les conditions d'équilibre, les équations de compatibilité et la relation contraintes – déformations, il est évident que la convergence est plus rapide par la méthode de rigidité tangente et lente par la méthode de rigidité initiale. La méthode de rigidité initiale calcule une seule fois la matrice de rigidité en chaque itération.

Souvent la combinaison entre les deux méthodes est utilisée. Dans les structures en béton armé, la solution dépend généralement de l'état de contraintes de l'élément car la fissuration affecte considérablement la solution finale. Pour cela. La procédure du chargement incrémental est utilisée dans laquelle la solution itérative est formulée pour chaque incrément de charge

Les difficultés majeures dans l'analyse non linéaire résident dans le choix du modèle de l'élément fini, des relations constitutives sous différents états de contraintes et de type de critère utilisé pour le matériau.



3-5-CONCLUSION

Ce chapitre présente le comportement mécanique des matériaux fragiles ainsi que les théories utilisées pour sa modélisation. Après avoir revu le comportement du matériau sous différents états de sollicitation, on constate qu'il présente deux types de comportement selon l'état de contraintes. Sous des contraintes de tension, il est caractérisé par le phénomène de fissuration. Par contre sous des contraintes de compression, il présente un comportement plus ou moins ductile qui peut être modélisé par la théorie de plasticité avec écrouissage non linéaire. A cet effet, une section portant sur la revue de quelques critères de rupture est présentée. Un de ces critères, celui de Nadai de type Drucker – Pager est utilisé comme potentiel plastique pour développer les relations constitutives. Quant à la fissuration, deux approches qui modélisent ce phénomène sont présentées. La première approche est appelée approche discrète, et la deuxième approche est appelée approche continue. En dernier, une section portant sur les divers algorithmes d'analyse non linéaire est présentée.

CHAPITRE 4

PROGRAMMATION AVEC ANSYS

4-1- Introduction à ANSYS :

4-1-1-Introduction :

Le logiciel **ANSYS** a été développé par Dr. John Swanson, fondateur de la société **ANSYS** Inc. qui a son siège Houston, PA, USA.

Il s'agit d'un outil de développement en analyse d'ingénierie. C'est un logiciel d'analyse par éléments finis capable d'analyser une gamme des applications de technologie :

- Structurale
- Thermique
- Electromagnétiques
- Dynamique des fluides

Le logiciel **ANSYS** permet la modélisation de structures, produits, composantes ou systèmes et d'étudier leurs réponses physiques telles que les niveaux des contraintes, la distribution de température et l'effet du champ électromagnétique.

4-1-2-Structure du programme ANSYS:

Le traitement des problèmes de technologie contient fondamentalement trois étapes principales : créer le modèle, résoudre le problème et analyser les résultats. **ANSYS** comme beaucoup d'autres programmes en éléments finis, est également divisé en trois étapes principales :

- **Préprocesseur** : c'est l'étape où on définit le type d'éléments, les constantes réelles et les propriétés des matériaux.
- **Processeur de solution** : c'est l'étape où on pourra :
 - définir le type d'analyse ;
 - poser les conditions aux limites ;
 - appliquer les charges ;
 - lancer la résolution d'élément fini.

- **Post processeur** : c'est l'étape où on réexamine les résultats en utilisant les affichages graphiques et les listes tabulaires.

Pendant l'analyse on communique avec **ANSYS** par l'intermédiaire d'une interface utilisateur graphique (GUI) qui est décrite ci-dessous (Figure 4-1)

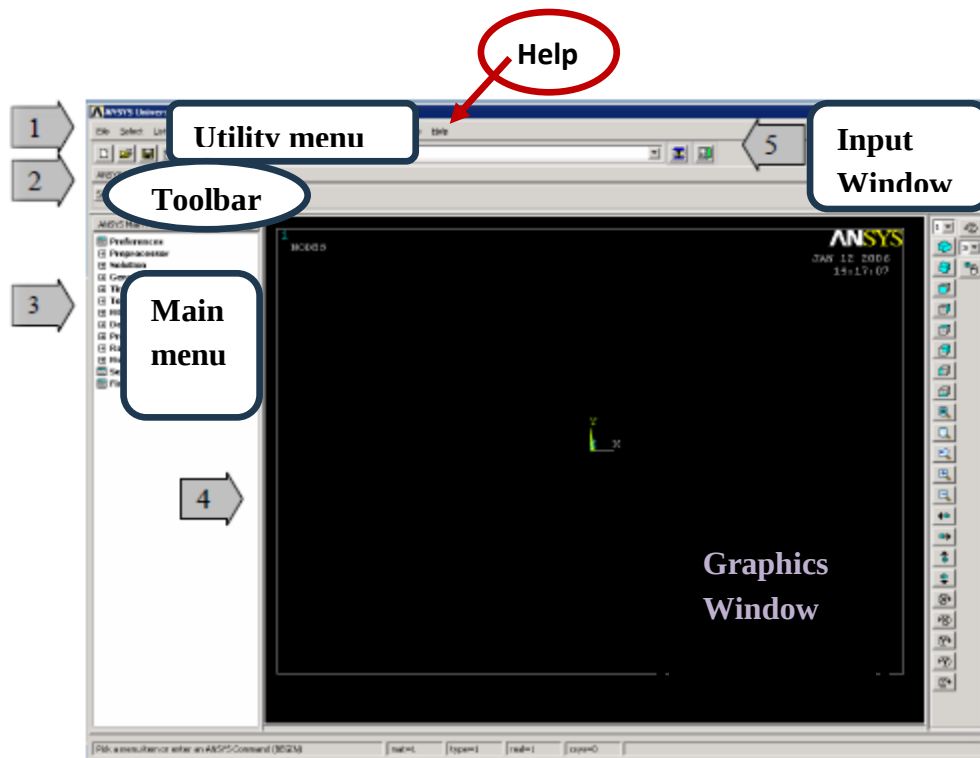


Figure4-1 : Interface graphique du logiciel ANSYS

- **Utility menu** : Cet onglet contient les fonctions qui sont disponibles dans toute la session d'ANSYS, telles que des commandes de dossier, la sélection, des commandes graphiques, et des paramètres ainsi le système d'aide d'ANSYS.
- **Toolbar** : c'est la barre porte-outils, elle contient des boutons pour exécuter des commandes utilisées généralement et des fonctions d'ANSYS.
- **Main menu** : c'est le menu principal, il contient les fonctions primaires d'ANSYS organisées :

(Pré processor, solution, général post processor, etc.).

- **Graphique Windows** : c'est la fenêtre graphique qui montre la représentation graphique du modèle créé dans ANSYS .En outre, les résultats relatifs.
- **Input Windows** : c'est la fenêtre d'entrée là où on peut introduire des commandes.

On peut également consulter l'Aide d'ANSYS qui se trouve dans utility menu.

L'Aide ANSYS (ANSYS Help) donne des informations et des conseils de dépannage pour presque tous les composants de l'interface graphique GUI ainsi des exemples du calcul. La fenêtre de l'Aide est donnée ci-dessous (Figure 4-2) :

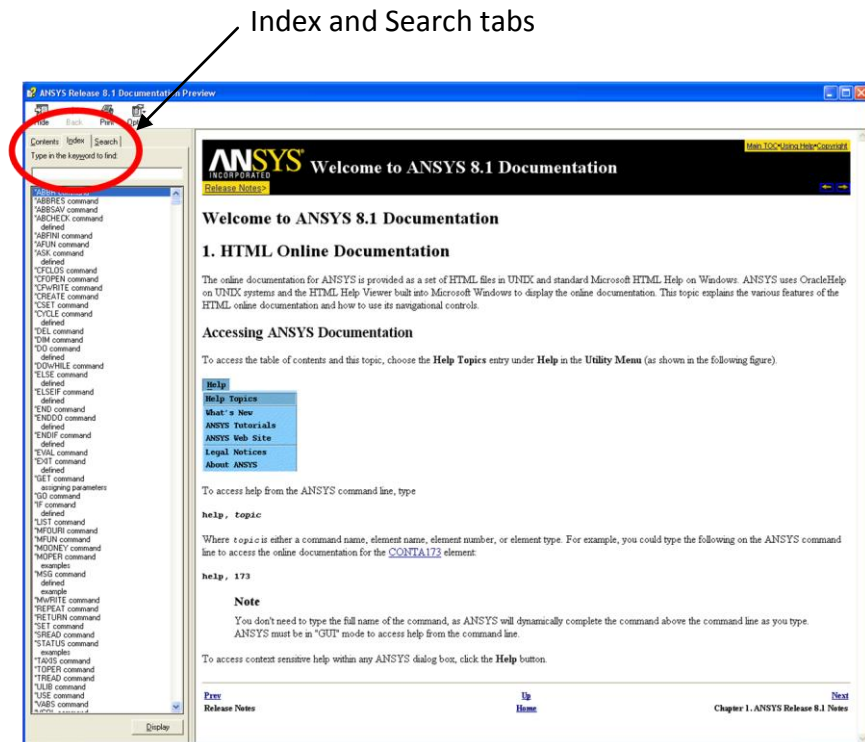
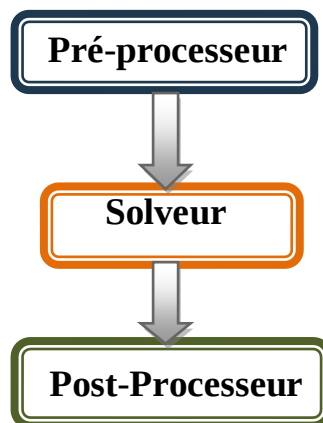


Figure4-2 : Interface graphique du Help d' ANSYS

4-1-3- Organisation générale d'un code de calcul : le code de calcul par éléments finis est organisé de la manière suivante :



Préprocesseur :

- Choisir le type d'éléments
- Entrer les propriétés géométriques
- Entrer les paramètres physiques
- Créer le modèle géométrique
- Créer le maillage : définir les nœuds et les éléments
- Appliquer les sollicitations
- Imposer les conditions aux limites

Solveur :

- Choisir le type d'analyse (statique, dynamique,...)
- Construire la matrice et le vecteur élémentaire $[k_e]$, $\{f_e\}$
- Assembler $[k_e]$ et $\{f_e\}$ dans $[K]$ et $\{F\}$
- Prendre en compte les conditions aux limites
- Résoudre le système d'équations $[K] \{U\} = \{F\}$
- Calculer les variations additionnelles (gradients, réactions, etc...).

Post-processeur :

- Présenter les résultats de façon intelligible et synthétique :
 - sous forme numérique
 - sous forme graphique
- Effectuer des fonctions complémentaires : combinaisons, interprétations, interpolations, animation,...

4-1-4- Lancement du logiciel ANSYS:

I - Préprocesseur :

1- donner un titre pour le travail :

Après que nous ayons lancé le programme **ANSYS**, pour choisir un titre pour notre travail, Voici la marche à suivre : **Utility Menu > File > Change title**. Une zone de dialogue apparaît.

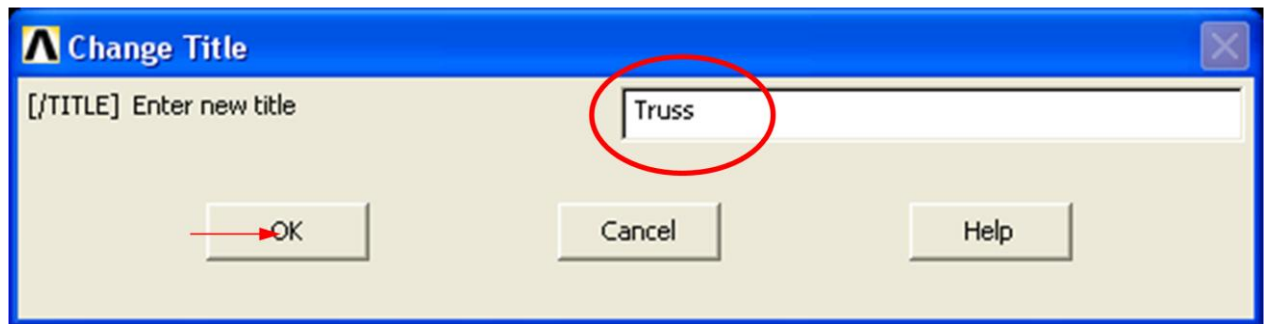


Figure4-3 : Introduction du titre dans ANSYS

2- Définir le type d'élément :

Main Menu: Preprocessor – Element type – Add/Edit/Delete

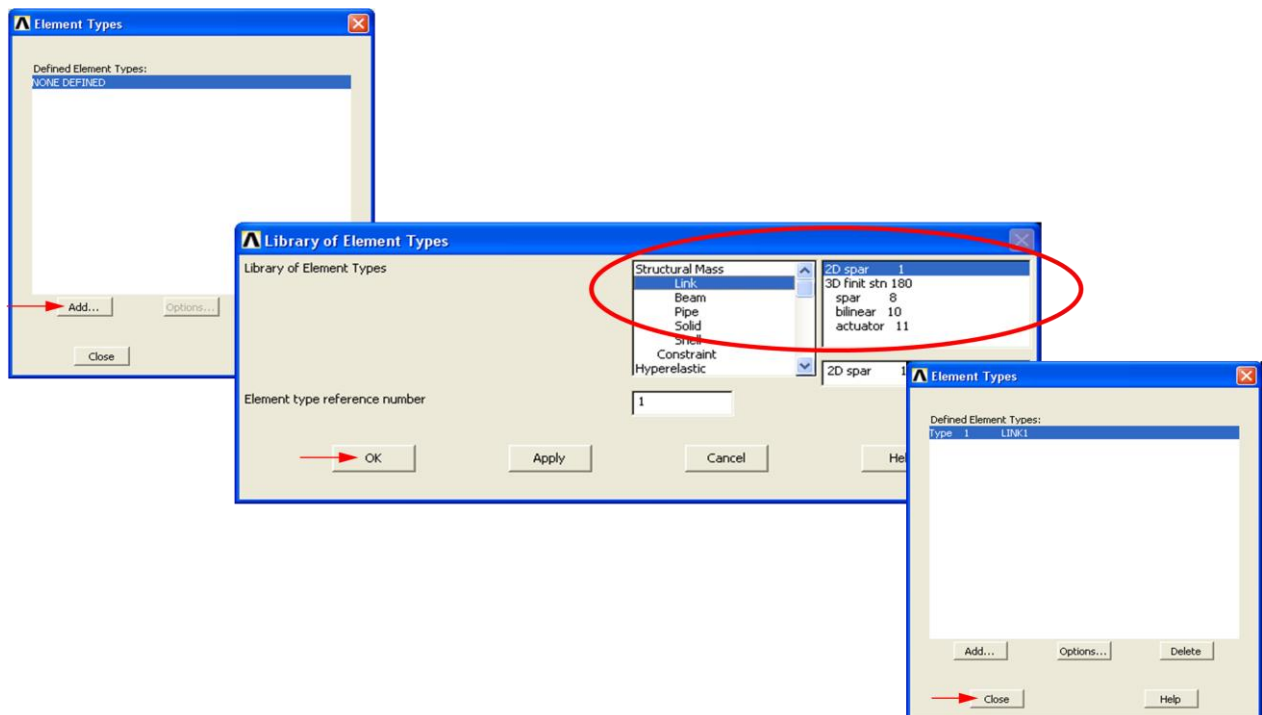


Figure4-4 : définition du type d'élément dans ANSYS

3- Définir les constantes réelles:

Main Menu: *Preprocessor – Real Constants – Add/Edit/Delete*

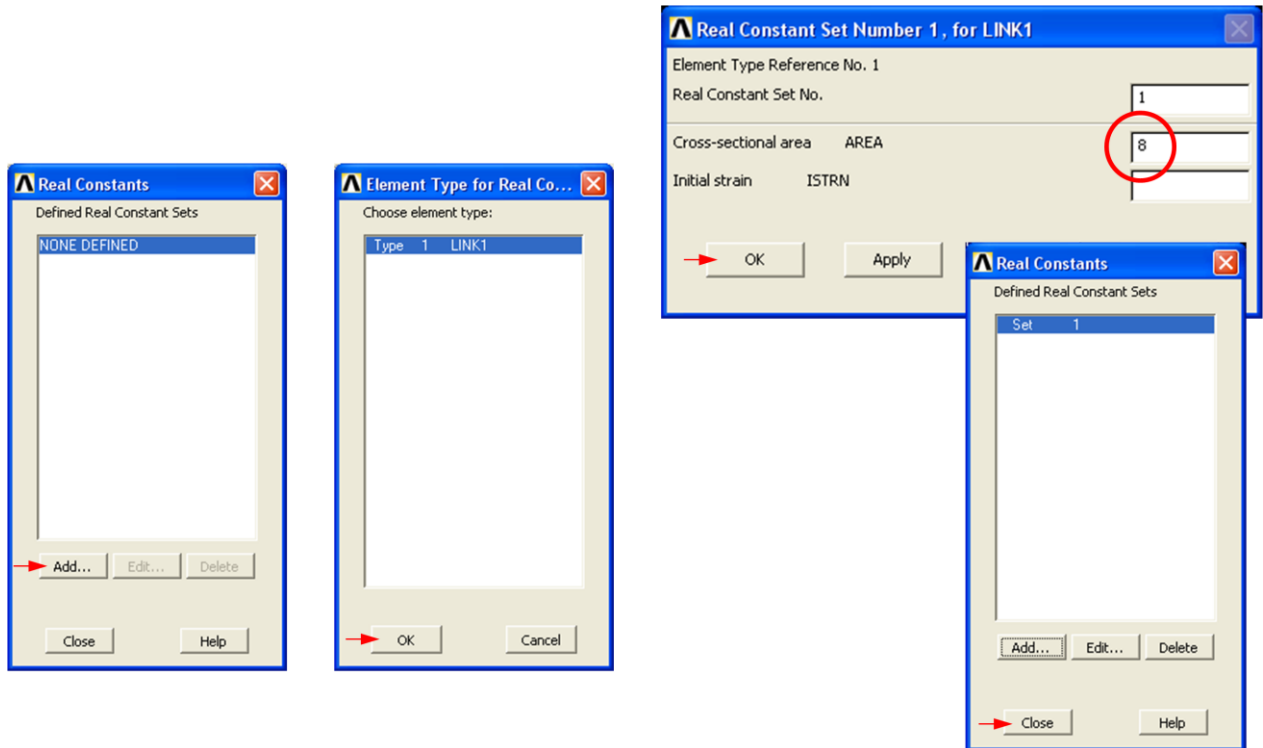


Figure4-5 : Définition des constantes réelles dans ANSYS

4- Définir les propriétés des matériaux:

Main Menu: *Preprocessor – Material Props – Material Models*

– Structural – Linear – Elastic – Isotropic

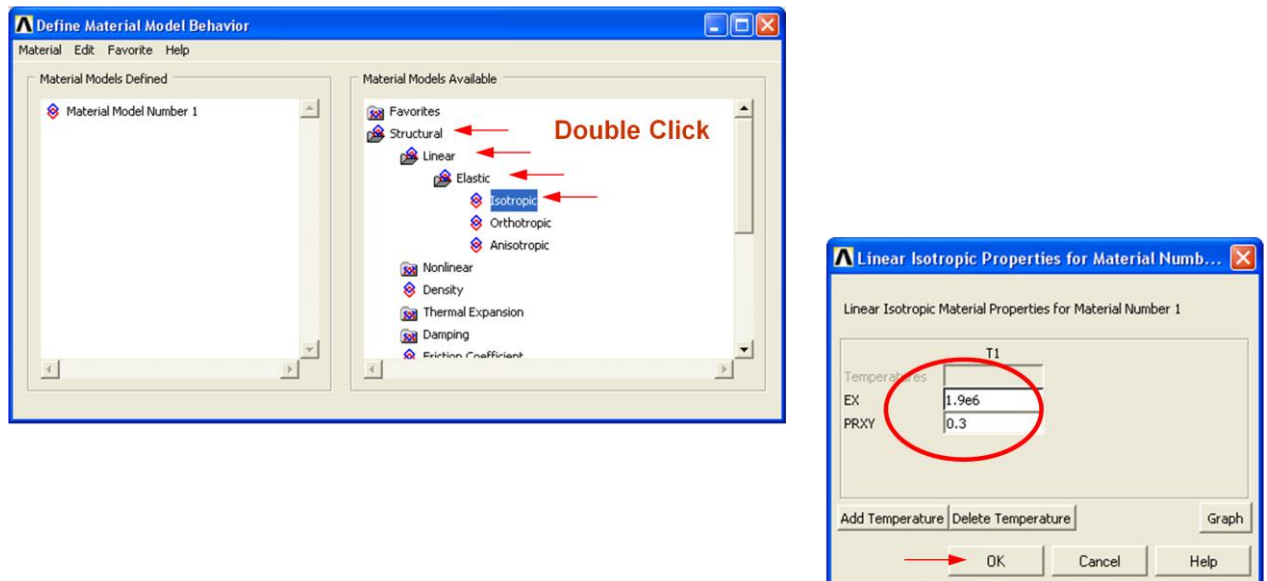


Figure4-6 : Introduction des propriétés des matériaux dans ANSYS

5- Créer le modèle :

ANSYS Main menu: Preprocessor → Modeling → Create → volume → Blocks → By 2 Corners and Z

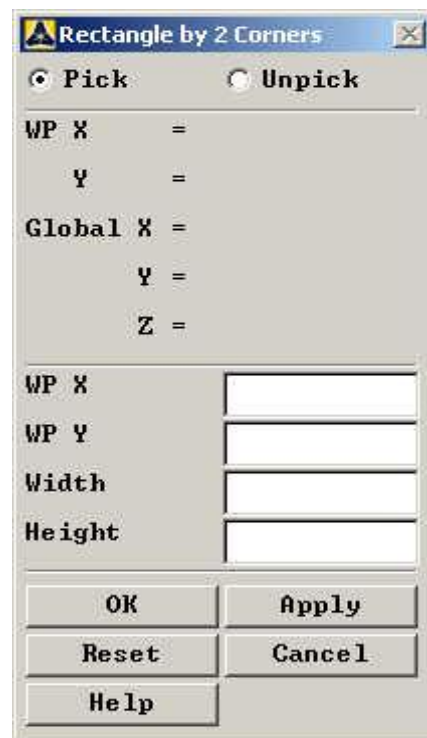


Figure4-7 : Création du modèle dans ANSYS

6- Le maillage : (Meching)

Preprocessor → Meshing → Size Controls → Manual Size → Lines → All Lines → entrer la taille de l'élément fini.

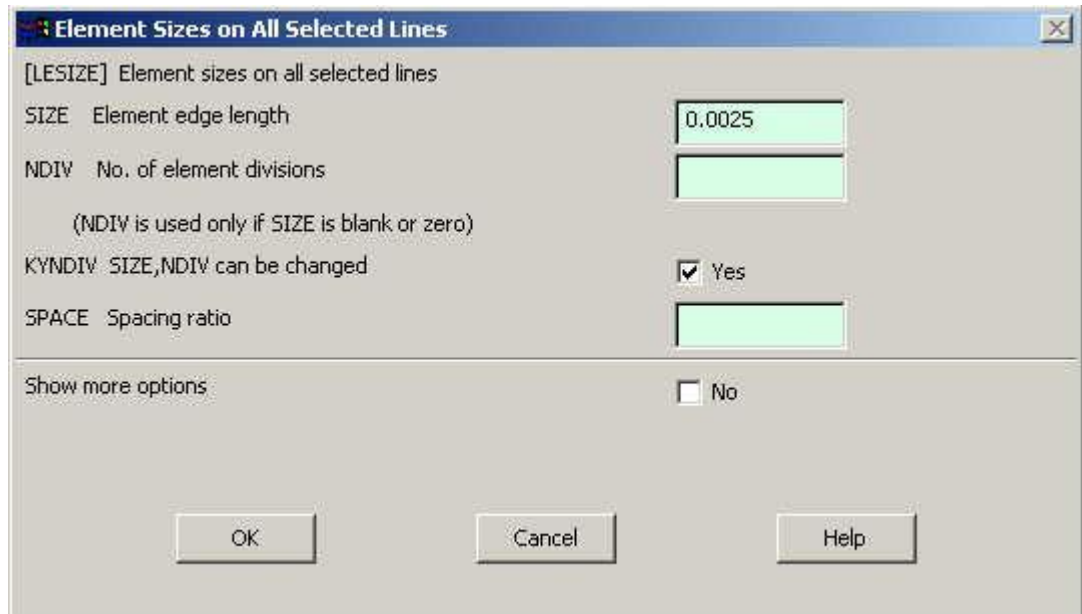


Figure4-8 : le maillage en éléments finis

Preprocessor → Meshing → Mesh Attributes → Default Attributes → cliquer sur l'élément → **pick all → OK** , le maillage apparait

7- Définir les conditions aux limites :

ANSYS Main menu: **Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement →**

Symmetry B.C. → On Nodes.

8- Appliquer les charges :

ANSYS Main menu: **Solution → Define Loads → Apply → Structural → Forces → Symmetry B.C. → On Nodes.**

II – Solveur

- 1- Main Menu →Solution →Analysis Type →New Analysis →choisir le type d'analyse → OK .
- 2- Entrer l'incrément de charge : (Set Solution Controls) :
Solution → Analysis Type → Sol'n Control...
- 3- Solution →Solve →Current LS.

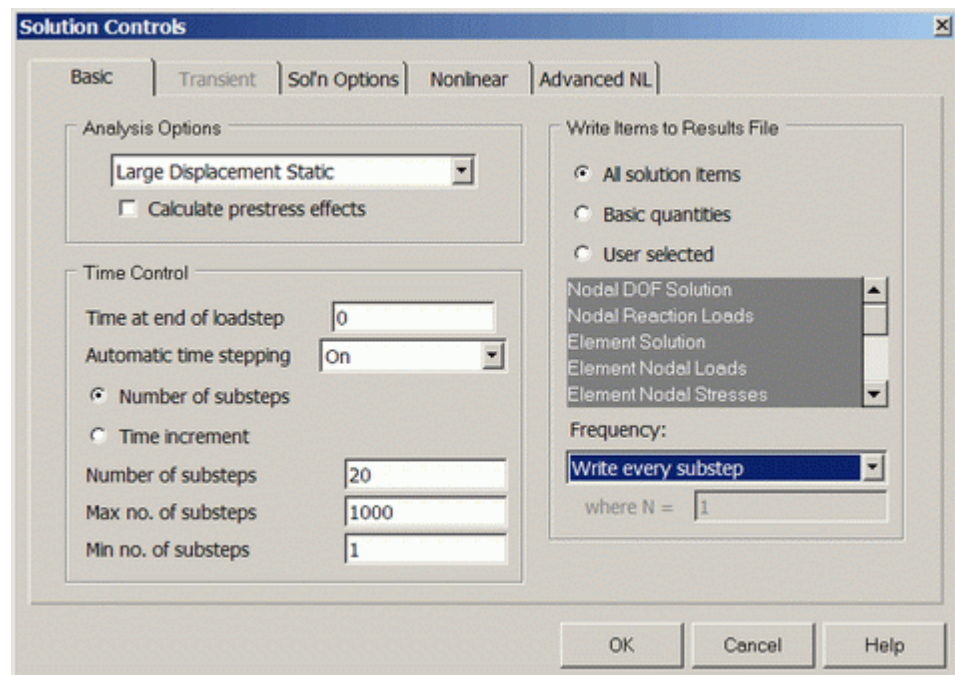


Figure4-9 : Introduction d'incrément de charge dans ANSYS

III – Post-processeur

General Postprocessing → List Results →Nodal Solution.

4-2- Structure du programme non linéaire:

Les étapes de calcul sont les suivantes :

- 1- Introduction des données nécessaires pour le maillage.
- 2- Introduction des conditions aux limites.
- 3- Génération du maillage en tenant compte des aciers longitudinaux et verticaux.

[Les instructions 1,2 et 3 sont exécutées par le **module 1** (génération du maillage
Construction de la matrice de rigidité)].

- 4- Appliquer un incrément de charge Δf_i .
- 5- Début de la procédure itérative par la méthode de Neuton Raphson.
- 6- Analyse par la méthode des éléments finis.

[L'instruction 6 est exécutée par le **module 2** (Analyse par la méthode des éléments finis)].

- 7- Evaluer le vecteur des contraintes résiduelles $\{\sigma_0\}$ et le vecteur des forces résiduelles $\{f_0\}$.

[L'instruction 7 est exécutée par le **module 3** (Analyse non linéaire)].

- 8- Calculer la norme du vecteur des forces résiduelles $\{f_0\}$:

- Si la norme de $\{f_0\}$ est inférieure à la tolérance, la convergence est vérifiée.
- Si le chargement final n'est pas atteint :
Appliquer un nouvel incrément,
Répéter les étapes précédentes à partir de (4).
- Si la norme de $\{f_0\}$ est supérieure à la tolérance, la convergence n'est pas vérifiée,

Deux cas se présentent :

- Si le nombre d'itérations maximum n'est pas atteint ;
Répéter les étapes précédentes à partir de (5).
- Si le nombre d'itérations maximum est atteint, ce qui correspond au palier horizontal de la courbe charge - déplacement .Alors la charge ainsi trouvée correspond à la charge ultime.

- 9- Affichage des résultats.

- Toutes les étapes du calcul sont résumées dans l'organigramme suivant :

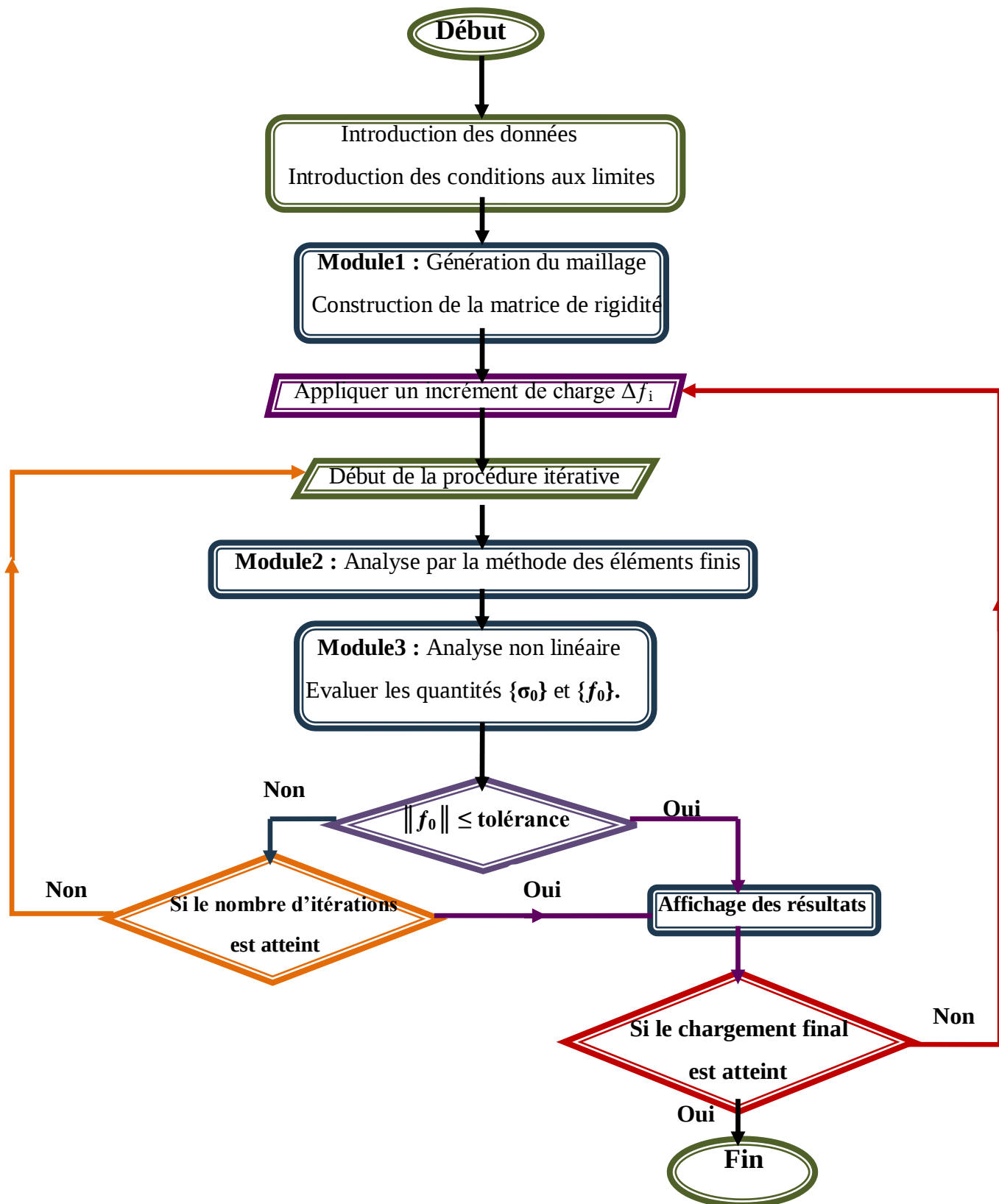


Figure 4-10- Etapes de calcul du programme non linéaire

4-2-1- Description des modules :

Il y'a trois modules à considérer :

4-2-1-1- Module 1 : Génération du maillage

L'un des inconvénients majeurs de l'utilisation de la méthode des éléments finis réside dans l'élaboration des données. Ces données comprennent les numérotations des éléments et des nœuds, la table de connectivité des éléments, les coordonnées cartésiennes des nœuds ainsi que les conditions aux limites. De ce fait, un générateur du maillage est utilisé. Il permet de minimiser la demi-largeur de bande et d'inclure les conditions aux limites les plus diverses telles que les déplacements imposés. Il est basé sur la méthode de génération par super élément initialement développée par **Zienkiewics et Phillips (1971)** dont le principe de base peut se résumer comme suit : « **à l'aide d'une transformation géométrique, le super élément est transformé en un carré de référence ; le maillage est réalisé sur celui-ci pour être ensuite transformé via la transformation inverse au super élément** ».

4-2-1-2-Module 2 : Assemblage des matrices de rigidité et résolution du système d'équations

Cette partie est détaillée par Smith et Griffiths **(1988)**. Elle calcule la matrice de rigidité de chaque élément et l'assemble dans le vecteur qui contient la matrice de rigidité globale. Le système d'équations résultant est résolu avec la méthode de Gauss.

4-2-1-3-Module 3 : Analyse non linéaire

-Pour chaque élément:

- Calculer le vecteur incrémental du déplacement $\{\Delta\delta_i\}$ correspondant à l'incrément de charge Δf_i ;

-Pour chaque point de Gauss:

- Calculer le vecteur incrémental des déformations $\{\Delta\varepsilon^e\}$ et de contraintes $\{\Delta\sigma^e\}$ correspondant ;
- Calculer le vecteur total des contraintes par addition des valeurs incrémentales aux valeurs Précédentes : $\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + \{\Delta\sigma^e\}$
- Calculer les contraintes principales σ_1 et σ_2 et la direction principale ψ ;
- Vérifier l'état de contraintes:

-Si l'état de contraintes est en **compression-compression** ou **tension-compression** :

→ Le comportement est gouverné par la plasticité ;

-Si l'état de contraintes est en **tension-tension** :

→ Le comportement est gouverné par la fissuration.

Deux cas du calcul se présentent :

4-2-1-3-1-calcul à la plasticité du béton :

- Si $\sigma_1 < 0$ ou $\sigma_2 < 0$, on calcule la valeur de la fonction de charge f_i correspondant au vecteur des contraintes $\{\sigma_i\}$:

Initialement, on pose $f_0 = 0$ et $r = 0$;

Si $f_1 > 0$ et $f_0 < 0$,

- Calculer la valeur de r par son expression analytique
 - Evaluer la nouvelle quantité : $\{\sigma_n\} = \{\sigma_{n-1}\} + r \{\Delta\sigma^e\}$
 - Evaluer la nouvelle valeur du critère $f(\{\sigma_n\})$, le vecteur normal à la surface de charge — et la matrice de plasticité $[D]^P$,
 - Déterminer la nouvelle valeur de r : $r_1 = 1 - r$,
 - Calculer la quantité : $\{\varepsilon_n\} = \{\varepsilon_{n-1}\} + r_1 \{\Delta\varepsilon^e\}$.
 - Evaluer le vecteur de contraintes résiduelles : $\{\sigma_0\} = [D]^P \cdot \{\varepsilon_n\}$
- Sinon le vecteur de contraintes résiduelles $\{\sigma_0\}$ du à la plasticité est nul.

4-2-1-3-2- Calcul à la fissuration du béton :

- Si $\sigma_1 > f_t$ on forme la nouvelle matrice d'élasticité du béton par son expression analytique (13) $[D] = [P]^T \cdot [D_c] \cdot [P]$ et on calcule le vecteur de contraintes résiduelles $\{\sigma_0\}$ par l'équation (15).
- Sinon le vecteur de contraintes résiduelles, $\{\sigma_0\}$, du à la fissuration est nul.

4-2-1-3-3 -Calcul à plasticité des armatures :

Si un élément est armé, on ajoute à la rigidité du béton celle liée à l'acier.

Comme l'acier est caractérisé par un même comportement en tension et en compression, il est nécessaire de vérifier son comportement à la plasticité. Pour cela, un modèle linéaire parfaitement plastique est utilisé. Si la contrainte uniaxiale dépasse la valeur de la contrainte limite d'élasticité de l'acier, l'armature se plastifie et le vecteur résiduel de contraintes résultant s'ajoute à celui du matériau béton.

Une fois que la composante de vecteur de contraintes résiduelles, $\{\sigma_0\}$, pour le béton fissuré ou plastifié et de l'acier est connue en chaque point de Gauss, on calcule le vecteur de forces résiduelles, $\{f_0\}$, pour chaque élément par l'expression suivante $\{f_0\} = [B]^T \cdot \{\sigma_0\} \cdot dV$. Ensuite, on assemble vecteur global des forces résiduelles qui sera redistribué aux éléments moins sollicités tout en mettant à jour les matrices de rigidité.

L'évaluation de vecteur des contraintes résiduelles est résumée dans l'organigramme suivant :

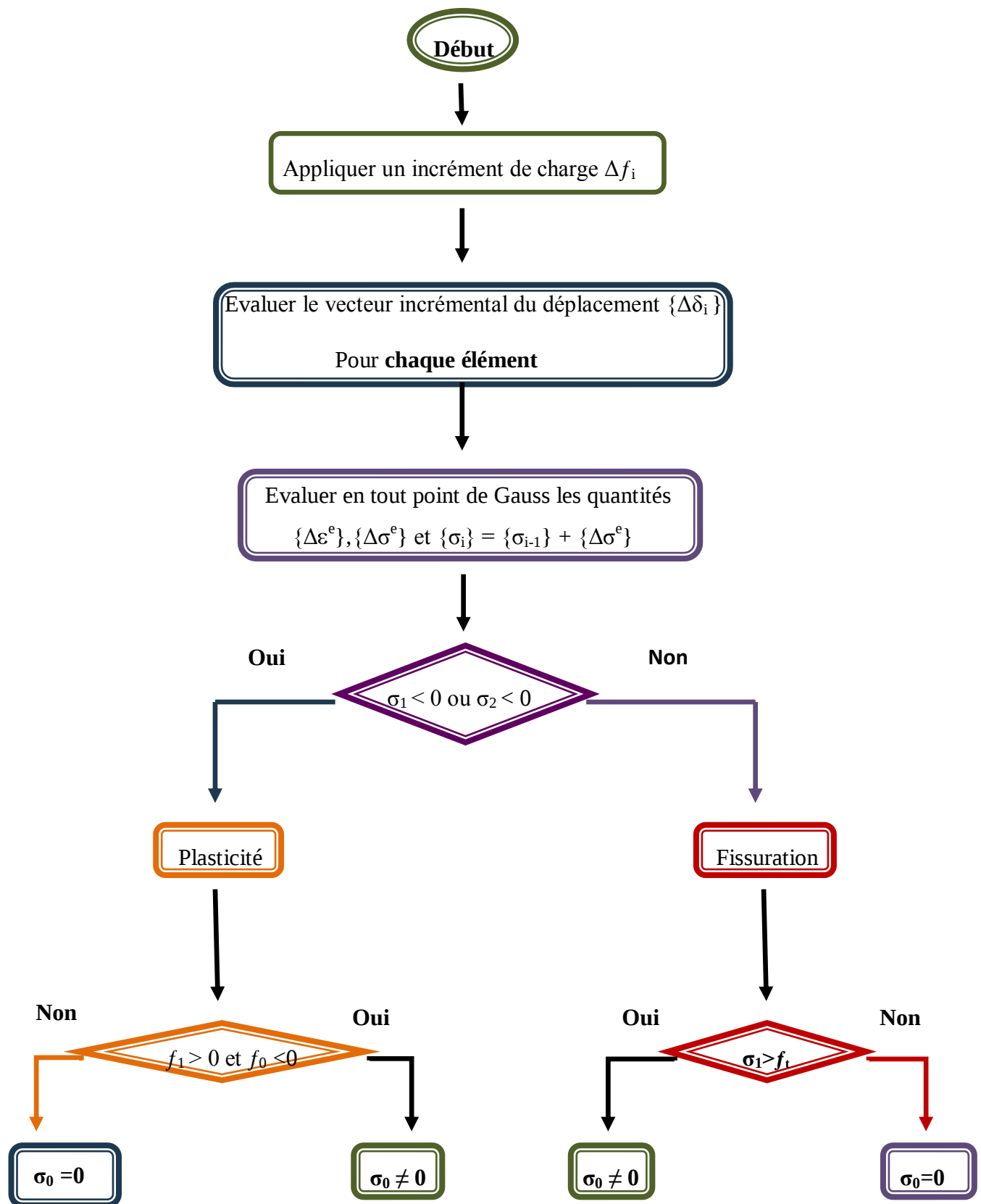


Figure 4-11 : Etapes de calcul du vecteur de contraintes résiduelles dues à La fissuration.

4-3- L'effet de fissuration du béton dans l'analyse par éléments finis :

Ngo et Scordelis ont présenté la première fois l'effet de la fissuration dans l'analyse par éléments finis des structures en béton armés. Depuis, de nombreux chercheurs (Alfaia et autres ; DeBorst ; Loo et Guan ont apporté des contributions substantives dans ce domaine. Il existe habituellement deux approches par élément finies pour simuler la fissuration du béton ; l'approche de la fissure discrète et l'approche de la fissure répartie.

Basé principalement sur la mécanique de la rupture (Shah et autres ; Bazant et Planas , l'approche de la fissure discrète considère la propagation de la fissure comme le résultat de la singularité des contraintes ou de libération de l'énergie de déformation au pic de la fissure. Des fissures sont traitées directement en tant que discontinuités géométriques, où on assume généralement que la partie intacte du béton se comporte d'une manière élastique, alors que la propagation de la fissure est modélisée en changeant la topologie du modèle par élément fini. La séparation des deux faces de la fissure peut être accomplie en présentant des nœuds doubles additionnels et remailler le domaine local autour de la fissure. Par conséquent, le remaillage adaptatif est exigé pour mettre en application la simulation.

Considérant que de nombreuses microfissures initiales ont existé dans le béton même avant que les divers chargements structuraux et environnementaux s'appliquent, alors que les processus de dégradation causent habituellement les microfissures dense et uniformément distribuées, il est extrêmement difficile de mettre en application la simulation des fissures dans le béton provoquées par les processus couplés de dégradations multiples en utilisant l'approche de la fissure discrète. Dans le cas de la fissure répartie, le béton fissuré est décrit comme un milieu continu fictif, et la propagation de la fissure est modélisée dans le cadre du continuum.

On assume que les fissures sont spatialement réparties sur le volume entier représenté par un élément fini local, ou seulement par le volume attaché à un point d'intégration dans l'élément fini. La matrice de rigidité de chaque élément du béton est modifiée en conséquence pour s'adapter à la dégradation mécanique due à la fissuration. Sans changer la topologie du modèle par élément fini, cette approche est prouvée efficace une fois incorporée dans l'analyse par élément fini (Darwin; Kachlakev et autres). Quand le béton est exposé aux procédés couplés de transfert thermique et de transport d'humidité, le volume retenu change habituellement de résultats dans les microfissures relativement denses et réparti sur le volume entier du béton.

Par conséquent, l'approche par fissure répartie est un choix raisonnable dans cette étude pour mettre en application la simulation de la propagation des fissures.

Le logiciel commercial **ANSYS** par élément finis est adopté ci-dessus pour simuler les réponses mécaniques du béton soumises aux processus couplés de dégradation multiples, où le modèle constitutif uniaxial est adopté. Un élément solide à 8-nœuds à trois dimensions **SOLID65** est conçu particulièrement pour modéliser le béton. Cet élément en béton a huit nœuds avec trois degrés de liberté dans chaque nœud, translation dans les directions nodales de x, d'y et de z, et huit points d'intégration à l'intérieur. Basé sur modèle constitutif indiqué et du critère de rupture, l'élément en béton permet des armatures répartie, la déformation plastique, fissuration en tension suivant les trois directions orthogonales, capacité de transfert de cisaillement, et écrasement en compression. Le critère de rupture de William et Warnke sous l'état de contraintes multiaxial est adopté pour évaluer l'initiation de la rupture et pour identifier les modes de défaillance correspondants (fissuration, écrasement) au centre d'un élément du béton où dans ses points d'intégration. Le critère est exprimé comme suit :

—

.....

(4-1)

Où F est une fonction des contraintes principales, S est la surface de rupture spatiale exprimée en termes de contraintes principales et des propriétés du matériau béton, et σ_{yp} est la contrainte maximale de compression du béton. La rupture de l'élément du béton où celles de ses points d'intégration est assumé atteinte , si seulement si l'Equation(4-1)) est satisfaite.

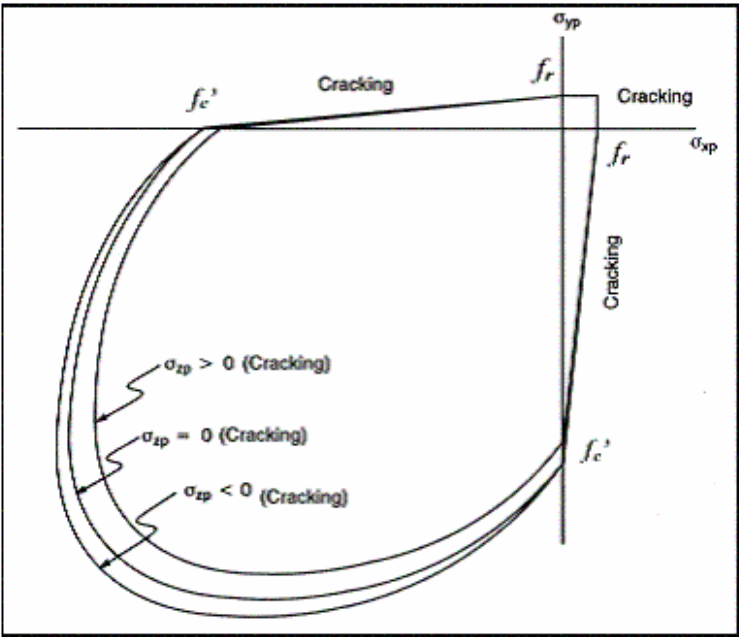


Figure 4-12 : Surface de rupture projetée pour le béton

La surface de rupture de la Figure (4-12) ci-dessus peut être divisée en quatre domaines selon les différents modes de rupture suivants :

1. (compression – compression – compression)

Le béton est supposé écrasé.

2. (tension – compression – compression)

La fissure sera produite dans la direction perpendiculaire à

3. (tension – tension – compression)

La résistance ultime de traction décroît linéairement avec la diminution de

Cependant, la fissure apparaisse dans les plans perpendiculaires aux contraintes principales ou séparément.

4. (tension – tension – tension)

Si l'Eq. (4-1) est satisfaite, la résistance maximale à la tension est assumée égale à . Cependant, la fissure apparaisse dans les plans perpendiculaires aux contraintes principales , ou .

Dans tous les quatre cas ci-dessus, est la 1^{ère} contrainte principale, et est la 3^{ème} contrainte principale. La fonction F et la surface de rupture S prennent différentes formes pour s'adapter à des modes de défaillance correspondants. Pendant la production de n'importe quel mode de défaillance, la matrice de rigidité de l'élément du béton est modifiée en conséquence pour tenir compte de la dégradation mécanique induite par la fissuration. La matrice générale de rigidité pour l'élément du béton armé est définie comme :

$$\dots\dots\dots (4-2)$$

Avec N_r est le nombre de nœuds .

On note dans l'Eq (4-2) ci-dessus que les contributions à la rigidité élémentaire générale faite par le béton seul et les armatures peuvent être distinguées facilement l'une par rapport à l'autre. Le concept des armatures réparties a été adopté implicitement. On suppose que les armatures ont une rigidité dirigée seulement suivants la direction uniaxiale et est supposée uniformément répartie sur tous les éléments finis. La rigidité des armatures dans la direction uniaxiale est donnée par son pourcentage volumique.

La matrice de rigidité du béton intact seul est donnée par l'expression suivante:

$$\frac{1}{E_c} \left(\frac{\sigma_x}{1-\nu} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z}{2} \right) \right) + \frac{\nu}{E_c} \left(\frac{\sigma_y}{1-\nu} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_z}{2} \right) \right) + \frac{\nu}{E_c} \left(\frac{\sigma_z}{1-\nu} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y}{2} \right) \right) \quad (4-3)$$

où ν est le coefficient de Poisson, et E_c est le module d'élasticité du béton.

Si la fonction des armatures réparties de l'élément du béton SOLID65 est utilisée, pour l'armature i dans la direction x de l'élément en béton, son influence vis à vis de l'élément du béton peut être reflétée comme:

$$\frac{E_s}{E_c} \left(\frac{\sigma_x}{1-\nu} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z}{2} \right) \right) \quad (4-4)$$

Où E_s est le module d'élasticité de l'armature.

Dans un élément en béton, la fissuration se produit quand la contrainte principale de tension dans n'importe quelle direction excède la résistance maximale à la traction. Après fissuration, le module d'élasticité de l'élément du béton est réduit à zéro seulement dans la direction parallèle à la direction de la contrainte principale de tension. L'écrasement se produit quand chacune des trois contraintes principales est compressive et l'état de contrainte se trouve en dehors de la surface de rupture S . Plus tard le module d'élasticité est réduit à zéro dans toutes les directions et l'intégrité structurale est complètement dégradée .

La fissuration est permise dans trois directions orthogonales au centre de chaque élément du béton ou au niveau de ses points d'intégration. Après fissuration, la matrice de rigidité de l'élément du béton initialement intact est modifiée en conséquence pour s'adapter à la dégradation mécanique, où la fissure est effectivement traitée en tant que " une bande répartie virtuelle " plutôt qu'une fissure

discrète. La présence d'une fissure à un point d'intégration d'un élément du béton est représentée en introduisant un plan de faiblesse dans la direction normale à la face de la fissure.

Le coefficient de transfert de cisaillement est introduit en particulier pour représenter un facteur de réduction de résistance au cisaillement pour ces charges suivantes qui induisent le glissement à travers les faces ouvertes des fissures. La valeur de β s'étend de 0 à 1, où 0 représente une fissure lisse et une perte complète de transfert de cisaillement, et 1 représente une fissure rugueuse et pas de perte de transfert de cisaillement. La valeur $\beta = 0.5$ est adoptée dans le chapitre 5.

La matrice de rigidité modifiée de l'élément de béton après fissuration dans la direction x peut être exprimée comme suit:

$$\begin{bmatrix}
 \text{---} & & & & & \\
 & \text{---} & \text{---} & & & \\
 & & \text{---} & \text{---} & & \\
 & & & \text{---} & \text{---} & \\
 & & & & \text{---} & \\
 & & & & & \text{---}
 \end{bmatrix}
 \dots\dots\dots (4-5)$$

où le subscript signifie que les relations constitutives se rapportent à un système de coordonnées parallèle aux directions des contraintes principales avec les axes x et y perpendiculaires à la face de la fissure. E_c est le module sécant, où α est le multiplicateur pour la quantité de relaxation des contraintes de tension, qui peut être dérivée à partir de l'énergie de fracture du béton comme:

$$\text{---} \dots\dots\dots (4-6)$$

Si la fissure se ferme, à la différence des contraintes de tension, les contraintes de compression normales au plan de la fissure peuvent toujours être transmises à travers la fissure. La matrice de rigidité correspondante pour l'élément en béton avec la fissure fermée dans la direction x seulement peut être exprimée comme suit:

$$\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{yy}} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} \quad (4-7)$$

La fissuration est permise dans trois directions orthogonales au centre de l'élément du béton ou au niveau de ses points d'intégration. L'état ouvert ou fermé d'une fissure dans n'importe quelle direction est déterminé par le signe de la " déformation de la fissure ". Pour le cas d'une fissure possible dans la direction " 1 ", la déformation de la fissure est évaluée comme suit:

$$\epsilon_{f1} = \epsilon_{xx} \cos^2 \theta + \epsilon_{yy} \sin^2 \theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta \quad (4-8)$$

où ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et ϵ_{xy} sont les trois composantes normales des déformations par rapport à la direction de la fissure [4,5]. Si la déformation de la fissure est négative, alors on assume que la fissure associée est fermée, autrement on assume que la fissure associée est ouverte. Il existe quatre états de fissure: fissure écrasée, fissure ouverte, fissure fermée, et intact, pour la fissure dans n'importe quelle direction. En conséquence, il y a au total seize combinaisons possibles d'états de fissures (voir le tableau 4-1) et des modifications correspondantes dans les relations constitutives pour un élément du béton ou un de ses points d'intégration.

Pour l'analyse des contraintes, un élément à 8-nœuds en béton à trois dimensions correspondant **SOLID65** avec trois degrés de libertés dans chaque nœud est choisi. L'élément en béton **SOLID65** sera discuté en détail ultérieurement. Les propriétés du matériau assumées pour le béton dans cet exemple sont récapitulées dans le tableau (4-1)

Sauf indication contraire, le béton considéré dans cette étude est un béton structural normal (normal weight concrete) construit avec une matrice continue de pâte de ciment et des agrégats de poids normaux, et il possède une valeur intermédiaire de résistance à la compression par rapport aux valeurs observées en pratique. Comme modèle macroscopique, la méthode de simulation n'exige pas de données concernant la composition du béton. Plutôt, elle emploie seulement les propriétés macroscopiques du matériau énumérées dans le tableau (4-1) En revanche, un modèle microscopique serait concentré davantage sur les effets de la composition du matériau. Les facteurs internes, c.-à-d., paramètres du matériau (tels que le rapport eau/ciment w/c, la quantité de ciment, etc.) Peuvent exercer une influence considérable sur les réponses mécaniques du béton. Cependant, cette étude se

concentre seulement sur la réponse mécanique du béton induite par les facteurs externes et les divers chargements environnementaux au lieu des facteurs internes.

Tableau 4-1- Combinaison des états de fissures :

Numéro de combinaison	Etat de fissure Dans la direction 1†	Etat de fissure Dans la direction 2	Etat de fissure Dans la direction 3
1	écrasée	écrasée	écrasée
2	Ouverte	Intacte	Intacte
3	Fermée	Intacte	Intacte
4	Ouverte	Ouverte	Intacte
5	Ouverte	Ouverte	Ouverte
6	Fermée	Ouverte	Ouverte
7	Fermée	Ouverte	Intacte
8	Ouverte	Fermée	Ouverte
9	Fermée	Fermée	Ouverte
10	Ouverte	Fermée	Intacte
11	Ouverte	Ouverte	Fermée
12	Fermée	Ouverte	Fermée
13	Fermée	Fermée	Intacte
14	Ouverte	Fermée	Fermée
15	Fermée	Fermée	Fermée
16	Intacte	Intacte	Intacte

(† – direction 1 dénote la direction de la 1^{ère} contrainte principal, et)

CHAPITRE 5

APPLICATION ET DISCUSSION DES RESULTATS

5-1-Introduction :

Le comportement des structures en béton nécessite la compréhension des réponses de tous ses composants. Il y'a un certain nombre de méthodes pour modéliser les structures en béton par des approches numériques et analytiques. L'analyse par éléments finis est l'une des méthodes numériques largement appliquée aux structures en béton. Elle est basée sur l'utilisation du comportement non linéaire des matériaux. L'analyse par éléments finis fournit un outil qui peut simuler et prévoir les réponses des éléments en béton armé et précontraint. Un certain nombre de codes commerciaux d'analyse en éléments finis sont disponibles dans les marchés avec les techniques avancées dans l'analyse complexe.

N'importe quel essai peut être fait convenablement et rapidement par l'ingénieur en utilisant la méthode des éléments finis. Les modèles des matériaux non linéaires ont été intégrés dans plusieurs codes universels de calcul en éléments finis tels que, ABAQUS, ANSYS, STRAND7, ou MSC.NASTRAN. Ces modèles jouent un rôle essentiel dans l'analyse des réponses non linéaires puisque chaque composant du matériau a tendance à avoir un comportement contraintes-déformations compliqué. Parmi ces modèles, ANSYS prévoit un élément tridimensionnel

(Solide 65) pour simuler le matériau fragile béton. C'est un élément iso paramétrique à huit nœuds avec les points d'intégration pour contrôler la fissuration et l'écrasement.

Le dispositif d'élément dans le modèle de fissures continues (smeared crack model) contient un algorithme de plasticité pour tenir compte de l'écrasement du béton dans les zones de compression ; Le comportement élastique linéaire gouverne l'analyse jusqu'à dépasser la contrainte de traction ou de compression spécifiée. Une fois les contraintes principales aux points d'intégration atteignent la limite de traction et ou compression, la fissuration ou l'écrasement de l'élément en béton peut se former. Puis les sections d'écrasement ou de fissuration se formeront dans la perpendiculaire avec les contraintes résiduelles localement redistribuées à la direction des contraintes principales. Celles-ci exigent la méthode itérative de calcul non linéaire avec un ordinateur à haute performance.

5-2- la modélisation en éléments finis :

5-2-1- le béton armé :

Un élément solide à huit-nœuds, Solid65, a été employé pour modéliser le béton. L'élément solide à huit nœuds avec trois degrés de liberté pour chaque nœud : translations dans les directions nodales x, y, et z. L'élément est capable d'avoir une déformation plastique, en se fissurant dans les trois directions orthogonales, et l'écrasement. Les endroits de la géométrie et de nœud pour ce type d'élément sont montrés sur la figure (5-1)

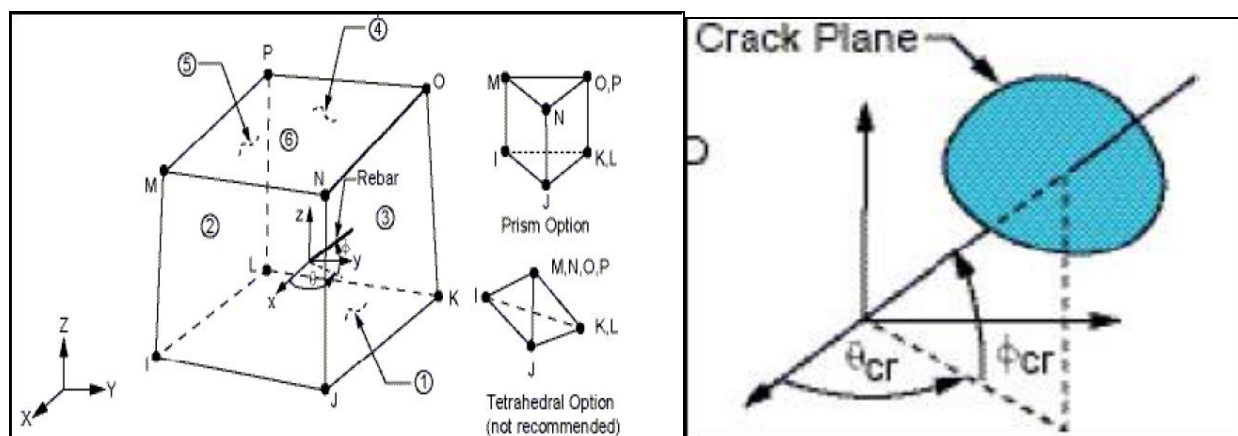


Figure (5-1): Solide en béton armé Solid65 – 3-D (ANSYS 8.0)

5-2-2-L'acier :

Pour modéliser le renforcement dans le béton, une des deux méthodes est habituellement suivie. Dans la première méthode le renforcement est simulé à des éléments de barres avec les propriétés géométriques semblables au renforcement original (figure 5-2-a). Ces éléments peuvent directement être engendrés dans les nœuds du modèle. Cette méthode de discrétisation est utile dans les modèles en béton simples. La deuxième idéalisation du renforcement d'acier est la méthode du béton continu d'élément (utilisée dans ce document). Dans ce cas ; le béton et le renforcement sont discrétisés dans des éléments avec les mêmes limites géométriques et les effets du renforcement sont ramenés à une moyenne dans l'élément concernant (figure 5-2-b). Des fissures peuvent également être idéalisées dans le type discret ou le type continu.

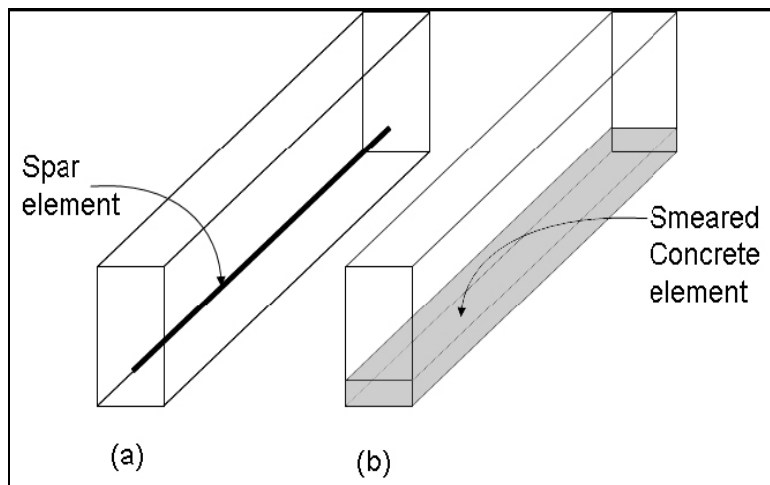


Figure (5-2) : le modèle discret et le modèle continu

Le rapport volumique de l'acier de renforcement au béton avec la direction de l'acier est donné pour chaque volume.

Les propriétés de l'acier nécessaires ; la densité, le module d'élasticité, et le coefficient de Poisson Sont montrés dans le tableau 1.

Tableau 1 : Propriétés matérielles pour le modèle d'élément fini d'ANSYS :

	Le béton	L'acier de renforcement
Densité	2400 kg/m ³	7850 kg/m ³
Module d'élasticité	30000 Mpa	200000 Mpa
Coefficient de Poisson	0.2	0.3
f_{c28}	30 Mpa	
f_{t28}	3.0 Mpa	
f_y		240 Mpa

5-2-3-critère de rupture pour le béton :

Le modèle est capable de prévoir la rupture pour le matériau béton. Les modes de rupture de La fissuration et de l'écrasement sont expliqués. Les deux paramètres de force introduits c.-à-d., résistances ultimes à la compression et la traction uniaxiales sont nécessaires pour définir la surface de rupture pour le béton. En conséquence, un critère de rupture du béton dû à un état multiaxial d'effort peut être calculé (William et Warnke 1975). Dans un élément en béton, la fissuration se produit quand la contrainte de traction principale dans n'importe quelle direction se trouve en dehors de la surface de rupture. Après la fissuration, le module élastique de l'élément en béton est mis à zéro dans la direction parallèle à la direction des contraintes principales de

traction. L'écrasement se produit quand toutes les contraintes principales sont de compression et se trouvent en dehors de la surface de rupture ; plus tard, le module élastique est mis à dans toutes les directions , et l'élément disparaît effectivement.

5-2-4-Introduction des données dans ANSYS:

Pour le béton, ANSYS exige d'introduire les propriétés du matériau telles que : le Module d'élasticité (E_b) .Résistance ultime à la compression uniaxiale (f_c). Résistance ultime à la traction uniaxiale (module de la rupture) (f_r), Le coefficient de Poisson (ν), Coefficient de cisaillement (β), la relation entre les contraintes de traction et de compression uniaxiales du béton.

Le coefficient du transfert de cisaillement β représente l'état d'ouverture de fissure, La valeur de β s'étend de 0.0 à 1.0, avec : 0.0 représente une fissure lisse (perte complète de transfert de cisaillement) et 1.0 représente une fissure rugueuse (aucune perte de transfert de cisaillement) (ANSYS 8.0). La valeur de β utilisé dans plusieurs études des structures en béton armé, cependant, varie entre 0.2 et 0.5 .Un certain nombre d'analyses préliminaires ont été essayées dans cette étude avec de diverses valeurs pour le coefficient de transfert de cisaillement dans cette marge, mais des problèmes de convergence ont été produits à de basses charges avec β inférieur à 0.2.Par conséquent, le coefficient de transfert de cisaillement utilisé dans cette étude était égal à 0.3.

Les paramètres requis pour définir matériaux du modèle dans ANSYS sont indiqués dans le tableau 2 suivant :

Tableau 2 : Propriétés des matériaux du modèle :

Material model Number	Element Type	Material Properties		
1	Solid 65	Linear Isotropic		
		EX	30000 Mpa	
		PRXY	0.2	
		Multilinear Isotropic		
			Strain	Stress
		point 1	0.00036	9
		point 2	0.0006	15
		point 3	0.0013	27
		point 4	0.00189	29
		point 5	0.00243	30
		Concrete		
		ShrCf-Op	0.3	
		ShrCf-Cl	1	
		UnTenSt	3	
		UnCompSt	-1	
		BiCompSt	0	
		HydroPrs	0	
		BiCompSt	0	
		UnTensSt	0	
TenCrFac	1			
2	Solid 65	Linear Isotropic		
		EX	2E+005 Mpa	
		PRXY	0.3	
		Bilinear Isotropic		
		Yield Stss	2E+005 Mpa	
		Tang Mod	0.27	

Le matériau 1 du modèle se rapporte à l'élément Solid65 non renforcé. L'élément Solid65

exige des propriétés matérielles linéaires isotropes et multilinéaires isotropes pour modéliser correctement le béton. Le matériau isotrope multilinéaire emploie le critère de rupture de Von Mises avec le modèle de Willam et de Warnke (1974) pour définir la rupture du béton. EX est le module d'élasticité du béton (E_b) et PRXY est le coefficient de Poisson (ν).

Le module a été basé sur l'équation :

$$E_b = 2.74 \sqrt{f_{c28}} \quad (5-1)$$

Avec une valeur de f_{c28} égale à 30Mpa, le coefficient de Poisson prend la valeur de 0.3.

Le rapport contrainte uniaxiale de compression - déformation pour le modèle du béton a été obtenu en utilisant les équations suivantes pour calculer la courbe de contrainte-déformation isotrope multilinéaire pour le béton (MacGregor 1992).

$$f = E_b \varepsilon / 1 + (\varepsilon / \varepsilon_0) \quad (5-2)$$

$$\varepsilon_0 = 2 f_{c28} / E_b \quad (5-3)$$

$$E_b = f / \varepsilon \quad (5-4)$$

Où :

f = contrainte à toute déformation ε [Mpa].

ε = déformation à la contrainte f

ε_0 = déformation à la résistance ultime à la compression f_{c28}

La courbe contrainte-déformation isotrope multilinéaire mise en application exige à ce que premier point de la courbe soit défini par l'utilisateur. Elle doit satisfaire la loi de Hooke ;

$$E = \sigma / \varepsilon \quad (5-5)$$

La courbe multilinéaire est représentée sur la figure (5-3) suivante :

Contrainte Mpa

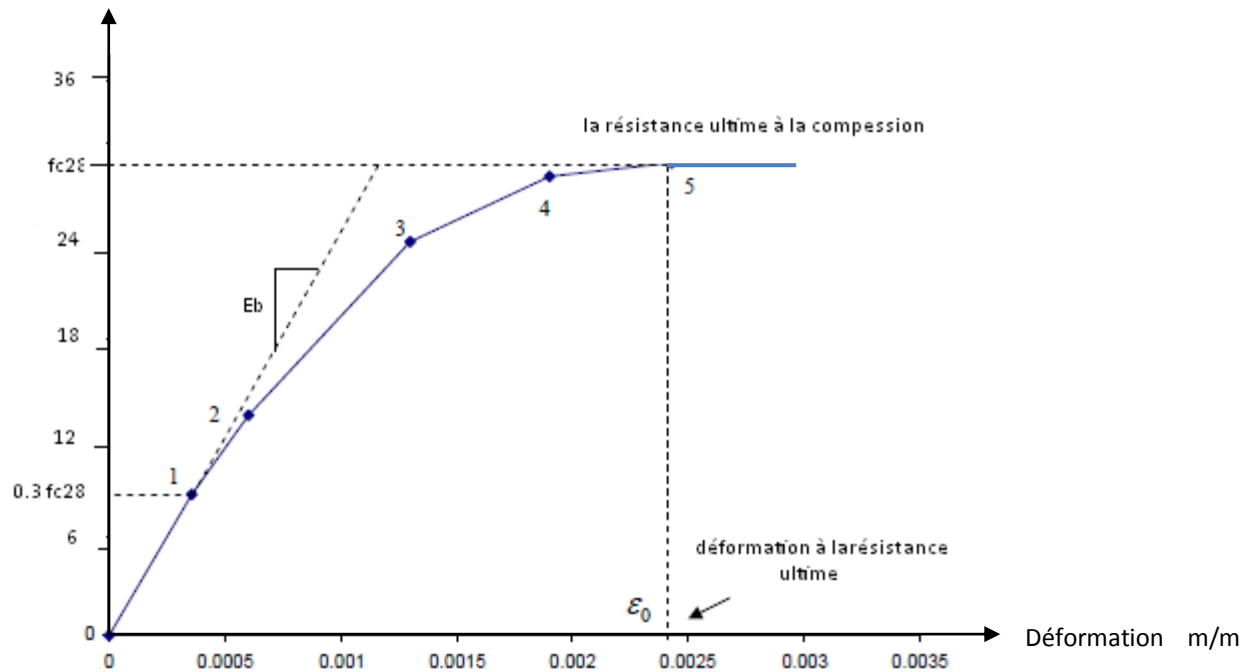


Figure (5-3) : la courbe contrainte-déformation du béton en compression

En compression, la courbe constitutive pour le béton est linéairement élastique jusqu' à environ 30% de la résistance maximale à la compression f_{c28} . Au-dessus de ce point, la courbe pénètre une région d'écrouissage tandis que la contrainte augmente non linéairement jusqu' à la résistance maximale de compression. Après qu'elle atteigne la résistance maximale à la compression, la courbe descend dans une région d'adoucissement des contraintes, et par la suite l'écrasement imminent se produit à la déformation ultime.

La réponse « après-pic » reflète la ductilité du béton, qui dépend fortement du niveau de l'emprisonnement latéral imposé sur le béton. En tension, la courbe de relation constitutive pour le béton est approximativement linéairement élastique jusqu' à la résistance à la traction maximale. Après ce point, le béton est considéré comme fissuré et la résistance à la traction diminue rapidement jusqu' à zéro (Bangash).

Pour déterminer la réponse mécanique du béton, ANSYS exige une relation uniaxiale de contrainte-déformation pour le béton. Développer un modèle de relation constitutif approprié pour le béton est un challenge, et des efforts substantifs ont été faits afin de proposer les divers

modèles numériques dans le passé (Hognestad , Desayi et Krishnan . Un modèle parfaitement plastique du type Druker-Prager est choisi dans cette étude, où la partie croissante de la courbe constitutive suit le modèle de Desayi et de Krishnan (Bangash) comme montré dans l'équation (5-2).

Après que la résistance maximale à la compression soit atteinte, un comportement parfaitement plastique est assumé jusqu'à la ruine qui se produise à la déformation ultime ε_0 . Selon le Comité Européen du Béton (Bangash), la déformation ultime ε_0 est assumée égale à 0,003. Quant à la relation constitutive uniaxiale pour la tension, un modèle élastique linéaire peut satisfaire la condition de simulation, et la phase d'adoucissement après que la résistance maximale à la traction f_t est atteinte puisse être négligée sans beaucoup d'erreur. Par conséquent, le modèle constitutif uniaxial proposé dans cette étude.

La figure (5-3) montre le rapport de contrainte-déformation utilisé pour cette étude et est basé sur le travail effectué par Kachlakev, et Al (2001). Le point 1, défini par $0.30 f_{c28}$, est calculé dans la partie linéaire (équation 5-4). Les points 2, 3, et 4 sont calculés à partir de l'équation (5-2), avec ε_0 obtenu par l'équation (5-3).

Des déformations ont été choisies et la contrainte a été calculée pour chaque déformation.

Le point 5 est défini à f_{c28} et $\varepsilon_0 = 0.00243$, la contrainte demeure constante et égale à f_{c28} jusqu'à ce que ε_0 atteint la valeur 0.003m/m.

L'introduction du modèle de Willam et Warnke (1974) dans ANSYS exige que différentes constantes soient définies. Ces neuf constantes sont : (SAS 2003)

1. Coefficients de transfert de cisaillement pour une fissure ouverte
(Shear transfer coefficients for an open crack);
2. Coefficients de transfert de cisaillement pour une fissure fermée
(Shear transfer coefficients for a closed crack) ;
3. Contrainte de fissuration à la traction uniaxiale
(Uniaxial tensile cracking stress)
4. Contrainte d'écrasement uniaxial positive
(Uniaxial crushing stress);
5. Contrainte d'écrasement biaxial
(Biaxial crushing stress (positive);
6. État hydrostatique ambiant de contraintes à utiliser avec les constantes 7 et 8
(Ambient hydrostatic stress state for use with constants 7 and 8);
7. Contrainte d'écrasement biaxial (positive) sous l'état des contraintes hydrostatiques.
(crushing stress (positive) under the ambient hydrostatic stress state);
8. Contrainte d'écrasement uniaxial (positive) Uniaxial sous l'état des contraintes
(hydrostatiques crushing stress (positive) under the ambient hydrostatic stress state
9. Multiplicateur de rigidité pour l'état de fissuration en traction
(Stiffness multiplier for cracked tensile condition).

5-2-5-la discrétisation en éléments finis :

Comme étape initiale, une analyse par éléments finis exige le maillage du modèle, figure (5-4). Autrement dit, Le modèle est divisé en un certain nombre de petits éléments, et pour avoir un résultat plus fiable on admet des éléments rectangulaires, et après chargement, les contraintes et les déformations seront calculées aux points d'intégration de ces petits éléments .Une poutre se compose de deux régions ; un élément en béton sans renforcement et un élément en béton avec un renforcement réparti, figure (5-5).

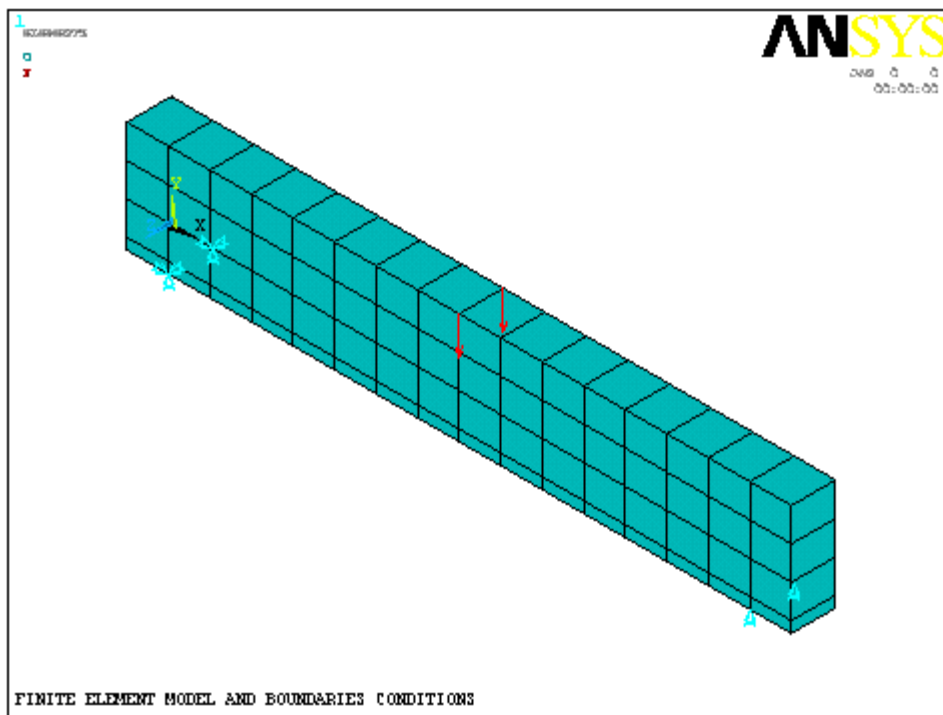


Figure 5-4 : le modèle d'éléments finis et les conditions aux limites.

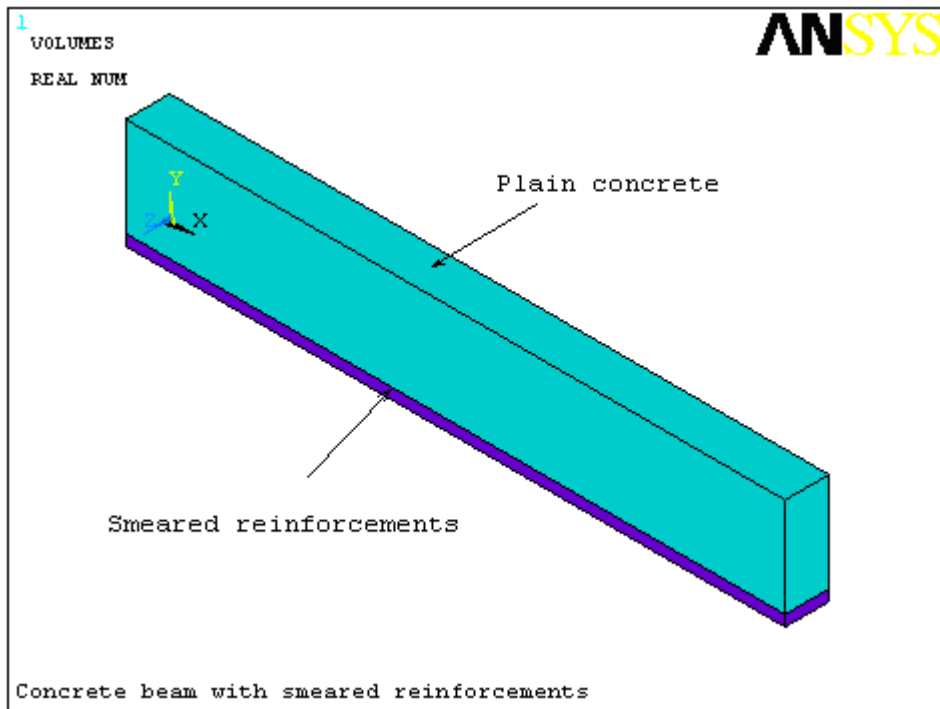


Figure 5-5 : l'élément en béton avec le renforcement réparti.

5- 2-6- L'analyse non linéaire :

En analyse non linéaire, la charge totale appliquée au modèle d'éléments finis est divisée en une série d'incrément de charges appelées pas de chargement. A la fin de chaque solution incrémentale, Une matrice de rigidité du modèle est adaptée pour représenter les changements non linéaires dans la rigidité structurale avant de procéder à l'incrément de charge suivant. Le programme ANSYS utilise les itérations d'équilibre de Newton-Rafsan pour mettre à jour la rigidité du modèle. Dans cette étude, pour les éléments solides en béton renforcé, des critères de convergence basés sur la force et le déplacement, les limites de tolérance de convergence sont initialement choisies par le programme d'ANSYS. On a constaté que la convergence de la solution pour le modèle était difficile à réaliser à cause du comportement non linéaire du béton renforcé, donc, les limites de tolérance de convergence ont été progressées jusqu'au maximum de 5 fois les limites de tolérance par défaut.(0.5 % pour la force d'écrasement et 5% pour le déplacement d'écrasement) afin d'obtenir la convergence de la solution

5-2-7- Pas de charge et détermination de la rupture pour le modèle d'élément fini :

Pour l'analyse non linéaire, un pas du temps automatique dans le programme ANSYS prévoit et contrôle la taille du pas de charge. Il est basé sur l'histoire de la solution précédente, si le comportement de convergence est lent, le pas du temps automatique augmentera l'incrément de charge jusqu'à une taille de pas de charge maximum choisie. Si le comportement de convergence est rapide, le pas du temps automatique abaissera l'incrément de charge jusqu'à ce qu'il soit égal à la taille de pas de charge minimale choisie. Les tailles de pas de charge maximale et minimale sont indispensables pour le pas du temps automatique.

5-3- But de l'étude :

Le but de cette étude est de montrer :

- Les différentes phases du comportement du modèle en éléments finis lors de l'apparition des fissures initiales et la résistance de l'acier jusqu'à la rupture de la poutre en béton.
- La capacité d'ANSYS software dans l'analyse et la prévision des modèles de fissure dans les poutres en béton armé.
- L'avantage de procéder la simulation numérique à la place de l'essai expérimental dans l'économie du temps et d'argent.
- L'avantage de procéder un maillage raffiné dans la précision des résultats.

5-4- Etude d'une poutre en béton armé :(*modèle de fissures continues*)

Afin d'étudier l'influence de la finesse du maillage par éléments finis sur la solution, des simulations, des essais de flexion ont été effectués avec deux maillages différents: maillage dit grossier (figure 5-6), maillage raffiné (figure 5-13).

5-4-1- Etude d'une poutre maillée grossièrement :

Dans cette poutre on admet un maillage en éléments finis de grande dimension, comme montré sur la figure (5-6) :

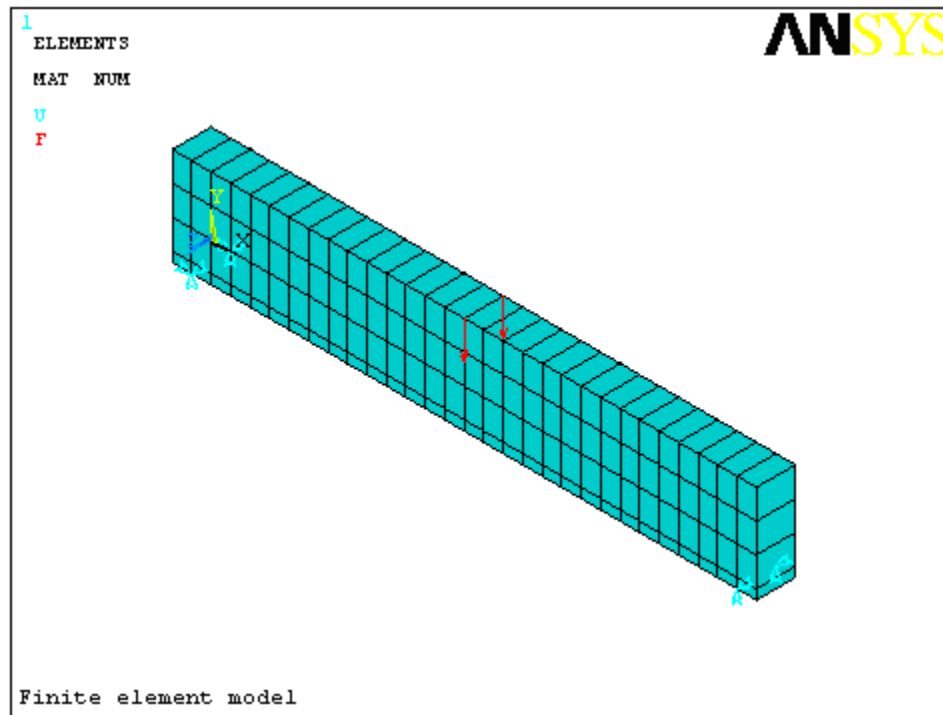


Figure 5-6 : le modèle d'éléments finis et les conditions aux limites d'une poutre maillée grossièrement.

5-4-1-1- comportement à la première fissure :

L'analyse de la partie linéaire peut être basée sur les concepts de flexion pour une poutre en béton armé. Des comparaisons ont été faites dans cette partie pour s'assurer que les déformations et les contraintes étaient compatibles modèle d'éléments finis et à la poutre avant que la fissuration soit produite.

Une fois que la fissure est produite, les contraintes et les déformations deviennent plus difficiles à prévoir. Les contraintes dans le béton et l'acier qui précèdent immédiatement les fissures initiales sont analysées. Le pas de charge 42602 est analysé et il coïncide avec la charge **42602 N** appliquée sur la poutre. Des calculs pour obtenir les contraintes dans le béton et l'acier, ainsi la déformation de la poutre à la charge de 42602 N peuvent être montrés dans l'annexe A. une comparaison des valeurs obtenues par le modèle d'éléments finis à celles obtenues dans l'annexe A sont montrées dans le tableau 2 ci-dessous.

Les maximums existent dans la section du moment constant dans la poutre pendant l'application de la charge, c'est là où on prévoit où le maximum se produit. Les résultats dans le tableau 2 indiquent que l'analyse en éléments finis de la poutre avant la fissuration est acceptable.

Tableau 2 : comparaison des résultats obtenus par ANSYS avec ceux de calcul manuel :

Modèle	Contrainte maximale à la traction (Mpa)	Contrainte d'acier de renforcement (Mpa)	La déformation à mi travée (mm)	La charge au début de fissuration (N)
Calcul manuel	3.15	28.3	0.293	40476
ANSYS	3.2	30.32	0.303	42602

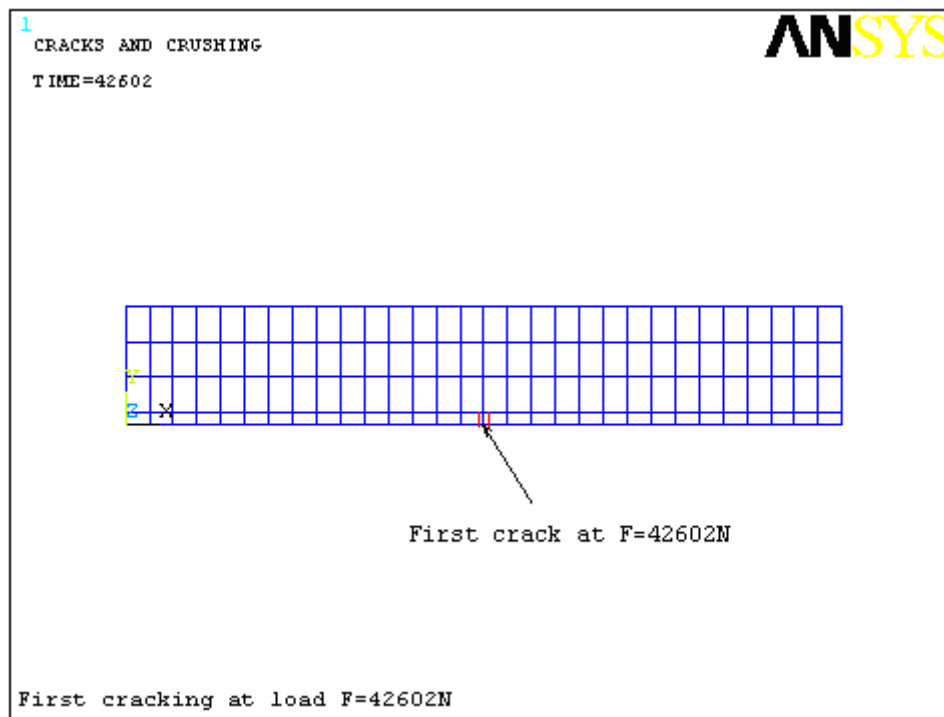


Figure 5-7 : la fissuration initiale de la poutre maillée grossièrement.

5-4-1-2- Comportement au delà de la fissuration initiale :

Dans la partie non linéaire de la réponse, la fissuration suivante se produit pendant l'accroissement du chargement appliqué à la poutre. La fissuration augmente dans la partie du moment constant, puis elle se propage dans la poutre à partir d'une charge de 50000 N. La fissuration considérable se produit dans la poutre à 60000 N. En outre, les fissures dues à la

contrainte diagonale commencent à se former dans le modèle à la charge de 70000 et de 90000 N. Ces fissures sont montrées sur les figures (5-8) et (5-9).

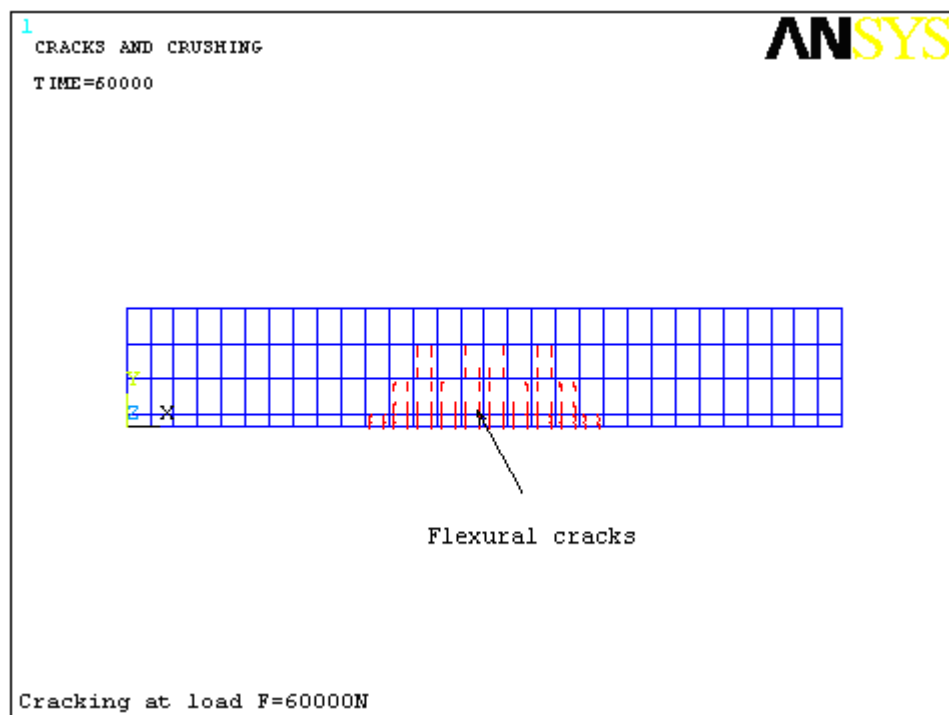
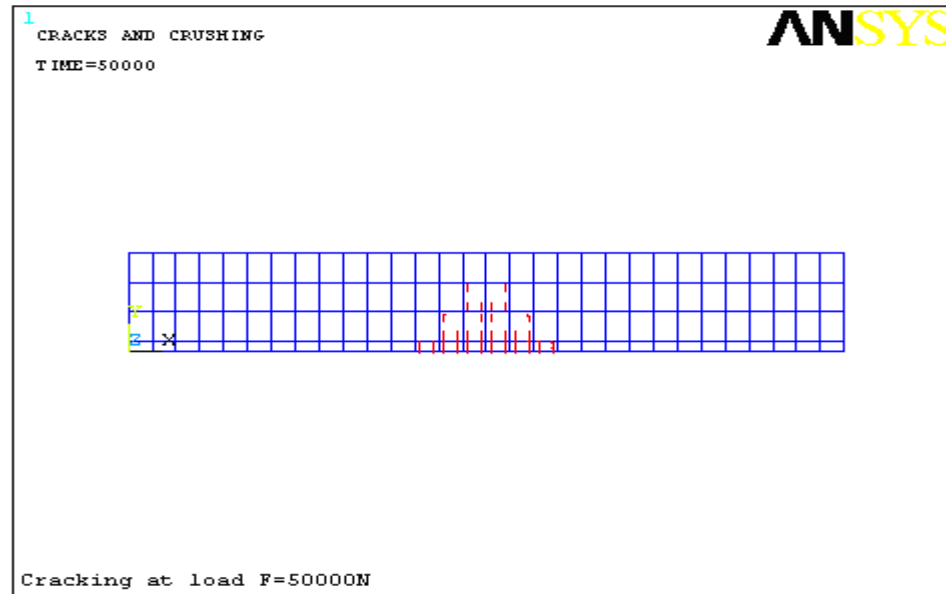


Figure 5-8 : la fissuration de la poutre grosse à la charge 50000 et 60000 N

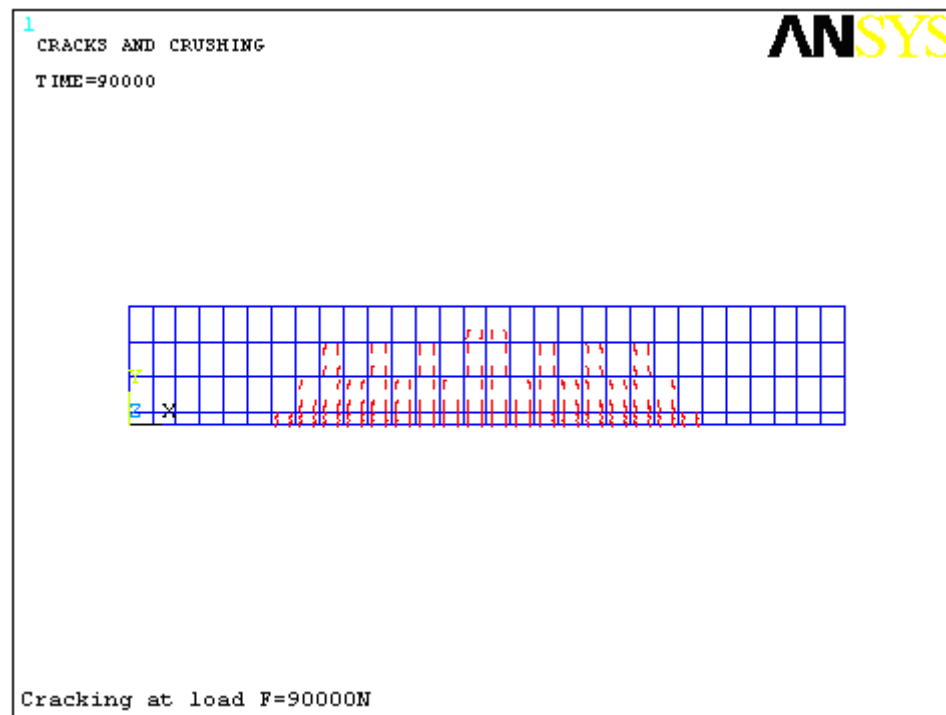
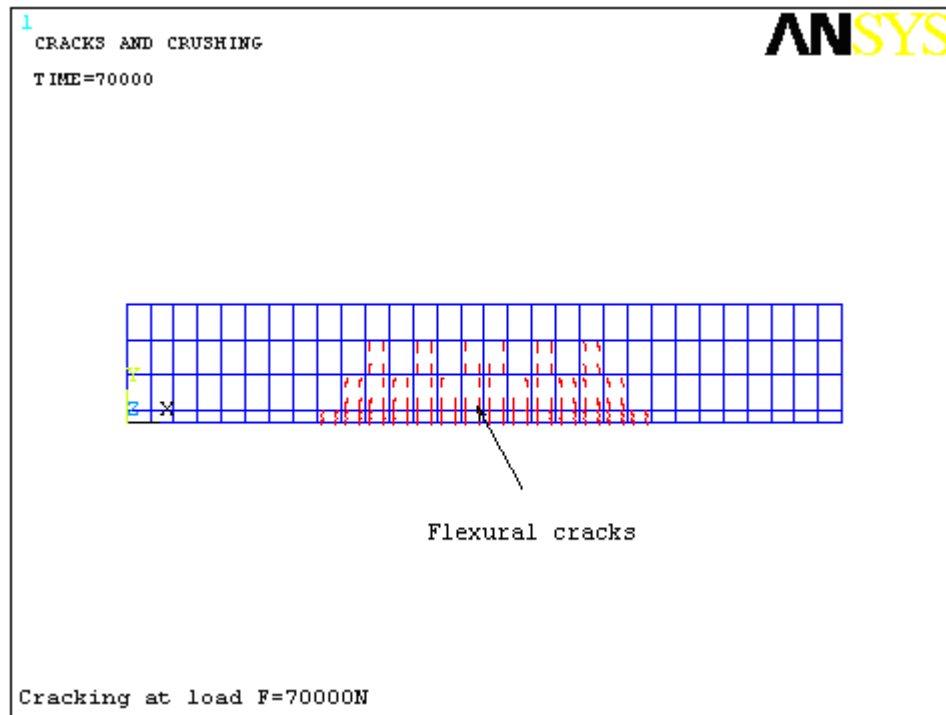


Figure 5-9: Fissuration davantage de la poutre grosse à la charge 70000 et 90000N

5-4-1-3- Comportement de l'acier au-delà de la charge 90000N :

La fatigue du renforcement en acier se produit quand une force de 94000 N est appliquée. En ce moment dans la réponse, les déplacements de la poutre commencent à augmenter à un taux plus élevé pendant que plus de charges sont appliquées. Le moment d'inertie, définit maintenant la rigidité de flexion du membre. La capacité de la poutre de distribuer la charge dans toute la section transversale a diminué considérablement. Par conséquent, de plus grandes déformations se produisent à la ligne centrale de la poutre. (La figure 5-10) montre que la fissuration successive de la poutre en béton après la fatigue de l'acier se produit à 94000 N. les fissures dues à la flexion et aux contraintes diagonales dans la poutre sont croissantes. En outre, plusieurs fissures sont maintenant formées dans la section du moment constant. à 118000 N., la fissuration atteint la partie supérieure de la poutre, et la rupture se produit.

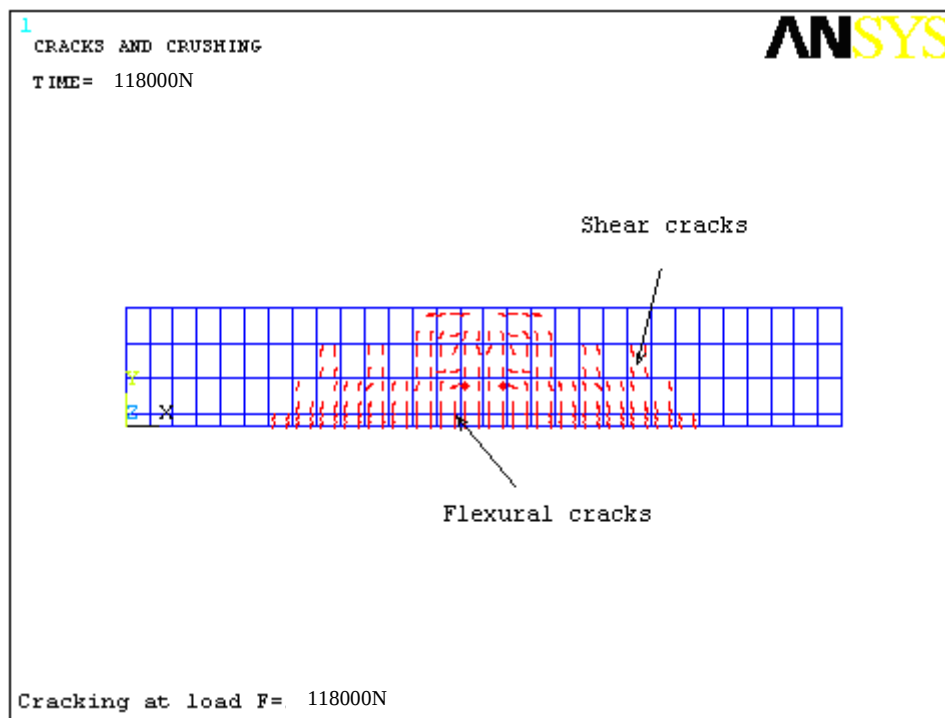


Figure 5-10- Augmentation des fissures dans la poutre maillée grossièrement après la fatigue de l'acier jusqu'à la rupture.

5-4-2- Etude d'une poutre maillée raffinement:

On prend la même poutre et le même chargement mais on admet un maillage en éléments finis de petite dimension, comme montré sur la figure (5-11) :

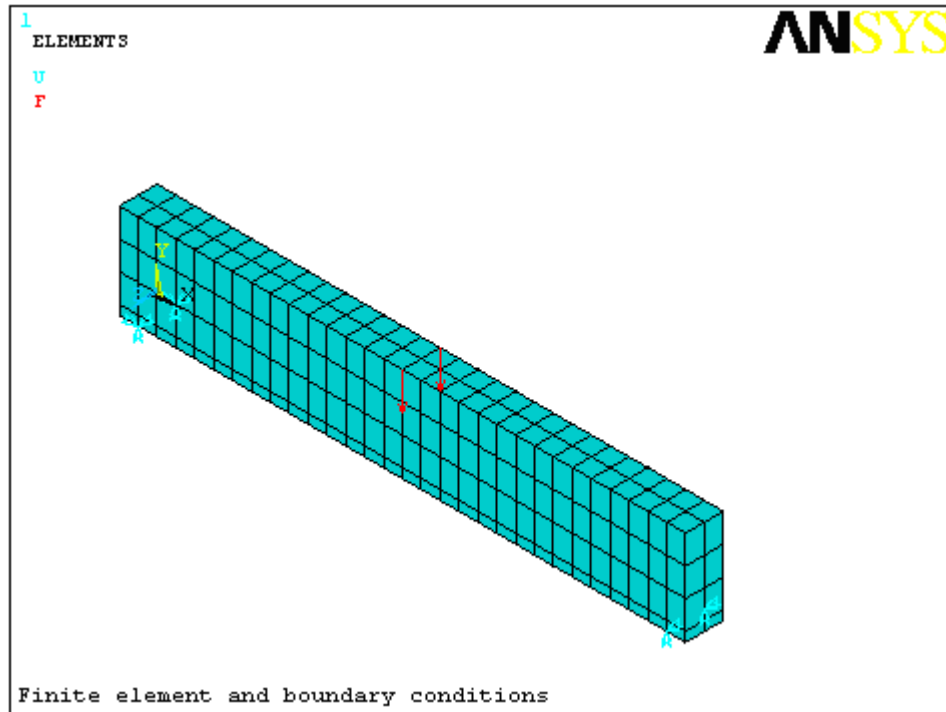


Figure 5-11 : Le modèle d'éléments finis et les conditions aux limites d'une poutre maillée raffinement.

5-4-2-1- comportement à la première fissure :

La charge correspondante à la fissuration initiale est de **42500 N**. Des calculs pour obtenir les contraintes dans le béton et l'acier, ainsi la déformation de la poutre à la charge de 42500 N peuvent être montrés dans l'annexe A. une comparaison des valeurs obtenues par le modèle d'éléments finis à celles obtenues dans l'annexe A sont montrées dans le tableau 3 ci-dessous.

Tableau 3 : comparaison des résultats obtenus par ANSYS avec ceux de calcul manuel :

Modèle	Contrainte maximale à la traction (Mpa)	Contrainte d'acier de renforcement (Mpa)	La déformation à mi travée (mm)	La charge au début de fissuration (N)
Calcul manuel	3.15	28.2	0.292	40476
Ansyp	3.2	30.32	0.303	42500

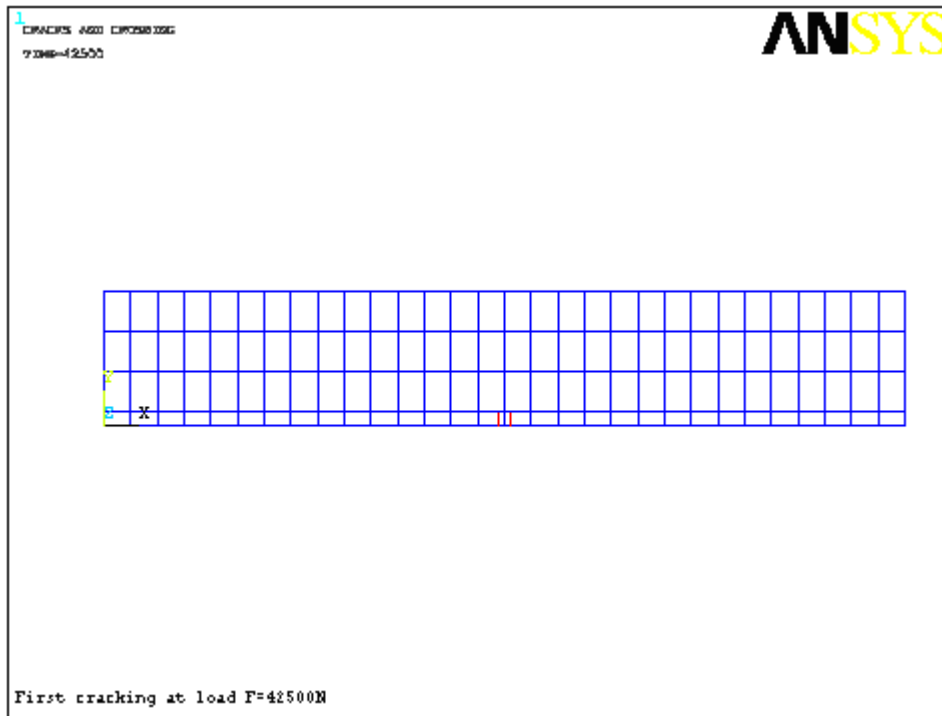


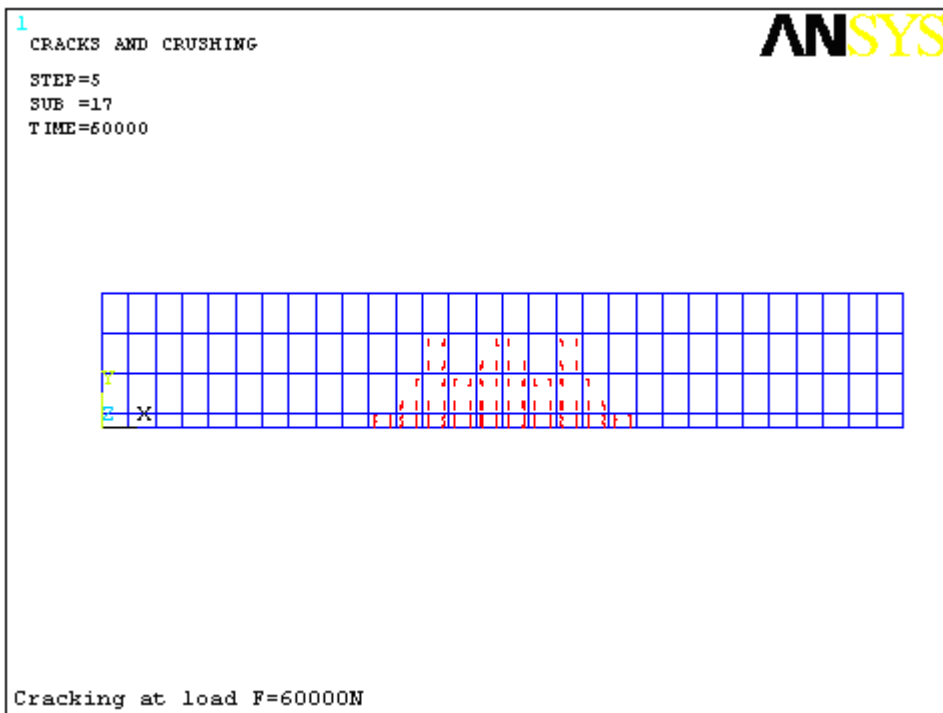
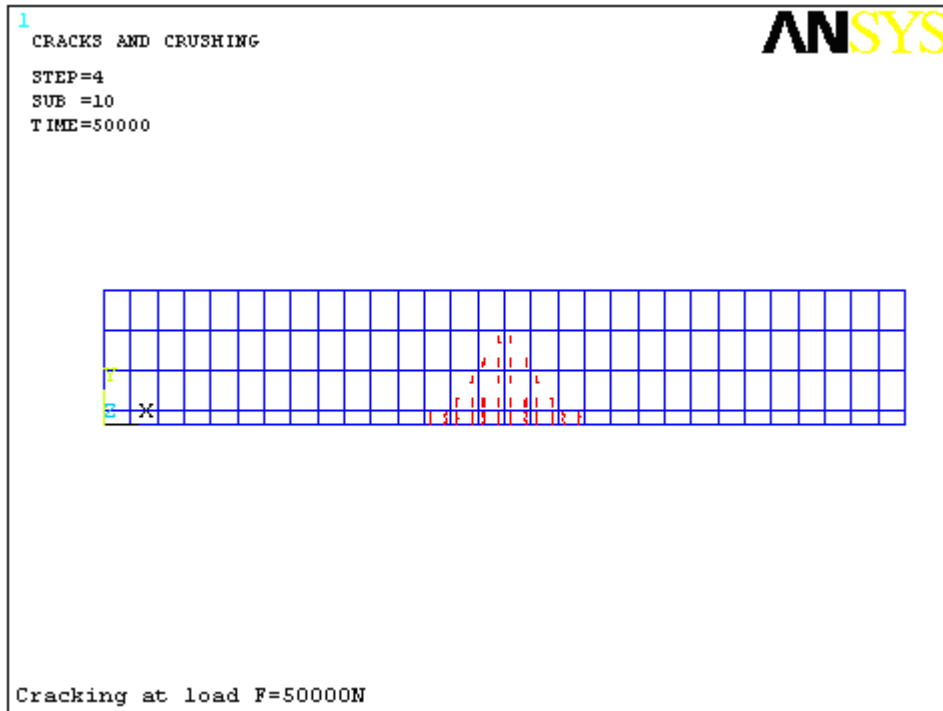
Figure 5-12 : la fissuration initiale de la poutre maillée raffinement.

On constate que les fissures initiales existent à une charge inférieure à 42602 N, mais elles n'apparaissent pas en admettant un maillage grossier.

5-4-2-2- Comportement au delà des la fissuration initiale :

Dans la partie non linéaire de la réponse, la fissuration suivante se produit pendant l'accroissement du chargement appliqué à la poutre. La fissuration augmente dans la partie du moment constant, puis elle se propage dans la poutre à partir d'une charge de 50000 N.

La fissuration considérable se produit dans la poutre à 60000 N. En outre, les fissures dues à la contrainte diagonale commencent à se former dans le modèle à la charge de 70000 et de 90000 N. Ces fissures sont montrées sur les figures (5-13)



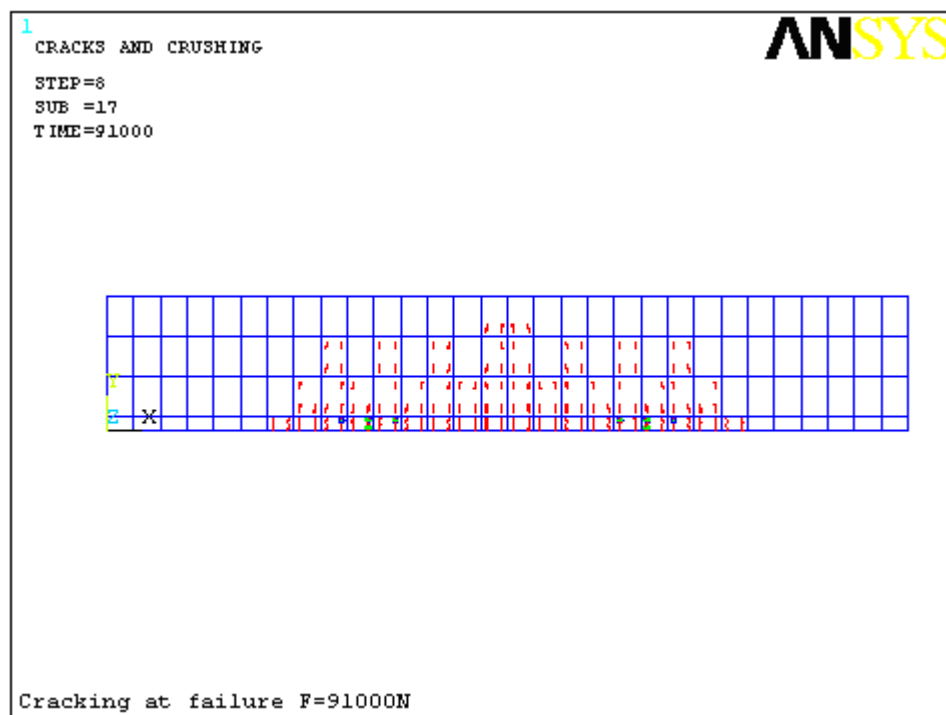
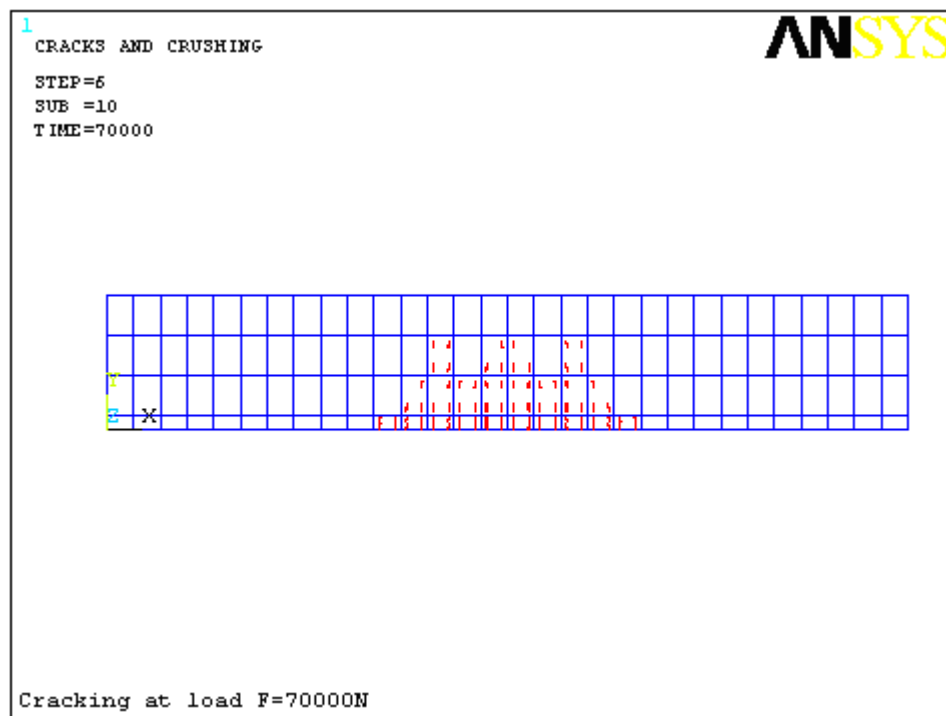


Figure 5-13: Fissuration davantage de la poutre maillée raffinement à les charges 50000, 60000,70000 et 91000 N

On voit bien sur la figure (5-13) l'apparition des fissures de couleur différente à la charge 90000 N qui n'apparaissent pas dans la poutre maillée grossièrement même à la charge de ruine 114000 N, Ceci montre que le maillage raffiné nous donne une précision des résultats à l'échelle microscopique.

5-4-2-3- Comportement de l'acier au-delà de la charge 91000 N :

La fatigue du renforcement en acier se produit quand une force de 91000 N est appliquée. En ce moment dans la réponse, les déplacements de la poutre commencent à augmenter à un taux plus élevé pendant que plus de charges sont appliquées. Le moment d'inertie, définit maintenant la rigidité de flexion du membre. La capacité de la poutre de distribuer la charge dans toute la section transversale a diminué considérablement. Par conséquent, de plus grandes déformations se produisent à la ligne centrale de la poutre. (La figure 5-14) montre que la fissuration successive de la poutre en béton après la fatigue de l'acier se produit à 91000 N. les fissures dues à la flexion et aux contraintes diagonales dans la poutre sont croissantes. En outre, plusieurs fissures sont maintenant formées dans la section du moment constant. A 114000 N., la fissuration atteint la partie supérieure de la poutre, et la rupture se produit.

5-4-2-4- État de la charge ultime :

À la charge 114000 N., la poutre ne peut plus supporter la charge additionnelle. La fissuration grave se produit dans toute la section du moment constant (voir figure 5- 15). Il est intéressant de noter que juste avant l'effondrement quelques petites fissures (fissures compressives) apparaissent à la partie supérieure de la poutre, celles -ci dues à la rupture par écrasement dans le béton.

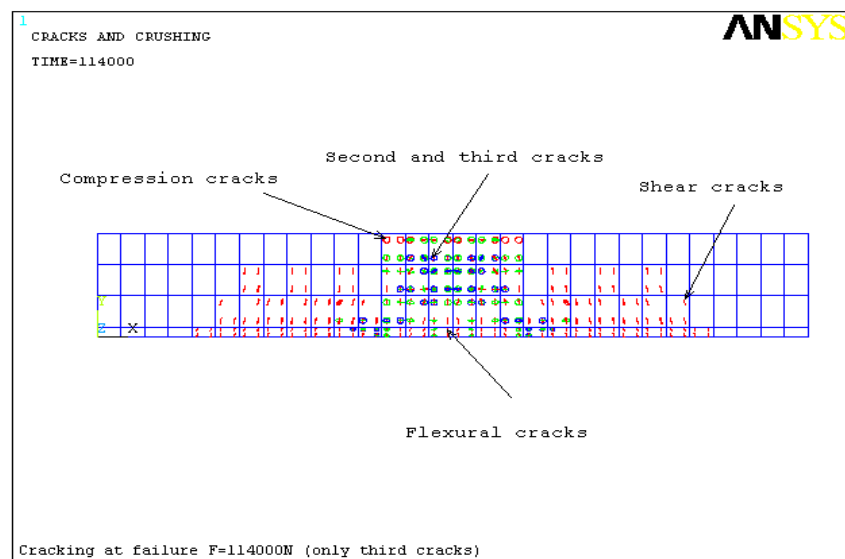


Figure5-14: Rupture de la poutre maillée raffinement en béton armé

Remarque :

La charge de ruine pour la poutre maillée raffinement n'est que de 114000N (Figure 5-15) alors que celle de la poutre maillée grossièrement a atteint la valeur de 118000N (Figure.5-10) où la poutre ne peut plus supporter de charges additionnelles. Les fissures de cisaillement sont inclinées et perpendiculaires aux directions principales comme prévues.

On constate l'apparition progressive de fissures secondaires et tertiaires de couleurs différentes où les points de GAUSS sont supposés fissurés dans les trois directions orthogonales. Il est intéressant de noter que juste avant l'effondrement, quelques petites fissures (fissures de compression) apparaissent à la partie supérieure de la poutre, celles-ci sont dues à la rupture par écrasement dans le béton.

On montre dans les figures suivantes les fissures totales, primaires, secondaires et tertiaires respectivement de la poutre maillée raffinement à la ruine ($F=114000N$).

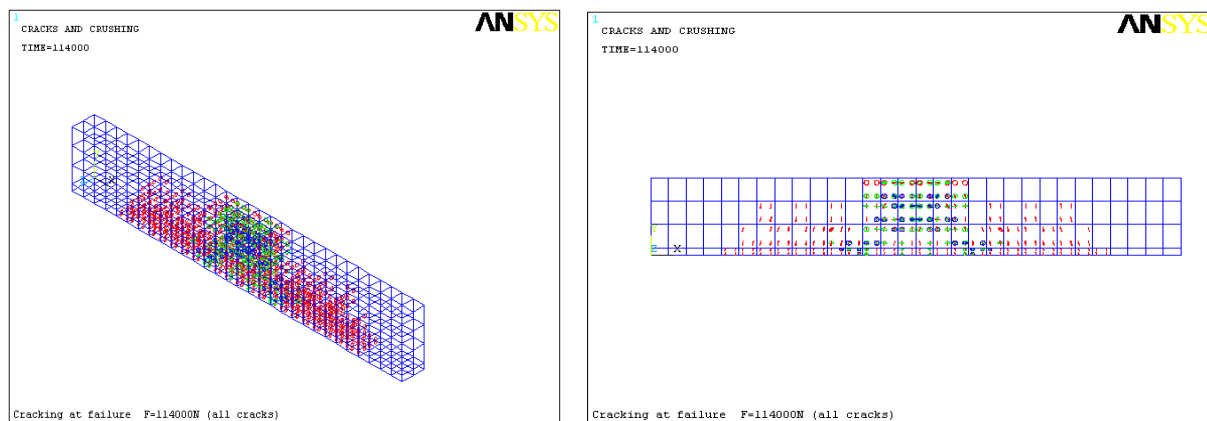


Figure 5-15: Fissures totales dans la poutre maillée raffinement à la ruine ($F=114000N$).

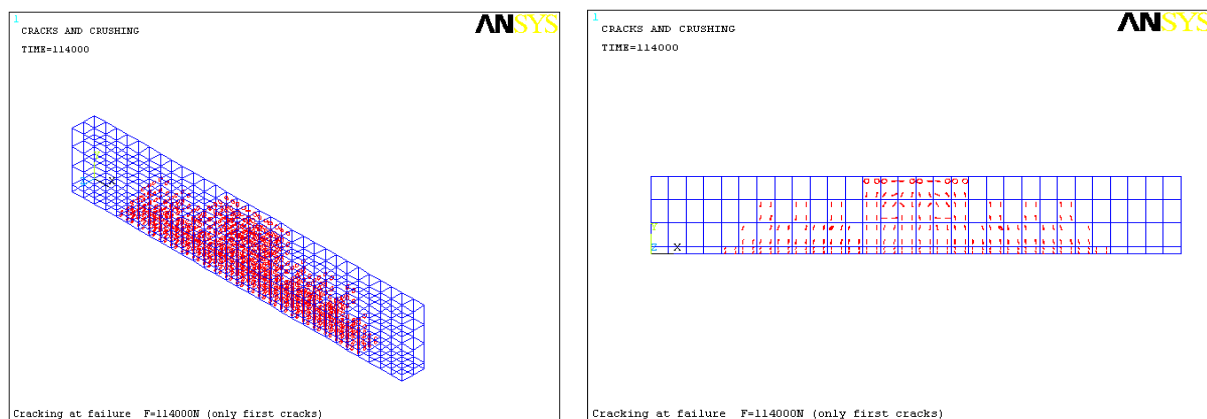


Figure 5-16: Fissures primaires dans la poutre maillée raffinement ($F=114000N$).

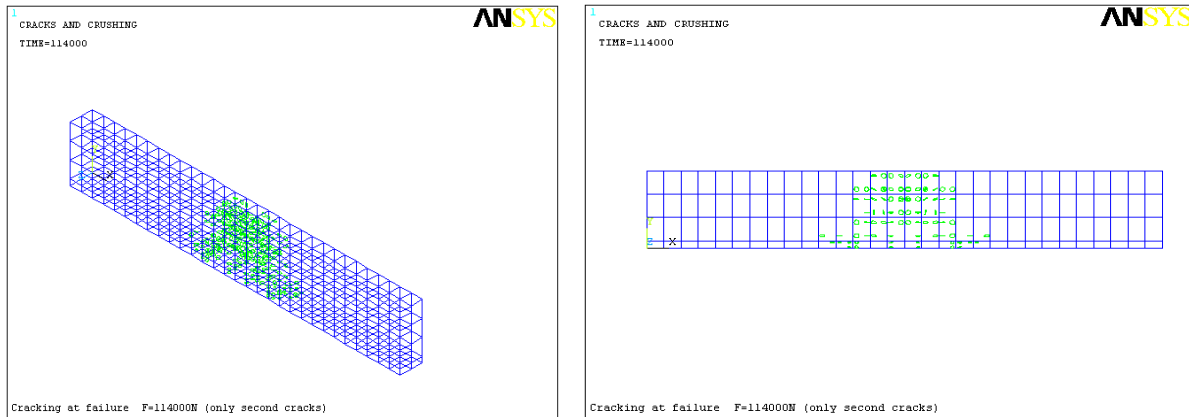


Figure5-17 : Fissures secondaires dans la poutre maillée raffinement (F=114000N).

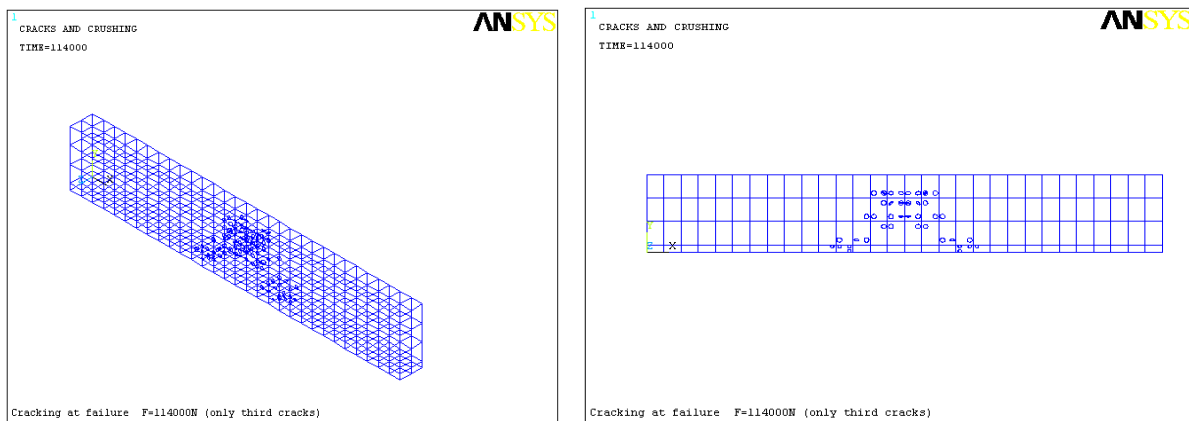


Figure 5-18: Fissures tertiaires dans la poutre maillée raffinement (F=114000N).

5-4-2-5- Réponse Charge-Déformation :

La réponse totale non linéaire de charge-déformation est montrée sur la (la figure 5-20). La réponse calculée en utilisant l'analyse par éléments finis est tracée. La réponse entière de charge-déformation du modèle produit contribue avec les résultats du calcul manuel. (Voir l'annexe A). Ceci nous donne la confiance en utilisation d'ANSYS et le modèle développé.

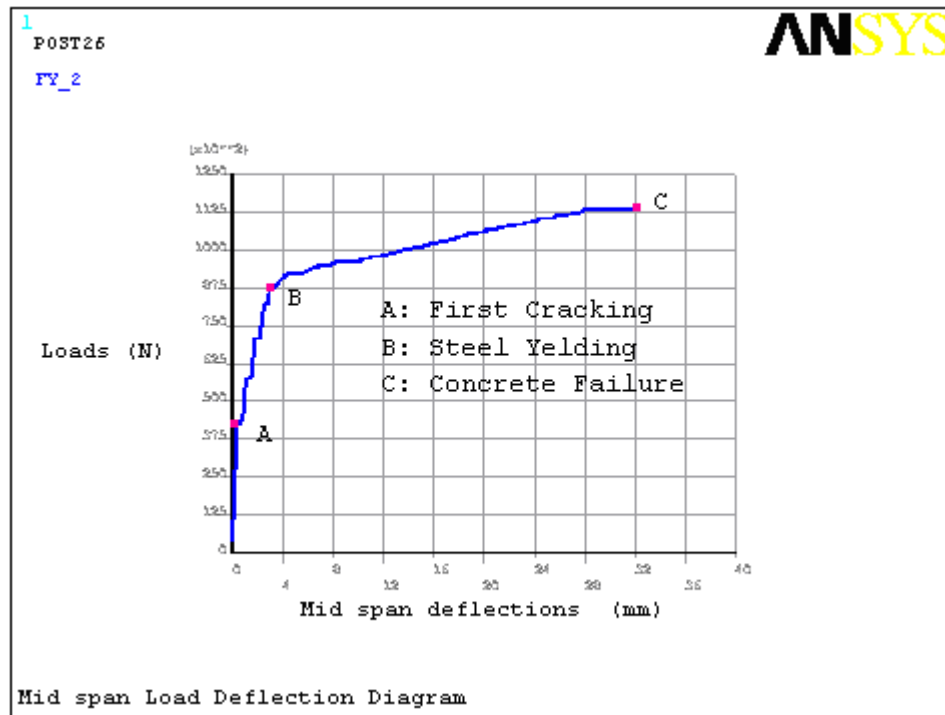


Figure 5-19 -Réponse charge- déformation de la poutre raffinée en béton armé

5-4-2-6-Les contraintes de Von-Mises : le programme ANSYS nous permet de voir clairement les contraintes de Von-Mises de l'état intact à l'état complètement endommagé de la poutre, voir figure (5-21) :

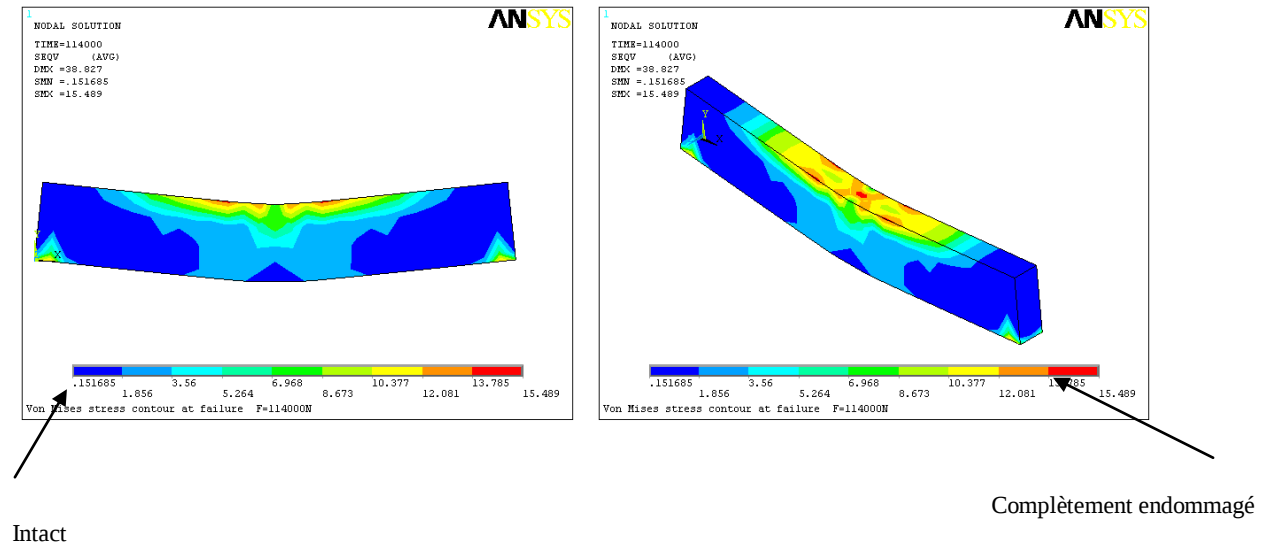


Figure 5-20 Les contraintes de Von-Mises-ANSYS.

5-5-conclusion:

Les modèles d'éléments finis des poutres en béton armé d'habitude de 3.0m, construits dans ANSYS V8.0 en utilisant l'élément en béton ont exactement capturé la réponse de flexion non linéaire de ces systèmes jusqu'à la rupture. L'élément emploie un modèle de fissures continues pour tenir compte de la fissuration du béton avec l'option de modélisation du renforcement d'une façon continue ou discrète.

En termes d'employer des modèles d'éléments finis pour prévoir la force des poutres existantes, l'attribution des propriétés matérielles appropriées est critique.

Annexe

Analyse d'une poutre en béton armé soumise à la flexion à la charge appliquée P :

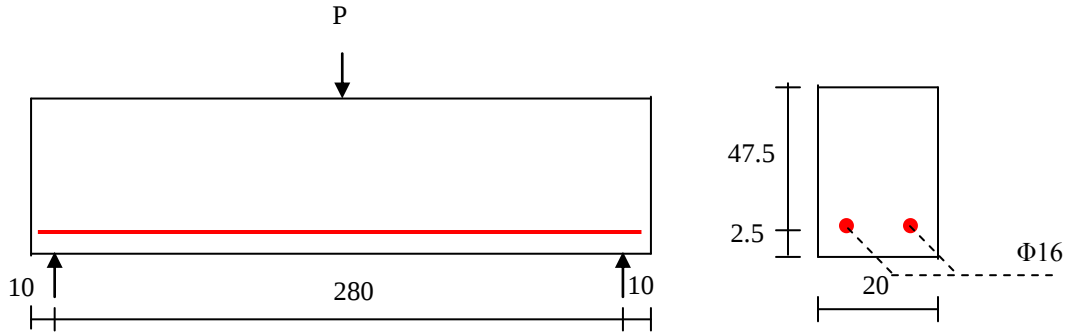


Figure 5-7: Géométrie, chargement et renforcement de la poutre (Dimensions in cm)

Le moment maximal

Le moment maximal résultant de la charge appliquée :

Poutre grosse : $P = 42602 \text{ N}$

$$M_{\max} = (42602 \times 280) / 4 = 2982140 \text{ Ncm}$$

Poutre raffinée:

$$M_{\max} = (42500 \times 280) / 4 = 2975000 \text{ Ncm}$$

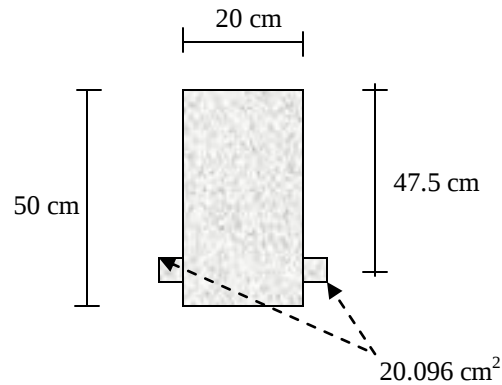
Propriétés du matériau:

Le moment d'inertie:

$$I_G = bh^3 / 12 = (20 \times 50^3) / 12 = 208333.34 \text{ cm}^4$$

Les contraintes dans le béton et l'acier:

Les contraintes à la fibre extrême de traction sont calculées en utilisant un moment d'inertie transformé de béton et de l'acier de renforcement.



Section transversale modifiée

$$2\phi 16 \rightarrow \rho = 0.0401 \quad A_s = 4.0192 \text{ cm}^2$$

$$n = 10$$

Section d'acier modifiée:

$$n(A_s) = 10A_s = 10 \times 4.0192 = 40.192 \text{ cm}^2$$

20.096 cm² distribuée dans chaque côté de la section transversale du béton.

Distance de la fibre supérieure à l'axe neutre du moment de l'inertie transformé.

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{(50 \times 20 \times 25) + (2 \times 20.096 \times 47.5)}{(50 \times 20) + (20.096 \times 2)} = 25.87 \text{ cm}$$

Le moment d'inertie transformé:

$$I_{tr} = [I_G + Bd^2]_{\text{béton}} + [Ad^2]_{\text{acier}} = [208333.34 + (50 \times 20 \times 0.87^2)] + [2 \times 20.096 \times 21.63^2] = 227894.4 \text{ cm}^2$$

La contrainte à la fibre extrême de tension est alors calculée :

Poutre grosse :

$$f_{ct} = \frac{My_b}{I_{tr}} = \frac{2982140 \times 24.13}{227894.4} = 315.8 \text{ N/cm}^2 = 3.15 \text{ N/mm}^2 (\text{MPa})$$

Poutre raffinée:

$$f_{ct} = \frac{My_b}{I_{tr}} = \frac{2975000 \times 24.13}{227894.4} = 315 \text{ N/cm}^2 = 3.15 \text{ N/mm}^2 (\text{MPa})$$

La contrainte dans l'acier en ce moment peut être calculée :

Poutre grosse :

$$f_s = \frac{My_b}{I_{tr}} n = \frac{2982140 \times 21.63}{227894.4} \times 10 = 2830.4 \text{ N/cm}^2 = 28.3 \text{ N/mm}^2 (\text{MPa})$$

Poutre raffinée:

$$f_s = \frac{My_b}{I_{tr}} n = \frac{2975000 \times 21.63}{227894.4} \times 10 = 2823.6 \text{ N/cm}^2 = 28.2 \text{ N/mm}^2 (\text{MPa})$$

La flèche:

La déformation à mi travée de la poutre en béton à la charge correspondante au début de fissures :

Poutre grosse :

$$\Delta_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{42602 \times 280^3}{48 \times 3 \times 10^6 \times 221532.4} = 0.0293 \text{ cm}$$

Poutre raffinée:

$$\Delta_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{42500 \times 280^3}{48 \times 3 \times 10^6 \times 221532.4} = 0.0292 \text{ cm}$$

Charge à la fissuration initiale

The load at first cracking

$$f_{ct} = \frac{My_b}{I_{tr}}$$

$$3 \times 10^2 \text{ N/cm}^2 = \frac{P \times 280 \times 24.13}{4 \times 227894.4}$$

$$P = 40476 \text{ N}$$

CONCLUSION GENERALE

Les conclusions suivantes peuvent être exposées en basant sur l'évaluation des analyses d'une poutre en béton armé.

- La charge appliquée pour causer la fissuration initiale de la poutre en béton armé contribue bien avec le calcul manuel.
- La rupture de la poutre en béton armé en flexion est modélisée en utilisant un ensemble d'éléments finis, et la charge appliquée à la rupture est très proche des résultats calculés manuellement.
- Le maillage raffiné nous donne des résultats plus fiables et plus précis.

Les bons résultats obtenus suggèrent que, malgré la simplicité relative de la structure analysée et des modèles utilisés, la prévision satisfaisante de la réponse des structures en béton armé puisse être obtenue.

Le modèle de rupture du béton (William et Warnke) adopté par le code commercial ANSYS est suffisant pour déterminer le comportement non linéaire des structures en béton armé.

Recommandations pour les travaux futurs :

Par l'utilisation ANSYS à l'approche de renforcement continu pour les poutres avec l'introduction modérée de cisaillement, nous ne pouvons pas reproduire des résultats satisfaisants en comparaison des valeurs calculées manuellement. Cela est susceptible d'être réalisé plus normalement en employant une approche discrète de renforcement.

L'élément fini particulier en béton ne considère pas un des paramètres les plus importants de mécanique de rupture - l'énergie de rupture (the fracture energy G_F). Cela signifie que dans le cas de poutre en béton sans renforcement nous pourrions obtenir une solution ;

Le procédé d'analyse utilisé en ce document a fourni la perspicacité utile pour la prochaine application d'un ensemble d'éléments finis comme méthode d'analyse. Pour s'assurer que le modèle d'élément fini produit les résultats qui peuvent être employés pour l'étude, n'importe quel modèle devrait être calibré avec de bonnes données expérimentales. Ceci fournira alors les paramètres de modélisation appropriés requis pour l'usage postérieur.

TABLE DE NOTATIONS

$t = T/S$: Contrainte de cisaillement

S : section de la pièce;

T : effort tranchant

R_{tr} : charge de rupture du béton en traction

R_{pr} : la charge de rupture en compression du béton

σ_b : la contrainte du béton

σ_a : La contrainte dans l'acier

σ_{el} : la limite d'élasticité apparente

$\sigma_{b,tr}$: Contraintes dans le béton tendu travaillant en traction

(CEB) : le Comité Européen du Béton

ε_b : Déformation du béton

ε_a : Déformation de l'acier

σ_a^* : Contrainte dans l'acier donné par la loi de Hooke

E_a Le module longitudinal de l'acier

$\varepsilon_{br.}$: Allongement limite du béton

ε_{ar} : Raccourcissement limite de l'acier

σ_e : Contrainte élastique limite de l'acier

$[k^e]$: La matrice de rigidité élémentaire.

$\{u^e\}$: Le vecteur élémentaire des degrés de liberté (Déplacements) nodaux

$\{f^e\}$: Le vecteur élémentaire des forces appliquées aux nœuds

$[k]$: La matrice de rigidité globale.

$\{u\}$: Le vecteur global des degrés de liberté (Déplacements) nodaux

$\{f\}$: Le vecteur global des forces appliquées aux nœuds

$U_e(x)$: Les fonctions approchées du déplacement

U_i : déplacements inconnus

σ : le rapport de la force sur la section (la contrainte).

ϵ : L'allongement relatif.

ℓ_0 : Longueur initiale de l'éprouvette

H : Le module d'écrouissage

ϵ^e : Contrainte dans le domaine élastique

ϵ^p : Contrainte dans le domaine plastique

k : paramètre d'écrouissage défini expérimentalement.

f_y : la limite d'élasticité.

dW^p : Le travail plastique par unité de volume

$\bar{\sigma}$: La contrainte effective,

$\bar{\epsilon}_p$: La déformation effective plastique,

$d\bar{\epsilon}_p$: I incrément de déformation plastique.

Φ : le frottement interne du matériau

C : la cohésion

ν : Le coefficient de poisson.

$\{\sigma_0\}$: Vecteur de contraintes ajustées après fissuration,

$[I]$: matrice identique d'ordre 3×3 .

ε_0 : déformation à la résistance ultime à la compression f_{c28}

References

- ANSYS, ANSYS 8.0 Manual Set, (1998), ANSYS Inc., Southpoint, 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15317, USA.
- Bathe, K. J., (1996), Finite Element Procedures, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Bangash, M. Y. H., (1989), *Concrete and Concrete Structures: Numerical Modeling and Applications*, Elsevier Science Publishers Ltd., London, England.
- Hemmaty, Y., (1998), “Modeling of the Shear Force Transferred Between Cracks in Reinforced and Fibre Reinforced Concrete Structures,” *Proceedings of the ANSYS Conference, Vol. 1*, Pittsburgh, Pennsylvania, August.
- Kachlakev, D., T. Miller, (2001), FE Modeling of Reinforced Concrete Structures Strengthened with FRP Lamiates, Final Report SPR 316, Oregon State University, Department of Transportation, May.
- Swanson Analysis Systems, (1998), *Ansys Theory Reference*, Seventh Edition, Swanson Analysis Systems, s.d.
- Swanson Analysis Systems, (1998), *Ansys - Engineering Analysis System. Theoretical Manual (for Ansys Revision 8.04)*, Swanson Analysis Systems.
- Chen, W. F. and Han, D. J., (1988), *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York.
- Willam, K. J., (1982), University of Colorado, Boulder, (Private Communication).
- William, K.J. and Warnke, E.D. ,(1975), Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete, Proceedings of the International Association for Bridge and Structural Engineering, 1975, 19, p.174, ISMES, Bergamo, Italy

- A. Guerrin et R. C. Lavour « Traité de béton armé - propriétés générales mécanique et expérimentale du béton armé » Editions Dunod 1983.
- H. D. Bui, M. Terrien et al « Rupture du béton hydraulique en traction » FRT Paris. Laboratoire central des ponts et chaussées Paris France.
- V. Baikov et S. Stronguine « Calcul des structures » Editions Mir Moscou 1984.
- T. Tahenni « Observations qualitatives de la fissuration des poutres » USTHB Algérie – Magister en génie civil.
- C. Massonnet et S. Cescotto « Mécanique des matériaux » Editions Bibliothèque des universités – génie civil. De Boeck Université. Belgique 1994.
- P. Rossi « Fissuration du béton : du béton à la structure, application de la mécanique linéaire de la rupture » rapport de recherche LPC n° 150 – LCPC Juin 1988.
- D. Ngo et A. C. Scordelis « finite element analysis of reinforced concrete beams » ACI Journal, vol. 64, Mars 1967.
- H. Schäfer « A contribution to the solution of contact problems with the aid of bond elements » – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 6, 1975, pp335-354.
- Faherty, K.F. (1972), “An Analysis of a Reinforced and a Prestressed Concrete Beam by Finite Element Method,” Doctorate’s Thesis, University of Iowa, Iowa City.
- Fanning, P. (2001), “Nonlinear Models of Reinforced and Post-tensioned Concrete Beams,” *Electronic Journal of Structural Engineering*, University College Dublin, Earlsfort Terrace, Dublin 2, Ireland, Sept.12.
- Kachlakev, D.I.; Miller, T.; Yim, S.; Chansawat, K.; Potisuk, T. (2001), “Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures Strengthened With FRP

Laminates,” California Polytechnic State University, San Luis Obispo, CA and Oregon State University, Corvallis, OR for Oregon Department of Transportation, May. Janney, J.R. (1954), “Nature of Bond in Pre-tensioned Prestressed Concrete,” *Journal of the ACI, Proceedings*, Vol.50, No.5, May.

- McCurry, D., Jr. and Kachlakev, D.I (2000), “Strengthening of Full Sized Reinforced Concrete Beam Using FRP Laminates and Monitoring with Fiber Optic Strain Guages” in *Innovative Systems for Seismic Repair and Rehabilitation of Structures, Design and Applications*, Technomic Publishing Co., Inc., Philadelphia, PA, March.
- Wisconsin-Madison, Madison, Wisconsin.

Willam, K., and Tanabe, T.A., Ed. (2001), *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures*, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI.