

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L' INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT

Spécialité : AUTOMATIQUE

Par :

Hocine OUBABAS

THEME

Contribution au diagnostic et à la commande tolérante aux fautes par l'approche ensembliste

Soutenue publiquement le 23/09/2019, devant le Jury d'examen composé de :

MELLAH Rabah	Professeur	Université de Tizi Ouzou	Président
DJENNOUNE Said	Professeur	Université de Tizi Ouzou	Encadreur
BOUDJEMA Farès	Professeur	ENP d'Alger	Examineur
KIDOUCHE Madjid	Professeur	Université de Boumerdès	Examineur
SI-AMMOUR Amar	MCA	Université de Tizi Ouzou	Examineur
KOUADRI Abdelmalek	MCA	Université de Boumerdès	Examineur

Dedicaces

La louange entière est à Allah qui nous a guidé à l'islam.

À mon père, à ma mère,

À ma femme,

À mes enfants Khadidja et Abdallah,

À toute la famille et à tous mes amis,

Merci pour votre soutien . . .

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je tiens, tout d'abord, à remercier mon directeur de Thèse, monsieur Saïd Djennoune, professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour sa disponibilité, ses conseils et ses critiques qui ont été indispensables pour la réussite de ce travail. Je lui suis reconnaissant.

Je remercie vivement Monsieur Rabah Mellah, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, Monsieur Farès Boudjema, professeur à l'ENP d'Alger, monsieur Madjid KIDOUCE professeur à l'université de Boumerdès, monsieur Amar SI-AMMOUR maître de conférences à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou et monsieur Abdelmalek KOUADRI maître de conférences à l'université de Boumerdès, pour avoir bien voulu examiner ce travail et accepter de participer au jury de soutenance.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), pour leur sympathie et leurs encouragements. En particulier monsieur Saïd GUERMAH, pour son aide assez précieuse et pour ses conseils.

Je ne terminerai pas sans remercier tous ceux qui ont contribué directement ou indirectement à cet ouvrage, je tiens ici à remercier tous ceux qui m'ont aidé par leurs enseignements, leurs critiques et leurs encouragements.

Finalement, je remercie ma femme qui m'a soutenu tout le temps qu'a duré cette thèse.

1^{er} octobre 2019

Table des matières

Table des figures	x
Liste des tableaux	xi
Abréviations et Symboles	xiii
Introduction générale	1
1 Observateurs pour le diagnostic	9
1.1 Observabilité et observateurs	10
1.1.1 Observateur	10
1.1.2 Observabilité	11
1.1.3 Observabilité des systèmes linéaires	11
1.1.4 Observabilité des systèmes non linéaires	12
1.1.5 Conditions analytique d'observation	15
1.2 Différents types d'observateurs	16
1.2.1 Observateurs pour les systèmes linéaires	17
1.2.1.1 Observateur de Luenberger	17
1.2.1.2 Observateur à entrée inconnue	17
1.2.1.3 Filtre de Kalman-Bucy	21
1.2.2 Observateurs pour les systèmes non linéaires	22
1.2.2.1 Observateur de Luenberger étendu	22
1.2.2.2 Filtre de Kalman étendu	23
1.2.2.3 Observateur de Thau	24

1.2.2.4	Observateur à grand gain	26
1.2.2.5	Observateur à mode glissant	28
1.2.2.5.a	Principe des observateurs à mode glissant	28
1.2.2.5.b	Conception des observateurs à mode glissant	30
1.2.2.5.c	Observateur d'Utkin	31
1.2.2.5.d	Observateur de Walcott et Zak	32
1.2.2.5.e	Observateur à mode glissant étape par étape	34
1.2.2.6	Observateur adaptatif	35
1.2.2.7	Observateurs par intervalles	36
1.3	Diagnostic à base d'observateurs d'états	36
1.3.1	Concepts et définitions	37
1.3.2	Procédure de détection et d'isolation des défauts	39
1.3.3	Différentes structures de défauts	39
1.3.3.1	Evolution des défauts	39
1.3.3.2	Type de défauts	41
1.3.3.2.a	Défauts capteurs	41
1.3.3.2.b	Défauts actionneurs	42
1.3.3.2.c	Défauts composants	42
1.3.3.3	Nature des défauts	43
1.3.3.3.a	Défauts multiplicatifs	43
1.3.3.3.b	Défauts additifs	44
1.3.4	Principe de diagnostic de défauts	44
1.3.5	Classification des méthodes de diagnostic	45
1.3.5.1	Méthodes sans modèle	45
1.3.5.2	Méthodes de diagnostic à base de modèle	47
1.3.6	Méthodes de diagnostic à base d'observateurs	48
1.3.7	Principe de génération de résidus à base d'observateurs	48
1.3.8	Structures des résidus générés par observateurs	49
1.3.8.1	Structure d'observateur simplifié	52

1.3.8.2	Structure d'observateurs dédiés (DOS)	52
1.3.8.3	Structure d'observateurs généralisés (GOS)	52
1.3.9	Observateurs pour le diagnostic	54
1.3.9.1	Diagnostic à base d'observateurs d'états linéaires	54
1.3.9.1.a	Observateur proportionnel (Observateur de Luenberger)	54
1.3.9.1.b	Observateur à entrées inconnues	55
1.3.9.1.c	Filtre de Kalman	57
1.3.9.2	Diagnostic à base d'observateurs d'états non linéaires	57
1.3.9.2.a	Observateur de Luenberger étendu	58
1.3.9.2.b	Filtre de Kalman étendu	59
1.3.9.2.c	Observateur à mode glissant	60
1.4	Conclusion	63
2	Analyse par intervalles	65
2.1	Introduction	65
2.2	Arithmétique d'intervalles	66
2.2.1	Intervalles	66
2.2.2	Opérations mathématiques sur les intervalles	67
2.2.3	Vecteurs et matrices intervalles	68
2.2.4	Propriétés algébriques de l'arithmétique des intervalles	69
2.2.4.1	Propriétés conservées	69
2.2.4.2	Propriétés non conservées	69
2.3	Pessimisme	70
2.3.1	Effet de dépendance	70
2.3.2	Effet d'enveloppement	71
2.4	Fonctions d'inclusions	72
2.4.1	La fonction d'inclusion naturelle	73
2.4.2	La fonction d'inclusion moyenne	74
2.4.3	La fonction d'inclusion pente	74
2.4.4	La fonction d'inclusion de Taylor	74

2.5	Pavage et sous-pavage	75
2.5.1	Image ensembliste	75
2.5.2	Inversion ensembliste	76
2.6	Les contracteurs	76
2.6.1	Contractions de pavés	77
2.6.1.1	Problème de satisfaction de contraintes	77
2.6.1.2	Consistence	78
2.6.1.3	Définition et propriétés des contracteurs	78
2.6.2	Différents types de contracteurs	78
2.6.2.1	Contracteur linéaire	79
2.6.2.1.a	Méthode d'élimination de Gauss	79
2.6.2.1.b	Méthode de Jacobi	79
2.6.2.2	Contracteur non linéaire	80
2.6.2.2.a	Contracteur de Krawczyk	80
2.6.2.2.b	Contracteur de Newton	81
2.6.2.2.c	Contracteur propagation-rétropropagation	81
2.7	Conclusion	82
3	Synthèse d'observateurs intervalles	83
3.1	Introduction	83
3.2	Systèmes dynamiques positifs	84
3.3	Principe des systèmes coopératifs	85
3.4	Observateurs par intervalles	86
3.4.1	Observateur intervalle d'un système coopératif	87
3.4.1.1	Cas non linéaire	87
3.4.1.2	Cas linéaire	88
3.4.2	Observateur intervalle d'un système partiellement linéaire	89
3.4.3	Observateur intervalle d'un système linéaire à temps invariant	90
3.4.4	Relaxation des observateurs intervalles	91
3.5	Conclusion	93

4	Conception d'observateurs intervalles à mode glissement pour les systèmes linéaires et non linéaires	95
4.1	Introduction	95
4.2	Observateur intervalle à mode glissant pour les systèmes linéaires	97
4.3	Observateur intervalle à mode glissant pour les système non linéaires	103
4.4	Applications Numeriques	106
4.5	Conclusion	110
5	Diagnostic et commande tolérante aux fautes à base de techniques intervalles	121
5.1	Introduction	121
5.2	Systèmes tolérants aux défauts	122
5.2.1	Commande tolérante aux fautes	122
5.2.1.1	Reconfiguration	123
5.2.1.2	Accommodation	123
5.3	Approches de commande tolérante aux fautes	123
5.3.1	Méthodes conventionnelles	123
5.3.1.1	Approches passives	123
5.3.1.2	Approches actives	124
5.3.1.2.a	Pseudo inverse	125
5.3.1.2.b	Placement de structure propre	125
5.3.1.2.c	Méthode par modèles de référence	126
5.3.1.2.d	Placement de pôles optimal	126
5.4	Diagnostic par intervalles	126
5.4.1	Génération des résidus intervalles	127
5.5	Stabilisation du système incertain	129
5.6	Compensation de défaut de type actionneur	132
5.7	Application Numérique	133
5.8	Conclusion	135
	Conclusion générale	141

Table des figures

1.1	Schéma de principe d'un observateur	10
1.2	Schéma de principe d'un observateur de Luenberger	18
1.3	Procédure de détection et d'isolation des défauts à base de modèle.	39
1.4	Evolution temporelle des défauts.	40
1.5	Différents types de défauts affectant un système physique.	41
1.6	Effet de différents types de défauts capteur sur les mesures. Les lignes en pointillées désignent les valeurs mesurées de capteur et les lignes en trait continu représentent les valeurs réelles	42
1.7	Représentation graphique des défauts actionneur les plus répandues ([120]). Les lignes en pointillées désignent les valeurs désirées de l'actionneur, cependant les lignes en trait continu représentent les valeurs réelles.	43
1.8	Modélisation des défauts	44
1.9	Classification non exhaustive des méthodes de diagnostic [124]	46
1.10	Schéma de principe d'un générateur de résidus à base d'observateurs	49
1.11	Résidus structurés	51
1.12	Différents types de tables de signature.	51
1.13	Structure d'observateur simplifié	52
1.14	Structure d'observateurs dédiés	53
1.15	Structure d'observateurs généralisés	53
2.1	Estimation d'état avec effet d'enveloppement	72
4.1	Estimation du bioprocédé linéaire avec $K_s = 3, v = 0$ and $\theta = 5$	112

4.2	Estimation du bioprocédé linéaire avec $K_s = 3, v = 0.8 * \sin(\pi * t)$ and $\theta = 3$.	113
4.3	Estimation du bioprocédé linéaire avec $K_s = 3, v = 0.8 * \sin(\pi * t)$ and $\theta = 8$.	114
4.4	Entrée du système linéaire	115
4.5	Estimation Bioprocédé Nonlinéaire avec $K_s = 3, v = 0$ and $\theta = 10000$	116
4.6	Estimation Bioprocédé Nonlinéaire avec $K_s = 3, v = 0.6 * \sin(\pi * t)$ and $\theta = 9000$	117
4.7	Estimation Bioprocédé Nonlinéaire avec $K_s = 3, v = 0.6 * \sin(\pi * t)$ and $\theta = 14000$	118
5.1	Principe d'une boucle de commande tolérante aux fautes.	122
5.2	Principe d'un système de commande passive tolérante aux fautes.	124
5.3	Principe d'un système de commande active tolérante aux fautes.	125
5.4	Evolution des états du bioprocédé et de l'observateur en absence de défauts . .	136
5.5	Evolution des états du bioprocédé et de l'observateur en présence de défauts . .	137
5.6	Evolution des états du bioprocédé en présence de défauts avec reconfiguration .	138
5.7	Evolution des états du bioprocédé et de l'observateur après reconfiguration . . .	139

Liste des tableaux

2.1	Associativité et commutativité des opérateurs arithmétiques	69
2.2	Éléments neutres et absorbants	69
2.3	Quelques propriétés de l'arithmétique des intervalles	70
4.1	Valeurs numériques utilisées dans la simulation pour les cas linéaire	107
4.2	Valeur numérique utilisées dans la simulation de l'application 2	110

Abréviations et Symboles

Notations et Symboles

Notations

LTI : Linear Time Invariant

LTV : Linear Time variant

FDI : Fault detection and isolation

DOS : Dedicated Observer Scheme

GOS : Generalised Observer Scheme

FTC : Fault Tolerant Control

DSP : Densité Spectrale de Puissance

SIVIA : Set Inversion Via Interval Analysis

CSP : Constraint Satisfaction Problem

FDD : Fault Detection and Diagnosis

AFTC : Active Fault Tolerant Control

PIM : Pseudo Inverse Method

Symboles

\mathbb{R} Ensemble des nombres réels

\mathbb{C} Ensemble des nombres complexex

\mathbb{R}_+ Ensemble des nombres réels positifs

\mathbb{R}^n Espace réel euclidien de dimension n

$ x $	Valeur absolue d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$
t	Variable de temps
$[x]$	Intervalle réel borné
\mathbb{IR}	Ensemble des intervalles réels
$mid([x])$	Centre d'un intervalle
$rad([x])$	Rayon d'un intervalle
$\mu_{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles à n lignes et m colonnes
$I_n \in \mu_{n \times n}$	Matrice identité
$\ x\ $	Norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$.

Introduction générale

Introduction Générale

En raison d'une demande croissante en matière de performances des systèmes de production et de la qualité des produits d'un côté et une grande rentabilité de l'autre côté, les processus industriels se caractérisent de plus en plus par un niveau d'automatisation et de complexité technologiques élevé. En parallèle, afin d'accroître la fiabilité et la disponibilité des systèmes industriels et afin d'améliorer la sécurité des personnels, il est devenu légitime de leur associer un module efficace de surveillance. C'est ainsi que la détection et l'identification des défauts dans les systèmes dynamiques, c'est-à-dire leur diagnostic, est devenu un sujet important de recherche, dès le début de l'automatique moderne basée sur le calcul numérique.

En surveillant le fonctionnement des équipements industriels, il est possible de prévenir un dysfonctionnement avant qu'il n'arrive, et d'éviter le ralentissement ou l'arrêt de production. De nombreuses approches ont été développées en vue de la détection de défaillances et du diagnostic. Cette diversité des approches est le résultat de contextes différents liés aux applications visées et aux caractéristiques propres du cahier des charges qui en résulte.

Il existe une multitude de méthodes de diagnostic. Elles sont classées de différentes façons. Une de ces classifications consiste à regrouper les méthodes de diagnostic en deux grandes familles : les méthodes à base de modèles mathématiques et les méthodes sans modèle. Les techniques de diagnostic qui s'appuient sur un modèle mathématique du système sont fondées sur une comparaison des mesures du système avec l'information issue du modèle [1]. Les méthodes de diagnostic basées sur les modèles mathématiques se reposent généralement sur le principe de génération des résidus. Pour obtenir les expressions analytiques des résidus, plusieurs techniques peuvent être utilisées. Nous trouvons principalement celles utilisant l'espace de parité, l'estimation paramétrique ou les observateurs d'état [2]-[5]. Les méthodes de diagnostic ba-

sées sur les observateurs d'état s'appuient sur une bonne connaissance du modèle et de ses paramètres, elles consistent à estimer les variables d'état par un observateur pour reconstruire l'information. Un observateur est un système dynamique ayant une structure semblable à celle du modèle du système étudié mais il se diffère d'un terme additif qui est un terme d'adaptation permettant de corriger l'écart entre la sortie de l'observateur et celle du système réel et d'assurer la stabilité. Ces méthodes s'avèrent très efficaces pour le diagnostic de défauts. En effet, les premiers résultats sur les observateurs pour les systèmes linéaires ont été étudiés par Kalman-Bucy en 1961 [6] et Luenberger en 1966 [7]. Et depuis, ce problème ne cesse d'être l'un des principaux intérêts des chercheurs et essentiellement pour les systèmes non linéaires [8]-[10]. Les méthodes de diagnostic à base d'observateurs ont reçu une attention particulière de la communauté scientifique à cause de leur efficacité. Différents types d'observateurs ont été utilisés dans ce but. Les observateurs à mode glissant, utilisés depuis plus d'une trentaine d'années pour la commande des systèmes, ont trouvés récemment un grand succès dans le cadre de la détection et de la reconstruction de défauts [11],[12],[13]. Nous pouvons citer aussi les observateurs adaptatifs [14],[15], les observateurs à grand gain [16], les observateurs à grand gain adaptatifs [17] et les observateurs à entrée inconnues [18].

Le principe fondamental de diagnostic des défauts à base d'observateurs consiste à estimer, ou reconstruire, les variables internes et/ou externes dont la déviation en dehors d'une plage de référence est révélatrice de l'apparition d'un phénomène anormal. Le fonctionnement estimé est "comparé" avec un fonctionnement de référence attendu en l'absence de défauts. Cette comparaison peut être effectuée dans l'espace des sorties, ou dans l'espace décrivant l'état interne (état/paramètres) du système. Les signaux indicateurs sont ensuite structurés et traités par un test de décision de façon à fournir les indicateurs de diagnostic (résidus). Cependant, la dynamique du système est souvent affectée par des variations de paramètres, des perturbations et des bruits de mesure. De plus, dans la majorité des applications réelles, certains paramètres physiques ne sont pas connus, seules les bornes de variation peuvent être disponibles. Ainsi, ces incertitudes peuvent avoir des influences sur le comportement du système. Une caractérisation de l'ensemble des sources d'incertitudes affectant le modèle nominal du système devient nécessaire. Les approches probabilistes ont été développées pour représenter ces incertitudes par des

lois de probabilité [19],[20]. Sur la base de cette description, la famille des techniques à base de filtre de Kalman [21](dans ses variantes linéaires ou non linéaires) ont été largement utilisées pour concevoir des méthodes de détection et diagnostic. Cependant, dans certaines situations, la description de l'ensemble des sources d'incertitudes en termes stochastiques pourrait s'avérer insuffisante. Par exemple, une erreur de biais, ou certaines dynamiques mal connues, de nature déterministe, peuvent plus naturellement être décrites et caractérisées à partir d'une couverture ensembliste. Fondamentalement, ces approches de modélisation placent le problème dans un contexte "erreurs inconnues mais bornées", où les incertitudes peuvent être englobées par des ensembles compacts.

La modélisation à l'aide de variables bornées permet de prendre en compte, directement à l'intérieur du modèle, les incertitudes paramétriques. Dans certains cas, l'approche ensembliste est parfaitement adaptée à la prise en compte d'incertitudes de par la nature de la connaissance disponible. Ainsi, sur une chaîne d'instrumentation, les erreurs de mesure sont quantifiées en terme de tolérance ou précision technologique, et non sous forme de loi de distribution. De plus, travailler uniquement sur les supports des variables incertaines, sans tenir compte d'une quelconque loi de distribution, permet d'étudier des systèmes plus complexes. Cette approche s'appuie sur l'analyse par intervalles [22], [23], pour construire des enveloppes (ou des domaines plus complexes tels que des polytopes) tenant compte des plages de variations des incertitudes et permettant de définir les frontières du domaine correspondant à un comportement normal du système. En effet, avec ce type d'approche, un modèle ne définit plus un comportement de référence, mais un ensemble de comportements possibles ou acceptables.

L'analyse par intervalles a été initialement développée pour tenir compte des imprécisions sur la valeur des nombres. puis est venue ensuite l'étude des fonctions à variables bornées. L'ouvrage de référence [24] est le premier dans le domaine de l'analyse par intervalle, suivi de [22]. Plus tard, Neumaier en 1990 [23] et Shary en 1995 [25] développent plus spécifiquement la résolution de systèmes d'équations linéaires ou non linéaires, tandis que Hansen en 1992 [26] s'attache au problème d'optimisation globale. Durant ces dernières décennies, différents algorithmes basés sur l'analyse par intervalles ont été développés dans plusieurs domaines dans le but d'étudier et de quantifier les effets des incertitudes (numériques et physiques) sur les don-

nées manipulées. L'estimation d'état dans un contexte à erreurs bornées a été largement traitée, et beaucoup de techniques ont été développées grâce à l'analyse par intervalles [27]-[31]. L'utilisation de l'analyse par intervalles dans le cadre du diagnostic a vu le jour avec les travaux publiés par Chang en 1995 [32]. Plus tard, de nombreux travaux, traitant du diagnostic dans le cas de modèles incertains où les incertitudes sont représentées par des variables bornées, ont été publiés [33] et [34]. Les approches ensemblistes peuvent être considérées comme des techniques alternatives pour une estimation robuste. Selon certaines hypothèses, les observateurs par intervalles peuvent être utilisés pour calculer l'ensemble de toutes les valeurs admissibles et fournir certains éléments inférieurs et supérieurs limites pour l'estimation à chaque instant de temps et en présence d'incertitudes bornées. L'estimation d'état dans un contexte ensembliste constitue alors une alternative où l'objectif est de caractériser à chaque instant, d'une manière garantie, toutes les valeurs du vecteur d'état compatibles avec les mesures et avec les bornes d'erreurs supposées connues a priori. L'étude d'approches ensemblistes pour le diagnostic, vise donc à proposer des algorithmes garantis assurant la robustesse à des incertitudes bornées et assurant un meilleur compromis possible entre la sensibilité aux défauts et la quantité de calcul. Dans ce contexte, les contributions de cette thèse peuvent être divisées en deux parties : la première partie consiste à concevoir des observateurs linéaires et non linéaires robustes, associants la théorie des modes glissants à l'analyse par intervalles. La deuxième partie est dédiée à l'application de l'observateur linéaire intervalle à mode glissant proposé pour le diagnostic et à la commande tolérante aux défauts.

Le manuscrit est structuré de la manière suivante :

Le premier chapitre de cette thèse est un chapitre introductif qui vise à donner une revue de la littérature sur les observateurs pour le diagnostic. Dans la première partie de ce chapitre, nous présenterons les différentes notions d'observabilité, nous donnerons par la suite les différentes formes d'observateurs linéaires et non linéaires pour les systèmes à temps continu. La seconde partie sera consacrée à des rappels sur les différents concepts de diagnostic que nous avons regroupés selon la classification suivante : méthodes avec modèle et méthodes sans modèle. L'accent sera mis sur les méthodes de détection et localisation des défauts à base d'observateurs. Nous aborderons aussi les différentes étapes de détection, de localisation et d'identification de

défaut à base d'observateurs. A la fin de cette partie, nous rappellerons aussi les différents structures d'observateurs dédiés aux diagnostic.

Dans le deuxième chapitre, les notions et outils principaux de l'analyse par intervalles sont détaillés. La première section présentera de manière générale l'idée d'utiliser les intervalles, leurs avantages et inconvénients majeurs. La deuxième section présentera plus formellement les intervalles. La troisième section montrera les principales techniques de calcul par intervalles (contraction et inversion ensembliste).

Dans le troisième chapitre, une étude des observateurs intervalles sera présentée avec un rappel sur la théorie des systèmes positifs sur laquelle est basée la conception de ce type d'observateurs.

Dans le quatrième chapitre, nous allons présenter la procédure de conception de deux types d'observateurs intervalles robustes pour les systèmes linéaires et non linéaires. La conception de ces deux observateurs est basée sur la combinaison de la théorie des intervalles avec la théorie des modes glissants.

Le cinquième chapitre abordera l'application des deux observateurs conçus précédemment au diagnostic de défauts et à la commande tolérante aux fautes d'un bioprocédé.

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Observateurs pour le diagnostic

Les observateurs d'état trouvent leur intérêt dans plusieurs domaines et notamment en commande des systèmes, en supervision et en diagnostic de défauts. Plusieurs stratégies de commande utilisent l'état du système afin de calculer la loi de commande permettant au système d'accomplir sa mission. Comme le vecteur d'état n'est pas toujours mesurable directement, un observateur est alors nécessaire pour l'estimer. Les observateurs d'état ont également une place importante dans les problèmes de diagnostic des systèmes dynamiques. En effet, de nombreuses méthodes de détection, de localisation et d'estimation de défauts à base de modèle utilisent le concept d'observateur afin de générer des résidus sensibles aux défauts.

Pendant les trois dernières décennies, il y a eu intérêt énorme pour l'étude de l'observabilité et la conception des observateurs pour les systèmes linéaires [35],[36], et non linéaires [37],[38]. Malgré les efforts dans ces activités de recherche, beaucoup de problèmes d'observation demeurent ouverts.

Compte tenu de l'abondance et de la diversité des résultats actuellement disponibles dans ce domaine, il est utile d'en donner une revue de littérature non exhaustive, afin d'inscrire ce travail dans le contexte des différentes tendances déjà existantes.

L'observabilité d'un processus est un concept très important dans le domaine d'estimation de l'état. En effet, pour reconstruire les états inaccessibles d'un système, il faut savoir, a priori, si les variables d'état sont observables ou non. L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux

d'entrées et de sorties. Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées (via la notion d'entrée uniforme) et aux conditions initiales (via la notion de discernabilité). Les résultats classiques que l'on peut trouver dans la littérature [39]-[42],[37],[38] sont rappelés dans cette partie.

1.1 Observabilité et observateurs

1.1.1 Observateur

Le but d'un observateur est de fournir avec une précision garantie une estimation de la valeur courante de l'état en fonction des entrées et sorties mesurées. Cette estimation devant être obtenue en temps réel, l'observateur revêt usuellement la forme d'un système dynamique. Le schéma de principe d'un observateur est montré sur la figure (1.1) avec $u(t)$ l'entrée de commande, $y(t)$ représente les sorties mesurées et $\hat{x}(t)$ est l'état estimé fourni par l'observateur.

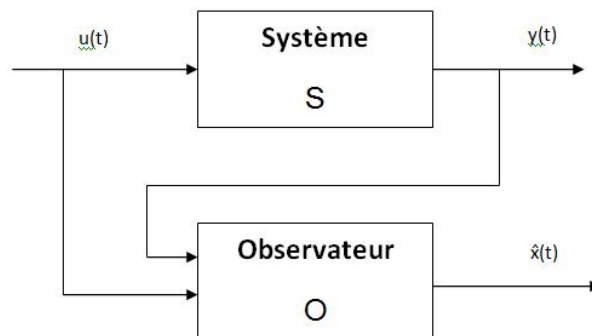


FIGURE 1.1: Schéma de principe d'un observateur

Définition 1 *On appelle observateur ou reconstituteur d'état d'un système dynamique*

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie.

Le système dynamique auxiliaire O suivant :

$$O : \begin{cases} \dot{z}(t) = \Phi(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = \Psi(z(t), u(t), y(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où $z \in \mathbb{R}^q$, $q \leq n$. Les entrées de ce système sont u et y , et la sortie est l'état estimé $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

i) $\hat{x}(0) = x(0) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t) \forall t \geq t_0$,

ii) L'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ tend asymptotiquement vers zéro,

alors le système (1.2) est un observateur asymptotique du système (1.1), d'ordre plein si $q = n$, d'ordre réduit si $q < n$.

Quand l'erreur d'estimation satisfait $\|e(t)\| = \alpha \exp(-\beta t)$, où α et β dépendent éventuellement de x_0 et z_0 , la convergence dans ce cas est dite exponentielle, est l'observateur est exponentiel.

Le problème de la synthèse d'un observateur consiste donc à trouver des fonctions Φ et Ψ qui assurent la convergence de l'état estimé \hat{x} vers l'état réel x du système.

1.1.2 Observabilité

L'observabilité est une étape primordiale pour la mise au point d'un observateur. Elle permet de savoir si la reconstitution de l'état à partir des mesures est réalisable.

1.1.3 Observabilité des systèmes linéaires

Soit un système continu décrit par l'équation d'état déterministe suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système. Les matrices A , B et C sont des matrices constantes de dimensions

appropriées. L'observabilité du système linéaire (1.3) est garantie si et seulement si le critère de rang de Kalman est satisfait, ou si le grammien d'observabilité est une matrice définie positive ou bien si le critère de Hautus-Belevitch-Popov est vérifié.

Théorème 1 [35],[36]

Le système (1.3) est observable si et seulement si :

– *Le critère de Kalman suivant :*

$$\text{rang}(O_{(A,C)}) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n, \quad \text{est satisfait.}$$

avec : $O_{(A,C)}$ est la matrice d'observabilité du système.

– $\forall t > 0$, *le grammien d'observabilité*

$$W_{(A,C)} = \int_{t_0}^{t_1} \exp(A^T(t - t_0)) C^T C \exp(A(t - t_0)) dt$$

est une matrice définie positive.

– *Le critère de Hautus-Belevitch-Popov suivant :*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n, \quad \text{est vérifié} \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

1.1.4 Observabilité des systèmes non linéaires

Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées et aux conditions initiales. En s'appuyant sur le travail de Hermann et Krener, 1977 [42], l'observabilité est définie à partir de la notion d'indiscernabilité ou d'indistinguabilité. Des références intéressantes et des détails supplémentaires sur l'aspect d'observabilité non linéaire se trouvent dans Bornard et al., 1993 [38]. Les résultats classiques que l'on peut trouver dans la littérature [37],[38],[39] sont rappelés dans cette partie. On considère le système non linéaire défini par l'équation (1.1).

Définition 2 (*Discernabilité-Indiscernabilité*)

Un couple d'états initiaux $(x_0, \tilde{x}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ du système (1.1), tel que $x_0 \neq \tilde{x}_0$ est dit discernable dans $X \in \mathbb{R}^n$, si il existe $t \geq 0$ et $u : [0, t] \rightarrow U$ telle que les trajectoires des sorties $(h(x(t)), x_0, u(t))$ et $(h(\tilde{x}(t)), \tilde{x}_0, u(t))$ issues respectivement de x_0 et \tilde{x}_0 restent dans X pendant la durée $[0, t]$ et vérifient $(h(x(t)), x_0, u(t)) \neq (h(\tilde{x}(t)), \tilde{x}_0, u(t))$.

D'une manière réciproque, Un couple d'états initiaux $(x_0, \tilde{x}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tel que $x_0 \neq \tilde{x}_0$, est dit indiscernable dans $X \in \mathbb{R}^n$, si pour tout $u : [0, t] \rightarrow U$ et pour tout $t \geq 0$, les sorties $(h(x(t)), x_0, u(t))$ et $(h(\tilde{x}(t)), \tilde{x}_0, u(t))$ qui en résultent sont égales.

Cette notion d'indiscernabilité de deux états initiaux nous permet de donner la définition suivante de l'observabilité :

Définition 3 (*Observabilité*)

Le système (1.1) est dit observable s'il ne possède pas de couple d'états initiaux différents x_0, \tilde{x}_0 indiscernables.

A l'inverse des systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaires n'est pas garantie avec des conditions géométriques globales. C'est ainsi que la notion d'observabilité locale faible a été introduite dans Hermann Krener, 1977 [42]. Cette notion est assurée en faisant localiser l'indiscernabilité, ce qui garantit la distinguabilité de tout point par rapport à son voisinage. Cette caractérisation formelle de l'observabilité s'obtient à partir d'une condition de rang, analogue au cas des systèmes linéaires.

Définition 4 (*Observabilité faible*)

Le système (1.1) est faiblement observable (resp. en x_0), s'il existe un voisinage V de tout x (resp. en x_0) tel qu'il n'existe pas d'état indiscernables de x (resp. en x_0) dans V .

Définition 5 (*Observabilité locale*)

L'état x est localement observable, si pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout voisinage V de x , il existe $\eta > 0$ plus petit que ϵ et un voisinage W de x contenu dans V , tel que pour tout $\tilde{x} \in W$, il existe $t \in [0, \eta]$ et une entrée admissible $u(t)$ qui distingue x et \tilde{x} c.à.d telle $h(x(t)) \neq h(\tilde{x}(t))$.
Le système (1.1) est localement observable s'il l'est pour tout x .

Définition 6 (*Observabilité locale faible*)

Un système de la forme (1.1) est localement faiblement observable (resp. en x_0), s'il existe un voisinage V de tout x (resp. en x_0) tel que pour tout voisinage W de x (resp. en x_0) contenu dans V , il n'existe aucun état indistinguable de x (resp. en x_0) dans W où les trajectoires évoluent à l'intérieur de W .

Tout comme pour les systèmes linéaires, il est nécessaire de trouver un test caractérisant l'observabilité pour les systèmes non linéaires. Introduisons à cet effet, l'espace d'observabilité. Par analogie avec les systèmes linéaires, on souhaite disposer, pour les systèmes non linéaires aussi, d'une condition de rang qui donne une caractérisation formelle de la propriété d'observabilité. Une telle condition existe, mais elle ne garantit pas une observabilité forte ; en particulier, elle n'est pas globale comme la condition de rang l'est pour les systèmes linéaires.

Définition 7 (*Espace d'observation*)

L'espace d'observabilité du système (1.1) est défini comme le plus petit sous espace vectoriel, noté par $O(h)$ de fonctions à valeurs dans l'espace de sortie, contenant les composantes $h = (h_1; h_2; \dots; h_p)$, et invariant par rapport aux champs de vecteurs du type $f_u(x) = f(x, u)$, $u \in \mathbb{R}^n$ sous l'action de la dérivée de Lie. C'est à dire, pour toute entrée $u \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $g \in O(h)$, $L_{f_u}g \in O(h), \dots$, et $L_f^{n-1}h \in O(h)$ avec $f_u(x) = f(x, u)$ et $L_{f_u}g = \frac{\partial g}{\partial x} f(x, u)$.
où $L_{f_u}g(x)$ est la dérivée de Lie de g le long du champ de vecteur f_u .

ceci veut dire que l'espace d'observabilité du système (1.1) est défini par la matrice définie ci-dessous :

$$O(h) = \begin{bmatrix} h \\ L_f h \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h \end{bmatrix}$$

Définition 8 (*Observabilité au sens du rang*)

En notant par $dO(h)$ (resp. $dO(h)(x_0)$) l'espace des différentielles de $O(h)$ (resp. en x_0), nous disons que le système de la forme (1.1) satisfait la condition du rang si pour tout x (resp. pour tout x_0) la dimension de cet espace différentiel engendré est égal à n , c.à.d $\dim(dO(h)(x)) = n$ (resp. $\dim(dO(h)(x_0)) = n$).

$$\text{Notons que : } dO(h) = \begin{bmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \end{bmatrix}$$

1.1.5 Conditions analytique d'observation

Bien que nécessaire, la condition du rang ne suffit pas pour la synthèse d'observateur. En fait, l'observabilité n'implique pas que toute entrée admissible permette de discerner tous les points de l'espace d'état. Il existe des entrées dites singulières pour lesquelles le système variable dans le temps engendré n'est pas observable.

Définition 9 (Entrée universelle)

Une entrée u est dite universelle pour le système (1.1) (respectivement sur $[0, T]$), si pour tout couple d'états initiaux distincts $(x_0, \tilde{x}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\exists \tau \geq 0$ (respectivement sur $[0, T]$) tel que $(h(\tau, x(\tau)), x_0) \neq (h(\tau, \tilde{x}(\tau)), \tilde{x}_0)$. Une entrée non universelle est dite singulière. En d'autres termes, une entrée universelle est une entrée qui permet de distinguer tout couple d'état initiaux par examen de la sortie.

Définition 10 (Observabilité uniforme)

Un système dont toutes les entrées admissibles à valeur dans U sont universelles est dit uniformément observable, ou observable pour toute entrée. Si, pour tout $t > 0$, toutes les entrées sont universelles sur $[0, t]$, le système est dit uniformément localement observable.

Lorsque le système n'est pas observable pour toute entrée, des conditions souvent qualifiées de conditions d'excitation persistante devraient être formulées pour garantir l'observabilité du système. Ces conditions supposent généralement que les entrées sont régulièrement persistantes.

Définition 11 (Entrée persistante) [43]

Un signal d'entrée vérifiant cette propriété d'excitation persistante, signifie que sa matrice d'autocorrelation existe et est non singulière.

Définition 12 (*Entrée régulièrement persistante*)[44]

Une entrée u est une entrée régulièrement persistante pour le système (1.1), si elle est mesurable et si $\exists C_1 > 0, \exists C_2 > 0 : \forall t \geq 0$, on a :

$$0 < C_1 < \int_t^{t+C_2} u(\tau) d\tau \quad (1.4)$$

1.2 Différents types d'observateurs

Dans la théorie du contrôle classique, la technique de l'observateur est connue en tant que méthode de reconstitution des états du système en utilisant les entrées et sorties mesurées pour ce dernier. L'observateur d'état classique a été proposé et développé par Luenberger pour la première fois au début des années soixante du siècle dernier [45]. Depuis lors, la technique de l'observateur s'est développée rapidement et continuellement. Plusieurs directions différentes de la conception de l'observateur sont développées. Selon leurs structures, leurs ordres, leurs valeurs observées ou leurs classes de systèmes, les observateurs peuvent être classés dans les catégories suivantes :

- Observateur linéaire et non linéaire,
- Observateur déterministe et stochastique,
- Observateur en ordre plein et ordre réduit,
- Observateur à grand gain,
- Observateur en mode glissant,
- Observateur adaptatif.

La synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires est complètement caractérisée par des conditions nécessaires et suffisantes bien établies. En effet, les premiers travaux sur les observateurs d'état, ont été publiés par Kalman-Bucy (dans un contexte stochastique, (filtre de Kalman)) [47], puis Luenberger (dans un contexte déterministe) [45]-[46]. Ces travaux s'intéressent aux systèmes linéaires invariants dans le temps. Cependant, la plupart des procédés industriels possèdent des comportements non linéaires, ce qui a incité les chercheurs à développer des observateurs non linéaires.

À l'heure actuelle, le problème de la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires

reste ouvert. Différentes approches ont été proposées pour concevoir des observateurs d'état pour différentes classes de systèmes non linéaires (voir par exemple [48]-[58]) mais aucune d'entre elles ne fournit une solution générale comme dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps.

Nous détaillerons dans cette section les différentes structures des observateurs utilisés dans la littérature pour les systèmes dynamiques et nous commençons par les systèmes linéaires.

1.2.1 Observateurs pour les systèmes linéaires

Une solution simple au problème d'estimation d'état pour les processus linéaires a été proposée par Luenberger [46].

1.2.1.1 Observateur de Luenberger

La théorie d'observation de Luenberger utilise les techniques de placement de pôles. La classe des systèmes considérée est celle donnée par le système (1.3). L'observateur proposé (figure 1.2) est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

L'observateur de Luenberger est un observateur d'état asymptotique. L'erreur d'estimation entre l'état reconstruit $\hat{x}(t)$ et l'état réel du système $x(t)$ est définie par $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

La dynamique de l'erreur d'estimation a pour expression : $\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$.

En utilisant une technique de placement de pôles, il suffit alors de choisir le gain L de l'observateur de telle sorte que la matrice $(A - LC)$ soit Hurwitzienne (sous condition que la paire (A,C) est observable).

1.2.1.2 Observateur à entrée inconnue

Les systèmes physiques sont souvent soumis à des perturbations dues généralement à l'environnement, aux bruits de capteurs ou d'actionneurs, biais ou offset d'un composant, voir aussi erreur de modélisation. Ces perturbations peuvent avoir des effets très néfastes sur l'évolution

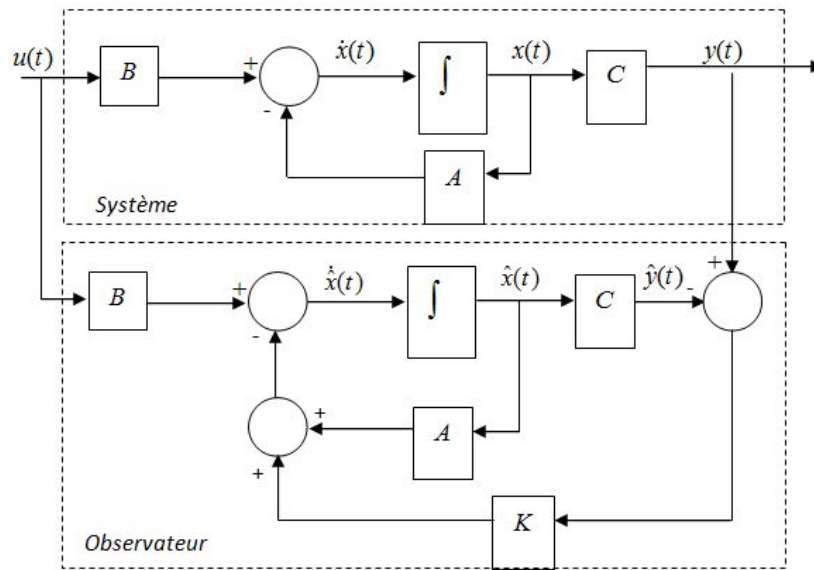


FIGURE 1.2: Schéma de principe d'un observateur de Luenberger

du système, leur estimation peut servir à concevoir des systèmes de commande capables de minimiser ces effets. Ces perturbations sont souvent désignées par le terme d'entrées inconnues et notées $d(t)$. Plusieurs travaux ont été réalisés dans le domaine de l'estimation des systèmes à entrées inconnues [59]-[61].

Considérons le système dynamique linéaire soumis à l'influence d'entrées inconnues décrit par les équations suivantes [59]-[61] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $d \in \mathbb{R}^q$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande, de sortie et l'entrée inconnue du système. Les matrices A , B , C et E sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

Le but de l'estimation en présence d'entrées inconnues est de déterminer un observateur qui à partir des entrées et sorties $u(t)$ et $y(t)$, produit l'estimé $\hat{x}(t)$ telle que l'erreur d'observation $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ tende asymptotiquement vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. A souligner que cette erreur d'observation soit indépendante de $d(t)$.

Un observateur à entrées inconnues existe pour le système (1.6) si et seulement si les deux

conditions suivantes sont satisfaites ([62]) :

$$\begin{aligned} & - \text{rang}(CE) = \text{rang}(E) = q \\ & - \forall s \in \mathbb{C}, \Re s \geq 0 : \text{rang} \left(\begin{bmatrix} sI_n - A & E \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) = n + q \end{aligned}$$

avec $\Re s$ représente la partie réelle de la variable complexe s .

On suppose que la matrice E est de plein rang colonne et que la paire (A, C) est observable.

L'objectif est l'estimation complète du vecteur d'état malgré la présence des entrées inconnues $d(t)$. Ainsi, considérons l'observateur d'ordre plein :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Nz(t) + Mu(t) + Gy(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + Fy(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Où $z(t)$ est le vecteur d'état de l'observateur et $\hat{x}(t)$ est le vecteur d'état estimé du système.

Les gains N, M, G et F seront déterminées d'une façon que l'erreur d'estimation de l'état $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ converge vers zéro quel que soit l'état initial du système et quelque soit la perturbation $d(t)$

. L'erreur d'observation s'écrit :

$$\begin{cases} e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \\ = x(t) - z(t) - Fy(t) \\ = (I_n - FC)x(t) - z(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

En définissant la matrice :

$$P = (I_n - FC) \quad (1.9)$$

l'erreur d'observation $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, est donnée par :

$$e_x(t) = Px(t) - z(t) \quad (1.10)$$

et son évolution est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = PAx(t) + PBu(t) + PEd(t) - Nz(t) - Mu(t) - Gy(t) \\ = (PA - GC - NP)x(t) + (PB - M)u(t) + PEd(t) + Ne_x(t) \end{cases} \quad (1.11)$$

L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro si et seulement si les matrices N , G , M et F sont choisies de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\begin{cases} PA - GC - NP = 0 \\ PB - M = 0 \\ PE = 0 \\ NestHurwitz \end{cases} \quad (1.12)$$

Compte tenu de la définition (1.9), l'égalité $PE = 0$ admet la solution suivante :

$$F = E(CE)^+ + Q(I_p - CE(CE)^+) \quad (1.13)$$

où Q est une matrice arbitraire, et où $(CE)^+$ désigne la pseudo-inverse de (CE) définie par :

$$(CE)^+ = ((CE)^T(CE))^{-1}(CE)^T \quad (1.14)$$

On déduit alors la valeur de P :

$$P = I_n - E(CE)^+C + Q(I_p - CE(CE)^+)C \quad (1.15)$$

La matrice M est déterminée à partir de la deuxième relation de (1.12) et de l'expression de P (1.15)

$$M = (I_n - E(CE)^+C + Q(I_p - CE(CE)^+)C)B \quad (1.16)$$

On définit la matrice auxiliaire $R = G - NF$, la première relation de (1.12) va se réécrire sous la forme : $N = PA - RC$. Il vient alors :

$$N = (I_n - E(CE)^+C)A - [Q \quad R] \begin{bmatrix} (I_p - CE(CE)^+)CA \\ C \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

La matrice G est défini comme suit : $G = R + NF$

Pour obtenir les gains de l'observateur, il suffit de déterminer Q et R par placement de pôles de N afin de garantir la stabilité.

Donc, si le système d'équation (1.12) est satisfait, la dynamique de l'erreur d'estimation d'état se réduit à :

$$\dot{e}_x(t) = Ne_x(t) \quad (1.18)$$

Compte tenu des propriétés de N , l'erreur d'estimation d'état converge bien asymptotiquement vers zéro.

1.2.1.3 Filtre de Kalman-Bucy

Le filtre de Kalman-Bucy [63] vise à estimer l'état d'un système d'équations évoluant dans le temps à partir de son état précédent, des entrées de commande et des mesures bruitées. Son application nécessite la disponibilité du modèle de l'ensemble des sources de perturbations affectant le système d'équations sous forme stochastique. L'état estimé est optimal au sens du minimum de variance (de l'erreur entre l'état réel et son estimation). Nous rappelons brièvement ici la procédure de synthèse d'un filtre de Kalman standard pour un système linéaire à temps continu décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + M\omega(t) \\ y(t) = Cx(t) + \nu(t) \end{cases} \quad (1.19)$$

où $\omega \in \mathbb{R}^q$ et $\nu \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement le bruit interne et le bruit de mesure du système. Les signaux $\omega(t)$ et $\nu(t)$ sont des bruits blancs gaussiens centrés non corrélés de Densité Spectrale de Puissance (DSP) W et V respectivement.

- W est la covariance du bruit interne, Généralement non mesurable.
- V est la covariance du bruit sur les mesures, Généralement mesurable.
- P est la covariance de l'erreur sur l'état estimé, il permet de tester la qualité de l'estimation, il est défini par :

$$P(t) = E([(x(t) - \hat{x}(t)).(x(t) - \hat{x}(t))^T]) \quad (1.20)$$

L'observateur pour le système (1.19) est donné par le théorème suivant :

Théorème 2 [47] *Si le système de la forme (1.19) est uniformément observable alors il existe un observateur de la forme suivante :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(t)(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.21)$$

où $L(t)$ est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + MWM^T - L(t)CP(t) \\ L(t) = P(t)C W^{-1} \end{cases} \quad (1.22)$$

où $L(t)$ est le gain du filtre de Kalman et $P(t)$ la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. En régime permanent la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $P(t)$ (qui est aussi solution de l'équation de ricatti), devient constante. L'équation de ricatti se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} AP + PA^T + MWM^T - LCP = 0 \\ L = PCW^{-1} \end{cases} \quad (1.23)$$

1.2.2 Observateurs pour les systèmes non linéaires

Dans le cas des systèmes non linéaires, l'observation d'état est délicate et il n'existe pas actuellement une méthode universelle pour la synthèse d'observateurs pour cette classe de systèmes. Plusieurs observateurs ont été proposés et étudiés en littérature, on cite à titre d'exemple l'observateur à grand gain [52],[64], l'observateur à mode glissant[65]-[67], le filtre de Kalman étendu [68]-[70], l'observateur de Luenberger étendu [71].

1.2.2.1 Observateur de Luenberger étendu

L'observateur de Luenberger étendu est la généralisation de l'observateur de Luenberger classique aux cas des systèmes linéaires. L'idée d'un observateur de Luenberger étendu est de linéariser le modèle autour de la trajectoire estimée $\hat{x}(t)$, au lieu de la linéarisation autour d'un point de fonctionnement, puis d'utiliser un observateur de Luenberger par la suite. reprenons le système dynamique non linéaire qui se met sous la forme (1.1) La synthèse de l'observateur de Luenberger étendu correspondant au système (1.1) donne lieu à la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, u(t)) + L(\hat{x})(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}, u(t)) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (1.24)$$

où $L(\hat{x})$ est le gain de l'observateur calculé de telle sorte que toutes les valeurs propres de la matrice $A(\hat{x}) - L(\hat{x})C(\hat{x})$ soit strictement hurwitzienne.

$A(\hat{x})$ et $C(\hat{x})$ résultent de la linéarisation du modèle non linéaire (1.1) autour de la trajectoire estimée \hat{x} .

$$\begin{cases} A(\hat{x}) = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}} \\ C(\hat{x}) = \frac{\partial h(x,u)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}} \end{cases} \quad (1.25)$$

Le calcul du gain L est réalisé en supposant que l'état restera autour d'une zone où l'approximation par un modèle linéaire est valable.

Dans l'observateur de Luenberger étendu, nous pouvons régler la vitesse de convergence à l'aide d'un placement de pôles de la partie linéaire de cet observateur. Une étude détaillée peut être trouvée dans [71].

1.2.2.2 Filtre de Kalman étendu

Le filtre de Kalman étendu est l'une des techniques d'estimation les plus populaires et largement étudiées dans le domaine d'estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaires. Il a été implémenté pour la première fois par Schmidt [72]. Sa conception repose sur la généralisation du filtre de Kalman linéaire en utilisant des techniques classiques de linéarisation de la dynamique non linéaire [21], [73],[74]. Ainsi les matrices A et C sont elles remplacées par les matrices jacobiniennes de f et h , évaluées en $\hat{x}(t)$. Le système étudié est linéarisé à chaque instant le long de trajectoires estimées.

On considère le système non linéaire dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + M\omega(t) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) + \nu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.26)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système. x_0 est la condition initiale à l'instant initial t_0 , $\omega(t)$ et $\nu(t)$ sont des bruits gaussiens de moyenne nulle et de matrice de covariance W et V respectivement.

Le filtre de Kalman étendu pour le système (1.26) est représenté par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, u(t)) + L(\hat{x}, u(t))(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}, u(t)) \\ L(\hat{x}, u(t)) = P(t)H^T(\hat{x}, u(t))V^{-1} \\ \dot{P}(t) = F(\hat{x}, u(t))P(t) + P(t)F^T(\hat{x}, u(t)) + MW M^T - P(t)H^T(\hat{x}, u(t))V^{-1}H(\hat{x}, u(t))P(t) \\ F(x(t), u(t)) = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x(t)} \\ H(x(t), u(t)) = \frac{\partial h(x(t), u(t))}{\partial x(t)} \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{array} \right. \quad (1.27)$$

$F(x(t), u(t))$ et $H(x(t), u(t))$ sont calculés pour $x(t) = \hat{x}(t)$.

Le problème principal du filtre de Kalman étendu est celui de sa convergence. Il a fallu attendre le début des années 1990 pour que soient fournies certaines démonstrations dans des cas particuliers. Ainsi en se basant sur l'observateur non linéaire à grand gain proposé par Gauthier et al. en 1992 [53]. Deza et al. en 1992 [75] ont démontré la convergence exponentielle de filtres de Kalman étendus continus-continus et continus-discrets sous certaines conditions particulières, notamment au niveau du choix des matrices V et W , sans oublier la démonstration de convergence exponentielle de Reif et al. en 1998 [74] pour un filtre de Kalman étendu légèrement modifié.

1.2.2.3 Observateur de Thau

L'observateur de Thau a été développé par Thau [76] pour l'estimation d'une classe de systèmes non linéaires Lipschitzien. La construction de cet observateur est basée sur les fonctions de Lyapunov. Les systèmes non linéaires considérés sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + g(x(t), u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

La paire (A, C) est supposée observable, et la fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non

linéaire vectorielle continument différentiable qui satisfait la condition de Lipschitz :

$$\|g(x(t), u(t)) - g(\tilde{x}(t), u(t))\| \leq \alpha \|x(t) - \tilde{x}(t)\|, \forall x(t), \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad (1.29)$$

où α est une constante de Lipschitz positive.

L'observateur de Thau possède la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + g(\hat{x}(t), u(t)) + L(y(t) - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (1.30)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donnée par l'équation :

$$\dot{e}_x(t) = (A - LC)e(t) + g(x(t), u(t)) - g(\hat{x}, u(t)) \quad (1.31)$$

Thau en 1973 [76] a démontré que si le gain d'observation $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est choisi de sorte que $(A - LC)$ soit Hurwitz, alors il existe une matrice symétrique définie positive $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unique telle que :

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = -Q \quad (1.32)$$

Considérons la fonction de Lyapunov définie positive suivante : $V(e_x(t)) = e_x^T(t) P e_x(t)$

Si la condition suivante :

$$\alpha < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (1.33)$$

est vérifiée, alors l'erreur d'observation $e_x(t)$ converge asymptotiquement vers l'origine [76].

avec $\lambda_{\min}(Q)$ et $\lambda_{\max}(P)$ sont respectivement les valeurs propres minimale et maximale des matrices Q et P . Ce type d'observateurs a été largement étudié dans la littérature par de nombreux chercheurs. Une méthode constructive a été proposée dans Raghavan et Hedrick en 1994 [77], où une solution explicite et systématique du choix du gain de l'observateur est établie.

Cette solution est illustrée dans le théorème suivant :

Théorème 3 [77] *Considérons le système (1.28) et l'observateur (1.30). S'il existe un $\epsilon > 0$ tel que l'équation de Riccati :*

$$A^T P + P A + P(\alpha^2 I - \frac{1}{\epsilon} C^T C) + I + \epsilon I = 0 \quad (1.34)$$

admette une solution P symétrique définie positive, alors le gain de l'observateur :

$$L = \frac{1}{2\epsilon} PC^T \quad (1.35)$$

stabilise asymptotiquement la dynamique de l'erreur d'estimation (1.31).

D'autres techniques pour trouver la matrice de gain L ont été présentés dans la littérature. Pour plus de détails sur ces techniques, le lecteur intéressé peut regarder [78]-[80].

1.2.2.4 Observateur à grand gain

Les observateurs à grand gain [52],[55] sont des observateurs qui présentent d'excellentes propriétés globales, qui prennent en compte la structure non linéaire du système et elles assurent une convergence et une stabilité avec une vitesse de convergence réglable. Ils s'appliquent sur les systèmes uniformément observables qui possède une forme triangulaire complète ou partielle. Pour de tels systèmes, sous l'hypothèse que les non linéarités sont Lipschitziennes, Gauthier et al.[53],[54] proposent un Observateur de type «Grand gain». Considérons les systèmes non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.36)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système. x_0 est la condition initiale à l'instant initial t_0 .

Après une transformation en utilisant un difféomorphisme Φ (le difféomorphisme existe si le degré relatif du système est égal à n). Où :

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Définition 13 (*Difféomorphisme*)

Un système est dit *difféomorphe* à un autre système s'il existe une application bijective différentiable d'un ensemble à un autre dont la bijection réciproque est aussi différentiable. Cette application permet ainsi de réécrire le système sous une forme particulière.

Le système (1.36) peut être réécrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) \\ y(t) = Cx(t) = x_1(t) \end{array} \right. = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ \varphi(x(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(x_1(t)) \\ g_2(x_1(t), x_2(t)) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)) \\ g_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{bmatrix} u(t) \\ = F(x(t)) + G(x(t))u(t) \quad (1.38)$$

tel que chaque composante $g_i(\tilde{x}_i)$ où \tilde{x}_i représente le vecteur $(x_1, \dots, x_i)^T$ est globalement Lipschitzienne. φ est aussi une fonction \mathbb{C}^∞ globalement Lipschitzienne sur \mathbb{R}^n . Si le système (1.38) est uniformément observable, alors l'observateur à grand gain possède la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t))u(t) - S_\infty^{-1}C^T(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (1.39)$$

où S_∞ est la solution de l'équation :

$$A^T S_\infty + S_\infty A + \rho S_\infty = C^T C \quad (1.40)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad C = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \in \mathbb{R}^P$$

ρ est choisi suffisamment grand pour régler la vitesse de convergence. ρ vérifie la condition suivante :

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq K(\rho) \exp\left(-\frac{\rho}{3}t\right) \|\hat{x}_0 - x_0\| \quad (1.41)$$

où : $K(\rho) \geq 0$. Pour l'observateur en cours, le gain est défini en considérant la partie linéaire du système alors que l'influence de la non linéarité est atténuée par le choix d'une valeur suffisamment grande de ρ . C'est ainsi que cet observateur est appelé "à grand gain". Cet observateur donne une réponse exponentielle aussi rapide que souhaitée en augmentant ρ ; cette technique est très utilisée et permet d'établir des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel. Cependant, parfois il est difficile d'aboutir à la construction d'une structure triangulaire, en plus nous pouvons avoir une sensibilité au bruit de mesure dans le cas d'un choix de gain très élevé.

1.2.2.5 Observateur à mode glissant

Depuis des années, la technique des modes glissants pour les systèmes non linéaires a été largement étudiée et développée. L'objectif de cette méthode est d'obliger le système à suivre, en temps fini, une surface où le comportement résultant correspond aux dynamiques souhaitées [81]. Cette technique n'est autre qu'un cas particulier de la théorie des systèmes à structure variable, présentée par Filippov en 1960 [82]. L'utilisation de cette théorie date de la parution des livres d'Emelyanov [83] et d'Utkin [65]. La robustesse aux bruits, aux perturbations et aux incertitudes de modélisation rends ces observateurs plus appropriés pour l'estimation d'états et au diagnostic. Les premiers travaux mentionnant ce type d'observateurs sont l'oeuvre de Walcott et al.[84], Walcott et Zak [85], Slotine [86] et Canudas [87]. Les différentes étapes de synthèse d'un observateur à mode glissant sont connues et clairement identifiées dans [88]-[90]. Ces dernières sont rappelées ci-dessous.

1.2.2.5.a Principe des observateurs à mode glissant

Le principe des observateurs mode glissant consiste à contraindre, à l'aide des fonctions discontinues, les dynamiques d'un système d'ordre n à converger vers une variété S de dimension $(n - p)$ dite surface de glissement (p étant la dimension du vecteur de mesure) [67]. L'attractivité de cette surface est assurée par des conditions appelées conditions de glissement. Si ces conditions sont vérifiées, le système converge vers la surface de glissement et y évolue selon

une dynamique d'ordre $(n - p)$. Dans le cas des observateurs mode glissant, les dynamiques concernées sont celles des erreurs d'observation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

A partir de leurs valeurs initiales $e(0)$, ces erreurs convergent vers les valeurs d'équilibre en deux étapes :

Dans une première phase, la trajectoire des erreurs d'observation évolue vers la surface de glissement sur laquelle les erreurs entre la sortie de l'observateur et la sortie du système réel (les mesures) $e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ sont nulles. Cette étape qui est généralement très dynamique est appelée mode d'atteinte.

Dans la seconde phase, la trajectoire des erreurs d'observation glisse sur la surface de glissement avec des dynamiques imposées de manière à annuler toutes les erreurs d'observation. Ce dernier mode est appelé mode de glissement. Considérons un système d'état non linéaire d'ordre n :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (1.42)$$

Les fonctions f et h sont des champs de vecteurs supposés suffisamment continûment dérivables. L'entrée u est localement bornée et mesurable. L'observateur mode glissant est défini avec la structure suivante [91] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) - L \text{sign}(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}(t)) \end{cases} \quad (1.43)$$

Où : L est la matrice de gain de dimension $(n - p)$. On remarque que l'observateur obtenu est une copie du modèle du système plus un terme correcteur qui établit la convergence de \hat{x} vers x .

La surface de glissement dans ce cas est donnée par :

$$S(x) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (1.44)$$

Le terme de correction utilisé est proportionnel à la fonction discontinue sign appliquée à l'erreur de sortie où la fonction $\text{sign}(x)$ est définie par [91] :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

Pour que l'état estimé converge vers l'état réel, l'observateur mode glissant doit respecter deux conditions :

La première condition concerne le mode d'atteinte et garantit l'attractivité de la surface de glissement $S = 0$ de dimension p .

La surface de glissement est attractive si la fonction de Lyapunov $V(x) = \frac{1}{2}S^T S$ vérifie la condition : $\dot{V}(x) < 0$ pour $S \neq 0$.

La deuxième concerne le mode glissant, durant cette étape, la matrice des gains correctifs agit de manière à satisfaire la condition d'invariance suivante : $S = 0$ et $\dot{S} = 0$.

Durant ce mode, les dynamiques du système sont réduites et le système d'ordre n devient un système équivalent d'ordre $(n - p)$. Ces critères permettent la synthèse de l'observateur mode glissant et déterminent son fonctionnement.

La condition d'attractivité $S\dot{S} < 0$ ne garantit qu'une convergence asymptotique vers la surface de glissement $S(x) = 0$. Afin d'assurer une convergence en temps fini t_{fini} , la condition $S\dot{S} < 0$ est remplacée par la condition dite de η -attractivité, donnée par Slotine en 1986 [67].

la condition η -attractivité s'écrit :

$$S\dot{S} < \eta |S| \quad \text{avec} \quad \eta > 0 \quad (1.46)$$

L'expression de t_{fini} est obtenue en résolvant l'inégalité (1.46). Nous obtenons alors :

$$|S(x, t)| - |S(x, 0)| < -\eta t \quad (1.47)$$

Donc la surface $S(x) = 0$ est atteinte en un temps fini, tel que :

$$t_{fini} \leq \frac{|S(x, t)|}{\eta} \quad (1.48)$$

Les observateurs en mode glissant peuvent être conçus et appliqués à la fois aux systèmes linéaires et non linéaires.

1.2.2.5.b Conception des observateurs à mode glissant

Considérons un système dynamique incertain décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x(t), u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.49)$$

$f(x(t), u(t))$ est une fonction continue en x , utilisée pour décrire les incertitudes non linéaire du système et elle satisfait les conditions suivantes :

$$\|f(x(t), u(t))\| \leq \rho, \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0. \quad (1.50)$$

En outre, la matrice C est supposée de plein rang ligne.

1.2.2.5.c Observateur d'Utkin

Considérons le système (1.49) et supposons que la paire (A, C) soit observable et que la fonction $f(x(t), u(t)) \equiv 0$. La reconstruction des états s'appuyant sur les sorties mesurées, il est naturel d'effectuer un changement de coordonnées pour que les sorties du système apparaissent directement comme des composantes du vecteur d'état. Sans perte de généralité, la matrice de sortie peut être écrite comme suit :

$$C = [C_1 \quad C_2] \quad (1.51)$$

où $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ avec $\det(C_2) \neq 0$. Alors, la matrice de transformation

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

est non singulière et, dans ce nouveau système de coordonnées, on peut facilement vérifier que la nouvelle matrice de sortie s'écrit comme suit :

$$\tilde{C} = CT^{-1} = [0 \quad I_p] \quad (1.53)$$

Les nouvelles matrices d'état et d'entrée s'écrivent :

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Le système nominal peut alors être écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t) \\ \dot{y}(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}y(t) + B_2u(t) \end{cases} \quad (1.54)$$

où $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = Tx(t)$ et $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$ L'observateur proposé par Utkin [92] a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}\hat{y}(t) + B_1u(t) + L\nu(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) = A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}\hat{y}(t) + B_2u(t) - \nu(t) \end{cases} \quad (1.55)$$

où $(\hat{x}_1(t), \hat{y}(t))$ sont les estimés de $(x_1(t), y(t))$, $L \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ est le gain de l'observateur et les composantes du vecteur discontinu $\nu(t)$ sont définies par l'équation :

$$\nu_i(t) = M \text{sign}(\hat{y}_i(t) - y_i(t)) \quad \text{pour } M \in \mathbb{R}_+ \quad (1.56)$$

où $\hat{y}_i(t)$ et $y_i(t)$ sont respectivement les composantes des vecteur $\hat{y}(t)$ et $y(t)$. Désignons par $e_1(t)$ et $e_y(t)$ les erreurs d'estimation d'état et de sortie :

$$\begin{cases} e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x_1(t) \\ e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t) \end{cases} \quad (1.57)$$

A partir des équations (1.54), (1.55) et (1.57), le système suivant peut être obtenu :

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1(t) = A_{11}\hat{e}_1(t) + A_{12}\hat{e}_y(t) + L\nu(t) \\ \dot{\hat{e}}_y(t) = A_{21}\hat{e}_1(t) + A_{22}\hat{e}_y(t) - \nu(t) \end{cases} \quad (1.58)$$

Comme la paire (A, C) est observable, la paire (A_{11}, A_{21}) l'est également. Par conséquent, L peut être choisi pour que les valeurs propres de la matrice $A_{11} + LA_{21}$ soient dans le demi-plan gauche du plan complexe.

1.2.2.5.d Observateur de Walcott et Zak

Le problème considéré par Walcott et Zak [93],[94] est l'estimation d'état d'un système décrit par (1.49) de sorte que l'erreur tende vers zéro d'une façon exponentielle malgré la présence des incertitudes considérées. Dans cette partie, on suppose que :

$$f(x(t), u(t)) = R\zeta(x(t), u(t)) \quad (1.59)$$

où la fonction $\zeta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une fonction bornée et inconnue, telle que :

$$\|\zeta(x(t), u(t))\| \leq \rho, \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0.$$

On considère qu'il existe une matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ telle que la matrice $A_0 = (A - LC)$ a des valeurs propres stables, une paire de matrices de Lyapunov (P, Q) symétriques et définies positives et une matrice F respectant la contrainte structurelle suivante :

$$\begin{cases} (A - LC)^T P + P(A - LC) = -Q \\ C^T F^T = PR \end{cases} \quad (1.60)$$

L'observateur proposé est de la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + \nu(t) \quad (1.61)$$

$$\nu(t) = \begin{cases} -\rho \frac{P^{-1}C^T F^T F C e(t)}{\|F C e(t)\|} & \text{si } F C e(t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \text{sinon} \end{cases} \quad (1.62)$$

Où $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$.

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état engendrée par cet observateur est régie par l'équation suivante : $\dot{e}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t)$.

Considérons la fonction de Lyapunov suivante : $V(t) = e^T(t) P e(t)$. Donc, Pour les deux cas de l'équation (1.62), Walcott et Zak [93],[94] ont bien montré que la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative ce qui montre que l'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro.

Pour garantir la convergence asymptotique de l'observateur, on doit vérifier que :

- La paire (A, C) est observable,
- Il existe une paire de matrices de Lyapunov (P, Q) et une matrice F respectant les contraintes (1.60).

L'inconvénient de cette méthode réside dans le calcul de la variable glissante, car dans le cas où la matrice F (1.60) est orthogonale au vecteur $Ce(t)$, la convergence de l'observateur n'est pas garantie. Pour remédier à ce problème, Edwards et Spurgeon ont élaboré un observateur, en utilisant la forme canonique du système, basé sur la structure de l'observateur de Walcott et Zak où le calcul de la variable glissante dépend de l'existence de quelques matrices appropriées et de l'erreur de sortie afin de résoudre cette difficulté [95], [88].

1.2.2.5.e Observateur à mode glissant étape par étape

L'observateur à mode glissant étape par étape a été développé pour des systèmes pouvant se mettre sous la forme, appelée forme triangulaire d'observation, suivante [96], [97] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + g_1(x_1(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + g_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) + g_{n-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), u(t)) \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) + g_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{array} \right. \quad (1.63)$$

Où g_i et f_n pour $i = 1, \dots, n$, sont des fonctions scalaires, x_i sont les états du système, u est le vecteur d'entrée et y est la sortie. La structure de l'observateur proposé est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + g_1(x_1(t), u(t)) + l_1 \text{sign}_1(x_1(t) - \hat{x}_1(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + g_2(x_1(t), \tilde{x}_2(t), u(t)) + l_2 \text{sign}_2(\tilde{x}_2(t) - \hat{x}_2(t)) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1}(t) = \hat{x}_n(t) + g_{n-1}(x_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_{n-1}(t), u(t)) + l_{n-1} \text{sign}_{n-1}(\tilde{x}_{n-1}(t) - \hat{x}_{n-1}(t)) \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = f_n(x_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t)) + g_n(x_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t), u(t)) + l_n \text{sign}_n(\tilde{x}_n(t) - \hat{x}_n(t)) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}_1(t) \end{array} \right. \quad (1.64)$$

Où les variables $\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_1(t) \\ \tilde{x}_i(t) = \dot{\tilde{x}}_i(t) + l_{i-1} \text{sign}_{eq_{i-1}}(\tilde{x}_{i-1}(t) - \hat{x}_{i-1}(t)) \end{array} \right. \quad (1.65)$$

Avec sign_{eq} désigne la fonction $\text{sign}(\cdot)$ classique filtrée par un filtre passe bas ; la fonction sign_i est définie de manière à imposer que le terme correctif ne soit actif que si $(\tilde{x}_j - \hat{x}_j) = 0$, pour $j = 1, \dots, i$ c'est-à-dire, s'il existe $j \in 1, \dots, i - 1$ tel que $(\tilde{x}_j - \hat{x}_j) \neq 0$ alors la fonction sign_i est mise à zéro sinon elle est égale à la fonction $\text{sign}(\cdot)$ usuelle. La convergence des erreurs d'observation en temps fini n'est assurée que si le système est à entrées bornées et à états bornés pour une durée finie. Si cette condition est vérifiée, alors les l_i peuvent être choisis tel que l'état de l'observateur \hat{x} converge en un temps fini vers l'état x réel du système. Pour plus de détails voir les articles [96], [97].

La fonction signe est à l'origine du phénomène indésirable de chattering. Pour remédier à ce problème, on peut faire recours à d'autres fonctions, tel que la fonction tangente hyperbolique [98].

1.2.2.6 Observateur adaptatif

Dans la pratique, il est souvent nécessaire d'identifier simultanément les paramètres et les états du système. C'est ainsi que les observateurs adaptatifs ont vu le jour. Leur principe consiste à combiner la connaissance à priori sur le système avec les mesures en ligne de l'entrée et de la sortie pour estimer en même moment les états et/ou les paramètres du système. Les premiers travaux sur l'observateur adaptatif sont développées pour les système linéaires dans les années 70 par Kreisselmeier [99], Lüders et Narendra [100]. A noter qu'il existe dans la littérature plusieurs travaux sur les observateurs adaptatifs [101]-[107]. Dans [108]-[109], des algorithmes ont été proposées pour estimer asymptotiquement l'état malgré les paramètres inconnus. De plus, si une certaine condition d'excitation persistante est vérifiée, ils permettent aussi l'estimation des paramètres. Leur conception suppose l'existence d'une fonction de Lyapunov. Plus précisément, dans [109], a été considéré le système non linéaire général affine par rapport aux paramètres :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) + g(x, u, t)\theta \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad (1.66)$$

$\theta \in \mathbb{R}^q$ est vecteur de paramètres constants inconnus.

Supposons que $x = [y; z]$ pour un certain vecteur colonne z , éventuellement après un changement de coordonnées. Pour ce système, s'il existe dans \mathcal{C}^1 une fonction positive décroissante $V(t, e)$, et une fonction $k(e_y, t)$ bornée par rapport à t et avec $k(0, t) = 0$, telles que $u \in U$ (l'ensemble des entrées admissibles), $\forall e = [e_y; e_z] \in \mathbb{R}^n$ avec $e_y \in \mathbb{R}^p$, $\forall y \in \mathbb{R}^p$, $\forall z \in \mathbb{R}^{n-p}$, $\forall t \geq 0$:

–

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial e} [f(y, z, u(t), t) - f(y, z - e_z, u(t), t) + g(y, z, u(t), t) - g(y, z - e_z, u(t), t) \\ + k(e_y, t) \leq -\alpha \|e\|^2, \quad \alpha > 0 \end{cases} \quad (1.67)$$

–

$$\frac{\partial V}{\partial e} g(y, z, u(t), t) = \varphi(e_y, y, z, u(t), t), \quad (1.68)$$

pour une certaine fonction φ ;

- g est globalement bornée, f et g sont globalement lipschitziennes par rapport à z , pour tout (u, y, t) .

alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = f(y, \hat{z}, u, t) + g(y, \hat{z}, u, t)\hat{\theta} + k(y - \hat{y}, t), & \text{avec } \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{\theta}} = -\Lambda\varphi^T(\hat{y} - y, y, \hat{z}, u, t), & \Lambda = \Lambda^T > 0 \end{cases} \quad (1.69)$$

est un observateur d'état asymptotique pour le système (1.64). De plus, si $g(x, u, t)$ est tel que :

$$\int_{t+T}^t g^T((x(\tau), u(\tau), \tau)g(x(\tau), u(\tau), \tau))d\tau \geq \alpha_0 I_d \quad (1.70)$$

pour des constantes positives α_0, T et tout $t \geq 0$, et si g est bornée, alors : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\hat{\theta} - \theta\| = 0$

1.2.2.7 Observateurs par intervalles

Les observateurs par intervalles constituent un type d'observateurs très particuliers. Ce sont des outils développés depuis moins de 20 ans seulement. Ils trouvent leur origine dans les travaux de Gouzé et al. en 2000 [27] et se développent très rapidement dans de nombreuses directions.

Un observateur par intervalles consiste en un système dynamique auxiliaire fournissant un intervalle dans lequel se trouve l'état, en considérant que l'on connaît des bornes pour la condition initiale et pour les quantités incertaines.

Le concept d'observateurs intervalles, récemment développé pour les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires est appliqué pour les systèmes incertains [111]-[116]. Les résultats de base pour la construction de ce type d'observateurs feront l'objet du troisième chapitre.

1.3 Diagnostic à base d'observateurs d'états

Le diagnostic des procédés industriels a pour objet de trouver la cause d'une défaillance ou d'un défaut, il est défini par les instances internationales de normalisation (AFNOR par

exemple) comme étant un processus d'identification de la cause probable des défaillances à l'aide d'un raisonnement logique fondé sur un ensemble d'informations provenant d'une inspection, d'un contrôle ou d'un test. De manière générale, lorsqu'on parle de diagnostic des défauts, on se réfère à la procédure de détection et d'isolation de ces derniers, que l'on retrouve souvent sous le nom : FDI (Fault Detection and Isolation). Cette procédure nous permet d'avoir des informations sur l'apparition d'un défaut et sur sa provenance le plus rapidement possible.

1.3.1 Concepts et définitions

En parcourant la littérature, on se rend compte immédiatement que la terminologie dans le domaine du diagnostic n'est pas cohérente. De nombreuses définitions d'un même mot sont trouvées. On peut citer par exemple le terme diagnostic, qui présente plusieurs définitions, différentes selon le domaine d'application considérée. Cette incohérence rend les tâches de comparaison des différentes approches, ainsi que la précision de contribution et des objectifs des travaux dans ce domaine difficile à cerner. Afin d'enlever ces ambiguïtés, le comité technique SAFPROCESS de l'IFAC (International Federation of Automatic Control), ont discuté de ce problème et ils ont essayé de standardiser ces définitions. Dans ce contexte, il nous semble primordial de rappeler la terminologie utilisée dans ce rapport. Ces définitions reposent sur les travaux du comité technique de SAFPROCESS [117]-[119].

Définition 14 (*Fonctionnement normal*)

Un système est en fonctionnement normal lorsque ses états, ses entrées et ses sorties sont très proches de leur valeur nominale. Typiquement, il y a fonctionnement normal lorsqu'il n'y a pas d'apparition de défauts.

Définition 15 (*Une anomalie*)

Une anomalie est une particularité non conforme à la loi naturelle ou logique.

Définition 16 (*Une défaillance*)

Une défaillance est une anomalie altérant ou empêchant l'aptitude d'une unité fonctionnelle à accomplir la fonction souhaitée.

Définition 17 *(Une panne)*

Une panne est l'inaptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise. Une panne résulte toujours d'une défaillance.

Définition 18 *(Un défaut)*

Un défaut est une anomalie de comportement au sein du système. Ce concept est important dans les opérations de surveillance pour la conduite et la maintenance des processus industriels. Tout écart entre la caractéristique observée et la caractéristique de référence est considéré comme étant un défaut. Il est donc clair qu'une défaillance conduit à un défaut. Mais un défaut n'induit pas nécessairement une défaillance. En effet, le dispositif peut conserver son aptitude à accomplir sa tâche principale si les défauts n'ont pas d'impacts sur cette tâche.

Définition 19 *(Une perturbation)*

Une perturbation consiste en tout phénomène conçu comme normal influençant un processus, non ou mal, représenté par un modèle de référence.

Définition 20 *(Un résidu)*

Un résidu est un signal conçu pour être un indicateur d'anomalies fonctionnelles ou comportementales, sensiblement nul en absence de défauts et non nul en leur présence.

Définition 21 *(Le diagnostic)*

Le diagnostic consiste à déterminer le type, la taille, le lieu et l'instant d'occurrence d'un défaut, il suit la détection de défauts et inclut l'isolation et l'identification.

Définition 22 *(La surveillance)*

La surveillance est une tâche continue, réalisée en temps réel, qui permet de déterminer l'état d'un système physique, elle consiste en l'enregistrement des informations ainsi qu'en la reconnaissance et l'indication des anomalies du comportement.

Définition 23 *(La supervision)*

C'est la surveillance d'un système physique et la prise de décisions appropriées en vue de maintenir son opération lors de l'apparition de défauts.

1.3.2 Procédure de détection et d'isolation des défauts

Comme elle est représentée par la figure (1.3), La procédure de détection et d'isolation des défauts passe par trois étapes essentielles :

- **La détection** : C'est l'étape qui décide si le système est soumis à un défaut ou pas. Elle consiste dans la plus part des cas à générer le vecteur résidu, qui est nul en fonctionnement normal et est comparé en ligne aux signatures de pannes. La détection est réalisée en vérifiant le dépassement d'un seuil par les résidus.
- **L'isolation** : Cette étape permet de localiser le défaut et donc de déterminer quelle partie du système est affectée par l'anomalie. La détection de pannes est souvent suivie d'une procédure d'isolation de défauts, qui sert à distinguer (isoler) une panne particulière. Un seul résidu peut suffire pour détecter les pannes, cependant plusieurs résidus sont souvent requis pour l'isolation de pannes.
- **L'identification** : L'ampleur et le type des défauts sont estimés dans cette phase.

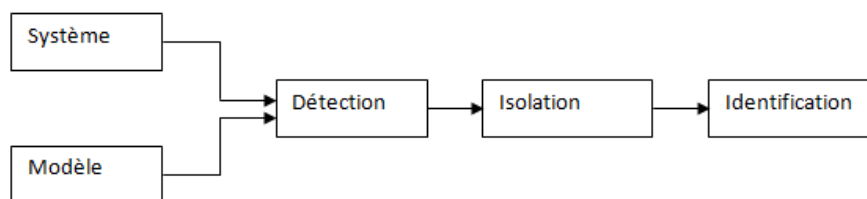


FIGURE 1.3: Procédure de détection et d'isolation des défauts à base de modèle.

1.3.3 Différentes structures de défauts

Généralement, un défaut est caractérisé par une déviation de fonctionnement normal d'un système qui est circonvenue soit par les signaux de commande ou les signaux de mesures. Les défauts affectant un système sont d'évolutions, de natures et de types différents.

1.3.3.1 Evolution des défauts

Les défauts peuvent être différenciés selon leur forme et leur comportement dans le temps. En effet, ils peuvent surgir ou déjà être présent sur le système ; ils peuvent être de faible ou

de forte amplitude, être brusque ou plutôt arriver graduellement sous forme de dérives lentes. Puisque l'apparence qui les définit est connue, ils sont dits déterministes. Par contre, les défauts se manifestant par intermittence sont dits stochastiques car ils ne peuvent être caractérisés que par des évolutions aléatoires.

Généralement on distingue dans la littérature trois types de défauts, comme le montre la figure (1.4) :

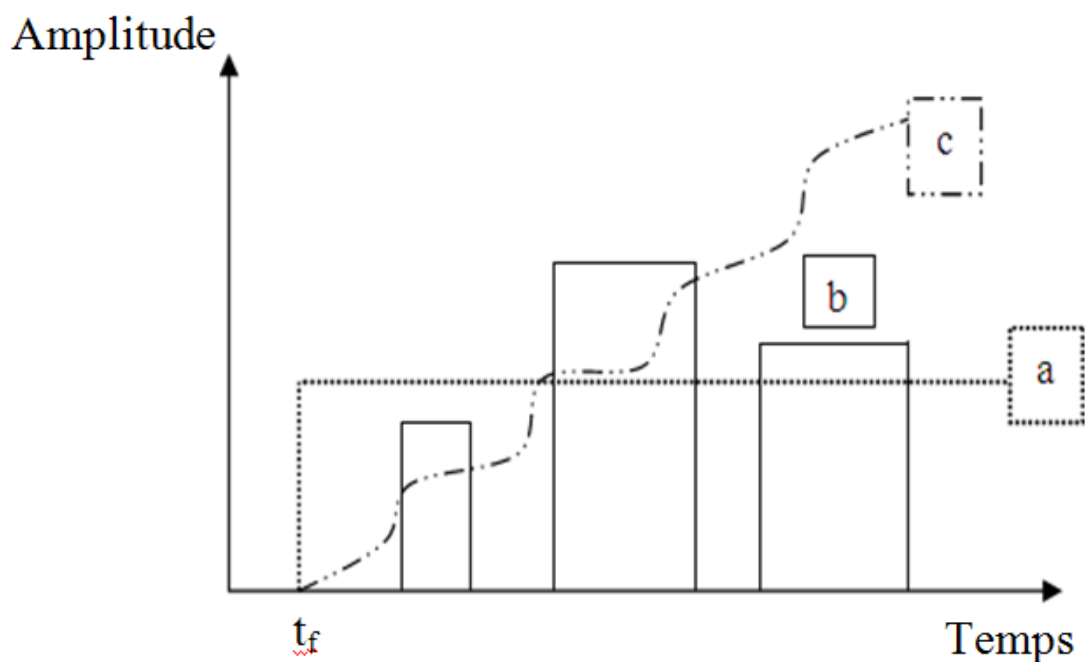


FIGURE 1.4: Evolution temporelle des défauts.

- Défaut brusque ou abrupt (a) : il est caractérisé par son comportement temporel discontinu, il correspond à une panne brutale : disfonctionnement total ou partiel. Une représentation mathématique de ce défaut est donnée par :

$$f(t - t_f) = \begin{cases} \delta & \text{si } t \geq t_f \\ 0 & \text{si } t < t_f \end{cases} \quad (1.71)$$

où, t_f représente le temps d'occurrence d'un défaut, $f(t - t_f)$ est le comportement temporel du défaut et δ est l'amplitude du défaut.

- Défaut intermittent (b) : ce défaut est un cas particulier de défaut abrupt avec la propriété

particulière que le signal revient de façon aléatoire à sa valeur nominale. Ce type de défaut caractérise les faux contacts ou un défaut intermittent des capteurs.

- Défaut à dérive graduel (c) : ce défaut a un comportement temporel lent ce qui le rend difficile à détecter, il est caractéristique d'un encrassement ou d'une usure d'une pièce. Son évolution au cours du temps peut être exprimée par cette relation :

$$f(t - t_f) = \begin{cases} \delta(1 - \exp(-\beta(t - t_f))) & \text{si } t \geq t_f \\ 0 & \text{si } t < t_f \end{cases} \quad (1.72)$$

où β et δ sont deux constantes positives.

1.3.3.2 Type de défauts

Selon le lieu de leur apparition dans un système et selon les différents éléments qu'ils peuvent affecter dans ce système, on distingue trois types de défauts, Comme étant présenté dans la figure (1.5) :

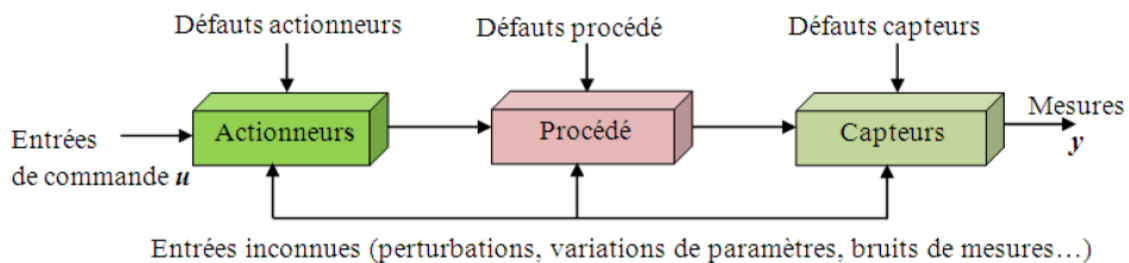


FIGURE 1.5: Différents types de défauts affectant un système physique.

1.3.3.2.a Défauts capteurs

Les capteurs sont essentiellement les interfaces de sortie d'un système avec l'environnement extérieur. Ils permettent de communiquer les informations concernant l'état et le comportement interne du processus. Ainsi, un défaut capteur caractérise une mauvaise image de la grandeur physique à mesurer. La présence d'un défaut capteur donne un signal inexact. Les défauts capteurs les plus répandus sont : a) le biais, b) la dérive, c) la perte d'efficacité, d) le blocage et e) le défaut de calibration. La figure (1.6) représente l'effet de ces défauts sur les mesures.

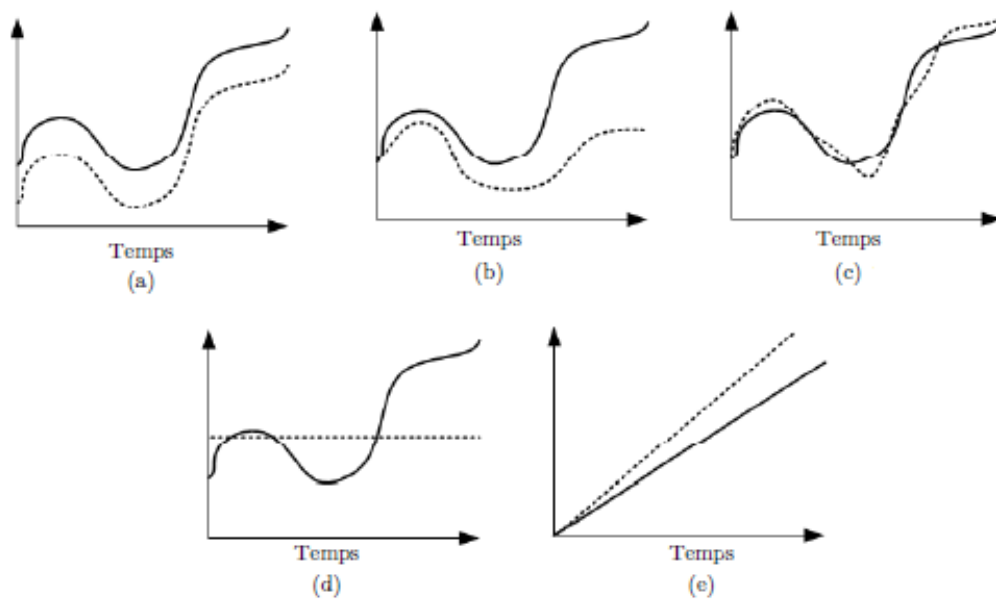


FIGURE 1.6: Effet de différents types de défauts capteur sur les mesures. Les lignes en pointillées désignent les valeurs mesurées de capteur et les lignes en trait continu représentent les valeurs réelles

1.3.3.2.b Défauts actionneurs

Les défauts actionneurs agissent au niveau de la partie opérative et détruisent le signal d'entrée du système. Les conséquences de défauts actionneurs peuvent varier d'une consommation élevée de l'énergie jusqu'à la perte totale de contrôle. Les défauts actionneurs varient d'un actionneur à un autre. Les défauts actionneurs les plus répandus sont : (a) oscillation, (b) blocage, (c) saturation et (d) perte d'efficacité. La figure (1.7) représente l'effet de ces défauts sur les entrées de commande.

1.3.3.2.c Défauts composants

Les défauts composants sont des défauts qui affectent les composants du système lui même. Ce sont les défauts qui ne peuvent pas être classifiés ni parmi les défauts actionneurs ni parmi les défauts capteurs. Ce type de défaut provoque un changement de la dynamique du système suite à un changement de ces paramètres. La représentation mathématique des défauts com-

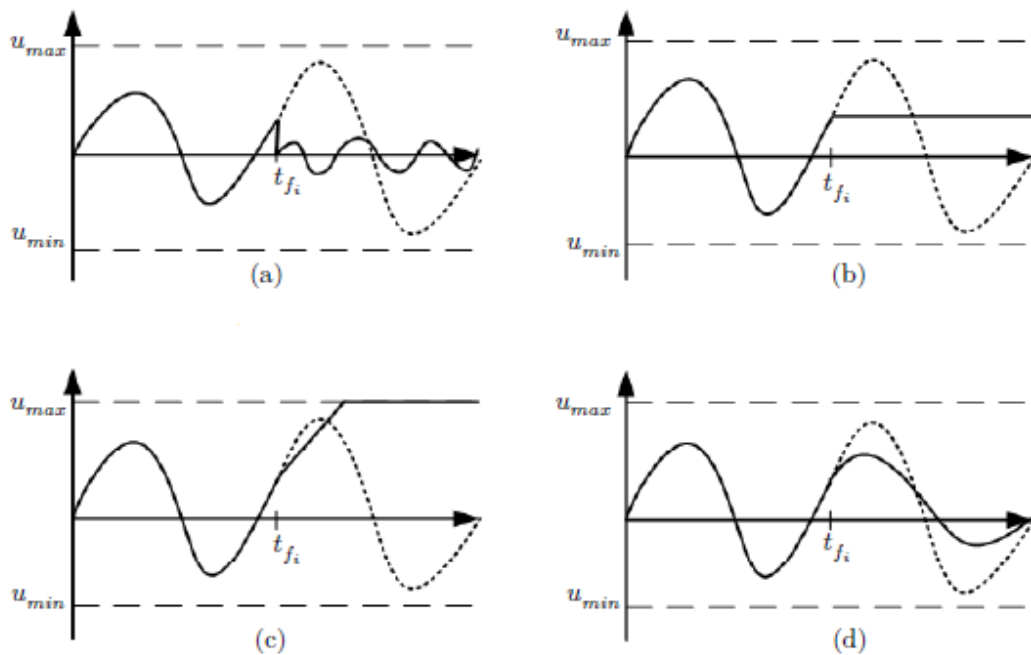


FIGURE 1.7: Représentation graphique des défauts actionneur les plus répandues ([120]). Les lignes en pointillées désignent les valeurs désirées de l'actionneur, cependant les lignes en trait continu représentent les valeurs réelles.

posants est souvent difficile à déterminer et demande des essais expérimentaux extensifs. En général, ils se traduisent par un changement dans l'équation d'états. Ce changement peut être soit paramétrique soit structurel/fonctionnel. Ces défauts induisent une instabilité de système.

1.3.3.3 Nature des défauts

Les défauts peuvent être classés en défauts de nature multiplicative ou de nature additive (figure 1.8), selon leurs effets sur les performances du système.

1.3.3.3.a Défauts multiplicatifs

Les défauts au niveau de la dynamique du procédé sont modélisés par des défauts multiplicatifs. Ils correspondent aux modifications paramétriques du modèle représentant le système. Ces derniers induisent des changements sur la corrélation du signal de sortie du système, ainsi

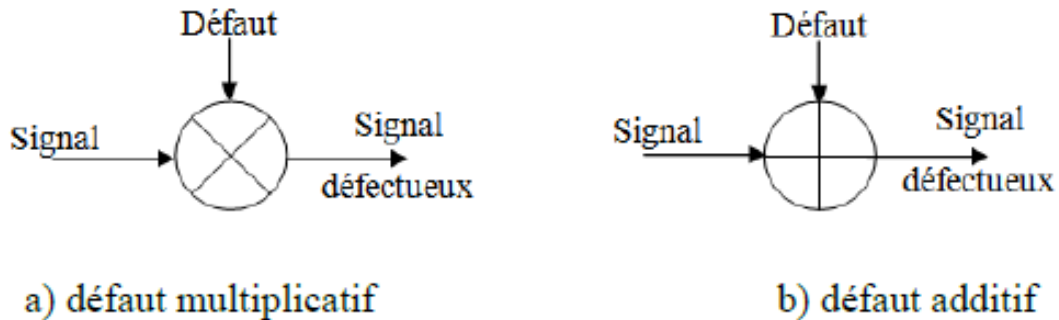


FIGURE 1.8: Modélisation des défauts

que des changements dans la dynamique du système. Les défauts multiplicatifs affectants un système linéaire continu sont représentés de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) \\ y(t) = (C + \Delta C)x(t) \end{cases} \quad (1.73)$$

où $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ représentent respectivement les défauts multiplicatifs affectants le système, les actionneurs et les capteurs.

1.3.3.3.b Défauts additifs

Ces défauts sont modélisés sous forme de termes additifs dans le modèle du système. Ils influent sur son état ou sur sa sortie. Cette modélisation est habituellement attribuée aux défauts de capteurs et d'actionneurs. On les représente de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_1\gamma_a(t) \\ y(t) = Cx(t) + F_2\gamma_c(t) \end{cases} \quad (1.74)$$

où $\gamma_a(t)$ représente les défauts additifs affectants le vecteur d'état $x(t)$ du système et $\gamma_c(t)$ représente les défauts additifs affectants le vecteur de sortie $y(t)$.

1.3.4 Principe de diagnostic de défauts

Le principe de base du diagnostic des défauts repose sur la notion de redondance, qui fournit au système plusieurs informations différentes sur une même variable. Des tests vont alors

permettre de vérifier la cohérence de ces informations. Cependant, il existe deux approches : La première est dite traditionnelle et consiste à ajouter des capteurs afin d'obtenir des informations supplémentaires sur l'état du système. C'est la redondance Physique. L'inconvénient majeur de cette approche est le coût additionnel en équipement. La deuxième approche est dite redondance analytique. Elle consiste à développer des algorithmes de détection et de localisation des défauts en utilisant les mesures disponibles sur le système. Une équation de redondance analytique est une équation dans laquelle toutes les variables sont connues. Pour éviter les fausses alarmes ou les manques de détection, ces algorithmes doivent tenir compte des bruits de mesure, des perturbations ainsi que des erreurs de modélisation. Les méthodes basées sur cette approche sont plus simples, plus flexibles, moins coûteuses et plus écologiques que l'approche traditionnelle.

1.3.5 Classification des méthodes de diagnostic

Les méthodes de diagnostic se distinguent selon différents critères : la dynamique de procédé (discret, continu ou hybride), sa complexité, la nature d'information (qualitative et/ou quantitative),...

Dans ce contexte, plusieurs classifications sont proposées dans la littérature : Frank et Kôppen-Seliger, 1997 [121] ; Venkatasubramanian et al., 2003 [122] ; Isermann, 2006 [123]. Ces classifications sont influencées par les terminologies et les contextes particuliers de chaque communauté et ne sont pas toujours homogènes. Parmi les différentes méthodes de littérature exhaustive, les méthodes de diagnostic peuvent être classées en deux grandes familles (figure 1.9) :

- Les méthodes sans modèle mathématique qui ne nécessitent pas de connaissances accrues du système physique, mais utilisent des connaissances superficielles,
- Les méthodes à base de modèles qui nécessitent une connaissance approfondie du système physique.

1.3.5.1 Méthodes sans modèle

Pour certaines applications industrielles, la conception d'un modèle mathématique est difficile, voire impossible à obtenir, à cause des nombreuses reconfigurations intervenant dans le processus de production ou de la complexité des phénomènes mises en jeu. Dans ce cas, on a

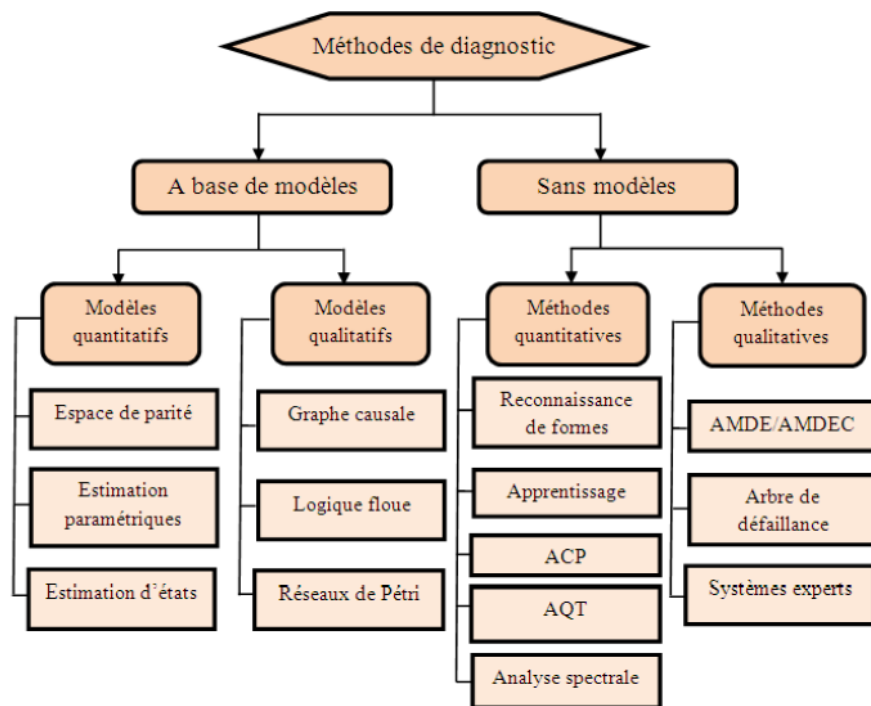


FIGURE 1.9: Classification non exhaustive des méthodes de diagnostic [124]

recours à des méthodes qui ne nécessitent aucune connaissance approfondie du procédé. Deux classes, dans ce type d'approches, peuvent se présenter :

- Les méthodes quantitatives ou appelés méthodes à base de connaissances,
- Les méthodes qualitatives ou méthodes basées sur le traitement de données.

Les méthodes qualitatives consistent en l'exploitation d'une base de connaissance symbolique et nécessitent l'existence d'un large éventail de données historiques correspondant aux divers modes de fonctionnement de l'installation. Parmi ces méthodes on peut citer :

- L'Analyse en composantes principales (ACP),
- Analyse qualitative des tendances (AQT),
- Réseaux de neurones,
- Analyse spectrale...

Les méthodes quantitatives ou à base de connaissances sont mises en oeuvre lorsque la majorité des mesures sont indisponibles et lorsque la construction du modèle s'avère difficile. Elles peuvent être utilisées pour identifier les causes des défaillances d'un procédé industriel. Il s'agit d'analyses fonctionnelles et structurelles qui se basent sur l'expérience et la connaissance de

l'opérateur. Parmi ces approches on peut citer :

- L'AMDE (Analyse des Modes de Défaillances et de leurs Effets) et ses dérivées,
- Arbre de causes à effets ou arbre de défaillances,
- les systèmes experts...

1.3.5.2 Méthodes de diagnostic à base de modèle

Ces méthodes sont des alternatives de la redondance physique ou matérielle. La structure générale de la plupart de ces méthodes se fonde sur l'idée de la redondance analytique [125]. Le principe des méthodes à base de modèles est d'identifier l'écart entre le système réel et son modèle. Ces méthodes s'appuient sur des modèles comportementaux explicites du système soumis au diagnostic. Ces modèles peuvent être classés en deux catégories quantitatives ou qualitatives. Les méthodes à base de modèles sont plus performantes que celles basées sur les traitements de données ou sur les approches relationnelles [126]. Une étude complète sur les méthodes à base de modèles peut être trouvée dans l'article de Frank, en 1996 [127] ou des livres récents comme Chiang et al., en 2001 [128] ; et Patan, en 2008 [129].

Les méthodes quantitatives à base de modèle reposent sur les relations mathématiques qui existent entre les variables. Ces modèles sont développés en utilisant les lois fondamentales de la physique (bilan de masse, d'énergie, de quantité de mouvement, ..) ou des relations de type entrée sortie. Les méthodes de diagnostic à base de modèles quantitatifs se décomposent en trois grands groupes : les approches par espace de parité, les approches d'estimation paramétrique, et les approches d'estimation d'états (observateurs et filtres).

Les méthodes qualitatives proposées par La communauté d'intelligence artificielle (IA) sont basées sur un raisonnement qualitatif (ou semi-qualitatif), basé sur l'établissement de relations causes à effets. En effet, le diagnostic est typiquement un système causal puisqu'il consiste à établir des hypothèses sur les composants défaillants qui sont l'origine du dysfonctionnement observé. Le raisonnement qualitatif exprime le lien entre un composant et les formules décrivant son comportement. Parmi les méthodes les plus utilisées, on peut citer : Les graphes causaux, la logique floue, les réseaux de Petri...

1.3.6 Méthodes de diagnostic à base d'observateurs

L'idée originale du diagnostic par observateurs provient probablement de R.V.Beard [130] et Robert Clark [131]. Ils ont été rejoints par une longue lignée de chercheurs [132]-[137]. On trouvera dans [138] les développements récents sur ce thème ainsi qu'une liste assez exhaustive de références.

Le principe du diagnostic à base d'observateurs consiste à comparer les mesures réelles du système avec les sorties estimées à l'aide d'un observateur. Ce qui permet l'obtention des résidus [139]-[145]. Les observateurs sont très utilisés dans la littérature pour le diagnostic des systèmes linéaires et non linéaires [145]-[149].

1.3.7 Principe de génération de résidus à base d'observateurs

L'idée principale des méthodes de génération du vecteur de résidus r à base d'observateurs est d'estimer une partie ou l'ensemble des états du système surveillé à partir des grandeurs mesurables. Le résidu r est alors généré en formant la différence entre les sorties estimées et les sorties réelles.

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (1.75)$$

L'observateur revient finalement à un modèle parallèle au système ayant comme entrée les entrées et les sorties du système réel et dont la sortie converge vers une estimation des variables d'état. L'erreur d'estimation de sortie entre les mesures et les sorties estimées est utilisé comme un résidu. Ce principe est illustré sur la figure (1.10). Cette approche offre des propriétés très intéressantes car elle donne lieu à des résidus très flexibles et la souplesse, dans le choix des paramètres, permet de s'affranchir de certaines entrées inconnues, améliorant ainsi les caractéristiques des résidus telles que leur robustesse vis à vis des perturbations et leur sensibilité aux défauts.

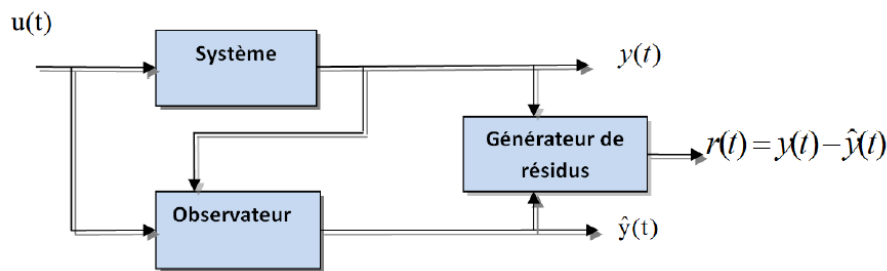


FIGURE 1.10: Schéma de principe d'un générateur de résidus à base d'observateurs

1.3.8 Structures des résidus générés par observateurs

Pour une bonne détection, les indicateurs de défauts (résidus) doivent être robustes aux perturbations et aux entrées inconnues. Pour une bonne localisation, les résidus doivent être sensibles à un ensemble de défauts et robustes à d'autres. Cette procédure est appelée structuration ou découplage. Il est important d'obtenir une structure du résidu permettant son évaluation. Les résidus doivent être produits, de manière que pour chaque défaut un ou un ensemble de résidus soient affectés.

La détection d'un défaut nécessite un seul observateur pour générer le résidu, mais il y a un inconvénient lorsque nous entamons l'étape de localisation, puisque la forme des résidus de reconstruction de sortie montre leur dépendance vis-à-vis des défauts à détecter comme ces derniers sont multiples, ce qui nous empêche de localiser la source du défaut. La situation idéale étant qu'un résidu soit sensible à un défaut particulier. Cette structuration, qui correspond à un découplage, peut être effectuée par un banc d'observateurs, ces observateurs construits selon que l'on souhaite détecter des défauts d'actionneurs ou de capteurs à partir d'une partie des entrées ou une partie des sorties du système. Chaque observateur du banc d'observateur est synthétisé pour qu'il soit sensible à un sous ensemble de défauts f_i et insensible aux autres.

Le nombre d'observateurs à intégrer dans le banc dépend du nombre de défauts à détecter et à isoler. Trois possibilités sont envisagées :

- Les défauts doivent être détectés mais pas localisés : dans cette configuration le banc d'observateur est composé d'un unique observateur qui doit être affecté par tous les défauts et insensible aux perturbations.
- Cas de défauts uniques : ce cas de figure, très fréquemment étudié, est moins restrictif qu'il n'y

paraît. En effet, il est rare (mais pas impossible) que plusieurs capteurs, actionneurs ou composants du système tombent en panne simultanément. Le banc d'observateurs sera alors constitué d'autant d'observateurs qu'il y a de défauts à isoler. Chacun de ces observateurs sera synthétisé de manière à être sensible à tous les défauts sauf un. Ainsi, le i ème observateur sera obtenu en considérant le i ème défaut f_i comme entrée inconnue. La table de codage (table de signatures) des défauts sera alors composée de 1 à l'exception d'une diagonale de 0.

- Cas de défauts multiples : la détection et la localisation de tous les défauts, lorsque ceux-ci peuvent intervenir simultanément, nécessitent de pouvoir découpler chaque observateur de tous les défauts sauf un, la table de codage des défauts sera alors composée de 0 à l'exception d'une diagonale de 1.

Ainsi, dans l'optique d'assurer une bonne isolation des défauts, à l'aide de résidus structurés (figure 1.11), des batteries d'observateurs sont mises en place. Les résidus sont conçus de manière à être chacun affectés par un sous ensemble de défauts et robustes par rapport aux défauts restants. Ainsi, un seul sous-ensemble de résidus réagit, lorsqu'un défaut f_i apparaît. Par la suite, une table de signature ou table d'incidence regroupe les informations de sensibilité et de robustesse pour les résidus. Elle est définie de la façon suivante :

$$T : R \times F \rightarrow [0; 1]$$

$$(r, f) \rightarrow T(r, f)$$

avec $T(r, f) = \begin{cases} 1 & \text{si et seulement si } r \text{ est sensible au défaut } f \\ 0 & \text{si et seulement si } r \text{ est robuste au défaut } f \end{cases}$

Les dimensions de la table de signature sont déterminées à partir du nombre de capteurs ou d'actionneurs et du nombre de résidus engendré par la méthode choisie. C'est une table binaire, dont la colonne j correspond au défaut f_j et la ligne i correspond au résidu r_i .

En employant les termes utilisés par Gertler en 1992 [150], on qualifie la table de signature (figure 1.12) de :

- Non localisante : si aux moins deux signatures de défauts sont identiques (a).
- Faiblement localisante : si toutes les signatures de défauts sont différentes, mais si on modifie une signature en changeant un 1 par 0, on trouve autre signature déjà existante (b).

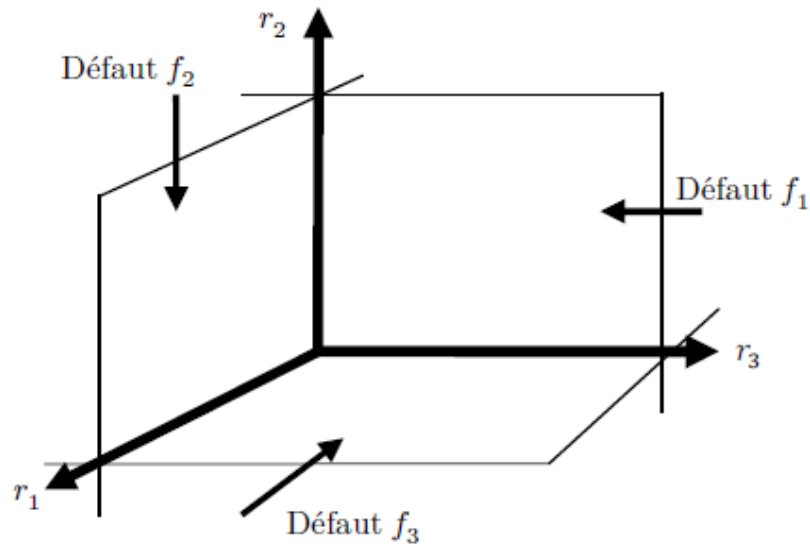


FIGURE 1.11: Résidus structurés

- Fortement localisante : si toutes les signatures de défauts sont différentes et ne peuvent être déduite d'une autre en modifiant un 1 par 0 (c).

De nombreux schémas sont proposés dans la littérature pour concevoir des résidus structurés,

$$T_1 = \begin{matrix} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(a)

$$T_2 = \begin{matrix} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(b)

$$T_3 = \begin{matrix} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(c)

FIGURE 1.12: Différents types de tables de signature.

parmi elles, on peut citer :

- Schémas d'observateur simplifié (SOS- simplified Observer Scheme),
- Schémas d'observateur dédié (DOS- Dedicated Observer Scheme),
- Schémas d'observateur généralisé (GOS- Generalized Observer Scheme).

1.3.8.1 Structure d'observateur simplifié

Dans cette structure (figure 1.13), le banc est constitué d'un seul observateur. Il est synthétisé de façon à n'être sensible qu'à un groupe de défauts. Dans le cas où un des défauts auquel il est sensible apparaît alors les estimations seront faussées. Dans le cas contraire, elles seront exactes.

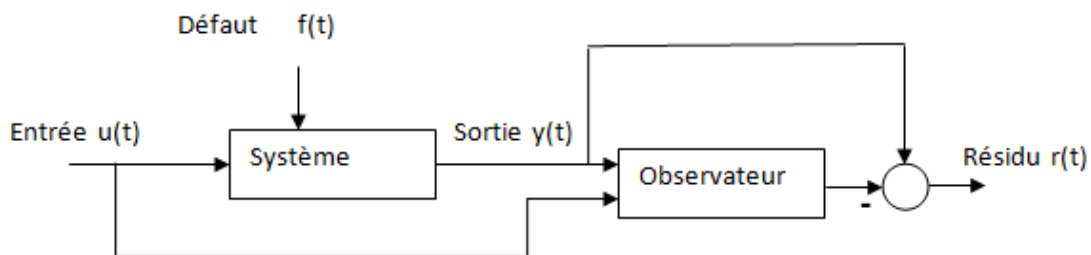


FIGURE 1.13: Structure d'observateur simplifié

1.3.8.2 Structure d'observateurs dédiés (DOS)

Dans ce type de structure (figure 1.14), il est question de construire autant d'observateurs que de défauts à détecter, chacun d'entre eux génère un résidu insensible à tous les défauts sauf un. Ainsi, l'observateur recevant une mesure défaillante fournit une mauvaise estimation des variables estimées, tandis que les estimations des autres observateurs convergent vers les mesures des sorties correspondantes sauf sur la sortie erronée. Cette structure reste valable même dans le cas de plusieurs défauts simultanés. Le i ème observateur est piloté uniquement par la i ème entrée/sortie (actionneur/capteur).

1.3.8.3 Structure d'observateurs généralisés (GOS)

Dans cette structure (figure 1.15), il s'agit de synthétiser un certain nombre d'observateurs où chacun d'entre eux étant insensible à un seul défaut. Si un défaut apparaît alors, toutes les estimations d'états seront erronées sauf celles issues de l'observateur insensible à ce seul défaut. Ce schéma offre plus de degrés de liberté pour la conception de l'observateur et permet

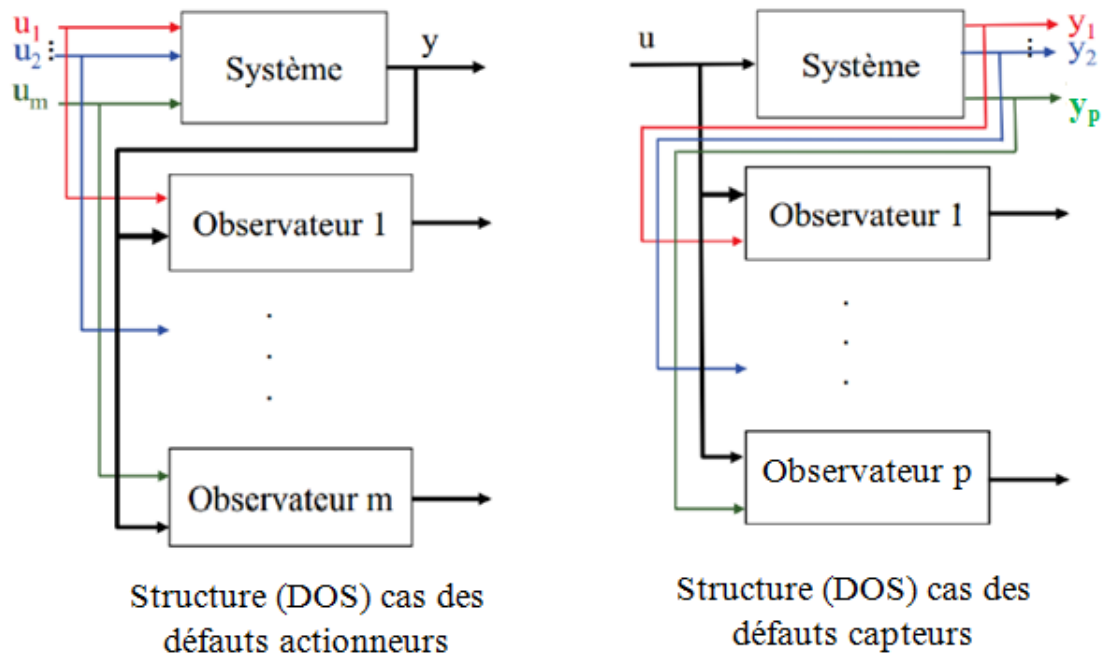


FIGURE 1.14: Structure d'observateurs dédiés

d'augmenter la robustesse. Dans cette structure le i ème observateur est piloté par toutes les entrées/sorties (actionneur/capteur) sauf la i ème entrée/sortie.

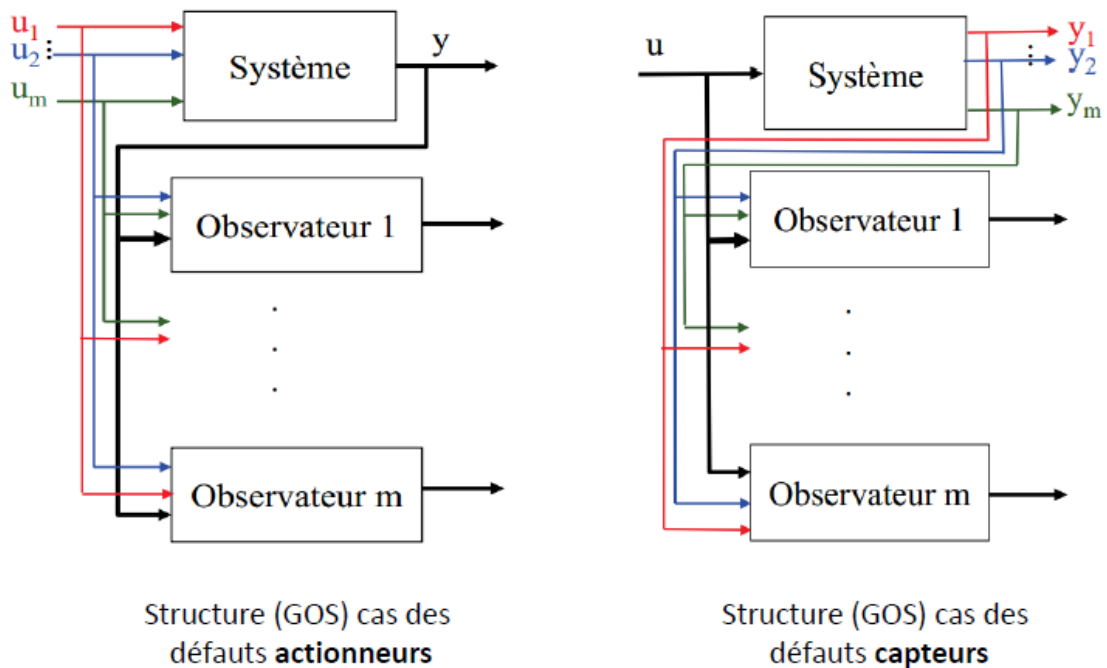


FIGURE 1.15: Structure d'observateurs généralisés

1.3.9 Observateurs pour le diagnostic

Le diagnostic de défaut à base d'observateurs est basé sur le principe de génération de résidus en comparant les grandeurs disponibles du système réel aux grandeurs estimées (issues de l'observateur). L'état du système est reconstruit à partir des grandeurs d'entrées et des grandeurs de sorties. Le gain de l'estimateur dépendant des objectifs et des performances désirées. Dans le cas des systèmes linéaires, la structure de base des reconstitueurs est toujours la même, mais dans le cas non linéaires le problème s'avère difficile.

1.3.9.1 Diagnostic à base d'observateurs d'états linéaires

Pour les systèmes linéaires, deux principales structures d'observateurs, basées sur la théorie des observateurs de Luenberger [45], sont distinguées : les observateurs proportionnels et les observateurs à entrées inconnues.

1.3.9.1.a Observateur proportionnel (Observateur de Luenberger)

L'observateur proportionnel, développé par Beard [130] et Jones [145] au début des années 70 est le premier type de générateur de résidus à base d'observateur. Cet observateur s'applique aux modèles de systèmes admettant la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_1d(t) + F_1\gamma(t) \\ y(t) = Cx(t) + E_2d(t) + F_2\gamma(t) \end{cases} \quad (1.76)$$

où $\gamma(t) \in \mathbb{R}^{q+p}$ représente le vecteur de défauts, composé respectivement du défaut actionneur $\gamma_{act}(t)$ et du défaut capteur $\gamma_{cap}(t)$, c'est à dire $\gamma(t) = [\gamma_{act}(t)\gamma_{cap}(t)]^T$. E_1 , E_2 , F_1 et F_2 représentent respectivement les des matrices de distribution des perturbations et des défauts.

Sous l'hypothèse que le système (1.76) soit observable, la structure d'un observateur proportionnel de Luenberger est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \\ r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \end{cases} \quad (1.77)$$

où La matrice L représente le gain de l'observateur.

L'erreur d'estimation entre l'état reconstruit $\hat{x}(t)$ et l'état réel du système $x(t)$ est définie par

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

La dynamique de l'erreur d'estimation a pour expression : $\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$. Le vecteur des résidus $r(t)$ est alors exprimé en fonction de l'erreur d'estimation, des perturbations et des défauts comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + (E_1 - LE_2)d(t) + (F_1 - LF_2)\gamma(t) \\ r(t) = Ce(t) + E_2d(t) + F_2\gamma(t) \end{cases} \quad (1.78)$$

La matrice L est choisie en fonction des performances désirées pour l'observateur. Plusieurs approches sont possibles pour la déterminer comme l'optimisation d'un critère quadratique ou le placement de pôles.

L'équation (1.78) montre que le résidu est sensible aux défauts et aux perturbations, ce qui signifie que le résidu est incapable de différencier les défauts et les perturbations, ceci rend la détection quasi-impossible. Le résidu généré doit être robuste vis-à-vis des incertitudes et des perturbations, tout en restant sensible aux défauts à détecter. Ceci n'est pas le cas pour l'observateur de Luenberger. La solution proposée pour régler ce dilemme est l'observateur à entrées inconnues.

1.3.9.1.b Observateur à entrées inconnues

Le principe d'un observateur à entrées inconnues consiste à générer une erreur d'estimation qui tend asymptotiquement vers zéro même en présence de l'entrée inconnue (bruits d'état, incertitudes de modélisation, perturbations,...etc). Ainsi, le résidu généré est découplé des perturbations car il est fonction de l'erreur d'estimation. La synthèse de ce type d'observateurs [151] est réalisable pour les modèles de systèmes décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) + F_1\gamma(t) \\ y(t) = Cx(t) + F_2\gamma(t) \end{cases} \quad (1.79)$$

où Les matrices A , B , C , E , F_1 et F_2 sont des matrices réelles, constantes de dimensions appropriées.

La structure d'un observateur à entrées inconnues d'ordre plein, est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Nz(t) + Mu(t) + Ly(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + Fy(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \\ r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \end{cases} \quad (1.80)$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}^n$ sont respectivement les vecteurs d'état estimé et d'état de l'observateur. Les matrices N , M , L et F sont déterminées de manière à obtenir un résidu $r(t)$ qui vérifie les conditions suivantes :

- $r(t)$ converge vers zéro en fonctionnement normal, C.à.d ($d(t) = \gamma(t) = 0 \quad \forall \quad u(t)$);
- $r(t)$ est insensible aux perturbations $d(t)$;
- $r(t)$ est sensible aux défauts $\gamma(t)$.

L'erreur d'estimation entre l'état reconstruit et l'état réel du système est définie par $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. La dynamique de l'erreur d'estimation est régit par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) + F_1\gamma(t) - \dot{z}(t) - F\dot{y}(t) \\ = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) + F_1\gamma(t) - Nz(t) - MBu(t) - Ly(t) - F(C\dot{x}(t) + F_2\dot{\gamma}(t)) \end{cases} \quad (1.81)$$

L'erreur d'estimation des sorties par l'observateur à entrées inconnues (1.80), synthétisé selon (1.13-3.11) peut être vue comme la sortie du système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Ne(t) + PF_1\gamma(t) + (NF - L)F_2\gamma(t) - FF_2\dot{\gamma}(t) \\ r(t) = Ce(t) + F_2\gamma(t) \\ e(0) = Px_0 - z_0 \quad \text{avec } P = I - FC \end{cases} \quad (1.82)$$

Il est donc évident qu'en l'absence de défauts le signal $r(t)$ converge asymptotiquement vers zéro, dans la mesure où la matrice N est stable. Le signal $r(t)$ est donc un résidu sensible au défaut $\gamma(t)$, et insensible à la perturbation $d(t)$. La sensibilité des résidus vis-à-vis des défauts peut être étudiée en utilisant la transformée de Laplace.

1.3.9.1.c Filtre de Kalman

La synthèse de ce type d'observateurs est réalisable pour les modèles de systèmes décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + M\omega(t) + F_1\gamma(t) \\ y(t) = Cx(t) + R\nu(t) + F_2\gamma(t) \end{cases} \quad (1.83)$$

où $\omega \in \mathbb{R}^l$, $\nu \in \mathbb{R}^p$ et $\gamma(t) \in \mathbb{R}^{q+p}$ représentent respectivement le bruit d'état, le bruit de sortie et le vecteur de défauts. Les matrices A, B, C, M, R, F_1 et F_2 sont des matrices réelles, constantes de dimensions appropriées.

Si le système de la forme (1.83) est uniformément observable alors il existe un observateur de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \\ r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \end{cases} \quad (1.84)$$

L'erreur d'estimation entre l'état reconstruit $\hat{x}(t)$ et l'état réel du système $x(t)$ est définie par $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. La dynamique de l'erreur d'estimation a pour expression : $\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$. Le vecteur des résidus $r(t)$ est alors exprimé en fonction de l'erreur d'estimation, du bruit de sortie et des défauts comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + M\omega(t) - LR\nu(t) + (F_1 - LF_2)\gamma(t) \\ r(t) = Ce(t) + R\nu(t) + F_2\gamma(t) \end{cases} \quad (1.85)$$

Les méthodes de filtrage sont très utilisées en diagnostic des systèmes linéaires [152]-[154]. Elles permettent de maximiser la sensibilité des résidus aux défauts et de minimiser les effets des entrées inconnues (perturbations, bruits) sur les résidus.

Pour réduire l'effet du bruit sur le résidu, il suffit alors de minimiser la norme H_∞ de la fonction de transfert entre le résidu $r(t)$ et le bruit $\nu(t)$ [155]-[156].

1.3.9.2 Diagnostic à base d'observateurs d'états non linéaires

Le problème de diagnostic de défauts à base d'observateurs pour les systèmes non linéaires est encore un problème largement ouvert. Auparavant la plupart des méthodes de diagnostic de défauts basées sur les observateurs sont construites sur des modèles de systèmes linéarisés,

puis appliquées pour les systèmes non linéaires originaux. Les premières recherches rapportées dans le domaine de diagnostic par observateurs non linéaires ont été effectuées en utilisant un observateur non linéaire de type identité [157]. Cette méthode a été davantage réalisée dans [158]-[159]. Cependant, cette méthode implique le calcul d'une matrice de gain à chaque pas de temps pour la stabilité de l'observateur. Il a été montré dans [158] que pour de nombreuses applications pratiques, une matrice de gain constante est suffisante pour la stabilité de l'observateur. L'observateur de Luenberger étendu [71] a été calculé de la même manière avec laquelle l'observateur identité utilisé dans [157] a été calculé.

1.3.9.2.a Observateur de Luenberger étendu

Cet observateur s'applique aux modèles de systèmes admettant la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + F_1\gamma(t) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) + F_2\gamma(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.86)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $\gamma(t) \in \mathbb{R}^q$, représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande, de sortie et de défauts du système. x_0 est la condition initiale à l'instant initial t_0 , $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

F_1 et F_2 sont les matrices d'action des défauts. La synthèse de l'observateur de Luenberger étendu correspondant à (1.86) donne lieu à la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, u(t)) + L(\hat{x}, u(t))(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}, u(t)) \\ r(t) = y(t) - h(\hat{x}, u(t)) \end{cases} \quad (1.87)$$

où $L(\hat{x}, u(t))$ est le gain de l'observateur calculé de telle sorte que toutes les valeurs propres de la matrice $\frac{\partial f(\hat{x}, u)}{\partial \hat{x}} - L(\hat{x}, u(t))\frac{\partial h(\hat{x}, u)}{\partial \hat{x}}$ soient à parties réelles négatives. Le calcul du gain L est réalisé en supposant que l'état restera autour d'une zone où l'approximation par un modèle linéaire est valable.

Le vecteur des résidus $r(t)$ et l'erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ sont alors régis par

le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = F_e(t)e(t) + (F_1 - L(\hat{x}, u(t))F_2)\gamma(t) + O_1(e^2(t), t) \\ r(t) = H(t)e(t) + F_2\gamma(t) + O_2(e^2(t), t) \end{cases} \quad (1.88)$$

où $O_1(e^2(t), t)$ et $O_2(e^2(t), t)$ représentent les termes d'ordre supérieur se rapportant à $e(t)$, avec :

$$\begin{cases} F_e(t) = \frac{\partial f(\hat{x}, u)}{\partial \hat{x}} - L(\hat{x}(t), u(t))H(t) \\ H(t) = \frac{\partial h(\hat{x}, u)}{\partial \hat{x}} \end{cases} \quad (1.89)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, la matrice de gain L peut être calculée de telle sorte que la dynamique des erreurs soit asymptotiquement stable.

1.3.9.2.b Filtre de Kalman étendu

Le filtrage de Kalman étendu a fait l'objet de très nombreuses études dans des domaines techniques très variés et notamment dans le cadre du diagnostic. On considère le système non linéaire stochastique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + M\omega(t) + F_1\gamma(t) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) + \nu(t) + F_2\gamma(t) \end{cases} \quad (1.90)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $\gamma(t) \in \mathbb{R}^q$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande, de sortie et des défauts du système. $\omega(t)$ et $\nu(t)$ sont des bruits gaussiens de moyenne nulle et de matrice de covariance W et V respectivement.

Le filtre de Kalman étendu pour le système (1.90) est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, u(t)) + L(\hat{x}, u(t))(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}, u(t)) \\ L(\hat{x}, u(t)) = P(t)H^T(t)V^{-1} \\ \dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + MW M^T - P(t)H^T(t)V^{-1}H(t)P(t) \\ F(t) = \frac{\partial f(\hat{x}(t), u(t))}{\partial \hat{x}} \\ H(t) = \frac{\partial h(\hat{x}, u(t))}{\partial \hat{x}} \\ r(t) = y(t) - h(\hat{x}, u(t)) \end{cases} \quad (1.91)$$

$F(t)$ et $H(t)$ sont calculés pour $x(t) = \hat{x}(t)$.

Le vecteur des résidus $r(t)$ et l'erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ sont alors régis par

le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = F_e e(t) + (F_1 - L(\hat{x}, u(t))F_2)\gamma(t) + M\omega - L(\hat{x}, u(t))\nu + O_1(e^2(t), t) \\ r(t) = H(t)e(t) + F_2\gamma(t) + \nu + O_2(e^2(t), t) \end{cases} \quad (1.92)$$

où $O_1(e^2(t), t)$ et $O_2(e^2(t), t)$ représentent les termes d'ordre supérieur se rapportant à $e(t)$, avec :

$$\begin{cases} F_e(t) = \frac{\partial f(\hat{x}, u)}{\partial \hat{x}} - L(\hat{x}(t), u(t))H(t) \\ H(t) = \frac{\partial h(\hat{x}, u)}{\partial \hat{x}} \end{cases} \quad (1.93)$$

1.3.9.2.c Observateur à mode glissant

Les observateurs à mode glissant ont été largement utilisés pour la détection de défauts des systèmes linéaires [88],[163] ainsi que pour les systèmes non linéaires [164],[165].

Dans ce qui suit, il est question, tout d'abord, d'introduire l'idée de conception d'observateurs par modes glissants pour la détection et la localisation des défauts, pour les systèmes linéaires, à travers l'approche proposée par Edwards et al. [88]. Nous présenterons ensuite des observateurs par modes glissants utilisés pour le diagnostic des systèmes non linéaires.

1- Observateur à mode glissant d'Edwards, Spurgeon et Patton

Soit le système linéaire défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_1\gamma_{act}(t) \\ y(t) = Cx(t) + \gamma_{cap}(t) \end{cases} \quad (1.94)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de commande, $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. A est la matrice d'état connue constante de dimension $(n \times n)$ et C est la matrice d'observation connue et constante de dimension $(p \times n)$. $\gamma_{act} \in \mathbb{R}^q$ et $\gamma_{cap} \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs défauts actionneurs et capteurs, inconnus mais bornés.

$F_1 \in \mathbb{R}^{(n \times q)}$ est la matrice d'action des défauts actionneurs.

L'objectif consiste à reconstruire les états à partir d'un observateur, de manière à ce que l'erreur d'estimation de la sortie tende vers zéro en un temps fini. La structure de l'observateur considérée peut être écrite sous forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - G_l e_y + G_n v \\ e_y = \hat{y}(t) - y \end{cases} \quad (1.95)$$

où $G_l \in \mathbb{R}^{(n \times p)}$ et $G_n \in \mathbb{R}^{(n \times p)}$ représentent les gains de l'observateur. v est une fonction discontinue. On considère le cas où seuls des défauts actionneurs agissent sur le système, c'est à dire $\gamma_{cap} = 0$. Il est avancé dans dans [166] que si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

Hypothèse 1 – $\text{rang}(CF_1) = q$

– Les zéros invariants du système représentés par le triplet (A, F_1, C) doivent être stables.

alors il existe un changement de variables $x \rightarrow Tx$ tel que dans les nouvelles coordonnées du système on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) + F_2\gamma_{act}(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases} \quad (1.96)$$

Où $x_1 \in \mathbb{R}^{(n-p)}$, $x_2 \in \mathbb{R}^p$ et la matrice $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ est stable. Dans les nouvelles coordonnées du système, l'observateur mode glissant se met sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}\hat{x}_2(t) + B_1u(t) - A_{21}e_y(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}\hat{x}_2(t) + B_2u(t) - (A_{22} - A_{22}^s)e_y(t) + v \\ \hat{y}(t) = \hat{x}_2(t) \end{cases} \quad (1.97)$$

où A_{22}^s est une matrice stable et v est une fonction discontinue définit par :

$$v = \begin{cases} -\rho \|F_1\| \frac{P_2 e_y}{\|P_2 e_y\|} & \text{si } e_y \neq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.98)$$

où $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ est une matrice définie positive, solution de l'équation de Lyapunov :

$$P_2 A_{22}^s + (A_{22}^s)^T P_2 = -Q_2 \quad (1.99)$$

où Q_2 est une matrice symétrique définie positive. ρ est un scalaire positif choisit tel que :

$$\|\gamma_{act}\| < \rho \quad \forall t > 0 \quad (1.100)$$

Si les erreurs d'estimation sont définies par $e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x_1(t)$ et $e_2(t) = \hat{x}_2(t) - x_2(t)$, alors il est facile de montrer que :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t) \\ \dot{e}_y(t) = A_{21}e_1(t) + A_{22}^s e_y(t) + v - F_1 \gamma_{act}(t) \end{cases} \quad (1.101)$$

Puisque dans cette situation $e_y = e_2$. Il est montré dans [81], [95] que l'erreur dans (1.101) est quadratiquement stable, et un régime de glissement s'instaure en forçant e_y à zéro en un temps fini. Le système dynamique de (1.97) peut donc être considéré comme un observateur du système de (1.94). Il s'ensuit qu si :

$$G_l = T^{-1} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} - A_{22}^s \end{bmatrix} \quad G_n = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (1.102)$$

2- Observateur d'état à mode glissant étape par étape

L'approche de la construction d'un observateur d'état à mode glissant étape par étape peut être illustrée à l'aide du système de second ordre avec défauts suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2 + u + f_a \\ \dot{x}_2(t) = g(x_1, x_2) \\ \hat{y}(t) = x_1 + f_s \end{cases} \quad (1.103)$$

où $x = [x_1, x_2]^T$, $y \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$ sont respectivement le vecteur d'état, de sortie et d'entrée du système.

La forme linéaire de $\dot{x}_1(t)$ n'est choisie que pour la clarté de l'illustration et n'entraîne pas de perte de généralité puisque la fonction $g(x_1, x_2)$ peut être non linéaire, mais est supposée être bornée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel positif $\beta > 0$ tel que $|g(x_1, x_2)| \leq \beta$. Le paramètre f_a est le défaut de l'actionneur et f_s représente le défaut du capteur.

L'observateur d'état à mode glissant étape par étape du système (1.103) est formulé par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2 + u + \Delta_1 \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \Delta_2 \text{sign}(\bar{e}) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}_1 + f_s \end{cases} \quad (1.104)$$

où Δ_1 et Δ_2 sont les gains de l'observateur et \bar{e} est le paramètre d'erreur. En supposant qu'il n'y ait initialement aucun défaut d'actionneur et de capteur (c'est-à-dire $f_a = 0$ et $f_s = 0$). Le vecteur d'erreur est défini par $e = x - \hat{x}$ dont les composantes sont $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ et $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$.

Ensuite, la dynamique des erreurs d'état peut être décrite par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2 - \Delta_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{e}_2(t) = g(x_1, x_2) - g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - \Delta_2 \text{sign}(\bar{e}) \end{cases} \quad (1.105)$$

Le choix des gains de l'observateur tel que : $\Delta_1 > \max |e_2|$ et $\Delta_1 > |g(x_1, x_2) - g(\hat{x}_1, \hat{x}_2)|$ assure la convergence du vecteur d'erreur vers zéro en un temps fini.

L'observateur (1.104) est conçu initialement pour un système sans défaillance, comme décrit ci-dessus. Ensuite, une fois que le défaut f_s du capteur et le défaut f_a de l'actionneur se sont produits à l'instant t_f , la dynamique de l'erreur de sortie $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ pendant le temps $t > t_f$ peut être écrite comme suit :

$$\dot{e}_1(t) = e_2 + f_a + \dot{f}_s - \Delta_1 \text{sign}(e_1) \quad (1.106)$$

Puisque les erreurs convergent vers zéro (régime de glissement atteint), en raison des gains élevés de l'observateur, alors de la valeur de commande équivalente de l'erreur dans l'équation (1.106) peut être réécrite sous forme :

$$(\Delta_1 \text{sign}(e_1))_{eq} \approx f_a + \dot{f}_s \quad (1.107)$$

où $(\Delta_1 \text{sign}(e_1))_{eq}$ est appelé signal de commande équivalent de $\Delta_1 \text{sign}(e_1)$, il représente le comportement moyen du signal $\Delta_1 \text{sign}(e_1)$ [167], [168].

Par conséquent, un signal résiduel peut être obtenu à partir du signal de commande équivalent $(\Delta_1 \text{sign}(e_1))_{eq}$.

$$r \equiv (\Delta_1 \text{sign}(e_1))_{eq} \approx f_a + \dot{f}_s \quad (1.108)$$

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons tout d'abord rappelé la notion d'observabilité, ainsi que ses principales déclinaisons pour le cas linéaire et non linéaire, nous avons abordé également le principe d'un observateur. Dans un deuxième temps, nous avons présenté un état de l'art non exhaustive des différentes techniques de construction d'observateurs pour les systèmes continus linéaires et non linéaires. Nous avons vu qu'il n'y a pas de méthodologie générale pour la construction d'observateurs pour les systèmes non linéaires, c'est un domaine de recherche où il reste encore beaucoup de problèmes non résolus. Dans la troisième étape, nous avons abordé différentes généralités sur le diagnostic. Enfin comme dernière étape de ce chapitre on a présenté la méthode de génération de résidu basée sur les observateurs linéaires et non linéaires.

Chapitre 2

Analyse par intervalles

2.1 Introduction

Au cours des années 60, parallèlement à la montée en puissance de l'informatique, se pose la question de savoir comment les incertitudes évoluent au cours des calculs et comment quantifier l'erreur sur le résultat final. C'est en s'attachant à résoudre ce problème que R.E. Moore ouvre la voie de l'analyse par intervalles, en publiant notamment l'ouvrage de référence [169] mettant en place les fondements de cet outil, suivi de [170] et [171]. Plus tard, Neumaier [172] développe plus spécifiquement la résolution de systèmes d'équations linéaires et non linéaires, tandis que Hansen [173] s'attache au problème d'optimisation globale.

Le principal avantage de l'analyse par intervalles réside dans sa capacité à appréhender les incertitudes sur les paramètres d'un modèle. C'est donc logiquement que cet outil fit son apparition dans le domaine de l'estimation paramétrique [174]. L'essentiel des travaux portant sur l'approche ensembliste en estimation paramétrique sont regroupés dans l'ouvrage collectif [175].

L'utilisation de l'analyse par intervalles dans le cadre du diagnostic est nettement plus récente. Les premiers travaux répertoriés sont imputables à Chang et al [176]. Ils utilisent alors une variante de l'arithmétique des intervalles initialement proposée par Moore [169] à des fins de détection et de localisation de défauts en s'appuyant sur une approche de type Espace de Parité. Plus tard, Ragot et al [177] proposent une technique ensembliste en vue d'effectuer la détection

et la localisation de défauts de capteurs dans le cas d'un modèle statique et linéaire. La même année, un court chapitre de l'ouvrage de Travé Massuyès et al [178] est consacré à ce thème en exposant le principe de la propagation de contraintes sur les intervalles. L'approche bornante dans le cadre du diagnostic ne prendra véritablement son essor qu'avec la thèse de Ploix [179]. Depuis, d'autres travaux ont vu les jours dans [180] où les auteurs cherchent à déterminer à quels instants se produisent des sauts (signes de défauts) dans les valeurs des incertitudes paramétriques. Notons que de nombreux travaux, traitant du diagnostic dans le cas de modèles à horizon infini où les incertitudes sont représentées par des variables bornées, ont été réalisés ces dernières années, voir dans les articles [181]-[184]. Puig et al [185]-[186], quant à eux, proposent une technique d'optimisation globale permettant d'évaluer les enveloppes associées à un modèle intervalle récursif. D'autres travaux existent comme ceux de Hadj-Sadok et al [116],[187] qui appliquent une méthode ensembliste dans le cadre d'une installation de traitement des eaux usées.

Dans ce chapitre, nous rappellerons dans un premier temps les bases de l'analyse par intervalles. Une fois les opérations ensemblistes élémentaires présentées, le problème fondamental de dépendance, pouvant conduire à des majorations très importantes des bornes calculées lors de l'évaluation d'une fonction intervalle, sera présenté. Le concept d'extension intervalle et la propriété d'inclusion sur laquelle repose l'analyse par intervalles seront ensuite explicités. La seconde partie de ce chapitre se focalise sur diverses méthodes (techniques à base de formes centrées, méthodes de réduction et d'élimination) permettant de prendre en compte le problème de dépendance afin de réduire le pessimisme des bornes obtenues dans le cas de fonctions vectorielles.

2.2 Arithmétique d'intervalles

2.2.1 Intervalles

Le principe de base de l'arithmétique des intervalles consiste à remplacer une valeur réelle point (flottante) d'une variable par un intervalle qui l'encadre. Cette représentation très puissante offre une alternative intéressante à l'arithmétique flottante.

Définition 24 On appelle intervalle réel borné noté $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$, l'ensemble des nombres réels vérifiant :

$$[x] = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} \quad (2.1)$$

pour tout couple de réels flottants \underline{x} et \bar{x} avec $\underline{x} \leq \bar{x}$.

On note l'ensemble des intervalles réels par \mathbb{IR} :

$$\mathbb{IR} = \{[\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\} \quad (2.2)$$

\underline{x} et \bar{x} sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle.

Remarque 4 Tout intervalle $[x]$ peut être exprimé en fonction soit de sa taille, soit de son centre et soit de son rayon comme suit : La taille d'un intervalle $[x]$ est définie par :

$$\omega([x]) = \bar{x} - \underline{x} \quad (2.3)$$

Le centre d'un intervalle $[x]$ est défini par :

$$mid([x]) = \frac{\bar{x} + \underline{x}}{2} \quad (2.4)$$

Le rayon d'un intervalle $[x]$ est défini par :

$$rad([x]) = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2} \quad (2.5)$$

L'intervalle $[x]$ peut être également exprimé en fonction de son centre et de son rayon comme suit :

$$[x] = mid[x] \pm rad[x] \quad (2.6)$$

2.2.2 Opérations mathématiques sur les intervalles

L'outil intervalle permet de réaliser des opérations arithmétique dont le résultat est toujours juste. Il est garanti que la solution réelle d'une opération arithmétique est incluse dans

le domaine calculé par cet outil. On définit l'image d'une paire d'intervalles par rapport aux opérations arithmétiques comme suit :

$$[x] \text{ op } [y] = \{x \text{ op } y \mid x \in [x] \text{ et } y \in [y]\}, \text{ op} \in \{+, -, \times, \div\} \quad (2.7)$$

Le formalisme mathématique de l'équation (2.7) qui détermine l'image d'une paire d'intervalles par rapport aux opérations arithmétiques s'appelle la sémantique des opérations. Ce formalisme garantit que l'image de $[x]$ et $[y]$ par rapport à une opération arithmétique est l'image de x et y par rapport à l'opération pour toutes les valeurs de $x \in [x]$ et $y \in [y]$.

Bien que l'équation (2.7) caractérise mathématiquement ces quatre opérateurs intervalles, son expression en fonction des opérateurs réels est équivalente à :

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}] \quad (2.8)$$

$$[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}] \quad (2.9)$$

$$[x] \times [y] = [\min \{\bar{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \bar{y}, \underline{x} \times \underline{y}\}, \max \{\bar{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \bar{y}, \underline{x} \times \underline{y}\}] \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{[x]} = \emptyset \text{ si } [x] = [0, 0] \quad (2.11)$$

$$= \left[\frac{1}{\bar{x}}, \frac{1}{\underline{x}}\right] \text{ si } 0 \notin [x] \quad (2.12)$$

$$[x] \div [y] = [x] \times \frac{1}{[y]} \quad (2.13)$$

2.2.3 Vecteurs et matrices intervalles

Un vecteur intervalle (ou pavé) $[\mathbf{X}] \in \mathbb{R}^n$, est le produit cartésien de n intervalles. Il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[\mathbf{X}] = [\underline{x}_1, \bar{x}_1] \times \dots \times [\underline{x}_n, \bar{x}_n] = [\underline{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{X}}] \quad (2.14)$$

où $\underline{\mathbf{X}} = (\underline{x}_1; \dots; \underline{x}_n)$ et $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n)$. L'ensemble de tous les pavés de \mathbb{R}^n sera noté \mathbb{IR}^n .

On note par $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$ une matrice intervalle de n lignes et de m colonnes dont les éléments sont des intervalles $[a_{i,j}]$, $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$. Ainsi le calcul sur les vecteurs et matrices intervalles est le même que dans le cas de nombres réels, à l'exception que les opérateurs arithmétiques sur les réels seront remplacés par leurs correspondants intervalles définis par les équations (2.8 – 2.13).

2.2.4 Propriétés algébriques de l'arithmétique des intervalles

2.2.4.1 Propriétés conservées

Les propriétés algébriques de l'arithmétique des intervalles se déduisent de celles rencontrées dans le cas de variables réelles. Néanmoins certaines propriétés diffèrent à cause du problème de dépendance. Ainsi, deux fonctions rationnelles équivalentes pour l'arithmétique des nombres réels, le seront aussi pour l'arithmétique des intervalles si chaque variable n'apparaît qu'une seule fois de chaque côté de l'égalité [172]. Par exemple, la commutativité et la transitivité sont conservées pour l'addition et la multiplication. Soient X , Y et Z trois intervalles associés à des variables bornées indépendantes, alors les propriétés suivantes sont vérifiées : Les éléments neutres et absorbants sont les suivants :

Propriété	Addition	Multiplication
Commutativité	$X + Y = Y + X$	$XY = YX$
Associativité	$X + (Y \pm Z) = (X + Y) \pm Z$	$(XY)Y = X(YZ)$

TABLE 2.1: Associativité et commutativité des opérateurs arithmétiques

Propriété	Addition(Soustraction)	Multiplication
Élément neutre	$0 \pm X = \pm X + 0 \pm X$	$1X = X1 = X$
Élément absorbant		$0X = X0 = 0$

TABLE 2.2: Éléments neutres et absorbants

2.2.4.2 Propriétés non conservées

La loi de distributivité n'est en général pas vérifiée dans le cas de fonctions intervalle. En revanche, l'inclusion suivante est toujours satisfaite (propriété de sous-distributivité) : $X(Y \pm Z) \subseteq XY \pm XZ$ où $(Z \pm Y)X \subseteq ZX \pm YX$. La multiplication n'est pas distributive par rapport à l'addition.

Exemple 1 si $[x] = [-2, 3]$, $[y] = [1, 4]$ et $[z] = [-2, 1]$,

$$[x] \times ([y] + [z]) = [-2, 3] \times ([1, 4] + [-2, 1]) = [-2, 3] \times [-1, 5] = [-10, 15]$$

$$[x] \times [y] + [x] \times [z] = [-2, 3] \times [1, 4] + [-2, 3] \times [-2, 1] = [-8, 12] + [-6, 4] = [-14, 16]$$

$\mathbb{X} - \mathbb{X} = [\underline{x} - \bar{x}, \bar{x} - \underline{x}]$	$\frac{\mathbb{X}}{\mathbb{X}} = \left[\frac{\underline{x}}{\bar{x}}, \frac{\bar{x}}{\underline{x}} \right]$
$\mathbb{X} - \mathbb{Y} \subseteq (\mathbb{X} + \mathbb{Z}) - (\mathbb{X} + \mathbb{Z})$	$\frac{\mathbb{X}}{\mathbb{Y}} \subseteq \left(\frac{\mathbb{XZ}}{\mathbb{YZ}} \right)$

TABLE 2.3: Quelques propriétés de l'arithmétique des intervalles

Comme l'illustre cet exemple, la multiplication est sous-distributive par rapport à l'addition, c'est à dire que :

$$[x] \times ([y] + [z]) \subset [x] \times [y] + [x] \times [z]$$

Enfin, un certain nombre de règles valides dans le cas de variables réelles ne fonctionnent plus pour des intervalles, en l'occurrence les lois conduisant à des simplifications de variables : On peut d'ores et déjà constater que les opérations définies ci-dessus ne présentent pas les propriétés algébriques de leurs contreparties ponctuelles. Tout d'abord, la soustraction n'est pas la réciproque de l'addition.

Exemple 2 si $[x] = [2, 3]$,

$$[x] - [x] = [2, 3] - [2, 3] = [-1, 1] \neq 0$$

De la même façon, la division n'est pas la réciproque de la multiplication :

Exemple 3 si $[x] = [2, 3]$,

l'intervalle : $\frac{[x]}{[x]} = [2, 3]/[2, 3] = [2/3, 3/2]$ n'est pas égal à 1 même s'il le contient.

De plus, la multiplication d'un intervalle par lui même n'est pas égal à l'élévation au carré :

Exemple 4 si $[x] = [-3, 2]$,

$$[x] \times [x] = [-3, 2] \times [-3, 2] = [-6, 9]$$

alors que : $[x]^2 = \{x^2 | x \in [x]\} = [0, 9]$.

2.3 Pessimisme

2.3.1 Effet de dépendance

L'effet de dépendance est un phénomène particulier de l'analyse par intervalles. Les opérations réalisées sur un même intervalle peuvent donner des effets inattendus. Pour expliquer

ce phénomène, reprenons la définition des opérations arithmétiques ensemblistes. Soit un intervalle non dégénéré $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ et une opération $op \in \{+, -, \times, \div\}$. Une opération arithmétique ensembliste faisant intervenir le même intervalle $[x]$ plusieurs fois dans la même opération, conduit à une surestimation du domaine de solutions, ce qui peut se traduire par la relation (2.7). On remarque que la relation (2.7) considère que les variables x et y sont indépendantes ce qui n'est pas le cas ici. Cette singularité est due au phénomène dit de dépendance [169].

Exemple 5 Soit $[x] = [-2, 6]$, nous obtenons selon l'équation (2.7) : $[x] - [x] = [-2, 6] - [-2, 6] = [-8, 8] \neq 0$

On observe donc que la simple opération de soustraction est pessimiste si le nombre d'occurrence d'une même variable est multiple. Il en va de même pour les différentes opérations $op \in \{+, -, \times, \div\}$. Le nombre d'occurrence d'une variable est primordial ; moins la variable apparaît dans une opération plus l'encadrement est proche de l'encadrement exact. Il est par exemple préférable d'évaluer la fonction $[x^2] = \{x^2 | x \in [x]\}$ plutôt que la fonction $\{x * x | x \in [x]\}$.

2.3.2 Effet d'enveloppement

L'effet d'enveloppement caractérise le phénomène qui entraîne une surestimation des bornes de l'espace étudié. Ce phénomène est d'autant plus problématique qu'il est cumulatif. Dans le cas des systèmes récurrents, on obtient par exemple, itération après itération, un encadrement toujours grandissant des bornes. Si l'on considère l'estimation des états d'un système, ce phénomène conduit à l'explosion des bornes représentant les états. La Figure (2.1) représente parfaitement la divergence des états caractérisant l'effet d'enveloppement. La raison de ce phénomène est la représentation des ensembles par un pavé. L'exemple qui va suivre montre cet effet délétère que comporte un encadrement sous forme de pavés.

Exemple 6 Soient une matrice $[A]$ et un vecteur $[x]$ définis par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad [x] = \begin{pmatrix} [-1, 2] \\ [1, 3] \end{pmatrix}$$

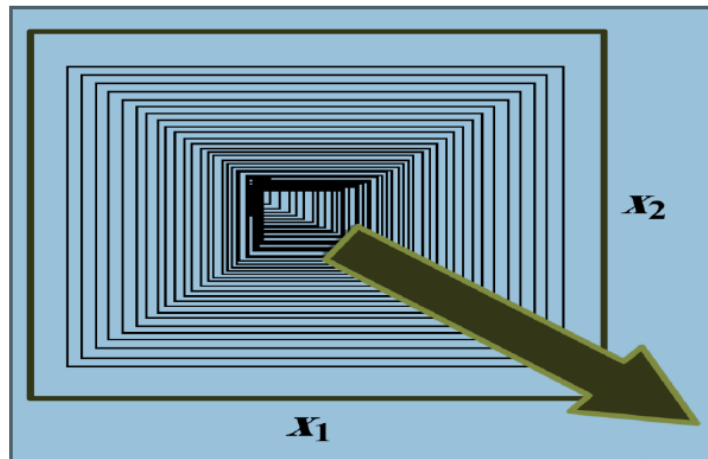


FIGURE 2.1: Estimation d'état avec effet d'enveloppement

Lorsque on évalue le pavé $[y] = A[x]$ on obtient :

$$A[x] = \begin{pmatrix} [-1, 7] \\ [3, 9] \end{pmatrix}$$

Le pavé obtenu est une surestimation de la fonction y .

2.4 Fonctions d'inclusions

Soit une fonction f d'un vecteur x définie sur un domaine $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Cette définition est étendue à une fonction f d'un pavé réel $[x]$:

$$f([x]) = \{f(x) | x \in [x]\} \quad (2.15)$$

Le résultat de cette fonction donne un ensemble où toutes les valeurs prises par f sur le pavé $[x]$ sont contenues. Le résultat n'est pas toujours un pavé mais forme un ensemble. En revanche, le pavé encadrant cet ensemble est obtenu en calculant la fonction d'inclusion de f que l'on note $[f]$. Cette dernière est définie comme une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p :

$$f([x]) \subset [f]([x]), \quad \forall [x] \subset \mathbb{D} \quad (2.16)$$

L'encadrement réalisé par la fonction d'inclusion n'est généralement pas minimal et dépend fortement de la manière dont elle est écrite. Soit une fonction de $x \in [x]$ écrite de quatre

manières différentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = x(1 - x) \\ f_2(x) = x - x^2 \\ f_3(x) = x - x * x \\ f_4(x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Pour $x = [-2 \quad 2]$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} [f_1]([x]) = [x](1 - [x]) = [-6 \quad , \quad 6] \\ [f_2]([x]) = [x] - [x]^2 = [-6 \quad , \quad 2] \\ [f_3]([x]) = [x] - [x] * [x] = [-6 \quad , \quad 6] \\ [f_4]([x]) = \frac{1}{4} - ([x] - \frac{1}{2})^2 = [-6 \quad , \quad \frac{1}{4}] \end{array} \right. \quad (2.18)$$

On remarque que la manière dont on écrit les fonctions a une influence sur la taille des bornes. L'exemple précédent permet de voir que contrairement aux fonctions basées sur des nombres réels, les fonctions basées sur les intervalles nécessitent une précaution particulière lors de leur mise en oeuvre afin de ne pas surestimer les bornes. Pour cela, il faut trouver la fonction d'inclusion la moins pessimiste, c'est à dire celle qui donne l'encadrement le plus proche de celui de la fonction réelle, ce qui se traduit par $[f]([x]) - f([x])$ le plus petit possible.

Lorsque la fonction d'inclusion $[f]([x])$ représente l'encadrement minimal de la fonction $f([x])$, on dit que celle-ci est minimale et on la note par $[f]^*([x])$. Si la fonction ne comporte qu'un seul intervalle alors la fonction d'inclusion minimale est directement obtenue.

Plusieurs types de fonctions d'inclusion existent, elles permettent de déterminer au mieux l'encadrement de la fonction même si elles sont bien souvent pessimistes. Parmi elles, on peut citer :

2.4.1 La fonction d'inclusion naturelle

Elle s'obtient en remplaçant chaque variable réelle x_i par son intervalle $[x_i]$ et en remplaçant les opérateurs arithmétiques classiques par les opérateurs redéfinis pour les intervalles ;

2.4.2 La fonction d'inclusion moyenne

Soient une fonction $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, un pavé $[x_0] \subset \mathbb{D}$ et un point $x \in [x]$. D'après le théorème de Taylor, il existe un scalaire $\xi \in [0, 1]$ tel que :

$$[f_m]([x]) \triangleq f(x_0) + [J_f]([x])([x] - x_0) \quad (2.19)$$

où : $[J_f]$ est une fonction d'inclusion de J_f

2.4.3 La fonction d'inclusion pente

Les fonctions pentes sont généralement considérées meilleures que les fonctions moyennes. Leur forme générale est définie dans la littérature (Hansen et Walster [?]) telles que :

$$f([x]) \triangleq f(x_0) + [g]([x])([x] - x_0) \quad (2.20)$$

où $[g]$ représente la fonction d'inclusion de la fonction pente, mais qui contrairement à la fonction d'inclusion moyenne n'est pas forcément équivalente à la jacobienne de f ;

2.4.4 La fonction d'inclusion de Taylor

Un type de fonction plus général existe : les fonctions d'inclusion de Taylor [188]. Elles constituent une généralisation de la fonction d'inclusion moyenne mais à un ordre plus élevé. L'expression (1.20) représente une fonction d'inclusion de Taylor d'ordre 2 :

$$[f_T]([x]) \triangleq f(x_0) + J_f([x] - x_0) + \frac{1}{2} [H_f]([x])([x] - x_0) \quad (2.21)$$

avec J_f la jacobienne de la fonction f et H_f sa Hessienne.

Les fonctions d'inclusion engendrent du pessimisme, c'est-à-dire une surestimation de l'ensemble recherché, ce qui est un problème récurrent des méthodes par intervalles. Il convient donc d'étudier la convergence des fonctions d'inclusion. Pour cela, la notion d'ordre de convergence d'une fonction d'inclusion a été introduite dans [171].

2.5 Pavage et sous-pavage

Comme nous l'avons vu, l'inconvénient de l'analyse par intervalles est le pessimisme qu'elle entraîne ; le phénomène de dépendance et d'enveloppement engendrent de fortes surestimations du domaine exact recherché. Une méthode parmi d'autres est d'utiliser des sous-pavés, c'est à dire de découper un pavé initial en plusieurs pavés et de calculer le domaine recherché en fonction de chacun des pavés pris indépendamment. De cette manière, l'ensemble calculé est d'autant plus proche du domaine exact que le nombre de pavés est grand. L'inconvénient du sous-pavage est son coût de calcul. Un dilemme apparaît donc ; celui de la précision/coût. Plus on veut être proche du domaine exact, plus on doit couper le pavé en un grand nombre de sous-pavés et par conséquent plus le temps de calcul augmente. Des algorithmes ont été développés pour réduire ce coût de calcul dans [28]. Le partitionnement en sous pavé a été développé dans deux algorithmes distincts permettant de calculer l'image ensembliste [189] et l'inversion ensembliste d'une fonction [189].

2.5.1 Image ensembliste

L'image ensembliste, également appelée « image directe » permet comme son nom l'indique d'obtenir l'image d'une fonction sous forme d'un ensemble de sous-pavés réunis. L'algorithme développé dans [189] porte le nom de « ImageSp (Image Subpaving). » Une boîte à outils a été développée à cet effet [191].

Définition 25 Soient une fonction f et un pavé $[x]$. On définit par $[x_i]$ les sous-pavés de $[x]$ telle que :

$$[x] = \bigcup_{i=1}^n [x_i] \quad (2.22)$$

De même, évaluer la fonction $f([x])$ revient à évaluer f sur chacun des sous-pavés $[x_i]$

$$f([x]) = \bigcup_{i=1}^n f([x_i]) \quad (2.23)$$

On définit alors l'ensemble \mathbb{S} solution de l'image directe par :

$$\mathbb{S} = \{f([x]) \mid x \in \mathbb{X}\} \quad (2.24)$$

2.5.2 Inversion ensembliste

L'inversion ensembliste également appelée «image indirecte» permet, contrairement à l'image ensembliste, la recherche du domaine d'appartenance d'une variable avec pour contrainte la fonction dans laquelle elle se trouve. L'algorithme développé dans [190] porte le nom de «SIVIA (Set Inversion Via Interval Analysis).» Là encore l'algorithme SIVIA a été développé à cet effet dans une boîte à outils [191].

Définition 26 Soit l'équation $f([x]) \in [y]$, l'ensemble de solutions \mathbb{S} est donnée par :

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) \in [y]\} \quad (2.25)$$

Cet ensemble est généralement présenté sous la forme suivante :

$$\mathbb{S} = f^{-1}([y]) \cap \mathbb{X} \quad (2.26)$$

La relation (2.26) est un problème d'inversion ensembliste. L'algorithme SIVIA, permet de résoudre les systèmes non linéaires, en recherchant une approximation de l'ensemble de solutions.

2.6 Les contracteurs

La résolution de l'inversion ensembliste $\mathbb{S} = f^{-1}([y]) \cap \mathbb{X}$ est un problème NP-Difficile (NP, Nondeterministic Polynomial time). Le nombre d'éléments à explorer dans l'espace de recherche d'un problème NPDifficile est de l'ordre de 2^n , où n est le niveau de décomposition des sous-pavés. On constate que même si n est petit, le nombre de sous-pavés 2^n est très grand. Par exemple, pour un niveau de décomposition de trois, on obtient $2^3 = 8$ sous-pavés. En effet, le pavé est d'abord coupé en deux sous-pavés, qui ensuite sont à leur tour coupés en deux ce qui donne quatre sous-pavés, qui à leur tour sont à nouveau coupés en deux ce qui donne au final les huit sous-pavés. L'algorithme SIVIA, auquel est ajouté la méthode de partitionnement de pavé, ne permet pas de résoudre les systèmes de plus de deux ou trois variables ; le temps de calcul augmentant de manière exponentielle. Pour dépasser cette limite, l'idée a été de réduire les domaines des variables à l'aide d'outils appelé contracteurs. Ces derniers se basent sur le principe de consistance [192]-[193].

2.6.1 Contractions de pavés

La contraction de domaines est une notion partagée par les communautés de l'analyse par intervalles, de l'intelligence artificielle, et de l'informatique. Aussi avons-nous choisi de replacer le problème de la description d'un ensemble défini par un système d'égalités ou d'inégalités dans le cadre plus général des problèmes de satisfaction de contraintes, en nous inspirant de l'approche suivie dans [28]. Dans cette partie, nous considérons pour des raisons de simplicité que l'espace de recherche initial est un pavé $\mathbb{X} = [x_0] = [x_{01}] \times \dots \times [x_{0n}]$.

2.6.1.1 Problème de satisfaction de contraintes

Une contrainte est définie par une équation linéaire ou non linéaire, par une inéquation, par une équation différentielle ou encore par une équation aux dérivées partielles.

Définition 27 *Considérons le système d'équations à résoudre :*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \dots \\ f_j(x) = 0 \\ \dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

où : $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ et f_i est une fonction de x . On appelle problème de satisfaction de contraintes (CSP) H , la recherche de l'ensemble des solutions de (2.27) contenues dans \mathbb{X} , et on notera :

$$H : (f(x) = 0, x \in \mathbb{X}) \quad (2.28)$$

Le problème de satisfaction de contraintes de l'équation (2.28) revient à analyser l'ensemble des contraintes $f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Sa solution générale, notée $H_j : (f_j(x) = 0, x \in \mathbb{X})$, est constituée de l'intersection des ensembles solutions $(S)_j$ de chaque contrainte.

$$(S) = \bigcap_{j=1}^n (S)_j \quad (2.29)$$

2.6.1.2 Consistence

Soit un pavé $[x] \subset \mathbb{X}$. Considérons dans un premier temps une unique contrainte H_j : $f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ et que les domaines initiaux des variables x_1, x_2, \dots, x_n sont respectivement $[x_1], [x_2], \dots, [x_n]$. Une valeur $\hat{x}_j \in [x_j]$ est dite consistante avec H_j , s'il existe des valeurs $\hat{x}_i \in [x_i], j \in 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ telles que la contrainte $f_j(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = 0$ soit satisfaite [194], [28]. L'intervalle $[x_i]$ est consistant avec H_j si toute valeur $x_i \in [x_i]$ est consistante avec H_j .

2.6.1.3 Définition et propriétés des contracteurs

Définition 28 (Contracteur)

Un contracteur C d'un CSP $H : (f(x) = 0, x \in [x])$ est un opérateur capable de remplacer le pavé $[x]$ par un pavé $C([x])$ de taille inférieure, tout en préservant l'intégralité de l'ensemble solution \mathbb{S} de H . On peut donc écrire :

$$(S) \subset C([x]) \subset [x] \quad (2.30)$$

Un contracteur vise donc à éliminer des valeurs inconsistantes des domaines $[x_i]$. Si toutes les valeurs inconsistantes ont été éliminées, le contracteur C est dit optimal. Un contracteur est noté $C([x], f)$, où $[x]$ est le domaine de recherche initial, et f sont les contraintes du CSP en considération. Un contracteur possède les propriétés suivantes [195] :

- $\forall [y] \subseteq [x], C([y], f) \subseteq [x]$ (contractance),
- $\forall [y] \subseteq [x], [y] \cap \mathbb{S} \subseteq C([y], f)$ (complétude).

En outre, les propriétés suivantes sont tirées de [28] :

- C est monotone si $[x] \subset [y], C([x], f) \subset C([y], f)$,
- C est idempotent si $\forall [x] \in \mathbb{R}^n, C(C([x], f), f) = C([x], f)$,
- C_1 est plus efficace que C_2 si $\forall [x] \in \mathbb{R}^n, C_1([x], f) \subset C_2([x], f)$,

2.6.2 Différents types de contracteurs

Il existe de nombreux contracteurs permettant de résoudre un problème de satisfaction de contrainte. Parmi les méthodes de résolution employées, on peut citer celle dites linéaires telle

que la méthode de Gauss ou de Gauss-Seidel et les méthodes dites non linéaire telles que celles de Krawczyk [172] et de Newton [173].

2.6.2.1 Contracteur linéaire

Les systèmes d'équations d'intervalles linéaires définis par :

$$[A]x = [b] \quad (2.31)$$

Forment une classe de CSP, $[A] \in \mathbb{R}^n$, $[b] \in \mathbb{R}^n$. Le problème est de déterminer une boîte contenant l'ensemble des solutions du CSP (1.31) défini comme suit :

$$\mathbb{S} = \{[x] \in \mathbb{R}^n \mid \exists A \in [A], \exists b \in [b], Ax = b\} \quad (2.32)$$

2.6.2.1.a Méthode d'élimination de Gauss

Le contracteur d'élimination de Gauss, dénoté par C_{GE} est une extension intervalle de la méthode classique basée sur la transformation LU . Une matrice A est transformée en un produit de deux matrices triangulaires L (matrice triangulaire inférieure) et U (matrice triangulaire supérieure). Le contracteur d'élimination de Gauss est obtenu en remplaçant dans la méthode de Gauss les variables ponctuelles par les variables intervalles correspondantes. Puisque la méthode de Gauss requiert que $a_{ii} \neq 0$, le contracteur d'élimination de Gauss ne fonctionne pas si $[a_{ii}]$ contient 0. D'autre part, le contracteur d'élimination de Gauss est bien adapté aux cas où la matrice d'intervalle $[A]$ est proche de la matrice identité.

2.6.2.1.b Méthode de Jacobi

Considérons encore le CSP (2.31). Une matrice réelle $A \in [A]$ peut être décomposée en la somme d'une matrice diagonale $diag(A)$ et d'une matrice $extdiag(A)$ dont les éléments diagonaux sont nuls :

$$A = diag(A) + extdiag(A) \quad (2.33)$$

Ainsi, l'équation $Ax = b$ peut s'écrire comme suit :

$$diag(A)x + extdiag(A)x = b \quad (2.34)$$

La solution donnée par la méthode de Jacobi est obtenue avec l'hypothèse que la matrice $diag(A)$ est inversible :

$$x = (diag(A))^{-1}(b - extdiag(A)x) \quad (2.35)$$

Le contracteur de Jacobi C_J est donc donné par l'expression récursive suivante :

$$[x_{k+1}] = ((diag(A))^{-1}(b - extdiag(A)[x_k]) \cap [x_k] \quad (2.36)$$

où k indique le numéro de l'itération. A noter que comme le contracteur d'élimination de Gauss, le contracteur de Jacobi est applicable tant que les éléments diagonaux de $[A]$ ne contiennent pas de zéro.

2.6.2.2 Contracteur non linéaire

On considère le CSP suivant :

$$H : (f(x) = 0, x \in [x]) \quad (2.37)$$

Où : $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction vectorielle non linéaire.

Les contracteurs pour résoudre les CSP non linéaires peuvent être basés sur des linéarisations garanties de la fonction f , par exemple, les contracteurs de Krawczyk [172] et de Newton ([171], [173]). Ces méthodes sont applicables dans le cas où $n = m$. Une autre technique, connue sous le nom de contracteur propagation-rétropropagation [192], repose sur la propagation des contraintes [195]. Ce type de contracteur permet de résoudre en général les CSP dont le nombre de contraintes n'est pas nécessairement égal à la dimension du vecteur des variables.

2.6.2.2.a Contracteur de Krawczyk

Supposons que la fonction f du CSP (2.37) est différentiable. L'équation $f(x) = 0$ peut être réécrite sous la forme $x - Mf(x) = x_0$, où M est une matrice réelle inversible. La fonction d'inclusion centrée de la fonction $\psi = x - Mf(x)$ est donnée par :

$$[\psi]([x]) = \psi(x_0) + [J_{psi}]([x])([x] - x_0) \quad (2.38)$$

où $[J_{psi}]$ est une fonction d'inclusion de la matrice jacobienne de ψ et $x_0 = mid([x])$. Ainsi, le contracteur de Krawczyk est défini comme suit :

$$C_K : [x] \rightarrow [x] \bigcap \psi(x_0) + [J_{psi}]([x])([x] - x_0) \quad (2.39)$$

En remplaçant ψ par $x - Mf(x)$, on a :

$$C_K : [x] \rightarrow [x] \bigcap (x_0 - Mf(x_0)) + (I - M[J_f]([x]))([x] - x_0) \quad (2.40)$$

où I est la matrice identité et $[J_f]$ est la fonction d'inclusion de la matrice jacobienne de f . On choisit normalement $M = (J_f)^{-1}(x_0)$.

2.6.2.2.b Contracteur de Newton

Le contracteur de Newton a été développé pour les CSP dans lesquels la fonction f est différentiable et $n = m$. La contrainte $f(x) = 0$ peut être transformée en :

$$x = x - (J_f)^{-1}(x)f(x) \quad (2.41)$$

En remplaçant x par $[x]$ et $(J_f)^{-1}$, f par leurs fonctions d'inclusion, le contracteur de Newton est défini par :

$$C_N : [x] \rightarrow [x] \bigcap ([x] - ([J_f])^{-1}([x])[f]([x])) \quad (2.42)$$

L'application des contracteurs basés sur des linéarisations garanties des contraintes est limitée à cause de la contrainte sur la dimension de la fonction f . Ces contracteurs sont bien adaptés lorsque le domaine initial des variables est petit.

2.6.2.2.c Contracteur propagation-rétropropagation

Le contracteur propagation-rétropropagation, noté C_{rp} , est présenté dans [192], [28]; il utilise le principe de contraction par propagation des contraintes [195]. L'algorithme de C_{rp} repose sur la décomposition des contraintes en un ensemble de contraintes primitives. Une contrainte est dite primitive si elle implique une seule opération arithmétique (+, -, ×, /) entre deux variables ou une seule fonction élémentaire (\sin, \cos, \exp, \dots). Cette décomposition est suivie par l'apparition d'un ensemble de variables intermédiaires représentant les résultats des contraintes primitives. Le domaine initial d'une variable intermédiaire est $[-1, 1]$. Le

contracteur C_{rp} est composé de deux phases : Propagation et Rétropropagation. Le contracteur propagation-rétropropagation présente les avantages suivants :

- indépendance par rapport à la linéarité ou non-linéarité des contraintes,
- indépendance par rapport au nombre de contraintes,
- efficacité avec des intervalles de grande largeur,
- temps de calcul raisonnable,
- facilité de mise en oeuvre.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les concepts généraux de l'analyse par intervalles ont été présentés. L'approche ensembliste, dont découle l'analyse par intervalles, a quant à elle été introduite en annexes. Des notions propres à l'analyse par intervalles ont été énoncées, telles que les vecteurs et matrices intervalles, les fonctions d'inclusion, les contracteurs, les méthodes de pavage, etc. Nous avons exploré les bénéfices apportés par l'arithmétique par intervalles, dont les propriétés ont été définies. De même, les inconvénients de cette approche ont été soulignés. L'effet de dépendance ainsi que l'effet d'enveloppement sont les principales contraintes de l'analyse par intervalles. Les dépendances entre les variables engendrent généralement le conservatisme des bornes, c.à.d, une surestimation de l'ensemble de solutions. L'effet d'enveloppement est assez contraignant pour les systèmes récursifs, c'est pourquoi les méthodes d'estimation d'états cherchent à le minimiser voire le supprimer. Pour cela, plusieurs méthodes existent ; elles agissent avec plus ou moins d'efficacité sur ce phénomène.

Nous nous sommes intéressés à l'inversion ensembliste et au problème de satisfaction de contraintes (CSP). En général, ils partagent le même objectif : la réduction du domaine initial des variables par des contraintes. Nous avons rappelé le principe des contracteurs linéaires et non-linéaires les plus utilisés. Les contracteurs basés sur une linéarisation des contraintes sont bien adaptés au cas de petits pavés avec un nombre de contraintes égale à la dimension du vecteur de variables.

Chapitre 3

Synthèse d'observateurs intervalles

3.1 Introduction

Dans un contexte à erreurs bornées, plusieurs méthodes ont été développées pour l'estimation d'état des systèmes dynamiques linéaires où l'ensemble des solutions est approximé par des formes géométriques simples telles que des ellipsoïdes, des parallélotopes ou des zonotopes [196]-[202]. Même si certaines de ces méthodes réalisent un compromis intéressant entre le temps de calcul et la précision, la stabilité des bornes calculées reste généralement difficile à prouver sous la seule hypothèse d'un modèle initial stable. De même, les observateurs intervalles nécessitent souvent des hypothèses supplémentaires pour prouver la stabilité des bornes obtenues. Ces hypothèses sont basées sur des conditions de coopérativité qui sont étroitement liées à la notion de monotonie [27]. Dans ce cadre, des structures d'observateurs intervalles, basées sur des observateurs classiques de type Luenberger, ont été développées [27],[31],[203]-[205]. La synthèse d'observateurs par intervalles est basée sur la théorie des systèmes dynamiques positifs. Les observateurs par intervalles sont une approche de l'estimation d'état. Cette technique est basée sur des méthodes garanties. Elle consiste en un système dynamique auxiliaire fournissant une borne supérieure et une borne inférieure pour les solutions du système considéré, en considérant que l'on connaît des bornes pour la condition initiale et pour des quantités incertaines. Une telle méthode permet de faire face à des perturbations importantes et donne une information, composante par composante, sur les solutions possibles. Les observateurs par

intervalles constituent un type d'observateurs très particuliers. Ce sont des outils développés depuis moins de 20 ans seulement. Ils trouvent leur origine dans les travaux de Gouzé et al. en [27]. La technique est en suite développée dans plusieurs directions car l'estimation d'état est essentielle pour le diagnostic des défauts et la commande. Par ailleurs, les observateurs par intervalles ont été appliqués avec succès à beaucoup de problèmes de la vie réelle (voir les articles [204]-[207]). Ainsi, au cours de la dernière décennie, un certain nombre de contributions qui présentent des constructions d'observateurs par intervalles pour différents types de systèmes ont été proposées. Par exemple, les articles [208]-[210] sont consacrés à des classes de systèmes linéaires à temps continu et les articles [30],[211]-[212] sont consacrés à diverses familles de systèmes non linéaires à temps continu. Pour plus de détails sur la technique d'observateurs par intervalles, le lecteur peut se référer aux contributions [30],[212]-[214], pour n'en citer que quelques uns. Dans ce chapitre, nous introduisons d'abord les définitions liées à la théorie des systèmes dynamiques positifs puis les définitions générales d'observateurs par intervalles pour des systèmes à temps continu. Nous présentons également les résultats de base dans la construction de ce type d'observateurs. Nous présentons ces résultats préliminaires avant d'aborder les Chapitres 4 et 5 où nous exposerons notre contribution pour ce domaine.

3.2 Systèmes dynamiques positifs

Les systèmes positifs sont les systèmes pour lesquels la trajectoire d'état est toujours positive quand l'état initial est positif. De manière générale, les systèmes positifs jouent un rôle particulièrement important en ingénierie (ex. quantité d'informations à faire transiter par un réseau [215]), en économie (les variables descriptives peuvent être, par exemple, des prix de marchandises, des quantités de stocks [216]-[217]) en sciences sociales (ex. nombres d'individus, des taux de satisfaction, de consommation [218]), en biologie (ex. dynamique de populations, épidémiologie [219], bioréacteurs [220]-[221]), en physique (ex. problèmes de réservoirs d'eau, systèmes d'irrigation [222]), en chimie (ex. réacteurs chimiques, colonnes à distiller [223]). Dans ces domaines, les variables d'état sont représentées par des grandeurs qui n'ont de sens que lorsqu'elles sont positives.

Définition 29 L'inégalité au sens classique dans $\mathbb{R}^n : x \geq y, \Leftrightarrow \forall i, x_i \geq y_i$.

Définition 30 La positivité au sens classique dans $\mathbb{R}^n : x \geq 0, \Leftrightarrow \forall i, x_i \geq 0$.

Définition 31 La stricte positivité au sens classique dans $\mathbb{R}^n : x > 0, \Leftrightarrow \forall i, x_i > 0$.

Définition 32 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est une matrice positive si $\forall i, j : a_{ij} \geq 0$, autrement dit toutes ses entrées sont positives. Nous noterons une telle matrice par : $A \geq 0$.

Définition 33 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est une matrice strictement positive si $\forall i, j : a_{ij} > 0$, autrement dit toutes ses entrées sont strictement positives. Nous noterons une telle matrice par : $A > 0$.

Définition 34 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est une matrice coopérative ou une Matrice de Metzler si $\forall i \neq j : a_{ij} \succ 0$, autrement dit toutes ses entrées hors diagonales sont positives.

Considérons le système linéaire autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$

Théorème 5 Le système (3.1) est positif si et seulement si A est une matrice de Metzler et $b \geq 0$.

3.3 Principe des systèmes coopératifs

La classe des systèmes dynamiques coopératifs a initialement été mise en valeur par E. Kamke [224], reprise ensuite par J.K. Hale [225] puis par M.W. Hirsch [226]-[228] qui leur donne le nom de "systèmes coopératifs" et exploite leurs caractéristiques. Ces résultats ont ensuite été repris et étendus par H.L. Smith dans une monographie sur cette structure de systèmes [229]. Nous donnons ici certains résultats fondamentaux relatifs aux systèmes coopératifs. Considérons le système dynamique dans un domaine ouvert convexe $\chi \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Définition 35 *Le système dynamique (3.2) est coopératif si et seulement si la fonction $f(x, t)$ est telle que :*

$$\forall i \neq j, \forall t \geq 0, \forall x \in \chi : \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, t) \geq 0$$

c'est à dire la matrice Jacobienne du système (3.2) est une matrice de Metzler.

Théorème 6 [229]

Considérons le système coopératif (3.2), et soient deux trajectoires $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, initialisées respectivement en x_0 et y_0 tel que $x_0 \geq y_0$. Alors $\forall t \geq 0, x(t, x_0) \geq y(t, y_0)$

où : $x(t, x_0)$ et $y(t, y_0)$ sont les trajectoires du système (3.2) issues des conditions initiales x_0 et y_0 respectivement.

Théorème 7 (Théorème de comparaison) [230]

Nous considérons les deux systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, t), & x(0) = x_0 & \text{et } x \in \chi \\ \dot{z}(t) = g(z, t), & z(0) = z_0 & \text{et } z \in \chi \end{cases} \quad (3.3)$$

définis sur un domaine convexe $\chi \subset \mathbb{R}^n$. Si les inégalités suivantes sont satisfaites :

- $\forall a \in \chi, \quad \forall t \geq 0, \quad f(a, t) \leq g(a, t)$
- g est coopérative
- $x_0 \leq z_0$

Alors $x(t) \geq z(t), \forall t \geq 0$

3.4 Observateurs par intervalles

Nous considérons maintenant le système à temps continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d_x(t)), & x(0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t), u(t), d_y(t)) \end{cases} \quad (3.4)$$

avec : $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$ sont le vecteur d'état, vecteur d'entrée et vecteur de sortie du système. f et h sont des fonctions appropriés. $d_x \in \mathbb{R}^q$ et $d_y \in \mathbb{R}^r$ sont les perturbations de l'état et de la sortie respectivement.

L'état initial et les perturbation sont supposées inconnues, mais bornées par des quantités connues telles que :

$$\underline{d}_x(t) \leq d_x(t) \leq \bar{d}_x(t) \quad (3.5a)$$

$$\underline{d}_y(t) \leq d_y(t) \leq \bar{d}_y(t) \quad (3.5b)$$

$$\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0 \quad (3.5c)$$

Définition 36 [27], [230]

Considérons le système autonome en temps continu (3.4) avec les conditions (3.5a-3.5c). Le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \underline{f}(z(t), \bar{z}(t), \underline{d}_x(t), \bar{d}_x(t), \underline{d}_y(t), \bar{d}_y(t), u(t), y(t)), & z_0 = \underline{g}(\underline{x}_0, \bar{x}_0) \\ \dot{\bar{z}}(t) = \bar{f}(z(t), \bar{z}(t), \underline{d}_x(t), \bar{d}_x(t), \underline{d}_y(t), \bar{d}_y(t), u(t), y(t)), & \bar{z}_0 = \bar{g}(\underline{x}_0, \bar{x}_0) \\ \dot{x}(t) = \underline{h}(z(t), \bar{z}(t), \underline{d}_x(t), \bar{d}_x(t), \underline{d}_y(t), \bar{d}_y(t), u(t), y(t)) \\ \dot{\bar{x}}(t) = \bar{h}(z(t), \bar{z}(t), \underline{d}_x(t), \bar{d}_x(t), \underline{d}_y(t), \bar{d}_y(t), u(t), y(t)) \end{cases} \quad (3.6)$$

où : $\underline{f}, \bar{f}, \underline{h}, \bar{h}, \underline{g}$ et \bar{g} sont les fonctions dans les domaines appropriés, est un encadreur du système (3.4).

Si pour toute condition initiale $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ (avec \underline{x}_0 et \bar{x}_0 sont connues), nous avons : $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$, alors le système (3.6) est un observateur intervalle du système (3.4).

Si dans le cas où $d_x = d_y = 0$, il existe un réel positif $M, \exists T > 0$, tel que :

$$\|\bar{x} - \underline{x}\| \leq M, \forall t \geq T \quad (3.7)$$

3.4.1 Observateur intervalle d'un système coopératif

3.4.1.1 Cas non linéaire

Soit le système non linéaire stationnaire décrit par :

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad (3.8)$$

Théorème 8 [230]

Si f est coopérative, alors le système différentiel suivant encadre les solutions du système (3.8)

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}} = \underline{f}(\underline{z}, u), & \underline{z}_0 = \underline{x}_0 \\ \dot{\bar{z}} = \bar{f}(\bar{z}, u), & \bar{z}_0 = \bar{x}_0 \\ \underline{x} = \underline{z} \\ \bar{x} = \bar{z} \end{cases} \quad (3.9)$$

Si on a : $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$, alors : $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \forall t \geq 0$.

Si le système (3.8) est globalement asymptotiquement stable dans le domaine de définition des solutions admissibles, alors (3.9) c'est un observateur intervalles pour ce dernier.

3.4.1.2 Cas linéaire

Considérons maintenant le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + w(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

où w est un terme d'incertitudes inconnu mais borné avec des bornes connues telles que :

$$\underline{w}(t) \leq w(t) \leq \bar{w}(t), \forall t \geq 0 \quad (3.11)$$

Théorème 9 [208]

Si la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est coopérative, alors le système différentiel suivant encadre les solutions du système (3.10) :

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}} = A\underline{z} + \underline{w}, & \underline{z}_0 = \underline{x}_0 \\ \dot{\bar{z}} = A\bar{z} + \bar{w}, & \bar{z}_0 = \bar{x}_0 \\ \underline{x} = \underline{z} \\ \bar{x} = \bar{z} \end{cases} \quad (3.12)$$

Si on a : $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$, alors : $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \forall t \geq 0$.

Si la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est Hurwitz, alors le système (3.12) est un observateur intervalle du système (3.10).

3.4.2 Observateur intervalle d'un système partiellement linéaire

Dans [27], un observateur intervalle a été présenté pour des systèmes partiellement linéaires décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(t, y(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.13)$$

avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est non linéaire par rapport au vecteur de sortie y . L'observateur intervalle développé par Gouzé et al. en 2000 [27] nécessite les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2 La paire (A, C) est observable.

Hypothèse 3 Il existe un gain L tel que la matrice $(A - LC)$ soit Metzler.

Hypothèse 4 Il existe deux fonctions connues $\underline{\varphi}$ et $\bar{\varphi}$ mesurables par rapport au temps t , lipschitziennes, telles que :

$$\underline{\varphi}(t, y(t)) \leq \varphi(t, y(t)) \leq \bar{\varphi}(t, y(t)), \forall (t, y(t)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \quad (3.14)$$

Sous les hypothèses 2, 3 et 4, le système :

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{\varphi}(t, y(t)) + L(y(t) - C\underline{x}(t)) \\ \bar{\dot{x}}(t) = A\bar{x}(t) + \bar{\varphi}(t, y(t)) + L(y(t) - C\bar{x}(t)) \\ \underline{x}(t_0) \leq x(t_0) \leq \bar{x}(t_0) \end{cases} \quad (3.15)$$

est un observateur intervalle pour (3.13) si les erreurs d'observation $\underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t)$ et $\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - x(t)$ restent toujours positives.

La dynamique de l'erreur d'observation $\underline{e}(t)$ est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{\underline{e}}(t) = \dot{x}(t) - \underline{\dot{x}}(t) \\ = Ax(t) + \varphi(t, y(t)) - A\underline{x}(t) + \underline{\varphi}(t, y(t)) + L(y(t) - C\underline{x}(t)) \\ = (A - LC)(x(t) - \underline{x}(t)) + (\varphi(t, y(t)) - \underline{\varphi}(t, y(t))) \\ = (A - LC)\underline{e}(t) + (\varphi(t, y(t)) - \underline{\varphi}(t, y(t))) \end{cases} \quad (3.16)$$

D'après l'hypothèse 3 le gain d'observation L est choisi tel que $(A - LC)$ est Metzler. D'un autre coté nous avons le terme $(\varphi(t, y(t)) - \underline{\varphi}(t, y(t)))$ qui est positif $\forall (t, y(t)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$ selon l'hypothèse 4. Et par construction nous avons $\underline{e}(t_0) = x(t_0) - \underline{x}(t_0) \geq 0$. D'après le théorème 8 $\underline{e}(t) \geq 0 \quad \forall t \geq t_0$ ce qui implique la relation d'ordre $x(t) \geq \underline{x}(t) \quad \forall t \geq t_0$. La même démarche peut être suivie pour la borne supérieure de l'erreur $\bar{e}(t) = \bar{x} - x(t)$, ainsi que pour l'erreur globale $e(t) = \bar{x}(t) - \underline{x}(t)$.

L'idée présentée dans [27] est la suivante : s'il existe un gain L tel que la matrice $(A - LC)$ soit coopérative (la matrice A n'étant pas nécessairement coopérative) et si nous connaissons a priori un domaine de l'état initial vérifiant $x(t_0) \in [\underline{x}(t_0), \bar{x}(t_0)]$, alors le système décrit par (3.15) est un observateur intervalle pour le système (3.13). De plus, la convergence de (3.15) vers un pavé connu a priori est assurée par le théorème suivant :

Théorème 10 [27] *Soit un système décrit par (3.13), tel que :*

- *il existe un gain L pour que la matrice $(A - LC)$ soit Metzler ;*
- *la matrice $(A - LC)$ est inversible et stable ;*
- *$\omega(\underline{\varphi}(t, y(t)), \bar{\varphi}(t, y(t))) \leq \beta$, avec $\beta > 0$*

Alors l'erreur globale $\bar{e}(t) - \underline{e}(t)$ converge asymptotiquement vers une valeur inférieure (terme à terme) à : $e_{max} = -(A - LC)^{-1}\beta$.

3.4.3 Observateur intervalle d'un système linéaire à temps invariant

On considère les cas le plus simple de modèles linéaires invariants dans le temps décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + d(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (3.17)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $d(t) \in \mathcal{L}_\infty^n$ et $v(t) \in \mathcal{L}_\infty^n$ sont respectivement l'état, la sortie, la perturbation et le bruit de mesure du système. A et C sont des matrices de dimensions appropriées. Le système (3.17) a trois sources d'incertitudes : les conditions initiales pour $x(0)$ et les valeurs instantanées de d et v . On suppose que tous ces facteurs incertains appartiennent à des intervalles connus.

Hypothèse 5 Soit $x(0) \in [\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ et $\underline{x}_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sont connus, on considère aussi deux fonctions $\underline{d}, \bar{d} \in \mathbb{R}^n$ et une constante $V > 0$ tel que :

$$\underline{d}(t) \leq d(t) \leq \bar{d}(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.18)$$

$$-VE_p \leq v(t) \leq VE_p, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.19)$$

En utilisant les informations disponibles, l'objectif est de calculer deux bornes $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.20)$$

Un observateur par intervalle, composé de deux observateurs conventionnels, est une solution à ce problème :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + L(y(t) - C\underline{x}(t)) - |L|E_pV + \underline{d}(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + L(y(t) - C\bar{x}(t)) + |L|E_pV + \bar{d}(t) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases} \quad (3.21)$$

où $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est le gain de l'observateur à concevoir. Les conditions à satisfaire pour L sont données par le théorème suivant :

Théorème 11 [27] Si l'hypothèse 5 est vérifiée et $x \in \mathcal{L}_\infty^n$, alors les solutions des systèmes (3.17) et (3.21) vérifient que :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t) \forall t \geq 0$$

a condition que $A - LC$ soit Metzler. En outre si $A - LC$ est Hurwitz, alors $\underline{x}, \bar{x} \in \mathcal{L}_\infty^n$.

3.4.4 Relaxation des observateurs intervalles

La méthodologie décrite ci-dessus, bien que simple, n'est pas toujours constructive. En effet, il n'est pas toujours possible de trouver des gains L pour que $(A - LC)$ soit Metzler et Hurwitz (hypothèse 5). Par conséquent, le point clé de l'idée est de trouver un changement de coordonnées qui transforme les erreurs d'observation en formes coopératives. Les changements de coordonnées proposés dans (Raïssi et al [30]; Mazenc et Bernard [207]) pour les systèmes continus peuvent être utilisés pour transformer les matrices $(A - LC)$ en une forme Metzler.

Considérant un système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.22)$$

L'objectif est de déterminer une matrice de transformation non singulière P telle que, dans une nouvelle base $z = Px$, le système :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = PAP^{-1}z(t) + PBu(t) \\ y(t) = CP^{-1}z(t) \end{cases} \quad (3.23)$$

possède un observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = PAP^{-1}\hat{z}(t) + PBu(t) + PL(y(t) - CP^{-1}\hat{z}(t)) \\ y(t) = R\hat{z}(t) + PBu(t) + PLy(t) \end{cases} \quad (3.24)$$

où $R = PAP^{-1} - PLCP^{-1}$ est une matrice stable est Metzler. Sachant que la matrice P est non singulière, on va avoir :

$$\begin{cases} PA - RP = QC \\ Q = PL \end{cases} \quad (3.25)$$

L'équation (3.25) est une équation de Sylvester dont l'inconnue est la matrice de transformation P .

Si les matrices A et R ne possèdent aucune valeur propre commune, alors l'équation de Sylvester possède une solution unique pour tout Q . Une procédure de résolution de l'équation (3.25) peut être donnée en utilisant le lemme suivant :

Lemme 1 [30] *Soit une matrice $(A - LC)$ et une matrice Metzler R ayant les mêmes valeurs propres pour un gain L . s'il existe deux vecteurs v_1 et v_2 tels que les paires $(A - LC, v_1)$ et (R, v_2) sont observables, alors : $P = O_2^{-1}O_1$ et $Q = PL$ vérifiée l'équation (3.25).*

$$\text{où : } O_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_1(A - LC)^{n-1} \end{bmatrix} ; O_2 = \begin{bmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_2R^{n-1} \end{bmatrix}$$

L'observabilité des paires $(A - LC, v_1)$ et (R, v_2) impliquent la non singularité des matrices d'observabilité O_1 et O_2 . Nous avons supposé que les matrices $(A - LC)$ et R avaient les

mêmes valeurs propres, leurs formes canoniques observables sont donc les mêmes.

Ce lemme nous permet donc de calculer une matrice de passage P après avoir fixé un gain L assurant la stabilité de la matrice $(A - LC)$. Le gain L peut être choisi de manière à ce que la matrice $(A - LC)$ ait des valeurs propres uniquement réelles. La matrice P permet alors un changement de coordonnées projetant le système (3.22) dans une base z où la coopérativité est aussi assurée. Les conditions de stabilité et de Metzler étant réunies, il est ainsi possible de construire un observateur intervalle.

Pour la démonstration le lecteur peut se référer à [30]. L'extension à une classe particulière de systèmes non linéaires est réalisée dans [30] en linéarisant partiellement ces derniers.

3.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté différents concepts de base qui seront utiles dans la suite de cette thèse. La littérature sur la thématique de l'observation d'état est abondante. Ce sujet est encore un thème de recherche actif. Il est à noter que les systèmes positifs apparaissent souvent dans les problèmes de la vie réelle. C'est pourquoi l'étude des observateurs basés sur la théorie des systèmes dynamiques positifs attire toujours l'attention de beaucoup de chercheurs. Dans le prochain chapitre, nous allons exploiter la théorie de coopérativité pour proposer un nouveau observateur à intervalles basé sur la technique des modes glissants. Nous montrerons tout d'abord une nouvelle stratégie de construction d'observateurs intervalles (positifs) pour les systèmes linéaires et non linéaires. En suite l'essentiel de notre travail est consacré à l'application de ces observateurs pour le diagnostic et la commande tolérante aux fautes.

Chapitre 4

Conception d'observateurs intervalles à mode glissement pour les systèmes linéaires et non linéaires

4.1 Introduction

La conception d'une stratégie de commande efficace nécessite souvent la connaissance des variables d'état du système dynamique. Cependant, les variables d'état sont rarement inaccessibles à la mesure. Les observateurs d'état développés, il y a plusieurs décennies par Luenberger et Kalman, permettent de reconstruire l'état du modèle si les paramètres fournis sont bien connus pour les systèmes linéaires [232]. D'un autre côté, pour les systèmes non linéaires, il existe plusieurs types d'observateurs à utiliser en fonction de la structure mathématique du modèle de processus et des informations disponibles. Par exemple, nous avons le filtre de Kalman étendu [233], l'observateur à gain élevé [53] et l'observateur à mode glissant [90]. Toutes ces approches sont plus ou moins robustes vis-à-vis des perturbations et du bruit de mesure. Cependant, ils fournissent souvent des estimations insatisfaisantes en présence d'incertitudes dans les paramètres du modèle [234]. Ces incertitudes peuvent constituer de sérieuses limites dans l'application de ces observateurs qui fournissent des estimations biaisées. Dans la plupart des cas, il existe des informations partielles sur les incertitudes, y compris celles qui indiquent

les limites maximales et minimales. Il serait intéressant de tirer parti de cette information partielle pour implémenter un observateur robuste [235]. Pour surmonter ce genre de problèmes, plusieurs méthodes ont été développées récemment dans le cadre de la théorie des ensembles. Leur principe consiste à calculer des ensembles garantis qui contiennent tous les vecteurs d'état même en présence d'incertitudes. Ces approches sont basées sur l'analyse de systèmes incertains, eux-mêmes basés sur des formes géométriques spéciales, telles que les ellipsoïdes [236], les zonotopes [196] et les vecteurs d'intervalle [28],[29].

La technique basée sur l'arithmétique d'intervalle introduite par Moore [169] est une alternative intéressante pour la conception d'observateurs pour les systèmes sujets à des incertitudes partiellement inconnues. Actuellement, il y a un grand nombre de travaux consacrés au problème de l'estimation d'état et des paramètres utilisant l'analyse d'intervalle [30]-[31].

Les observateurs par intervalles sont souvent très recommandés dans le contexte de l'observation de systèmes pour lesquels seul un mauvais modèle est disponible, comme dans les domaines de l'écologie, de l'épidémiologie ou de la biologie ; voir, par exemple. [237]. Les observateurs d'intervalle ont déjà été considérés pour des systèmes à entrées inconnues [238], des systèmes linéaires [239]- citec172, des systèmes incertains [241],[-[112]-[113], des systèmes à temps variant [242], les systèmes à retard [243],[114], les systèmes non linéaires [244], les systèmes linéaires à paramètres variables [245], les systèmes à temps discret [246], et pour la stabilisation [247].

Vue que les techniques à mode glissant deviennent de plus en plus sollicitées pour la conception d'observateurs pour les systèmes linéaires et non linéaires [248]-[251]. Grâce à leur propriété de convergence en temps fini et leur robustesse vis à vis des perturbations et des variations paramétriques [252]-[254]. Nous avons penser à combiner les deux approches, c'est-à-dire les observateurs d'intervalles et les techniques de glissement, afin d'améliorer la précision de l'estimation obtenue par les observateurs par intervalles. Cette combinaison conduit à une diminution significative du conservatisme de l'estimation de l'intervalle. Malgré les résultats déjà disponibles dans la littérature, il reste beaucoup à faire pour compléter la théorie des observateurs par intervalles. Dans [235], les auteurs proposent un observateur moyen pondéré obtenu par une somme convexe pondérée des estimateurs supérieur et inférieur. Cet estimateur est basé sur

l'observateur de Luenberger. L'estimateur de Luenberger est calculé comme une valeur pondérée entre les observateurs min et max. Le facteur de pondération est calculé à partir de la sortie mesurée et des bornes de l'observateur par intervalles. De nos jours et à notre connaissance, peu d'études ont été faites pour concevoir des observateurs en mode glissement par intervalles ; voir, par exemple [255]-[256]. Notre contribution consiste à concevoir un observateur en mode glissant par intervalles pour les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Cet observateur est calculé comme une moyenne pondérée de l'estimateur à mode de glissement supérieur et inférieur. L'observateur intervalle comprend deux estimateurs, un estimateur supérieur et un estimateur inférieur.

4.2 Observateur intervalle à mode glissant pour les systèmes linéaires

Soit un système linéaire monovarié à temps invariant décrit par le système d'équations

$$(4.1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \theta B u(t) + D v(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec : $x(t_0) = x_0$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ sont respectivement le vecteur d'état, l'entrée et la sortie. $v \in \mathbb{R}^q$ représente le vecteur des perturbations inconnues et θ représente l'incertitude paramétrique pour laquelle les bornes minimale et maximale sont connues, soit $\theta \in [\theta_w, \theta_z]$.

θ_w et θ_z sont les bornes minimale et maximale connues respectivement.

Les matrices $A \in \mu_{n \times n}$, $B \in \mu_{n \times 1}$, $D \in \mu_{n \times q}$ et $C \in \mu_{1 \times n}$ sont des matrices constantes. On considère les hypothèses suivantes :

Hypothèse 6 (A, C) est observable.

Hypothèse 7 La matrice A est coopérative.

Hypothèse 8 L'entrée $u(t)$ est positive, et la perturbation inconnue $v(t)$ est positive et bornée pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Les bornes inférieure et supérieure de $v(t)$ sont connues, c'est-à-dire :

$$\forall t > t_0 : 0 < u_{min} < u(t) \quad (4.2)$$

$$\forall t > t_0 : 0 < v_{min} < v(t) < v_{max} \quad (4.3)$$

Hypothèse 9 θ est un paramètre inconnu qui satisfait les conditions suivantes :

$$\theta_w B u(t) < \theta B u(t) < \theta_z B u(t) \quad (4.4)$$

Théorème 12 [260] On considère que les hypothèses (6-9) sont satisfaites. Alors s'il existe une paire de systèmes coopératifs

$$\dot{w}(t) = A w(t) + \theta_w B u(t) + L(y - C w) + K_s(\text{sign}(y - C w)) + D v_{min} \quad (4.5a)$$

$$\dot{z}(t) = A z(t) + \theta_z B u(t) + L(y - C z) + K_s(\text{sign}(y - C z)) + D v_{max} \quad (4.5b)$$

qui ont pour conditions initiales $w(t_0)$, $z(t_0)$ et vérifiant les conditions suivantes :

1- L est choisit tel que la matrice $F = A - LC$ est Hurwitz et coopérative.

2- K_s est choisit tel que : $K_s > \frac{\|D\|v_{min}+3\|D\|v_{max}}{\|C\|}$.

Alors, il existe un estimateur moyen pondéré donné par :

$$\hat{x}(t) = \alpha w(t) + (1 - \alpha) z(t) \quad (4.6)$$

qui vérifié que l'erreur d'estimation $\|\hat{x}(t) - x(t)\|$ converge vers zéro en temps fini,

où le facteur de pondération α est calculé en temps réel à partir de la sortie $y(t)$ et à partir de l'estimateur min $w(t)$ et de l'estimateur max $z(t)$ comme suit :

$$\alpha = \frac{y - C z}{C(w - z)} \quad (4.7)$$

L'existence du facteur de pondération α est garantie par le fait que $w(t)$ et $z(t)$ ne convergent pas l'un vers l'autre. Nous commençons à prouver que les deux systèmes (4.5a) et (4.5b) définissent un intervalle borné c.à.d, $w(t) < x(t) < z(t)$. Par la suite, nous nous concentrons uniquement sur le sous-estimateur $w(t)$, puisque la preuve de la surestimation $z(t)$, peut être effectuée de la même manière. Soit $e_{xw}(t) = x(t) - w(t)$ et $e_{xz}(t) = x(t) - z(t)$ les erreurs d'observation associées au système (4.5a) et (4.5b) de variables d'état non mesurées pour la borne inférieure

et pour la borne supérieure, respectivement.

Pour simplifier l'écriture, on met les deux erreurs $e_{xw}(t)$ et $e_{xz}(t)$ sous la forme $e^*(t)$ puisque la dynamique de ces deux erreurs ont la même structure mathématique.

Alors, il est facile de vérifier que :

$$\dot{e}^*(t) = F e^*(t) + d^*(t) \quad (4.8)$$

où $F = A - LC$ est Hurwitz et Coopérative, $d^*(t) = (\theta - \theta_w) B u(t) + D (v(t) - v_{min}) - K_s(\text{sign}(C e_{xw}(t)))$ dans le cas de la borne inférieure et $d^*(t) = (\theta_z - \theta) B u(t) + D (v_{max} - v(t)) + K_s(\text{sign}(C e_{zx}(t)))$ dans le cas de la borne supérieure.

Il est évident, d'après les définitions de $e_{xw}(t) = x(t) - w(t)$ et $e_{zx}(t) = z(t) - x(t)$ que $e^*(t_0) \geq 0$. Puis, à partir des hypothèses 7 et 8 et en appliquant le théorème de comparaison 7, on vérifié que le système (4.8) est stable est coopératif.

Par conséquent, il est garanti que $e^*(t) \geq 0, \forall t \geq t_0$. Ainsi, on déduit que $w(t) < x(t) < z(t)$ pour tout $t \geq t_0$.

Ceci nous permet enfin d'affirmer que , $\forall t > t_0 : w(t) < x(t) < z(t)$.

De plus, comme l'entrée $u(t)$ est bornée grâce à l'hypothèse 9, nous nous assurons que la différence $w(t) - z(t)$ est bornée. Ce résultat garantit que le facteur de pondération α défini par (4.7) est borné $\forall t > t_0$. Ceci implique aussi que l'estimateur $\hat{x}(t)$ défini par (4.6) est borné $\forall t \geq t_0$.

Maintenant, nous allons montrer qu'un observateur d'état pour le système dynamique (4.1) peut être composé de deux systèmes (4.5a) et (4.5b). En définissant une constante a comme suit :

$$a = \frac{\theta - \theta_z}{\theta_w - \theta_z} \quad (4.9)$$

et soit $\xi(t)$ une combinaison linéaire entre $w(t)$ et $z(t)$

$$\xi(t) = a w(t) + (1 - a) z(t) \quad (4.10)$$

Comme a est constante, alors $\xi(t)$ est gouvernée par la dynamique suivante :

$$\dot{\xi}(t) = a \dot{w}(t) + (1 - a) \dot{z}(t) \quad (4.11)$$

Rappelons que la définition de a (4.9) permet d'exprimer θ comme suit :

$$\theta = a.\theta_w + (1 - a).\theta_z \quad (4.12)$$

La substitution de $\dot{w}(t)$ et $\dot{z}(t)$ par leur expressions (4.5a) et (4.5b) dans l'équation (4.11) mène à :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & A\xi(t) + \theta B u(t) + LC(x(t) - \xi(t)) + K_s (a \operatorname{sign}(C x(t) - C w(t)) \\ & + (1 - a)\operatorname{sign}(C x(t) - C z(t))) + aDv_{min} + (1 - a)Dv_{max} \end{aligned} \quad (4.13)$$

L'erreur d'observation est définie par :

$$e_{x\xi}(t) = x(t) - \xi(t) \quad (4.14)$$

La dynamique de cette erreur est donnée par :

$$\dot{e}_{x\xi}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\xi}(t) \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{x\xi}(t) = & (A - LC) e_{x\xi}(t) + Dv(t) - K_s (a \operatorname{sign}(C x(t) - C w(t)) \\ & + (1 - a)\operatorname{sign}(C x(t) - C z(t))) - aDv_{min} - (1 - a)Dv_{max} \end{aligned} \quad (4.16)$$

En Considérant la fonction de Lyapunov candidate :

$$V = e_{x\xi}^T P e_{x\xi} \quad (4.17)$$

avec Q et P sont des matrices définies positives qui vérifient l'équation de Lyapunov :

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = -Q \quad (4.18)$$

La stabilité et la convergence en temps fini sont garanties par la condition : $\dot{V} < 0$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_{x\xi}^T P \dot{e}_{x\xi} + \dot{e}_{x\xi} P e_{x\xi} = e_{x\xi}^T P ((A - LC) e_{x\xi} + Dv - aDv_{min} - (1 - a)Dv_{max} \\ & - K_s (a \operatorname{sign}(Cx - Cw) + (1 - a)\operatorname{sign}(Cx - Cz))) + ((A - LC) e_{x\xi} + Dv - aDv_{min} \\ & - (1 - a)Dv_{max} - K_s (a \operatorname{sign}(Cx - Cw) + (1 - a)\operatorname{sign}(Cx - Cz))) P e_{x\xi} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_{x\xi}^T ((A - LC)^T P + P(A - LC)) e_{x\xi} + 2e_{x\xi}^T P (Dv - aDv_{min} - (1 - a)Dv_{max}) \\ & - 2e_{x\xi}^T P K_s (a \operatorname{sign}(Cx - Cw) + (1 - a)\operatorname{sign}(Cx - Cz)) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e_{x\xi}^T Q e_{x\xi} + 2e_{x\xi}^T P (Dv - aDv_{min} - (1 - a)Dv_{max}) \\ & - K_s (a \operatorname{sign}(Cx - Cw) + (1 - a)\operatorname{sign}(Cx - Cz)) \end{aligned} \quad (4.21)$$

En utilisant l'inégalité de Rayleigh [53]

$$0 < \lambda_{\min}(Q) \|e_{x\xi}\|^2 \leq e_{x\xi}^T Q e_{x\xi} \leq \lambda_{\max}(Q) \|e_{x\xi}\|^2 . \quad (4.22)$$

où Q est une matrice définie positive, $\lambda_{\min}(Q)$ et $\lambda_{\max}(Q)$ sont respectivement les valeurs propres *min* et *max* de la matrice Q .

En utilisant aussi la propriété de la fonction signe donnée par le lemme suivant :

Lemme 2 [257]-[258]

$\text{sign}(a+b) \leq \text{sign}(a) + \text{sign}(b) + 1$ pour toute a et b , avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

on a :

$$\text{sign}(C e_{x\xi}) \leq a \text{sign}(Cx - Cw) + (1 - a) \text{sign}(Cz - Cx) \quad (4.23)$$

puisque a est une constante et $e_{x\xi}$ vérifie l'égalité :

$$C e_{x\xi} = a(Cx - Cw) + (1 - a)(Cz - Cx) \quad (4.24)$$

Par substitution des inégalités (4.22) et (4.23) dans (4.21), on a :

$$\begin{aligned} \dot{V} &< -\lambda_{\min}(Q) \|e_{x\xi}\|^2 + 2e_{x\xi}^T P (Dv - aDv_{\min} - (1 - a)Dv_{\max}) \\ &\quad - 2e_{x\xi}^T P K_s \text{sign}(C e_{x\xi}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &< -\lambda_{\min}(Q) \|e_{x\xi}\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) \|e_{x\xi}\| \|Dv - aDv_{\min} - (1 - a)Dv_{\max}\| \\ &\quad - 2\lambda_{\max}(P) \|C\| \|e_{x\xi}\| K_s \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\dot{V} < -\lambda_{\min}(Q) \|e_{x\xi}\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) \|e_{x\xi}\| (\|D\| v_{\min} + 3\|D\| v_{\max} - \|C\| \|K_s\|) \quad (4.27)$$

$\dot{V} < 0$ if

$$K_s > \frac{\|D\| v_{\min} + 3\|D\| v_{\max}}{\|C\|} \quad (4.28)$$

La condition $\dot{V} < 0$ est vérifiée si l'inégalité (4.28) est satisfaite. La preuve de la convergence en temps fini est donnée comme suit : A partir de l'inégalité (4.27), si $K_s > \frac{\|D\| v_{\min} + 3\|D\| v_{\max}}{\|C\|}$, alors :

$$\dot{V} < -\alpha \|e_{x\xi}\|$$

avec $\alpha > 0$. Cela signifie que :

$$\dot{V} < -\alpha\sqrt{V}$$

L'intégration des deux parties de l'équation ci-dessus conduit à :

$$\int_{V(t_0)}^{V(t)} \frac{dV}{\sqrt{V}} = \int_{t_0}^{t_f} -\alpha dt$$

alors :

$$2(\sqrt{V(t)} - \sqrt{V(t_0)}) = -\alpha t_f$$

Puisque V est positive et décroissante, alors il existe un temps fini t_f donné par :

$$t_f = \frac{2\sqrt{V(t_0)}}{\alpha}$$

pour lequel $V(t_f) = 0$. Nous concluons que si on choisit K_s vérifiant l'inégalité (29), l'erreur $e_{x\xi}(t)$ converge vers zéro en temps fini.

Maintenant, nous devons prouver que l'estimation $\hat{x}(t)$ converge vers $x(t)$ en montrant que $\|\hat{x}(t) - x(t)\|$ converge vers zéro en temps fini.

A partir des équations (4.8) et (4.10), nous obtenons :

$$\xi(t) - \hat{x}(t) = (a - \alpha)(w(t) - z(t)) \tag{4.29}$$

Notant que la constante a peut être écrite sous la forme :

$$a = \frac{C\xi(t) - Cz(t)}{Cw(t) - Cz(t)} \tag{4.30}$$

En remplaçant (4.7) et (4.30) dans l'équation (4.29) on obtient :

$$\xi(t) - \hat{x}(t) = \frac{C(\xi(t) - x(t))}{C(w(t) - z(t))} (w(t) - z(t)) \tag{4.31}$$

En prenant la norme de l'équation ci-dessus, nous pouvons écrire

$$\|\xi(t) - \hat{x}(t)\| \leq \|Ce_{x\xi}(t)\| \left\| \frac{1}{C(w(t) - z(t))} (w(t) - z(t)) \right\| \tag{4.32}$$

Ceci signifie que :

$$\|\xi(t) - \hat{x}(t)\| \leq \|Ce_{x\xi}\| N \tag{4.33}$$

avec $N = \left\| \frac{1}{C(w(t)-z(t))} (w(t) - z(t)) \right\|$. Puisque $(w(t) - z(t))$ ne s'annule jamais pour tout $t \geq t_0$, alors N est une constante bornée donnée par $N = \left\| \frac{1}{C} \right\|$. Comme $e_{x\xi}(t)$ converge vers zéro en temps fini alors, $\|\xi(t) - \hat{x}(t)\|$ converge aussi vers 0 en temps fini. Puisque $\xi(t)$ tend vers $x(t)$ en temps fini et $\hat{x}(t)$ tend vers $\xi(t)$ en temps fini alors, il est évident que $\hat{x}(t)$ tend vers $x(t)$ en temps fini. Ceci complète la preuve.

4.3 Observateur intervalle à mode glissant pour les système non linéaires

Les résultats obtenus pour le système linéaire invariant dans le temps précédent, peuvent être généralisés à des systèmes non linéaires variants dans le temps qui se mettent sous la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(y, t, u)x + \theta g(y, t, u) + h(y, t, u) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.34)$$

avec : $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ sont l'état, l'entrée et la sortie du système (4.34)

f est une fonction matricielle cooperative, g et h sont des fonctions matricielles bornées et θ est un paramètre incertain pour lequel les bornes minimale et maximale sont connues, c.à.d $\theta \in [\theta_w, \theta_z]$.

Hypothèse 10 $\|u(t)\| \leq U$, et la constante $U > 0$ est donnée.

Hypothèse 11 $\theta_w g(y, t, u) < \theta g(y, t, u) < \theta_z g(y, t, u)$

Hypothèse 12 $w(t_0) < x(t_0) < z(t_0)$

Hypothèse 13 f, g et h sont des fonctions matricielles Lipschitziennes et bornées, c.à.d, il exist des scalaires positifs $F > 0, G > 0$ tels que :

$\|f(y, t, u)\| < F, \|g(y, t, u)\| < G$, for all $y \in \mathcal{D}, t \in \mathbb{R}^+$.

Les bornes inférieure et supérieure de $h(y, t, u)$ sont connues, c.à.d :

$$\forall t > t_0, h_{min} < h(y, t, u) < h_{max}$$

Hypothèse 14 *Il existe des fonctions matricielles $L \in \mu_{n \times 1}$, $P \in \mu_{n \times n}$, $P(\cdot) = P(\cdot)^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$*

$$\begin{aligned} p_1 I_n &\leq P(t) \leq p_2 I_n, \quad p_1, p_2 > 0 \\ D(t, y, u)^T P(t) + P(t) D(t, y, u) + Q &\leq 0. \\ \text{avec } D(t, y, u) &= f(y, t, u) - LC \end{aligned}$$

Théorème 13 [260] *Supposons que les hypothèses 10 – 14 sont satisfaites. Alors, s'il existe une paire de systèmes coopératifs*

$$\dot{w}(t) = f(y, t, u)w + \theta_w g(y, t, u) + L(y - Cw) + K_s(\text{sign}(y - Cw)) + h_{min} \quad (4.35a)$$

$$\dot{z}(t) = f(y, t, u)z + \theta_z g(y, t, u) + L(y - Cz) + K_s(\text{sign}(y - Cz)) + h_{max} \quad (4.35b)$$

qui vérifient les conditions suivantes :

1- L est choisit tel que la matrice $(f(y, t, u) - LC)$ est Metzler.

2- K_s est choisit tel que :

$$K_s > \frac{h_{min} + 3h_{max}}{\|C\|} \quad (4.36)$$

Alors il existe un estimateur pondéré de l'état x décrit par :

$$\hat{x}(t) = \alpha w(t) + (1 - \alpha) z(t) \quad (4.37)$$

tel que $\|\hat{x}(t) - x(t)\|$ converge vers zéro en temps fini,

où, le facteur de pondération α est donné comme dans(4.7), avec $\alpha \in [0, 1]$.

La preuve est similaire à celle de Théoreme 12. Définissons une constante a comme suit :

$$a = \frac{\theta - \theta_z}{\theta_w - \theta_z} \quad (4.38)$$

et soit la variable ξ définie par :

$$\xi = aw + (1 - a)z \quad (4.39)$$

avec $\alpha \in [0, 1]$.

Comme a est constante, alors ξ est gouvernée par la dynamique suivante :

$$\dot{\xi} = a\dot{w} + (1 - a)\dot{z} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f(y, t, u)\xi + \theta g(y, t, u) + L(Cx - C\xi) \\ &+ K_s(a\text{sign}(y - Cw)a + (1 - a)\text{sign}(y - Cz)) + ah_{min} + (1 - a)h_{max} \end{aligned} \quad (4.41)$$

L'erreur d'observation est donnée par :

$$e_{x\xi} = x - \xi \quad (4.42)$$

La dynamique de cette erreur est donnée par :

$$\dot{e}_{x\xi} = \dot{x} - \dot{\xi} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{x\xi}(t) &= (f(y, t, u) - LC) e_{x\xi} + (h(y, t, u) - ah_{min} - (1 - a)h_{max}) \\ &- K_s(a \text{sign}(Cx - Cw) + (1 - a)\text{sign}(Cx - Cz)) \end{aligned} \quad (4.44)$$

On considère la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V(t) = e_{x\xi}^T P(t) e_{x\xi} \quad (4.45)$$

La convergence de l'observateur à mode glissant est garantie par la condition : $\dot{V} < 0$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{e}_{x\xi}^T P(t) e_{x\xi} + e_{x\xi}^T \dot{P}(t) e_{x\xi} + e_{x\xi}^T \dot{P}(t) e_{x\xi} \\ &= e_{x\xi}^T (\dot{P}(t) + (f(y, t, u) - LC)^T P(t) + (f(y, t, u) - LC)) e_{x\xi} \\ &+ 2e_{x\xi}^T P(t) (h(y, t, u) - ah_{min} - (1 - a)h_{max}) \\ &- 2e_{x\xi}^T P(t) K_s(a\text{sign}(Cx - Cw) + (1 - a)\text{sign}(Cx - Cz)) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -e_{x\xi}^T Q e_{x\xi} + 2e_{x\xi}^T P(t) (h(y, t, u) - ah_{min} - (1 - a)h_{max}) \\ &- 2e_{x\xi}^T P(t) K_s(a\text{sign}(Cx - Cw) + (1 - a)\text{sign}(Cx - Cz)) \end{aligned} \quad (4.47)$$

En utilisant le Lemme 1, on va avoir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &< -\lambda_{min}(Q) \|e_{x\xi}\|^2 + 2e_{x\xi}^T P(t) (h(y, t, u) - ah_{min} - (1 - a)h_{max}) - 2e_{x\xi}^T P(t) K_s \text{sign}(e_{x\xi}) \\ &< -\lambda_{min}(Q) \|e_{x\xi}\|^2 + 2\lambda_{max}(P) \|e_{x\xi}\| (\|h(y, t, u) - ah_{min} - (1 - a)h_{max}\| - \|C\| K_s) \end{aligned} \quad (4.48)$$

$\dot{V} < 0$ if

$$K_s > \frac{h_{min} + 3h_{max}}{\|C\|} \quad (4.49)$$

Si l'inégalité (4.49) est vérifiée, alors la condition $\dot{V} < 0$ est satisfaite. Ensuite, nous pouvons calculer la différence entre ξ et \hat{x} , ce qui est égal à :

$$\xi - \hat{x} = \frac{C(\xi - z)}{C(w - z)}(w - z) \quad (4.50)$$

On peut aussi écrire :

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \|Ce_{x\xi}\| \left\| \frac{1}{C(w - z)}(w - z) \right\| \quad (4.51)$$

Le reste de la preuve est similaire à la preuve du théorème 1.

4.4 Applications Numeriques

1- Cas linéaire

Considérons le modèle dynamique du bioprocédé donné par le système d'équations suivant [261] :

$$\begin{cases} \dot{C}_A = \frac{Q}{V}(C_{A,in} - C_A) - k_1 C_A \\ \dot{C}_B = -\frac{Q}{V}C_B + k_1 C_A - k_2 C_B \\ \dot{C}_C = -\frac{Q}{V}C_C + k_2 C_B \end{cases} \quad (4.52)$$

où : C_A , C_B , C_C sont les concentrations en (mol/m^3), Q indique le taux d'alimentation en (m^3/s), V le volume du bioprocédé en (m^3), k_1 et k_2 , les constantes cinétiques en (s^{-1}) et $C_{A,in}$ la concentration d'entrée en (mol/m^3).

Notant que : $k_i(T) = k_{0i} \exp((-E_i)/RT)$, $i = 1, 2$ dépend de la température T . Pour un processus non isotherme, la température T n'est pas constante. Dans ce cas, le modèle (4.52) est non linéaire. Le bioprocédé considéré dans cet exemple est un réacteur continu et isotherme. Pour ce type de réacteurs, la température T et le volume V sont maintenus constants par des dispositifs de contrôle appropriés [262]. Avec ces considérations, le système (4.52) est naturellement linéaire.

TABLE 4.1: Valeurs numériques utilisées dans la simulation pour les cas linéaire

Paramètre	valeur	Variable	condition initiale
$\frac{Q}{V}(s^{-1})$	2	x(0) (mol/l)	(0.83 ; 1.2 ; 3)
$k_1(s^{-1})$	10	w(0) (mol/l)	(0 ; 1 ; 0)
$k_2(s^{-1})$	5	z(0) (mol/l)	(1.1 ; 2 ; 5)
$C_{A,in}(mol/l)$	5		
$C_{A,in,min}(mol/l)$	2		
$C_{A,in,max}(mol/l)$	9		

Considérons que la concentration en entrée $C_{A,in}$ est incertaine et bornée comme suit $C_{A,in,min} < C_{A,in} < C_{A,in,max}$, alors le système (4.52) peut être exprimé par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \theta BU(t) + Dv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.53)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-Q}{V} - k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & \frac{-Q}{V} - k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & \frac{-Q}{V} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où : $x = [C_A \ C_B \ C_C]^T$, $\theta = C_{A,in}$ and $y = C_C$.

Les simulations sont effectuées pour les valeurs numériques données dans la tableau 1.

Nous devons fixer les gains de l'observateur L et K_s . L est déterminé de sorte que la matrice $F = A - LC$ est Hurwitz et coopérative. La matrice F est donné par :

$$F = \begin{pmatrix} \frac{-Q}{V} - k_1 & 0 & -L_1 \\ k_1 & \frac{-Q}{V} - k_2 & -L_2 \\ 0 & k_2 & \frac{-Q}{V} - L_3 \end{pmatrix}$$

avec : $L = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$.

Il est facile de vérifier que, pour $L = [-10 \ -10 \ 100]^T$, F est Hurwitz et coopérative. D'abord, nous considérons le cas nominal, avec $v = 0$ et $\theta = 5$. Les résultats de simulation sont indiqués sur la figure (5.5). Les courbes (a - c) représentent les concentrations réelles

C_A , C_B et C_C respectivement et leur estimations (estimation inférieure, estimation supérieure et estimation pondérée convexe). À partir de ces courbes, on peut remarquer que l'observateur proposé converge bien. De plus, la propriété de coopérativité est toujours satisfaite, c'est-à-dire, $w(t) < x(t) < z(t) \forall t$.

La courbe (d) de la figure (5.5) représente l'erreur d'estimation. Cette courbe montre clairement la convergence en temps fini de l'observateur proposé. Aussi, afin de vérifier la robustesse vis-à-vis des perturbations et des variations du paramètres θ , nous avons effectué des simulations pour les deux cas suivants :

- La perturbation est prise comme $v = 1 + 0.5\sin(\pi t)$ et le paramètre $\theta = 3$.
- La perturbation est prise comme $v = 1 + 0.5\sin(\pi t)$ et le paramètre $\theta = 8$.

Pour les deux cas, nous avons $v_{min} = 0.5$ et $v_{max} = 1.5$. Les résultats de simulations sont illustrés sur les figures (5.6) et (5.7). Ces figures représentent la réponse temporelle des concentrations et leur estimations pour une entrée Q données dans la figure (4.4). Ces courbes montrent que l'observateur proposé est robuste vis à vis de la perturbation et par rapport à la variation paramétrique. La convergence en temps fini est également assurée malgré la présence de la perturbation et de l'incertitude du paramètre θ comme le montre la courbe d des figures (5.6) et (5.7), qui représentent l'erreur d'estimation.

2- Cas Non Linéaire

On considère le modèle d'un réacteur exothermique décrit par :

$$\begin{cases} \dot{T} = \frac{Q}{V} (T_{in} - T) - \frac{\Delta H}{\rho c_p} r + \frac{UA}{\rho c_p V} r (T_j - T) \\ \dot{C} = \frac{Q}{V} (C_{in} - C) - r \end{cases} \quad (4.54)$$

avec :

$$r = k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) \quad (4.55)$$

où : T , C , Q , V , T_{in} , C_{in} , ρ , c_p , ΔH , r , T_j , U et A sont la température du réacteur en (K), la concentration du réacteur en (mol/m^3), le débit d'alimentation en (m^3/s), le volume en (m^3), la température d'entrée en (K), la concentration d'entrée en (mol/m^3), la densité en (kg/m^3), la capacité thermique en (J/kg), énergie de la réaction en (J/mol), constante cinétique en (s^{-1}), la température du fluide de refroidissement en (K), le coefficient d'échange

thermique en $(W/m^2/K)$ et la surface d'échange de chaleur (m^2), respectivement. La sortie y est $y = T$ et l'entrée $u = T_j$.

Le modèle du réacteur exothermique décrit par (4.54) peut être réécrit sous la forme de l'équation (4.34), où :

$$f(y, u) = \begin{pmatrix} \frac{-Q}{V} & -\frac{\Delta H}{\rho c_p} k_0 \exp\left(\frac{-E}{Ry}\right) \\ 0 & \frac{-Q}{V} - k_0 \exp\left(\frac{-E}{Ry}\right) \end{pmatrix}, \quad g(y, u) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho c_p}(y - u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h(y, u) = \begin{pmatrix} \frac{Q}{V} T_{in} \\ \frac{Q}{V} C_{in} \end{pmatrix}.$$

avec $x = [T \quad C]^T$, $\theta = UA$ and $y = T$.

Considérons que la variable UA est une incertitude bornée comme suit : $UA_{min} < UA < UA_{max}$. Nous avons :

$$f(y, u) - LC = \begin{pmatrix} \frac{-Q}{V} - L_1 & -\frac{\Delta H}{\rho c_p} k_0 \exp\left(\frac{-E}{Ry}\right) \\ -L_2 & \frac{-Q}{V} - k_0 \exp\left(\frac{-E}{Ry}\right) \end{pmatrix}.$$

Il suffit de prendre $L_1 > 0$ et $L_2 < 0$ pour vérifier que $f(y, u) - LC$ est coopérative et Hurwitz. Ci-après, les valeurs de L_1 et L_2 sont considérées comme $L_1 = 10$ et $L_2 = -10$. De plus, le gain du vecteur de surface en mode glissant est pris comme $K_s = [3 \quad 3]^T$. Les simulations sont effectuées avec les valeurs numériques données dans le tableau 2 . Comme dans l'exemple 1, nous avons effectué les simulations pour les trois cas suivants :

- Premier cas (cas nominal) : $v = 0$ et $\theta = 10000$
- Deuxième cas (cas perturbé) $v = 0.6 \sin(\pi t)$ et $\theta = 9000$
- Troisième cas (cas perturbé) $v = 0.6 \sin(\pi t)$ et $\theta = 14000$

Les résultats des simulations sont illustrés aux figures (4.5-4.7). Les courbes a et b pour les trois figures représentent simultanément l'évolution de la température réelle du réacteur T et ses estimations (estimation inférieure, estimation supérieure et estimation pondérée convexe), ainsi que l'évolution de la concentration réelle C et ses estimations (estimation inférieure, estimation supérieure et estimation pondérée convexe). L'entrée considérée T_j est illustrée par la quatrième courbe des figures (4.5-4.7). À partir de ces courbes, nous pouvons remarquer que l'observateur proposé converge même en présence des perturbations et d'incertitudes paramétriques. En outre, la propriété de coopérativité est toujours satisfaite, c'est-à-dire $w(t) < x(t) < z(t) \forall t$ pour les trois cas considérés. La courbe c des figures (4.5-4.7) représente l'erreur d'estimation dans le cas

TABLE 4.2: Valeur numérique utilisées dans la simulation de l'application 2

Paramètre	valeur	Variable	condition initiale
$Q (m^3/s)$	0.00033	$T(0) (K)$	380
$V (m^3)$	10	$C(0) (mol/m^3)$	915
$T_{in} (K)$	283	$w_1(0) (K)$	375
$C_{in}(mol/m^3)$	14000	$w_2(0)(mol/m^3)$	500
$\Delta(H)(J/mol)$	-76000	$z_1(0)(K)$	390
$c_p(J/kg)$	2000	$z_2(0)(mol/m^3)$	1000
$k_0(s^{-1})$	46.10^4		
$E(J/mol)$	65300		
$UA(W/K)$	10000		
$UA_{min}(W/K)$	8000		
$UA_{max}(W/K)$	15000		

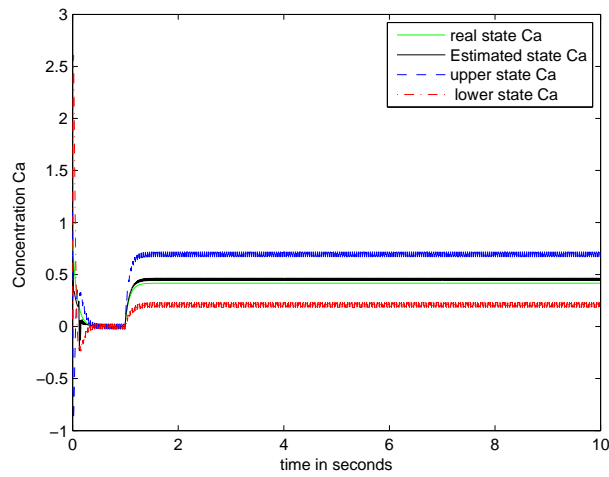
nominal ($v = 0$). Cette courbe montre clairement la convergence en temps fini de l'observateur proposé dans ce cas.

4.5 Conclusion

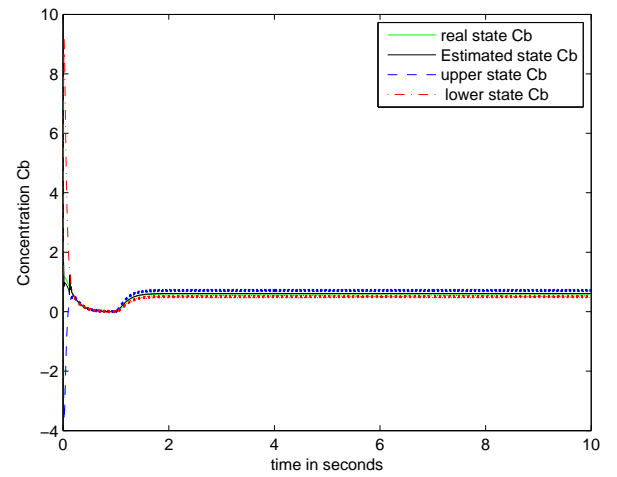
Dans ce chapitre, nous avons développé une nouvelle stratégie pour le calcul d'un observateur intervalle robuste. Cette stratégie consiste à calculer un observateur d'état moyen à partir d'une sous-estimation et d'une surestimation fournie par un observateur mode de glissant par intervalles d'un système linéaire incertain.

Nous avons d'abord montré que cet observateur moyen converge exactement vers l'état du système linéaire. Les performances de cet observateur ont été illustrées par une application sur un modèle linéaire de bioprocédés incertain. Par la suite, nous avons étendu cette méthode pour une classe de systèmes non linéaires, les performances de cet estimateur non linéaire ont été illustrées par simulation sur le modèle d'un réacteur exothermique. Avec la complexité croissante des modèles, il devient également important d'analyser la sensibilité des paramètres du modèle en prenant en compte les incertitudes dans les données d'entrée et d'étalonnage. La robustesse

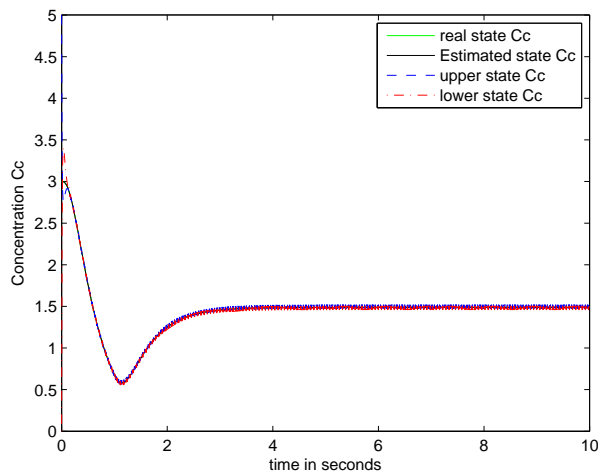
de cette observateur par rapport au perturbations et par rapport à la variation des paramètre est illustrée par des simulations.



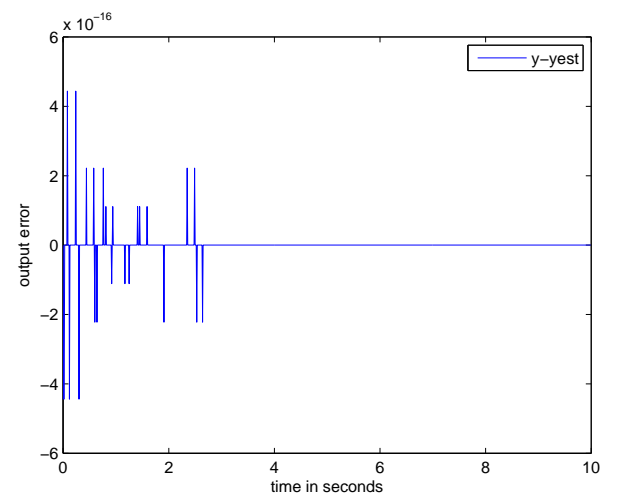
(a) Concentration Ca



(b) Concentration Cb

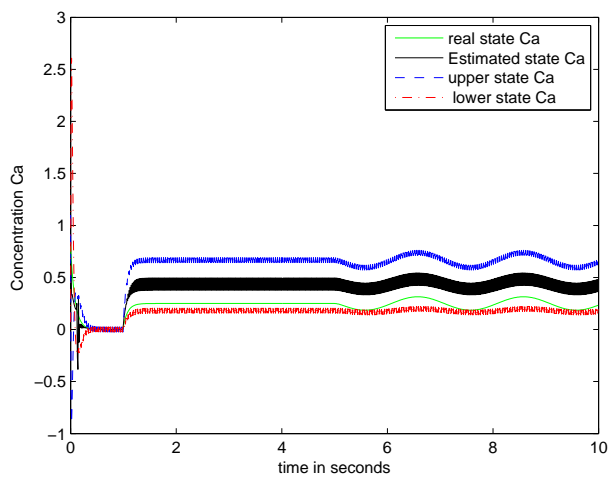


(c) Concentration Cc

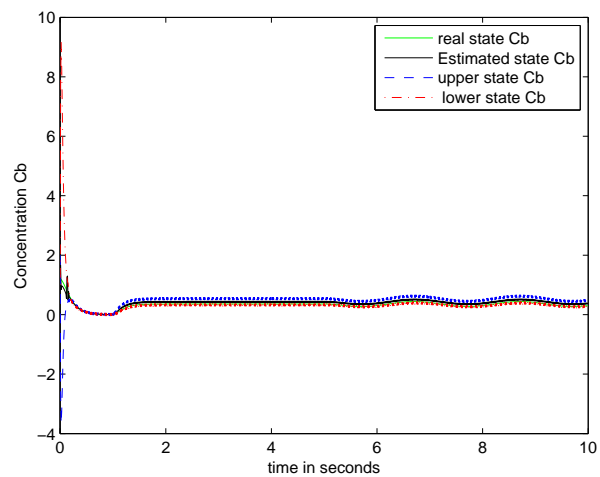


(d) entrée de commande

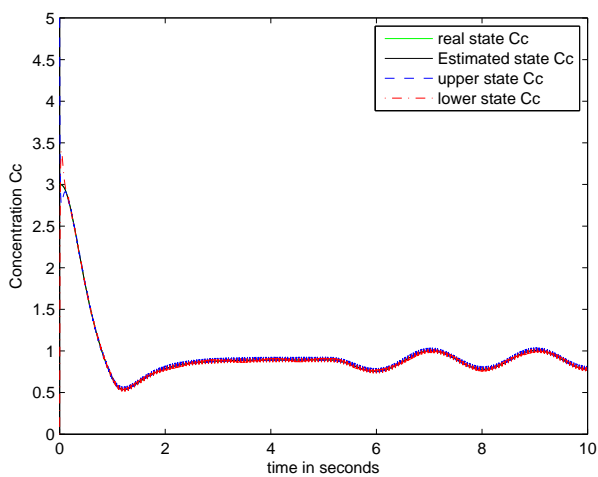
FIGURE 4.1: Estimation du bioprocédé linéaire avec $K_s = 3, v = 0$ and $\theta = 5$



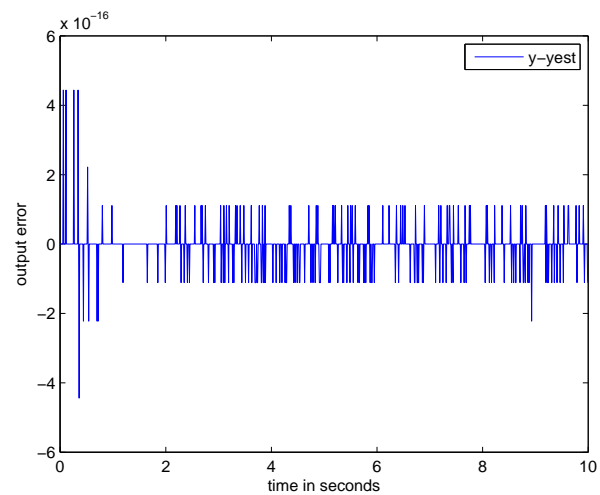
(a) Concentration Ca



(b) Concentration Cb

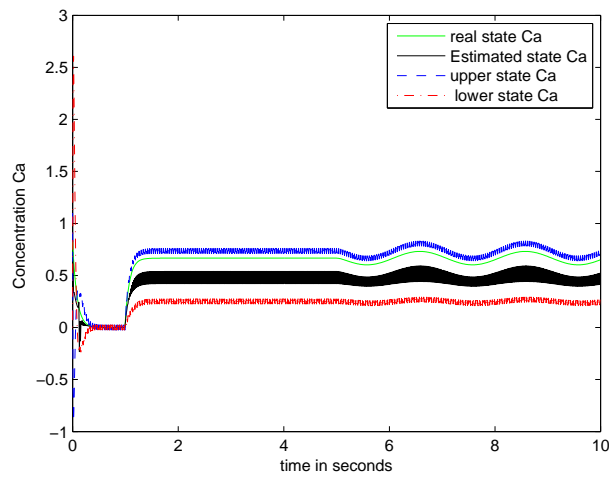


(c) Concentration Cc

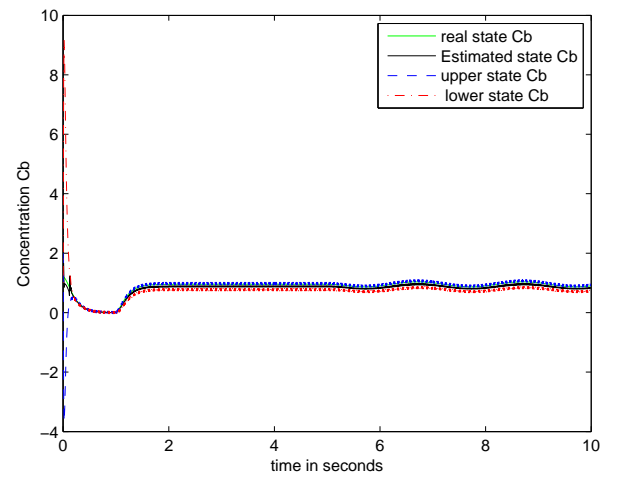


(d) entrée de commande

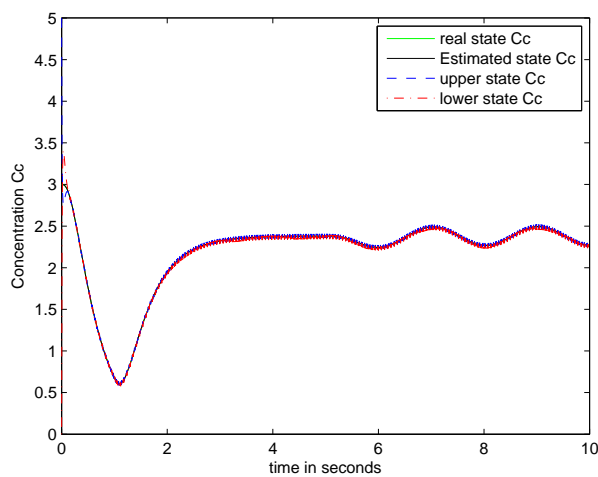
FIGURE 4.2: Estimation du bioprocédé linéaire avec $K_s = 3, v = 0.8 * \sin(\pi * t)$ and $\theta = 3$



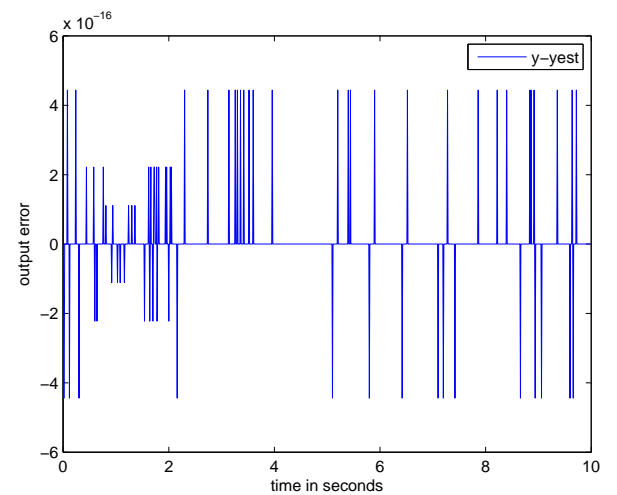
(a) Concentration Ca



(b) Concentration Cb



(c) Concentration Cc



(d) entrée de commande

FIGURE 4.3: Estimation du bioprocédé linéaire avec $K_s = 3, v = 0.8 * \sin(\pi * t)$ and $\theta = 8$

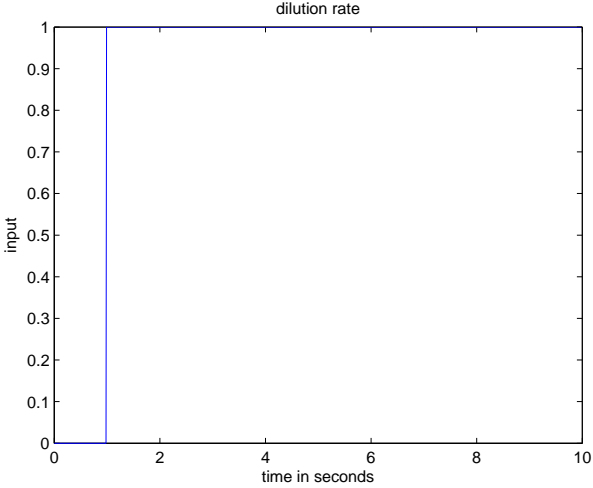


FIGURE 4.4: Entrée du système linéaire

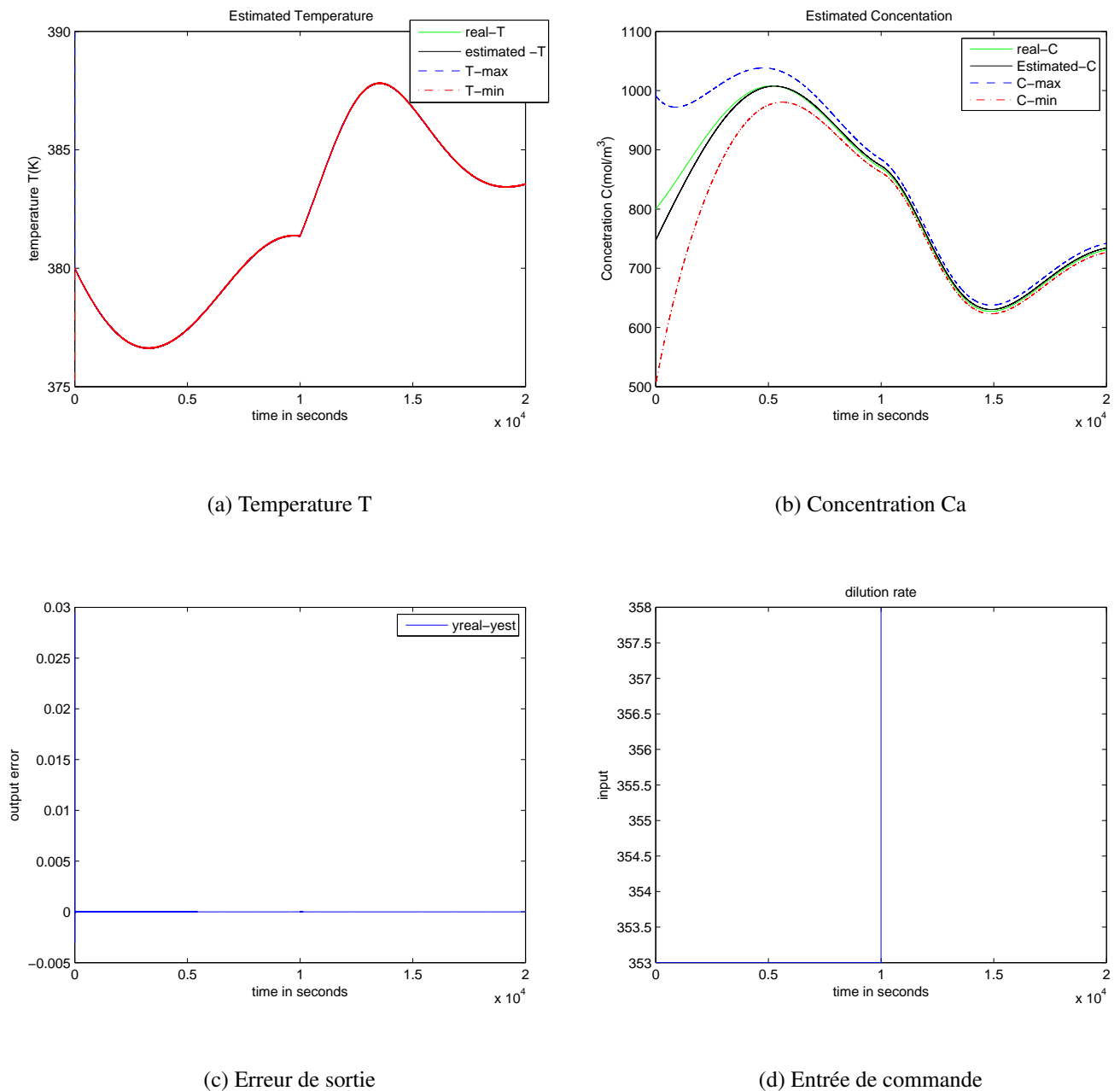
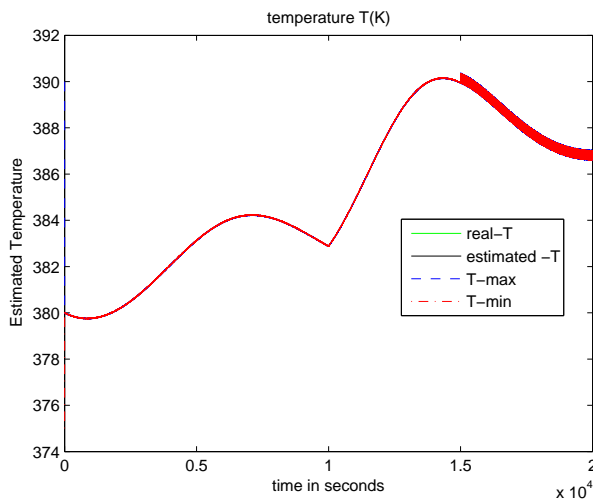
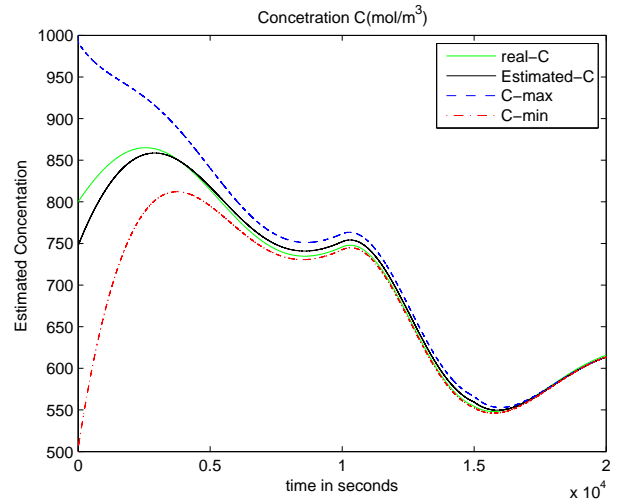


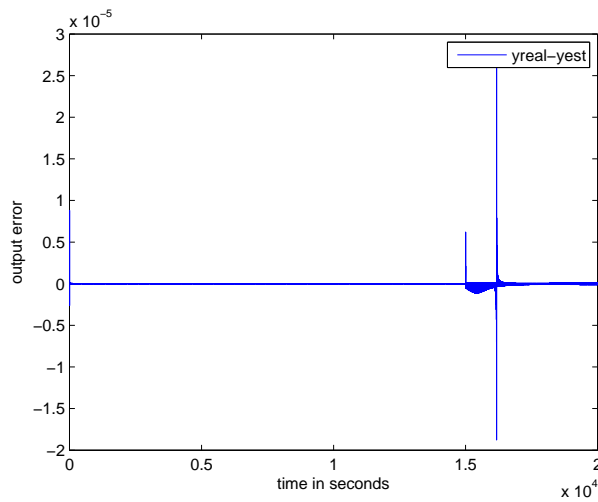
FIGURE 4.5: Estimation Bioprocédé Nonlinéaire avec $K_s = 3, v = 0$ and $\theta = 10000$



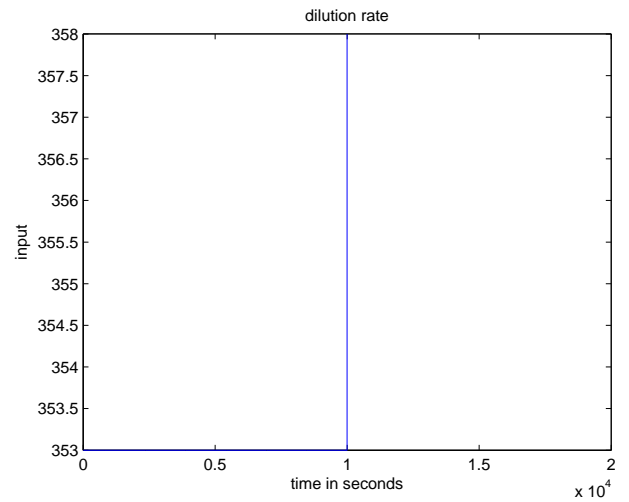
(a) Temperature T



(b) Concentration Ca

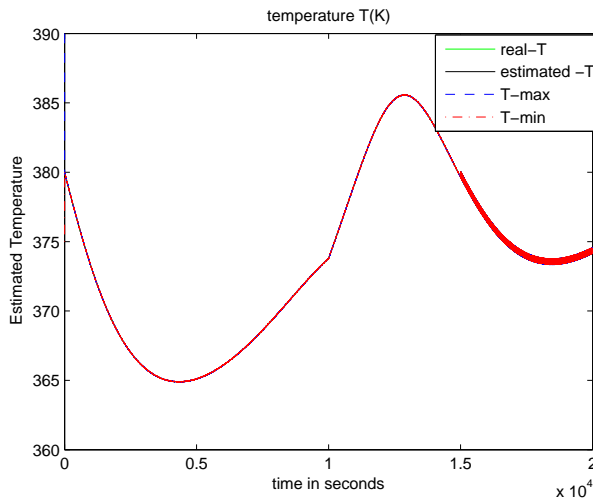


(c) Erreur de sortie

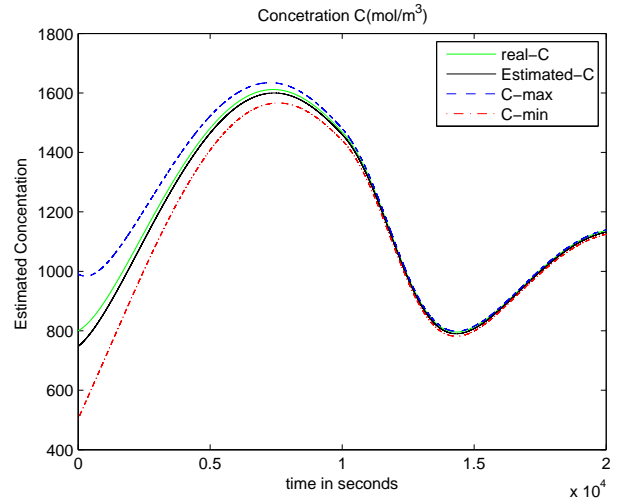


(d) Entrée de commande

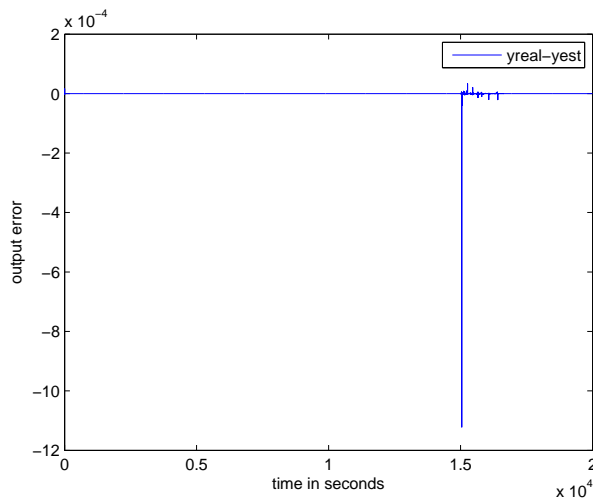
FIGURE 4.6: Estimation Bioprocédé Nonlinéaire avec $K_s = 3, v = 0.6 * \sin(\pi * t)$ and $\theta = 9000$



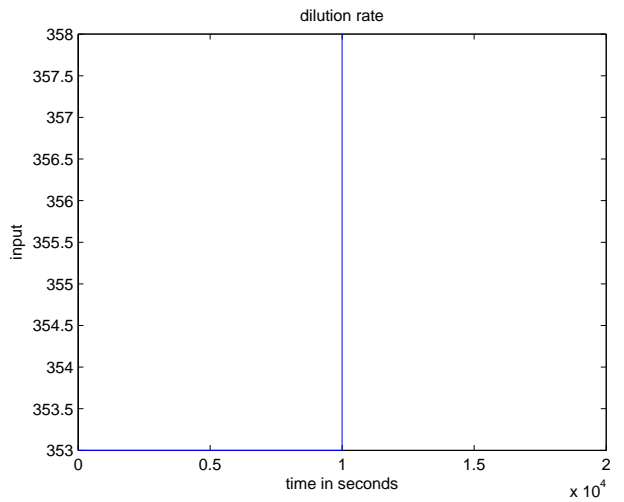
(a) Temperature T



(b) Concentration Ca



(c) Erreur de sortie



(d) Entrée de commande

FIGURE 4.7: Estimation Bioprocédé Nonlinéaire avec $K_s = 3, v = 0.6 * \sin(\pi * t)$ and $\theta = 14000$

www

Chapitre 5

Diagnostic et commande tolérante aux fautes à base de techniques intervalles

5.1 Introduction

Fondamentalement, les approches intervalles placent le diagnostic dans un contexte à erreurs bornées, où les incertitudes sont englobées par des ensembles compacts. Elles fournissent des ensembles compacts contenant toutes les valeurs des états compatibles avec le modèle du système et des incertitudes. Les techniques intervalles de diagnostic sont basées sur l'évaluation de la consistance entre l'ensemble des comportements attendus du système et les mesures prélevées à l'aide des capteurs. Cette consistance est souvent interprétée en terme d'appartenance des mesures aux domaines estimés ou observés en utilisant un modèle. L'objectif des procédures de diagnostic est de fournir des informations en ligne sur l'état du procédé. Ces dernières peuvent par exemple servir à reconfigurer la loi de commande. De par la complexité croissante des procédés et l'augmentation des éléments technologiques intégrés, les anomalies de fonctionnement imprévues peuvent avoir un impact inacceptable sur la mission et les objectifs assignés au système. Cette problématique générale couvre un spectre disciplinaire et interdisciplinaire très large et a fait l'objet de nombreux travaux au sein de la communauté scientifique. Pour garantir un fonctionnement sûr du système, une étape essentielle est la mise en oeuvre de fonctions de diagnostic et de commande tolérantes aux fautes fiables. L'enjeu est très important pour la

commande des systèmes tolérants aux défauts. La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation des notions de commande tolérante aux fautes. Après quelques définitions sur les terminologies employées dans le domaine des systèmes soumis à des défauts, les principaux concepts de systèmes tolérants aux fautes seront décrits. Cette partie se termine par une présentation d'une méthode de diagnostic et de commande tolérante aux fautes conventionnelle et ensembliste.

5.2 Systèmes tolérants aux défauts

La commande tolérante aux fautes permet au système de continuer sa mission en présence de défaut éventuellement avec des performances dégradées. Si le système en boucle fermée reste stable avec des performances acceptables, la commande est dite commande tolérante aux fautes (FTC). Souvent, ce type de système se compose de deux modules en cascade : un module de diagnostic et de détection de défauts et un module de commande tolérante aux fautes. Le principe général d'une boucle de commande tolérante aux fautes est expliqué par la figure (5.1)

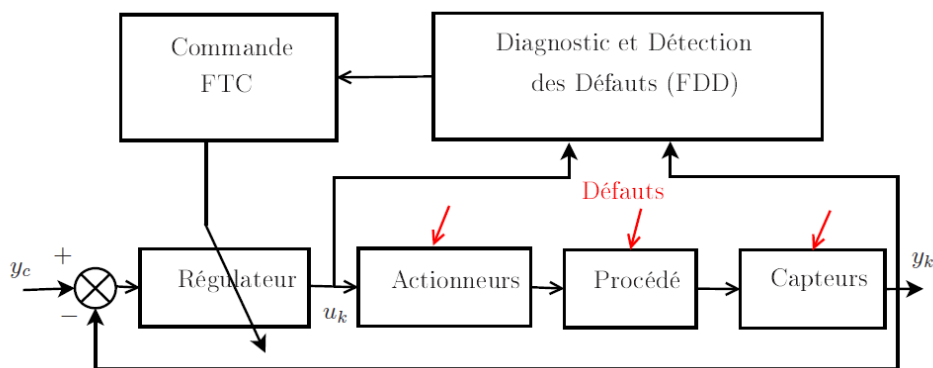


FIGURE 5.1: Principe d'une boucle de commande tolérante aux fautes.

5.2.1 Commande tolérante aux fautes

La commande tolérante aux fautes est un module qui assure un fonctionnement acceptable du système défectueux pour que ce dernier puisse atteindre ses objectifs. Généralement, ce module est aussi appelé accommodation de défaut ou reconfiguration de la commande.

5.2.1.1 Reconfiguration

La commande tolérante aux fautes basée sur la reconfiguration peut être considérée comme étant une commande à commutation. En effet, basée sur les informations des défauts données par le module de diagnostic, cette commande permet de reconfigurer la structure du régulateur pour maintenir un degré acceptable de tolérance aux fautes.

5.2.1.2 Accommodation

L'accommodation consiste en une modification des paramètres ou de la structure du régulateur pour éviter les conséquences d'un défaut. Les entrées et sorties entre le régulateur et le système restent inchangées. L'objectif initial de la commande est atteint même si les performances peuvent se dégrader.

5.3 Approches de commande tolérante aux fautes

5.3.1 Méthodes conventionnelles

La commande tolérante aux fautes est généralement composée de deux approches : passive et active. Les techniques FTC passives sont des lois de commande qui traitent les défauts comme de perturbations du système. Ainsi, dans certains cas, la loi de commande possède des capacités inhérentes de tolérance aux défauts, permettant au système de faire face à la présence de défaut. D'autre part, les techniques FTC actives compensent les défauts soit en utilisant une loi de commande précalculée, soit en synthétisant en ligne une nouvelle stratégie de commande. L'adaptation de la loi de commande se fait en utilisant certaines informations sur le défaut pour satisfaire les objectifs de commande avec une dégradation de performance minimale après l'occurrence de défauts.

5.3.1.1 Approches passives

Les systèmes FTC passifs sont basés sur des techniques de commande robuste. L'objectif principal de l'approche passive est de synthétiser un régulateur avec des paramètres fixes qui

rend le système en boucle fermée robuste à un ensemble connu de défauts sans utilisation d'informations en ligne sur les défauts. Basée sur la connaissance a priori des défauts, l'approche passive n'a besoin ni d'un module de diagnostic pour détecter la présence de défauts, ni d'un bloc de reconfiguration. Avec ce type de commande, le système altéré continue à fonctionner avec le même régulateur. Un schéma général d'un système de FTC passive est représenté sur la figure (5.2).

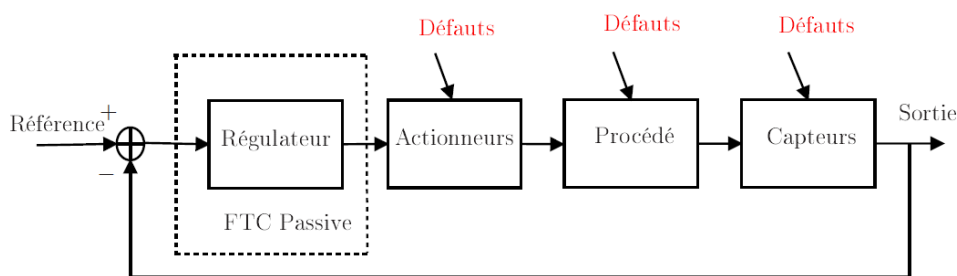


FIGURE 5.2: Principe d'un système de commande passive tolérante aux fautes.

5.3.1.2 Approches actives

Contrairement à l'approche passive, l'approche active de commande tolérante aux fautes (AFTC) utilise des techniques d'ajustement en ligne des régulateurs afin de maintenir, au moins, la stabilité du système et, au mieux, le comportement nominal. Un schéma global de FTC active est représenté par la figure (5.3). Les approches FTC actives sont classiquement caractérisées par un module de détection et de diagnostic de défauts en ligne (FDD) et un mécanisme de reconfiguration de commande. A partir des informations fournies par le module FDD, la reconfiguration permet de modifier la loi de commande ou la structure du régulateur. Sur la base de cette architecture, les objectifs de synthèse d'une FTC active sont : l'élaboration d'un schéma efficace de FDD pour fournir des informations sur les défauts et la reconfiguration du système de commande pour assurer la stabilité et des performances acceptables en boucle fermée. Plusieurs méthodes de AFTC ont été proposées dans la littérature, telles que la méthode de pseudo-inverse, placement de structure propre, régulateur à commutation, commande adaptative, commande prédictive, neuro-flou, approches par modèles de référence. Dans le paragraphe suivant, nous présenterons brièvement quelques unes de ces méthodes.

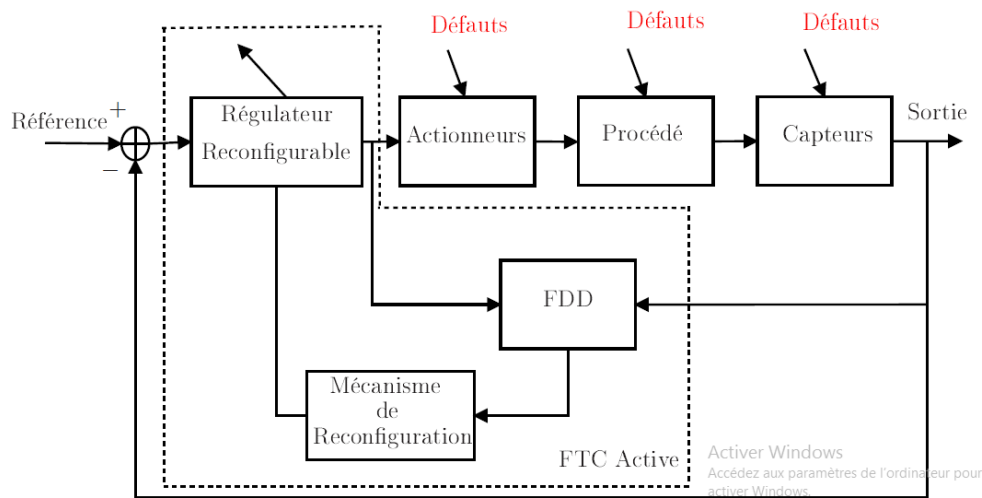


FIGURE 5.3: Principe d'un système de commande active tolérante aux fautes.

5.3.1.2.a Pseudo inverse

La méthode de pseudo-inverse (PIM) est l'une des plus citées en raison de sa simplicité de calcul et de sa capacité à gérer une très grande classe de défauts du système. La PIM considère un système linéaire nominal avec une loi de commande par retour d'état linéaire, sous l'hypothèse que le vecteur d'état est disponible. Elle permet une représentation générale du système défectueux où la nouvelle loi de commande reconfigurée est calculée avec la même structure. Le principe de la méthode de pseudo-inverse (PIM) est de modifier la matrice de gain de retour d'état dans la loi de commande de telle sorte que le système reconfiguré se rapproche approximativement du modèle nominal.

5.3.1.2.b Placement de structure propre

La méthode de placement de structure propre pour la reconfiguration de contrôleur est considérée comme étant une technique plus puissante que PIM. Le principe est de placer les valeurs propres du système en boucle fermée et leurs vecteurs propres associés, en utilisant des lois de commande par retour d'état, afin d'assurer les performances du système en boucle fermée. L'objectif principal est précisément de synthétiser une matrice de gain de retour d'état de sorte que les valeurs propres en boucle fermée du système reconfiguré soient équivalentes à celles du système nominal.

5.3.1.2.c Méthode par modèles de référence

Cette méthode est intéressante pour concevoir un régulateur en ligne. L'objectif est d'imiter les caractéristiques de performances du modèle de référence, avec ou sans défauts. Un avantage de l'utilisation de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas un schéma FDD. En outre, cette méthode a une capacité d'accommodation de défauts en ligne limitée en raison de la nécessité d'un modèle en défaut, ce qui introduit des difficultés pour traiter les incertitudes du modèle ([263]-[264]).

5.3.1.2.d Placement de pôles optimal

Le principe de cette méthode est de placer les valeurs propres du système en boucle fermée, en utilisant des lois de commande par retour d'état optimales (LQ), afin d'assurer les performances du système en boucle fermée [265].

5.4 Diagnostic par intervalles

Soit un système linéaire à temps invariant décrit par le système d'équations (5.1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + \theta B u(t) + D v(t) + F_1 \gamma(t) \\ y(t) = C x(t) + F_2 \gamma(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \gamma(t) \in$

Sous l'hypothèse que le système (5.1) satisfait les hypothèses 9 – 12 du chapitre 4. Alors, la structure d'un observateur intervalle à mode glissant pour le système (5.1) est décrite par :

$$\dot{w}(t) = A w(t) + \theta_w B u(t) + L(y - C w) + K_s(\text{sign}(y - C w)) + D v_{min} \quad (5.2a)$$

$$\dot{z}(t) = A z(t) + \theta_z B u(t) + L(y - C z) + K_s(\text{sign}(y - C z)) + D v_{max} \quad (5.2b)$$

Dans un contexte à erreurs bornées, l'observateur (5.2a-5.2b) fournit des valeurs minorante y_w et majorante y_z de la sortie. dans ce cas, la détection d'incohérence est effectuée par un test d'appartenance. En effet, l'estimation est incompatible avec les mesures si, à un instant t_i , on a :

$$y(t_i) \notin [y_w(t_i), y_z(t_i)] \quad (5.3)$$

où y représente le vecteur de sortie du système. Le test d'appartenance de l'équation (5.3) peut également se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 0 \notin [y_w(t), y_z(t)] - y(t) \\ 0 \notin [y_w(t) - y(t), y_z(t) - y(t)] \\ 0 \notin [r_{min}(t), r_{max}(t)] \\ 0 \notin [r(t)] \end{cases} \quad (5.4)$$

avec $r(t)$ est le vecteur des résidus.

5.4.1 Génération des résidus intervalles

Pour évaluer les résidus, on utilise l'observateur intervalle (5.2a-5.2b). La borne minimale du résidu $[r(t)]$ est donnée par : $r_{min}(t) = y_w(t) - y(t)$ où y_w est calculée à l'aide de l'observateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = (A - LC)w(t) + \theta_w B u(t) + Ly + K_s(\text{sign}(y - Cw)) + Dv_{min} \\ y_w(t) = Cw(t) \end{cases} \quad (5.5)$$

l'erreur d'observation minimale est définie par : $e_w(t) = w(t) - x(t)$.

La dynamique de la borne minimale du résidu est décrite par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_w(t) = (A - LC)e_w(t) + \lambda_w(t) - (F_1 - LF_2)\gamma(t) \\ r_{min}(t) = Ce_w(t) - F_2\gamma(t) \end{cases} \quad (5.6)$$

où : $\lambda_w(t) = \theta_w B u(t) - \theta B u(t) + Dv_{min} - Dv(t) + K_s(\text{sign}(y - Cw))$.

Afin de différencier les effets des incertitudes (perturbations et erreurs de modélisation) des effets des défauts, la représentation (5.6) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_{w_0}(t) = (A - LC)e_{w_0}(t) + \lambda_w(t) \\ r_{min_0}(t) = Ce_{w_0}(t) \\ \dot{e}_{w_f}(t) = (A - LC)e_{w_f}(t) - (F_1 - LF_2)\gamma(t) \\ r_{min_f}(t) = Ce_{w_f}(t) - F_2\gamma(t) \end{cases} \quad (5.7)$$

où $r_{min_0}(t)$ et $r_{min_f}(t)$ représentent respectivement les effets des incertitudes et des défauts sur la valeur minimale du résidu. Dans ce cas $r_{min_0}(t)$ peut être interprété comme un seuillage adaptatif, et un défaut est détecté via la borne inférieure $r_{min}(t)$ si :

$$r_{min}(t) \geq 0 \Leftrightarrow r_{min_0}(t) + r_{min_f}(t) \geq 0 \quad (5.8)$$

De la même façon, la borne maximale du résidu est donnée par : $r_{max}(t) = y_z(t) - y(t)$ où y_z est estimée par l'observateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (A - LC)z(t) + \theta_z B u(t) + Ly + K_s(\text{sign}(y - Cz)) + Dv_{min} \\ y_z(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (5.9)$$

l'erreur d'observation maximale est définie par : $e_z(t) = z(t) - x(t)$.

La dynamique de la borne maximale du résidu est décrite par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_z(t) = (A - LC)e_z(t) + \lambda_z(t) - (F_1 - LF_2)\gamma(t) \\ r_{max}(t) = Ce_z(t) - F_2\gamma(t) \end{cases} \quad (5.10)$$

où : $\lambda_z(t) = \theta_z B u(t) - \theta B u(t) + Dv_{max} - Dv(t) + K_s(\text{sign}(y - Cz))$.

Afin de différencier les effets des incertitudes (perturbations et erreurs de modélisation) des effets des défauts, la représentation (5.10) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_{z_0}(t) = (A - LC)e_{z_0}(t) + \lambda_z(t) \\ r_{max_0}(t) = Ce_{z_0}(t) \\ \dot{e}_{z_f}(t) = (A - LC)e_{z_f}(t) - (F_1 - LF_2)\gamma(t) \\ r_{max_f}(t) = Ce_{z_f}(t) - F_2\gamma(t) \end{cases} \quad (5.11)$$

où $r_{max_0}(t)$ et $r_{max_f}(t)$ représentent respectivement les effets des incertitudes et des défauts sur la valeur maximale du résidu. Dans ce cas $r_{max_0}(t)$ peut être interprété comme un seuillage adaptatif, et un défaut est détecté via la borne supérieure $r_{max}(t)$ si :

$$r_{max}(t) \leq 0 \Leftrightarrow r_{max_0}(t) + r_{max_f}(t) \leq 0 \quad (5.12)$$

En combinant les équations 5.7 et 5.11, on obtient le résidu intervalle qui s'écrit sous la forme :

$$[r(t)] = \begin{cases} [r_{min_0}(t), r_{max_0}(t)] & t < t_f \\ [r_{min_0}(t) + r_{min_f}(t), r_{max_0}(t) + r_{max_f}(t)] & t \geq t_f \end{cases} \quad (5.13)$$

où t_f est l'instant d'occurrence du défaut.

Les transformée de Laplace des signaux résidus $r_{min}(t)$ et $r_{max}(t)$ permet d'obtenir des transferts entre ces signaux et les défauts.

L'amplitude du défaut détectable par la borne inférieure du résidu $[r(t)]$ est donnée par :

$$\gamma_{min}(p) = (C(pI - A + LC)^{-1}(F_1 - LF_2) - F_2)^{-1}r_{min}(p) \quad (5.14)$$

et l'amplitude du défaut détectable par la borne supérieure du résidu $[r(t)]$ est donnée par :

$$\gamma_{max}(p) = (C(pI - A + LC)^{-1}(F_1 - LF_2) - F_2)^{-1}r_{max}(p) \quad (5.15)$$

Enfin, l'amplitude du défaut détectable par le résidu intervalle, tel que $0 \notin [r(t)]$, peut être définie par :

$$\hat{\gamma} = \max(|\gamma_{min}|, |\gamma_{max}|) \quad (5.16)$$

5.5 Stabilisation du système incertain

On considère le système linéaire incertain sans défauts décrit par l'équation (4.1).

La résolution du problème de stabilisation se fait en calculant une loi de commande stabilisante pour le système (5.2a-5.2b) au lieu du système incertain (4.1). En respectant les conditions d'existence de l'observateur intervalle, si les deux trajectoires minorante $w(t)$ et majorante $z(t)$ convergent vers zéro, alors l'état $x(t)$ converge également vers zéro. De même pour la bornitude de $x(t)$ qui est assurée par celle de $w(t)$ et de $z(t)$.

La loi de commande proposée est basée sur un retour d'état classique sous la forme :

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \quad (5.17)$$

avec :

$$\hat{x}(t) = \alpha w(t) + (1 - \alpha)z(t) \quad (5.18)$$

La substitution de la commande (5.17) dans (5.2a-5.2b) donne :

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Aw(t) - \theta_w B K(\alpha w(t) + (1 - \alpha)z(t)) + L(y - Cw) + K_s(\text{sign}(y - Cw)) + Dv_{min} \\ \dot{z}(t) = Az(t) - \theta_z B K(\alpha w(t) + (1 - \alpha)z(t)) + L(y - Cz) + K_s(\text{sign}(y - Cz)) + Dv_{max} \end{cases} \quad (5.19)$$

L'observateur intervalle (5.20) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = (A - LC - \theta_w B \alpha K)w(t) - \theta_w B(1 - \alpha)Kz(t) + Ly + K_s(\text{sign}(y - Cw)) + Dv_{min} \\ \dot{z}(t) = (A - LC - \theta_z B(1 - \alpha)K)z(t) - \theta_z B \alpha K w(t) + Ly + K_s(\text{sign}(y - Cz)) + Dv_{max} \end{cases} \quad (5.20)$$

Pour étudier la stabilité asymptotique du système (5.20), on introduit le système auxiliaire suivant :

$$\dot{\xi}(t) = G \xi(t) + \Lambda y(t) + \Phi + \kappa \quad (5.21)$$

$$\text{avec : } G = \begin{bmatrix} A - LC - \theta_w B \alpha K & -\theta_w B (1 - \alpha) K \\ -\theta_z B \alpha K & A - LC - \theta_z B (1 - \alpha) K \end{bmatrix}, \xi = \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} D v_{min} \\ D v_{max} \end{bmatrix},$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} K_s \text{sign}(y - C w) \\ K_s \text{sign}(y - C z) \end{bmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{bmatrix} L \\ L \end{bmatrix}$$

Soit la fonction de Lyapunov quadratique définie positive donnée par :

$$V = \xi^T P \xi \quad (5.22)$$

avec : P matrice symétrique définie positive, solution de l'équation de Lyapunov :

$$G^T P + P G + Q = 0 \quad (5.23)$$

où Q est une matrice symétrique définie positive.

La variation de la fonction de Lyapunov est décrite par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = \xi^T P \dot{\xi} + \dot{\xi}^T P \xi \\ = (G \xi(t) + \Lambda y(t) + \Phi + \kappa)^T P \xi + \xi^T P (G \xi(t) + \Lambda y(t) + \Phi + \kappa) \\ = \xi^T (P G + G^T P) \xi + 2 \xi^T P (\Lambda y(t) + \Phi + \kappa) \\ = -\xi^T Q \xi + 2 \xi^T P (\Lambda y(t) + \Phi + \kappa) \end{array} \right. \quad (5.24)$$

Sachant que : $|y| \leq 2|C| |\xi|$, $|\Lambda| \leq 2|L|$, $|\phi| \leq 2|D| (v_{min} + v_{max})$ et $|\kappa| \leq 2K_s$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} \leq -\lambda_{min}(Q) \|\xi\|^2 + 8\lambda_{max}(P) \|L\| \|C\| \|\xi\|^2 \\ \quad + 2\lambda_{max}(P) (2\|D\| (v_{min} + v_{max}) + 2K_s) \|\xi\| \\ \dot{V} \leq ((-\lambda_{min}(Q) + 8\lambda_{max}(P) \|L\| \|C\|) \|\xi\| \\ \quad + 2\lambda_{max}(P) (2\|D\| (v_{min} + v_{max}) + 2K_s)) \|\xi\| \end{array} \right. \quad (5.25)$$

$\dot{V} \leq 0$, ceci signifie que :

$$\|\xi\| \leq \frac{4\lambda_{max}(P) (\|D\| (v_{min} + v_{max}) + K_s)}{\lambda_{min}(Q) - 8\lambda_{max}(P) \|L\| \|C\|} \quad (5.26)$$

La variable d'état ξ est bornée, alors w et z restent bornées pour toute commande $u(t)$. Etant donné que toutes les conditions d'existence de l'observateur intervalle sont respectées, nous

avons $w(t) \leq x(t)$ pour tout $t \geq 0$, ce qui implique la bornitude et la convergence de $x(t)$. La stabilisation du système est garantie étant donné que l'observateur intervalle est sûr d'encadrer la trajectoire réelle du système original.

On peut aussi résoudre le problème de stabilisation en utilisant une autre approche qui consiste à réécrire l'observateur intervalle sous la forme d'une estimée moyenne $e_m(t) = \alpha w(t) + (1 - \alpha)z(t)$ et d'une incertitude $e_u(t) = z(t) - w(t)$. On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{e}_m(t) = (A - LC - (\alpha\theta_w + (1 - \alpha)\theta_z)BK)e_m(t) + Ly + K_s(\alpha \text{sign}(y - Cw) \\ \quad + (1 - \alpha)\text{sign}(y - Cz)) + D(\alpha v_{min} + (1 - \alpha)v_{max}) \\ \dot{e}_u(t) = (A - LC)e_u(t) + (\theta_z - \theta_w)BK e_m + K_s(\text{sign}(y - Cz) - \text{sign}(y - Cw)) \\ \quad + D(v_{max} - v_{min}) \end{cases} \quad (5.27)$$

Puisque les dynamiques des variables $e_m(t)$ et $e_u(t)$ sont découplées dans (5.27), alors il est possible d'analyser la stabilité de ces deux variables séparément (principe de séparation).

On considère la fonction de Lyapunov

$$V_u = e_u^T P_u e_u \quad (5.28)$$

où, P_u est une matrice symétrique définie positive, qui vérifie l'équation de Lyapunov :

$$(A - LC)^T P_u + P_u (A - LC) = -Q_u \quad (5.29)$$

avec, Q_u est une matrice symétrique définie positive.

La stabilité de la variable e_u est garantie par la condition : $\dot{V}_u < 0$

$$\begin{aligned} \dot{V}_u &= \dot{e}_u^T P_u e_u + e_u^T P_u \dot{e}_u \\ &= e_u^T ((A - LC)^T P_u + P_u (A - LC)) e_u \\ &\quad + 2e_u^T P_u (-(\theta_z - \theta_w)BK e_m + K_s(\text{sign}(y - Cz) - \text{sign}(y - Cw)) + D(v_{max} - v_{min})) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sachant que : $|y| \leq 2|C|(|e_m| + |e_u|)$, alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_u &< -\lambda_{min}(Q_u) \|e_u\|^2 + 2e_u^T P_u (-(\theta_z - \theta_w)BK e_m - K_s \text{sign}(C e_u) + D(v_{max} - v_{min})) \\ &< -\lambda_{min}(Q_u) \|e_u\|^2 - 2\lambda_{max}(P_u) K_s \|C\| \|e_u\| \\ &\quad + 2\lambda_{max}(P_u) \|e_u\| (\|(-(\theta_z - \theta_w)BK e_m + D(v_{max} - v_{min}))\|) \end{aligned} \quad (5.31)$$

$\dot{V}_u < 0$ si

$$\|e_m\| < \frac{K(\theta_z - \theta_w) \|B\|}{\|D\| (v_{max} - v_{min})} \quad (5.32)$$

La variable d'état e_m est bornée, donc elle est stable.

Ensuite, nous considérons la fonction de Lyapunov

$$V_m = e_m^T P_m e_m \quad (5.33)$$

où, P_m est une matrice symétrique définie positive, qui vérifie l'équation de Lyapunov :

$$(A - LC - (\alpha\theta_w + (1-\alpha)\theta_z)BK)^T P_m + P_m (A - LC - (\alpha\theta_w + (1-\alpha)\theta_z)BK) = -Q_m \quad (5.34)$$

avec, Q_m est une matrice symétrique définie positive.

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &= \dot{e}_m^T P_m e_m + e_m^T P_m \dot{e}_m \\ &= e_m^T ((A - LC - (\alpha\theta_w + (1-\alpha)\theta_z)BK)^T P_m + P_m (A - LC - (\alpha\theta_w + (1-\alpha)\theta_z)BK)) e_m \\ &\quad + 2e_m^T P_m (Ly + K_s(\alpha \text{sign}(y - Cw) - (1-\alpha) \text{sign}(y - Cz)) + D(\alpha v_{min} + (1-\alpha)v_{max})) \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &< -\lambda_{min}(Q_m) \|e_m\|^2 + 2e_m^T P_m (Ly + K_s \text{sign}(Ce_u) + D(\alpha v_{min} + (1-\alpha)v_{max})) \\ &< -\lambda_{min}(Q_m) \|e_m\|^2 + 2\lambda_{max}(P_m) \|e_m\| (\|Ly + K_s + D(\alpha v_{min} + (1-\alpha)v_{max})\|) \\ &< ((-\lambda_{min}(Q_m) + 4\lambda_{max}(P_m) \|C\|) \|e_m\| + 2\lambda_{max}(P_m) (2\|C\| \|e_u\| \\ &\quad + \|K_s\| + \|D\| (v_{min} + 2v_{max}))) \|e_m\| \end{aligned} \quad (5.36)$$

$\dot{V}_m < 0$ si

$$\|e_u\| < \frac{\lambda_{min}(Q_m) - 4\lambda_{max}(P_m) \|C\| \|e_m\| - 2\lambda_{max}(P_m) (\|K_s\| + \|D\| (v_{min} + 2v_{max}))}{4\lambda_{max}(P_m) \|C\|} \quad (5.37)$$

Sachant que la variable d'état e_m est bornée, alors la variable d'état e_u est aussi bornée.

Si les inéquations (5.32) et (5.37) sont vérifiées, alors les dynamiques des erreurs e_m et e_u sont asymptotiquement stables.

5.6 Compensation de défaut de type actionneur

Le système linéaire à temps invariant considéré est décrit par le système d'équations (5.38)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \theta Bu(t) + Dv(t) + F_1 \gamma_{act}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.38)$$

La loi de commande nominale est choisie sous la forme d'un retour d'état linéaire donné par l'équation suivante :

$$u_n(t) = -K(\alpha w + (1 - \alpha)z) \quad (5.39)$$

Où K est un gain de retour d'état.

En remplaçant la loi de commande nominale (5.39) dans le système d'équations (5.38), la représentation d'état en boucle fermée est obtenue sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + \theta B (-K(\alpha w + (1 - \alpha)z)) + D v(t) + F_1 \gamma_{act} \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (5.40)$$

On propose dans cette partie de calculer une loi de commande $u_{add}(t)$ à ajouter à la loi de commande nominale pour compenser l'effet des défaut dans le système. Alors, la loi de commande totale appliquée au système (5.38) est donnée par :

$$u(t) = u_n(t) + u_{add}(t) \quad (5.41)$$

Par conséquent, la représentation d'état en boucle fermée devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + \theta B (-K(\alpha w + (1 - \alpha)z) + u_{add}(t)) + D v(t) + F_1 \gamma_{act} \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (5.42)$$

La loi de commande additive $u_{add}(t)$ doit être calculée pour rendre le comportement du système défectueux aussi proche que possible de celui en mode nominal. En d'autres termes, $u_{add}(t)$ doit satisfaire l'équation suivante :

$$\theta B u_{add}(t) + F_1 \gamma_{act} \approx 0 \quad (5.43)$$

En utilisant les bornes supérieure et inférieure du paramètre incertain θ , la solution de (5.43) peut être obtenue par la relation suivante si la matrice B est de rang plein :

$$u_{add}(t) = -B^+ F_1 \frac{\hat{\gamma}_{act}}{\alpha \theta_w + (1 - \alpha) \theta_z} \quad (5.44)$$

avec B^+ est la matrice pseudo-inverse de B . et $\hat{\gamma}_{act}$ est le défaut actionneur estimé.

5.7 Application Numérique

Pour montrer la performance de l'approche précédente, on propose une application numérique. On considère le modèle dynamique du bioprocédé donné par le système d'équations

(4.52). Ce système est soumis à une perturbation $v(t)$ et un défaut actionneur de type additif γ_{act} , alors le système (4.52) peut être exprimé par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \theta BU(t) + Dv(t) + F_1\gamma_{act} \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.45)$$

avec : D et la matrice d'action de la perturbation et F_1 matrice d'action du défaut.

où $D = [1; 0; 0]$ et $F_1 = [1; 0; 0]$.

Pour un temps de simulation $t \in [0, 12]$ on prend :

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 5 \\ 1 + |0.5\sin(\pi t)| & \text{si } t \geq 5. \end{cases} \quad (5.46)$$

et :

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 7 \\ 2 & \text{si } t \geq 7. \end{cases} \quad (5.47)$$

On prend aussi : $\theta_w = 1, \theta_z = 10$ et $\theta = 5$.

Il est facile de vérifier que, pour $L = [-10 \quad -10 \quad 100]^T$, $K = [0.0069 \quad 0.0058 \quad 0.009]$ et $KS = 5$, les deux matrices $(A - LC)$ et $(A - LC - (\alpha\theta_w + (1 - \alpha)\theta_z)BK)$ sont stables et Metzler. Avec, $\alpha \in [0, 1]$.

Les résultats de simulations donnés sur la figure (5.4) illustre l'évolution des états du bioprocédé, de son observateur intervalle et de l'entrée de commande en absence de défauts. A l'instant $t = 5$ secondes, on perturbe le système par une perturbation $v(t)$, on remarque que la propriété de coopérativité est toujours sauvegardé en présence de cette perturbation.

La figure (5.5) illustre l'évolution des états du bioprocédé, de son observateur intervalle et du vecteur résidu avec injection d'un défaut dans le système à l'instant $t = 7$ secondes. A l'instant $t = 5$ secondes, on perturbe le système par une perturbation $v(t)$, on remarque que la propriété de coopérativité est sauvegardé après apparition de la perturbation. Mais après injection du défaut dans le système on perd cette propriété de coopérativité.

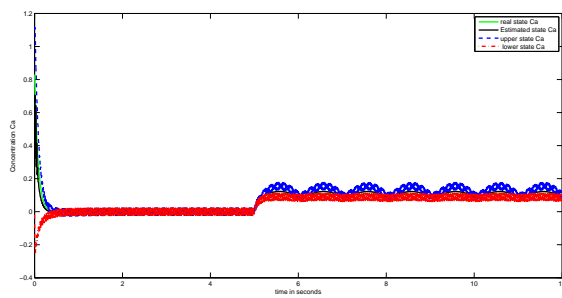
La figure (5.6) illustre l'évolution des états du bioprocédé et de l'entrée de commande en présence du défaut. A l'instant d'apparition du défaut, on reconfigure la loi de commande c.à.d on remplace la loi de commande par retour d'état classique par une commande tolérante aux défauts. Nous remarquons que la loi de commande proposée stabilise le système et le défaut est

presque compensé par cette nouvelle loi de commande. Nous remarquons aussi que la propriété de coopérativité est vérifiée.

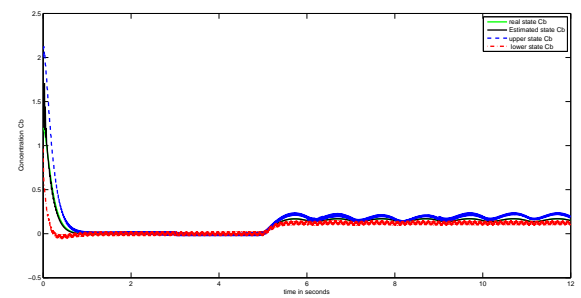
La figure (5.7) illustre l'évolution des états du bioprocédé et de son observateur intervalle après reconfiguration de la loi de commande. Nous remarquons que l'état du système incertain reste toujours borné par les limites de l'observateur malgré la présence du défaut, ceci implique que la propriété de coopérativité est vérifiée.

5.8 Conclusion

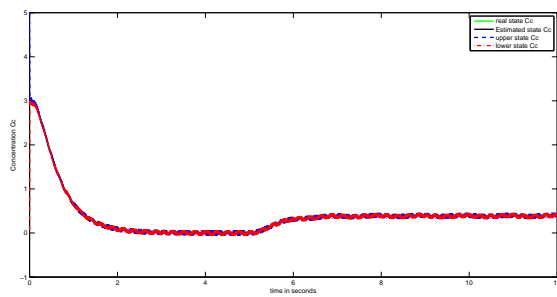
Dans ce chapitre, quelques résultats de la littérature portant sur la commande tolérante aux fautes ont été rappelés en premier lieu. Différentes méthodes de commande tolérante aux fautes ont été présentées dans le cas conventionnel. En second lieu, une stratégie de synthèse d'une méthode de diagnostic et de commande FTC basée sur l'observateur intervalle pour les systèmes linéaires incertains a été étudiée. La technique proposée est basée sur un retour d'état où un observateur intervalle est utilisé afin d'estimer les bornes inférieure et supérieure du vecteur d'état. Cette approche permet de transformer le problème stabilisation d'un système incertain en une stabilisation de deux systèmes ne comportant aucune incertitude. La commande est calculée en utilisant l'estimation moyenne des estimées supérieure et inférieure de l'observateur intervalle. Cette stratégie est illustrée sur le modèle linéaire d'un bioprocédé, et les résultats obtenus sont satisfaisants.



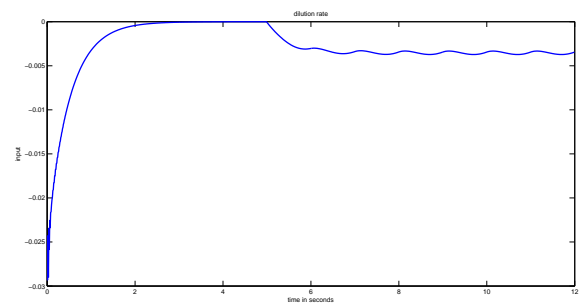
(a) Concentration Ca



(b) Concentration Cb

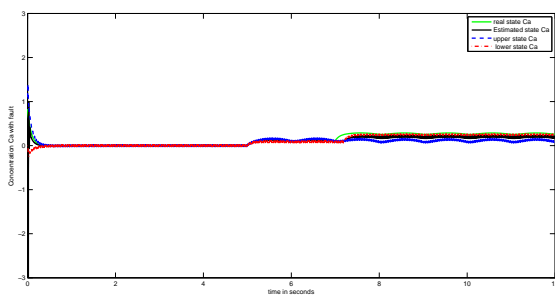


(c) Concentration Cc

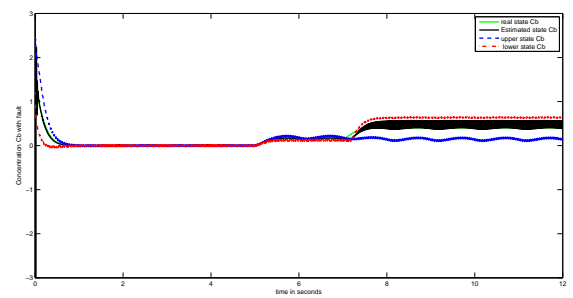


(d) entrée de commande

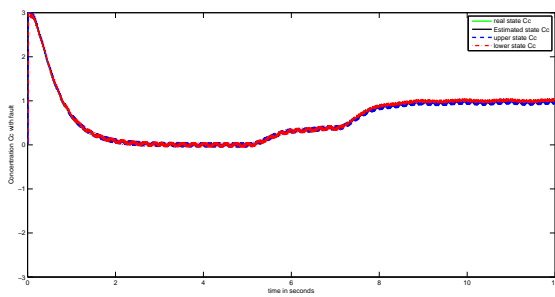
FIGURE 5.4: Evolution des états du bioprocédé et de l'observateur en absence de défauts



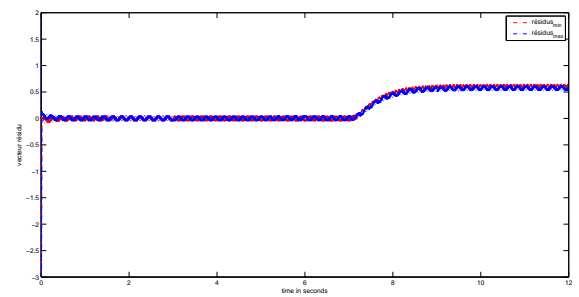
(a) Concentration Ca



(b) Concentration Cb

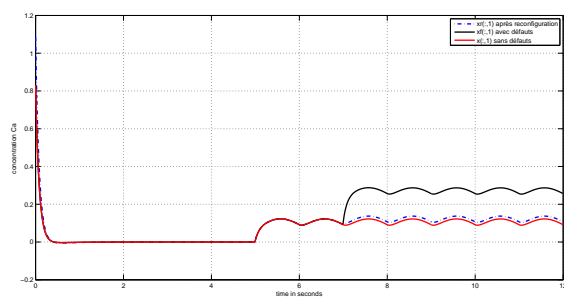


(c) Concentration Cc

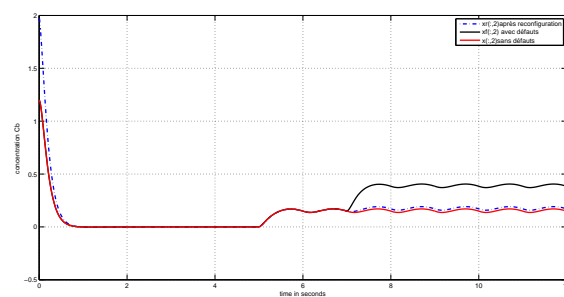


(d) vecteur résidus

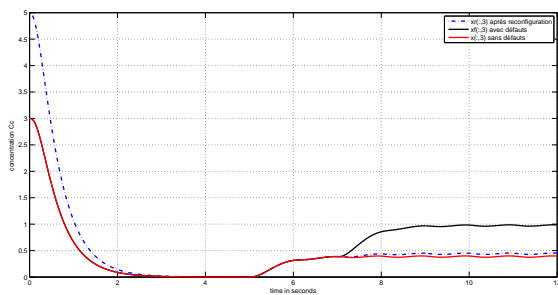
FIGURE 5.5: Evolution des états du bioprocédé et de l'observateur en présence de défauts



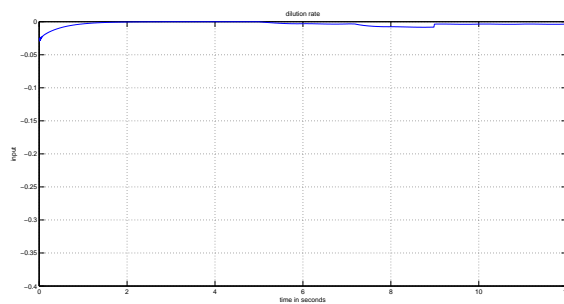
(a) Concentration Ca



(b) Concentration Cb

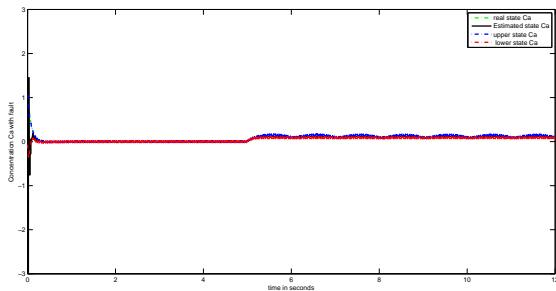


(c) Concentration Cc

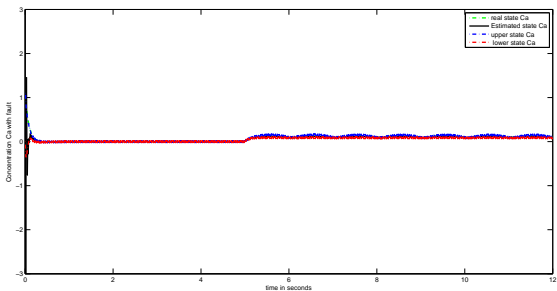


(d) entrée de commande

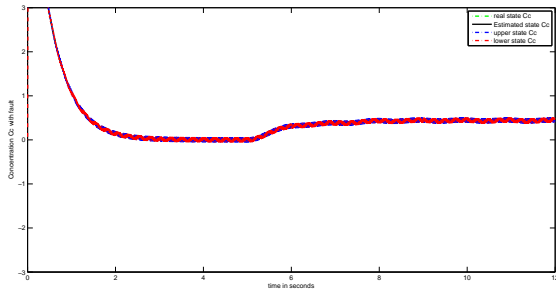
FIGURE 5.6: Evolution des états du bioprocédé en présence de défauts avec reconfiguration



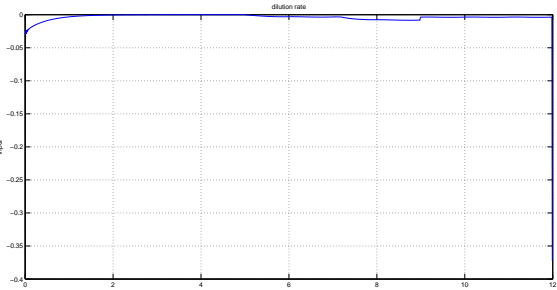
(a) Concentration Ca



(b) Concentration Cb



(c) Concentration Cc



(d) entrée de commande

FIGURE 5.7: Evolution des états du bioprocédé et de l'observateur après reconfiguration

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans le domaine de l'automatique, les méthodes de diagnostic à base de redondance analytique exploitent la connaissance d'un modèle du système physique à surveiller. La difficulté réside dans le fait que ce modèle est pris pour référence et qu'à partir du moment où les mesures prélevées sur le système ne sont plus cohérentes avec celui-ci, la présence d'un défaut est suspectée. Cependant, cette représentation mathématique se révèle en pratique approximative, d'où la difficulté de différencier un défaut des conséquences d'une erreur de modélisation. Dans ces conditions, plutôt que de construire des seuils de détection a priori, les erreurs de modélisation seront alors prise sous forme d'incertitudes paramétriques, pour ensuite pouvoir naturellement générer ces seuils. Le modèle incertain, est alors certes imprécis, mais reproduit un ensemble de comportements jugés admissibles, c'est-à-dire représentatifs du système lorsque celui-ci n'est affecté par aucun défaut. Quelle que soit la méthode sur laquelle repose la procédure de diagnostic, elle ne peut en aucun cas réduire l'imprécision du modèle ; de ce fait, les résultats feront nécessairement apparaître des non-détections. L'objectif de notre travail de thèse et de concevoir des méthodes robustes de diagnostic et de commande tolérante aux fautes. La robustesse est un enjeu permanent dans le domaine du diagnostic et de la commande. Les méthodes présentées dans cette thèse permettent de prendre en compte les diverses incertitudes du système et de ses entrées/sorties. La gestion des incertitudes peut se faire par l'intermédiaire de différents outils mathématiques. L'approche ensembliste et plus particulièrement l'analyse par intervalles fait figure de choix. Les différentes contraintes du modèle, telles que les dépendances entre les variables, les non-linéarités,...nécessitent l'utilisation d'outils d'évaluations des ensembles de solutions, permettant de gérer des formes plus ou moins complexes, tels que les polytopes, les ellipsoïdes, les zonotopes, les sous-pavés, etc. L'avantage de l'approche ensembliste par rapport

aux méthodes fonctionnant par découplage provient du fait que les incertitudes paramétriques sont considérées comme porteuses d'information plutôt que d'être purement rejetées. Modélisées sous forme de variables bornées, elles sont complètement intégrées dans le processus de génération de résidus et la réalisation des tests de cohérence.

Le fait que la représentation ensembliste soit moins riche que la représentation probabiliste, puisque seul le support des incertitudes est considéré, permet de traiter une plus grande classe de systèmes incertains. Il n'y a pas, en effet, à se préoccuper de la stabilité des lois de distribution, ni d'une quelconque hypothèse probabiliste sur la manière dont les paramètres incertains sont distribués. De plus, notons que la prise en compte des dépendances entre incertitudes est non seulement possible, mais vivement recommandée de manière à limiter le pessimisme des tests de cohérence en ce qui concerne nos objectifs de diagnostic.

La manipulation des modèles linéaires incertains bien que soumise aux contraintes du calcul par intervalles reste relativement aisée. En revanche, les systèmes non linéaires incertains sont beaucoup plus difficiles à gérer.

Après avoir présenté différents concepts de base qui sont utiles pour mener à bien ce travail de thèse. Nous avons vu que la littérature sur la thématique de l'observation d'état et le diagnostic à base d'observateurs est abondante. Ce sujet est encore un thème de recherche actif. Nous avons présenté dans une deuxième étape l'outil intervalle. Nous avons exploré les bénéfices apportés par l'arithmétique par intervalles, dont les propriétés ont été définies. De même, les inconvénients de cette approche ont été soulignés. L'effet de dépendance ainsi que l'effet d'enveloppement sont les principales contraintes de l'analyse par intervalles. Les dépendances entre les variables engendrent généralement le conservatisme des bornes, c.à.d, une surestimation de l'ensemble de solutions. Il est à noter que les systèmes positifs apparaissent souvent dans les problèmes de la vie réelle. C'est pourquoi l'étude des observateurs basés sur la théorie des systèmes dynamiques positifs attire toujours l'attention de beaucoup de chercheurs. A partir du prochain chapitre, nous allons commencer à présenter notre contribution dans ce domaine de recherche. Nous montrerons tout d'abord une nouvelle stratégie de construction d'observateurs intervalles (positifs) pour les systèmes linéaires et non linéaires. En suite l'essentiel de notre travail est consacrée à l'application de ces observateurs pour le diagnostic et la commande

tolérante aux fautes.

La première originalité de ce travail, est d'avoir proposée une nouvelle architecture d'observateurs ensemblistes alliant efficacement la puissance des méthodes ensemblistes pour gérer les incertitudes et l'avantage indéniable de la théorie des modes glissant. L'observateur intervalle présenté est constitué de deux observateurs à mode glissant d'ordre 1, l'un représente l'estimée supérieur du système incertain l'autre représente l'estimée inférieur pour le système incertain. La réunion de ces deux théories (mode glissant et analyse par intervalles) permet de maximiser les avantages et minimiser leurs inconvénients de cet observateur qui est particulièrement bien adapté pour prendre en compte les incertitudes paramétriques et de mesures de manière simple et efficace. La deuxième originalité de ce travail c'est le calcul d'un observateur moyen en utilisant l'estimée supérieur et l'estimée inférieur de l'observateur intervalle calculé. La robustesse de cet observateur par rapport aux perturbations et aux variations paramétriques a été démontrée et illustrées par des exemples. Par la suite nous avons appliqué cet observateur pour la détection de défauts, en réalisant de simples simulations. Nous avons pu étudier, tester et valider la robustesse de cette observateur pour la détection des défauts. Les résultats développés dans cette thèse ouvrent le chemin vers de futurs travaux. Ainsi nous pouvons envisager, par rapport aux résultats obtenus dans ce travail, les perspectives suivantes : - L'une des perspectives immédiate de notre travail est d'étendre cette nouvelle formulation pour les systèmes linéaires et non linéaires discrets. Dans ce travail, nous avons considéré que la structure des modèles continus pour les deux systèmes est linéaire et non linéaire.

- La prise en compte des erreurs de modélisation et des bruits de mesures : Dans notre étude, nous avons considéré uniquement les incertitudes sur l'entrée ainsi que la perturbation sur l'état. Ces problèmes sont très importants dans la pratique et devront être étudiés de façon précise. - Une autre perspective aussi importante est, l'étude du cas des défauts multiples.

Bibliographie

- [1] J. Chen, R.J. Patton, "Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems". Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [2] J. Gertler, "Fault detection and isolation using parity relations". Control Engineering Practice, 5(5), pp 653-661, 1997.
- [3] R. Isermann, "Process fault diagnosis based on modeling and estimation methods-A survey". Automatica, 20(4), pp 387-404, 1984.
- [4] R. Isermann, "Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods-an introduction". Control engineering practice, 5 : 639-652, 1997.
- [5] R.J. Patton, J. Chen, "A review of parity space approaches to fault diagnosis". In Proceedings of the 1st IFAC/IMACS Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS 1991), Baden-Baden, Germany, 1991.
- [6] R. E. Kalman, R.S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory". J. Basic. Eng, page 95-108, 1961.
- [7] D.G. Luenberger, "Observers for multivariable systems". IEEE Transactions on Automatic Control, 11 (2), pp. 190-197, 1966.
- [8] E.A. Garcia, P.M. Frank, "Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis : a survey". Control Eng. Practice, 5(5) :663-670, 1997.
- [9] H. Hammouri, M. Kinnaert, E. H. El Yaagoubi, "Observer-based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems". IEEE. Transactions on Automatic Control, 44 :1879-1884, 1999.

- [10] H. Nijmeijer, T. I. Fossen, "New Directions in nonlinear observer design". Springer-Verlag, London, 1999.
- [11] R. Sreedhar, B. Fernandez, G. Y. Masada, "Robust fault detection in nonlinear systems using sliding mode observers". Proceedings of the IEEE Conference on Control Application, pages 716721, 1993.
- [12] R. Martinez, J. J. Rincon, "fault reconstruction for nonlinear systems using sliding mode observers". IEEE conference on Decision and Control, New Orleans, 2007.
- [13] R. Sharma , M. Aldeen, "Design of Integral Sliding Mode Observers with Application to Fault and Unknown Input Reconstruction". IEEE Conference on Decision and Control. Shanghai, 2009.
- [14] X. Ding, P. Frank. "A frequency domain approach to fault detection of uncertain dynamic systems". In Proceedings of the 32th IEEE Conference on Decision and Control, pages 1722-1727. San Antonio, Texas, December, 1993.
- [15] B. Jiang, J. L. Wang, Y.C. Soh, "An adaptive technique for robust diagnosis of faults with independent effect on system outputs", Internal Journal of Control 75 : 792-802, 2002.
- [16] G. Besançon "On High Gain Observer Based Robust Fault Detection in Nonlinear Systems". IFAC Fault Detection. Supervision and Safety for Technical Processes, Budapest. Hungary, pp.219-224, 2000.
- [17] F. Xu, Q. Zhang, "Nonlinear systems fault diagnosis based on adaptive estimation". Automatica, 40(7) :1181-1193,2004.
- [18] R. Martinez-Guerra, S. et Diop, "Diagnosis of nonlinear systems using an unknown-input observer : an algebraic and differential approach", IEE Proc. Control Theory Appl., vol 151, no. 1, pages : 130-135, 2004.
- [19] A. H. Jazwinski, "Stochastic processes and filtering theory". Academic press, New York, 1974.
- [20] G. R. Grimmet, D. R. Stirzaker, "Probability and random processes". Oxford University Press Inc.,New York, 3rd edition,2001.

- [21] R.E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering, vol. 82, no. Series D, pages 3545, 1960.
- [22] R.E. Moore, "Methods and applications of interval analysis". Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1979.
- [23] A. Neumaier, "Interval methods for systems of equations". Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge, 1990.
- [24] R.E. Moore, "Interval analysis". Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- [25] S.P. Shary. "On optimal solution of interval linear equations". SIAM Journal on Numerical Analysis, 32 :610630, 1995.
- [26] E. Hansen, "Global optimization using interval analysis". Marcel Dekker, New York, 1992.
- [27] J. L. Gouzé, A. Rapaport, M. Z. Hadj-Sadok, "Interval observer for uncertain biological systems". Ecolog. Modell., 2000, vol. 133, pp. 46-56.
- [28] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, E. Walter, "Applied interval analysis : with examples in parameter and state estimation, robust control and robotics". Springer-Verlag : London, 2001.
- [29] L. Jaulin, "Nonlinear Bounded-Error State Estimation of Continuous-Time Systems". Automatica, 38(6) : 1079-1082, 2002.
- [30] T. Raissi, D. Efimov, A. Zolghadri, "Interval state estimation for a class of nonlinear systems". IEEE Trans. Automatic Control, 2012 ; 57(1) : 260-265.
- [31] T. Raissi, G. Videau, A. Zolghadri, "Interval observers design for consistency checks of nonlinear continuous-time system". Automatica, 2010 ; 46(3) : 518-527.
- [32] I.C. Chang, C.C. Yu, C.T. Liou, "Model-based approach for fault diagnosis. Part 2". Extension to interval systems Industrial Engineering Chemical Research, No 34, p 828-844, 1995.
- [33] S. Ploix. "Diagnostic des systèmes incertains : l'approche bornante". PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 1998.

- [34] O. Adrot, "Diagnostic à base de modèles incertains utilisant l'analyse par intervalles : l'approche bornante". PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2000.
- [35] C.T. Chen, "Linear System Theory and Design". Oxford University Press, 3rd Edition, 1999.
- [36] P. J. Antsaklis, A. N. Michel, "Linear System". McGraw-Hill Higher Education, 1997.
- [37] G. Besançon, "Nonlinear Observers and Applications". Springer, Oct 11, 2007.
- [38] G. Bornard, F. Celle-Couenne, G. Gilles, "Observabilité et observateurs", Systèmes non linéaires, T1, Modélisation-Estimation, p. 177-221, Masson, Paris, 1993.
- [39] E.W. Griffith, K.S.P. Kumar. "On the observability of non linear systems". I. J. Math. Anal., vol. 35, no. 135, pages 117-124, 1971.
- [40] S.R. Kou, D.L. Elliott, T.J Tarn, "Exponential observers for nonlinear dynamic systems". Information and Control, vol. 29, 1975.
- [41] J.P. Gauthier, G. Bornard, "Observability for any $u(t)$ of a Class of Nonlinear Systems". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 26 : pp. 922-926, 1981.
- [42] R. Hermann, A.J. Krener, "Nonlinear controllability and observability". In IEEE Transaction in Automatic Control, vol. 22, no. 5, 1977.
- [43] Y.Rochdi, "Identification des systèmes non linéaires blocs". Thèse de doctorat, univ. Caen (France),2006.
- [44] B.Benyahia, "Modélisation et observation des bioprocédés à membranes : Application à la digestion anaérobique". Thèse de doctorat préparée en cotutelle entre univ. Tlemcen (Algérie) et univ. Montpellier (France), 2012.
- [45] D. Luenberger. "Observing the State of a Linear System". IEEE Transactions on Military Electronics, vol. 8, pages 74-80, 1964.
- [46] D. Luenberger. "An introduction to observers". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 16, no. 6, pages 596-602, 1971.
- [47] R. E. Kalman, R.S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory". J. Basic. Eng, page 95-108, 1961.

- [48] A. Alessandri, A. Rossi, "Increasing-gain observers for nonlinear systems : Stability and design". *Automatica*, 57 :180-188,2015.
- [49] G. Besançon, "Further results on high gain observers for nonlinear systems. In Proc. 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona,1999.
- [50] G. Besançon, H. Hammouri, "On observer design for interconnected systems". *J. Math. Syst. Estim. Control*, 8 :125, 1998.
- [51] M. Fliess, C. Join, H. Sira-Ramirez, "Nonlinear estimation is easy". *Int. J. Model. Ident. Control*, 4 :12-27, 2008.
- [52] J. Gauthier, G. Bornard, "Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981 :922-926, 1991.
- [53] J. Gauthier, H. Hammouri, S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems : application to bioreactors". *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-37 :875-880, 1992.
- [54] J. Gauthier, I. Kupka, "Deterministic Observation Theory and Applications". Cambridge University Press, 2001.
- [55] H. Hammouri, G. Bornard, K. Busawon, "High gain observer for structured multi-output nonlinear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 :987-992,2010.
- [56] T. Ménard, E. Moulay, W. Perruquetti, "A global finite-time observers for nonlinear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 :1500-1506,2010.
- [57] Y. Shena, X. Xia, "Semi-global finite-time observers for nonlinear systems". *Automatica*, 44 :31523156, 2008.
- [58] H. Shim, Y.I. Son, J.H. Seo, "Semi-global observer for multi-output nonlinear systems". *Systems and Control Letters*, 42 :233244,2001.
- [59] M. Darouach, M. Zasadzinski, S. J. Xu, "Full-Order Observers for Linear Systems with Unknown Inputs". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 3, March 1994.
- [60] M. Darouach. "Complements to full order observer design for linear systems with unknown inputs". *Applied Mathematics Letters*, vol. 22, 2009.

- [61] Y. Guan, M. Saif, "A Novel Approach to the Design of Unknown Inputs Observers". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 36, no. 6, 1991.
- [62] F. Yang, R. W. Wilde, "Observers for linear systems with unknown inputs". IEEE Trans. on Aut. Control, AC-33 : 677-681, 1988.
- [63] R.E. Kalman. "A new approach to linear filtering and prediction problems". Journal of Fluids Engineering, 82(1) :35-45, 1960.
- [64] H. Hammouri, and G. Bornard. "A High Gain Observer for a Class of Uniformly Observable Systems". Proceedings of the Conference on Decision and Control, vol. 3 : pp. 1494-1496, 1991.
- [65] V.I. Utkin. "Sliding mode and their application in variable structure systems". IEEE Conference On Decision and Control, 1977.
- [66] V.I. Utkin, J. Guldner et J. Shi. "Sliding Mode Control in Electromechanical Systems". IEEE Conference On Decision and Control, vol. London, UK :Taylor Francis, 1999.
- [67] J.J.E. Slotine, J.K. Hedrick et E.A Misawa. "Nonlinear State Estimation using Sliding Observers". In Decision and Control, pages 332-339, Athen, Greece, 1986.
- [68] M. Boutayeb. "Synchronization and input recovery in digital non-linear systems". IEEE Trans. Circuits Syst. II :Express Brief, 51(8) :393399, 2004.
- [69] M. Boutayeb and D. Aubry. "A strong tracking extended Kalman observer for nonlinear discrete-time systems". IEEE Trans. on Automatic Control, 44(8) :1550-1556, 1999.
- [70] M.I. Ribeiro. "Kalman and extended kalman filters : Concept, derivation and properties". Institute for Systems and Robotics, page 43, 2004.
- [71] Zeitz, M., "The extended luenberger observer for nonlinear systems". Syst. Control Lett., 9(2) :149-156, 1987
- [72] Schmidt, S. F. Applications of state space methods to navigation problems. C. T. Leondes, editor, Advanced Control Systems, vol. 3, pp. 293-340, Academic Press, 1966.

- [73] G. Chen. "Approximate Kalman filtering". World Scientific series in approximations and decompositions, 1993.
- [74] K. Reif, F. Sonnemann, R. Unbehauen. "An EKF based nonlinear observer with a prescribed degree of stability". Automatica, 1998.
- [75] F. Deza, E. Busvelle, J. P. Gauthier, D. Rakotopara, "High-gain estimation for nonlinear systems". Systems and control letters, 18 :295-299, 1992.
- [76] F.E. Thau. "Observing the state of non-linear dynamic systems". International Journal of Control, vol. 17, 1973.
- [77] S. Raghavan, K. Hedrick, "Observer design for a class of nonlinear systems". International Journal of Control 59, 515-528, 1994.
- [78] R. Rajamani, Y.M. Cho, "Existence and design of observers for nonlinear systems : relation to distance to unobservability". International Journal of Control 69, 717-731, 1998.
- [79] J. Tsiniias, "Observer design for nonlinear systems". System and control letters 13, 135-142, 1989.
- [80] J. Tsiniias, "further results on the observer design problem". System and control letters 14, 411-418, 1990.
- [81] C. Edwards et S. Spurgeon, "Sliding mode control". Taylor and Francis (London), 1998.
- [82] A. F. Fillipov, "Differential equations with discontinuous right-hand side". American Mathematic Society Transactions 62, pp. 199-231, 1960.
- [83] S. V. Emelyanov, "Variable Structure Control Systems". Nauka, Moscow, 1967.
- [84] B. L. Walcott, M. Corless, S. Zak, "Comparative study of nonlinear observation techniques". International Journal of Control 45, 2109-2132, 1987.
- [85] B. L. Walcott, H. Zak, "State observation of nonlinear uncertain dynamical systems". International Journal of Control 32, 166-170, 1987.
- [86] J. J. E. Slotine, J. K. Hedrick, E.A. Misawa, "Nonlinear state estimation using sliding observers". 25th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 332-339, 1986

- [87] C. Canudas, J.J.E. Slotine, "Sliding observers for robot manipulators". *Automatica* 27(5), pp. 859-864, 1991.
- [88] C. Edwards, S.K. Spurgeon, R.J. Patton. "Sliding mode observers for fault detection and isolation". *Automatica*, 36(4) :541-553, 2000.
- [89] J. J. E. Slotine. "Sliding controller design for nonlinear systems". *International Journal of Control*, 40(2) :421-434, 1984.
- [90] J. J. E. Slotine, J.K. Hedrick, and E.A. Misawa. "On sliding observers for nonlinear systems". *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 109(3) :245-252, 1987.
- [91] H. Sira-Ramirez, "On the sliding mode control of nonlinear systems, " *Syst and Cont. Lett* 19. 303. 312. 1992.
- [92] V. I. Utkin, "Principles of identification using sliding regimes". *Soviet Trans. on Automatic Control*, Vol. 26, pp. 271-272, 1981.
- [93] B. L. Walcott, M. J. Corless et S. H. Zak, "Observation of dynamical systems in the presence of bounded nonlinearities/uncertainties". *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 961-966, 1986.
- [94] B. L. Walcott, S. H. Zak, "Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications". *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 18, pp. 88-104, 1988.
- [95] C. Edwards, S.K. Spurgeon, "On the development of discontinuous observers". *International Journal of Control*, Vol. 25, pp. 1211-1229, 1994.
- [96] T. Boukhobza, M. Djemai, J.P. Barbot, "Implicit triangular observer from dedicated to a sliding mode observer for system with unknown input". *Asian Journal of Control*, 5(4) :513527, 2003.
- [97] A.J. Koshkouei, A.S.I. Zinober, "Sliding mode state observation for non-linear systems". *International Journal of Control*, 77(2) :118127, 2004.
- [98] B. Nait Slimani, H. Oubabas, A. Triki, "Observation robuste d'un système non linéaire lipschitzien", The first national conference on electronics and new technologies (NCENT2015), M'sila, Algeria.

- [99] C. Kreisselmeier, "Adaptive observers with exponential rate of convergence". IEEE Transactions on Automatic Control 22,2-8, 1977.
- [100] G. Lüders, K. S. Narendra, "An adaptive observer and identifier for a linear system". IEEE Transactions on Automatic Control 18, 496-499, 1973.
- [101] X. Aiping, "Observateurs adaptatifs non-linéaires et diagnostic de pannes". Thèse de l'Université de Rennes 1, Septembre 2002.
- [102] G. Bastin, M. R. Gevers, "Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems". IEEE Transactions on Automatic Control, 33 :650-658, 1988.
- [103] G. Lüders, K. S. Narendra, "A new canonical form for an adaptive observer". IEEE Transactions on Automatic Control, 19 :117-119, 1974.
- [104] Q. Zhang, "Fault detection and isolation based on adaptive observers for nonlinear dynamic systems". Rapport technique 1261, IRISA, Rennes, France, 1999.
- [105] R. Marino. "Adaptive observers for single output nonlinear systems". IEEE Trans. on Automatic Control,35(9) : 1054-1058, 1990.
- [106] R. Marino, P. Tomei, "Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations". IEEE Trans. on Automatic Control, 37(8) :1239-1245, 1992.
- [107] R. Marino, P. Tomei, "Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems". IEEE Trans. on Automatic Control, 40(7) : 1300-1304, 1995.
- [108] Y. M. Cho, R. Rajamani, "A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems". IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 42, n°4, apr 1997, pp. 534-537.
- [109] G. Besançon, "Remarks on nonlinear adaptive observer design". Systems and Controls Letters, vol. 41, n° 4, 2000, pp. 271-280.
- [110] R. Rajamani, J. K. Hedrick. "Adaptive observers for active automotive suspensions : Theory and experiment". IEEE Trans. on Control Systems Technology, 3(1) :86-93,1995.

- [111] M. Bolajraf, M. Ait Rami, "A robust estimation approach for uncertain systems with perturbed measurements". *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016 ; 26(4) : 834-852.
- [112] N. Ellero, D. Gucik-Derigny, D. Henry, "Interval observer for Linear Time Invariant (LTI) uncertain systems with state and unknown input estimations". 12th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis, 2015, Pilsen, Czech Republic. Proceedings of ACD'2015.
- [113] G. Zheng, D. Efimov, W. Perruquetti, "Design of interval observer for a class of uncertain unobservable nonlinear systems". *Automatica*, 2016 ; 63 : 167-174.
- [114] D. Efimov, W. Perruquetti, J.-P. Richard, "Interval estimation for uncertain systems with time-varying delays". *International Journal of Control*, 2013 ; 86(10) : 1777-1787.
- [115] J. L. Gouzé, A. Rapaport, M. Z. Hadj-Sadok, "Interval observer for uncertain biological systems". *Ecolog. Modell.*, 2000, vol. 133, pp. 46-56.
- [116] M. Z. Hadj-Sadok, J. L. Gouzé, "Comparison between two interval observers for wastewater treatment models". *European Control Conference ECC99*, Karlsruhe (Germany), August 31- September 3, 1999.
- [117] G. "Zwingelstein, Diagnostic des défaillances-Théorie et pratique pour les systèmes industriels". *Traité des Nouvelles Technologies, série Diagnostic et Maintenance*, Hermès, Paris, 1995.
- [118] R. Isermann, P. Balle, "Trends in the Application of Model-Based Fault Detection and Diagnosis of Technical Processes". *Control Engineering Practice*, 5(5), pages : 709-719, 1997.
- [119] R. Isermann, P. Phalle, "Applied terminology of fault detection, supervision and safety for technical processes". *IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Process*, 2000.
- [120] G. J. J. Ducard, "Fault-tolerant Zight control and guidance systems : practical methods for small unmanned aerial". *Advances in Industrial Control*. Springer, 2009.

- [121] P. M. Frank, B. Köppen-Seliger, "New developments using AI in fault diagnosis". *Engineering. Applic. Artif. Intell.*, vol. 10(1), pages : 3-14, 1997.
- [122] V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, K. Yin, S. N. Kavuri, "A review of process fault detection and diagnosis". *Comp. Chemic.Engin.*, vol. 27, pp. 293-346, 2003.
- [123] R. Isermann, "Fault-diagnosis systems : an introduction form fault detection to fault tolerance". Springer,2006.
- [124] F. Sallem, "Détection et Isolation de Défauts Actionneurs Basées sur un Modèle de l'Organe de Commande". Thèse doctorat, Univ.ToulouseIII, France, 2013.
- [125] E.Y. Chow, A. S. Willsky, "Analytical redundancy and the design of robust failure detection system". In *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 29(7), pages : 603-614, 1984.
- [126] P.M. Frank, "The application of fuzzy logic to fault diagnosis and supervision". *LFA*, pages :59-87, 1998.
- [127] P.M. Frank, "Analytical and qualitative model-based fault diagnosis-a survey and some new results". *Eur. J. Control*, 2 :6-28, 1996.
- [128] L. H. Chiang, E. L. Russell, R. D. Braatz, "Fault detection and diagnosis in industrial systems". Springer, 2001.
- [129] K. Patan, "Artificial Neural Networks for the Modeling and Fault Diagnosis of Technical Processes". *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer, 2008.
- [130] R. V. Beard, "Failure Accommodation in Linear Systems Through Self Reorganization". PhD dissertation, MIT, Dep, Aero, Astro Cambridge, 1971.
- [131] R. N. Clark, D.C. Fosth et V. M. Walton. "Detecting instrument malfunctions in control systems". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-11(4), p.p 465-473, 1975.
- [132] P. M. Frank, Keller. "Sensitivity discriminating observer design for instrument failure detection". *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 16, 460-467., 1980.
- [133] M. Massoumnia. "A geometric approach to the synthesis of failure detection filters". *IEEE Trans. on Automatic Control* 31(9), p.p 839-846, 1986.

- [134] M. Massoumnia, G. Verghese et A. Willsky. "Failure detection and identification". IEEE Trans. on Automatic Control 34(3), p.p 316 -321, 1989.
- [135] Viswanadham et Srichander. "Fault detection using unknown input observers". Control Theory and Advanced Technology, Vol. 3, Issue2, pp. 91-101, 1987.
- [136] R. J Patton, P. Frank et R. N. Clark. "Fault diagnosis in dynamic systems : theory and application". Prentice Hall, Englewood international Series in systems and control Engineering new Jersey, 1989.
- [137] J. White et J. Speyer. "Detection filter design : Spectral theory and algorithms". IEEE Trans. on Automatic Control 32(7), p.p 593-603, 1987.
- [138] S. X. Ding. "Model-Based Fault Diagnosis Techniques Design Schemes, Algorithms". 2008.
- [139] C. Stephane. "Detecting changes in signals and systems a survey". Automatica, 24(3) :309-326, 1988.
- [140] Olin, Rizzoni. "Design of robust fault detection filters". ACC'91, American Control Conference, p.p 1522-1527, 1991.
- [141] P. M. Frank, "Fault Diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge based redundancy-A survey and some new results". automatica. Vol. 26. pp. 459-474, 1990.
- [142] P. M. Frank et R. Seliger. "Fault detection and isolation in automatic processes". C. Leondes, New York academic press, Ed., 49, p.p 241-287, 1991.
- [143] S. X. Ding, P. M. Frank, "A frequency domain approach to fault detection of uncertain dynamic systems". In Proceedings of the 32th IEEE Conference on Decision and Control, pages 1722-1727. San Antonio, Texas, December, 1993.
- [144] H. Zhang J. Chen R. Patton. "Design of unknown input observers and robust fault". 1996.
- [145] H.L. Jones. "Failure Detection in linear Systems". Thèse, Massachusetts, Institute of Technology, Cambridge ,MA, 1973.

- [146] H. Hammouri, M. Kinnaert, E. H. El Yaagoubi, "Observer-based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems". IEEE. Transactions on Automatic Control, 44 :1879-1884, 1999.
- [147] B. Larroque, "Observateurs de systèmes linéaires Application à la détection et localisation de fautes", thèse de doctorat, l'équipe de Production Automatisé du Laboratoire Génie de Production de l'Ecole Nationale de Tarbes, Toulouse, France, 2008.
- [148] P.M. Frank, S. X. Ding, "Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems". J. Process Control, 7 :403-424, 1997.
- [149] E. A. Garcia, P.M. Frank, "Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis : a survey". Control Eng. Practice, 5(5) :663-670, 1997.
- [150] J. J. Gertler, "Analytical redundancy methods in fault detection and isolation-survey and synthesis". IFAC symposium on online fault detection and supervision in the chemical process industries, 1992.
- [151] J. Chen, R.J. Patton, "Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems". Springer Science+Business Media, New York, 1999.
- [152] A. Edelmayer, J. Bokor, L. Keviczky, "An H_∞ filtering approach to fault detection of failures in dynamical systems". Proceedings of the 34th CDC. IEEE, USA, 1994.
- [153] A. Edelmayer, J. Bokor, L. Keviczky, " H_∞ detection filter design for linear system : Comparison of two approaches". Proceeding of the 13th IFAC. World Congress, USA, 1996.
- [154] D. Henry, A. Zolghadri, "Norm-based design of robust FDI schemes for uncertain systems under feedback control : Comparison of two approaches". Cont. Eng. Pract. (14), 1081-1097, 2006.
- [155] M. Staroswiecki, J.P. Cassar, V. Cocquenpot, "A general approach for multi-criteria optimisation for structured residual". TOOLDIAG 93, Toulouse, vol.2, 800-807, 1993.
- [156] S. X. Ding, T. Jeansch, P. M. Frank, E. L. Ding, "A unified approach to the optimisation of fault detection system". Int. J. Adapt. Control Signal Process, vol.14,

- 725-745,2000.
- [157] D. Hengy, P. M. Frank, "Component failure detection via nonlinear state observers". Kyoto, Japan, 1986, Proc. of IFAC Workshop on fault detection and safety in chemical plants, pp. 153-157.
- [158] P. M. Frank, "Fault diagnosis in dynamic system via state estimation -a survey-". Vol.1 Of System Fault Diagnosis, Reliability and Related Knowledge-based approaches, pp. 35-98, D.Reidel press, Dordrecht, 1987.
- [159] K. Adjallah, D. Maquin, J. Ragot, "Nonlinear observer based fault detection". Glasgow, Scotland, 1994, Proc. of the third conf. on control applications, pp. 1115-1120.
- [160] G. Besançon "On High Gain Observer Based Robust Fault Detection in Nonlinear Systems". IFAC Fault Detection. Supervision and Safety for Technical Processes, Budapest. Hungary, pp.219-224, 2000.
- [161] Y. Shen, "Fault diagnosis based on high-gain observer with an update law for a class of nonlinear systems". Journal of Control Theory and Applications, Vol. 8, Issue 4, pp 447-452, 2010.
- [162] S. Methnani, "Diagnostic, reconstruction et identification des défauts capteurs et actionneurs : application aux stations d'épurations des eaux usées". Thèse de doctorat, l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie, 2012.
- [163] C. P. Tan, C. Edwards, "Sliding mode observers for detection and reconstruction of sensor faults". Automatica, 38 :1815-1821, 2002.
- [164] X. G. Yan, C. Edwards, "Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding mode observer". Automatica, 43 :1605-1614, 2007.
- [165] X. G. Yan, C. Edwards, "Robust sliding mode observer-based actuator fault detection and isolation for a class of nonlinear systems". Int. J. Syst. Sci., 39(4) :349-359, 2008.
- [166] C. Edwards, S. K. Spurgeon. "A Sliding Mode Control : Theory and Applications". Taylor Francis,1998.
- [167] S. V. Drakunov, "Sliding mode observers based on equivalent control method,". IEEE Int. Conf. on Decision and Control, Tucson, Arizona, 1992.

- [168] S. Drakunov and V. I. Utkin, "Sliding Mode Observers : Tutorial,". Proc. of the 34th CDC conference, New Orleans (LA), 1995.
- [169] R.E. Moore, "Interval analysis". Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- [170] E. Hansen, "The centered form. In Topics in Interval analysis", Oxford Press, 1969, pp. 102-106.
- [171] R.E. Moore, "Methods and applications of interval analysis". Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1979.
- [172] A. Neumaier, "Interval methods for systems of equations". Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge, 1990.
- [173] E. Hansen, "Global optimization using interval analysis". Marcel Dekker, New York, 1992.
- [174] M. Milanese, J. Norton, H. Piet-Lahanier, E. Walter, "Bounding approaches to system identification". Plenum Press, New York and London, 1996.
- [175] M. Milanese, A. Vicino, "Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty : an overview". Automatica, 27(6) :997-1009, 1991.
- [176] I.C. Chang, C.C. Yu, C.T. Liou, "Model-based approach for fault diagnosis. Part 2". Extension to interval systems Industrial Engineering Chemical Research, No 34, p 828-844, 1995.
- [177] J. Ragot, A. Boukhris, D. Mandel, "A propos de l'algèbre des intervalles. Application à la validation de données". Rencontres Francophones sur la Logique Floue, Cépaduès Editions, LFA'97, Lyon (France), p 341-348, 1997.
- [178] L. Travé-Massuyés, P. Dague, F. Guerrin, "Le raisonnement qualitatif pour les sciences de l'ingénieur". Série Diagnostic et Maintenance, Hermès, Paris, 1997.
- [179] S. Ploix, "Diagnostic des systèmes incertains : l'approche bornante". Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 23 décembre, 1998.
- [180] A. Tzes, K. Le, "Fault detection for jump discrete systems". Proceedings of the American Control Conference, p 4496-4500, San Diego, (California, USA), June 1999.

- [181] J. Armengol, L. Travé-Massuyés, J. Vehi, M.A. Sainz, "Semi-qualitative simulation using modal interval analysis". 14th World Congress of International Federation of Automatic Control, IFAC Beijing99 (China), July 5-9, 1999.
- [182] J. Armengol, L. Travé-Massuyés, J. Vehi, J.L. De La Rosa, "A survey on interval model simulators and their properties related to fault detection". 14th World Congress of International Federation of Automatic Control, IFAC Beijing'99 (China), July 5-9, 1999.
- [183] J. Armengol, "Application of modal interval analysis to the simulation of the behaviour of dynamic systems with uncertain parameters". Thèse de l'Université de Girones, Novembre 1999.
- [184] J. Armengol, J. Vehi, L. Travé-Massuyés, M.A. Sainz, "Interval model-based fault detection using multiple sliding time windows". Proceedings of the IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Process, Budapest (Hungary), p 168-173, June 14-16, 2000.
- [185] V. Puig, J. Saludes, J. Quevedo, "A new algorithm for adaptive threshold generation in robust fault detection based on a sliding window and global optimization". European Control Conference ECC'99, Karlsruhe (Germany), 1999.
- [186] V. Puig, J. Quevedo, S. Tornil, "Robust fault detection : active versus passive approaches". Proceedings of the IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Process, Budapest (Hungary), p 155-161, June 14-16, 2000.
- [187] M.Z. Hadj-Sadok, J.L. Gouzé, "Bounds estimations for uncertain models of wastewater treatment". Proceedings of the 38th IEEE International Conference on Control Applications, Trieste (Italy), September 1-4, 1998.
- [188] A. Neumaier, "Taylor forms use and limits". *Reliable Computing*, 9(1), 43-79.
- [189] M. Kieffer, L. Jaulin, E. Walter, "Guaranteed recursive nonlinear state estimation using interval analysis". *Decision and Control*, 1998. Proc. of the 37th IEEE Conference on, 39663971.
- [190] L. Jaulin, E. Walter, "Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation". *Automatica*, 29(4), 1053-1064, 1993.

- [191] S. Tornil, V. Puig, T. Escobet, "Set computations with subpavings in MATLAB : The SCS Toolbox". *Computer-Aided Control System Design (CACSD)*, 2010 IEEE International Symposium on, 1403-1408.
- [192] D.L. Waltz, "Generating semantic description from drawings of scenes with shadows". Massachusetts Institute of Technology Cambridge, 1972.
- [193] J. Cleary, "Logical arithmetic". *Future Computing Systems*, 2(2), 125-149, 1987.
- [194] I. Braems, L. Jaulin, M. Kieffer, N. Ramdani, N., "Reliable parameter estimation in presence of uncertain variables that are not estimated". *Proceedings of SysId2003*, 1856-1861.
- [195] Benhamou, F., et Granvilliers, L. "Automatic generation of numerical redundancies for non-linear constraint solving". *Reliable Computing*, 3(3), 335-344, 1997.
- [196] T. Alamo, J.M. Bravo, E.F. Camacho. "Guaranteed state estimation by zonotopes". *Automatica*, 41(6) :1035-1043, 2005.
- [197] L. Chisci, A. Garulli, G. Zappa. "Recursive state bounding by parallelotopes". *Automatica*, 32(7) :1049-1055, 1996.
- [198] C. Combastel. "A state bounding observer based on zonotopes". *European Control Conference*, 2003.
- [199] A. Girard. "Reachability of uncertain linear systems using zonotopes". *Hybrid Systems : Computation and Control*, LNCS, 34(14) :291-305, 2005.
- [200] A. Kurzanskiy, P. Varaiya. "Ellipsoidal techniques for reachability analysis of discrete time linear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(1) :26-38, 2007.
- [201] D. Maksarov, J. Norton. "Computationally efficient algorithms for state estimation with ellipsoidal approximations". *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16(6) :411-434, 2002.
- [202] B. T. Polyak, S. A. Nazin, C. Durieu, and E. Walter. "Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty". *Automatica*, 40(7) :1171-1179, 2004.

- [203] J. L. Gouzé, M. Z. Hadj-Sadok. "Bounds estimations for uncertain models of waste water treatment". IEEE International Conference on Control Applications, 1 :336340, 1998.
- [204] O. Bernard, J.L. Gouzé. "Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models". Journal of Process Control, 14(7) :765-774, 2004.
- [205] M. Moisan, O. Bernard, J.L. Gouzé. "Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors". Automatica, 45(1) :291295, 2009.
- [206] V. Alcaraz-Gonzalez, "Robust nonlinear observers for bioprocesses : application to wastewater treatment". Dyn. and ctrl. of chem. and bio. processes lecture notes in control and information sciences : vol. 361,pp.119-164. Berlin : Springer-Verlag., 2007.
- [207] G. Goffaux, A. Vande Wouwer, O. Bernard. "Improving continuous discrete interval observers with application to microalgae-based bioprocesses". Journal of Process Control, 19 :1182-1190, 2009.
- [208] F Mazenc, O. Bernard. "Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances". Automatica, 47(1) :140-147, 2011.
- [209] F. Mazenc, S.-I. Niculescu, and O. Bernard. "Exponentially stable interval observers for linear systems with delay". SIAM J. Control Optim., 50 :286-305, 2012.
- [210] C. Combastel, S.A. Raka. "A stable interval observer for lti systems with no multiple poles". In 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, Aug. 28-Sept., 2, 2011.
- [211] M. Moisan, O. Bernard. "Robust interval observers for global lipschitz uncertain chaotic systems". Systems Control Letters, 59 :687-694, 2010.
- [212] T. Raissi, N. Ramdani, Y. Candau. "Bounded error moving horizon state estimation for non-linear continuous time systems : application to a bioprocess system". Journal of Process Control, 15 :537-545, 2005.
- [213] F. Mazenc, O. Bernard. "Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles". IEEE Transactions on Automatic Control, 55(2) :523-527, 2010.

- [214] V Alcaraz-Gonzalez, J. Harmand, A. Rapaport, J.P Steyer, V. Gonzalez-Alvarez, and C. Pelayo-Ortiz. "Software sensors for highly uncertain WWTPs : a new approach based on interval observers". *Water Research*, 36 :2515-2524, 2002.
- [215] R. Siski. "Introduction to congestion theory in telephone systems". Oliver and Boyd, London, 1960.
- [216] A. Takayama. "Mathematical Economics". Cambridge University Press, 1985.
- [217] W.W. Leontief. "Dynamic Analysis, in Studies in the structure of the American economy". Oxford University Press, New York, 1953.
- [218] L.F. Richardson. "Arms and Insecurity". Boxwood Press. Pittsbrugh Quadrangel Book, 1960.
- [219] O. Diekman, J.A.P. Heesterbeek. "Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and interpretation". Wiley, 1999.
- [220] G. Bastin, D. Dochain. "On-line Estimation and Adaptative Control of Bioreactors". Elsevier, 1990.
- [221] J.D. Murray. "Mathematical Biology". Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [222] R.A. Hibbs, L.G. James, and R.P. Cavalieri. "A furrow irrigation automation system utilizing adaptive control". *Transactions of the ASAE*, 35(3) :1063-1067, 1992.
- [223] J.P. Corriou. "Commande des Procédés". Lavoisier, Paris, 1996.
- [224] E. Kamke. "Zur theorie der systeme gewoknlicher differentialgliechungen". ii. *Acta Math*, 58 :57-85, 1932.
- [225] J.K. Hale. "Ordinary Differential Equations". *Pure and Applied Mathematics*, 1980.
- [226] M.W. Hirsch. "Systems of ordinary differential equations which are competitive or cooperative". *SIAM J. Math. Anal*, 13 :167-179, 1982.
- [227] M.W. Hirsch. "Systems of ordinary differential equations which are competitive or cooperative ii : convergence almost everywhere". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 11 :1-64, 1984.
- [228] M.W. Hirsch. "The dynamical systems approach to differential equations". *SIAM J. Math. Anal*, 16 :423-439, 1985.

- [229] H.L. Smith. "Monotone Dynamical Systems-An introduction to the theory of competitive and cooperative systems". American mathematical society, Providence, RI, 1995.
- [230] H.L Smith, P. Waltman. "Theory of the chemostat : dynamics of microbial competition". Cambridge University Press, 1995.
- [231] T. N. Dinh, "Observateur par intervalles et observateur positif". Thèse Doctorat, Univ. Paris-Sud, France, 2014.
- [232] J. O'Reilly, "Observers for Linear Systems", Academic Press : Mathematics Science and Engineering, London, 1983.
- [233] E. A. Misawa, J. K. Hedrick, "Nonlinear observers-a state-of-the-art survey". Journal of dynamic systems, measurement, and control, 1989 ; 111(3) :344-352.
- [234] D. Dochain, "State and parameter estimation in chemical and biochemical processes : a tutorial". Journal of Process Control, 2003 ; 13(8) :801-818.
- [235] F. Sauvage, D. Dochain, and M. Perrier, "State estimation within a guaranteed interval", Proceedings of the European Control Conference 2007, Kos, Greece, July 2-5.
- [236] F. L. Chernousko, "Ellipsoidal state estimation for dynamical systems". Nonlinear Analysis, 2005 ; 63(5-7) :872-879.
- [237] J. D. Murray, "Mathematical Biology Part I. An Introduction". 3rd Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [238] D. Gucik-Derigny, T. Raïssi, A. Zolghadri, "A note on interval observer design for unknown input estimation". International Journal of Control, 2016 ; 89(1) :25-37.
- [239] F. Cacace, A. Germani, and C. Manes, "A new approach to design interval observers for linear systems". IEEE Transactions on Automatic control, 2015.
- [240] C. Combastel, "Stable interval observers in C for linear systems with time-varying input ". IEEE Transactions on Automatic Control, 2013 ; 58(2) :481 -487.
- [241] M. Bolajraf, M. Ait Rami, "A robust estimation approach for uncertain systems with perturbed measurements". International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2016 ; 26(4) : 834-852.

- [242] R. E. H. Thabet, T. Raissi, C. Combastel, D. Efimov, and A. Zolghadri, "An effective method to interval observer design for time-varying systems". *Automatica*, 2014 ; 50(10) : 2677-2684.
- [243] D. Efimov, A. Polyakov, J. P. Richard, "Interval Observer Design for Estimation and Control of Time-Delay Descriptor Systems". *European Journal of Control*, Lavoisier, 2015 ; 23(5) :26-35.
- [244] F. Mazenc, O. Bernard, "ISS interval observers for nonlinear systems transformed into triangular systems". *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014 ; 24(7) : 1241-1261.
- [245] S. Chebotarev, D. Efimov, T. Raissi, A. Zolghadri, "Interval observers for continuous-time LPV systems with L1/L2 performance". *Automatica*, 2015 ; 58 : 82-89.
- [246] F. Mazenc, T. N. Dinh, S.I. Niculescu, "Robust interval observers and stabilization design for discrete-time systems with input and output". *Automatica*, 2013 ; 49 : 3490-3497.
- [247] D. Efimov, T. Raissi, W. Perruquetti, and A. Zolghadri, "Design of interval observers for estimation and stabilization of discrete-time LPV systems". *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Oxford University Press (OUP), 2015 : 1-16.
- [248] S. Drakunov, V. I. Utkin, "Sliding-mode observers : Tutorial". In *Proc.34th IEEE Conf. Decision Control*, 1995 : 3376-3378.
- [249] S. K. Spurgeon, "Sliding mode observers : A survey". *Int. J. Syst. Sci.*, 2008 ; 39(8) : 751-764.
- [250] D. Efimov, L. Fridman, "Global sliding-mode observer with adjusted gains for locally lipschitz systems". *Automatica*, 2011 ; 47(3) :565570.
- [251] A. Pisano, E. Usai, "Sliding mode control : a survey with applications in math". *Mathematics and Computers in Simulation*, 2011 ; 81 :954979.
- [252] G. Bartolini, L. Fridman, A. Pisano, E. Usai, "Modern Sliding Mode Control Theory : New Perspectives and Applications". 2008 ; 375 of *Lecture Notes in*

- Control and Information Sciences. Springer.
- [253] C. Edwards, S.K. Spurgeon and C.P. Tan, "On the Development and Application of Sliding-mode Observers in Variable Structure Systems : Towards the 21st Century". X.Yu and J.X. Xu, Springer-Verlag, 2002.
- [254] W. Perruquetti, J.P. Barbot, editors. "Sliding mode control in engineering". Marcel Dekker, 2002.
- [255] L. Senkel, A. Rauh, H. Aschemann, "Interval-Based Sliding Mode Observer Design for Nonlinear Systems with Bounded Measurement and Parameter Uncertainty". Proc. of IEEE Intl. Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR 2013, Miedzyzdroje, Poland, 2013.
- [256] D. Efimov, L. Fridman, T.Raissi, A.Zolghadri, R. Seydou. "Interval Estimation for LPV Systems Applying High Order Sliding Mode Techniques". Automatica, International Federation of Automatic Control, 2012, 48, pp.2365-2371.
- [257] J. Popiollek , "Some properties of function modul and signum". Journal of Formalized Mathematics, 1990 ; 1(2), March-April 1990.
- [258] K. Hryniewiecki , "Basic properties of real numbers". Journal of Formalized Mathematics,1990 ; 1(1) : 35-40.
- [259] W. Walter, "Differential inequalities and maximun principles : Theory, new methods and applications". Nonlinear analysis, Theory, Methods and Applications, 1997 ; 30(8) : 4695-4711.
- [260] H. Oubabas, S. Djennounea, M. Bettayeb, ""Interval sliding mode observer design for linear and nonlinear systems". Journal of Process Control 61 (2018) 1222.
- [261] A. M. Gibon-Fargeot, F. Cell- Couenne, H. Hammouri, "Cascade Estimation Design for CSTRS Models". Comp. and Chem. Eng. 24, 2355-2366,2000.
- [262] G. Bastin, "Modelisation et analyse des systèmes dynamiques". lectures notes, Louvain School of Engineering,2013, Belgium.
- [263] Y. Zhang,J. Jiang, "Design of restructurable active fault-tolerant control systems". IFAC Proceedings Volumes, 35(1) :101-106, 2002.

-
- [264] M. Bodson, J. E. Groszkiewicz, "Multivariable adaptive algorithms for reconfigurable flight control". IEEE transactions on control systems technology, 5(2) :217-229, 1997.
- [265] H. Oubabas, A. Hammouche, " Commande optimale tolérante aux défauts des systèmes non linéaires représentés par multimodèle". The first national conference on electronics and new technologies (NCENT2015), M'sila, Algeria.