

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI, TIZI-OUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

SPECIALITE: MATHEMATIQUES
OPTION: RECHERCHE OPERATIONNELLE

Présenté par:
Bellal Nacera
et
Boudjedaimi Kahina

Thème :

Sur les problèmes de contrôle optimal linéaires-quadratiques

Devant le jury d'examen composé de:

M. Aidene Mohamed;	Professeur;	U.M.M.T.O;	Président
M. Merakeb Abdelkader;	M. de Conférences;	U.M.M.T.O;	Rapporteur
M. Aouane Mohouhand;	M.A de classe A;	U.M.M.T.O;	Examineur

Soutenu le: 06/10/2014

Remerciements

Nous remercions d'abord et avant tout le bon Dieu tout puissant de nous avoir donné le courage et la force pour réaliser ce travail.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et nos plus sincères remerciements à notre promoteur M^r Merakeb pour avoir bien voulu nous encadrer pour la réalisation de ce modeste travail. Nous devons également le remercier pour sa disponibilité et ses précieux conseils tout au long de notre travail.

Nous remercions également les membres de Jury pour avoir accepté de juger notre travail.

Sans oublier tous les enseignants qui nous ont donné des connaissances tout au long de notre cursus, particulièrement ceux du département de mathématiques.

Nous voudrions remercier du fond du coeur toutes nos familles pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Comme nous remercions tous nos amis et camarades de la faculté des sciences.

Table des matières

Introduction	4
1 Généralités sur les équations différentielles	6
1.1 Introduction	6
1.2 Définitions fondamentales	6
1.3 Quelques types d'équations différentielles	7
1.3.1 Equations différentielles à variable séparable	7
1.3.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1	7
1.4 Problème de Cauchy	10
1.4.1 Existence et unicité de solution	10
1.5 Méthodes de résolution	11
1.5.1 Méthode d'Euler	11
1.5.2 Méthode de Runge-Kutta	12
1.6 Conclusion	16
2 La théorie du contrôle optimal	17
2.1 Introduction	17
2.2 Définitions essentielles	17
2.3 Position du problème de contrôle optimal	18
2.3.1 Problème de lagrange	19
2.3.2 Problème de Mayer	19
2.4 Systèmes de contrôle optimal linéaire	20
2.4.1 Ensemble accessible	21
2.5 La contrôlabilité des systèmes de contrôle optimal	21
2.5.1 Contrôlabilité des systèmes linéaire	21
2.6 Principe du Maximum	22

2.6.1	Principe du Maximum de Pontryaguine	23
2.7	Conclusion	26
3	Méthodes numériques en contrôle optimal	27
3.1	Introduction	27
3.2	Les méthodes indirectes	27
3.2.1	Méthode de Tir simple	27
3.3	Résolution d'un Problème aux deux bouts	28
3.3.1	Problème aux deux bouts	29
3.3.2	Problème à valeur initiale et méthode de tir	29
3.3.3	Rappels sur la méthode de Newton	34
3.4	Les méthodes directes	34
3.4.1	Discrétisation total: tir direct	34
3.5	Comparaison entre les méthodes directes et les méthodes indirectes .	37
3.6	Conclusion	38
4	La théorie linéaire-quadratique(LQ)	39
4.1	Introduction	39
4.2	Position du problème de contrôle optimal linéaire-quadratique	39
4.3	Existence de trajectoires optimales	41
4.4	Condition nécessaire et suffisante d'optimalité: Principe du Maxi- mum dans le cas LQ	42
4.5	Fonction valeur et équation de Riccati	43
4.5.1	Définition de la fonction valeur	43
4.5.2	Equation de Riccati	43
4.5.3	Représentation linéaire de l'équation de Riccati	44
4.6	Conclusion	45
5	Application de la théorie LQ	46
5.1	Application du Principe du Maximum	47
5.2	Fonction valeur et équation de Riccati	47
5.2.1	Fonction Valeur	47
5.2.2	Equation de Riccati	48
5.3	Conclusion	51

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	3
Conclusion	52
Bibliographie	53

Introduction générale

Du point de vu Mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'intersection de nombreux domaines de mathématiques. Le contrôle optimal linéaire-quadratique est une branche du contrôle optimal dans le cas où le système est linéaire et le coût est quadratique. L'initiateur de cette théorie est Kalman depuis 1960. Le problème de commande linéaire-quadratique a pris de l'importance dans le cadre de filtrage, où la commande LQ possède de très bonnes propriétés de robustesse.

L'objet de notre mémoire porte sur les problèmes de contrôle optimal linéaire-quadratique.

Ce présent travail est divisé en cinq chapitre, organisé de la manière suivante:

Chapitre1: Généralités sur les équations différentielles.

Chapitre2: La théorie du contrôle optimal.

Chapitre3: Les méthodes numériques en contrôle optimal.

Chapitre4: La théorie du contrôle optimal linéaire-quadratique (LQ).

Chapitre5: Application de la théorie LQ.

Dans la premier chapitre intitulé équations différentielles, nous avons procédé à la définition des équations différentielles de premier ordre, ainsi que quelques méthodes pour leurs résolution les plus utilisées, entre autres, la méthode d'Euler et la méthode de Runge Kutta.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux problèmes de contrôle optimal et nous présentons ici quelques notions de base entourant un problème de

contrôle optimal, la contrôlabilité des systèmes linéaires ainsi que le principe du maximum.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes numériques de résolution d'un problème de contrôle optimal notamment la méthode directe et la méthode de tir simple.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons la théorie du contrôle optimal linéaire-quadratique.

Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude d'une application de la théorie LQ sur le mouvement d'un véhicule régi par un système dynamique de second ordre.

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

1.1 Introduction

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise. Les équations différentielles sont utilisées pour résoudre des problèmes en physique et dans plusieurs autres disciplines scientifiques. Elles représentent un vaste champ d'étude aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

1.2 Définitions fondamentales

Définition 1.1. Soit $x = f(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle I . Supposons qu'elle soit dérivable jusqu'à l'ordre n au moins et que, en tout point t de I , il existe entre x et ses n premières dérivées une relation de la forme:

$$f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

Cette équation, dans laquelle la fonction $x = f(t)$ est considérée comme indéterminée est appelée équation différentielle d'ordre n .

Le cas particulier de (1.1) le plus usité est de la forme:

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

Où g est une fonction réelle.

Définition 1.2. $x = \varphi(t)$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et vérifiant (1,1) en tout point de l'intervalle I est appelée *solution* ou *intégrale* de cette équation.

Définition 1.3. Le graphe Γ d'une solution quelconque d'une équation différentielle est appelé *arc intégral* ou *courbe intégrale*.

Définition 1.4. (Problème de Cauchy)

Soit le problème suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t,x), & t \in [a,b]. \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \in [a,b]. \end{cases}$$

avec $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ce problème est appelé *problème de Cauchy* et (t_0, x_0) est appelée *condition initiale*.

1.3 Quelques types d'équations différentielles

1.3.1 Equations différentielles à variable séparable

On appelle une équation différentielle à variable séparée une équation de la forme:

$$\dot{x} = g(x)f(t)$$

L'équation différentielle s'écrit alors:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = g(x) \cdot f(t) \implies \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt;$$

En intégrant séparément chaque membre, on obtient:

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt \tag{1.2}$$

Exemple 1.1. soit $y' = y^2$ avec la condition initiale $y(1) = 1$ pour $y \neq 0$, on écrit $y'/y^2 = 1$, ce qui donne en intégrant

$$\frac{-1}{y} = x + c$$

la condition initiale impose $c = -2$ d'où la solution $y = \frac{1}{(2-x)}$ définie sur l'intervalle $] -\infty, 2[$.

1.3.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 sont de la forme:

$$a(t)x' + b(t)x = c(t) \tag{1.3}$$

Où $a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions de la variable réelle t , continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sur lequel la fonction $a(t)$ ne s'annule pas. On associe à l'équation différentielle (1.3), l'équation sans second membre:

$$a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{1.4}$$

(1.4) s'appelle aussi "équation différentielle homogène" associée à (1.3).

Les solutions de l'équation (1.4) sont données par:

$$t \longrightarrow k \exp \int \frac{b(t)}{a(t)} dt$$

Où k est une constante réelle quelconque.

On obtient les solutions de l'équation (1.3) en ajoutant une solution particulière de cette équation à la solution générale de l'équation homogène associée.

Théorème. *La solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (1.3) est la somme de l'intégrale générale de l'équation sans second membre (1.4) et d'une intégrale particulière de l'équation complète (1.3).*

Remarque 1.1. Certaines équations non linéaires se ramènent à des équations linéaires par changement de variables, c'est le cas par exemple des équations de *Bernoulli*:

$$\dot{x} = p(x)x + q(x)x^\alpha \tag{1.5}$$

$p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues.

Lorsque α vaut 0 ou 1 l'équation est linéaire.

Sinon en posant $y = x^{1-\alpha}$, on se ramène à l'équation linéaire suivante:

$$\frac{\dot{y}}{1-\alpha} = p(t)y + q(t)$$

C'est aussi le cas de l'équation de *Ricatti*:

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

On sait résoudre cette équation dès que l'on connaît une solution particulière $x_1(t)$, cela conduit à une équation de *Bernoulli* pour $\alpha = 2$.

En effet, il suffit de poser $x = x_1 + y$ et de le remplacer dans l'équation de *Ricatti*, pour montrer que la variable y vérifie l'équation de Bernoulli suivante:

$$\dot{y} = (2a(t)x_1(t) + b(t))y + a(t)y^2(t).$$

Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n et d'inconnue y est donc de la forme:

$$a_0y + a_1y' + a_2y'' + \dots + a_ny^{(n)} = a_{n+1}$$

Où $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$, sont des fonctions numériques.

Remarque 1.2. Les équations différentielles d'ordre n se ramènent à des systèmes d'équations d'ordre 1.

Soit : $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ une équation différentielle d'ordre n on pose:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_1 \\ x'(t) = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{(n-1)}(t) = x_n(t) \end{array} \right.$$

On aura alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_1 \\ x'_1(t) = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_{n-1}(t) = x_n(t) \end{array} \right.$$

de plus $x'_n(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$.

On peut écrire cela sous la forme vectorielle:

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix} = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Où $F : I \times R^n \longrightarrow R^n$.

D'où l'équation différentielle d'ordre n : $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ est équivalente à l'équation différentielle vectorielle d'ordre 1 suivante: $x'(t) = F(t, x(t))$

avec:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

On obtient $x'(t) = F(t, x(t))$

1.4 Problème de Cauchy

La résolution d'un problème de Cauchy consiste à trouver la solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO), scalaire ou vectorielle satisfaisante les conditions initiales. Par exemple, dans le cas scalaire, si I désigne un intervalle de \mathbb{R} contenant le point t_0 , le problème associé à une EDO de premier ordre permet de trouver une fonction réelle $x(t) \in C^1(I)$ solution du système:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in I, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

Où $f(t, x(t))$ est une fonction à valeurs réelles dans $I \times]-\infty, +\infty[$ et continue par rapport aux deux variables.

Si f ne dépend pas de t (i.e $f(t, x(t)) = f(x(t))$), l'équation est dite *autonôme*.

Théorème. (*Cauchy-Lipschitz*) Si f est une application de classe C^1 de $I \times \Omega$ dans \mathbb{R} alors, pour tout $t_0 \in I$ et $X_0 \in \Omega$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que le problème (1.6), admet une solution unique de classe C^1 dans un intervalle de la forme $]t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0[$ pour un $\epsilon_0 > 0$.

1.4.1 Existence et unicité de solution

Soit le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \in [a, b]; \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Résoudre ce problème consiste à déterminer un couple (φ, I) où I est un intervalle de \mathbb{R} contenant t_0 et φ une fonction dérivable de I . On obtient en intégrant l'équation différentielle de problème de Cauchy entre t_0 et t et tenant compte de la condition $x(t_0) = x_0$, on obtient:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds;$$

De plus, si f est une fonction continue dans $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ vérifie la condition de lipschitz de rapport $K \in [0, \infty]$ suivante:

$$\forall t \in [a,b], \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n, \\ \|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq K \|x_2 - x_1\|$$

alors le problème avec la condition initiale (t_0, x_0) admet $\varphi(t)$ comme solution unique dans $[a,b]$.

Définition 1.5. Soit $\dot{x} = f(t, x)$ et $(t, x) \in \Omega$ (ouvert) une équation différentielle sous forme normale et $m_0(t_0, x_0)$ un point quelconque de Ω .

On dit que m_0 est un point d'unicité *global* ou simplement un point d'unicité, s'il existe une solution maximale et une seule de l'équation donnée qui passe par m_0 .

On dit que m_0 est un point d'unicité *locale* si on peut lui associé un intervalle ouvert I contenant x_0 de telle manière que, parmi les solutions de l'équation, il existe une et une seule qui soit définie sur I et qui passe par m_0 .

1.5 Méthodes de résolution

1.5.1 Méthode d'Euler

Cette méthode, la plus ancienne et la plus simple, possède également un intérêt théorique puisqu'elle permet de prouver un résultat d'existence de solutions sous des hypothèses plus faibles que le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \\ y(t_0) = y_0; \end{cases} \tag{1.7}$$

Nous donnerons une subdivision de l'intervalle $[0, T]$ comme suit:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T$$

et posons:

$$h_n = t_{n+1} - t_n; \quad h = \max h_n; \quad 0 \leq n \leq N.$$

La solution de (1.7) vérifie pour $0 \leq n \leq N$:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds$$

On construit par récurrence une approximation y_n et $y(t_n)$ en remplaçant la relation précédente par :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n); \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (1.8)$$

Ce qui revient à approcher, pour $s \in]t_n, t_{n+1}[$, $f(s, y(s))$ par $f(t_n, y_n)$.

Le schéma défini par (1.8) s'appelle schéma d'Euler.

En Matlab, on peut programmer la méthode d'Euler avec la fonction suivante:

```

1: fonction[t,y] = Euler(f,tmin,tmax,Nint,y0) % Méthode d'Euler.
   %Nint: nombre de sous intervalles N
   %tmin: temps t0
   %tmax: temps t0 + T
   %f est une fonction avec les arguments t et y(t): f(t,y(t))
   %y0 à l'entrée est composé des valeurs des conditions limites y0 = y(t0)
2: h = (tmax-tmin)/Nint %valeur du pas
3: t = linspace(tmin,tmax,Nint + 1) %vecteur de t discrétisé t = [tmin,tmax]
4: y(1) = y0; % initialisation : y(1) = y(t0) = y0
5: for n = 2: Nint + 1
6: y(n) = y(n - 1) + h * feval(f,t(n - 1),y(n - 1)); % Calcul d'Euler
7: end
8: end %fonction Euler

```

1.5.2 Méthode de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielles. Elles ont été nommées ainsi en l'honneur des mathématiciens Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta qui ont élaboré la méthode en 1901 et ont proposé en 1895 de résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y); \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

En introduisant le schéma numérique suivant:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h; \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot \phi(x_i, y_i, h_i). \end{cases}$$

Où la fonction d'incrémentation ϕ est une approximation de $f(x,y)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Supposons un entier r , une matrice A carrée d'ordre r dont les éléments triangulaires supérieurs sont nuls y compris la diagonale, et un vecteur $b = b_1, b_2 \dots b_r$.

l'algorithme de Runge -Kutta est le suivant:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot (b_1 k_1 + \dots + b_r k_r); \\ x_{i+1} = x_i + h; \\ k_j = f(x_i + c_j h, y_i + h \cdot (a_{j1} k_1 + \dots + g_r k_r)). \end{cases}$$

Le vecteur b vérifie

$$b_1 + b_2 \dots + b_r = 1.$$

les coefficients c_j sont les sommes des éléments de la ligne j de la matrice A .

Dans ces méthodes le pas h peut facilement varier. Une méthode de Runge-kutta est entièrement déterminé par la donnée de l'entier r , de vecteur b et de matrice A .

Méthode d'ordre 1 ($r = 1$)

pour $b = 1, a_{11} = 0$, l'algorithme $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$, se réduit à la méthode d'Euler.

Méthode d'ordre 2 ($r = 2$)

pour déterminer toutes les méthodes d'ordre 2, cherchons une fonction ϕ de la forme:

$$\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2.$$

où les coefficients k_1 et k_2 sont donnés par:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i); \\ k_2 = f(x_i + ch, y_i + ahk_1). \end{cases}$$

Développons y_{i+1} au voisinage du point (x_i, y_i) ;

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y_i) = \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + f(x_i, y(x_i)) \right] \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)).$$

Développons de même k_2 au voisinage du point (x_i, y_i) .

$$y_{i+1} = y_i + hb_1 k_1 + hb_2 [f(x_i, y_i) + hc \left[\frac{\partial f}{\partial x} + ahf(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \right]] + o(h^2)$$

En identifiant les deux expressions on obtient:

$$\begin{cases} y(x_i) = y_i; \\ f(x_i, y_i) = (b_1 + b_2)f(x_i, y_i); \\ 1/2f'_x + 1/2f'_y f = b_2(cf'_x + af'_y f). \end{cases}$$

On déduit que $b_1 + b_2 = 1$, $b_2c = b_2a = 1/2$.

Soit en posant $b_2 = \theta$, $b_1 = 1 - \theta$ et $c = a = 1/2$, on retrouve les trois cas standards: la méthode d'Euler s'obtient pour $\theta = 0$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i);$$

la méthode de Heun (Euler-Cauchy) est obtenue pour $\theta = 1/2$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(k_1 + k_2)/2; \\ k_1 = f(x_i, y_i); \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1). \end{cases}$$

la méthode de Runge-Kutta (proprement dite) est obtenue pour $\theta = 1$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hk_1; \\ k_2 = f(x_i, y_i); \\ k_3 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1). \end{cases}$$

Algorithme Runge-Kutta d'ordre 3 (r = 3)

Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 3 correspond au cas $b=(1/6, 2/3, 1/6)$, et la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme effectue à chaque pas le calcul de trois facteurs k_i .

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6; \\ k_1 = f(x_i, y_i); \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2); \\ k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2). \end{cases}$$

Algorithme Runge-Kutta d'ordre 4 (r = 4)

1. Etant donné un pas de temps h , une condition initiale (x_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N

2. pour $0 \leq i \leq N$.

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$x_{i+1} = x_i + h$ Écrire x_{i+1} et y_{i+1} .

3. l'opération ce termine quand $i + 1 = N$.

Remarque 1.3. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est très fréquemment utilisée car elle nous permet d'obtenir des résultats d'une grande précision. En effet plus l'ordre d'une méthode est élevé, plus elle devient plus précise.

Une façon de programmer la méthode Runge Kutta d'ordre 2 est la suivante:

```

1: fonction[t,y] = RK2(f,tmin,tmax,Nint,y0) % Méthode de Runge Kutta d'ordre
2
   %Nint:nombre de sous intervalles
   % tmin: temps  $t_0$ 
   % tmax: temps  $t_0 + T$ 
   %  $f$  est une fonction avec arguments  $t$  et  $y : f(t,y(t))$ 
   %  $y_0$  contient les valeurs des conditions limites
2:  $h = (tmax - tmin)/Nint;$  % valeur du pas
3:  $t = linspace(tmin,tmax,Nint + 1);$  %vecteur de  $t$  discrétisé  $t = [tmin,tmax]$ 
4:  $y(1) = y_0;$  %  $y$  contient les solutions de  $y(t_n)_{n = 1, \dots, Nint + 1}$ 
5: for  $n = 2 : Nint + 1$ 
6:  $k1 = h * feval(f,t(n - 1),y(n - 1));$ 
7:  $k2 = h * feval(f,t(n - 1) + h/2,y(n - 1) + k1/2); y(n) = y(n - 1) + k2;$ 
8: end
9: end

```

1.6 Conclusion

Les méthodes numériques de résolution des équations différentielles sont nombreuses. Dans ce chapitre, on a présenté la méthode d'Euler et la méthode de Runge-kutta, ces dernières sont les mieux estimées d'autant qu'il en existe d'autres méthodes qui sont plus adaptées pour chaque type de problème posé.

Chapitre 2

La théorie du contrôle optimal

2.1 Introduction

En mathématique, un système de contrôle optimal est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser on peut avoir recours à des équations différentielles.

2.2 Définitions essentielles

Définition 2.1. L'ensemble $U = \{u(t), t \in I = [t_0, t_f]\}$, est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être non bornées, bornée ou du type bang-bang.

Définition 2.2. (Commande bornée)

La commande $u_j(t)$ est dite commande bornée si elle peut être minorer et majorer par des constantes a et b , par la forme suivante:

$$a \leq u_j(t) \leq b, j = 1, \dots, m, t \in [0, t_f].$$

Définition 2.3. (Commande bang-bang)

Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle bang-bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$, On a $|u_j(t)| = 1$.

Définition 2.4. Le contrôle $u(t)$, $t \in [0, t_f]$ est dit admissible s'il satisfait les contraintes:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu; x(0) = x_0 \\ f_* \leq u(t) \leq f^* \end{cases}$$

f_* minirant et f^* majorant.

A et B sont des matrices réelles.

Définition 2.5. (but d'une commande)

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 = x(t_0)$, ($x_0 \in M_0$) à une autre position $x_1 = x(t_f)$, ($x_1 \in M_1$) où M_0 ensemble de départ et M_1 ensemble d'arrivée.

Définition 2.6. (Temps optimal)

On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f^0(t, x, u) = 1$, $g(t_f, x(t_f)) = 0$ et le temps final t_f est libre dans l'expression de $\min_u \int_0^{t_f} 1 dt$.

Définition 2.7. (Coût optimal)

On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final t_f est fixé dans l'expression $\min_u g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x, u) dt$.

Définition 2.8. (La boucle ouverte et la boucle fermée)

Un contrôle en boucle ouverte est une application $t \rightarrow u(t)$ d'un interval de temps dans l'espace des contrôles.

Un contrôle en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, est une application $u \rightarrow g(t)$ définie sur les variables d'état du système.

2.3 Position du problème de contrôle optimal

Les problèmes de contrôle optimal sont de la forme générale suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt \quad (1) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2) \\ x(0) = x_0 \in M_0 \quad (3) \\ x(t_f) = x_1 \in M_1 \quad (4) \\ u \in U, t \in I = [0, t_f] \quad (5) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Où M_0 (ensemble de départ) et M_1 (ensemble d'arrivée) sont des sous ensembles de \mathbb{R}^n , I un intervalle de \mathbb{R} , $x_0 = x(0)$ est la position initiale du système(2), $x(t_f)$ est sa position terminale. En pratique, la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température, ...etc. $u(\cdot)$ est la commande du système(2.1). U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, qui est l'ensemble des contrôles admissibles (u_j) d'où on peut minorer et majorer les $u_j(t)$ par des constantes:

$$-1 \leq u_j \leq +1.$$

$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ est le système dynamique du contrôle optimal.

$J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt$ est La fonction coût ou objectif, cette fonction coût a deux parties:

– $g(t_f, x(t_f))$ est le coût terminal, il a du poids quand le temps final est libre sinon il est constant.

– $\int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt$ est le coût intégral.

L'objectif étant de minimiser le coût:

$$J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt.$$

2.3.1 Problème de lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est égale à:

$$J(t_f, u) = \int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

c'est à dire $g = 0$, est $J(t_f, u) = \int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt$ le coût intégral.

Exemple 2.1.

$$\begin{cases} J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt \longrightarrow \min. \\ \dot{x} = 1 + u(t) \\ x(0) = 0, x(1) = 2 \end{cases}$$

C'est un problème de lagrange où $g = 0$ et $f^0 = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$.

2.3.2 Problème de Mayer

Ici c'est le problème dont le critère à minimiser est le suivant:

$$J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f))$$

c'est à dire $f^0 = 0$, $J(t_f, u)$ est le coût terminal.

Exemple 2.2.

$$\begin{cases} J(u(t)) = \varphi(x(t_f)) = x_2(1) \longrightarrow \max \\ \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, x_1(0) = x_2(0) = 0 \\ |u(t)| \leq 1, t \in [0, 1] \end{cases}$$

Ce problème est un problème de Mayer où $f^0 = 0$ et $g = \varphi(x(t_f)) = x_2(1)$.

Remarque 2.1. • Si dans l'expression de J , f^0 est proportionnelle à u on parle alors d'un problème quadratique.

• Lorsque les équations d'états $\dot{x} = f(t, x, u)$ ne dépendent pas explicitement du temps c'est à dire $\dot{x} = f(x, u)$, On parle dans ce cas de problème autonome.

Si t est présent dans les équations d'états, le problème de contrôle est dit non autonome.

Définition 2.9. Un ensemble accessible en temps t_f pour le système (2.1) noté $A_{cc}(x_0, t_f)$ est l'ensemble des extrémités au temps t_f des solutions du système partant de x_0 au temps $t = 0$.

2.4 Systèmes de contrôle optimal linéaire

Les systèmes linéaires de contrôle optimal sont de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \\ x(0) = x_0, t \in I \end{cases} \quad (2.2)$$

Où I est un intervalle de \mathbb{R} , A, B et r sont trois applications localement intégrables sur I à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^m .

où $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de dimension n et $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de n lignes et m colonnes.

l'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$.

Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour tout contrôle u , le système (2.2) admet une unique solution:

$x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue donnée par:

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_{t_0}^{t_f} M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds, \forall t \in I.$$

tel que $M(\cdot) : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est la résolvante du système linéaire homogène

$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ définie par:

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t).M(t) \\ M(0) = Id \end{cases}$$

Où Id : désigne la matrice identité.

- Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la solution du système s'écrit:

$$x(t) = M(t). \int_{t_0}^{t_f} M(s)^{-1}B(s)u(s)ds \text{ elle est linéaire en } u.$$

2.4.1 Ensemble accessible

considérons le système (2.2).

Définition 2.10. L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t_f > 0$ est définie par:

$$A_{cc}(x_0, t_f) = \{x_u(t_f) / u \in U\}$$

Où $x_u(\cdot)$ est la solution du système(2.2)associé au contrôle u .

Autrement dit $A_{cc}(x_0, t_f)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de(2.2) au temps t_f , l'orsqu'on fait varier le contrôle u .

Théorème. *considérons le système de contrôle linéaire dans \mathbb{R}^n :*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

Où $U \subset \mathbb{R}^m$ est compact.

soient $t_f > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $t \in [0, t_f]$, $A_{cc}(x_0, t)$ est un compact, convexe et varie continûment avec $t \in [0, t_f]$.

2.5 La contrôlabilité des systèmes de contrôle optimal

La contrôlabilité est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle. La notion de contrôlabilité a été inventée en 1960 par Kalman à propos des systèmes linéaires de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$.

La contrôlabilité est la possibilité d'influencer l'état du système en manipulant les commandes.

Définition 2.11. Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener (en temps fini) d'un état initial

2.5.1 Contrôlabilité des systèmes linéaire

Le théorème suivant donne une condition générale pour la contrôlabilité des systèmes linéaires.

Théorème. *Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice:*

$$C(t_f) = \int_0^{t_f} M(t)^{-1} B(t) B(t)' M(t)^{-1} dt$$

dite matrice de contrôlabilité est inversible.

Théorème. (Kalman) *Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), t \in [0, t_f]$ est contrôlable en temps t_f si et seulement si:*

$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang n .

C est dite matrice de Kalman.

Exemple 2.3. Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans une situation où $n = 2$ états et $m = 1$ entrée. La matrice de contrôlabilité associée est:

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons le rang $C = 2 = n$, Donc le système est contrôlable.

Exemple 2.4. Considérons maintenant ce système:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

On a $n = 2$ états et $m = 1$ entrée.

Donc:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de contrôlabilité du système est:

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang $C = 1 \neq (2 = n)$, donc le système n'est pas contrôlable.

2.6 Principe du Maximum

Le principe du maximum est énoncé par Pontryaguine en 1956, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations et développé par la suite par ses élèves et collaborateurs (Pontryaguine et al; 1961).

La résolution du problème de contrôle optimal nécessite la résolution préalable d'un problème du maximum.

Le problème consiste à transférer le point représentatif de l'état x_0 à l'état x_1 tout en minimisant la fonctionnelle J .

Définition 2.12. Le Hamiltonien du système $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [0, t_f]$ est la fonction:

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n / \{0\}) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x, p, u) \longrightarrow H(t, x, p, u) = p^0 f^0 + \langle p, f(t, x, u) \rangle$$

Où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n et p est le vecteur adjoint.

2.6.1 Principe du Maximum de Pontryaguine

Avant d'énoncer le principe du maximum de Pontryaguine, introduisons certaines définitions et propriétés essentielles:

Définition 2.13. Le contrôle u est dit extrêmale sur $[0, t_f]$ si la trajectoire du système $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$ du problème de contrôle (2.1) associée à u vérifie:

$$x(t) \in A_{cc}(x_0, t), t \in I = [0, t_f].$$

Définition 2.14. Un contrôle $u^*(t), t \in [0, t_f]$ est dit optimal si $u^*(\cdot)$ est extrêmale et $J(u^*(t)) < J(u(t))$, pour tout contrôle extrêmale $u(t), t \in [0, t_f]$.

Enoncé général

Théorème. *On considère le problème de contrôle suivant:*

déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associée à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, t_f]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint et un réel $p^0 \leq 0$ tel que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et pour presque tout $t \in [0, t_f]$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \end{cases}$$

Où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$ est le hamiltonien du système et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, t_f]$:

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, u) \quad (2.3)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final t_f

$$\max_{u \in U} H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, u) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x(t_f)). \quad (2.4)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(t_f) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux).

$$p(0) \perp (t_f)_{x(0)} M_0 \quad (2.5)$$

et

$$p(t_f) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x(t_f)) \perp t_f x(t_f) M_1. \quad (2.6)$$

Définition 2.15. Les conditions (2.11) et (2.10) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint. La condition (2.9) est appelée condition de transversalité sur le Hamiltonien. Elles sont ici écrites de manière générale.

Exemple 2.5. On considère un problème de contrôle optimal dont l'équation d'état est égale à:

$$(\mathbf{s}) \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |u_i(t)| \leq 1, i = \overline{1,2}, t \in [0, t_f] \end{cases}$$

1-La contrôlabilité du système (s):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

le problème (s) est un problème de contrôle optimal linéaire qui est sous forme $\dot{x} = Ax + Bu$

où:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Donc la matrice de Kalman } C = (A^0 B, A^{n-1} B) = (B, AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a le $\det C = 1 \neq 0$, donc le rang C égale à 2 qui est le nombre de colonne où de lignes linéairement indépendantes \Rightarrow (s) est contrôlable.

2-L'ensemble accessible:

$$A_{cc}(x_0, t) = \{x_u(t) / x_u(t) \text{ est la solution du système (s)}\}$$

le système (s) est un système linéaire équivalent au système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(t) = M(s) + Bu \\ x(t) = M(s)x(0) + M(s) \int_0^t M^{-1}(s)Bu(s)ds \end{cases}$$

Où M solution de $\begin{cases} \dot{M} = AM \\ M(0) = Id \end{cases}$

Donc:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t Bu(s)ds = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\dot{M} = 0 \longrightarrow M = cste$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -1 + \int_0^t u_1(t)dt \\ x_2(t) = 0 + \int_0^t u_2(t)dt \end{cases}$$

Donc:

$A_{cc}(x_0, t) = \{(x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2 / x_1(t) = -1 + \int_0^t u_1(t)dt; x_2(t) = \int_0^t u_2(t)dt \text{ où } |u_1(t)| \leq 1, |u_2(t)| \leq 1\}$ Par intégration on trouve:

$$\begin{aligned} -1 - t &\leq -1 + \int_0^t u_1(t)dt \leq t - 1 \\ -t &\leq \int_0^t u_2(t)dt \leq t \end{aligned}$$

Donc:

$$A_{cc}(x_0, t) = \{(x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2 / -1 - t \leq x_1(t) \leq -1 + t, -t \leq x_2(t) \leq t\}.$$

3-Principe du maximum(pour trouver le contrôle optimal et le temps optimal pour ramener l'objet de la position $x(0) = (-1, 0)$ à $x(t_f) = (0, 0)$).

Introduisons le Hamiltonien:

On a $t_f = \int_0^{t_f} f^0(x, u, t)dt \longrightarrow \min$. Veut dire que $f^0 = 1$ donc:

$$H = p^0 f^0 + p'(t)f(t)$$

$$\begin{aligned} H(x, p, u, t) &= p^0 + p'(t) \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = p^0 + (p_1(t), p_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \\ &= p^0 + p_1(t) \cdot u_1(t) + p_2(t) \cdot u_2(t). \end{aligned}$$

$$\max_{u_1, u_2} H = p^0 + \max(p_1(t) \cdot u_1(t) + p_2(t) \cdot u_2(t))$$

$$p_1(t) \text{ est solution de } \dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \implies p_1(t) = c_1(cste)$$

$$p_2(t) \text{ est solution de } \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \implies p_2(t) = c_2(cste)$$

$$\max_{u_1, u_2} H = p^0 + \max(c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)).$$

$$-1 \leq u_1 \leq 1$$

$$-1 \leq u_2 \leq 1$$

On a :

$$x_1(t_f) = 0.$$

$$x_2(t_f) = 0.$$

$$\begin{aligned} \bullet x_1(t_f) &= -1 + \int_0^{t_f} u_1(t) dt = 0 \\ &= -1 + t_f \cdot u_1 = 0 \implies t_f \cdot u_1 = 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ t_f = 1 \text{ car } t_f > 0 \text{ toujours et } c_1 = p_1 \implies \text{signe de } u_1. \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet x_2(t_f) &= \int_0^{t_f} u_2(t) dt = \int_0^{t_f} u_2(t) dt = u_2 \cdot \int_0^{t_f} dt \\ &= u_2 \cdot t_f = 0 \implies u_2 = 0 \implies c_2 = 0. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} u_2 = 0 \\ t_f = 1, \text{ car } t_f > 0, \text{ toujours} \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Donc le contrôle optimal :

$$u^{opt}(t) = (u_1(t), u_2(t)) = (1, 0).$$

$$t_f^{opt} = 1 > 0.$$

$$p_1(t) = c_1 = 1.$$

$$p_2(t) = c_2 = 0.$$

2.7 Conclusion

On a discuté dans ce chapitre sur la théorie de contrôle optimal, ainsi que des bases importantes pour résoudre un tel problème, en l'occurrence l'utilisation du principe du maximum de Pontryagin.

Cependant, ce principe n'est pas toujours applicable à tout les problèmes de contrôle optimal. D'autres méthodes peuvent se greffer pour résoudre ce problème telle que les méthodes numériques ceux qui feront l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Méthodes numériques en contrôle optimal

3.1 Introduction

En général, les problèmes de contrôle optimal n'ont pas toujours de solutions analytiques. En conséquence, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour pouvoir les résoudre. Pour cela on utilise des méthodes directes et indirectes.

3.2 Les méthodes indirectes

les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir ("shooting method"), un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum.

3.2.1 Méthode de Tir simple

Considérons le problème de contrôle optimal suivant:

$$\begin{cases} \min J(t,u) = g(t_f,x(t_f)) + \int_0^{t_f} f^0(t,x(t),u(t))dt \\ \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \\ x(0) = x_0, x(t_f) = x_1 \\ p(0) = p_0, p(t_f) = p_1 \\ t \in [0, t_f] \end{cases} \quad (3.1)$$

Supposons dans un premier temps que le temps final t_f est fixé.

Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale.

Si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme:

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \text{ où } z(t) = (x(t), p(t)).$$

Les conditions initiales, finales et les conditions de transversalité se mettent sous la forme:

$$R(z(0), z(t_f)) = R(x_0, p_0, x_1, p_1) = 0.$$

Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites suivant:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)) \\ R(z(0), z(t_f)) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy:

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), z(0) = z_0$$

Et posons $S(z_0) = R(z_0, z(t_f, z_0))$ la fonction de tir.

Le problème (3.2) aux valeurs limites est alors équivalent à la résolution du système suivant:

$$S(z_0) = 0,$$

il s'agit de déterminer un zéro de la fonction S . Ceci peut se résoudre par une méthode de Newton.

3.3 Résolution d'un Problème aux deux bouts

Cas général: Considérons le problème de contrôle optimal à instants fixés suivant:

$$(p) \begin{cases} \text{Min } g(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt & \text{Objectif} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{Dynamique} \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m & \text{Contrôles admissibles} \\ h_0(x(t_0)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_0} & \text{Conditions initiales} \\ h_f(x(t_f)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_1} & \text{Conditions finales} \end{cases}$$

3.3.1 Problème aux deux bouts

La condition nécessaire de solution (PMP), nous conduit à un système différentiel à $2n$ équations avec $n_0 + n_1$ paramètres (u_0 et u_1) et à $2n + n_0 + n_1$ conditions initiales et terminales suivantes:

$$(Q) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ \dot{p}(t) = -f_x^t(t, x(t), u(t))p(t) - lx(t, x(t), u(t)) \\ u(t) = h(p(t)) \\ h_0(x(t_0)) = 0 \\ h_1(x(t_f)) = 0 \\ p(t_0) = -\frac{\partial \phi}{\partial x_0}(x(t_0), x(t_f), u_0, u_1) \\ p(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x_f}(x(t_0), x(t_f), u_0, u_1) \end{cases}$$

Où $u(t) = h(p(t))$ est donné par la minimisation de l'Hamiltonien et la fonction ϕ :

$$\phi : (t_0, x_0, t_f, x_f, u_0, u_1) \longrightarrow g(t_0, x_0, t_f, x_f) + (\psi_0(t_0, x_0)|_{u_0}) + (\psi_0(t_f, x_f)|_{u_1}).$$

En posant $y(t)$ le couple état, état adjoint ($y(t) = (x(t), p(t))$) et φ la dynamique du couple état-état adjoint donnée par le système Hamiltonien et en éliminant les paramètres u_0 et u_1 , nous sommes conduit à un problème aux deux bouts (Two Points Boundary Value Problem):

$$(TPBVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = \varphi(t, y(t)) \\ b_0(y(t_0)) = 0 \\ b_f(y(t_f)) = 0 \end{cases}$$

3.3.2 Problème à valeur initiale et méthode de tir

Nous allons maintenant définir la méthode de tir, pour résoudre ce problème aux deux bouts. Posons $y(\cdot; z)$ la solution du système à valeur initial (Initial Value Problem) suivant:

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = \varphi(t, y(t)) & PP \text{ sur } [t_0, t_f] \\ y(t_0) = z; & \text{valeur initiale} \end{cases}$$

On introduit maintenant une application S appelée fonction de tir qui à la valeur initiale z associe la valeur des conditions aux limites en t_f pour la solution correspondante de (IVP) définie par:

$$S_0 : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ z \longrightarrow S(z) = \begin{pmatrix} b_0(z) \\ b_f(y(t_f; z)) \end{pmatrix}$$

Trouver une solution au problème (TPBVP) est alors équivalent à trouver un zéro de l'équation $S(z) = 0$ et donne ainsi une solution de P .

Exemple 3.1. Considérons le problème du temps minimal pour le système de contrôle suivant:

$$(P) \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), & x(0) = 0; \\ \dot{y}(t) = u(t), & y(0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Le contrôle $u(t)$, pour $t \in [0, t_f]$ vérifie: $|u(t)| \leq 1$.

Application du Principe du Maximum:

Commençons par le calcul de la solution exacte de ce problème.

Le Hamiltonien du système (P) est:

$$H(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), u(t)) = p_x y + p_y u + p^0$$

Où p_x et p_y sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont les solutions du système:

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x \end{cases}$$

Ce système est équivalent à:

$$\begin{cases} p_x(t) = cste = \lambda \\ p_y(t) = -\lambda t + \gamma \end{cases}$$

Où λ et γ sont des constantes.

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien:

$$H = p_x y + p_y u + p^0$$

Alors quelque soit la valeur de p^0 :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (p_x(t)y(t) + p_y(t)u(t))$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u = \text{signe } p_y(t).$$

De là, le contrôle sera le suivant:

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } p_y(t) < 0 \\ +1 & \text{si } p_y(t) > 0, t \in I \end{cases}$$

Problème aux deux bouts (Two Points Boundary Value Problem):

Le Principe du Maximum de Pontryaguine nous conduit à un système différentiel à deux équations et une condition terminale, en d'autres termes à un problème aux deux bouts (TPBV) suivant:

$$(TPBVP) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \\ \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = -p_1 \\ u(t) = h(p(t)) \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \\ x(5) = 0, y(5) = -1 \end{cases}$$

où $u(t) = h(p(t))$ est donné par la minimisation de l'Hamiltonien:

$$\min H(t, x(t), u(t), p(t)) = \min_{|u(t)| \leq 1} (p_x y + p_y u + p_0). \quad (3.4)$$

Nous obtenons immédiatement ici:

$$\begin{cases} u(t) = -1 & \text{si } p_x(t) < 0 \\ u(t) = +1 & \text{si } p_x(t) > 0, t \in I \end{cases}$$

Détermination de la fonction de tir:

Posons $y(t) = (x(t), p(t))$. Résoudre le problème (TPBVP) est équivalent à rechercher un zéro de l'équation $S(z) = 0$ où la fonction S_0 qui sera appelée fonction de tir, associée à notre problème est définie par:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longrightarrow S(z) = y(5; 0, z) - (-1) \\ S_0(z) &= y(5; 0, z) - (-1) \end{aligned}$$

Avec $y(\cdot; 0, z)$ est la solution du système à valeur initiale (Initial Value Problem) suivant:

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \\ u(t) = h(p(t)) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = z \end{cases}$$

Voici le programme de la méthode de tir simple implémenté sous Matlab:

```

1: function tirsimple
% Méthode de tir simple, en utilisant fsolve.m;
% pour le système de contrôle
%  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = u$ ,  $|u| \leq 1$ .
% On veut aller de  $(0, 0)$  à  $(0, -1)$  en temps minimal.
clear all; clf; clc; format long;
global x0; x0 = [0; 0];
P0 = [1; 1]; tf = 5;
% Calcul de P0, tf
options = optimset('Display', 'iter', 'LargeScale', 'on');
[P0tf, FVAL, EXITFLAG] = fsolve(@F, [P0; tf], options);
EXITFLAG % 1 si la méthode converge, -1 sinon
% Trace de la trajectoire optimale
options = odeset('AbsTol', 1e-9, 'RelTol', 1e-9);
[t, z] = ode45(@sys, [0; P0tf(3)], [x0; P0tf(1); P0tf(2)], options);
subplot(121); plot(z(:, 1), z(:, 2));
axis square; title('Trajectoire');
subplot(122); plot(t, sign(z(:, 4)));
axis square; title('Contrôle');
% - - - - -
2: function Xzero = F(X)
% Définition de la fonction dont on cherche un zéro
global x0;
options = odeset('AbsTol', 1e-9, 'RelTol', 1e-9);
[t, z] = ode113(@sys, [0; X(3)], [x0; X(1); X(2)], options);
HamEnd = z(end, 3)*z(end, 2) + abs(z(end, 4))-1;
Xzero = [ z(end, 1) % on impose

```

```

xf = 0 z(end,2)+1 % on impose yf = -1
HamEnd ]; % tf libre donc H(tf) = 0
%- - - - -
3:function zdot = sys(t,z)
u = sign(z(4));
zdot = [ z(2)
u
0
-z(3)]; % systeme extremal

```

Les résultats de ce programme sont donnés dans la figure suivante:

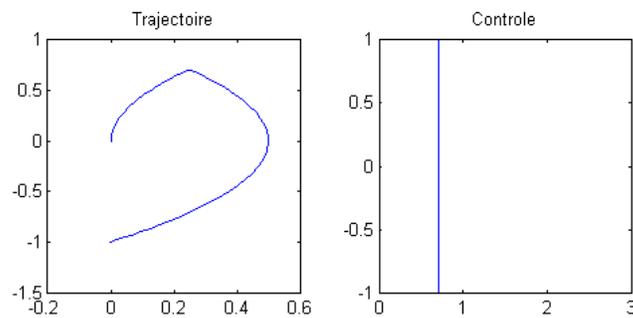


FIG. 3.1 – Résultats de la méthode de Tir simple

3.3.3 Rappels sur la méthode de Newton

Il s'agit de résoudre numériquement $G(z) = 0$ où $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction de classe C^1 . L'idée de base est la suivante:

Si z_k est proche d'un zéro z de G , alors:

$$0 = G(z) = G(z_k) + dG(z_k).(z - z_k) + o(z - z_k),$$

On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence:

$$z_{k+1} = z_k - (dG(z_k))^{-1}.G(z_k),$$

Un point initial $z_0 \in \mathbb{R}^p$ étant choisi et on espère que z_k converge vers le zéro z . Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne de G , ce qui doit être évité numériquement. Il s'agit alors à chaque étape de résoudre l'équation:

$$G(z_k) + dG(z_k).d_k = 0,$$

Où d_k est appelé direction de descente et on pose $z_{k+1} = z_k + d_k$.

3.4 Les méthodes directes

Les méthodes directes ont pris de l'importance dans le domaine du contrôle optimal numérique depuis les années 80. Elles consistent à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie.

3.4.1 Discrétisation total: tir direct

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. En discrétisant l'état et le contrôle, on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie (ou problème de programmation non linéaire) de la forme:

$$\min_{z \in C} f(z), \tag{3.5}$$

Où $Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_n)$,

et

$$C = \{Z | g_i(Z) = 0, i \in \{1, \dots, r\}, g_j(Z) \leq 0, j \in \{r+1, \dots, m\}\}. \tag{3.6}$$

La méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles.

Considérons donc une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ de l'intervalle $[0, t_f]$.

Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite. En posant: $b_i = t_{i+1} - t_i$, On obtient:

$$x_{i+1} = b_i f(t_i, x_i, u_i).$$

Remarque 3.1. Il existe de nombreuses méthodes pour discrétiser une équation différentielle ordinaire: méthode d'euler (explicite ou implicite), point milieu, Heun, Runge-Kutta, Adams-Moulton, etc. Le choix de la méthode dépend du problème abordé.

La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire suivant:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + b_i f(t_i, x_i, u_i), i = 0, \dots, N - 1, \\ \min C(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_N), \\ u_i &\in \Omega, i = 0, \dots, N - 1, \end{aligned}$$

i.e. un problème de type (3.5).

D'un point de vue plus général, cela revient à choisir une discrétisation des contrôles ainsi que de l'état, dans certains espaces de dimension finie:

$$\begin{aligned} u &\in Vect(U_1, \dots, U_N), i.e. u(t) = \sum_{i=1}^N u_i U_i(t), u_i \in \mathbb{R} \\ x &\in Vect(X_1, \dots, X_N), i.e. x(t) = \sum_{i=1}^N x_i X_i(t), x_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Où les $U_i(t)$ et $X_i(t)$ représentent une base de Galerkin. La résolution numérique d'un problème de programmation non linéaire du type (3.5) est standard. Elle peut être effectuée, par exemple, par une méthode de pénalisation, ou par une méthode SQP (sequential quadratic programming).

Reprenons l'exemple de la méthode de tir simple avec la méthode de discrétisation:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), & x(0) = 0; \\ \dot{y}(t) = u(t), & y(0) = 0; \\ |u(t)| \leq 1. \end{cases}$$

Voici le programme qui correspond à cette méthode sous Matlab:

```

1:function direct
% Discrétisation directe (en utilisant fmincon.m)
% du problème de temps minimal
%  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = u$ ,  $|u| \leq 1$ ,
% le problème étant de joindre  $(0,0)$  à  $(0,-1)$  en temps minimal.
clear all; close all; clc;
N = 20;% nombre de pas de discrétisation
uinit = 2*rand(N,1) - 1; % initialisation aléatoire du contrôle
tfinit = 1; xinit = [uinit; tfinit];
% point de départ pour fmincon
lb = -ones(N + 1, 1); lb(N + 1) = 0; ub = ones(N + 1, 1); ub(N + 1) = 20;
% contrainte sur le contrôle  $|u| \leq 1$  et  $0 \leq tf \leq 20$ 
[rep, Fval, exitflag] = fmincon(@tempsfinal, xinit, [], [], [], [], lb, ub, @cond);
exitflag
tf = rep(end); x(1) = 0; y(1) = 0;
for i = 1: N
x(i + 1) = x(i) + tf/N*y(i);
y(i + 1) = y(i) + tf/N*rep(i);
end % calcul de la trajectoire optimale
subplot(121); plot(x, y); axis square; title('Trajectoire');
subplot(122); plot(linspace(0, tf, N), rep(1: N));
axis square; title('Contrôle');
%-----
2:function [c, ceq] = cond(x)
N = length(x) - 1;
c = 0;
tf = x(end); xf = 0; yf = 0;
for i = 1: N
xf = xf + tf/N*yf; % calcul du point final au temps tf
yf = yf + tf/N*x(i); % avec la methode d'Euler explicite
end
ceq = [ xf ; yf + 1 ]; % on impose la condition finale  $xf = 0$ ,  $yf = -1$ 

```

```
%-----  
3: function val = tempsfinal(x)  
val = x(end); % x = [u; tf], où u est le discrétise du contrôle,  
% et tf est le temps final
```

Les résultats de ce programme sont donnés dans la figure suivante:

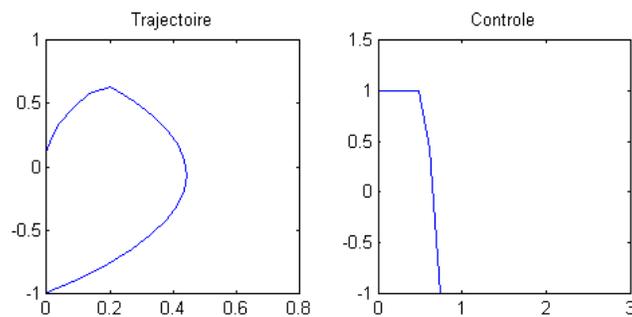


FIG. 3.2 – Les résultats de la méthode de discrétisation

3.5 Comparaison entre les méthodes directes et les méthodes indirectes

Les méthodes directes:

- Les méthodes directes sont basées sur la discrétisation totale ou partielle du problème initial et consiste à arriver à la résolution d'un problème linéaire en se basant sur la méthode d'Euler ou de Runge-Kutta.
- La mise en oeuvre des méthodes directes est plus simple car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable comme les méthodes indirectes; en particulier, on n'a pas à étudier les variables adjointes, ou bien à connaître à l'avance

la structure des commutation.

- Ces méthodes sont moins précises, et peuvent mener à des problèmes de grandes tailles suivant le pas de discrétisation utilisé.

Les méthodes indirectes:

- Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryaguine qui donne une condition nécessaire d'optimalité, il faut vérifier à priori l'optimalité de la trajectoire calculée.
- Ces méthodes ont l'extrême précision numérique, mais elles sont très sensibles aux choix de la condition initiale.
- Contrairement aux méthodes directes, les méthodes indirectes nécessitent une étude théorique préalable et l'étude des variables adjointes.

3.6 Conclusion

De la comparaison on peut conclure ce qui suit:

Il serait préférable d'opter pour une méthode indirectes, si on a besoin de calculer la trajectoire optimale de manière très précise.

On utilisera plutôt une méthode directe, si on n'a pas besoin d'une grande précision de calcul, donc les méthodes directes permet l'obtention d'une solution approchée.

Chapitre 4

La théorie linéaire-quadratique(LQ)

4.1 Introduction

Le contrôle optimal linéaire-quadratique a fait l'objet de nombreuses investigations, depuis l'article publié par Kalman en 1960. Dans ce type de problème le système est linéaire et le coût quadratique. Les systèmes de contrôle linéaire-quadratique sont d'une grande importance dans la pratique, en effet un coût quadratique est souvent très naturel dans un problème.

4.2 Position du problème de contrôle optimal linéaire-quadratique

Considérons un système de contrôle linéaire dans \mathbb{R}^n de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \\ t \in I = [0, t_f] \end{cases} \quad (4.1)$$

Où $A(t)$ et $B(t)$ sont des applications localement intégrables sur $I = [0, t_f]$ à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Où $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de dimension n et $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de n lignes et m colonnes.

On lui associé un coût quadratique du type:

$$C(u) = x(t_f)^T Q x(t_f) + \int_0^{t_f} (x(t)^T W(t)x(t) + u(t)^T U(t)u(t))dt, \quad (4.2)$$

Où $t_f > 0$ est fixé et où, pour tout $t \in [0, t_f]$, $U(t) \in M_m(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, $W(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive et $Q(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice

symétrique positive.

On suppose que les dépendances en t de A, B, W, U sont L^∞ sur $[0, t_f]$. Par ailleurs le coût étant quadratique, l'espace naturel des contrôles est $L^2([0, t_f], \mathbb{R}^m)$.

- $x(t_f)^T Q x(t_f)$ est le coût terminal.
- $\int_0^{t_f} (x(t)^T W(t) x(t) + u(t)^T U(t) u(t)) dt$ est le coût intégral.

Donc on aura le système linéaire-quadratique suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min C(u) = x(t_f)^T Q x(t_f) + \int_0^{t_f} (x(t)^T W(t) x(t) + u(t)^T U(t) u(t)) dt, & \text{fonction cout quadratique,} \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & \text{systeme dynamique,} \\ x(0) = x_0, & \text{condition initiale,} \\ x(t_f) = x_f, & \text{condition finale,} \\ t \in I = [0, t_f]. & \text{intervalle du temps.} \end{array} \right.$$

Problème linéaire-quadratique:

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point initial fixé, l'objectif est de déterminer les trajectoires partant de x_0 et qui minimisent le coût $C(u)$.

On n'impose aucune contrainte sur le point final $x(t_f)$. Maintenant, on pose:

$$\|x(t)\|_W^2 = x(t)^T W(t) x(t) \text{ , } \|u(t)\|_U^2 = u(t)^T U u(t) \text{ et } g(x) = x^T Q x$$

On aura:

$$C(u) = g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt,$$

Avec Q, W, U sont des matrices de pondération.

Remarque 4.1. Par hypothèse les matrices Q et W sont symétriques positives, mais pas nécessairement définies. Par exemple si $Q = 0$ et $W = 0$ alors le coût est toujours minimal pour le contrôle $u = 0$.

Remarque 4.2. Pour alléger les notations, on suppose que le temps initial est égale à 0. Cependant tous les résultats qui suivent sont toujours valables si on considère le problème LQ sur un intervalle $[t_0, t_f]$, avec des contrôles dans l'espace $L^2([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$.

4.3 Existence de trajectoires optimales

Introduisons l'hypothèse suivante sur U :

$$\exists \alpha > 0 \forall u \in L^2([0, t_f], \mathbb{R}^m) : \int_0^{t_f} \|u(t)_U\|^2 dt \geq \alpha \int_0^{t_f} u(t)^T u(t) dt. \quad (4.3)$$

Par exemple cette hypothèse est vérifiée si l'application $t \rightarrow U(t)$ est continue sur $[0, t_f]$ et $t_f < +\infty$, ou encore s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t \in [0, t_f]$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^m$ On ait $v^T U(t)v \geq cv^T v$.

On a le théorème d'existence suivant:

Théorème 4.1. *Sous l'hypothèse (4.3), il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ.*

Lemme 4.1. *La fonction C est strictement convexe.*

Preuve. Tout d'abord remarquons que pour tout $t \in [0, t_f]$, la fonction $f(u) = u^T U(t)u$ définie sur \mathbb{R}^m , est strictement convexe puisque par hypothèse la matrice $U(t)$ est symétrique définie positive.

Ensuite, notons $x_u(\cdot)$ la trajectoire associée à un contrôle u . On a pour tout $t \in [0, t_f]$:

$$x_u(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s)u(s) ds.$$

L'application qui à un contrôle u associe $x_u(t)$ est convexe, ceci pour tout $t \in [0, t_f]$. La matrice $W(t)$ étant symétrique positive, ceci implique la convexité de l'application qui à un contrôle u associe $x(t)^T W(t)w(t)$. On raisonne de même pour le terme $x(t_f)^T Qx(t_f)$.

Enfin, l'intégration respectant la convexité, on en déduit que le coût est strictement convexe en u .

L'unicité de la trajectoire optimale en résulte trivialement.

Remarque 4.3. (Extension du théorème 4.1)

Si la fonction $g = x(t_f)^T Qx(t_f)$ apparaissant dans le coût est une fonction continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , bornée inférieurement ou convexe, et/ou si le système de contrôle est perturbé par une fonction $r(t)$, alors le théorème précédent reste vrai.

4.4 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité: Principe du Maximum dans le cas LQ

On cherche des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le système:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \\ x(t_f) = x_1, \end{cases}$$

Le problème est de minimiser le coût quadratique de la forme:

$$C(u) = x(t_f)^T Q x(t_f) + \int_0^{t_f} (x(t)^T W(t)x(t) + u(t)^T U(t)u(t))dt,$$

Où t_f est fixé.

Maintenant introduisons l'Hamiltonien:

$$H(t,x,u,p) = -\frac{1}{2}(x(t)^T W(t)x(t) + u(t)^T U(t)u(t)) + p^T(Ax(t) + Bu(t)).$$

Théorème 4.2. *La trajectoire x , associée au contrôle u , est optimale pour le problème LQ si et seulement s'il existe un vecteur adjoint $p(t)$ vérifiant pour presque tout $t \in [0, t_f]$:*

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t) \quad (4.4)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu \quad (4.5)$$

et la condition finale:

$$p(t_f) = -\frac{\partial g(t_f)}{\partial x(t_f)} = -x(t_f)^T Q \quad (4.6)$$

De plus le contrôle optimal u s'écrit, pour presque tout $t \in [0, t_f]$:

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^T p(t)^T \quad (4.7)$$

Remarque 4.4. Dans le cas d'un intervalle infini ($t_f = +\infty$) la condition finale sur le vecteur adjoint devient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 0$$

Remarque 4.5. le principe du maximum LQ est une condition nécessaire et suffisante de minimalité (alors que dans le cas général c'est une condition nécessaire seulement), d'autre part il est possible d'exprimer le contrôle sous forme de boucle fermée, grâce à la théorie de Riccati (voir section suivante).

4.5 Fonction valeur et équation de Riccati

4.5.1 Définition de la fonction valeur

Soit $t_f > 0$ fixé, et soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Considérons le problème LQ de trouver une trajectoire solution de:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (4.8)$$

minimisant le coût quadratique:

$$C_{t_f}(u) = x(t_f)^T Q x(t_f) + \int_0^{t_f} (\|x(t)\|_w^2 + \|u(t)\|_U^2) dt \quad (4.9)$$

Définition 4.1. La fonction valeur S_{t_f} au point x est la borne inférieure des coûts pour le problème LQ.

Autrement dit: $S_{t_f} = \inf\{C_{t_f}(u) | x_u(0) = x\}$.

Remarque 4.6. Sous l'hypothèse (4.3) on a existence d'une unique trajectoire optimale d'après le théorème (4.1), et dans ce cas cette borne inférieure est un minimum.

4.5.2 Equation de Riccati

Théorème 4.3. *Sous l'hypothèse (4.3), pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique trajectoire optimale x associée au contrôle u pour le problème (4.4),(4.5). Le contrôle optimal se met sous forme de boucle fermée:*

$$u(t) = U(t)^{-1}.B(t)^T E(t)x(t), \quad (4.10)$$

Où $E(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est solution sur $[0, t_f]$ de l'équation matricielle de Riccati:

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = W(t) - A(t)^T E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U(t)^{-1}B(t)^T E(t), \\ E(t) = -Q \end{cases} \quad (4.11)$$

De plus, pour tout $t \in [0, t_f]$, la matrice $E(t)$ est symétrique et:

$$S_{t_f}(x) = -x^T E(0)x. \quad (4.12)$$

Remarque 4.7. En particulier, le théorème affirme que le contrôle optimal u se met sous forme de boucle fermée:

$$u(t) = k(t)x(t),$$

Où $k(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)$. Cette forme se prête bien aux problèmes de stabilisation.

Lemme 4.2. *Si la matrice Q est symétrique définie positive, ou bien si pour tout $t \in [0, t_f]$ la matrice $W(t)$ est symétrique définie positive, alors la matrice $E(0)$ est symétrique définie négative.*

Preuve. Soit x_0 tel que $x_0^T E(0)x_0 = 0$ et montrons que $x_0 = 0$. Pour cela on considère le problème LQ:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ \min & x(t_f)^T Q x(t_f) + \int_0^{t_f} (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt \end{aligned}$$

pour lequel, d'après le théorème (4.2), le coût minimal vaut $-x_0^T E(0)x_0 = 0$. Par conséquent, puisque pour tout t la matrice $U(t)$ est définie positive, on a $u(t) = 0$ sur $[0, t_f]$. Si par ailleurs Q est définie positive on a aussi $x(t_f) = 0$. Donc la trajectoire $x(\cdot)$ est solution du problème de Cauchy $\dot{x} = Ax, x(t_f) = 0$, et par unicité $x(\cdot)$ est identiquement nulle. En particulier $x(0) = x_0 = 0$, ce qui achève la preuve. Dans le deuxième cas où $W(t)$ est définie positive, la conclusion est immédiate.

4.5.3 Représentation linéaire de l'équation de Riccati

On a la propriété suivante:

Proposition 4.1. *Plaçons-nous dans le cadre du théorème (4.2).*

Soit:

$$R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & R_2(t) \\ R_3(t) & R_4(t) \end{pmatrix}$$

La résolvante du système linéaire:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BU^{-1}B^T p^T, \\ \dot{p}^T = -A^T p^T + Wx, \end{cases}$$

telle que $R(t) = Id$, alors pour tout $t \in [0, t_f]$ on a:

$$E(t) = (R_3(t) - R_4(t)Q)(R_1(t) - R_2(t)Q)^{-1}.$$

Démonstration

Par définition de la résolvante, on a:

$$\begin{aligned} x(t) &= R_1(t)x(t_f) + R_2(t)p(t_f)^T \\ p(t)^T &= R_3(t)x(t_f) + R_4(t)p(t_f)^T \end{aligned}$$

or on sait que $p(t_f)^T = -Qx(t_f)$, donc:

$$x(t) = (R_1(t) - R_2(t)Q)x(t_f)$$

et

$$p(t)^T = (R_3(t) - R_4(t)Q)x(t_f).$$

On conclut en remarquant que $p(t)^T = E(t)x(t)$.

Notons que la matrice $R_1(t) - R_2(t)Q$ est inversible sur $[0, t_f]$ car le problème LQ est bien posé, comme nous l'avons vu précédemment.

Par conséquent pour résoudre l'équation de Riccati (4.11), il suffit d'intégrer un système linéaire (il faut calculer une résolvante), ce qui est très facile à programmer. Cette méthode (due à Kalman-Englar) est notamment préférable à la méthode directe dans le cas stationnaire.

4.6 Conclusion

Le principe du maximum dans le cas LQ est une condition nécessaire et suffisante contrairement au cas général où il est une condition nécessaire seulement. Il exprime le contrôle sous forme de boucle ouverte ($u(t) = U(t)^{-1}B(t)^T p(t)^T$).

Par contre l'équation de Riccati permet d'exprimer le contrôle optimal sous forme de boucle fermée ($u(t) = k(t)x(t)$) où $k(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)$.

Chapitre 5

Application de la théorie LQ

On considère le problème d'un véhicule se déplaçant en ligne droite:

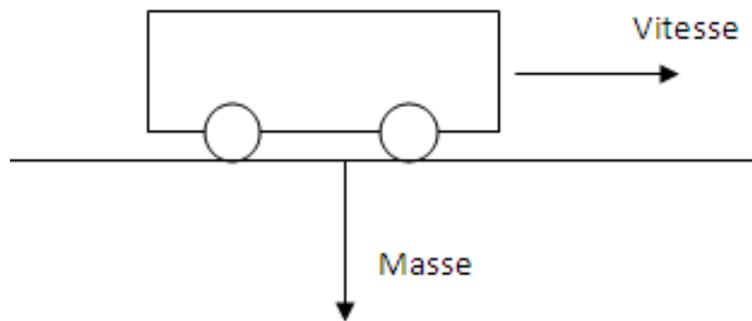


FIG. 5.1 – *véhicule déplaçant sur une ligne droite*

Ce véhicule est modélisé par le système de contrôle suivant:

$$\ddot{x} = u, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad (5.1)$$

On souhaite pendant un temps t_f fixé, maximiser la distance parcourue tout en minimisant l'énergie fournie. On choisit donc le critère suivant:

$$C(u) = -x(t_f)^2 + \int_0^{t_f} u(t)^2 dt. \quad (5.2)$$

5.1 Application du Principe du Maximum

Soient

$x = x_1$: La position du véhicule.

$\dot{x} = x_2$: La vitesse du véhicule.

En faisant un changement de variables on aura le système suivant qui est équivalent au système(5.1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Introduisons l'Hamiltonien pour le nouveau système, qui est le suivant:

$$\begin{aligned} H(x,p,u,t) &= p^0 f^0 + \langle p, f \rangle \\ &= -u^2 + (p_1, p_2) \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} = -u^2 + p_1 \cdot x_2 + p_2 \cdot u \end{aligned}$$

On obtient les équations suivantes:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \dot{p}_1 = 0, \text{ donc } p_1(t) = cste = c_1.$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 = -c_1 \Rightarrow p_2(t) = -c_1 \cdot t + c_2.$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow -2u + p_2(t) = 0 \text{ donc } u(t) = \frac{1}{2}p_2(t).$$

On trouve les conditions de transversalité suivantes:

$$\begin{aligned} p_1(t_f) &= 2x_1 \\ p_2(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

En intégrant on trouve le contrôle:

$$u(t) = x(t_f)(t_f - t)$$

et la distance parcourue égale à:

$$x(t_f) = \frac{t_f^3}{3t_f^3 - 6}$$

5.2 Fonction valeur et équation de Riccati

5.2.1 Fonction Valeur

Dans notre exemple, on a:

$$C(u) = -x(t_f)^2 + \int_0^{t_f} u^2 dt$$

et on a la fonction valeur qui est définie en général par:

$$S_{t_f}(x) = \inf\{C_{t_f}/x_u(0) = x\}$$

Donc:

$$S_{t_f}(x) = \inf\{(-x(t_f)^2 + \int_0^{t_f} u^2 dt)/x_u(0) = x\}$$

5.2.2 Equation de Riccati

Trouvons les matrices $Q(t), W(t)$ et $U(t)$:

On a la formule générale du coût quadratique égale à:

$$C(u) = x(t_f)^T Q x(t_f) + \int_0^{t_f} (x(t)^T W(t) x(t) + u(t)^T U(t) u(t)) dt$$

Or dans notre système on a:

$$C(u) = -x(t_f)^2 + \int_0^{t_f} u(t)^2 dt.$$

Dans le coût terminal $x(t_f)^T Q x(t_f) = -x(t_f)^2$ implique que $Q = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -Id$,

et dans le coût intégral $\int_0^{t_f} (x(t)^T W(t) x(t) + u(t)^T U(t) u(t)) dt = \int_0^{t_f} u(t)^2 dt$, il faut que

$(x(t)^T W(t) x(t) = 0$ se qui implique que $W(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $u(t)^T U(t) u(t) = u(t)^2$,

implique que $U(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$

et du système (5.3) on a:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $E(t)$ est la solution de l'équation matricielle de Riccati suivante:

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = W(t) - A(t)^T E(t) - E(t) A(t) - E(t) B(t) U(t)^{-1} B(t)^T E(t) \\ E(t_f) = -Q \end{cases}$$

Donc:

$$\dot{E}(t) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1(t) & E_2(t) \\ E_3(t) & E_4(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_1(t) & E_2(t) \\ E_3(t) & E_4(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_1(t) & E_2(t) \\ E_3(t) & E_4(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1(t) & E_2(t) \\ E_3(t) & E_4(t) \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que:

$$\dot{E}(t) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_1(t) & E_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & E_1(t) \\ 0 & E_3(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_2(t)E_3(t) & E_2(t)E_4(t) \\ E_4(t)E_3(t) & E_4(t)E_4(t) \end{pmatrix}$$

Finalement:

$$\dot{E}(t) = \begin{pmatrix} -E_2(t)E_3(t) & -E_1(t) - E_2(t)E_4(t) \\ -E_1(t) - E_4(t)E_3(t) & -E_2(t) - E_3(t) - E_4^2(t) \end{pmatrix}$$

et ses éléments:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1(t) &= -E_2(t)E_3(t) \\ \dot{E}_2(t) &= -E_1(t) - E_2(t)E_4(t) \\ \dot{E}_3(t) &= -E_1(t) - E_4(t)E_3(t) \\ \dot{E}_4(t) &= -E_2(t) - E_3(t) - E_4^2(t) \end{aligned}$$

pour trouver $E(t)$, on utilise la méthode d'Euler pour résoudre ce système d'équations de $\dot{E}(t)$.

voici le programme de résolution par la méthode d'Euler sur Matlab:

```
function Riccati
```

```
clear all; close all; clc;
```

```
N = 100; tf = 2;
```

```
E(N+1, :) = [-1; 0; 0; -1];
```

```
for i = N: -1: 1
```

```
E(i, 1) = E(i+1, 1) - tf/N * (-E(i+1, 2) * E(i+1, 3));
```

```
E(i, 2) = E(i+1, 2) - tf/N * (-E(i+1, 1) - E(i+1, 2) * E(i+1, 4));
```

```
E(i, 3) = E(i+1, 3) - tf/N * (-E(i+1, 1) - E(i+1, 4) * E(i+1, 3));
```

```
E(i, 4) = E(i+1, 4) - tf/N * (-E(i+1, 2) - E(i+1, 3) - E(i+1, 4) * E(i+1, 4));
```

```
end
```

```
subplot(221); plot(linspace(0, tf, N), E(1: N, 1)); title('Trajectoire E1');
```

```
subplot(222); plot(linspace(0, tf, N), E(1: N, 2)); title('Trajectoire E2');
```

```
subplot(223); plot(linspace(0, tf, N), E(1: N, 3)); title('Trajectoire E3');
subplot(224); plot(linspace(0, tf, N), E(1: N, 4)); title('Trajectoire E4');
```

et le résultat de ce programme est donné dans le schéma suivant:

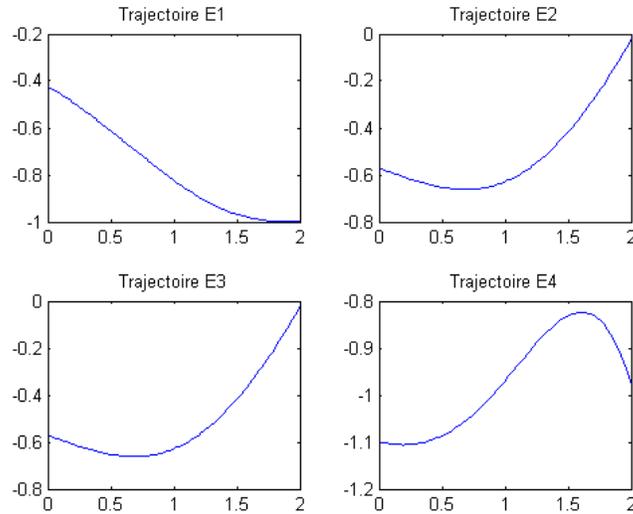


FIG. 5.2 – les trajectoires d'équations de Riccati

et donc $u(t) = k(t)x(t)$,

Où $k(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)$.

La matrice $E(t)$ est donnée par matlab en insérant E sur matlab et en exécutant on trouve plusieurs matrices de $E(t)$ parmi celles-ci, on prend une et en la remplace dans $k(t)$.

Par exemple: si $E(t) = \begin{pmatrix} -0.4226 & -0.5720 \\ -0.5720 & -1.0995 \end{pmatrix}$

$k(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)$

$k(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.4226 & -0.5720 \\ -0.5720 & -1.0995 \end{pmatrix}$

$= Id. \begin{pmatrix} -0.5720 & -1.0995 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5720 & -1.0995 \end{pmatrix} = k(t)$

Donc $u(t) = k(t).x(t)$

$$u(t) = (-0.5720 \quad -1.0995) .x(t)$$

Alors $u(t)$ est exprimé en boucle fermé à l'aide de l'équation de Riccati.

5.3 Conclusion

Dans notre application, on a appliqué sur un véhicule modélisé par un système dynamique la théorie LQ où on a résolu ce système par application du principe du maximum et l'équation de Riccati.

Par application du principe du maximum on a trouvé $u(t) = \frac{1}{2}P_2(t)$ c'est à dire en boucle ouverte.

Par la résolution de l'équation de Riccati, on a trouvé $u(t) = k(t).x(t) = (-0.5720 \quad -1.0995) .x(t)$ c'est à dire en boucle fermée.

Conclusion générale

L'objectif de ce travail est de présenter le contrôle optimal linéaire-quadratique, qui est un cas difficile à résoudre à cause de la grande puissance du coût quadratique. Le contrôle optimal linéaire-quadratique est caractérisé par l'équation de Riccati. On a présenté dans notre mémoire une introduction générale aux équations différentielles car la modélisation d'un système de contrôle peut avoir recours à des équations différentielles.

Par la suite, nous sommes intéressés à la théorie du contrôle optimal où nous avons développé certains éléments de base, en portant un intérêt particulier au contrôle optimal linéaire et sa contrôlabilité ainsi que le principe du maximum qui permet de résoudre un problème de contrôle optimal. Dans le chapitre trois on a proposé deux approches de résolution d'un problème de contrôle optimal qui est la méthode de tir simple et la discrétisation totale. Après on a abordé l'essentiel de notre mémoire qui est la théorie du contrôle optimal linéaire-quadratique qui peut être résolu en appliquant le principe du maximum, qui est une condition nécessaire et suffisante contrairement au cas général où il est une condition suffisante seulement, ou par la résolution de l'équation de Riccati.

A la fin on a appliqué la théorie LQ sur un véhicule modélisé par un système($\ddot{x} = u$) et le coût quadratique $C(u) = -x(t_f)^2 + \int_0^{t_f} u(t)^2$ où on a appliqué le principe du maximum dans le cas LQ, on a trouvé les vecteurs adjoints, le contrôle et la trajectoire. En utilisant l'équation de Riccati on a arrivé à un système d'équations qu'on a résolu avec matlab qui nous a donné quatre trajectoires qui représente l'équation de Riccati (E(t)). Le rôle de l'équation de Riccati est d'exprimer le contrôle sous forme de boucle fermé($u(t) = Kx(t)$).

Bibliographie

- [1] Shlomo Engelberg Jerusalem College of Technology, a Mathematical Introduction to Control Theory , Copyright C2005 by Imperial Coolege Press.
- [2] Emmanuel Trélat, livre du Contrôle optimal: Théorie et applications, Université Pierre et Marie Curie (Paris6) et Institut Universitaire de France, 2005.
- [3] Claude Lobry, Tewfik Sari, livre sur l'Introduction à la théorie du contrôle, Mai 2003.
- [4] Pierre Martinon, Thèse de doctorat sur la résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale, France, 2005.
- [5] Daya ouidja, mémoire de majester en mathématique, option: recherche operationnelle/principe du maximum et méthode de tir, UMMTO, juin 2011.
- [6] Emmanuel Trélat, livre de contrôle optimal, master de mathématiques, université d'orléans, France, 2007/2008.
- [7] B.Bayle, livre sur la commande optimale./télécom physique strasbourg-3AISAV,UDS-master IRI.
- [8] *m^{elle}* Ammoura Meriem, thèse sur critère d'optimalité d'un problème de contrôle optimal, UMMTO, 2010/2011.
- [9] Brian Stout,Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles,

Université de Provence Institut Fresnel, Case 161 Faculté de St Jérôme
Marseille, France, Fevrier 2007.

[10] K. Louadj. Thèse de doctorat sur la résolution des problèmes paramétrés en contrôle optimal, UMMTO, 2012.

[11] Ait Chabane Amal, Mémoire de Master en Recherche Operationnelle, Contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique, UMMTO, 2011.

[12] Terkmani Rima et NAit Abdesslam Louiza thèse sur le Contrôle optimal non linéaire Application: Décollage d'une fusée, UMMTO, 2011.

[13] TAZGA Sabrina et TAGUINE Namia Thèse de master, Minimisation de la consommation d'énergie d'un véhicule électrique, UMMTO, 2012.