

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L' INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT

Spécialité : AUTOMATIQUE

Par :

Tassadit BECHA

THEME

**Maintenance en ligne d'un atelier de galvanoplastie
sans arrêt de production.**

DEVANT LE JURY :

Said DJENNOUNE	Professeur, Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou	Président
Redouaune KARA	Professeur, Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou	Rapporteur
Simon COLLART-DUTILLEUL	Directeur de recherche, IFSTTAR, France	Co/Rapporteur
Ahmed MAIDI	Professeur, Université Mouloud Mamméri de Tizi-Ouzou	Examineur
Latéfa GHOMRI	MCA, Université Abou Bakr BELKAID de Tlemcen	Examineur
Bachir SADI	MCA, Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou	Examineur

ANNÉE : 2018

Avant-propos

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je tiens à exprimer, en premier lieu, ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères au directeur de ma thèse Monsieur Redouane Kara, professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, pour m'avoir initié et partager sa passion pour la recherche, son enthousiasme, sa rigueur scientifique, et pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail. Je lui suis infiniment reconnaissante pour sa disponibilité, ses précieux conseils et surtout pour sa patience tout au long de ces années.

Je témoigne toute ma reconnaissance au co-encadrant de ma thèse, Monsieur Simon Collart-Dutilleul, Directeur de recherche au centre de recherche IFSTTAR, France pour sa patience et les nombreuses discussions enrichissantes que j'ai pu avoir avec lui et pour les nombreux conseils qu'il a su me prodiguer.

Je tiens à remercier, Monsieur Saïd Djennoune, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

Mes sincères remerciements vont également à Monsieur Ahmed Maldi, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Mme Latéfa Ghomri, Maitre de conférence classe A à l'université Abou Bakr Belkaid Tlemcen, et à Monsieur Bachir Sadi Maitre de conférence classe A à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou de m'avoir honoré de leur présence dans ce jury.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), en particulier l'équipe SED : Hakima, Karima, Aldjia, Rima... pour leur sympathie et l'excellente ambiance de travail qu'elles ont créé.

C'est avec un grand plaisir et une grande reconnaissance que je remercie mes chères parents, mon époux, mes soeurs, mes frères, mes collègues de Thala Athmane et tous mes amis(es) de m'avoir encouragé.

A mon petit bout de chou, mon fils, merci de me donner la force et le sourire pour continuer à avancer.

Table des matières

1	Modélisation des graphes d'événements P-temporisés et P-temporels	5
1.1	Introduction	5
1.2	Théorie des graphes et solution de systèmes d'équations	7
1.2.1	Généralités sur les graphes	7
1.2.2	Invérsibilité des matrices à diagonales dominantes	7
1.2.3	Système d'équations linéaires :	8
1.3	Les réseaux de Petri	10
1.3.1	Rappels et notions de base	10
1.3.2	Quelques propriétés des RdPs	13
1.3.3	Sous classes des RdPs	15
1.3.4	Propriétés des graphes d'événements	16
1.4	Les graphes d'événements P-temporisés et leurs modèles algébriques	17
1.4.1	Principe de modélisation des graphes d'événements P-temporisés	18
1.4.2	Modèle algébrique des graphes d'événements P-temporisés dans l'algèbre des dioïdes :	19
1.4.3	Modèle algébrique des graphes d'événements P-temporisés dans l'algèbre standard :	22
1.5	Les graphes d'événements P-temporels et leurs modèles algébrique	24
1.5.1	Modèle algébriques des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre Max-plus	25
1.5.2	Modélisation des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre conven- tionnelle	27

1.6	Modélisation des graphes d'événements P-temporels par un système d'équations linéaires implicites	29
1.6.1	Le modèle proposé	29
1.6.2	L'unicité de la solution	33
1.7	conclusion	39
2	Commande des graphes d'événements P-temporels	41
2.1	Introduction	41
2.2	Evaluation de Performance	43
2.2.1	Exemple	45
2.3	Commande par invariance	47
2.3.1	Formulation du problème	47
2.3.2	Les domaines définits par les contraintes	48
2.3.3	Invariance positive, contractivité et stabilité asymptotique	50
2.4	Application à un workshop	54
2.5	Conclusion	60
3	Maintenance d'une ligne de galvanoplastie sans arrêt de production	63
3.1	Introduction	63
3.2	L'environnement galvanoplastie	65
3.2.1	Constitution d'un atelier de galvanoplastie	65
3.2.2	Exemple d'une cellule de traitement de surface	66
3.2.3	Formulation du problème	67
3.3	Commande Prédictive à base de modèle (MPC)	73
3.3.1	Formulation du probleme de commande	75
3.3.2	Application à une ligne de galvanoplastie	84
3.4	Conclusion	85
	Bibliographie	91
.1	Quelques propriétés des dioïdes	100
.1.1	Dioïde complet	100
.1.2	Structure ordonnée d'un dioïde	100

Table des figures

1.1	Exemple d'un RdP ordinaire marqué.	11
1.2	Synchronisation dans un RdP.	16
1.3	Parties d'un graphe d'événements P-temporisé	19
1.4	Exemple d'un graphe d'événements P-temporisé	21
1.5	Parties d'un graphe d'événements P-temporel	25
1.6	Partie d'un graphe d'événements P-temporel	29
1.7	Transformation 1, utilisée pour dupliquer une place	30
1.8	La transformation 2 utilisée pour dupliquer une place.	31
1.9	Exemple d'un graphe d'événements P-temporel	35
1.10	sous-graphes non-marqués	36
1.11	Le graphe associé $G(C)$ du graphe d'événements P-temporel de la Figure(1.9)	36
2.1	Exemple d'un graphe d'événements P-temporel.	45
2.2	Modèle équivalent du graphe d'événements P-temporel de la Figure (2.1).	46
2.3	Graphe d'événements P-temporel du workshop	55
2.4	Graphe d'événements P-temporel équivalent du workshop	56
2.5	L'évolution de l'état	59
2.6	L'évolution des entrées de commandes	60
3.1	Schéma synoptique d'une cellule de traitement de surface.	67
3.2	Représentation schématique des modes de fonctionnement	67
3.3	Graphe d'événements P-temporel d'une ligne de galvanoplastie dans le mode normale.	68

3.4	Graphe d'événements P-temporel d'une ligne de galvanoplastie dans le mode maintenance.	69
3.5	Modèle équivalent du graphe d'événements P-temporel du mode normale	69
3.6	Modèle équivalent du graphe d'événements P-temporel du mode maintenance . . .	70
3.7	Evolution de l'erreur en fonction du nombre de franchissement des transitions . . .	87
3.8	Evolution des temps de séjour des jetons dans les places en fonction du nombre de franchissement des transitions	88

Notations

- SED : système à événements discret.
- RdP : réseau de Petri.
- GE : graphe d'événements.
- GET : graphe d'événements temporisé.
- P : ensemble non vide de places d'un réseau de Petri.
- T : ensemble non vide de transitions d'un réseau de Petri.
- T_x : ensemble non vide de transitions internes d'un réseau de Petri.
- T_u : l'ensemble des transitions sources.
- O_j^{un} : l'ensemble des places non marquées situées en aval de la transition t_j .
- I_j^{un} : l'ensembles des places non marquées situées en amont de la transition t_j .
- μ_{0i} : marquage initial d'une place p_i .
- \mathbb{R} : l'ensemble des nombres réels.
- \mathbb{Z} : l'ensemble des nombres entiers.
- \mathbb{N} : l'ensemble des nombres naturels.
- \mathbb{Q} : l'ensemble des nombres rationnels.
- $rank A$: le rang de la matrice A .
- $det(A)$: le déterminant de la matrice A .
- A^l : l'inverse à gauche de la matrice A .
- A^{-1} : l'inverse de la matrice A .
- A^t : la transposé de la matrice A .
- a_{ij} : l'élément ij d'une matrice A .
- $|P|$: la cardinalité d'un ensemble P .
- $|a|$: valeur absolue d'un scalaire a .
- \mathbf{a} : vecteur colonne des durées minimales de séjour d'un jeton dans les places.

- \mathbf{b} : vecteur colonne des durées maximales de séjour d'un jeton dans les places.
- IS_i : l'intervalle statique de temps de séjour d'une marque dans la place p_i .
- W : matrice d'incidence d'un réseau de Petri.
- W^+ : matrice d'incidence arrière d'un réseau de Petri.
- W^- : matrice d'incidence avant d'un réseau de Petri.
- w_{ij}^- : poids de l'arc allant de la place p_i vers la transition t_j .
- w_{ij}^+ : poids de l'arc allant de la transition t_j vers la place p_i .
- $\bullet t_i$: ensemble des places situées en amont de la transition t_i .
- t_i^\bullet : ensemble des places situées en aval de la transition t_i .
- $\bullet p_i$: ensemble des transitions situées en amont de la place p_i .
- p_i^\bullet : ensemble des transitions situées en aval de la place p_i .
- τ_i : temporisation associée à une place p_i .
- σ : séquence de franchissement.
- S_j : le nombre de fois où la transition t_j a été franchie pendant la séquence σ .
- \mathbf{X} : vecteur P-invariant associé au graphe d'événements.
- \mathbf{Y} : vecteur t-invariant associé au graphe d'événements.
- λ temps de cycle.
- $\mathbf{1}$: vecteur unité.
- $\mathbf{0}$: vecteur de zéros.
- \mathbb{R}_{max} : algèbre $(\mathbb{R} \cup +\infty, max, +)$.
- \mathbb{R}_{min} : algèbre $(\mathbb{R} \cup +\infty, min, +)$.
- \oplus : opérateur maximum dans l'algèbre Max-plus.
- \otimes : addition dans l'algèbre Max-plus.
- A^* : Etoile de Kleen de la matrice A .
- \wedge : opérateur minimum.
- N_c : l'horizon de commande.
- N_p : l'horizon de prédiction.

Introduction générale

Les systèmes à événements discrets sont une classe de système dynamiques où l'évolution de l'état dépend de l'occurrence d'événements. Les phénomènes qui interviennent dans cette classe de systèmes peuvent être liés à l'aspect logique tels que : l'enchaînement des opérations, le partage de ressources, la synchronisation et le parallélisme.

Il existe plusieurs outils dédiés à la modélisation, la commande et l'évaluation des performances des systèmes à événements discrets. Parmi ces outils on peut citer : les automates à états, les chaînes de Markov, le Grafset et les réseaux de Petri. Les réseaux de Petri sont des modèles qui peuvent être utilisés pour traiter différents problèmes liés à la conception, la commande et l'analyse des systèmes à événements discrets. Ils sont utilisés avec succès dans différents domaines tel que les systèmes de production (Denat et al, 2005) et les systèmes de transport (Collart et al, 2003), (Houssin, 2006).

A côté de l'aspect logique des opérations, l'aspect temps n'est pas des moindres. En effet, dans beaucoup de systèmes le paramètre temps n'affecte pas seulement les performances mais aussi la validité fonctionnelle du système considéré. Nous pouvons citer à titre d'exemples ; les procédés de l'industrie chimique où : les réactifs utilisés apportent leurs effets dans une plage de temps donnée, les réseaux de transport où : les temps de départ et d'arrivée sont limités par des impératifs de bonne gestion. De ce fait, de nombreuses extensions des réseaux de Petri ont été introduites dans la littérature scientifique pour prendre en compte et étudier l'aspect temps des systèmes à événements discrets. Chaque extension permet de considérer un problème particulier. Les réseaux de Petri P-temporels par exemple ont été introduits afin d'intégrer les concepts de durée maximum associée à un état donné dans le modèle (Khansa et al, 1996).

Les travaux présentés dans cette thèse traitent des systèmes à événements discrets à contraintes de temps de séjours. Nous considérons particulièrement, les graphes d'événements P-temporels,

une sous classe importante des réseaux de Petri. Ces derniers permettent la représentation de phénomènes de synchronisation et de parallélisme sous contraintes de temps. L'obtention de la représentation graphique constitue une première étape de modélisation, car pour prétendre à la commande de cette classe de système on doit disposer d'un modèle analytique. De ce fait, pour décrire le comportement dynamique de graphes d'événements P-temporels, deux modèles algébriques ont été introduits dans la littérature. La première caractérisation est le modèle d'intervalle dans les dioïdes (Declerck, 2010). La deuxième est une représentation polyédrale dans l'algèbre standard, donnée dans (Declerck et al, 2007), (Declerck, 2013).

Le problème de commande des graphes d'événements P-temporels a été considéré selon deux approches, la commande en boucle ouverte et la commande en boucle fermée. Dans le cas de la commande en boucle ouverte, les dates de franchissement des transitions sont calculées via la programmation linéaire ou en utilisant le graphe associé au graphe d'événements P-temporels (Khansa, 1996), (Bonhomme, 2010). Dans (De Schutter et al, 2001), (Declerck et al, 2014), les auteurs ont adopté la méthode de la commande prédictive à base de modèle pour le calcul de commande optimale pour les systèmes considérés. Dans le contexte de la commande en boucle fermée d'un graphe d'événements temporisé avec spécification temporelles, les auteurs dans (Amari et al, 2012), (Houssin et al, 2007), (Houssin et al, 2013), Maia et al, 2011) ont synthétisé des commandes par retour d'état au moyen de l'algèbre Max-plus.

La contribution principale de cette thèse est la proposition d'un modèle algébrique, établie dans l'algèbre standard, pour les systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'événements P-temporisés ou P-temporels. En effet, en associant des fonctions dateurs aux transitions d'un graphe événements P-temporisé ou P-temporel donné, un système d'équations linéaires implicite est obtenu (Kara et al, 2013). Cette classe de modèles permet d'aborder les deux types de commande précédemment citées. Le temps de cycle optimal (minimum ou maximum) et le temps de séjour des jetons dans les places sont calculés en résolvant un problème de programmation linéaire (Becha et al, 2013). Un problème similaire a été présenté dans (Declerck et al, 2007), (Declerck, 2013) en utilisant la représentation polyédrale. Néanmoins, cette approche n'est pas pertinente dans le cas où le système modélisé est supposé en fonctionnement initialement (Bonhomme, 2010), (Collart, 1997), (Proth, 1995). Notre approche permet de gérer ce problème. En

effet, le modèle proposé nous permet de régler initialement les temps de séjour de telle sorte à atteindre un temps de cycle désiré.

Nous considérons également dans ce travail, les conditions sous lesquelles le modèle discret implicite proposé devient explicite. En particulier, des conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité de la solution du modèle proposé sont obtenues. De plus, une interprétation en termes de modèles de réseaux de Petri est apportée.

Nous nous sommes par la suite intéressé à un problème de commande particulier qui est la commande d'un atelier de galvanoplastie sans arrêt de production. En somme, on veut faire une maintenance sur une ressource parallèle, à priori dans notre cas un bac, sans arrêter la production. Formellement, le fonctionnement avec moins de ressources parallèles correspond à l'élimination de marques et le fonctionnement avec plus de ressources correspond à l'ajout de marques dans le modèle réseau de Petri. L'objectif dans ce cas est de fournir un modèle analytique pour les graphes P-temporisés et P-temporels avec un nombre différent de marques représentant la même ressource, et de synthétiser des lois de commande qui permettent d'atteindre un comportement souhaité du système tout en satisfaisant des contraintes temporelles imposées. Plus précisément, on veut établir une stratégie de commande pour les systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'événements P-temporisés ou P-temporels qui peuvent basculer entre différents modes de fonctionnement. Chaque mode correspond au système avec un certain nombre de ressources parallèles. La réduction ou l'augmentation du nombre de ressources parallèles peut être due par exemple aux fluctuations des demandes des clients ou des demandes du trafic. Une autre application concerne les défaillances dans les unités de production nécessitant des tâches de maintenance (Calvez et al, 2005).

Pour atteindre cet objectif, nous avons considéré des systèmes modélisés par des graphes d'événements P-temporels qui peuvent basculer entre deux modes. Dans chaque mode le système est décrit par un système d'équation linéaires implicites (Kara et al, 2013), (Becha et al, 2013). Un modèle linéaire implicite à commutation (une sous-classe des systèmes hybrides) qui représente le système global (les deux modes) est obtenu. Aussi, en considérant la commande prédictive à base de modèle, nous calculons des gains de retour d'état stabilisant qui garantissent le respect des contraintes temporelles dans les deux modes de fonctionnement.

Un formalisme similaire a été introduit par les auteurs dans (Van den Boom et al, 2006) en utilisant l'algèbre Max-plus. Ils considèrent des systèmes à événements discrets qui peuvent

basculer entre différents modes de fonctionnement. Chaque mode est décrit par un modèle d'état linéaire max-plus. La commutation dans ce cas change la structure du système en brisant les synchronisations et changeant l'ordre des événements. Le modèle obtenu est utilisé pour synthétiser un contrôleur basé sur la stratégie de commande prédictive à base de modèle. Le modèle est ensuite utilisé par Van den Boom et De Schutter dans de nombreux travaux (Van den Boom et al, 2007), (Van den Boom et al, 2008a), (Van den Boom et al, 2008b) et (Van den Boom et al, 2012). Il faut noter que le modèle proposé dans cette thèse est obtenu en utilisant l'algèbre standard et une modélisation intermédiaire par graphes d'événements P-temporels ou P-temporisés. Alors que la modélisation proposée dans (Van den Boom et al, 2006) s'appuie sur l'algèbre Max-plus uniquement. De plus les différents modèles sont obtenus par réarrangement des opérations.

Cette thèse comporte trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de base concernant les réseaux de Petri. Puis nous présentons les différents modèles algébriques des graphes d'événements P-temporisés et P-temporels établis dans l'algèbre standard et dans l'algèbre des dioïdes. Enfin on termine ce chapitre par l'introduction de notre première contribution à savoir, un modèle sous forme d'équations linéaires implicites écrit dans l'algèbre standard. De plus, les conditions sous lesquelles la solution du modèle obtenue est unique sont discutées.

Dans le deuxième chapitre, à partir du modèle proposé nous abordons la commande des systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'événements P-temporisés ou P-temporels. Nous commençons par la commande en boucle ouverte, en utilisant les concepts de la programmation linéaire. Nous abordons par la suite la commande en boucle fermée. Cette dernière consiste en la recherche d'un retour d'état stabilisant au moyen de la théorie des domaines invariants. Un exemple illustratif est présenté en fin de chapitre.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à un problème de commande d'atelier de galvanoplastie sans arrêt de production avec une tâche de maintenance. Nous commençons par la description de l'environnement galvanoplastie. Puis le problème de commande prédictive à base de modèle est formulé. Enfin, dans la troisième partie de ce chapitre nous appliquons les résultats obtenus à la commande d'un atelier de galvanoplastie.

Nous terminons par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1

Modélisation des graphes d'événements P-temporisés et P-temporels

1.1 Introduction

Les réseaux de Petri ont été introduits par (Petri, 1962) pour permettre la modélisation de classes importantes de systèmes qui recouvrent les systèmes de production automatisés, les systèmes informatiques et les systèmes de communication, pour n'en citer que quelques-uns, afin de permettre leur conception, leur analyse et leur commande.

Dans notre travail, on s'est particulièrement intéressé à une sous classe des réseaux de Petri appelées les graphes d'événements, ils permettent la modélisation de phénomènes tels que la synchronisation et le parallélisme. A côté de l'aspect logique des opérations, l'aspect temporel est primordial dans l'évolution de beaucoup de systèmes tels que les systèmes de production (Denat et al, 2005), les industries alimentaires (Amari et al, 2004) et les systèmes de transport (Collart et al, 2003), (Houssin, 2006). En général, des temporisations sont associées à des durées déterministes représentant des temps opératoires minimaux. Il existe deux façons d'introduire des temporisations constantes dans un réseau de Petri. En les associant soit aux transitions, on parle alors de réseaux de Petri t-temporisés (Ramchandani, 1974). Ou en les associant aux places, on parle alors de réseaux de Petri P-temporisés (Sifaxis, 1979).

Il existe toutefois des systèmes où cette représentation ne suffit plus. C'est le cas lorsque les temps opératoires sont également bornés par des valeurs maximum. Ceci est rencontré couramment dans certains secteurs tels que l'agro-alimentaire et l'industrie du traitement de surface.

Là aussi on parle de graphes d'événements P-temporels lorsque des intervalles temporels sont associés aux places et de graphes d'événements T-temporels lorsque des intervalles de temps sont associés à des transitions.

Toutefois, la représentation graphique du système ne constitue qu'une première étape lorsque l'on veut par exemple évaluer les performances ou envisager la commande temporelle, c'est à dire contrôler les débuts et fin de chaque operation. De ce fait, plusieurs modèles algébriques ont vu le jour. Ainsi, les graphes d'événements P-temporisés admettent une représentation linéaire dans une structure algébrique particulière appelée dioïde (Cohen, 1985), (Cottenceau, 1999), (Menguy, 1997) et (Lhommeau, 2003). Concernant les graphes d'événements P-temporels, une modélisation dans l'algèbre des dioïdes a été proposée par (Didi-Alaoui, 2005), et dans l'algèbre standard par (Declerk, 2007), (Guezzi, 2009).

L'objectif de ce chapitre est d'établir un modèle dans l'algèbre standard qui reflète le comportement dynamique des graphes considérés, à savoir, les graphes d'événements P-temporisés et les graphes d'événements P-temporels. Le modèle proposé admet une représentation linéaire dans l'algèbre standard. Cette représentation est bien adaptée pour aborder les problèmes de commande et d'évaluation de performances.

Ce chapitre est structuré comme suit : Dans la première partie, nous rappelons les notions de base concernant la théorie des graphes, les systèmes d'équations linéaires, et les réseaux de Petri tout en évoquant quelques propriétés de ces derniers. L'introduction des graphes d'événements, une sous classe importante des réseaux de Petri se fera dans cette partie. Aussi, l'importance de leurs extensions temporelles sera mise en exergue.

Dans la deuxième partie, nous introduisons la modélisation des graphes d'événements temporisés et des graphes d'événements P-temporels. Nous présentons en premier la formalisation de (Didi-Alaoui, 2005) des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre Max-plus. Puis, nous exposons la modélisation de (Guezzi, 2009) des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard.

Nous introduisons dans la troisième partie de ce chapitre la caractérisation des graphes d'événements P-temporisés et P-temporels par les systèmes implicites proposée dans cette thèse. Par la suite, le problème de l'unicité de la solution du modèle est discuté. Cette partie s'appuie principalement sur les documents (Kara et al, 2013) et (Becha et al, 2013).

1.2 Théorie des graphes et solution de systèmes d'équations

1.2.1 Généralités sur les graphes

Dans cette partie, des notions générales concernant les graphes et les matrices à diagonales dominantes sont données.

Définition 1.2.1 (*Grphe orienté*) *Un graphe orienté G est composé de deux ensembles : un ensemble de noeuds (ou sommets), et un ensemble d'arcs.*

Définition 1.2.2 (*Chemin*) *Un chemin est une suite de noeuds que l'on peut parcourir successivement en empruntant les arcs. On note $i \rightarrow j$ un chemin allant d'un noeud origine, noté i , vers un noeud extrémité, noté j .*

Définition 1.2.3 (*circuit*) *On appelle circuit une séquence d'arcs consécutifs (chemin) dont les deux sommets (extrémités) sont identiques.*

UN circuit est élémentaire si il ne passe pas deux fois par un même sommet.

Définition 1.2.4 (*Grphe associé*) *On appelle graphe de précedence d'une matrice $A = (a_{ij})$ noté $G(A)$, le graphe composé de n noeuds et arcs, notés (i, j) , et qui sont pondérés par les coefficients a_{ij} . Si $a_{ij} \neq 0$ alors il existe un arc qui relie le noeud i au noeud j , sinon l'arc n'existe pas. Duale-ment, pour tout graphe orienté valué composé de noeud, on peut associer une matrice carrée de dimension $n \times n$, telle que les coefficients de cette matrice correspondent aux poids des arcs du graphe.*

Définition 1.2.5 (*Composante fortement connexe*) *Un graphe est dit fortement connexe si pour toute paire de noeuds (i, j) , il existe un chemin orienté allant du noeud i au noeud j , et un chemin orienté allant du noeud j au noeud i .*

Un graphe est fortement connexe s'il est composé d'une seule composante fortement connexe.

1.2.2 Invérsibilité des matrices à diagonales dominantes

Les résultats présentés dans cette partie sont tirés de (Horn et al, 1990), (Varga, 1999).

Définition 1.2.6 Une matrice carrée A de dimension $n \times n$ est irréductible si son graphe associée $G(A)$ est fortement connexe

Une matrice réelle $A = (a_{ij})$ de dimension $n \times n$ est à diagonale dominante sur les lignes si :

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

où $|a_{ij}|$ est la valeur absolue de l'élément a_{ij} .

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite à diagonale strictement dominante si l'inégalité est stricte dans (1.1) est vérifiée pour tout i . Aussi, A est irréductible à diagonale dominante si A est irréductible et à diagonale dominante, avec une inégalité stricte dans (1.1) pour au moins une ligne.

Définition 1.2.7 Une matrice carrée A est non-singulière si une matrice A^{-1} existe tel que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

La matrice A^{-1} est l'inverse de la matrice A . Une matrice carrée qui n'a pas d'inverse est dite singulière.

Théorème 1.2.1 (Varga, 1999) Soit $A = (a_{ij})$ avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice à diagonale strictement dominante ou irréductible à diagonale dominante. Alors, la matrice A est non-singulière.

1.2.3 Système d'équations linéaires :

Soit

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned} \quad (1.2)$$

un système de m équations linéaires avec n inconnues avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Sous forme matricielle le système d'équations (1.2) s'écrit :

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

où : la matrice A est appelée matrice de coefficients, et \mathbf{b} le vecteur des termes indépendants. Le système $A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ est appelé système d'inégalité linéaire.

Solution d'un système d'équations linéaires

Définition 1.2.8 Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. A est inversible à gauche si une matrice

$$A^l \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ existe telle que : } A^l \cdot A = I_m.$$

si $\text{rang } A = m$, alors $(A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t$ est l'inverse à gauche de A .

Théorème 1.2.2 (Bernstein, 2009) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Alors, les points suivants sont vérifiés :

1. $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au moins une solution si et seulement si $\text{rang } A = \text{rang } (A \ \mathbf{b})$,

2. les points suivants sont équivalents :

2.1 $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution unique.

2.2 $\text{rang } A = \text{rang } (A \ \mathbf{b}) = m$

2.3 $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au moins une solution, et A est inversible à gauche.

Dans ce cas, soit $A^l \in \mathbb{R}^{n \times m}$ une inverse à gauche de la matrice A . Alors la solution unique de $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donnée par $\mathbf{x} = A^l \cdot \mathbf{b}$,

4. Supposons que $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au moins une solution. Alors $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une unique solution si et seulement si A est inversible à gauche. Dans ce cas soit $A^l \in \mathbb{R}^{n \times m}$ une inverse à gauche de A . Alors l'unique solution de $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donnée par $\mathbf{x} = A^l \cdot \mathbf{b}$.

1.3 Les réseaux de Petri

1.3.1 Rappels et notions de base

Dans cette section sont présentés des notions élémentaires sur les réseaux de Petri (RdP). Des développements plus approfondis peuvent être trouvés dans (Petri, 1962), (Murata, 1989), (David et Alla, 1997). Un RdP est un graphe biparti composé d'un ensemble fini et disjoint de places et de transitions représentés respectivement par des cercles et des barres (ou rectangle). Les places et les transitions sont reliées via des arcs orientés et valués.

Un RdP est dit ordinaire, lorsque tous ses arcs sont valués à 1. Tous les réseaux de Petri abordés dans cette thèse sont considérés comme ordinaires.

Formellement un RdP est défini comme suit :

Définition 1.3.1 (*Réseau de Petri ordinaire*) Un RdP ordinaire est un quadruplet, $\mathcal{N} = (P, T, I, O)$ où,

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{|P|}\}$ est un ensemble fini de places représentés par des cercles,
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{|T|}\}$ est un ensemble fini de transitions représentés par des barres, tel que, $P \cap T = \emptyset$ et $P \cup T \neq \emptyset$,
- $I : P \times T \rightarrow \{0, 1\}$, est l'application d'incidence avant, tel que $I(p_i, t_j)$ représente le poids de l'arc reliant la place p_i à la transition t_j ,
- $O : P \times T \rightarrow \{0, 1\}$, est l'application d'incidence arrière tel que $O(p_i, t_j)$ représente le poids de l'arc reliant la transition t_j à la place p_i ,

Avec,

$|\cdot|$ est la cardinalité d'un ensemble.

- Une transition t_j (respectivement une place p_i) est dite en amont d'une place p_i (respectivement d'une transition t_j) s'il existe un arc reliant la transition t_j à la place p_i (respectivement la place p_i à la transition t_j)
- Une transition t_j (respectivement une place p_i) est dite en aval d'une place p_i (respectivement d'une transition t_j) s'il existe un arc reliant la place p_i à la transition t_j (respectivement la transition t_j à la place p_i).
- Une transition est dite transition source si elle n'a pas de places en amont.

- Une transition est dite transition interne si elle a au moins une place en amont et une place en aval.
- Une transition est dite transition puit si elle n'a pas de places en aval.

La structure d'un RdP peut être caractérisée par sa matrice d'incidence donnée comme suit :

$$W = W^+ - W^-,$$

où,

$W^+ = (w_{ij}^+)$ est la matrice d'incidence avant,

$W^- = (w_{ij}^-)$ est la matrice d'incidence arrière.

avec,

$$w^+ = O(p_i, t_j) \text{ et } w^- = I(p_i, t_j).$$

Définition 1.3.2 (Marquage initial)

Un marquage initial μ_0 est un vecteur colonne dont la dimension est égale au nombre de places du RdP. L'élément μ_{0i} correspond au nombre de jetons (marques) contenus dans la place p_i .

Définition 1.3.3 (Réseau de Petri marqué) Un RdP marqué est un doublet $R = (\mathcal{N}, \mu_0)$ dans lequel,

- \mathcal{N} est un RdP non marqué,
- μ_0 est le marquage initial.

Notons que la matrice d'incidence W est indépendante du marquage.

Exemple

La matrice d'incidence W correspondant au RdP de la Figure(1.1) est donnée comme suit :

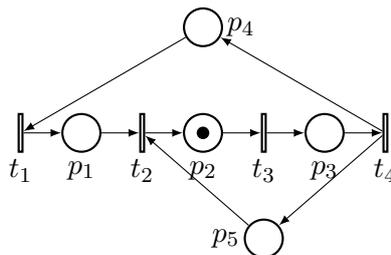


FIGURE 1.1: Exemple d'un RdP ordinaire marqué.

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la suite de cette thèse nous adoptons les notations suivantes :

- $\bullet t_i$ l'ensemble des places situées en amont de la transition t_i ,
- t_i^\bullet l'ensemble des places situées en aval de la transition t_i ,
- $\bullet p_i$ l'ensemble des transitions situées en amont de la place p_i ,
- p_i^\bullet l'ensemble des transitions situées en aval de la place p_i ,
- T_x l'ensemble des transitions internes,
- T_u l'ensemble des transitions sources,
- O_j^{un} l'ensemble des places non marquées situées en aval de la transition t_j ,
- I_j^{un} l'ensembles des places non marquées situées en amont de la transition t_j .

L'évolution dynamique d'un RdP est liée à l'évolution de son marquage. Son état E à un instant donné est donné par $E(\boldsymbol{\mu})$. Une transition t_i est dite franchissable (tribale) pour un marquage $\boldsymbol{\mu}$ donné si :

$$\forall p_i \in \bullet t_j | \mu_i \geq I(p_i, t_j).$$

avec,

μ_i est le marquage de la place p_i à l'état $E(\boldsymbol{\mu})$.

Dans le cas d'un RdP ordinaire, il suffit que toutes les places en amont d'une transition contiennent au moins un jeton pour qu'elle soit franchissable. Franchir une transition t_j revient à :

- Retirer un jeton de chaque place $p_i \in \bullet t_j$.
- Ajouter un jeton dans chaque place $p_i \in t_j^\bullet$.

Une suite de transitions qui peuvent être franchies successivement à partir d'un marquage donnée constitue une séquence de franchissement qu'on va noter σ .

L'équation fondamentale qui caractérise l'évolution dynamique d'un RdP est donné par :

$$\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}_0 + W \cdot \boldsymbol{S},$$

où :

$\boldsymbol{\mu}'$ est le marquage que l'on atteint à partir de $\boldsymbol{\mu}_0$ après le franchissement de la séquence réalisable σ .

\boldsymbol{S} est le vecteur de Parik qui représente la séquence σ . Sa dimension est égale au nombre de transitions que contient le RdP. La composante $S(j)$ correspond au nombre de fois ou la transition t_j a été franchie dans la séquence σ .

Exemple

Considérons le RdP donné par la Figure (1.1), l'évolution du vecteur de marquage $\boldsymbol{\mu}'$ est donnée comme suit :

$$\begin{array}{c} \mu_0 \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \xrightarrow{t_3} \begin{array}{c} \mu_1 \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \xrightarrow{t_4} \begin{array}{c} \mu_2 \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \end{array} \xrightarrow{t_1} \begin{array}{c} \mu_3 \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \end{array},$$

après le franchissements des transitions t_3 , t_4 et t_1 ($\sigma = t_3 t_4 t_1$), on atteint le marquage μ_3 ,

$$\mu_3 = \mu_0 + W \cdot \boldsymbol{S}$$

avec, W définit précédemment et $\boldsymbol{S} = (1 \ 0 \ 1 \ 1)^t$.

1.3.2 Quelques propriétés des RdPs

Les principales propriétés des RdPs peuvent être classées en deux catégories, celles qui dépendent du marquage initial dites : "propriétés comportementales" et celles qui ne dépendent que de la structure du RdP dites : "propriétés structurelles".

a/ propriétés comportementales :

Définition 1.3.4 (*Accessibilité*) Un marquage μ' est accessible (ou atteignable) à partir de μ_0 , si il existe une séquence de franchissement σ qui transforme μ_0 en μ' . On note par $R(\mu_0)$ l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir de μ_0 .

Définition 1.3.5 (*Bornitude*) Un RdP est dit k-borné si le nombre de marques dans chaque place ne dépasse pas un nombre fini k pour tout marquage accessible à partir de μ_0 .

Définition 1.3.6 (*Vivacité*) Une transition t_j est vivante pour le réseau marqué (\mathcal{N}, μ_0) si pour tout marquage μ' accessible depuis μ_0 , il existe une séquence de transitions franchissable à partir de ce marquage qui contient la transition t_j .

Un RdP (\mathcal{N}, μ) est vivant si toutes ces transitions sont vivante.

Définition 1.3.7 (*Blocage*) Un blocage (ou état puits) est un marquage tel qu'aucune transition n'est validée.

Définition 1.3.8 (*état d'accueil*) Un RdP a un état d'accueil M_a pour un marquage initial μ_0 si pour tout marquage accessible, il existe une séquence de franchissements de transitions tel que l'on puisse atteindre le marquage M_a .

Définition 1.3.9 (*réinitialisable*) Un RdP est réinitialisable pour un marquage μ_0 , si μ_0 est un état d'accueil.

b/ propriétés structurelles :

Les propriétés structurelles sont indépendantes du marquage initial et sont liées à la structure du réseau. Leur analyse repose essentiellement sur les techniques d'algèbre linéaire (Sifaxis, 1978) et leur but est de bâtir une passerelle entre la structure du réseau étudié et son comportement.

De la matrice d'incidence du réseau, les notions d'invariants peuvent être définies à savoir les p-invariants et les t-invariants.

Définition 1.3.10 On dit qu'un vecteur \mathbf{X} est p-invariant pour un RdP \mathcal{N} , si \mathbf{X} vérifie la relation suivante :

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{W} = 0$$

avec \mathbf{X} un vecteur ligne d'entiers non-négatifs appelé aussi, P-semi-flot et \mathbf{W} est la matrice d'incidence de \mathcal{N} .

L'ensemble des places qui correspondent aux composantes non nulles d'un p-invariant, est appelé support du p-invariant.

Définition 1.3.11 *Un vecteur \mathbf{Y} est un t-invariant d'un RdP \mathcal{N} , s'il vérifie l'équation suivante :*

$$W \cdot \mathbf{Y} = 0$$

avec \mathbf{Y} un vecteur appelé aussi *T-semi flot* dont la dimension est le nombre de transitions du RdP \mathcal{N} .

De manière similaire au support du p-invariant, on définit le support d'un t-invariant comme l'ensemble des transitions qui correspondent aux composantes non nulles d'un t-invariant.

1.3.3 Sous classes des RdPs

On cite deux classes importantes des RdPs : les graphes d'événements et les graphes d'état. Les graphes d'événements modélisent des processus parallèles communiquant entre eux, soumis à des contraintes de synchronisation. Toutefois ils ne permettent pas de représenter des choix, et ou des conflits d'allocation de ressources entre processus. A l'inverse, les graphes d'états permettent de représenter les structures de choix et de partage de ressources. Ils modélisent de manière adéquate les automates à état fini ou encore les processus séquentiels (mais ne peuvent représenter le parallélisme et la synchronisation).

Définition 1.3.12 (*Grphe d'état*) *Un RdP ordinaire est un graphe d'état si et seulement si, toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie :*

$$|\bullet t_i| = |t_i \bullet| = 1 \quad \forall t_i \in T$$

Définition 1.3.13 (*Grphe d'événements*) *Un RdP ordinaire est un graphe d'événements (GE) si et seulement si toute place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie.*

$$|\bullet p_i| = |p_i \bullet| = 1 \quad \forall p_i \in P$$

Cette sous-classe de réseaux de Petri est intéressante pour de nombreuses applications où l'on doit essentiellement modéliser des contraintes de synchronisation entre plusieurs processus (voir

Figure(1.2)).

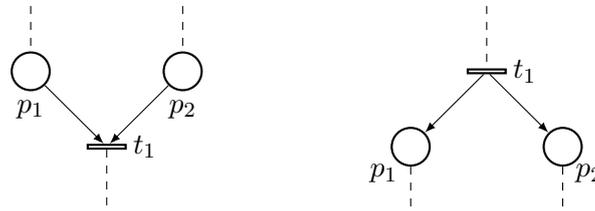


FIGURE 1.2: Synchronisation dans un RdP.

La recherche des p-invariants pour les graphes d'événements est présentée dans (Proth, 1995). Si nous considérons un graphe d'événements pour lequel toutes les places appartiennent à un support de p-invariant, alors ce graphe d'événements est borné.

1.3.4 Propriétés des graphes d'événements

Le Théorème suivant exprime la conservation du nombre de jetons dans un circuit d'un graphe d'événements.

Théorème 1.3.1 (Proth, 1995) *Dans un graphe d'événements, la somme des marques des places d'un circuit est constante.*

Théorème 1.3.2 (Proth, 1995) *Un graphe d'événements autonome est vivant, si et seulement si, chaque circuit élémentaire contient au moins un jeton.*

L'existence d'un t-invariant pour un graphe d'événements est une condition nécessaire pour que le graphe ait un fonctionnement répétitif. Dans un graphe d'événements toutes les composantes du vecteur \mathbf{Y} sont égales à 1 et c'est l'unique t-invariant (Proth, 1995), c'est à dire que l'on retrouve le même marquage initiale après avoir franchi une seule fois chaque transition.

Définition 1.3.14 *Un graphe d'événements est dit fortement connexe (GEFC) si il existe un chemin orienté qui relie tout couple de sommet.*

Les graphes d'événements fortement connexes sont un outil particulièrement appropriés pour la modélisation d'ateliers manufacturiers en fonctionnement répétitif (Laftit,1991)

Après avoir présenté quelques notions de base sur les RdPs, nous nous intéressons maintenant aux graphes d'événements temporisés et temporels et leur modélisation dans différentes structures algébriques.

1.4 Les graphes d'événements P-temporisés et leurs modèles algébriques

De nombreuses applications font intervenir la dimension temps. La négligence de cet aspect peut aller à l'encontre de la sémantique du système. En effet, les places ou les transitions sont souvent associées à des machines, des tâches ou des actions ayant une certaine durée non négligeable. Le modèle classique des réseaux de Petri permet d'obtenir des propriétés qualitatives du système étudié (réseaux vivants, bornés ... etc). Par contre, d'un point de vue quantitatif, évaluation de performance et optimisation, il est nécessaire d'introduire la notion du temps. Dans ce contexte, les principaux types de réseaux de Petri utilisés pour la modélisation des systèmes à contraintes temporelles sont :

1. Les réseaux de Petri temporisés où le temps est représenté par des durées associées aux transitions (Ramchandani, 1974) ou aux places (Sifakis, 1977).
2. Les réseaux de Petri temporels où le temps est représenté par des intervalles associés aux transitions (Merlin, 1974) ou aux places (Khansa, 1996).
3. les réseaux de Petri à flux temporels où le temps est représenté par des intervalles associés aux arcs (Diaz, 2001).

Définition 1.4.1 (*Réseaux de Petri P-temporisés*)

Un réseaux de Petri P-temporisés est un doublet (\mathcal{R}, D) où :

- \mathcal{R} est un réseaux de Petri marqué,
- D est une application

$$D : P \rightarrow \mathbb{Q}^+$$

$$p_i \rightarrow D_i = \tau_i \text{ avec } \tau_i \geq 0,$$

avec D est la fonction durée de franchissement qui à chaque place p_i fait correspondre un nombre rationnel positif ($\tau_i \in \mathbb{Q}^+$) décrivant la durée d'indisponibilité des jetons.

Remarque 1 Pour les réseaux de Petri temporisés il a été montré qu'il est toujours possible de

se ramener au cas où seules les places sont temporisées (Murata, 1989).

Fonctionnement d'un GET

La sémantique est que une marque doit rester dans une place p_i au moins le temps τ_i associé à cette place. Pendant τ_i la marque est indisponible; elle ne participe pas à la validation des transitions en aval. τ_i représente donc :

- La durée d'indisponibilité de la marque pour la validation des transitions.
- Le temps minimum de séjour d'une marque dans une place.

Fonctionnement au plus tôt d'un GET

On appelle fonctionnement au plus tôt d'un GET, le mode de fonctionnement où toutes les transitions internes sont franchies dès que possible. C'est-à-dire que les jetons qui arrivent dans une place, pourront contribuer au franchissement de la transition en aval dès que le temps de séjour minimum est écoulé. Aussi, les transitions sources sont en permanence franchissables, mais ne sont franchies que sur l'occurrence d'événements externes associés à ces transitions.

Fonctionnement FIFO

- Si le k -ième jeton qui arrive dans une place d'un graphe d'événements P-temporisé est aussi le k -ième jeton disponible pour franchir une transition en aval, alors cette place fonctionne selon la règle FIFO.
- Si le k -ième tir d'une transition d'un graphe d'événements t-temporisé à commencer est aussi le k -ième tir à se terminer, alors cette transition fonctionne selon la règle FIFO.

Définition 1.4.2 *On dit qu'un graphe d'événements est FIFO, si toutes ses places et transitions sont FIFO.*

Les graphes d'événements temporisés sont utilisés comme outil de modélisation intermédiaire. La représentation graphique constitue une première étape, la seconde étape est la mise en équation du modèle graphique, c'est-à-dire la définition d'un modèle analytique décrivant l'évolution temporelle du système.

1.4.1 Principe de modélisation des graphes d'événements P-temporisés

Le comportement d'un graphe d'événements temporisés peut s'exprimer sous forme d'équations linéaires dans les dioïdes \mathbb{R}_{min} ou \mathbb{R}_{max} . Ces équations représentent l'évolution du graphe dans les domaines temporel et événementiel. Dans le domaine temporel, le système est décrit par

des fonctions dépendantes du temps, on s'intéresse dans ce cas au nombre de franchissement des transitions jusqu'à l'instant considéré. Cette représentation consiste à associer à chaque transition une fonction dite compteur (Cohen, 1985).

Dans cette thèse on se restreint au domaine événementiel c'est-à-dire qu'on s'intéresse aux dates de franchissement des transitions du GET. Dans ce cas, on associe à chaque transition t_j une fonction dateur $x_j(k)$ qui représente la date de son k -ième franchissement.

Définition 1.4.3 (Dateur) *Un dateur est une application monotone (croissante) de \mathbb{Z} dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Un dateur doit vérifier :*

$$\mathbf{x}(k + 1) \geq \mathbf{x}(k)$$

A partir de ce même principe nous pouvons recenser deux modèles algébriques. Le premier a été établi dans l'algèbre des dioïdes (Cohen, 1985) et le second dans l'algèbre standard (Declerk, 2007), (Guezzi, 2009).

1.4.2 Modèle algébrique des graphes d'événements P-temporisés dans l'algèbre des dioïdes :

Dans l'algèbre des dioïdes, nous adoptons la notation suivante : \oplus opérateur maximum, \wedge opérateur minimum et \otimes addition. En associant à chaque transition d'un graphe d'événements une fonction $\mathbf{x}(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$) qui correspond à la date de son k -ième franchissement.

Considérons la Figure (1.3.(a)) qui représente une partie d'un graphe d'événements p-temporisés.

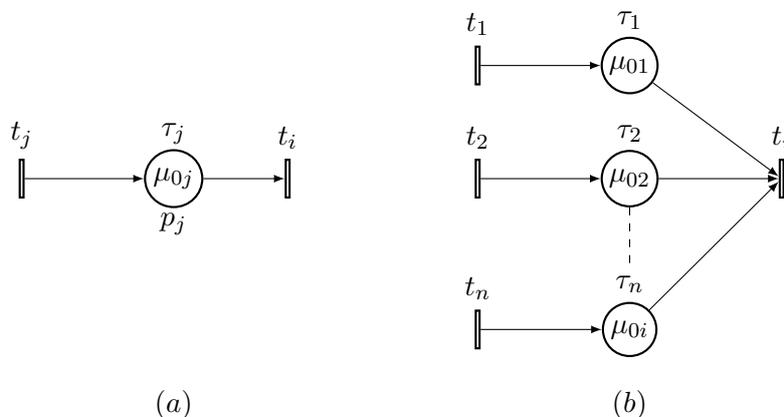


FIGURE 1.3: Parties d'un graphe d'événements P-temporisé

τ_j est la temporisation associée à la place p_j et μ_{0j} le nombre de marques présents initialement

dans la place p_j . Le tir de la transition t_i aura lieu au plus tôt pour la k -ième fois après le tir de t_j pour la $(k - \mu_{0j})$ -ième fois, plus le temps de séjour minimal τ_j . Les deux dateurs $x_j(k)$ et $x_i(k)$ de la Figure (1.3.(a)) satisfont l'inéquation suivante :

$$x_i(k) \geq x_j(k - \mu_{0j}) + \tau_j$$

Rappelons que dans un graphe d'événements, chaque transition peut avoir plusieurs places en amont ou en aval (voir Figure (1.3.(b))). Ainsi, si la transition t_i a n places en amont, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} x_i(k) \geq x_1(k - \mu_{01}) + \tau_1 \\ x_i(k) \geq x_2(k - \mu_{02}) + \tau_2 \\ \vdots \\ x_i(k) \geq x_n(k - \mu_{0n}) + \tau_n \end{cases} \quad (1.3)$$

ce système d'inéquations est équivalent à :

$$x_i(k) \geq \max(x_1(k - \mu_{01}) + \tau_1, x_2(k - \mu_{02}) + \tau_2, \dots, x_n(k - \mu_{0n}) + \tau_n) \quad (1.4)$$

Dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} (où $a \oplus b = \max(a, b)$) et $a \otimes b = a + b$, l'inéquation précédente peut se mettre sous forme d'une équation linéaire donné comme suit :

$$x_i(k) \geq \bigoplus_{j=1}^n x_j(k - \mu_{0j}) \otimes \tau_j \quad (1.5)$$

Si on considère toutes les transitions du graphe, on obtient le modèle suivant :

$$\mathbf{x}(k) \geq \bigoplus_{l=0}^{\Delta} (A_l \cdot \mathbf{x}(k - l) \oplus B_l \cdot \mathbf{u}(k - l)), \quad (1.6)$$

où :

Δ est le plus grand marquage initial.

$A_l \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ est la matrice dont le terme $A_{l,ij}$ est égal à τ_{ij} qui correspond à la temporisation de la place p_i marquée à μ_{0i} . Si cette place n'existe pas, le terme $A_{l,ij}$ est égal à ϵ .

Les termes de $B_l \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ correspondent aux temporisations des places de sortie des transitions sources.

Remarque 2 Comme en algèbre standard, le signe de multiplication \otimes est remplacé par \cdot lorsqu'il est clair.

On s'intéresse particulièrement au fonctionnement au plus tôt des GETs. Cette évolution est donnée par :

$$\mathbf{x}(k) = \bigoplus_{l=0}^{\Delta} (A_l \cdot \mathbf{x}(k-l) \oplus B_l \cdot \mathbf{u}(k-l)),$$

Cette équation est implicite en général elle est remplacée par l'équation explicite (forme ARMA) donné par la plus petites solutions de l'équation précédente :

$$\mathbf{x}(k) = \bigoplus_{l=1}^{\Delta} (A_0^* \cdot A_l \cdot \mathbf{x}(k-l) \oplus A_0^* \cdot B_l \cdot \mathbf{u}(k-l)),$$

où, A_0^* est l'étoile de Kleene de la matrice A_0 . A partir de la forme ARMA, il est toujours possible de passer à la forme d'état suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = A \cdot \mathbf{x}(k-1) \oplus B \cdot \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(t) = C \cdot \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Pour les graphes d'événements temporisés cela signifie que :

- Toute place située entre deux transitions internes doit contenir au plus un jeton ;
- Toutes les places situées entre une transition source et une transition interne doivent être sans jetons ;
- Toutes les places situées entre une transition interne et une transition puits doivent être sans jetons.

Ce qui revient à augmenter le vecteur d'état du système.

Exemple :

Considérons le graphe d'événements P-temporisé donné par la Figure (1.4). En associant des

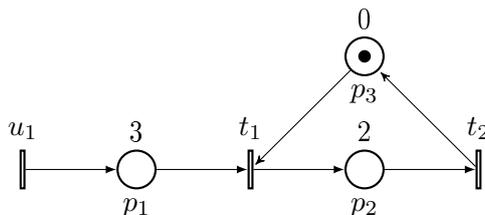


FIGURE 1.4: Exemple d'un graphe d'événements P-temporisé

fonctions dateurs $x_1(k)$, $x_2(k)$, $u_1(k)$, avec $k \geq 0$, aux transitions internes t_1 , t_2 et à la transition

source u_1 respectivement, les inégalités suivante sont obtenues :

$$\begin{cases} x_1(k) \geq u_1(k) + 3, \\ x_2(k) \geq x_1(k) + 2, \\ x_1(k) \geq x_2(k - 1), \end{cases}$$

Dans l'algèbre Max-plus, le franchissement au plus tôt des transitions est donné par :

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \max \{x_2(k - 1), u_1(k) + 3\}, \\ x_2(k) &= x_1(k) + 2, \end{aligned}$$

avec l'utilisation des opérateurs algébriques Max-plus, ces équations peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x_2(k - 1) \oplus u_1(k) \otimes 3, \\ x_2(k) &= 2 \otimes x_1(k), \end{aligned}$$

matriciellement, cela s'écrit :

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} \epsilon & e \\ 2 & \epsilon \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(k - 1) \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ \epsilon \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}(k),$$

ce qui correspond à l'équation d'état Max-plus du système modélisé par le GET de la Figure (1.4).

1.4.3 Modèle algébrique des graphes d'événements P-temporisés dans l'algèbre standard :

Dans cette partie, nous présentons un modèle qui utilise les dateurs, non pas dans l'algèbre Max-plus, mais dans l'algèbre standard. Chaque variable $x_i(k)$ représente la date du k -ième tir de la transition t_i .

En considérant le système d'inéquations(1.3) et le principe de l'écriture matricielle suivant :

$$x_n(k - \mu_n) + \tau_n \leq x_i(k) \Leftrightarrow x_n(k - \mu_n) - x_i(k) \leq -\tau_n$$

la forme symétrique dite aussi forme général est obtenue :

$$G \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k - \Delta) \\ \mathbf{x}(k + 1 - \Delta) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k - 1) \\ \mathbf{x}(k) \end{pmatrix} \leq -\boldsymbol{\tau}$$

avec,

$$G = (G_{\Delta} \ G_{\Delta-1} \ G_{\Delta-2} \ \dots \ G_1 \ G_0),$$

Δ est le plus grand marquage initial,

$\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur colonne des temporisations.

Chaque place p_i correspond à une ligne i de G qui contient les poids des arcs entrants et sortants relativement à la place p_i .

La matrice G_i contient les poids avec le signe plus, des arcs entrant dans les places et dont le marquage initial est μ_{0i} pour $\mu_{0i} \in [0, \Delta]$.

La matrice G d'un graphe d'événements permet une description synthétique du système correspondant. Elle est en quelque sorte l'analogue de la matrice d'incidence arcs-sommets de la théorie des graphes.

$$W = \sum_{i=0}^{\Delta} G_i$$

Exemple :

Considérons le graphe d'événements P-temporisé de la Figure(1.4). L'ensemble des inégalités qui décrivent ce graphe est exprimé par le système d'inégalités suivant :

$$\begin{cases} u_1(k) - x_1(k) \leq 3, \\ x_1(k) - x_2(k) \leq 2, \\ x_2(k - 1) - x_1(k - 1) \leq 0, \end{cases}$$

La formme matricielle correspondante est donnée comme suit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(k-1) \\ x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ u_1(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

avec, $G = (G_1 \ G_0)$,

$$\text{où, } G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } G_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5 Les graphes d'événements P-temporels et leurs modèles algébrique

Les graphes d'événements temporels sont une sous classe de réseaux de Petri temporels, introduits par Merlin (Merlin, 1974). Pour les graphes d'événements temporels, la contrainte temporelle s'exprime sous forme d'un intervalle associé aux transitions (t-temporels), ou aux places (P-temporels).

Développés dans (Khansa, 1996) et (Khansa 1997), les graphes d'événements P-temporels ont pour objectif la modélisation des systèmes dans lesquels le temps prend un aspect non déterministe. En effet, le temps de séjour associé à chaque place p_i n'est plus considéré déterminé comme pour les graphes d'événements temporisés, mais appartient à un intervalle de temps IS_i . Comme domaine d'application, on peut citer les systèmes de production (ligne de galvanoplastie, les chaines alimentaires, les manufactures comportant un four), les systèmes de transports...etc. Un travail de modélisation des graphes d'événements temporels dans l'algèbre des dioïdes ainsi qu'une classification des différentes sous-classes est présentée dans (Declerk, 2007)

Définition 1.5.1 ((Khansa, 1997)) *Un RdP P-temporel est défini par le doublet (\mathcal{R}, IS) où :*

- \mathcal{R} est un réseaux de Petri,
- $IS : P \rightarrow \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \cup \{+\infty\}$

$p_i \rightarrow IS_i = [a_i, b_i]$ avec $0 \leq a_i \leq b_i$,

avec IS_i définit l'intervalle statique du temps de séjour d'une marque dans la place p_i .

Fonctionnement d'un graphe d'événements P-temporel :

L'évolution d'un graphe d'événements P-temporels dépend non seulement de son marquage mais aussi des contraintes temporelles. Un jeton est disponible pour le franchissement d'une transition t_j dans l'intervalle de temps $[a_i, b_i]$ (un jeton doit rester dans une place p_i une durée minimale a_i , et la valeur b_i représente le temps de séjour maximale). Après le temps de séjour b_i le jeton est dit "mort" et le graphe est dit dans un état marques-mortes. Un état donné E_i dans un graphe d'événements p-temporels est marques-vivantes si toutes les marques dans μ_i sont vivantes (Khansa, 1997).

Définition 1.5.2 (fonctionnement admissible) *Un fonctionnement est admissible pour un réseau de Petri P-temporels, lorsque son évolution dynamique préserve la vivacité des jetons. En conséquence il ne mène pas à un état de blocage.*

1.5.1 Modèle algébriques des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre Max-plus

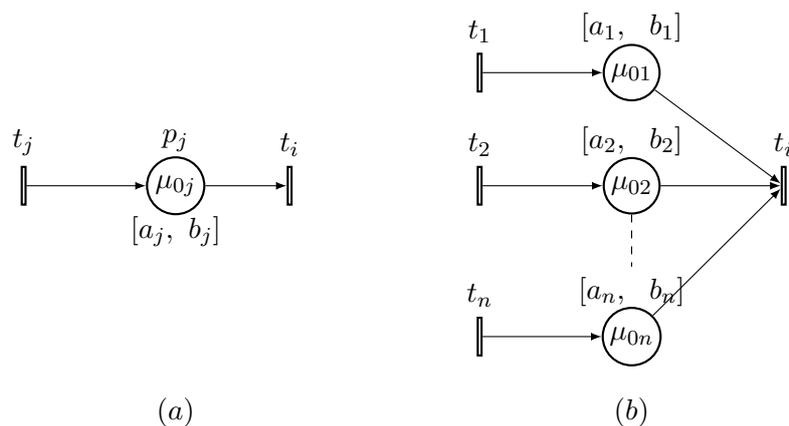


FIGURE 1.5: Parties d'un graphe d'événements P-temporel

Considérons la Figure(1.5.(a)) qui représente une partie d'un graphe d'événements P-temporel. $[a_j, b_j]$ est l'intervalle de temps associée à la place p_j ($j = 1..n$) et μ_{0j} le nombre de marques présents initialement dans la place p_j , le tir de la transition t_i aura lieu au plus tôt pour la k -ième fois après le tir de t_j pour la $(k - \mu_{0j})$ -ième fois, plus le temps de séjour q_j compris dans

l'intervalle $[a_j, b_j]$. Les deux dateurs $x_j(k)$ et $x_i(k)$ de la Figure (1.5.(a)) satisfont les inéquations suivantes :

$$x_i(k) \geq x_j(k - \mu_{0j}) + a_j \quad \text{et,} \quad x_i(k) \leq x_j(k - \mu_{0j}) + b_j$$

Si la transition t_i a n places en amont (voir Figure(1.5.(b))), nous obtenons les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(k) \geq x_1(k - \mu_{01}) + a_1 \\ x_i(k) \geq x_2(k - \mu_{02}) + a_2 \\ \vdots \\ x_i(k) \geq x_n(k - \mu_{0n}) + a_n \end{array} \right.$$

et,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(k) \leq x_1(k - \mu_{01}) + b_1 \\ x_i(k) \leq x_2(k - \mu_{02}) + b_2 \\ \vdots \\ x_i(k) \leq x_n(k - \mu_{0n}) + b_n \end{array} \right.$$

ces systèmes d'inéquations sont équivalents à :

$$x_i(k) \geq \max(x_1(k - \mu_{01}) + a_1, x_2(k - \mu_{02}) + a_2, \dots, x_n(k - \mu_{0n}) + a_n) \quad (1.7)$$

et,

$$x_i(k) \leq \min(x_1(k - \mu_{01}) + b_1, x_2(k - \mu_{02}) + b_2, \dots, x_n(k - \mu_{0n}) + b_n) \quad (1.8)$$

Dans l'algèbre des dioïdes, les inéquations précédentes peuvent se mettre sous forme d'inéquations linéaires donnés comme suit :

$$x_i(k) \geq \bigoplus_{j=1}^n x_j(k - \mu_{0j}) \otimes a_j \quad (1.9)$$

et,

$$x_i(k) \leq \bigwedge_{j=1}^n x_j(k - \mu_{0j}) \otimes b_j \quad (1.10)$$

Si on considère toutes les transitions du graphe, on obtient le modèle donné par la proposition suivante :

Proposition 1.5.1 *Pour qu'un graphe d'événements P-temporels respecte un fonctionnement admissible, la modélisation correspondant à chacune de ses transitions, non transitions sources, est donné par l'expression suivante :*

$$\bigoplus_{p_j \in \bullet t_i} (x_j(k - \mu_{0j}) \otimes a_i) \leq x_i(k) \leq \bigwedge_{p_j \in \bullet t_i} (x_j(k - \mu_{0j}) \otimes b_i)$$

où,

$\bullet t_i$ est l'ensemble des places d'entrées de la transition t_i et μ_{0j} est le marquage initiale de chacune de ces places.

1.5.2 Modélisation des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre conventionnelle

Dans l'algèbre standard, la forme générale du modèle d'un graphe d'événements P-temporels est donnée comme suit :

$$\begin{pmatrix} G^- \\ G^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k - \Delta) \\ \mathbf{x}(k - \Delta + 1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k - 1) \\ \mathbf{x}(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$$

Avec, $G^- = (G_{\Delta}^- \ G_{\Delta-1}^- \ G_{\Delta-2}^- \ \dots \ G_1^- \ G_0^-)$

et $G^+ = (G_{\Delta}^+ \ G_{\Delta-1}^+ \ G_{\Delta-2}^+ \ \dots \ G_1^+ \ G_0^+)$.

Chaque place correspond à une ligne de G^- qui contient les poids, de ses arcs entrants et sortants.

En particulier on a :

1. La matrice G_i^- contient les poids, avec le signe plus, des arcs entrant des places dont le marquage initiale est i , pour $i \in [0, \Delta]$.
2. La matrice G_0^- contient les poids, avec le signe moins, de l'arc sortant de chaque place dont le marquage initiale est nul (habituellement exprimé par $-W^-$).

On a donc $G_i^- \geq 0$ pour $i \in [1, \Delta]$ et $G_0^- \geq -W^-$. Un coefficient non nul de la matrice G_0^- peut être négatif ou positif. De la description ci-dessus sur le poids des arcs, la relation avec la matrice

d'incidence W est donnée par :

$$W = \sum_{i=0}^{i=\Delta} G_i^-$$

$$-W = \sum_{i=0}^{i=\Delta} G_i^+$$

Notons que chaque place présente une temporisation supérieur ou égale à l'infinie correspond à une contrainte $x_i(k) - x_j(k - m_l) \leq b_l$ avec $b_l = +\infty$. N'ayant pas d'effet sur l'évolution du système, chacune de ces contraintes peut donc être réitérée. Une autre possibilité est de supposer que chaque borne infinie est remplacée par une grandeur finie arbitrairement grande.

Modèle algébrique sur un horizon réduit :

Dans le but d'avoir un modèle équivalent tel que chaque place du graphe contienne au plus un jeton. La procédure est alors la suivante : $\mathbf{X}(k) = (X_0(k) \dots X_i(k) \dots X_{\Delta-1}(k))^t$, avec $X_i(k) = x(k - \Delta + i + 1)$. Par construction, on a :

$\mathbf{X}_{\Delta-1}(k) = \mathbf{x}(k)$ et $X_i(k) = X_{i+1}(k - 1)$ pour $i \in [0, \Delta - 2]$. Le système devient :

$$\begin{pmatrix} H \\ -H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}(k-1) \\ \mathbf{X}(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec,

$$H = \begin{pmatrix} G'_1 & G'_0 \\ V_{01} & V_{00} \end{pmatrix}, \text{ où,}$$

$$G'_1 = \begin{pmatrix} G_{\Delta} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } G'_0 = \begin{pmatrix} G_{\Delta-1} & G_{\Delta-1} & \dots & G_1 & G_0 \end{pmatrix}$$

V_{00} est une matrice identité, tandis que V_{01} est une matrice de dimension $((\Delta - 1) \cdot |T| \cdot \Delta)$ composée d'une sur-diagonale à coefficients -1 .

1.6 Modélisation des graphes d'événements P-temporels par un système d'équations linéaires implicites

1.6.1 Le modèle proposé

Notre contribution dans cette partie est l'introduction d'un modèle linéaire dans l'algèbre conventionnelle au moyen des fonctions dateurs associées à chaque transition d'un graphe d'événements P-temporisé ou P-temporel. Le théorème suivant caractérise l'évolution temporelle d'un graphe d'événements P-temporisé ou P-temporel :

Théorème 1.6.1 *Le comportement dynamique d'un graphe d'événements P-temporisé ou P-temporel correspond à la fonction non-décroissante $\theta(k)$ satisfaisant les équations suivantes :*

$$\begin{cases} \mathbb{E} \cdot \boldsymbol{\theta}(k) = \sum_{\tau=1}^{\tau=h} \mathbb{A}_{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}(k - \tau) + \mathbf{w}(k) + \mathbb{G} \cdot \mathbf{u}(k), \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{w}(k) \leq \mathbf{b}, \end{cases} \quad (1.11)$$

où, $\mathbb{E} \in \{-1, 0, 1\}^{|P| \times |T_x|}$, $\mathbb{A}_{\tau} \in \{-1, 0, 1\}^{|P| \times |T_x|}$, $G \in \{0, 1\}^{|P| \times |T_u|}$, $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{R}_+^{|P|}$, $h = \max(m_{oi})$ et $\theta_j(k) = \theta_{0j}$ pour $k \leq 0$.

Preuve 1 *La preuve est obtenue par construction. Considérons la partie d'un graphe d'événements P-temporel donnée par la Figure suivante :*

Pour la place p_i du graphe considéré, avec $t_i \in \bullet p_i$ et $t_j \in p_i \bullet$ on a :

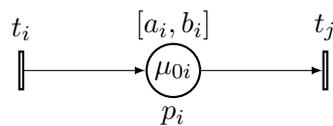


FIGURE 1.6: Partie d'un graphe d'événements P-temporel

$$\begin{cases} \theta_j(k) \geq \theta_i(k - \mu_{0i}) + a_i \\ \theta_j(k) \leq \theta_i(k - \mu_{0i}) + b_i \end{cases} \quad (1.12)$$

avec,

a_i est le temps de séjour minimum associé à la place p_i ,

b_i est le temps de séjour maximum associé à la place p_i ,

μ_{0i} est la marquage initial de la place p_i ,

en ajoutant des variables d'écart à (1.12) on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \theta_j(k) = \theta_i(k - \mu_{0i}) + a_i + s(k), & s(k) \geq 0 \\ \theta_j(k) = \theta_i(k - \mu_{0i}) + b_i - s'(k), & s'(k) \geq 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

avec $a_i + s(k) = b_i - s'(k) = w_i(k)$ et $a_i \leq w_i(k) \leq b_i$, nous obtenons :

$$\theta_j(k) = \theta_i(k - \mu_{0i}) + w_i(k) \quad (1.14)$$

où $w_i(k)$ représente le temps de séjour d'une marque dans la place p_i .

si p_i est reliée à une transition source, on remplace dans ce cas $\theta_i(k)$ par $u_i(k)$.

En considérant toutes les places d'un graphe d'événements P-temporel, le système d'équations (1.11) est obtenu.

■

Modèle d'état canonique

Transformation 1 Pour obtenir un modèle d'état canonique, chaque place p_i contenant plus d'une marque ($\mu_{0i} > 1$) est décomposée en μ_{0i} places, et $\mu_{0i} - 1$ transitions intermédiaires sont ajoutées, de telle sorte que chaque place du RdP contienne au plus une marque. Cette même transformation a été adoptée dans l'algèbre Max-plus, et dans (Declerck et al, 2007) pour synthétiser la représentation sous forme d'un système d'inéquations linéaires.

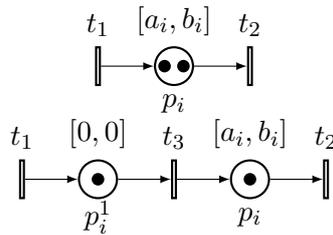


FIGURE 1.7: Transformation 1, utilisée pour dupliquer une place

Corollaire 1.6.1 *Le comportement dynamique d'un graphe d'événements est décrit par le système à événements discrets implicite contraint de la forme :*

$$\begin{cases} E \cdot \mathbf{x}(k+1) = A \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{q}(k+1) + G \cdot \mathbf{u}(k+1), \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{q}(k+1) \leq \mathbf{b}, \end{cases} \quad (1.15)$$

où,

$\mathbf{u}(k + 1)$ est le vecteur dateur associé aux transitions sources,

$\mathbf{x}(k + 1)$ est le vecteur dateur associé aux transitions internes,

$\mathbf{x}(k) = x_0 \quad \forall k \leq 0$, et \mathbf{x}_0 est un état initial.

$\mathbf{q}(k + 1)$ est le vecteur des temps de séjours,

\mathbf{a} et \mathbf{b} sont les vecteurs des temporisations minimum et maximum des places du graphe obtenu.

Preuve 2 Si le marquage initial d'un graphe d'événements P-temporel est limité à 1 ou 0, le modèle (1.11) se met sous la forme d'une représentation d'état généralisée donnée par (1.15).

■

Comme on peut le voir sur la Figure (1.7), une durée nulle $([0, 0])$ est associée à chaque place ajouté. Cela signifie que les jetons n'ont pas séjourné initialement dans leurs places. Cela dit dans certaines application, les lignes de galvanoplastie par exemple ((Bonhomme, 2010), (Collart, 1997)) les auteurs supposent que le système est en fonctionnement initialement. Ainsi, le temps de séjour des jetons initialement présent dans le graphe peut ne pas être nulle. De ce fait, la transformation 1 ne convient pas pour de tels cas.

Transformation 2 Pour tenir compte des temps de séjour des jetons initialement présent dans le GE P-temporel, on propose la transformation 2 donnée par la Figure(1.8). Ainsi, pour obtenir une représentation d'état standard, nous décomposons chaque place contenant μ_{0i} jetons ($\mu_{0i} \geq 1$) en $\mu_{0i} + 1$ places, où chaque place contiendra aux plus un jetons, et nous ajoutons μ_{0i} transitions intermédiaire.

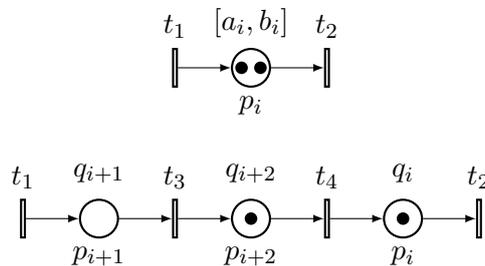


FIGURE 1.8: La transformation 2 utilisée pour dupliquer une place.

Nous décrivons cette décomposition par l'exemple de la Figure (1.8). On suppose que initialement les deux jetons de la place p_i peuvent avoir différents âges. Le jeton dans la place p_{i+2} a déjà séjourné un temps égale à q_{i+1} , et le jeton dans la place p_i a séjourné un temps égale à

$q_{i+1} + q_{i+2}$. Ainsi, la contrainte sur le temps de séjour $a_i \leq q_i \leq b_i$ va se réécrire sous la forme $a_i \leq q_{i+1i} + q_{i+2} + q_i \leq b_i$, avec $q_{i+1} \geq 0$, $q_{i+2} \geq 0$, $q_i \geq 0$

Les contraintes temporel après la transformation 2 sont obtenues comme suit :

La contrainte sur le temps de séjour associé à une place non marqué p_i est donné comme suit :

$$a_i \leq q_i \leq b_i, \quad (1.16)$$

La contrainte sur le temps de séjour associé à une place marquée p_i décomposée en $\mu_{0i} + 1$ places est donnée comme suit :

$$a_i \leq \sum_{l=i, \dots, i+\mu_{0i}} q_l \leq b_i, \quad (1.17)$$

Aussi, le temps de séjour associé à chaque place ajoutée p_l doit être positive :

$$q_l \geq 0, \quad (1.18)$$

Par la concaténation de (1.16),(1.17) et (1.18) les contraintes temporelles sont données comme suit :

$$\mathbf{a}' \leq L \cdot \mathbf{q}(k) \leq \mathbf{b}'. \quad (1.19)$$

où \mathbf{a}' et \mathbf{b}' sont les vecteurs des temporisations minimum et maximum et $\mathbf{q}(k)$ est le vecteur du temps de séjour du graphe d'événements P-temporel, et L est une $|P'| \times |P'|$ matrice, avec $|P'|$ est le nombre de places après duplication.

Si on considère les dateurs associés aux transitions ajoutées du graphe d'événements P-temporel, nous obtenons un modèle implicite discret de la forme (1.15), qui doit vérifier les contraintes temporel de la forme (1.19).

Remarque 3 Si on décompose la matrice W^+ définie précédemment en une somme de deux matrices $W^+ = W^{0+} + W^{1+}$ relié au nouveau marquage (0 ou 1), avec :

$$W_{ij}^{0+} = \begin{cases} W_{ij}^+ & \text{si } \mu_{0i} = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad W_{ij}^{1+} = \begin{cases} W_{ij}^+ & \text{si } \mu_{0i} = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

Les matrices E et A sont donné par :

$$\begin{cases} (E - G) = W^- - W^{0+} \\ (A \ 0) = W^+ - W^{0+} \end{cases} .$$

Où 0 est un vecteur de zeros.

1.6.2 L'unicité de la solution

Dans cette partie, on s'est particulièrement intéressé au cas où la solution du modèle (1.15) admet une solution unique. On suppose que le système (1.15) a au moins une solution, le système (1.15) a une solution unique si et seulement si la matrice E est inversible à gauche.

Soit E une matrice, alors E est inversible à gauche si et seulement si $C = E^t \cdot E$ est non-singulière (Bernstein, 2009).

Propriété 1.6.1 *La matrice $C = E^t \cdot E$ est une matrice à diagonale dominante*

Preuve 3 *Soit \mathcal{N} un graphe d'événements P-temporel, et E sa matrice correspondante. La preuve est basée sur une interprétation des éléments des matrices E et C en termes de réseaux de Petri. Les éléments E_{ij} de E sont donnés comme suit :*

$$E_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } p_i \in \bullet t_j, \\ -1 & \text{si } p_i \in O_j^{\text{un}}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.20)$$

Les éléments C_{ii} , $i = 1, \dots, n$ de la matrice C sont alors donnés par :

$$C_{ii} = \sum_{k=1}^n E_{ik}^t \cdot E_{ki}.$$

Puisque $E_{ik}^t = E_{ki}$, une conséquence direct de cela est que les éléments diagonaux C_{ii} sont toujours strictement positive.

A partir de l'interprétation des éléments de E en termes de graphe d'événements, l'interprétation des éléments C_{ii} peut être déduite et ils sont donnés comme suit :

$$C_{ii} = |\bullet t_i| + |O_i^{\text{un}}|,$$

Les éléments C_{ii} de C représente le nombre de places d'entrée plus le nombre de places de sortie non marquées de la transition t_i .

Les élément C_{ij} de la matrice C sont donnés par :

$$C_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq j}}^n E_{ik}^t \cdot E_{kj}, \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

A partir de l'équation (1.20), le terme $E_{ik}^t \cdot E_{kj} \neq 0$ si la place $p_k \in \bullet t_j$ et $p_k \in O_j^{\text{un}}$ ce qui veut dire que p_k doit être une place non marquée et l'élément C_{ij} est négatif.

En plus, les inégalités suivantes

$$C_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |C_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

sont vérifiées puisque le terme C_{ii} représente le nombre de places d'entrées (marqué ou non) plus le nombre de places de sorties non marquées reliées à la transition t_i et le terme $\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |C_{ij}|$, $i = 1, \dots, n$, représente le nombre de places non marquées reliées à la transition t_i . Il est clair que la dominance diagonale est toujours garantie. ■

Une matrice à diagonale dominante est inversible dans deux cas. Ainsi, la matrice C est inversible si elle est à diagonale strictement dominante ou irréductible à diagonale dominante (Varga, 1999).

Lemme 1.6.1 Soit $G(C)$ le graphe associé à la matrice $C = E^t \cdot E$. Alors $G(C)$ est soit fortement connexe ou composé de composantes fortement connexes.

Preuve 4 Soit \mathcal{N} un graphe d'événements P-temporel, et E sa matrice correspondante. Soit $G(C)$ le graphe associé à la matrice $C = E^t \cdot E$. Alors si deux noeuds v_i et v_j sont reliés par un arc dirigé de v_i à v_j un autre arc relie v_j à v_i , puisque C est une matrice symétrique ($C = E^t \cdot E$). Ainsi, si v_i et v_j sont reliés par un chemin orienté v_{ij} alors le chemin inverse v_{ji} existe. Le noeud v_i est relié à lui même par un arc orienté puisque les éléments diagonaux de C sont toujours non-nul. On peut déduire alors que le graphe $G(C)$ est fortement connexe ou composé de composantes fortement connexe (sous-graphe fortement connexe). ■

La matrice C peut être mise sous forme de bloc diagonaux (peut être, après renumérotions des transitions) du graphe d'événements. comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} B^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B^z \end{pmatrix}$$

Chaque bloc correspond à une composante fortement connexe de $G(C)$ et z ($z \geq 1$) est le nombre de composantes fortement connexes du graphe $G(C)$. Plus précisément chaque sous-matrice B^r ($r = 1, \dots, z$) est une matrice à diagonale dominante. Ainsi, la matrice C est inversible si et seulement si les sous-matrices B^r sont inversibles pour tout $r = 1, \dots, z$.

Remarque 4 Des résultats précédent, on peut déduire que :

- Un arc reliant deux noeuds v_i et v_j de $G(C)$ correspond à une place non-marquée reliant les transitions t_i et t_j .
- Un chemin reliant deux noeuds v_i et v_j de $G(C)$ correspond à un chemin de places non-marquées reliant les transitions t_i et t_j .
- Si deux transitions t_i et t_j sont reliées seulement par des places marqués (ou des chemins de places marqué) dans le graphe d'événements P-temporel, leurs noeuds correspondant v_i et v_j dans $G(C)$ ne sont pas reliés.

Définition 1.6.1 On appelle sous-graphe non-marqué d'un graphe d'événements P-temporel \mathcal{N} , un sous-graphe \mathcal{N}_i composé de transitions internes reliés par des places non marquées.

Selon la dernière définition, chaque matrice B^r de C correspond à un sous-graphe non marqué \mathcal{N}_i du graphe d'événements \mathcal{N} considéré.

Considérons le graphe d'événements P-temporel donné par la Figure (1.9).

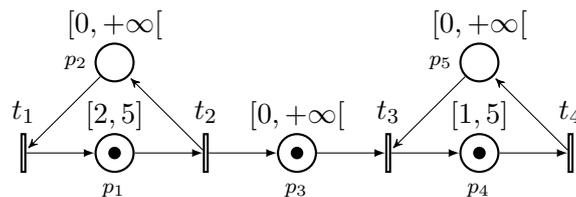


FIGURE 1.9: Exemple d'un graphe d'événements P-temporel

Nous supprimons de ce graphe d'événements toutes les places marquées. Deux sous graphes \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 composées seulement de transitions reliées par des places non marquées sont obtenus (voir Figure (1.10))

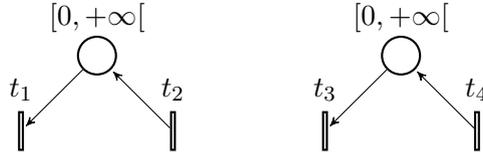


FIGURE 1.10: sous-graphes non-marqués

Des Figures (1.9) et (1.10), on déduit directement le graphe associé $G(C)$ (sans le calcul de C) donné par la Figure (1.11)

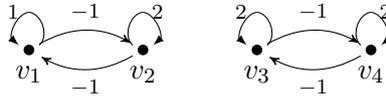


FIGURE 1.11: Le graphe associé $G(C)$ du graphe d'événements P-temporel de la Figure(1.9)

On distingue les situations suivantes :

1. Un sous-graphe non marqué unique : si le graphe associé est composé d'une unique composante fortement connexe.
2. Un sous-graphe d'entrée non marqué : si il est relié aux autres sous-graphes non-marqués seulement par des places de sorties non marquées.
3. Un sous-graphe interne non marqué : si il est relié à un autre sous-graphe non marqué par des places de sorties et d'entrées marqué.
4. Un sous-graphe de sortie non marqué : si il est relié aux autres sous- graphes non marqués seulement par des places d'entée marqué.

Propriété 1.6.2 Une sous-matrice B^r correspondant à un sous-graphe interne ou de sortie non marqué \mathcal{N}_i est toujours inversible.

Preuve 5 Soit \mathcal{N} un graphe d'événements P-temporel, et E sa matrice correspondante.

La diagonale dominance stricte est garantie pour au moins une ligne i de B^r si et seulement si les inégalités suivante sont vérifiées pour une ligne i :

$$|B_{ii}^r| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |B_{ij}^r|$$

Sur une ligne i de B^r on a :

$$\sum_{i \neq j} |B_{ij}^r| = \sum \left(|O_j^{\text{un}}| + |I_j^{\text{un}}| \right),$$

Selon l'interprétation des éléments C_{ii} et C_{ij} en terme de graphe d'événements, la dominance diagonale stricte est assurée si et seulement si :

$$|\bullet t_i| + |O_j^{\text{un}}| > |I_j^{\text{un}}| + |O_j^{\text{un}}|,$$

On remarque que la quantité $|I_j^{\text{un}}|$ est comprise entre deux valeurs :

$$0 \leq |I_j^{\text{un}}| \leq |\bullet t_i|.$$

En particulier, $|I_j^{\text{un}}| < |\bullet t_i|$ si t_i a au moins une place d'entrée marqué.

On déduit que l'inégalité est toujours stricte au moins pour une ligne de la sous-matrice B^r correspondant à un sous-graphe interne ou de sortie non marqué puisque ils ont au moins une transition avec une place d'entée marqué.

■

Propriété 1.6.3 Une sous-matrice B^r correspondant à un sous-graphe unique ou d'entée est inversible si et seulement si son sous-graphe associé \mathcal{N}_i contiennent au moins une transition t_j relié à une transition et/ou à une place d'entré marqué.

Preuve 6 Soit \mathcal{N} un graphe d'événements , et E sa matrice correspondante.

Cette preuve est similaire à celle donné pour la Propriété 2.

Puisque on considère un sous-graphe d'entrée, on remarque que : $|I_i^{\text{un}}| < |\bullet t_i|$ si une transition t_i est reliée à une transition source et/ ou \mathcal{N}_i a au moins une place d'entrée marquée (cette place marquée est surement une place d'entrée de la transition t_i). On déduit que la dominance diagonale stricte est garantie pour au moins une ligne pour le sous-graphe d'entrée si et seulement si une des conditions citées est respectées.

■

Proposition 1.6.1 *La matrice E d'un graphe d'événements P-temporel est inversible à gauche si et seulement si les matrices B^r correspondant aux sous-graphe unique ou d'entrée sont inversible.*

Preuve 7 *Claire à partir des propriétés 1.6.1, propriété 1.6.2, propriété 1.6.3 et le Lemme 1.6.1.*

■

Proposition 1.6.2 *Si le graphe d'événements P-temporel considéré contient des circuits non vide (s'ils existent), alors sa matrice correspondante E est inversible à gauche.*

Preuve 8 *On a soit :*

1. *Le sous-graphe unique ou d'entrée est acyclique (sans circuits) : dans ce cas le sous-graphe est surement relié à au moins une transition source. Ainsi selon la propriété 1.5.3 sa matrice correspondante E est inversible à gauche.*
2. *Le sous-graphe unique ou d'entrée contient au moins un circuit : dans ce cas, Le sous-graphe contient surement au moins une transition avec une place marqué (puisque les circuits sont non vides). Ainsi, selon la propriété 3, sa matrice correspondante E est inversible à gauche*

■

En supposant que E est inversible à gauche, le système (1.15) peut être réécrit sous la forme explicite linéaire suivante :

$$\mathbf{x}(k+1) = \tilde{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \tilde{B} \cdot \mathbf{q}(k+1) + \tilde{G} \cdot \mathbf{u}(k+1), \quad (1.21)$$

où,

$\tilde{A} = E^l \cdot A$, $\tilde{B} = E^l$, $\tilde{G} = E^l \cdot G$ avec E^l est l'inverse à gauche de E .

Considérons le graphe d'événements donné par la Figure(1.9). Selon la proposition 1.6.2, sa matrice correspondante E est inversible à gauche.

Ce résultat peut être vérifier. Le comportement dynamique du graphe d'événements P-temporel de la Figure(1.9) peut être exprimé sous la forme (1.15) avec :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix},$$

avec,

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

puisque les sous-matrices B^1 , et B^2 sont inversible, on déduit que C est inversible, ce qui implique que E est inversible à gauche.

L'inverse à gauche de E est E^l donné comme suit : $E^l = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

1.7 conclusion

Après quelques rappels sur la théorie des graphes, les systèmes d'équations linéaires, les réseaux de Petri et les différentes modélisations des graphes d'événements P-temporisés et P-temporels, nous avons introduit un modèle algébrique dans l'algèbre standard dédié aux systèmes à événements discrets modélisés par les graphes d'événements P-temporisés ou P-temporels. En associant à chaque transition des graphes considérés une fonction dateurs, un système implicite linéaire à événements discrets a été obtenu. Aussi, nous avons prouvé que pour les graphes d'événements P-temporisés ou P-temporels avec des circuits non vides (non bloquant), le modèle est équivalent à un système linéaire invariant.

Chapitre 2

Commande des graphes d'événements P-temporels

2.1 Introduction

Une fois que l'on a établi un modèle correcte d'un système et qu'on a su en déduire un système d'équations qui lui correspond, on peut aborder la problématique de la commande. De manière analogue aux systèmes continus, on entend par commande d'un système à événements discrets son pilotage par le contrôle de ses entrées afin d'atteindre des performances spécifiées au préalable.

Dans la littérature scientifique, le problème de commande des graphes d'événements P-temporels a été abordé selon deux approches, la commande en boucle ouverte, et la commande en boucle fermées. Dans le cadre de la commande en boucle ouverte, les auteurs dans ((Guezzi, 2010), (Decklerk, 2013), Chapitre 3 dans (Decklerk, 2013), (Decklerk, 2018)) se sont intéressés au calcul des dates de franchissement des transitions au moyen de la programmation linéaire et du modèle à intervalle présenté dans le chapitre 1 section 1.5, ou en utilisant des graphes associés aux graphes d'événements P-temporels ((Khansa, 1996), (Bonhomme, 2010)), ou encore en utilisant la théorie des graphes et l'algèbre des dioïdes ((Spacek et al, 2017), (Lee et al, 2014)), ou comme dans ((De Schutter et al, 2001), (Declerck et al, 2014)) où les auteurs ont adopté la méthode de la commande prédictive pour le calcul d'une commande optimale. Dans le contexte de la commande en boucle fermée des graphes d'événements P-temporels, les auteurs dans ((Amari, 2012), (Houssin et al, 2007), (Houssin et al, 2013), (Maia et al, 2011), (Tebani et al, 2016)) ont

synthétisé des retours d'état dans l'algèbre Max-plus, leur méthode est basée sur la modélisation du système considéré par un graphe d'événements P-temporisé avec contraintes temporels et l'algèbre Max-plus a été utilisée pour décrire le comportement dynamique des systèmes considérés par des équations linéaires.

Le premier objectif dans ce chapitre est la commande en boucle ouverte c'est-à-dire : le calcul des instants de franchissement des transitions et des réglages initiaux des temps de séjours qui permettent d'atteindre les performances optimales.

Le second objectif est la synthèse de lois de commande en boucle fermée qui garantissent l'invariance positive des trajectoires, la contractivité et la stabilité asymptotique du système considéré. La propriété d'invariance positive d'un domaine relativement aux trajectoires d'un système dynamique est une propriété très générale, qui peut s'appliquer en particulier à des domaines d'états continus ou discrets. Par définition, un domaine d'états est positivement invariant pour un système si toute trajectoire d'état de ce système ayant comme état initial un point du domaine considéré est entièrement contenue dans ce domaine. Lorsque les domaines d'invariance considérés sont fermés, bornés et contiennent l'origine de l'espace d'état, la propriété d'invariance positive assure la stabilité du système.

La propriété d'invariance s'applique aussi bien à des domaines discrets qu'à des domaines continus. Pour les systèmes en temps discret, la propriété d'invariance positive peut être représentée par une condition d'inclusion de polyèdres. Dans le cas où le système et le domaine considérés sont un système linéaire et un polyèdre respectivement. Il suffit alors d'appliquer le Lemme de Farkas étendu (Hennet, 1989) pour traduire la condition d'inclusion sous forme de relations algébriques. Ainsi, l'invariance positive de domaines polyédriques a été caractérisée par des conditions algébriques simples : inéquations matricielles linéaires.

Dans le cas des systèmes à événements discrets, la difficulté réside dans la caractérisation de cette propriété. Dans cette perspective, plusieurs types de modèles ont été étudiés : les modèles du type : réseaux de files d'attente et les réseaux de Petri (Hennet, 1994). Cependant, il n'a pas été possible d'obtenir une caractérisation explicite de la propriété d'invariance positive à partir de ces modèles. Dans notre travail, on considère les graphes d'événements P-temporels modélisés par des modèles implicites linéaires introduits dans le chapitre 1.

Ce chapitre est organisé comme suit ; dans la première partie on s'est particulièrement intéressé à l'évaluation de performance des graphes d'événements P-temporels moyennant la

programmation linéaire et le modèle établie dans le chapitre 1 section 1.6 précédant. En plus des bornes minimum et maximum du temps de cycles, les temps de séjours initiaux sont obtenus.

Dans la seconde partie, on synthétise une loi commande en boucle fermée. En utilisant la propriété d'invariance positive des domaines polyédrales, on calcul des gains de retour d'état qui garantissent non seulement le respect des contraintes imposées sur la commande mais aussi la stabilité asymptotique du vecteur d'état. Les conditions obtenues sont toutes nécessaires et suffisantes. Dans la dernière partie de ce chapitre, on propose d'appliquer les résultats établi à un workshop. Nous commençons par la description de cette cellule de production, puis nous donnons les résultats numériques appliqués à l'exemple considéré.

2.2 Evaluation de Performance

On propose dans cette section, une techniques permettant de calculer les bornes : minimale et maximale du temps de cycle et les réglages initiaux des temps de séjour. A partir du modèle algébrique introduit dans le chapitre précédant, nous montrons que les temps de cycle minimal et maximal peuvent tout simplement être obtenus moyennant l'utilisation de la programmation linéaire. Parmi les travaux portant sur le calcul du temps de cycle des graphes d'événements P-temporels : (Khansa, 1997) où l'auteur utilise la théorie des graphes est l'analyse des circuits, d'un graphe associé au graphe d'événements P-temporel. Dans ((Guezzi, 2010), (Declerck, 2013), (Declerck, 2018)) l'évaluation de performance des graphes d'événements P-temporels en utilisant la programmation linéaire, l'approche s'appuie sur la construction du modèle algébrique et l'application d'un algorithme de la programmation linéaire.

Définition 2.2.1 *Le temps de cycle noté λ , d'un graphe d'événements, est le temps moyen séparant deux tirs consécutifs d'une transition. Pour un système de production, il correspond au temps moyen séparant deux pièces produites.*

Afin d'obtenir la borne maximale et la borne minimale du temps de cycle, nous supposons que le graphe d'événements P-temporel suit un comportement 1-periodique. Le fonctionnement 1-périodique constitue un fonctionnement réalisable des graphes d'événements P-temporel. Dans ce mode de fonctionnement, une période fixée sépare deux franchissements successifs des transitions. Par conséquent, la connaissance des premières dates de franchissements des transitions et de la période de fonctionnement sont suffisantes pour décrire complètement ce fonctionnement.

Un comportement 1-periodique est défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \lambda \cdot \mathbf{1} \\ \mathbf{u}(k+1) = \mathbf{u}(k) + \lambda \cdot \mathbf{1} \end{cases}, \quad (2.1)$$

où, $\mathbf{u}(k)$ et $\mathbf{x}(k)$ sont les dates du k -ième franchissement des transitions sources et transitions internes, λ est le temps de cycle et $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^t$.

En remplaçant dans le modèle algébrique décrivant le comportement d'un graphe d'événements P-temporels c'est-à-dire $E \cdot \mathbf{x}(k+1) = A \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{q} + G \cdot \mathbf{u}(k+1)$ le terme $\mathbf{x}(k+1)$ par $\mathbf{x}(k) + \lambda \cdot \mathbf{1}$ et le terme $\mathbf{u}(k+1)$ par $\mathbf{u}(k) + \lambda \cdot \mathbf{1}$. Aussi, pour une raison de simplification, on remplace $\mathbf{x}(k)$ par \mathbf{x} et $\mathbf{u}(k)$ par \mathbf{u} . On obtient ainsi :

$$(E - A) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{q} - \lambda \cdot (E \cdot \mathbf{1} - G \cdot \mathbf{1}) + G \cdot \mathbf{u},$$

soit

$$(E \cdot \mathbf{1} - G \cdot \mathbf{1}) \cdot \lambda = (A - E) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} + G \cdot \mathbf{u}$$

Les contraintes imposées sur les temps de séjour associés aux places sont exprimées par :

$$\mathbf{a} \leq L \cdot \mathbf{q} \leq \mathbf{b}$$

Pour garantir la positivité des dates de franchissement des transitions l'inégalité suivante doit être considéré :

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Le temps de cycle minimum et maximum et les temps de séjour optimaux associés aux places peuvent être calculer en résolvant le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{Minimiser (Maximiser)} \lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{q}} \\ \text{soumis aux contraintes :} \\ (E \cdot \mathbf{1} - G \cdot \mathbf{1}) \cdot \lambda = (A - E) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} + G \cdot \mathbf{u}, \\ \mathbf{a} \leq L \cdot \mathbf{q} \leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.2)$$

En appliquant un algorithme de la programmation linéaire, on peut ainsi déterminer la valeur optimale de λ (les temps de cycle minimum et maximum) et les temps de séjours qui permettent d'obtenir ses performances optimales,

2.2.1 Exemple

On considère le graphe d'événements P-temporel donné par la Figure (2.1) :

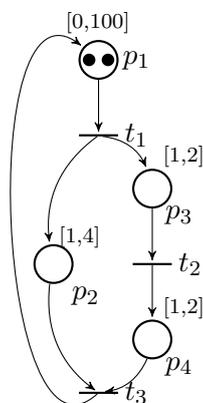


FIGURE 2.1: Exemple d'un graphe d'événements P-temporel.

En associant des fonctions dateur aux transitions, le système d'équations suivant est obtenu,

$$\begin{cases} \theta_1(k) = \theta_3(k-2) + \omega_1(k), \\ \theta_3(k) - \theta_1(k) = \omega_2(k), \\ \theta_2(k) - \theta_1(k) = \omega_3(k), \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) = \omega_4(k), \end{cases}$$

où,

$\theta_1(k)$, $\theta_2(k)$ et $\theta_3(k)$ sont les dateurs associés aux transitions t_1 , t_2 et t_3 respectivement, $\omega_1(k)$, $\omega_2(k)$, $\omega_3(k)$ et $\omega_4(k)$ sont les temps de séjours associés aux places p_1 , p_2 , p_3 et p_4 respectivement.

Pour obtenir le modèle implicite linéaire discret, nous considérons la transformation 1 des places contenant plus d'une marque, le graphe de la Figure (2.2) est obtenu. Le comportement dyna-

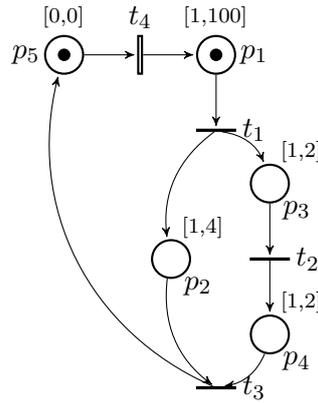


FIGURE 2.2: Modèle équivalent du graphe d'événements P-temporel de la Figure (2.1).

mique du système peut être représenté par le modèle implicite linéaire suivant ;

$$E \cdot \mathbf{x}(k+1) = A \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{q}(k+1) + G \cdot \mathbf{u}(k+1)$$

avec,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}(k+1) = \begin{pmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \\ q_3(k+1) \\ q_4(k+1) \end{pmatrix}, \quad \text{et } G = 0,$$

$$\text{tel que, } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \\ q_4(k) \\ q_5(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 100 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En résolvant le problème de programmation linéaire (2.2), on obtient la borne supérieure $\lambda_{max} = 4$ et la borne inférieure $\lambda_{min} = 2$.

Remarque 5 Avec une condition initiale sur le vecteur d'état $\mathbf{x}(1)$ et les vecteurs d'entrée \mathbf{u} et \mathbf{q} , on peut atteindre une trajectoire désirée. En évidence, il s'agit d'une commande en boucle ouverte. Il est bien connu que la commande en boucle ouverte est sensible aux perturbations. Cela signifie que la trajectoire peut diverger de celle désirée si le système est perturbé. Pour remédier à cet inconvénient, nous calculons dans ce qui suit, une loi de commande en boucle fermée permettant

d'assurer la stabilité et la robustesse vis-à-vis d'éventuelles perturbations temporelles.

2.3 Commande par invariance

L'idée de base de la commande par invariance est de contraindre l'état du système à évoluer dans un domaine inclus dans le domaine défini par les contraintes. L'application la plus simple de cette théorie à la résolution de problèmes de commandes sous contraintes consiste à vérifier l'existence et le calcul d'une loi de commande par retour d'état linéaire qui rend positivement invariant le polyèdre défini par les contraintes. Dans cette optique, cette partie est consacrée à la détermination de lois de commande par retour d'état qui impose l'invariance positive et la cotractivité des domaines polyédriques définie par les contraintes sur l'état et la commande ainsi que la stabilité asymptotique du système. Une formulation algébrique du problème est proposée. Le retour d'état fourni les temps de séjour des places et les dates de franchissement des transitions d'entrées qui permettent d'atteindre asymptotiquement une trajectoire désirée.

Hypothèse 2.3.1 *Nous supposons dans la suite que toutes les transitions des graphes d'événements considérés sont contrôlables.*

L'hypothèse 2.3.1 assure que les temps de séjour des places peut effectivement être contrôlés.

2.3.1 Formulation du problème

Considérons la classe de systèmes à événements discrets décrite par le modèle linéaire discret suivant :

$$E \cdot \mathbf{x}(k+1) = A \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{q}(k+1) + G \cdot \mathbf{u}(k+1)$$

En supposant que la matrice E est inversible à gauche, le modèle précédant devient linéaire explicite et il est donné comme suit :

$$\mathbf{x}(k+1) = \tilde{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \tilde{B} \cdot \mathbf{q}(k+1) + \tilde{G} \cdot \mathbf{u}(k+1),$$

avec, $\tilde{A} = E^l \cdot A$, $\tilde{B} = E^l$ et $\tilde{G} = E^l \cdot G$.

Etant donné une trajectoire 1- périodique désirée $\mathbf{z}(k)$, $k \in \mathbb{N}$, qui satisfait

$$\mathbf{z}(k+1) = \tilde{A} \cdot \mathbf{z}(k) + \tilde{B} \cdot \mathbf{q}_z + \tilde{G} \cdot \mathbf{u}_z(k+1),$$

avec, \mathbf{q} est le vecteur des temps de séjours désirés, et \mathbf{u} est le vecteur des dates de franchissement désirées des transitions sources.

En prenant l'erreur $\mathbf{e}(k)$ entre l'état désiré \mathbf{z} et l'état courant \mathbf{x} comme suit :

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{z}(k) - \mathbf{x}(k)$$

On aboutit à :

$$\mathbf{e}(k+1) = \tilde{A} \cdot \mathbf{e}(k) - \tilde{B} \cdot \mathbf{q}(k+1) + \tilde{B} \cdot \mathbf{q}_z + \tilde{G} \cdot \bar{\mathbf{u}}(k+1), \quad (2.3)$$

avec $\bar{\mathbf{u}}(k+1) = \mathbf{u}_z(k+1) - \mathbf{u}(k+1)$.

En considérant la classe de système décrit par l'équation (2.3), contrôlé par la boucle fermée formulée comme suit :

$$\bar{\mathbf{u}}(k+1) = F_1 \cdot \mathbf{e}(k), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{q}(k+1) = F_2 \cdot \mathbf{e}(k) + \mathbf{q}_z, \quad (2.5)$$

Le système (2.3) en boucle fermée est donné par

$$\mathbf{e}(k+1) = A_{cl} \cdot \mathbf{e}(k), \quad (2.6)$$

où, $A_{cl} = \tilde{A} + \tilde{G} \cdot F_1 - \tilde{B} \cdot F_2$.

2.3.2 Les domaines définits par les contraintes

Puisque les contraintes sont linéaires, on aboutit au fait qu'elles définissent des polyèdres convexes.

Définition 2.3.1 (Ensemble convexe) Un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe, si pour tout $x_1 \in \mathcal{S}$ et $x_2 \in \mathcal{S}$, si la condition suivante est vérifiée :

$$\alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2 \in \mathcal{S}, \forall \alpha \in [0, 1].$$

Définition 2.3.2 (Polyèdre) Un ensemble $\mathcal{P}(G, \mathbf{g}) \subset \mathbb{R}^n$ donnée par l'intersection d'un nombre

fini q de demi-plans défini par :

$$P(G, \mathbf{g}) = \{x \in \mathbb{R}^n, G \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{g}\}, \quad (2.7)$$

est appelé polyèdre (ou ensemble polyédrique), où $G \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^q$, $q, n \in \mathbb{N}^*$.

- Un polytope est un polyèdre fermé et borné.
- L'intersection de deux polyèdres est un polyèdre.

a/Les contraintes définies par la commande :

Pour garantir la non-décroissance des dates de franchissement des transitions sources la contrainte suivante sur la commande $\mathbf{u}(k)$ doit être respecter

$$\mathbf{u}_z(k) \leq \mathbf{u}(k+1) \leq \mathbf{u}_z(k+1),$$

Le fonctionnement considéré est 1-périodique c'est-à-dire $\mathbf{u}_z(k+1) = \mathbf{u}(k) + \lambda_z \cdot \mathbf{1}$, ce qui est équivalent à :

$$-\lambda_z \cdot \mathbf{1} \leq \bar{\mathbf{u}}(k+1) \leq \mathbf{0},$$

ce qui conduit à :

$$-\lambda_z \cdot \mathbf{1} \leq F_1 \cdot \mathbf{e}(k) \leq \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

où λ_z est le temps de cycle désiré.

Les temps de séjours des marques dans les places $\mathbf{q}(k+1)$ doivent respecter les contraintes suivantes :

$$\mathbf{a} \leq L \cdot \mathbf{q}(k+1) \leq \mathbf{b}, \quad (2.9)$$

en remplaçant $\mathbf{q}(k+1)$ par l'équation (2.5), on aboutit à :

$$\mathbf{a} \leq L \cdot F_2 \cdot \mathbf{e}(k) + L \cdot \mathbf{q}_z \leq \mathbf{b} ,$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathbf{a} - L \cdot \mathbf{q}_z \leq L \cdot F_2 \cdot \mathbf{e}(k) \leq \mathbf{b} - L \cdot \mathbf{q}_z , \quad (2.10)$$

de (2.8) et (2.10), les contraintes sur le vecteur commande sont finalement formulées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -F_1 \cdot e(k) \leq \lambda_z \cdot \mathbf{1} \\ F_1 \cdot e(k) \leq \mathbf{0} \\ L \cdot F_2 \cdot e(k) \leq \mathbf{b} - L \cdot \mathbf{q}_z \\ -L \cdot F_2 \cdot e(k) \leq L \cdot \mathbf{q}_z - \mathbf{a} \end{array} \right.$$

Ainsi, les contraintes sur les variables de commandes génèrent un ensemble polyédrique $\mathcal{P}(\mathcal{S}, \boldsymbol{\rho})$ définit par

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}, \boldsymbol{\rho}) = \{e(k), \mathcal{S} \cdot e(k) \leq \boldsymbol{\rho}\},$$

avec $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} -F_1 \\ F_1 \\ L \cdot F_2 \\ -L \cdot F_2 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_1 = -\lambda_z \cdot \mathbf{1} \\ \rho_2 = \mathbf{0} \\ \rho_3 = \mathbf{b} - L \cdot \mathbf{q}_z \\ \rho_4 = L \cdot \mathbf{q}_z - \mathbf{a} \end{pmatrix}$.

b/Contraintes sur l'état :

Soit $\mathcal{P}(P, \mathbf{p})$ un polytope convexe contenant l'origine, définit par

$$\mathcal{P}(P, \mathbf{p}) = \{e(k), P \cdot e(k) \leq \mathbf{p}\},$$

avec $P \in \mathbb{R}^{s \times |T_x|}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^s$ et $\mathbf{p} > \mathbf{0}$. Cet ensemble peut représenter par exemple des contraintes sur l'état à satisfaire.

2.3.3 Invariance positive, contractivité et stabilité asymptotique

a/ Invariance positive :

Rappelons que la propriété d'invariance positive peut être représentée par une condition d'inclusion de polyèdres. Le Lemme suivant (Farkas étendu) donnent la caractérisation algébrique de l'inclusion de deux polyèdres. ((Haar, 1918),(Hennet, 1989)) Etant donné deux polyèdres $\mathcal{P}(P, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, P \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ et $\mathcal{P}(G, \mathbf{q}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, G \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{q}\}$ où P et G sont des matrices de tailles $m \times n$ et $m' \times n$ respectivement. \mathbf{p} et \mathbf{q} sont des vecteurs colonne de dimension m et m' respectivement.

$$\mathcal{P}(P, \mathbf{b}) \subseteq \mathcal{P}(G, \mathbf{q}), \tag{2.11}$$

est vrai si et seulement si il existe une matrice non-négative H de dimension $m' \cdot m$ tel que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} H \cdot P = G \\ H \cdot \mathbf{b} \leq \mathbf{q}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Le Lemme de Farkas étendu a souvent été exploité dans la commande des systèmes linéaire quand les contraintes (sur l'état et/ou sur la commande) définissent des domaines polyédrales ((Hennet, 1995), (Ten Dam et al, 1995)).

La propriété d'invariance positive d'un polyèdre convexe est caractérisée par l'existence de solution à deux relations matricielles linéaires, appelées relation d'invariance positive. La satisfaction de ces deux relations implique en fait la décroissance d'une fonction scalaire non négative associé au polyèdre, au long des trajectoires du système considéré.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la commande des systèmes soumis à des contraintes linéaires sur l'état et la commande, décrit respectivement par $\mathcal{P}(P, \mathbf{p})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{S}, \boldsymbol{\rho})$.

Tout au long de cette thèse, on entendra par matrice non négative une matrice dont tous les éléments sont positifs ou nuls.

Théorème 2.3.1 *Le polyèdre $\mathcal{P}(P, \mathbf{p})$ est un domaine positivement invariant pour le système (2.6) si et seulement s'il existe une matrice non négative \mathcal{H} , tel que les conditions suivantes sont vérifiées*

$$\begin{cases} \mathcal{H} \cdot P = P \cdot A_{cl} \\ \mathcal{H} \cdot \mathbf{p} \leq \mathbf{p} \end{cases} \quad (2.13)$$

Preuve 9 *Les contraintes sur le vecteur d'état sont satisfaites si et seulement si :*

$$\mathbf{e}(k) \in \mathcal{P}(P, \mathbf{p}) \implies \mathbf{e}(k+1) \in \mathcal{P}(P, \mathbf{p}) \implies \mathbf{e}(k) \in \mathcal{P}(P \cdot A_{cl}, \mathbf{p}),$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathcal{P}(P, \mathbf{p}) \subseteq \mathcal{P}(P \cdot A_{cl}, \mathbf{p}).$$

En appliquant le Lemme de Farkas étendu sur la dernière relation, la condition (2.13) est obtenue.

■

Proposition 2.3.1 *Les contraintes (2.8) et (2.10) sur les vecteurs de commande sont satisfaites si et seulement s'il existe des matrices non négatives D_1 , D_2 , D_3 et D_4 , tel que les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} D_1 \cdot P = -F_1 \\ D_1 \cdot \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\rho}_1 \end{cases}, \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} D_2 \cdot P = F_1 \\ D_2 \cdot \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\rho}_2 \end{cases}, \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} D_3 \cdot P = L \cdot F_2 \\ D_3 \cdot \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\rho}_3 \end{cases}, \quad (2.16)$$

et

$$\begin{cases} D_4 \cdot P = -L \cdot F_2 \\ D_4 \cdot \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\rho}_4 \end{cases}. \quad (2.17)$$

Preuve 10 Les contraintes sur les vecteurs de commande sont satisfaites si et seulement si $\mathbf{e}(k) \in \mathcal{P}(P, \mathbf{p})$. Alors $\mathbf{e}(k) \in \mathcal{P}(\mathcal{S}, \boldsymbol{\rho})$,

ce qui est équivalent à :

$$\mathcal{P}(P, \mathbf{p}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{S}, \boldsymbol{\rho}).$$

En appliquant le Lemme de Farkas étendu sur la dernière relation, la proposition (2.15) est obtenue. ■

b/ Contractivité et stabilité asymptotique :

La condition d'invariance donnée dans le Théorème (2.3.1) est insuffisante pour assurer la convergence des trajectoires vers l'origine. Il est bien connu que pour garantir la stabilité asymptotique d'un système linéaire et non linéaire à l'intérieur d'un ensemble invariant positif, il faut garantir la contractivité de cet ensemble. La proposition donnée par la suite donne une condition sous laquelle le système est asymptotiquement stable.

Définition 2.3.3 Le polyèdre $\mathcal{P}(P, \mathbf{p})$ est contractif pour le système (2.6) s'il existe un positive $\gamma > 1$ tel que $\mathbf{e}(k) \in \mathcal{P}(P, \mathbf{p})$ alors $\mathbf{e}(k+1) \in \mathcal{P}(P, \gamma \cdot \mathbf{p})$.

Proposition 2.3.2 Le polyèdre $\mathcal{P}(P, \mathbf{p})$ est contractif pour le système (2.6) si et seulement s'il existe une matrice non négative \mathcal{H} , et un positive $\gamma > 1$ telle que les conditions suivante sont

vérifiées :

$$\begin{cases} \mathcal{H} \cdot P = P \cdot A_{cl} \\ \mathcal{H} \cdot \mathbf{p} \leq \gamma \cdot \mathbf{p} \end{cases} \quad (2.18)$$

Preuve 11 Par définition , $\mathcal{P}(P, \mathbf{p})$ est contractif pour le système (2.6) si et seulement si il existe un γ réel, $0 \leq \gamma < 1$, telle que

$$\mathbf{e}(k) \in \mathcal{P}(P, \mathbf{p}) \implies \mathbf{e}(k+1) \in \mathcal{P}(P \cdot A_{cl}, \gamma \cdot \mathbf{p}).$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathcal{P}(P, \mathbf{p}) \subseteq \mathcal{P}(P \cdot A_{cl}, \gamma \cdot \mathbf{p}).$$

Le résultat est finalement obtenu en appliquant le Lemme de Farkas étendu à la dernière relation. ■

Définition 2.3.4 Une fonction continue $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive si $\Psi(0) = 0$ si $x = 0$ et $\Psi(x) > 0$ si $x \neq 0$.

Définition 2.3.5 Une fonction continue $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour le système (2.6), si les conditions suivantes sont vérifiées.

- $\Psi(\mathbf{e})$ est définie positive,
- $\Psi(\mathbf{e}(k+1)) - \Psi(\mathbf{e}(k)) \leq 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Si une telle fonction existe, alors le système est stable. Aussi, si $\Psi(\mathbf{e})$ est strictement décroissante (i.e. $\Psi(\mathbf{e}(k+1)) - \Psi(\mathbf{e}(k)) < 0$) alors le système (2.6) est asymptotiquement stable.

Proposition 2.3.3 Si le polyèdre $\mathcal{P}(P, \mathbf{p})$ est contractif pour le système (2.6) alors la fonction polyédrique $\Psi(\mathbf{e}(k)) = \max_{1 \leq i \leq s} \left\{ \frac{\mathbf{P}_i}{p_i} \cdot \mathbf{e}(k) \right\}$ est une fonction de Lyapunov strictement décroissante pour le système (2.6), où \mathbf{P}_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de P et p_i le $i^{\text{ème}}$ élément de \mathbf{p} . Alors, le système (2.6) est asymptotiquement stable.

Preuve 12 Le polyèdre $\mathcal{P}(P, \mathbf{p})$ est compact et contient l'origine. Alors on a

$$\Psi(\mathbf{e}(k)) > 0, \forall \mathbf{e}(k) \neq 0 \text{ et } \Psi(\mathbf{e}(k)) = 0 \text{ si } \mathbf{e}(k) = 0.$$

quand $\mathcal{P}(P, \mathbf{p})$ est contractif pour le système (2.6) on obtient

$$\Psi(\mathbf{e}(k+1)) \leq \gamma \cdot \Psi(\mathbf{e}(k)) < \Psi(\mathbf{e}(k)), \forall \mathbf{e}(k) \neq 0.$$

Ainsi, $\Psi(\mathbf{e}(k))$ est une fonction de Lyapunov strictement décroissante pour le système (2.6). ■

Les conditions citées dans (2.13), (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) et (2.18) peuvent être résolues par un solveur LMI, comme CVX (Grant et al., 2008) (Grant and Boyd, 2008), ou sous forme d'un programme linéaire. D'après les résultats donnés dans ((J-C Hennet, 1995), (Blanchini, 1999)), le système (2.6) est asymptotiquement stable si et seulement si le problème de programmation linéaire suivant est réalisable.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \lambda \\ \text{soumis :} \\ \mathcal{H} \cdot P - P \cdot A_{cl} = 0, \\ \mathcal{H} \cdot P - \gamma \cdot p \leq 0, \\ D_1 \cdot P + D_2 \cdot P = 0, \\ D_3 \cdot P + D_4 \cdot P = 0, \\ D_1 \cdot \mathbf{p} \leq \rho_1, \\ D_2 \cdot \mathbf{p} \leq \rho_2, \\ D_3 \cdot \mathbf{p} \leq \rho_3, \\ D_4 \cdot \mathbf{p} \leq \rho_4, \\ 0 \leq \gamma < 1, \\ D_1, D_2, D_3, D_4 \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

2.4 Application à un workshop

Dans cette partie, on illustre notre approche en présentant une application relative à une cellule de traitement du graphite. Pour avoir plus de détails sur le fonctionnement de ce processus, le lecteur pourra consulter le document (Calvez et al, 2005). On considère le graphe d'événements P-temporel de la cellule donné par la Figure (2.3). e marquage initial correspond au workshop inactif, où toutes les ressources sont disponibles.

- La place p_6 représente les mélangeurs à vide.

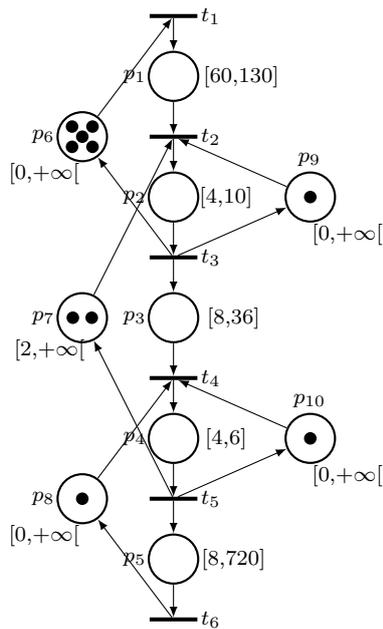


FIGURE 2.3: Graphe d'événements P-temporel du workshop

- La place p_1 représente les opérations de chargement et de mixage.
- La place p_7 représente les conditionneurs libres.
- La place p_3 représente l'opération de conditionnement.
- La place p_8 représente la presse vide.
- La place p_5 représente l'extrusion.
- Les places p_9 et p_{10} représentent les convoyeurs 1 et 2 respectivement.
- Les places p_2 et p_4 représentent le transfert des mixeurs vers les conditionneurs et le transfert des conditionneurs vers la presse respectivement.

Nous avons vu dans le premier chapitre que le comportement dynamique d'un graphe d'événements P-temporel peut être décrit par des équations linéaires dans l'algèbre standard. Pour aboutir au modèle implicite, on considère la transformation 1 vue que le système est au repos initialement. Chaque place qui contient une marque et plus est dupliquée, après la duplication des places p_6 , p_7 le modèle équivalent du graphe de la Figure(2.3) est obtenu et il est donné par la Figure(2.4). En associant à chaque transition une fonction dateur $x_i(k)$, le modèle implicite décrivant le comportement dynamique du graphe d'événement de la Figure(2.4) est donné comme suit :

$$E \cdot x(k+1) = A \cdot x(k) + q(k+1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathbf{a} \leq \mathbf{q}(k) \leq \mathbf{b}$, avec,

$$\mathbf{a} = \left(60 \ 4 \ 8 \ 4 \ 8 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right)^t,$$

$$\mathbf{b} = \left(130 \ 10 \ 36 \ 6 \ 720 \ +\infty \ +\infty \ +\infty \ +\infty \ +\infty \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right)^t,$$

Pour des besoins industriels, le taux de production change constamment. Notre objectif est de calculer des gains par retour d'état qui permettent d'atteindre une trajectoire de référence tout en garantissant le respect des contraintes et sur l'état et sur la commande. Dans le cadre d'un fonctionnement périodique, le réglage source et le réglage cible sont supposées connus. Les contraintes sur la commande sont données par : $\mathbf{a} \leq \mathbf{q}(k) \leq \mathbf{b}$, qui peuvent être réécrites sous la forme polyédrale comme suit :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}, \boldsymbol{\rho}) = \{\mathbf{e}(k), \mathcal{S} \cdot \mathbf{e}(k) \leq \boldsymbol{\rho}\},$$

avec \mathcal{S} et $\boldsymbol{\rho}$ ont été définis précédemment.

Les contraintes sur l'état sont données par :

$$-\mu_2 \leq \mathbf{e}(k) \leq \mu_1,$$

avec,

$$\mu_1 = \mu_2 = 50 \cdot \mathbf{1}$$

La dernière inégalité peut être reformulée sous la forme polyédrale suivante :

$$\mathcal{P}(P, \mathbf{p}) = \{\mathbf{e}(k), P \cdot \mathbf{e}(k) \leq \mathbf{p}\},$$

$$\text{où } P = \begin{pmatrix} I_{|T_x|} \\ -I_{|T_x|} \end{pmatrix} \text{ (avec } n = 11), \text{ et, } \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 50 \cdot \mathbf{1} \\ 50 \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Pour la résolution du problème d'optimisation linéaire donné par les inégalités matricielles linéaires (2.13),(2.14), et (2.15), on utilise CVX, un toolbox spécifique à la résolution de problème convexe . Les résultats numériques sont donnés par la matrice F qui suit :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0.94 & 0.07 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.02 & 0.9 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.03 & 0.97 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.49 & -0.49 & -0.04 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & -0.46 & -0.03 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & -0.02 & -0.9 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & -0.01 & -0.02 & -0.96 \end{pmatrix}.$$

La Figure (2.5) représente la variation de l'état du système en boucle fermée c'est-à-dire la variation de l'erreur en fonction du nombre de franchissement des transitions. L'erreur tend vers zéro, ce qui signifie que les gains de commande calculés assurent la stabilité asymptotique et le suivi de la trajectoire désirée.

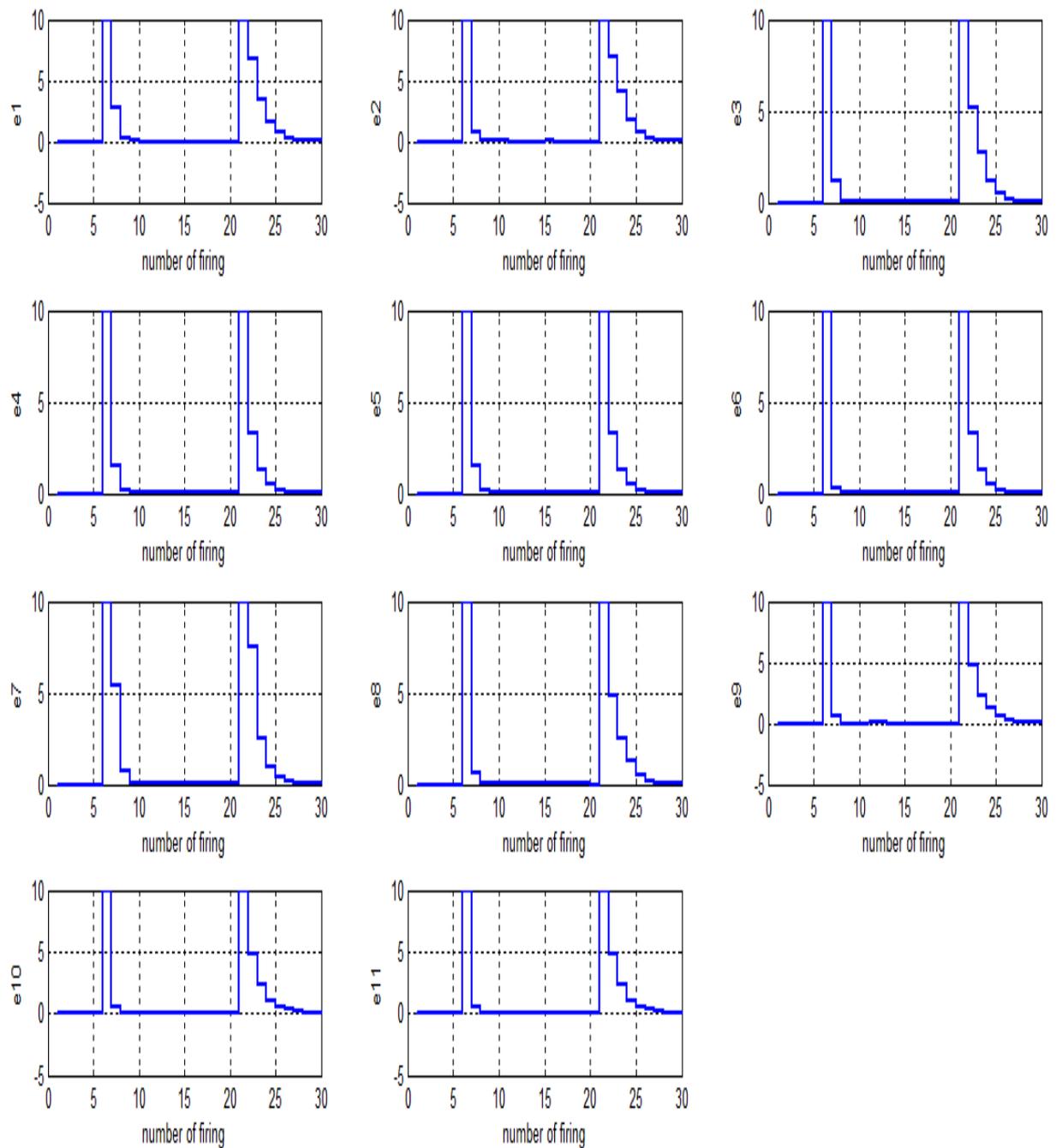


FIGURE 2.5: L'évolution de l'état

La Figure(2.6) représente l'évolution des temps de séjour des jetons dans les places en fonction du nombre de franchissement des transitions. Les temps de séjour désiré sont atteints tout en restant dans leurs intervalles . Cela signifie que les gains du retour d'état synthétisés assurent la convergence vers les trajectoires de référence et le respect des contraintes des temps de séjour des marques dans les places.

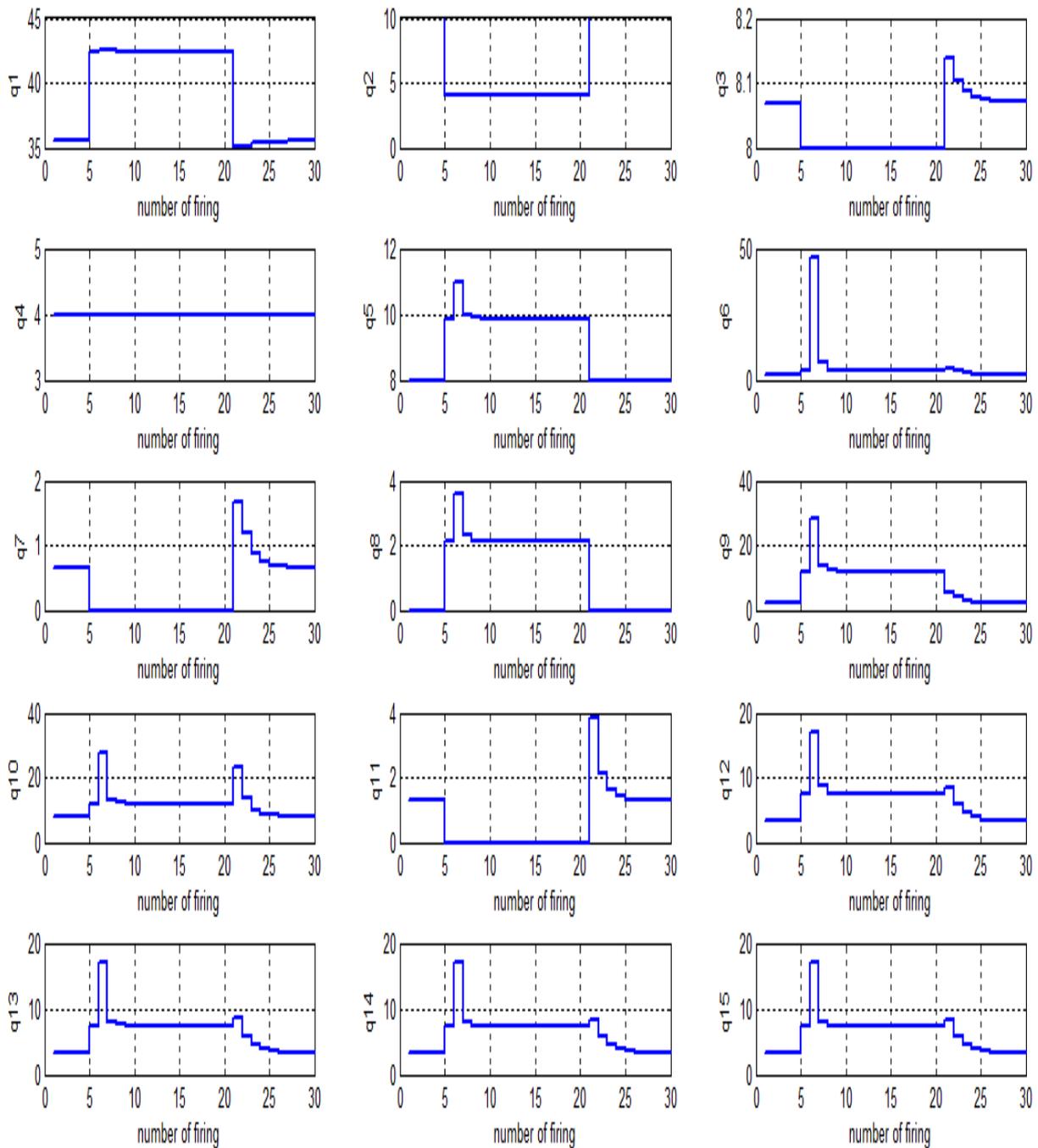


FIGURE 2.6: L'évolution des entrées de commandes

2.5 Conclusion

A partir du modèle proposé, un problème de programmation linéaire est formulé pour calculer le temps de cycle maximum (minimum) et les temps de séjour associés. Aussi, une loi de commande par retour d'état est synthétisée ; les conditions qui assurent l'existence d'une commande par retour d'état sont nécessaires et suffisantes. Cette loi de commande garantit la convergence

de l'état vers une trajectoire désirée donnée et assure les contraintes sur la commande et l'état. Les commandes calculées représentent le temps de séjour et les dates associées aux transitions sources qui permettent d'atteindre la trajectoire désirée de manière asymptotique. La méthodologie de contrôle a été illustrée par un exemple pour montrer son efficacité pour cette classe de systèmes.

Chapitre 3

Maintenance d'une ligne de galvanoplastie sans arrêt de production

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on vise en premier lieu à la modélisation du fonctionnement d'une ligne de galvanoplastie comprenant une tâche de maintenance. Plus précisément, nous supposons que la maintenance est effectuée pendant la production. Nous modélisons chaque situation (c'est-à-dire avec ou sans maintenance) par un modèle linéaire implicite introduit dans le premier chapitre. Le modèle obtenu commute entre ces deux situations. Ensuite, des lois de commande optimales sont synthétisées, elles permettent de suivre une trajectoire désirée, tout en garantissant le respect des contraintes sur le vecteur de commande en utilisant la théorie de la commande prédictive à base de modèle (MPC). Cette approche consiste à minimiser une borne supérieure de la fonction objective sur un horizon infini ou fini (Kothare, 1996), (Ozgan, 2000). La minimisation des coûts quadratiques sous contraintes d'inégalité est formulée comme un programme linéaire convexe soumis à des inégalités matricielles linéaires (LMI). Les principaux avantages de cette approche sont l'utilisation d'un horizon infini et les solutions obtenues (i.e LMI) peuvent être résolues efficacement, ce qui signifie que l'optimum global peut être trouvé en temps polynomial (Ghaoui, 2000).

La commande d'ateliers de traitements de surface, plus connue sous le nom de « Hoist Scheduling Problem » ou HSP est un problème qui a été abordé pour la première fois dans la littérature scientifique en 1976 (Phillips, 1976). Les auteurs de cette première publication ont été

amenés à introduire une heuristique permettant de fournir un résultat en un temps raisonnable. Par contre, en utilisant une heuristique l'assurance de l'optimalité de la solution était perdue. Il a été prouvé par la suite que l'ordonnancement cyclique d'un atelier de galvanoplastie utilisant une unique ressource de transport est NP-difficile en 1989 (Lei, 1989).

En se restreignant aux comportements cycliques et à partir de ce constat, on peut décomposer l'état de l'art en deux grandes familles. La première, initiée par Philipps et Hunger, s'attache à développer des algorithmes pour aborder l'importance combinatoire de ce type d'ateliers lorsqu'ils sont de grandes dimensions. Les auteurs consacrent alors leurs efforts à la nécessité de fournir des temps de calcul acceptables (Zhou, 2003), (Lei, 1991), (Che, 2004) et (Caux, 1997).

Partant des mêmes données scientifiques, une deuxième approche consiste à prendre acte de la difficulté (voire l'impossibilité) d'effectuer un calcul d'ordonnancement cyclique en temps réel. Dans ce cas, on va s'attacher à restreindre les calculs effectués en temps réels à des architectures partielles. Une approche classique consiste à effectuer hors ligne un ordonnancement cyclique qui va fixer l'ordre d'exécution des opérations, puis à effectuer en ligne et en temps réel le calcul des instants de tirs. De fait, la première opération correspond à la recherche d'un Graphe d'événements P-temporel capable de modéliser une solution cyclique (ce premier problème est NP-difficile) (Khansa et al, 1996). La deuxième opération se restreint au calcul des instants de tirs de ce même réseau de Petri. Ce calcul peut être effectué en un temps polynomial (Khansa et Denat, 1996).

La commande prédictive, connue comme une commande sur un horizon réduit, est une méthode de contrôle bien connue et bien établie (Camacho, 2004), (Bemporad, 2002). La loi de commande est obtenue par la résolution d'un problème d'optimisation à chaque instant sur un horizon de prédiction. Après cette optimisation, seule la première loi de commande est appliquée au système considéré. Récemment, la commande prédictive à base de modèle (MPC) a été étendue à la commande des systèmes à événements discrets modélisés par des systèmes linéaires max-plus. Le travail pionnier de (De Shutter, 2001) a établi une stratégie de contrôle basée sur le MPC dédié aux systèmes linéaire max-plus. Le travail de (Necoara, 2008) concerne le calcul d'une loi de commande non contrainte pour des systèmes linéaires max-plus, les auteurs fournissent des conditions suffisantes qui garantissent la stabilité en boucle fermée sur un horizon fini. Dans (Declerk, 2014), l'auteur propose une technique pour modifier le contrôle de telle sorte que des contraintes causales soient satisfaites. Une autre donnée dans (Declerk et Guezzi, 2014) conduit

à une réduction de l'espace d'état basé sur la technique MPC. La MPC multiparamétrique est également utilisée pour la commande des systèmes à événements discrets modélisés dans l'algèbre standard (Hamri, 2016). Les auteurs de (Hamri, 2015) ont étendu la méthodologie introduite dans (Kothare, 1996) à une classe de systèmes à événements discrets avec des contraintes non symétriques. Dans (Van den boom, 2006), la classe des systèmes de commutation max-plus-linéaires a été introduite. Dans ce travail, la commutation de mode dépend d'une séquence déterministe, alors que dans (Van den boom, 2006), la commutation peut également dépendre d'une séquence stochastique.

Ce chapitre est organisé comme suit :

Dans la première partie, une présentation de l'environnement galvanoplastie est donnée, puis une description de la cellule considérée dans notre travail est présentée. Ensuite, nous formulons le problème de maintenance de la ligne de galvanoplastie sans arrêt de production, et nous montrons qu'une classe de systèmes hybride, les systèmes à commutation fournis une modélisation pertinente du problème considéré dans ce chapitre.

La deuxième partie de ce chapitre commence par un survol de la théorie de la commande MPC. Nous exposons les différents principes qui la caractérise. Ensuite, le problème de commande avec ajout et ou suppression de marques est formulé en terme de MPC. Le problème de commande est résolu sous la forme d'un programme linéaire convexe soumis à des contraintes linéaires. Ainsi des gains de retour d'état stabilisant qui garantissent le respect des contraintes temporelles pendant que la maintenance est effectuée sont calculées. Enfin, nous appliquons les résultats de l'approche proposée à un atelier de galvanoplastie. .

3.2 L'environnement galvanoplastie

3.2.1 Constitution d'un atelier de galvanoplastie

La galvanoplastie est une technique de traitement de surface qui consiste à déposer une fine couche de métal (zinc, plomb, or,...) sur un produit afin de le doter de propriétés telles que la résistance à l'usure, la conductibilité ou tout simplement dans un souci d'esthétique.

Une chaîne de traitement de surface est constituée des 3 éléments suivants :

- Un ensemble de cuves contenant des bains de traitement chimiques dans lesquels les pièces sont immergées,

- Des aires de chargement et déchargement (porteurs) dans lesquels les produits sont chargés,
- Un système de transport (robot), assurant le transport de chaque porteur entre les cuves de traitement.

La séquence des opérations de traitement que chaque produit doit subir successivement dans les différentes cuves de la ligne est appelée gamme de traitement, ou encore gamme opératoire. Une gamme est caractérisée par l'ensemble totalement ordonné des traitements que le produit doit subir. La gamme spécifie également les durées des opérations de trempage et de transport des produits.

Les durées opératoires des traitements effectués dans les cuves doivent être fixées entre une borne minimum et une borne maximum. Les transports des pièces entre les bains de traitement, effectués par un pont roulant, doivent aussi être choisis entre un minimum et un maximum : le minimum est le temps de trajet de la ressource de transport.

Les pièces sont produites par lot ou unité, et le traitement de chaque lot est alors généralement confondu avec celui de son porteur. Le nombre de porteurs sur une ligne est en général constant. Chacune des cuves assure un traitement chimique spécifique et leur charge admissible est unitaire.

3.2.2 Exemple d'une cellule de traitement de surface

Considérons la cellule de traitement de surface représentée sur la Figure (3.1). Cette cellule est composée d'une aire de chargement (aire d'entrée) et d'une aire de déchargement (aire de sortie) situées aux extrémités de la ligne et de trois cuves de traitements. Chaque cuve contient un produit chimique nécessaire à une opération particulière. Chaque pièce présente sur la ligne subira une succession d'immersions, suivant un ordre spécifié par une gamme donnée. Le traitement peut s'effectuer indifféremment dans la cuve double (2 bains similaires). Les différentes pièces présentes sur la ligne seront alors prises en charge par un pont roulant (robot). Dans le but de garantir la qualité des différents traitements effectués, les trajets en charge du pont roulant se doivent d'être les plus rapides possible (aucune attente n'est tolérée) et des durées minimales et maximales d'immersion sont alors fournies.

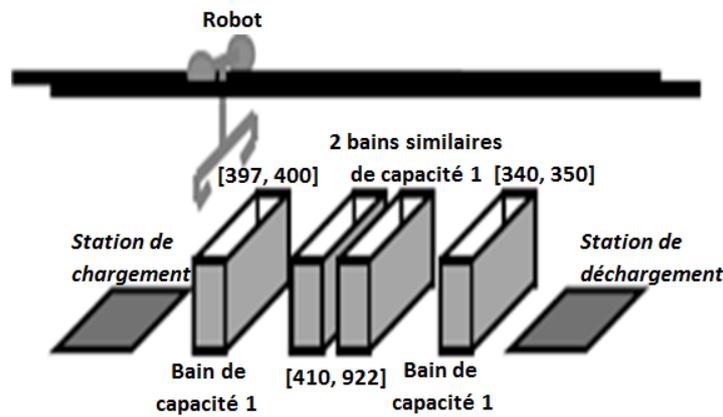


FIGURE 3.1: Schéma synoptique d'une cellule de traitement de surface.

3.2.3 Formulation du problème

Les produits présents dans les bacs de traitements sont des composés chimiques qui vieillissent et demandent parfois à être régénérés. Nous allons donc chercher à changer un bac de traitement, sans recalculer la séquence de conduite et sans arrêter l'atelier. A notre connaissance ce problème n'a pas été abordé dans la littérature à ce jour. Dans l'industrie pour réaliser une tâche de maintenance, les ateliers sont vidés et arrêtés. L'objectif de ce chapitre est de modéliser et commander un atelier de galvanoplastie tandis que la maintenance sur un bac est effectuée. Pour cela un bac est évacué ce qui correspond à enlever un jeton du modèle graphe d'événements du système.

Dans ce travail, on considère que le système commute au mode maintenance au moment où la maintenance est effectuée. Considérons la représentation schématique des modes de fonctionnement donné par la figure suivante :

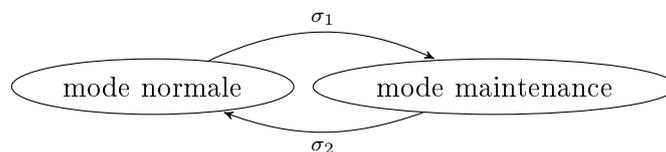


FIGURE 3.2: Représentation schématique des modes de fonctionnement

Dans la suite nous assumons que le fonctionnement de chaque mode est répétitive. Les temps de séjours et le temps de cycle sont connus. La commutation entre les deux modes se fait via des signaux externes σ_1 et σ_2 .

Dans chaque mode de fonctionnement, le système est représenté par un graphe d'événements P-

temporel. Pour ce qui nous concerne, on cherche à faire une commande sur un ordonnancement déjà effectué. Le modèle général à trois bacs est donné par le schéma ci-dessous.

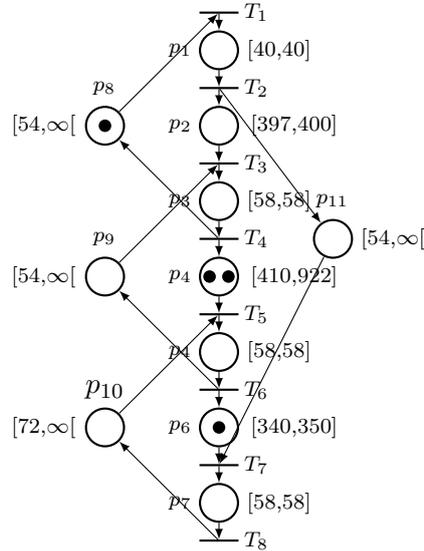


FIGURE 3.3: Graphe d'événements P-temporel d'une ligne de galvanoplastie dans le mode normale.

- L'axe central correspond à la gamme de fabrication.
- Les places p_1, p_3, p_7 traduisent les trajets du chariot (robot) en charge.
- Les places p_2, p_4, p_6 traduisent les opérations de trempage.
- La place à droite p_{11} modélisent les trajets à vide du chariot vers l'avant.
- Les places à gauche p_8, p_9, p_{10} modélisent les trajets à vide du chariot vers l'arrière.

Afin de décrire le comportement dynamique des deux modes de fonctionnement, on construit d'abord les graphes équivalents aux graphes des Figures (3.2) et (3.3), et ils sont donnés par les Figures (3.4) et (3.5) respectivement.

En associant à chaque mode de fonctionnement le modèle implicite introduit dans le premier chapitre, on obtient :

$$E_r \cdot \mathbf{x}(k+1) = A_r \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{q}(k+1) + G_r \cdot \mathbf{u}(k+1), \quad r = 1, 2, \quad (3.1)$$

avec $\mathbf{a} \leq L \cdot \mathbf{q}(k+1) \leq \mathbf{b}$, où $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{|T_x|}$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{|T_u|}$ est le vecteur des entrées, E_r, A_r, G_r sont des systèmes de matrices correspondants aux modes normal et de maintenance. Pour obtenir la représentation d'état du mode normal et du mode maintenance

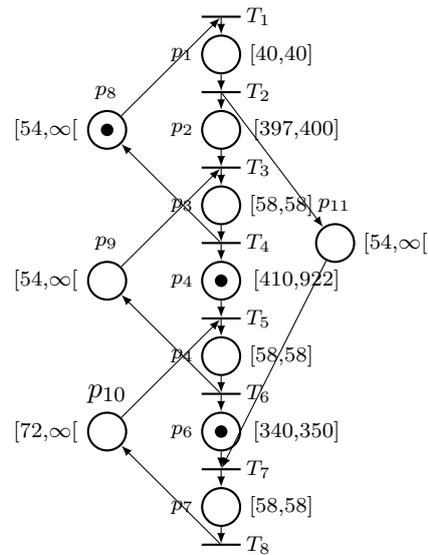


FIGURE 3.4: Graphe d'événements P-temporel d'une ligne de galvanoplastie dans le mode maintenance.

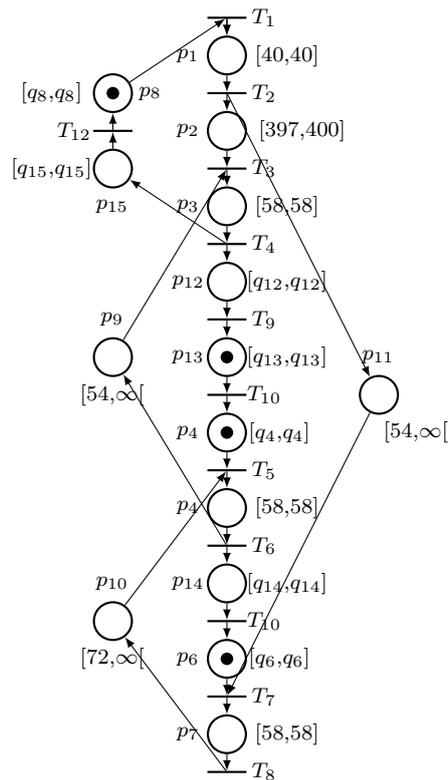


FIGURE 3.5: Modèle équivalent du graphe d'événements P-temporel du mode normale

décrient par la Figure (3.2) et la Figure (3.3) respectivement, nous obtenons les modèles équivalents correspondants à chaque mode (Figure (3.4) et Figure (3.5)).

Le comportement dynamique des graphes d'événements données par la Figure (3.4) et la Figure

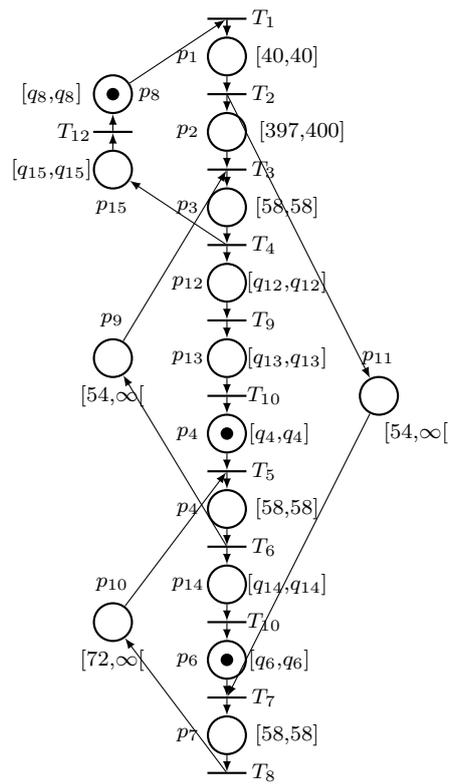


FIGURE 3.6: Modèle équivalent du graphe d'événements P-temporel du mode maintenance

(3.5) peuvent être exprimés comme suit :

$$E_r \cdot \mathbf{x}(k+1) = A_r \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{q}(k+1) + G_r \cdot \mathbf{u}(k+1), r = 1, 2.$$

$$\text{avec} \begin{pmatrix} 40 \\ 397 \\ 58 \\ 410 \\ 58 \\ 340 \\ 58 \\ 54 \\ 54 \\ 72 \\ 54 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot q(k) \leq \begin{pmatrix} 40 \\ 400 \\ 58 \\ 922 \\ 58 \\ 350 \\ 58 \\ 350 \\ 58 \\ +\infty \end{pmatrix} .$$

Pour un k donné, parmi les dynamiques possible (modes) seulement une est active. Dans notre travail, on considère le cas où les commutations sont controlées par une action (signal) externe. Quand une commutation survient, l'état évolue selon la nouvelle dynamique. Nous voulons ainsi calculer des gains de retour d'état qui permettent d'atteindre les trajectoires désirée tout en garantissant le respect des contraintes sur la commande pour les deux modes.

3.3 Commande Prédicative à base de modèle (MPC)

La commande prédictive inclue une famille de méthodes de commande qui utilisent explicitement un modèle du processus étudié afin d'obtenir la loi de commande en minimisant une fonction objectif (critère). Toute commande prédictive est basée sur les trois éléments suivants. L'utilisation d'un modèle afin de prédire (calculer) la sortie du processus lors des instants futurs ; le calcul d'une loi de commande qui minimise la fonction objectif ; l'utilisation du principe de glissement de façon à ce que, après chaque étape de calcul, l'horizon soit décalé dans le futur. L'approche de la commande prédictive est caractérisée par les trois éléments suivants :

- a/ **Modèle de prédiction :**

La sortie future pour un horizon déterminé, appelé horizon de prédiction, est prédite à chaque instant en utilisant le modèle du processus, et comparée à la sortie réelle obtenue pour ce système. Ces sorties prédites dépendent des valeurs connues jusqu'à un instant t (entrées et sorties passées) et des valeurs de la loi de commande future. Ces dernières vont être appliquées au système et doivent alors être calculées.

b/ Fonction objectif (critère) :

Un critère est généralement défini par une fonction appelée fonction coût, que l'on cherche à optimiser, dans le but de garder le processus aussi proche que possible de la trajectoire de référence. Les différents algorithmes des modèles prédictifs proposent différentes fonctions coût pour obtenir la loi de commande. Ce critère prend en général, la forme d'une fonction d'erreur quadratique entre la sortie prédite et la sortie de référence.

c/ Horizon de prédiction :

On entend par horizon de prédiction la longueur sur laquelle est évaluée le critère.

En résumé, la commande prédictive à base de modèle est une stratégie de commande bien établie, elle se base sur le calcul itérative d'une loi de commande optimale en résolvant un problème d'optimisation sur un horizon de prédiction N_p donné comme suit :

$$\min_{\mathbf{u}_c(k+i|k), i=0,1..N_c} J_{N_p}(k) \quad (3.2)$$

où $J_{N_p}(k)$ est la fonction coût, qui peut être formulé par différentes formes. Dans ce travail, la fonction cout est une fonction quadratique donnée sous la forme suivante :

$$J_{N_p}(k) = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{x}(k+i|k)^t \cdot Q_c \cdot \mathbf{x}(k+i|k) + \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{u}_c(k+i|k)^t \cdot R \cdot \mathbf{u}_c(k+i|k) \quad (3.3)$$

où,

$\mathbf{x}(k+i|k)$ et $\mathbf{u}_c(k+i|k)$ sont respectivement l'état et la commande calculés à chaque k et l'indice k représente le k -ième franchissement des transitions.

$Q_c > 0$ et $R \geq 0$ sont des matrices de pondération symétrique et définies positives.

Cette fonction cout est soumise aux contraintes sur les entrées $\mathbf{u}_c(k+i|k), i = 0, 1, \dots, N_c - 1$, et N_c est l'horizon de commande, et aussi sur l'état $\mathbf{x}(k+i|k), i = 0, 1, \dots, N_p$, où N_p est l'horizon de prédiction. $N_p = N_c = \infty$ signifie que l'horizon de prédiction est infinie.

3.3.1 Formulation du probleme de commande

Dans cette section, nous traitons le problème de commande d'un graphe d'événements P-temporel avec ajout ou suppression de jetons.

Considérons le modèle introduit par l'équation (3.1). Les matrices E_r sont inversible à gauche, le système devient explicite et il est représenté comme suit :

$$\mathbf{x}(k+1) = E_r^L \cdot A_r \cdot \mathbf{x}(k) + E_r^L \cdot \mathbf{q}(k+1), \quad (3.4)$$

avec E_r^L sont les inverses à gauche des matrices E_r et $\mathbf{a} \leq L \cdot \mathbf{q}(k+1) \leq \mathbf{b}$.

Le système obtenu est linéaire invariant avec des contraintes sur le vecteur commande.

Nous voulons suivre une trajectoire désirée $\mathbf{z}(k)$, $k \in \mathbb{N}$ donnée par un fonctionnement 1-periodique définie comme suit :

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{z}(k) + \lambda_r \cdot \mathbf{1}, \quad (3.5)$$

avec λ_r sont les temps de cycle de chaque mode, $\mathbf{1}$ est un vecteur où toutes ses composantes sont égales à un.

La trajectoire désirée $\mathbf{z}(k)$ doit également satisfaire l'équation suivante :

$$\mathbf{z}(k+1) = E_r^L \cdot A_r \cdot \mathbf{z}(k) + E_r^L \cdot \mathbf{q}_{zr}, \quad (3.6)$$

où \mathbf{q}_{zr} sont les temps de séjour qui permettent d'obtenir la trajectoire $\mathbf{z}(k)$ avec un temps de cycle λ_r .

Soit $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{z}(k)$ le vecteur d'erreur.

Par la soustraction des équations (3.4) et (3.6) le modèle d'erreur entre le modèle du système et celui de la trajectoire désirée est obtenu comme suit :

$$\mathbf{e}(k) = E_r^L \cdot A_r \cdot \mathbf{e}(k) + E_r^L \cdot (\mathbf{q}(k+1) - \mathbf{q}_{zr}) \quad r = 1, 2, \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{A}_r \cdot \mathbf{e}(k) + \mathbf{B}_r \cdot (\mathbf{q}(k+1) - \mathbf{q}_{zr}) \quad r = 1, 2, \quad (3.8)$$

$$\text{avec } \begin{cases} A_r = E_r^L \cdot A_r \\ B_r = E_r^L \end{cases} \quad \text{et} \quad a - L \cdot \mathbf{q}_{zr} \leq L \cdot (\mathbf{q}(k+1) - \mathbf{q}_{zr}) \leq L \cdot \mathbf{q}_{zr} - b. \quad (3.9)$$

L'équation (3.8) peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{e}(k+1) = A_r \cdot \mathbf{e}(k) + B_r \cdot \mathbf{u}_c(k+1), \quad (3.10)$$

où $\mathbf{u}_c(k+1) = \mathbf{q}(k+1) - \mathbf{q}_{zr}$.

On cherche à calculer une loi de commande par retour d'état optimal qui permet de stabiliser le système en boucle fermée. Pour le système donné par l'équation (3.10), la commande en boucle fermée est formulée comme suit :

$$\mathbf{u}_c(k+1) = F_r \cdot \mathbf{e}(k). \quad (3.11)$$

Les contraintes sur la commande sont données par :

$$\mathbf{U}_{rmin} \leq L \cdot \mathbf{u}_c(k+1) \leq \mathbf{U}_{rmax}, \quad (3.12)$$

avec, $\mathbf{U}_{rmin} = \mathbf{a} - L \cdot \mathbf{q}_{zr}$ et $\mathbf{U}_{rmax} = L \cdot \mathbf{q}_{zr} - \mathbf{b}$.

En minimisant le critère de performance quadratique sur un horizon infini donnée par l'équation (3.10) comme suit :

$$J_{+\infty}(k) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{e}(k+i|k)^t \cdot Q_c \cdot \mathbf{e}(k+i|k) + \mathbf{u}_c(k+i|k)^t \cdot R \cdot \mathbf{u}_c(k+i|k)), \quad (3.13)$$

où $Q_c > 0$ et $R \geq 0$ sont des matrices de pondération symétriques définies positives.

Introduisons la fonction Lyapunov quadratique suivante :

$$V(\mathbf{e}(k|k)) = \mathbf{e}(k|k)^t \cdot P \cdot \mathbf{e}(k|k), \quad (3.14)$$

avec $P > 0$, et $P = \gamma \cdot Q^{-1}$. Si nous avons $\mathbf{e}(\infty) = 0$ (convergence des trajectoires) alors $V(\mathbf{e}(\infty)) = 0$, la condition suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} V(e(k+i+1|k)) - V(e(k+i|k)) &\leq -(e(k+i|k))^t \cdot Q_c \cdot e(k+i|k) + \\ &\quad \mathbf{u}_c(k+i|k)^t \cdot R \cdot \mathbf{u}_c(k+i|k). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si nous additionnons l'inégalité (3.15) de $i = 0$ jusqu'à $i = \infty$ avec $e(\infty) = 0$, nous obtenons :

$$-V(e(k|k)) \leq -J_\infty(k|k). \quad (3.16)$$

En se basant sur le théorème de Kothare (Kothare, 1996), l'approche se résume aux trois étapes suivantes :

1. Supposer un ellipsoïde invariant comme étant un ensemble objectif et vérifier l'inclusion de l'état initial du système dans cet ellipsoïde.
2. Vérifier la contrainte donnée par l'inégalité (3.15) en terme de LMI.
3. Vérifier le respect des contraintes sur les entrées de commande par l'inclusion de cet ellipsoïde dans le polyèdre des contraintes

Les notions présentées dans ce qui suit sont alors nécessaires pour la compréhension de la synthèse de l'approche :

Définition 3.3.1 (*Hyperplan*) Un ensemble $\mathcal{H}(H, c) \subset \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\mathcal{H}(H, c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, H \cdot \mathbf{x} = c\}, \quad (3.17)$$

est un hyperplan, où $H \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, avec \mathbb{N}^* est l'ensemble des entier positif.

Définition 3.3.2 (*Ellipsoïde*) Un ellipsoïde est défini par :

$$\varepsilon(P, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, (\mathbf{x} - \mathbf{v})^t \cdot P(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \leq 1\}.$$

où, $P = P^t > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique et définie positive. Le vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est le centre de l'ellipsoïde.

Si on considère sans perte de généralités que $\mathbf{v} = 0$, on a

$$\varepsilon(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^t \cdot P \cdot \mathbf{x} \leq 1, P = P^t\}. \quad (3.18)$$

Définition 3.3.3 (*Distance d'un ellipsoïde à un hyperplan*) La distance d'un ellipsoïde $\varepsilon(P, \mathbf{v})$ à un hyperplan $\mathcal{H}(H, c)$ est

$$\text{dist}(\varepsilon(P, \mathbf{v}), \mathcal{H}(H, c)) = \frac{|c - H \cdot \mathbf{v}| - \sqrt{H \cdot P^{-1} \cdot H^t}}{H \cdot H^t}, \quad (3.19)$$

Si $\text{dist}(\varepsilon(P, \mathbf{v}), \mathcal{H}(H, c)) > 0$, l'ellipsoïde et l'hyperplan n'ont aucun point commun,

Si $\text{dist}(\varepsilon(P, \mathbf{v}), \mathcal{H}(H, c)) < 0$, l'ellipsoïde et l'hyperplan se croisent, et leur intersection est un ellipsoïde,

Si $\text{dist}(\varepsilon(P, \mathbf{v}), \mathcal{H}(H, c)) = 0$, l'hyperplan est tangent à l'ellipsoïde.

Pour l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$ centré à l'origine et pour l'hyperplan $\mathcal{H}(H)$ avec $c = 1$, la relation donnée par l'équation (3.19) devient

$$\text{dist}(\varepsilon(P), \mathcal{H}(H)) = \frac{1 - \sqrt{H \cdot P^{-1} \cdot H^t}}{H \cdot H^t}. \quad (3.20)$$

Définition 3.3.4 (*Les inégalités linéaire matricielles (LMIs)*) Une inégalité matricielle s'écrit sous la forme suivante :

$$F(\mathbf{x}) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i \cdot F_i > 0$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ est la variable, F_0 et $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, m$ sont des matrices symétriques données.

Les inégalités non linéaires (convexes) peuvent être converties en LMI en utilisant le complément de Schur.

Lemme 3.3.1 (*Complément de Schur*) Soient trois matrices $Q(x) = Q(x)^t$, $R(x) = R(x)^t$, et $S(x) = S(x)^t$ symétriques et définies positives. La LMI donnée par l'équation (3.21)

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^t & R(x) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.21)$$

est équivalente à l'inégalité matricielle suivante :

$$R(x) > 0; \quad Q(x) - S(x) \cdot R(x)^{-1} \cdot S(x)^t > 0, \quad (3.22)$$

ou équivalente à

$$Q(x) > 0; \quad R(x) - S(x)^t \cdot Q(x)^{-1} \cdot S(x) > 0, \quad (3.23)$$

Etape 1

Nous cherchons un ensemble invariant ellipsoïdal donné par :

$\epsilon(\mathbf{e}(k)) = \{ \mathbf{e}(k) \in \mathbb{R}^{|Tx|}, \mathbf{e}(k)^t \cdot P \cdot \mathbf{e}(k) \leq \gamma \}$, ou encore équivalent à :

$$\epsilon(\mathbf{e}(k)) = \left\{ \mathbf{e}(k) \in \mathbb{R}^{|Tx|}, \mathbf{e}(k)^t \cdot Q^{-1} \cdot \mathbf{e}(k) \leq 1 \right\},$$

avec $P = \gamma \cdot Q^{-1}$, La contrainte LMI qui vérifie l'inclusion de l'état initial $\mathbf{e}(k_0)$ dans l'ellipsoïde $\epsilon(\mathbf{e}(k))$ est donné par la condition suivante :

$\mathbf{e}(k) \subset \epsilon(\mathbf{e}(k))$ si $\mathbf{e}(k_0) \in \epsilon(\mathbf{e}(k))$, cela revient à vérifier cette inégalité :

$\mathbf{e}(k_0)^t \cdot Q^{-1} \cdot \mathbf{e}(k_0) \leq 1$, ou d'une manière équivalente à vérifier :

$$1 - \mathbf{e}(k_0)^t \cdot Q^{-1} \cdot \mathbf{e}(k_0) \geq 0 \quad (3.24)$$

En appliquant le lemme de schur à l'équation (3.24), nous obtenons la LMI suivante, $\min_{\gamma} \gamma$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}(k_0)^t \\ \mathbf{e}(k_0) & Q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.25)$$

Etape 2

Dans cette étape, l'inéquation (3.15) est reformulée sous forme d'une LMI, pour simplifier l'écriture, nous réécrivons l'équation (3.13) comme suit :

$J_{\infty}(k) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{e}(k+i)^t \cdot Q_c \cdot \mathbf{e}(k+i) + \mathbf{u}_c(k+i)^t \cdot R \cdot \mathbf{u}_c(k+i))$, sachant que,

$$\begin{cases} \mathbf{e}(k+1) = A_r \cdot \mathbf{e}(k) + B_r \cdot (\mathbf{q}(k+1) - \mathbf{q}_{zr}), \\ \mathbf{u}_c(k+1) = F_r \cdot \mathbf{e}(k), \end{cases} \quad (3.26)$$

en développant l'inéquation (3.15) nous obtenons :

$$(A_r + B_r)^t \cdot P \cdot (A_r + B_r) - P + Q_c + F_r^t \cdot R \cdot F_r \leq 0, \quad (3.27)$$

en multipliant à droite et à gauche par la matrice Q avec Q est une matrice symétrique définie positive et avec les notations $Y_r = F_r \cdot Q$, $P = \gamma \cdot Q^{-1}$, l'équation suivante est obtenu

$$(A_r \cdot Q + B_r \cdot F_r)^t \cdot Q^{-1} \cdot (A_r \cdot Q + B_r \cdot F_r) - Q + \gamma \cdot Q^t \cdot Q_c \cdot Q + \gamma \cdot Y_r^t \cdot R \cdot Y_r \leq 0, \quad (3.28)$$

En multipliant cette équation par -1 , nous obtenons :

$$Q - [(A_r \cdot Q + B_r)^t \cdot Q^{-1} \cdot (A_r \cdot Q + B_r) + \gamma \cdot Q^t \cdot Q_c \cdot Q + \gamma \cdot Y_r^t \cdot R \cdot Y_r] \geq 0 \quad (3.29)$$

sous forme matricielle, nous obtenons l'équation suivante :

$$Q - \begin{bmatrix} A_r \cdot Q + B_r \cdot Y_r & Q_c^{1/2} \cdot Q & R^{1/2} \cdot Y_r \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \cdot I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \cdot I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \cdot I \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_r \cdot Q + B_r \cdot Y_r \\ Q_c^{1/2} \cdot Q \\ R^{1/2} \cdot Y_r \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.30)$$

en appliquant le lemme de Schur sur l'inégalité (3.30), nous obtenons la forme LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} Q & Q \cdot A_r^t + Y_r^t \cdot B_r^t & Q \cdot Q_c^{1/2} & Y_r^t \cdot R^{1/2} \\ A_r \cdot Q + B_r \cdot Y_r & Q & 0 & 0 \\ Q_c^{1/2} \cdot Q & 0 & \gamma \cdot I & 0 \\ R^{1/2} \cdot Y_r & 0 & 0 & \gamma \cdot I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.31)$$

avec $F_r = Y_r \cdot Q^{-1}$ et $r = 1, 2$. Le problème d'optimisation sans contraintes est formulé comme suit,

$$\min_{\gamma, Q, Y_r} \gamma \quad (3.32)$$

$$\gamma \geq 0$$

soumis à

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}(k_0)^t \\ \mathbf{e}(k_0) & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.33)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Q \cdot A_r^t + Y_r^t \cdot B_r^t & Q \cdot Q_c^{1/2} & Y_r^t \cdot R^{1/2} \\ A_r \cdot Q + B_r \cdot Y_r & Q & 0 & 0 \\ Q_c^{1/2} \cdot Q & 0 & \gamma \cdot I & 0 \\ R^{1/2} \cdot Y_r & 0 & 0 & \gamma \cdot I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.34)$$

Etape 3

Dans cette étape le respect des contraintes sur les entrées de commande est vérifié. Dans l'approche proposée par (Kothare, 1996), la vérification des contraintes sur les entrées de commande se fait par la vérification de l'inclusion de l'ellipsoïde $\epsilon(\mathbf{e}(k))$ dans le polyèdre caractérisant les contraintes sur la commande. Dans notre travail les contraintes considérées sont les bornes maximales et minimales des temps de séjours des jetons dans les places des graphes d'événements P -temporels donnés par des intervalles de temps qui sont positifs mais non symétriques. Dans (Hamri, 2016) il a été démontré comment garantir le respect de cette classe de contraintes dans un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMIs.

Notre objectif est le calcul de gains stabilisants F_r en appliquant la loi de commande en boucle fermée

$$\mathbf{u}_c(k) = F_r \cdot \mathbf{e}(k),$$

avec, $\mathbf{U}_{r_{min}} \leq L \cdot F_r \cdot \mathbf{e}(k) \leq \mathbf{U}_{r_{max}}$

où, $\mathbf{U}_{r_{min}} = \mathbf{a} - L \cdot \mathbf{q}_{zr}$, et $\mathbf{U}_{r_{max}} = \mathbf{b} - L \cdot \mathbf{q}_{zr}$.

cette contrainte peut être mise sous la forme d'inégalités donnée comme suit :

$$\begin{cases} L \cdot F_r \cdot \mathbf{e}(k) \leq \mathbf{U}_{r_{max}} \\ -L \cdot F_r \cdot \mathbf{e}(k) \leq \mathbf{U}_{r_{min}} \end{cases} \quad (3.35)$$

Les inégalités donnée par l'équation(3.35) définissent un ensemble convexe donné par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{G}, \boldsymbol{\rho}) = \{\mathbf{e}(k), \mathcal{G} \cdot \mathbf{e}(k) \leq \boldsymbol{\rho}\} \quad (3.36)$$

$$\text{avec, } \mathcal{G} = \begin{pmatrix} L_r \\ -L \cdot F_r \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} U_{r_{max}} \\ U_{r_{min}} \end{pmatrix}$$

La vérification de l'inclusion de l'ellipsoïde défini par $\mathbf{e}(k)^t \cdot Q^{-1} \cdot \mathbf{e}(k) \leq \gamma$ dans le polyèdre donné par l'équation (3.36) revient à calculer la distance entre cet ellipsoïde et les hyperplans qui forment le polyèdre (3.36). Si cette distance est positive ou égale à zéro, alors l'ellipsoïde est inclus dans le polyèdre.

Les contraintes données par le polyèdre (3.36) reformulées sous forme d'un ensemble d'hyperplans sont données comme suit :

$$\begin{cases} L_i \cdot F_r = (U_{r_{max}})_i \\ -L_i \cdot F_r = (U_{r_{min}})_i \end{cases} \quad (3.37)$$

où l'indice i désigne la i -ième ligne des matrices L .

En considérant la distance d'un ellipsoïde à un hyperplan donnée dans l'annexe 2.

Pour un ellipsoïde centré à l'origine $v = 0$ et des hyperplans dont $c_i = -(U_{r_{min}})_i$ ou $c_i = (U_{r_{max}})_i$, nous obtenons :

$$\begin{cases} ((U_{r_{max}})_i - \sqrt{F_r^t \cdot L_i^t \cdot Q^{-1} \cdot L_i \cdot F_r}) \geq 0, \\ (-U_{r_{min}})_i - \sqrt{(-F_r^t \cdot L_i^t) \cdot Q^{-1} \cdot (-L_i \cdot F_r)} \geq 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

l'équation (3.38) est équivalente à

$$\begin{cases} (U_{r_{max}})_i \geq \sqrt{F_r^t \cdot L_i^t \cdot Q^{-1} \cdot L_i \cdot F_r}, \\ (-U_{r_{min}})_i \geq \sqrt{-F_r^t \cdot L_i^t \cdot Q^{-1} \cdot (-L_i \cdot F_r)}. \end{cases} \quad (3.39)$$

Dans ce travail, nous avons $(U_{r_{max}})_i \geq 0$ et $(-U_{r_{min}})_i \geq 0$, alors nous pouvons écrire l'équation suivante :

$$\begin{cases} (U_{r_{max}})_i^2 \geq F_r^t \cdot L_i^t \cdot Q^{-1} \cdot L_i \cdot F_r, \\ (U_{r_{min}})_i^2 \geq F_r^t \cdot L_i^t \cdot Q^{-1} \cdot L_i \cdot F_r, \end{cases} ,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} (U_{r_{max}})_i^2 - Y_r^t \cdot L_i^t \cdot Q^{-1} \cdot L_i \cdot Y_r \geq 0, \\ (U_{r_{min}})_i^2 - Y_r^t \cdot L_i^t \cdot Q^{-1} \cdot L_i \cdot Y_r \geq 0, \end{cases} \quad (3.40)$$

avec $F_r = Y_r \cdot Q^{-1}$.

En utilisant le complément de Schur, les équations (3.40) peuvent être réécrites sous forme de contraintes LMI comme suit :

$$\begin{bmatrix} (b - L_i \cdot \mathbf{q}_{zr})_i^2 & Y_r^t \cdot L_i^t \\ L_i \cdot Y_r & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.41)$$

$$\begin{bmatrix} (L_i \cdot \mathbf{q}_{zr} - a)_i^2 & Y_r^t \cdot L_i^t \\ L_i \cdot Y_r & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.42)$$

avec $F_r = Y_r \cdot Q^{-1}$ et $r = 1, 2$.

Ainsi, les matrices du retour d'état stabilisant F_r sont déduites de la résolution du problème d'optimisation convexe formulé comme suit :

$$\min_{\gamma, Q, Y_r} \gamma \quad (3.43)$$

$$\gamma \geq 0$$

soumis à

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}(k_0)^t \\ \mathbf{e}(k_0) & Q \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Q & Q \cdot A_r^t + Y_r^t \cdot B_r^t & Q \cdot Q_c^{1/2} & Y_r^t \cdot R^{1/2} \\ A_r \cdot Q + B_r \cdot Y_r & Q & 0 & 0 \\ Q_c^{1/2} \cdot Q & 0 & \gamma \cdot I & 0 \\ R^{1/2} \cdot Y_r & 0 & 0 & \gamma \cdot I \end{bmatrix} \geq 0.$$

$$\begin{bmatrix} (b - L_i \cdot \mathbf{q}_{zr})_i^2 & Y_r^t \cdot L_i^t \\ L_i \cdot Y_r & Q \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} (L_i \cdot \mathbf{q}_{zr} - a)_i^2 & Y_r^t \cdot L_i^t \\ L_i \cdot Y_r & Q \end{bmatrix} \geq 0,$$

3.3.2 Application à une ligne de galvanoplastie

La trajectoire désiré $z(k+1)$ doit satisfaire l'équation (3.6) avec $\mathbf{a} \leq L \cdot \mathbf{q}(k+1) \leq \mathbf{b}$, où E_r, A_r, L, \mathbf{a} et \mathbf{b} sont définis dans la section 3.2. la trajectoire désirée $z(k+1)$ est obtenue en considérant un fonctionnement 1-periodique. Pour le mode normale les temps de séjour désirés sont

$$q_{z1} = (40, 397, 58, 575.95, 58, 230.12, 58, 16.85, 141.92, 85.08, 54, 129.8, 134.32, 117.81, 37.165)^t.$$

Les temps de séjours désirés correspondants au mode maintenance sont :

$$q_{z2} = (40, 397, 58, 189.16, 58, 222.45, 58, 26, 54, 124, 103, 107.32, 113.52, 117.46, 58.92)^t.$$

Les temps de cycle désirés sont $\lambda_1 = 549$ (mode normal) et $\lambda_2 = 580$ (mode maintenance).

Pour la résolution du problème d'optimisation linéaire donné par l'équation (3.32) soumis aux contraintes LMIs données par les équations (3.33), (3.34), (3.41) et (3.42), on utilise CVX, un toolbox spécifique à la résolution de problème convexe (3.43). Les résultats numériques sont donnés par les matrices F_1, F_2 comme suit :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.003 & -0.003 & -0.001 & -0.001 & -0.003 & -0.004 & -0.004 & -0.003 & -0.071 & -0.09 & -0.061 & -0.041 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.008 & -0.001 & -0.001 & -0.001 & -0.001 & -0.009 & 0 & -0.001 & 0.002 & -0.003 & -0.021 & -0.017 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.001 & 0 & -0.002 & -0.002 & 0.001 & 0.001 & 0 & 0 & -0.009 & -0.008 & -0.009 & -0.013 \\ -0.004 & -0.004 & -0.004 & -0.004 & -0.004 & -0.004 & -0.004 & -0.004 & -0.073 & -0.079 & -0.06 & -0.054 \\ -0.001 & -0.001 & -0.001 & -0.001 & -0.001 & -0.001 & -0.001 & -0.001 & -0.011 & -0.012 & -0.009 & -0.008 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.002 & -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.001 & -0.001 & 0.061 & 0.057 & 0.024 & 0.013 \\ 0.002 & 0.001 & -0.002 & -0.003 & 0 & 0 & 0.001 & 0.001 & -0.059 & -0.041 & -0.02 & -0.2 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0 & 0.001 & -0.003 & 0.001 & 0.02 & 0.016 \\ 0.001 & 0 & 0.002 & 0.002 & -0.001 & -0.001 & 0 & 0 & 0.009 & 0.008 & 0.01 & 0.013 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.005 & -0.005 & 0.002 & 0.003 & -0.003 & -0.004 & -0.005 & -0.004 & 0 & -0.093 & -0.066 & -0.051 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & -0.001 & -0.001 & -0.001 & -0.001 & 0.001 & 0 & -0.001 & -0.062 & -0.055 & -0.057 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.001 & -0.001 & -0.006 & -0.006 & -0.002 & -0.001 & -0.001 & -0.002 & -0.001 & -0.062 & -0.055 & -0.057 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.004 & -0.004 & -0.001 & -0.001 & -0.004 & -0.003 & -0.005 & -0.005 & 0 & -0.053 & -0.04 & -0.033 \\ 0.005 & 0.004 & 0.001 & 0 & 0.003 & 0.003 & 0.005 & 0.004 & 0 & 0.049 & 0.036 & 0.03 \\ -0.003 & -0.002 & -0.008 & -0.009 & -0.006 & -0.004 & -0.002 & -0.005 & -0.001 & 0.099 & -0.086 & -0.084 \\ -0.002 & -0.002 & 0.005 & 0.005 & 0.003 & 0.001 & -0.002 & 0.001 & 0.001 & 0.092 & 0.078 & 0.074 \\ -0.001 & -0.001 & 0.001 & 0.001 & 0 & 0 & -0.002 & -0.001 & 0.001 & 0.052 & 0.056 & 0.051 \\ -0.002 & -0.002 & 0.005 & 0.002 & 0 & -0.001 & -0.002 & -0.001 & 0.001 & 0.03 & 0.032 & 0.039 \end{pmatrix}$$

où F_1 et F_2 sont les gains du retour d'état qui permettent de stabiliser le système dans le mode normal (respectivement dans le mode maintenance).

La Figure(3.6) représente l'évolution de l'état du système en boucle fermée c'est-à-dire l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de franchissement des transitions. La commutation au mode maintenance est effectuée à $k = 5$ et le retour au mode normale survient à $k = 30$. L'erreur tend vers zéro après chaque commutation, ce qui signifie que les gains de commande calculés assure la stabilité asymptotique et le suivi de la trajectoire désirée pour chaque mode.

La Figure(3.7) représente l'évolution des temps de séjour des jetons dans les places en fonction du nombre de franchissement des transitions. On voit bien qu'après chaque commutation, les temps de séjour désirés sont atteints tout en restant dans leurs intervalles. Cela signifie que les gains du retour d'état synthétisés assurent la convergence vers les trajectoires de référence et le respect des contraintes des temps de séjour des marques dans les places.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de la maintenance d'une ligne de galvanoplastie est abordé. Sans modifier l'enchaînement des opérations et sans arrêter le système deux modes de fonctionnements apparaissent : le mode normale et le mode maintenance. Ces derniers sont représentés par des graphes d'événements P -temporels avec un nombre différents de ressources parallèles. En associant à chaque mode la représentation d'état établie dans l'algèbre standard, nous avons obtenu un système dit à commutation qui caractérise le fonctionnement du procédé dans les deux modes. Enfin, en utilisant l'approche de la commande MPC, nous avons calculé des gains de

retour d'état stabilisant et qui garantissent le respect des contraintes temporelles dans les deux modes de fonctionnement.

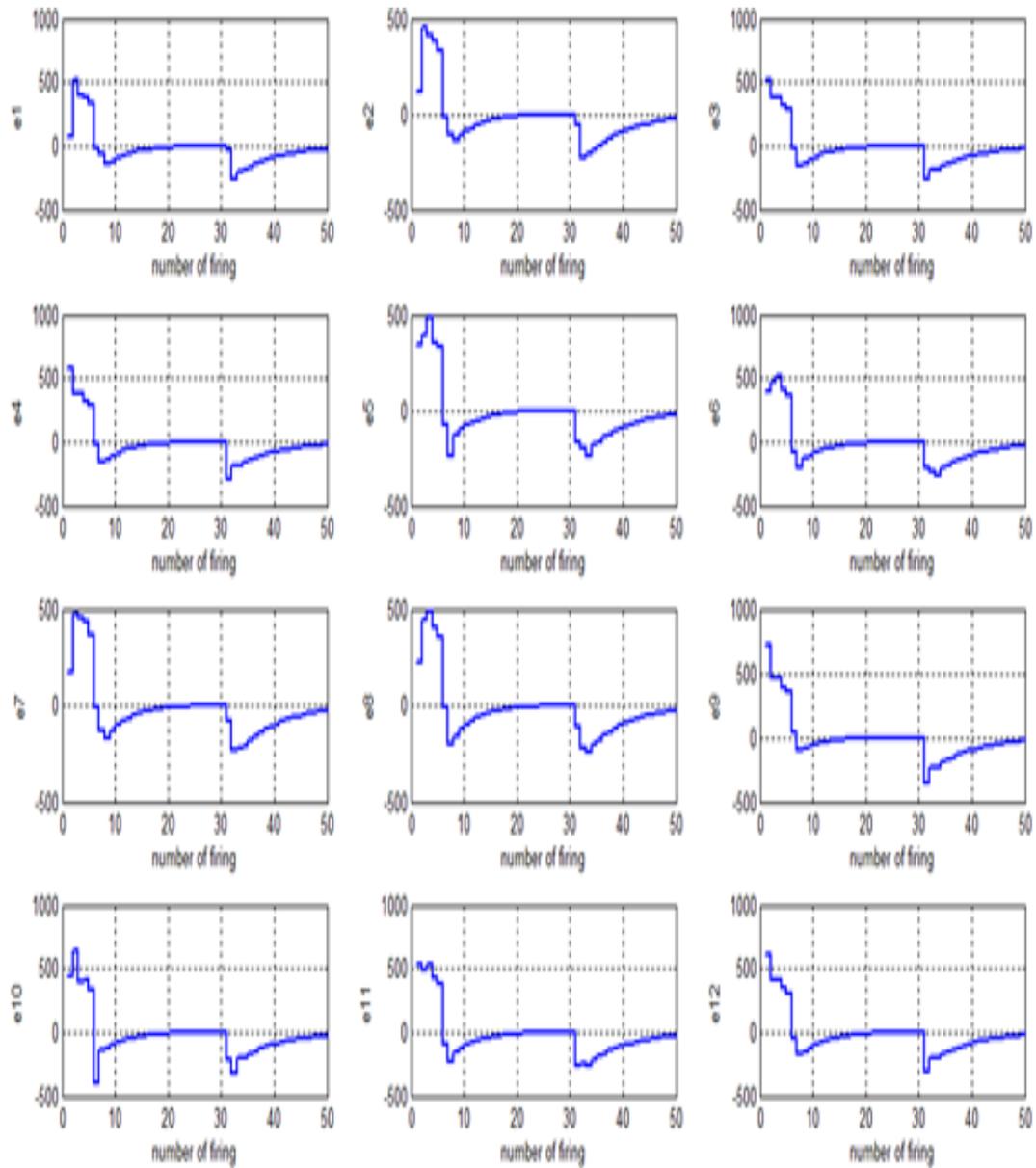


FIGURE 3.7: Evolution de l'erreur en fonction du nombre de franchissement des transitions

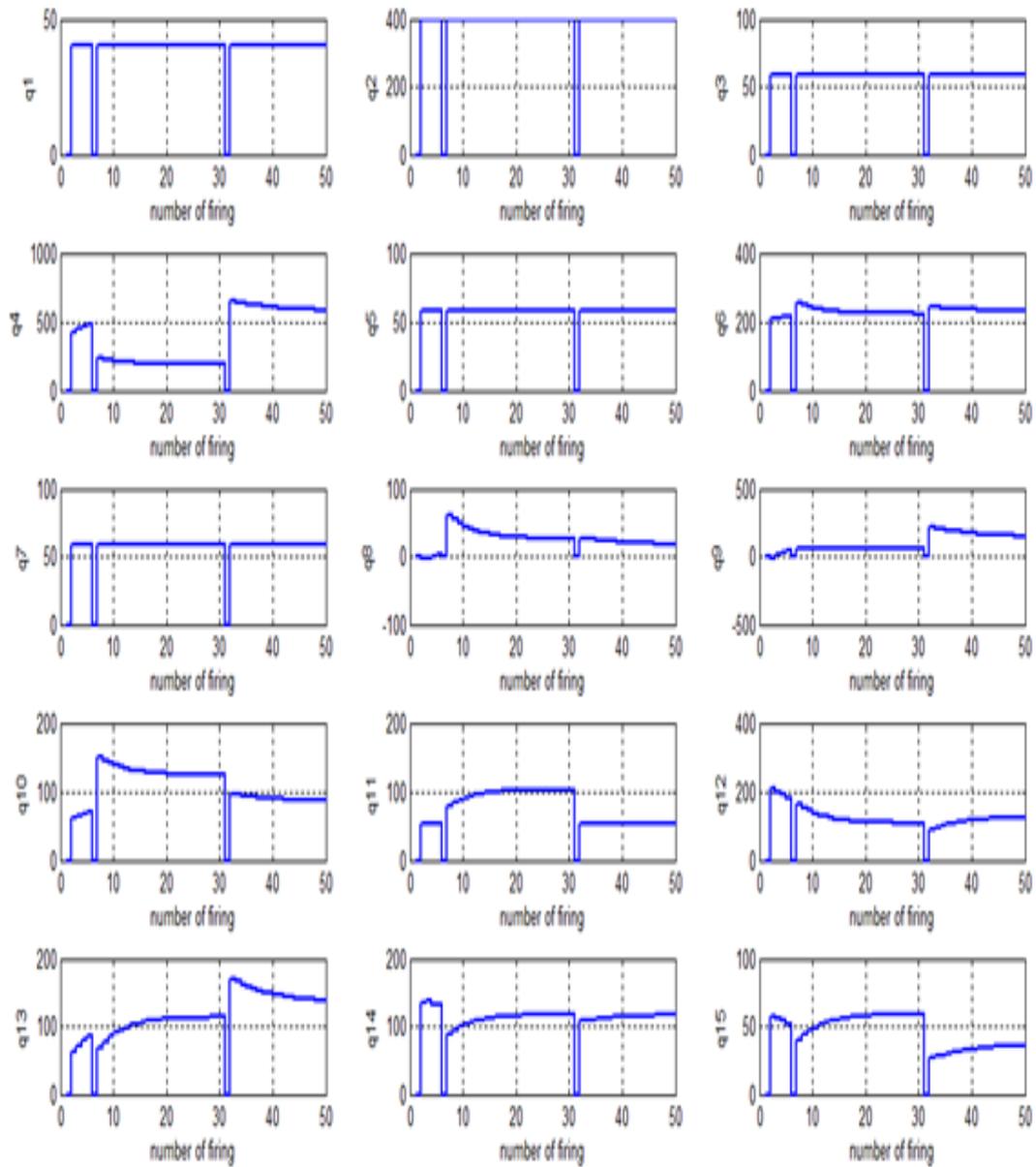


FIGURE 3.8: Evolution des temps de séjour des jetons dans les places en fonction du nombre de franchissement des transitions

Conclusion générale

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur la modélisation, l'analyse des performances et la commande des systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'événements P -temporisés et P -temporels. Nous avons présenté une méthodologie permettant d'aborder à la fois les problèmes de modélisation, l'analyse et de contrôle rencontrés dans cette classe de systèmes.

Le premier résultat présenté dans cette thèse concerne la modélisation des graphes d'événements P -temporisés et P -temporels. Nous avons montré que tout graphe d'événements P -temporisé ou P -temporel pouvait être modélisé par un système d'équations linéaires implicites, et sous certaines conditions (vivacité) la solution de tels systèmes devient explicite (i.e. solution unique).

Le second résultat concerne la commande en boucle ouverte et fermée des systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'événements P -temporisés et P -temporels. Dans un premier temps, on s'est intéressé à la recherche d'un fonctionnement 1-périodique minimisant ou maximisant le temps de cycle. Ce problème revient à résoudre un problème de programmation linéaire. En outre, on a distingué les systèmes initialement en fonctionnement (ateliers de galvanoplastie) des systèmes au repos initialement. Par la suite la commande par invariance positive a été utilisée par synthétiser des gains de retour d'état stabilisant (permettant d'atteindre un fonctionnement 1-périodique désiré) qui garantissent non seulement le respect des contraintes imposées sur la commande mais aussi la stabilité asymptotique des trajectoires de d'état. Les conditions obtenues pour l'existence de ces gains sont toutes nécessaires et suffisantes.

Le troisième résultat concerne la commande d'un atelier de galvanoplastie avec prise en charge d'une tâche de maintenance sur une ressource parallèle. Ce problème a été modélisé par un système linéaire à commutations commandées (une sous classe de systèmes dynamiques hybrides). Une stratégie de commande basée sur la commande prédictive à base de modèle a été proposée. En outre, nous avons calculé des lois de commande optimales qui permettent de suivre une trajectoire

désirée pour les deux modes de fonctionnement.

Les travaux présentés dans cette thèse laissent apparaître les perspectives suivantes :

1. Généraliser les modèles obtenus dans le domaine événementiel au domaine temporel en considérant les fonctions compteurs.
2. La méthodologie de commande proposée dans cette thèse pourrait être améliorée pour prendre en considération des systèmes partiellement observables.
3. La troisième perspective, concerne la gestion des transitoires issus des changements de taux de production ou des changements du nombre de ressources parallèles, afin d'améliorer le gain de production.

Bibliographie

- a (Amari et al, 2004) Amari S., Demongodin, I et Loiseau, J.J. "Sizing, cycle time and plant control using dioid algebra". Chapter 6 in *Supply Chain Optimization, Series Applied Optimization*, A. Dolgui, J. Soldek and O. Zaikin (Eds), Springer, pp. 71-85, (2004).
- [0] [1] (Amari et al, 2012) Amari, S., Demongodin, I., Loiseau, J.J., et Martinez, C. (2012), "Max-Plus Control Design for Temporal Constraints Meeting in Timed Event Graphs". *IEEE Transactions on Automatic Control*. V.57(2), pp. 462-467.
- [2] (Baccelli et al, 1999) Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., et Quadrat, J. "Synchronization and linearity : an algebra for discrete event" systems, Wiley, (1999).
- [3] (Becha et al, 2013) Becha, T., Kara, R., Collart Dutilleul, S., et Loiseau, J.J. (2013), "Modeling, analysis and control of electroplating line modelled by P-time event graphs". *6th IFAC Conference on Management of Production and Logistics, Center for Information Technology Renato Archer, Fortaleza, Brazil*. DOI : 10.3182/20130911-3 BR-3021.00027, Vol.6, pp 311-316.
- [4] (Becha et al, 2017) Becha, T., Kara, R., Collart Dutilleul, S., et Loiseau, J.J. (2017), "Model predictive control of an electroplating line without stopping the production" 91 :40954105 *International Journal of advanced manufacturing technology*. DOI 10.1007/s00170-016-9980-7.
- [5] (Bemporad et al, 2002) Bemporad A., Morari M., Dua V., et Pistikopoulos E.N : *The explicit linear quadratic regulation for constrained systems*. *Automatica*, 38 :3-20, (2002).
- [6] (Bernstein, 2009) Bernstein, D. (2009). "Matrix Mathematics, Theory Facts, and Formulas", 2nd ed., Princeton university press.
- [7] (Blanchini, 1999) Blanchini, F. (1999). "Set invariance in control". *Automatica*. V.35(11), pp. 1747-1767.

- [8] (Bonhomme, 2001) Bonhomme. P. "Réseaux de Petri P-temporels, contributions à la commande robuste". PHD thesis. Savoie university. 2001.
- [9] (Bonhomme, 2010) Bonhomme, P. (2010), "Update Procedure for the Supervisory Control of P-Time Event Graphs". 5th IFAC Conference on Management and Control of Production and Logistics, MCPL 2010, September 8-10, Coimbra, Portugal.
- [10] (Boyd et al, 1994) Boyd, V.P., Ghaoui E.E.L., Feron E., et Balakrishnan, V. "Linear matrix inequalities in system and control theory". In : SIAM studies in applied mathematics. Philadelphia, Vol. 15 ; doi :10.1137/1.9781611970777, (1994).
- [11] (Camacho, 2004) Camacho E.F., Bordons C : "Model Predictive Control in the Process Industry". London, Springer, (2004).
- [12] (Castillo et al, 1999) Castillo. E., Coba. A., Jubete. F., et Pruneda. R.E. "Orthogonal Sets and Polar Methods in Linear Algebra", (1999).
- [13] (Che et al, 2004) Che A, et Chu C. "Single-track multi-hoist scheduling problem : A collision-free resolution based on a branch-and-bound approach". Int J Prod Res, 42 : 2435-2456, (2004).
- [14] (Collart, 1997) Collart Dutilleul, S., (1997). "Commande Robuste Dáteliers a contraintes de temps de sejour : Appllication a la galvanoplastie". PHD Thesis.
- [15] (Collart et al, 2003) Collart Dutilleul, S., . Craye, E. "Performance and tolerance evaluation with respect to forbidden states", SAFEPROCESS 03, IFAC Symp. on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Washington, USA, (2003).
- [16] (Cohen et al, 1985) Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P., et Viot, M. (1985). "A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing". IEEE Trans. on Automatic Control, 30(3) :210-220.
- [17] (Cottenceau et al, 1999) Cottenceau, B.L., Hardouin, Boimond J.L. et Ferrier J.L. "Synthesis of Greatest linear feedback for timed event graphs in dioïd", IEEE Transactions on Automatic Control, 44(6), pp.1258-1262, (1999).
- [18] (David et al, 1992) David, R et Alla, H. "Du grafcet au réseaux de petri". Editions Hermès, Paris, (1992).
- [19] (Declerck et al, 2007) Declerck, P., Guezzi, A., et Boimond, J.L. (2007). Cycle Time of P-time Event Graphs. 4th International Conference on Informatics in Control, Automation

- and Robotics (ICINCO2007), Special Session : From Planning to Control of Manufacturing Systems, Angers, France, 09-12 may 2007.*
- [20] (Declerck et al, 2010) Declerck, P. et Didi Alaoui, M.K.(2010). "Optimal control synthesis of Timed Event Graphs with specifications defined by an interval model", *IEEE Transactions on Automatic Control*, February 2010.
- [21] (Declerck, 2013) Declerck, P. "Discrete Event Systems in Dioid Algebra and Conventional Algebra", *Focus Series in Automation Control*, ISTE Ltd and John Wiley, 2013.
- [22] (Declerck, 2013) Declerck, P. (2013), "Cycle Time of a P-time Event Graph with Affine-Interdependent Residence Durations". *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*.
- [23] (Declerck et al, 2014) Declerck, P., et Guezzi, A. (2014). "Predictive control of Timed Event Graphs with specification defined by P-time Event Graphs". *Discrete Event Dynamic Systems*. V.24(3), pp. 261-273.
- [24] (Declerck, 2018) Declerck, P. "Extremum Cycle Times in Time Interval Models", *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 63, Issue 6, pp. 1821-1827, June 2018,
- [25] (De Schutter et al, 2001) De Schutter B, et van den Boom T. (2001). Model predictive control for max-plus-linear discrete event systems. *Automatica*. V.37(7), pp.10491056.
- [26] (Diaz et al, 1994) Diaz, M., Senac, P.(1994). *Time Stream Petri Nets : A model for timed multimedia information*. In R. Valette, editor, *Proceedings of the 15th International Conference on Application and Theory of Petri Nets*, vol. 815 of *Lecture Notes in Computer Sciences*, pp. 219-238, Zaragosse, Spain, Springer-Verlag.
- [27] (Didi-Alaoui, 2005) Didi-Alaoui, M.K. "Étude et supervision des graphes d'événements temporisés et temporels" : vivacité, estimation et commande. Thèse, ISTIA, Université d'Angers, Décembre 2005.
- [28] (El Ghaoui, 2000) El Ghaoui L., et Niculescu S.L : "Advances in linear matrix inequality methods in control". In : *SIAM series on advances in design and control 2000*. Philadelphia, PA. doi :10.1137/1.9780898719833.
- [29] (Farkas, 1902) Farkas, J. (1902). "Über die Theorie der Einfachen Ungleichungen", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, V.124, pp. 1-27.
- [30] (Gaubert, 1992) Gaubert, S. "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes". Thèse, École des Mines de Paris, July 1992.

- [31] (Guezzi, 2010) Guezzi, A. (2010). *Modélisation, analyse de performances et commandes des systèmes à événements discrets*. Phd Thesis. Angers University.
- [32] (Grant et al, 2008) Grant, M., Boyd, S., et Ye, Y. (2008). "CVX : Matlab software for disciplined convex programming (web page and software)", available at www.stanford.edu/~boyd/cvx/.
- [33] (Grant et al, 2008) Grant, M., et Boyd, S. (2008). "Graph implementations for nonsmooth convex programs". *Recent Advances in Learning and Control (a tribute to M. Vidyasagar)*, V. Blondel, S. Boyd, and H. Kimura, editors, Springer. http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html.
- [34] (Haar, 1918) Haar, A. (1918). "Uber lineare ungleichungen". In *Reprinted in : A. Haar. Gesammelte arbeiten*. Akademi Kiado.
- [35] (Hamri et al, 2016) Hamri H., Kara R., et Amari S : *Multiparametric predictive control for a class of Discrete Event Systems*. In : *WODES 2016 the 13th international Workshop on Discrete Event Systems*. May 30 -June 1, 2016 ; Xi'an,China ; 418-423.
- [36] (Hamri et al, 2015) Hamri H., Kara R., et Amari S : *Model predictive control of P-time event graphs*. *International Journal Syst Sci* 2015 ; 47 :3792-3802.
- [37] (Hennet, 1989) Hennet, J.C. (1989). "Une extention du lemme de Farkas et son application au problème de régulation linéaire sous contraintes". *Comptes rendus de l'académie des sciences Paris*. V.308(I), pp.415-419.
- [38] (Hennet, 1995) Hennet, J-C. (1995). *Discrete-time Constrained Linear Systems in Control and Dynamic Systems*, Vol.71, C.T. Leondes Ed., Academic Press, 1995.
- [39] (Horn et al, 1990) Horn, R.A et Johnson, C.R (1990). "Matrix Analysis". Cambridge University Press 1985, reprinted with correction 1990.
- [40] (Houssin, 2006) Houssin, L., (2006). "Contribution à la commande des systemes (max,+)
linéaires : Appllication aux réseaux de transport". Phd Thesis. Angers university
- [41] (Houssin et al, 2007) Houssin L., Lahaye S., et Boimond J.L. (2007). "Just in time control of constrained (max, +) linear systems". *Discrete Event Dynamic Systems*. V.17(2), pp. 159-178.
- [42] (Houssin et al, 2013) Houssin L., Lahaye S., Boimond J.L. (2013). "Control of (max,+)
linear systems minimizing delays". *Discrete Event Dynamic Systems*. V.23(3), pp. 261-276

- [43] (Kara et al, 2013) Kara, R., Becha, T., Collart Dutilleul, S., et Loiseau, J.J. (2013), "An implicit System for Modelling and Control of Discrete Event System". *5th Symposium on System on Structure and Control Part of 2013 IFAC Joint Conference SSSC, Grenoble, France, February 4-6*, pp.84-89.
- [44] (Khansa, 1997) Khansa, W. (1997). "Réseaux de Petri P-temporel, contribution à l'étude des systèmes événements discrets". *Phd Thesis, Savoie University*.
- [45] (Khansa et al, 1996) Khansa, W., Ayyalinc, P., et Denat, J.P. (1996). "Structural analysis of P-time Petri nets". *Conf. on Computational Engineering in Systems Applications (CESA'96 IMACS Multiconference), Lille, France*, pp. 127-136.
- [46] (Kothare et al, 1996) Kothare M.V., Balakrishnan V., et Morari M : "Robust Constrained Model Predictive Control Using Linear Matrix Inequalities". *Automatica* ; 1996 ; 32 :1361-1379.
- [47] (Kurzanskiy et al, 2006) Kurzanskiy A.A., et Varaiya P : *Ellipsoidal toolbox (Technical Report No. UCB/EECS-2006-46). Electrical Engineering and Computer Science. University of California at Berkeley*.
- [48] (Lee et al, 2005) Lee, T.E., Park,S.H., et C. Jung,C. "Steady State Analysis of Timed Event Graph with Time Window Constraints". *Discrete Applied Mathematics, Vol. 167*, pp. 202-216, 2014.
- [49] (Lhommeau, 2003) Lhommeau. M. "Étude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max, +) : Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. Synthèse de correcteurs en présence de perturbations". *Thèse, LISA - Université d'Angers, 2003*.
- [50] (Maia et al,2011) Maia, C.A, Andrade, C.R et Hardouin, L. (2011). "On the control of max-plus linear system subject to state restriction". *Automatica. V.47(5)*, pp. 988-992.
- [51] (Menguy, 1997) Menguy. E. "Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes". *Thèse, LISA - Université d'Angers, 1997*.
- [52] (Murata, 1989) Murata, T. (1989). "Petri nets : Properties, analysis and applications". *Proceedings of the IEEE. V.77(4)*, pp. 541-580.
- [53] (Necoara et al, 2008) Necoara I., Van den Boom T.J.J., et De Schutter B : "Stabilization of max-plus linear systems using model predictive control : the unconstrained case". *Automatica* ; 2008 ; 44(4) :971-981.

- [54] (Ozkan et al, 2000) Ozkan L., Kothare M.V., et Georgakis C : "Model predictive control of nonlinear systems using piecewise linear models". *Coput Chemeng Eng* 2000 ; 24 :793-799.
- [55] (Petri, 1962) Petri, C.A. "Kommunikation mit Automaten". Thèse, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn, Germany, (1962).
- [56] (Proth, 1995) Proth, J. M. et Xie, X. "Les réseaux de petri pour la conception et la gestion des systèmes de production". Masson, Paris, 1995.
- [57] (Ramamoorthy et al, 1980) Ramamoorthy, C.V et Gary.S. "Performance Evaluation of Asynchronous Concurrent Systems Using Petri Nets". *IEEE Trans. on Software Engineering*, vol. 6, sep 1980.
- [58] (Ramchandani, 1974) Ramchandani, C. "Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri Nets". Cambridge, Mass. : MIT, Dept. Electrical Engineering, PhD Thesis, 1974.
- [59] (Sifakis, 1977) Sifakis, J. "Use of Petri Nets for Performance Evaluation". In : Beilner, H. ; Gelenbe, E. : *Modelling and Performance Evaluation of Computer Systems, Measuring, Modelling and Evaluating Computer Systems*, pp. 75-93. Amsterdam : North Holland, 1977.
- [60] (Sifakis, 1978) Sifakis, J. "Structural properties of petri nets". In *Mathematical foundation of computer science, volume 64*. J. Windowski (ed), Springer Verlag, 1978.
- [61] (Spacek et al, 2017) Spacek, P. et Komenda, J. "Analysis of Cycle Time in Interval P-Time Event Graphs in Dioïd Algebras," *20th IFAC World Conference, Volume 50, Issue 1*, pp 13461-13467, Toulouse, France, July 2017,
- [62] (Tebani et al, 2016) Tebani, K., Amari, S., et Kara, R. "Closed-loop control of constrained discrete event systems : application to a networked automation system". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*,90(5), 1295-1306,(2016).
- [63] (Ten Dam, 1995) Ten Dam, A.A. et Nieuwenhuis, J.W. (1995). "A linear programming algorithm for invariant polyhedral sets of discrete-time linear systems". *Systems Control Lett.*, 25 :337-341.
- [64] (Van den Boom et al, 2006) Van den Boom T.J.J., et De Schutter, B. "modeling and control of discrete event systems using switching max-plus-linear systems". *Control Eng Pract* 2006 ; 14 :1199-1211.

- [65] Van den Boom, T.J.J, De Schutter, B., (2007). "Stabilizing controllers for randomly switching max-pluslinear discrete event systems". In : *Proceedings of the European control conference 2007, Kos, Greece, pp 49524959.*
- [66] Van den Boom, T.J.J, De Schutter, B., (2008a). "Model predictive control for switching max-plus-linear systems with random and deterministic switching". In : *Proceedings of the IFAC world congress 2008, Seoul, South Korea, pp 76607665.*
- [67] Van den Boom, T.J.J, De Schutter, B., (2008b). "Randomly switching max-plus linear systems and equivalent classes of discrete event systems". In : *Workshop on discrete event systems (WODES), Göteborg, Sweden, 2830 May, pp 242247.*
- [68] (Van den Boom et al, 2012) Van den Boom T.J.J., et De Schutter, B. "Modeling and control of switching max-plus-linear systems with random and deterministic switching". *Discrete Event Dyn S 2012; 22 :293-332.*
- [69] (Varga, 2009) Varga, R.S. (2009). "Matrix Iterative Analysis". 2nd ed., *Springer Series in Computational Mathematics. pp.22-24.*
- [70] (Zhou et al, 2003) Zhou Z., et Li L. "Single hoist cyclic scheduling with multiple tanks". *A material handling solution. Comput Oper Res, 30 : 811-819, (2003).*

Annexe 1

Dans cette partie, des fondements de bases concernant les dioïdes sont présentés. Ce travail bibliographique a été fait à partir des documents suivants auxquels le lecteur pourra se référer à (Baccelli, 1992), (Gaubert, 1992) et (Menguy, 1997).

Définition .0.1 (Monoïde) Un monoïde (D, \oplus) est un ensemble doté d'une loi interne notée \oplus , associative, et possédant un élément neutre. Si cette loi est commutative, le monoïde est dit commutatif.

Définition .0.2 (Monoïde idempotent) Un monoïde (D, \oplus) est dit idempotent si la loi \oplus est commutative, associative et idempotente, c'est-à-dire, si elle vérifie : $\forall a \in D, a \oplus a = a$.

Définition .0.3 (Demi-anneau) Un Demi-anneau est un ensemble D muni de deux lois internes notées \oplus et \otimes appelées "addition" et "multiplication" respectivement, tel que, pour tout $a, b, c \in D^3$:

- L'addition est associative : $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
- L'addition est commutative : $a \oplus b = b \oplus a$;
- L'addition admet un élément neutre noté ε et appelé "zero" : $a \oplus \varepsilon = a$;

- La multiplication est associative : $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;
- La multiplication admet un élément neutre noté e et appelé "identité" : $a \otimes e = e \otimes a = a$;
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $\forall a, b, c \in D$
$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$
$$(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$$
- Le zéro est absorbant pour la multiplication : $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$;

Définition .0.4 Un dioïde (D, \oplus, \otimes) est un demi-anneau tel que le monoïde (D, \oplus) est idempotent.

Un dioïde est dit commutatif si la multiplication est commutative ($a \otimes b = b \otimes a$).

Exemples

1. L'ensemble $(\mathbb{R} \cup +\infty, \max, +)$ est un dioïde commutatif pour lequel $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$. Ce dioïde est noté \mathbb{R}_{\max} , et est appelé Algèbre Max-Plus. Dans ce dioïde, la loi \oplus correspond à l'application maximum, et la loi \otimes est la somme usuelle.
2. L'ensemble $(\mathbb{R} \cup +\infty, \min, +)$ est un dioïde commutatif pour lequel $\varepsilon = +\infty$ et $e = 0$. Ce dioïde est noté \mathbb{R}_{\min} , et est appelé Algèbre Min-Plus. Dans ce dioïde, la loi \oplus correspond à l'application minimum, et la loi \otimes est la somme usuelle.

.1 Quelques propriétés des dioïdes

.1.1 Dioïde complet

Un dioïde (D, \oplus, \otimes) est complet s'il est fermé pour toutes les sommes infinies et si le produit \otimes distribue à gauche et à droite des sommes infinies.

$$\forall d \in D, \quad \begin{aligned} d \otimes (\oplus_{a \in A} a) &= \oplus_{a \in A} (d \otimes a) \\ (\oplus_{a \in A} a) \otimes d &= \oplus_{a \in A} (a \otimes d) \end{aligned}$$

.1.2 Structure ordonnée d'un dioïde

Pour un dioïde D donné, la propriété d'idempotence de la loi additive \oplus induit une relation d'ordre, notée \prec , définie par :

$$\forall (a, b) \in D^2, a \prec b \Leftrightarrow a \oplus b = b$$

Cette relation d'ordre est compatible avec les loi \oplus et \otimes : $\forall (a, b, c) \in D^3$,

$$a \leq b \Rightarrow a \oplus c \prec b \oplus c$$

$$a \leq b \Rightarrow a \otimes c \prec b \otimes c$$

Résolution d'équations dans un dioïde :

Définition .1.1 (Étoile de Kleene) L'étoile de Kleene d'une matrice carrée A , notée A^* est définie par : $A^* = \oplus_{i \in \mathbb{N}} A^i$ avec $A^0 = I$ avec I désigne la matrice identité.

Théorème .1.1 Dans un dioïde complet, la quantité $A^* \otimes B$ est la plus petite solution de l'équation $x = A \cdot x \oplus B$ et de l'inéquation $x \geq A \cdot x \oplus B$

Résumé :

Cette thèse traite de la modélisation, de l'analyse des performances et de la commande des systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'événements P -temporisés ou P -temporels. La première contribution concerne la description du comportement des graphes d'événements P -temporisés ou P -temporels par des systèmes d'équations linéaires implicites.

Aussi, nous montrons que sous certaines conditions le modèle implicite proposé devient explicite. Ensuite, différents problèmes de commande sont traités. Premièrement, en considérant un fonctionnement 1-périodique, un problème de programmation linéaire est formulé pour déterminer les temps de séjour des jetons, les temps de cycles minimum et maximum du système modélisé. Par la suite, une loi de commande par retour d'état est synthétisée. Qui garantit le respect des contraintes sur la commande et sur l'état. La méthodologie proposée est basée sur les propriétés d'invariance positive et de contractivité des ensembles polyédrales.

La dernière partie de ce manuscrit traite de la commande d'une ligne de galvanoplastie sans arrêt de production. Le système considéré est en fonctionnement répétitif, et il est modélisé par un graphe d'événements P -temporels. L'objectif principal est d'effectuer une tâche de maintenance sur une ressource parallèle. Deux modes de fonctionnement apparaissent : le modes normal et le mode maintenance. Chaque mode est décrit par un modèle linéaire implicite et un modèle global correspondant à un système linéaire à commutation est obtenu. En utilisant la technique de la commande prédictive à base de modèle, nous calculons des gains de retour d'état stabilisant sur un horizon de prédiction infini qui permet le respect des contraintes temporelles tandis que la maintenance est effectuée.

Mots-clés : Systèmes à événements discrets, graphes d'événements P -temporisés et P -temporels, commande par invariance, commande prédictive à base de modèle, lignes de galvanoplastie.

Abstract :

This thesis deals with modelling, performance analysis and control of discrete event systems modelled by P -timed or P -time event graphs. The first contribution concerns the description of the behaviour of P -time and P -timed event graphs by constrained discrete event implicit linear systems. Also, we show that under some conditions the proposed implicit model becomes explicit.

Then, different problems of control are treated. First, when we assume that the behaviour of the system is 1-periodic, a linear programming problem is derived, and it allows determining sojourn times of tokens, the minimum and the maximum cycle times. Furthermore, for the obtained explicit model, a stabilizing feedback gains that depend on the state vector is designed. It permits fulfilling constraints on the control and the state. The designed method is based on positive invariance and contractivity properties of polyhedral sets.

The last part of this manuscript, deals with the control of an electroplating line without stopping the production. The considered system is running in repetitive functioning mode, and it is modelled by a P -time event graph. The main objective is to switch the number of parallel resources to maintain a resource while the production is assumed to be always running. Two functioning modes appear : normal and maintenance modes. Each mode is described by a state space model written in the standard algebra and a global model corresponding to a switching linear system is obtained. Using model predictive control technique, we compute stabilizing state feedback gains over an infinite horizon respecting the temporal constraints while the maintenance task is performed.

Keywords : Discrete event systems, P -timed and P -time event graphs, control by invariance, model predictive control, electroplating line.