

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI OUZOU

FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

MEMOIRE DE MAGISTER

SPECIALITE : GENIE CIVIL

Présenté par :

Mr. HAMMAR Rabah

Thème :

**Etude de la réponse des éléments bidimensionnels en béton armé sous
l'action des charges monotones en tenant compte de l'effet d'engrènement
et de la densité du maillage**

Devant le jury d'examen composé de :

Mr BOUAFIA Youcef ,	Professeur;	U.M.M.T.O ;	President
Mr DAHMANI Lahlou ,	Maître de Conférences A ;	U.M.M.T.O ;	Rapporteur
Mr MEHADDENE Rachid,	Maître de Conférences A ;	U.M.M.T.O ;	Examineur
Mr DRIZI Said,	Maître de Conférences A ;	U.M.M.T.O ;	Examineur

2010/2011

Remerciement

Je tiens à remercier Mr DAHMANI Lahlou, maître de conférence, pour m'avoir encouragé à reprendre le magistère, et à me proposer un sujet fort intéressant.

Je lui exprime ma gratitude pour sa disponibilité, ses orientations tout au long de ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements au président et aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'être mes examinateurs.

Table des matières

CH.1 : INTRODUCTION

1.1 : Objectifs du mémoire et la méthodologie utilisée dans la recherche.....	1
1.2 : Organisation du mémoire.....	2

CH.2 : Comportement général du matériau béton armé

2.1 : Introduction.....	3
2.2 : Comportement du béton.....	3
2.2.1 : Généralités.....	3
2.2.2 : Comportement du béton sous contraintes uniaxiales.....	4
2.2.3 : Comportement du béton sous contraintes biaxiales.....	6
2.2.4 : Comportement triaxial du béton.....	9
2.3 : Modélisation de la fissuration du béton : revue bibliographique.....	11
2.3.1 : Introduction.....	11
2.3.2 : Critères d'amorçage et de propagation de fissure.....	12
2.3.3 : Modèle de la fissure discrète.....	14
2.3.4 : Modèle de la fissure diffuse.....	15
2.3.5 : Principe général.....	15
2.3.6 : Les différents concepts.....	16
2.3.6.1 : Le concept de la fissure diffuse fixe.....	16
2.3.6.1.1 : Formulation à partir de la déformation totale.....	16
2.3.6.1.2 : Formulation à partir de la décomposition des déformations.....	19
2.3.7 : L'engrènement.....	26
2.3.8 : L'effet de GOUJON.....	29
2.3.9 : Comportement de l'acier.....	31
2.3.9.1 : Comportement du composite béton armé.....	32

CH.3 : Modélisation sous des charges mécaniques

3.1 : Introduction.....	34
3.2 : Matériau béton non fissuré et modélisation de son comportement.....	37
3.2.1 : Généralités.....	38
3.2.2 : Surface de charge et règle d'écrouissage.....	39
3.3 : Critères de rupture.....	42
3.4 : Relation contraintes- déformations.....	56
3.4.1 : Equation incrémentales.....	56
3.4.2 : Critères de rupture pour le béton.....	61
3.4.3 : Modèle de la fissure discrète.....	64
3.4.4 : Modèle de la fissure continue.....	64
3.4.5 : Analyse de la traction.....	65
3.4.6 : Fissuration simple du béton.....	66
3.4.7 : Fissuration double.....	68
3.5 : Modélisation des armatures.....	69
3.6 : Méthode d'analyse non linéaire.....	70
3.7 : Description des modules.....	73

CH.4 : Programmation

4.1 : Introduction.....	76
4.2 : Structure du programme.....	76
4.3 : Description des modules.....	78
4.3.1 : Module1 : génération du maillage.....	78
4.3.2 : Module2 : assemblage des matrices de rigidité.....	84
4.3.3 : Module3 : analyse non linéaire.....	84
4.4 : Description des sous-programmes.....	86

CH.5 : Application et discussion des résultats

5.1 : Validation et exemples d'application numériques.....	88
5.1.1 : Influence de la densité du maillage.....	88
5.1.2 : Panneau en béton armé.....	90
5.1.3 : Poutre isostatique.....	92
5.1.4 : Conclusion.....	95

CH.6 : Conclusion générale

CH.6 : Conclusion générale.....	97
---------------------------------	----

Références

Références.....	98
-----------------	----

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1. 1. OBJECTIF DU MEMOIRE

Les composants en béton armé, sont des éléments structuraux importants utilisés dans les constructions civiles et industrielles. Pour leur utilisation optimale, il est nécessaire d'étudier l'évolution de leur comportement jusqu'à la rupture. A cause de leur géométrie, la théorie des poutres ne peut pas décrire leur comportement. De plus, l'étude de ce comportement est rendue plus difficile à cause des phénomènes suivants :

- non linéarité de la réponse charge-déformation du béton,
- difficulté de formuler les relations constitutives du béton sous des contraintes combinées,
- fissuration progressive du matériau béton sous chargements,
- comportement interactif entre le béton et l'acier qui forme le matériau composite.

Pour ces diverses raisons, il est nécessaire de faire appel aux méthodes numériques. Ces dernières ont permis aux ingénieurs de simuler avec fidélité le comportement non linéaire des structures jusqu'à leur ruine.

Avec l'avènement des ordinateurs, l'intérêt des praticiens pour la non linéarité s'est accru considérablement. De nos jours, les méthodes numériques permettent facilement de résoudre des problèmes d'une étonnante complexité, et ce dans tout domaine rencontré : structure, écoulement, diffusion, chaleur, fluide, dynamique, sol, etc. Aujourd'hui, les possibilités du calcul dépassent largement les connaissances que l'ingénieur reçoit du comportement non linéaire des structures. Une attention particulière doit être portée sur la définition des lois de comportement et des techniques d'analyses non linéaires.

Aujourd'hui, si certains ingénieurs restent plus sceptiques devant un calcul numérique non linéaire, ignorer les progrès de l'analyse numérique non linéaire serait une erreur. D'ailleurs, dans certains cas, seul ce calcul numérique permet de se faire une idée du comportement des structures. De plus, l'expérimentation de laboratoire est souvent très coûteuse et lente; lorsqu'on a mis au point une technique de calcul numérique qui reproduit avec fidélité l'observation expérimentale, on abandonne cette dernière au profit de ce qu'on

appelle la *simulation numérique* de loin plus rapide et plus économique. Ces dernières années ont vu une forte baisse des essais de laboratoire au profit de la simulation numérique, au point que, dans certains domaines, l'expérimentation a presque complètement disparu.

Dans cette étude, on se limitera d'une part à la définition du comportement mécanique du composite acier-béton et à sa modélisation ainsi qu'aux techniques d'analyse non linéaire. D'autre part, on développera un code de calcul permettant de simuler le comportement des éléments en béton armé jusqu'à la ruine. En dernier, les résultats des simulations seront comparés à des résultats expérimentaux. Dans cette analyse, l'expérimentation sert comme un support de validation du code de calcul développé. Ce dernier utilise un algorithme itératif pour la résolution des systèmes d'équations non linéaires.

1.2. ORGANISATION DU MEMOIRE :

CHAPITRE 1 : dans l'introduction générale, les objectifs de l'étude sont tracés ;

Modélisation des éléments bidimensionnels en béton armé jusqu'à la rupture.

CHAPITRE 2 : dans ce chapitre, une revue bibliographique est consacrée au comportement du béton, en état de contrainte uniaxiale, biaxiale, et triaxiale ; à la modélisation de la fissuration du béton ; à la prise en compte du phénomène d'engrènement lié à la fissuration.

CHAPITRE 3 : dans cette étude, le béton est considéré comme élastoplastique écrouissable, L'acier élastique parfaitement plastique.

Un catalogue des différents critères de rupture est présenté. Les méthodes de résolution des problèmes non linéaires sont décrites, ainsi que la technique utilisée dans cette étude.

La méthode des éléments finis est choisie comme outil de calcul.

CHAPITRE 4 : dans ce chapitre, le programme élaboré est présenté. Un élément isoparamétrique à huit nœuds est inséré dans le code de calcul, permettant une bonne précision des solutions .Les différents modules du programme sont détaillés.

CHAPITRE 5 : le programme est testé sur un panneau et une poutre isostatique en béton armé. Les résultats obtenus sont confrontés avec les données expérimentales dont nous disposons.

CHAPITRE 6: les conclusions de cette étude ont été présentées .Toutefois, en perspectives, il serait souhaitable, de faire progresser le modèle dans le cas des charges cycliques et dynamiques.

CHAPITRE 2

COMPORTEMENT GENERAL DU MATERIAU BETON ARME

2.1 INTRODUCTION

Pour aborder avec succès la modélisation du comportement jusqu'à rupture des panneaux plans en béton armé et déterminer leur capacité de charge, il est nécessaire de connaître les lois de comportement des matériaux béton et acier. Dans ce qui suit, on passera en revue l'ensemble des lois et des caractéristiques mécaniques de ces matériaux. On s'intéressera particulièrement aux différents comportements contraintes - déformations sous tous les états de contraintes ainsi que la définition de la résistance sous contraintes généralisées.

2.2 COMPORTEMENT DU BETON

2.2.1 Généralités

Le béton est un matériau composite constitué d'une matrice en ciment et d'inclusions de granulats ou agrégats (sables, graviers, cailloux) dont la répartition et la géométrie ne sont pas connues à priori et présentent souvent une dispersion importante. A cette hétérogénéité de composition vient s'ajouter une hétérogénéité dite structurelle. Elle consiste en l'existence de défauts initiaux (microfissures) au sein de la microstructure. La plupart de ces défauts se situent à l'interface entre les granulats et la pâte de ciment, cette interface constituant le lien le plus faible du matériau. Des microfissures peuvent également être générées dans le ciment par différents facteurs, tels que le retrait (diminution du volume apparent de la matière) hydraulique engendré par une évaporation d'eau, le retrait thermique engendré par une variation de température ou une consolidation incomplète du ciment entraînant la formation de microcavités. Lorsque cette structure est soumise à une sollicitation, des microfissures supplémentaires peuvent se former suite à des concentrations de contraintes de tension isolées dues à des déformations incompatibles entre les granulats et le ciment. Lorsque ce chargement augmente, les microfissures se développent et se connectent éventuellement entre elles pour former une microfissure entraînant la rupture du matériau, ce qui se traduit à l'échelle macrostructurale par une diminution des contraintes accompagnée d'une augmentation des déformations. Ce comportement dit *adoucissant* ou *quasi-fragile* est associé à un phénomène de *localisation des déformations*. En effet, le mode de déformation est non homogène, c'est-à-dire que les déformations se concentrent dans des zones localisées de faible dimension (le

long des macrofissures dans le cas du béton) alors que tout le reste du matériau a tendance à se décharger. De part sa nature hétérogène, le béton présente donc un comportement mécanique très complexe englobant un comportement fortement non linéaire sous un état de contrainte multiaxial, une fissuration progressive induite par des contraintes ou des déformations de tension conjuguée à un adoucissement en déformation, et un comportement dépendant du temps tel que le fluage et le retrait.

Dans les paragraphes suivants, les principales caractéristiques du comportement mécanique du béton sont exposées au niveau macrostructural. En effet, malgré cette forte hétérogénéité, le béton peut être considéré comme un matériau homogène et continu si l'échelle d'observation est suffisamment grande (plusieurs fois la taille de la plus grande hétérogénéité), ce qui sera le cas dans les études numériques réalisées.

2.2.2 Comportement du béton sous contraintes uniaxiales

2.2.2.1 Zone de compression

La courbe typique contrainte - déformation pour un béton à la compression uniaxiale, figure 2.1, présente un comportement linéaire élastique jusqu'à environ 30% de la résistance maximale à la compression, f_c . Au-delà de la valeur limite d'élasticité, la courbe enregistre une augmentation graduelle en courbure évaluée autour de 75 à 90% de la résistance ultime à la compression, f_c . Au-delà du pic, la courbe présente une partie descendante dans le cas d'un essai asservi (déformation contrôlée) jusqu'à la rupture par écrasement à une déformation ultime, ϵ_u . Pour une contrainte avoisinant 30% de f_c , les fissures avant chargement restent presque inchangées. Pour une contrainte entre 30 et 50% de f_c , les fissures commencent à s'étendre à cause des concentrations des contraintes aux pointes de celles-ci. Pour une contrainte entre 50 et 70% de f_c , quelques nouvelles fissures apparaissent dans le mortier et d'autres fissures s'étendent lentement. Si la charge reste constante, les fissures se propagent à une vitesse décroissante jusqu'à ce qu'elles atteignent leurs longueurs finales. Pour des contraintes élevées, de larges fissures atteignent les dimensions critiques causant éventuellement la rupture.

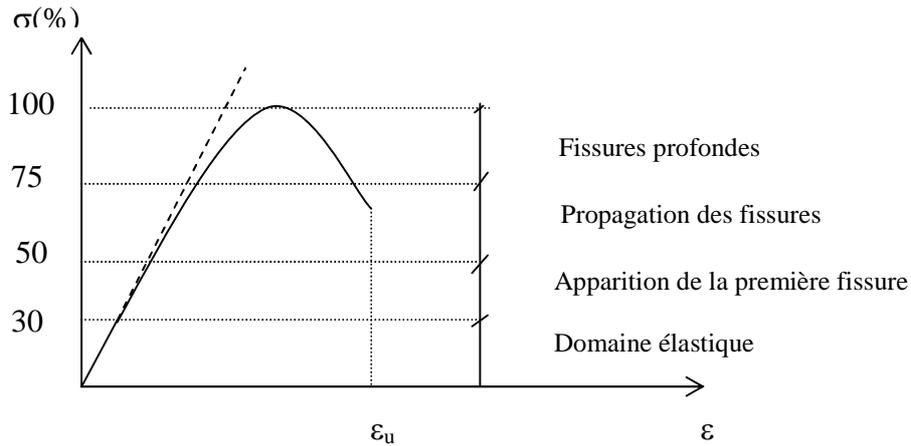


Figure 2.1 : Courbe typique contraintes - déformations sous compression uniaxiale obtenue avec un essai asservi

Le module d'élasticité a été fixé par les règles du B.A.E.L (1983) et il est évalué par la formule suivante :

$$E = 11000\sqrt[3]{f_c}$$

Le coefficient de Poisson, ν , du béton varie entre 0.15 et 0.22. Sous chargement uniaxial, le coefficient de Poisson reste constant jusqu'à 80% de f_c . Au-delà de cette valeur, le coefficient de Poisson augmente [8,9].

2.2.2.2 Zone de tension

La figure 2.2 représente l'ensemble des courbes contraintes - déformations du béton avec différents agrégats sous tension uniaxiale [8,9]. Pratiquement toutes les courbes sont linéaires jusqu'à un niveau élevé de contraintes. Jusqu'à un niveau de contraintes ne dépassant pas 60% de la résistance maximale à la traction, f_t , l'effet des microfissures sur l'allure de la courbe contraintes - déformations est négligeable. Ceci se traduit par un module de Young constant. Ce niveau de contraintes correspond à la limite élastique en traction. Au-delà de cette limite, des bandes de microfissures apparaissent et donnent naissance au comportement non linéaire. Le rapport f_t / f_c se situe généralement entre 0.05 et 0.10.

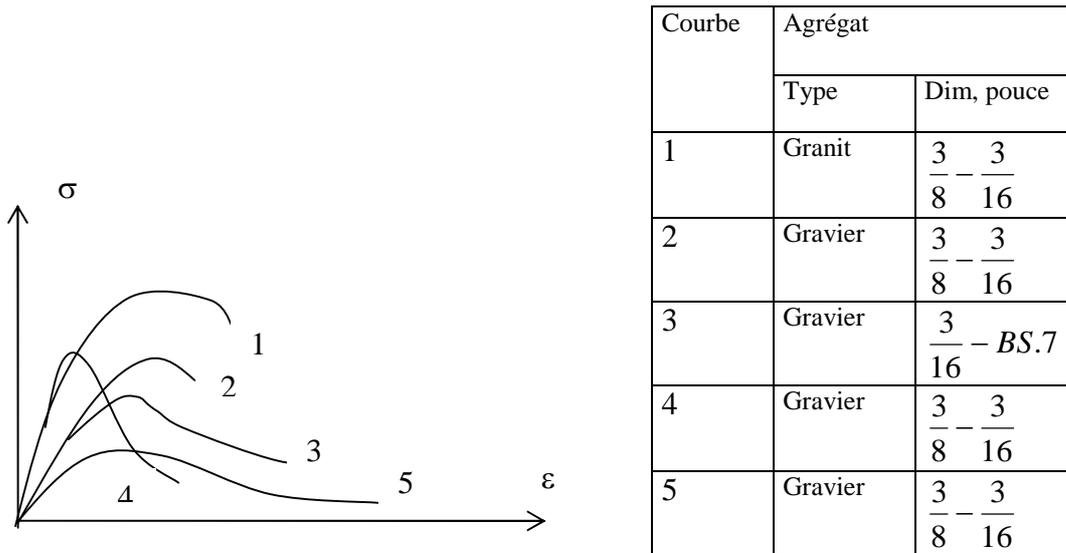


Figure 2.2 : Courbes contraintes-déformations pour un béton sous traction uniaxiale avec différents types d'agrégats

2.2.3 Comportement du béton sous contraintes biaxiales

Les courbes typiques contraintes - déformations pour le béton sous un état de contraintes biaxiales dans les régions: compression biaxiale, traction - compression et traction biaxiale sont montrées sur les figures 2.3, 2.4 et 2.5. Ces différentes courbes sont obtenues expérimentalement par Kupfer et al [18]. Les courbes contraintes - déformations sont linéaires jusqu'à 30% de la contrainte de rupture. Ce point est généralement considéré comme la limite élastique. Au delà de cette valeur, les courbes sont non linéaires. La non linéarité est plus prononcée au niveau du pic de contraintes. Dans le cas d'un état de contraintes biaxiales, on remarque l'existence d'une branche descendante. Ce qui n'est pas le cas pour un état de contraintes tension - compression. On remarque que les déformations ultimes sont environ trois fois plus importantes pour un état de contraintes de compression - compression que pour un état de contraintes traction - compression. On déduit que le béton possède un comportement ductile sous des contraintes de confinement. Par contre, il présente un comportement fragile en présence de la traction.

La figure 2.6 montre les enveloppes des résistances ultimes de différents bétons obtenues par Kupfer et al [18]. On constate que la résistance ultime du béton sous compression biaxiale est supérieure à celle de la compression uniaxiale. La raison essentielle de cette augmentation est due au confinement des microfissures [1,2]. La résistance maximale

augmente de 25% pour un rapport de contraintes $\sigma_1 / \sigma_2 = 0.5$ et de 16% pour un rapport de contraintes $\sigma_1 / \sigma_2 = 1$ sous un état de compression biaxiale. Dans la zone traction - compression, la résistance à la compression décroît linéairement quand la contrainte de tension augmente. On remarque aussi que la résistance à la tension biaxiale est approximativement égale à la résistance en tension uniaxiale et les courbes contraintes - déformations sont de formes similaires pour les états de traction uniaxiale et biaxiale.

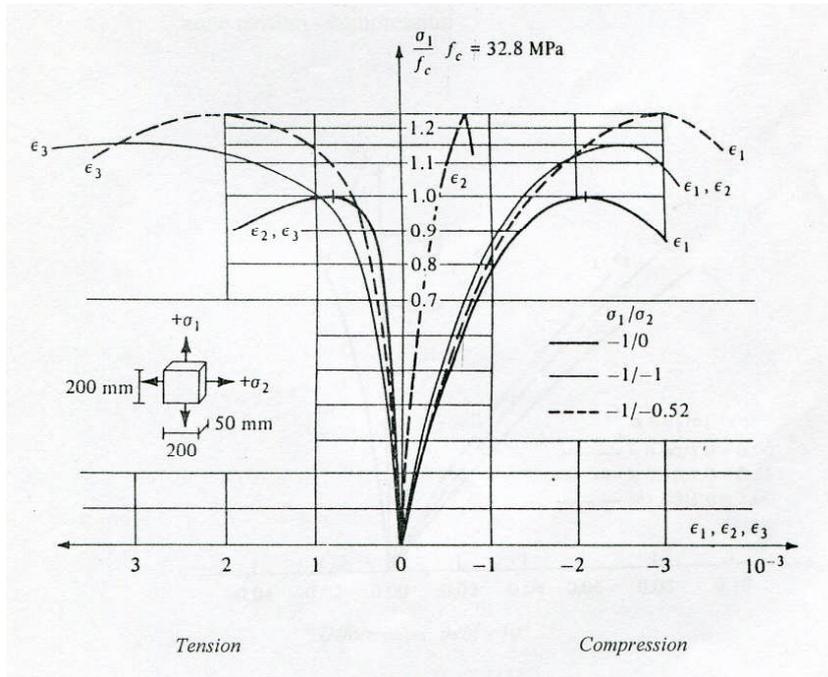


Figure 2.3 : Courbes contraintes – déformations dans la zone de compression biaxiale

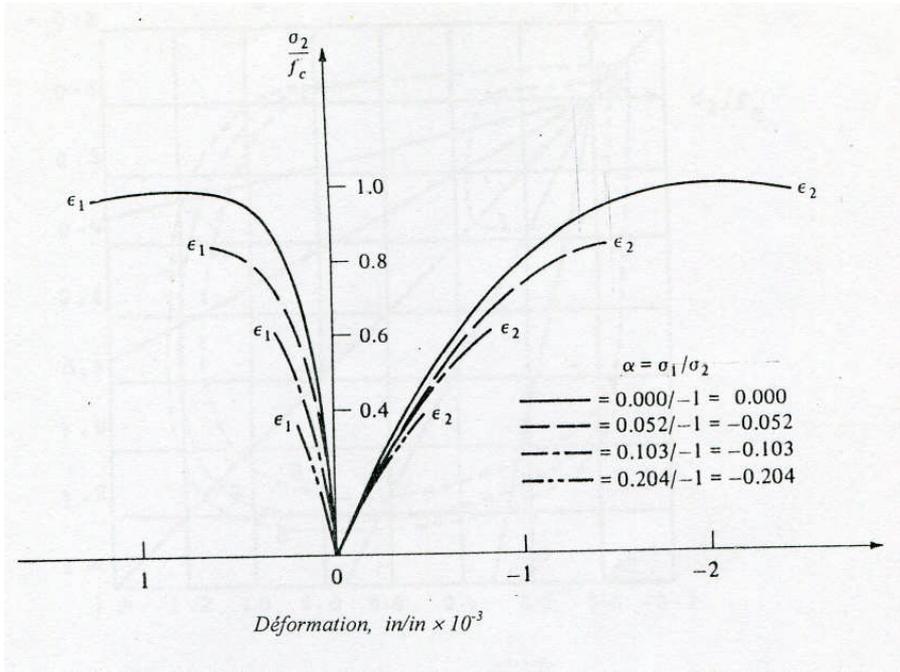


Figure 2.4 : Courbes contraintes-déformations dans la zone tension - compression

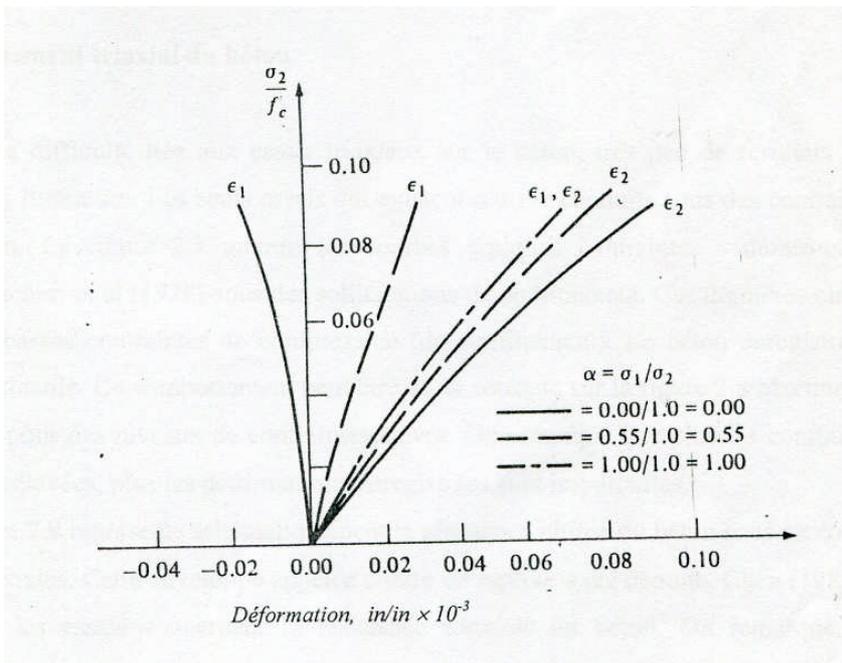


Figure 2.5 : Courbes contraintes - déformations dans la zone de tension biaxiale

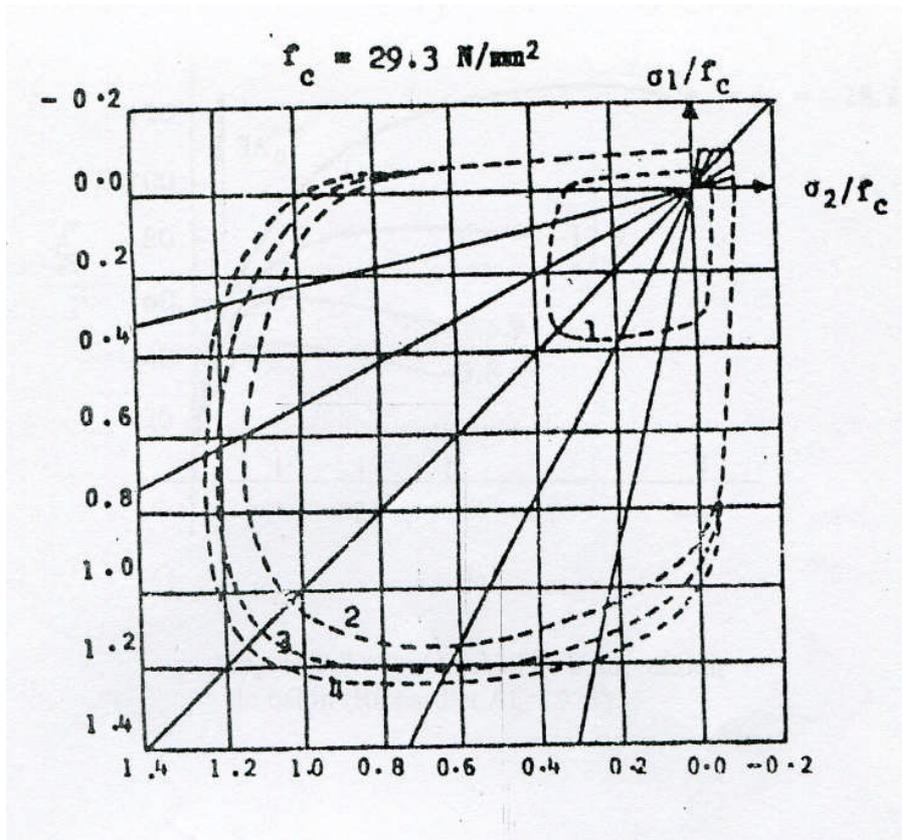


Figure 2.6 : Enveloppes du critère de rupture du béton

2.2.4 Comportement triaxial du béton

Due à la difficulté liée aux essais triaxiaux sur le béton, très peu de résultats sont reportés dans la littérature. Les seuls essais qui existent ont été conduits sous des contraintes de compression. La figure 2.7 montre les courbes typiques contraintes - déformations sous des sollicitations de confinement. Ces dernières ont été réalisées à de basses contraintes de compression (de confinement). Le béton enregistre un comportement ductile. Ce comportement peut être aussi constaté sur la figure 2.8 pour des niveaux de contraintes élevés. On remarque que plus les contraintes de confinement élevées, plus les déformations enregistrées sont importantes.

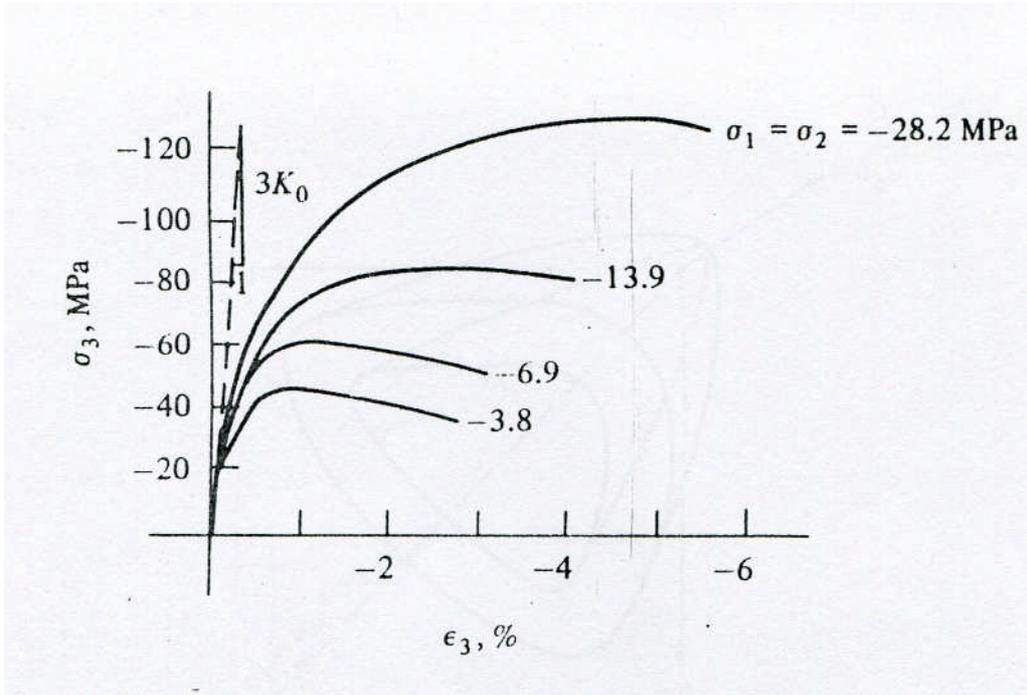


Figure 2.7 : Test triaxial de compression du béton

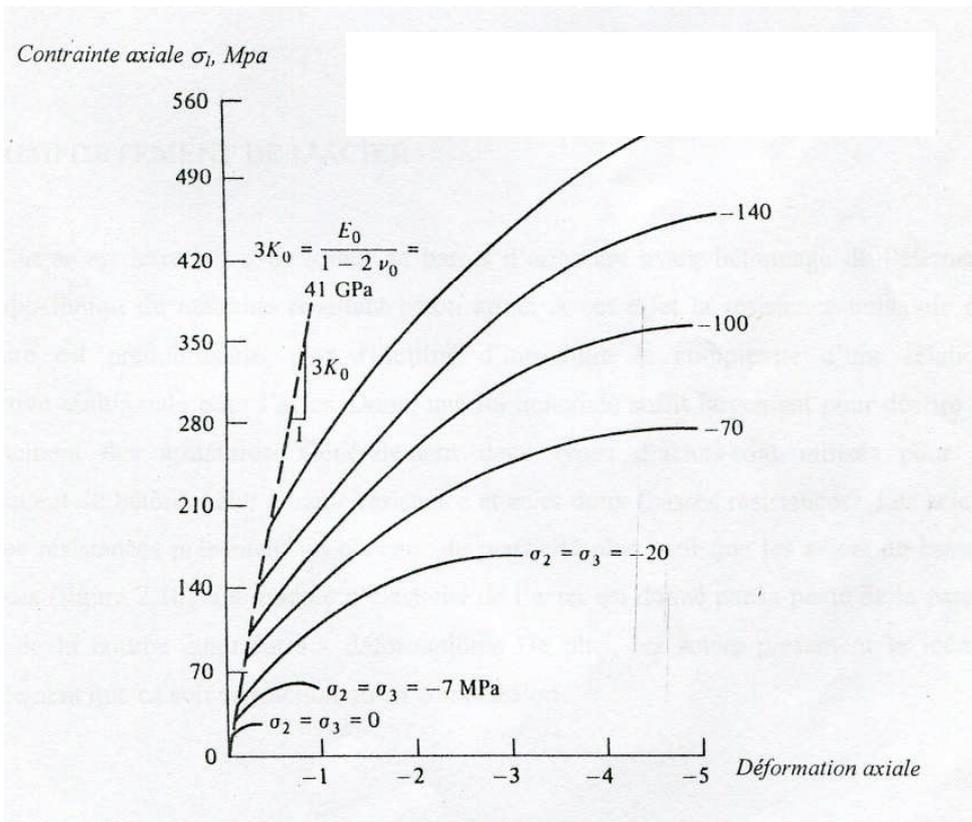


Figure 2.8 : Relations contraintes – déformations du béton

La figure 2.9 représente schématiquement la résistance ultime du béton sous un état de contraintes triaxiales. Cette enveloppe appelée critère de rupture a été déduite, [8,9], à partir de tous les essais concernant la résistance triaxiale du béton. On remarque que l'enveloppe du critère de rupture ressemble à un cône ayant une base plus au moins triangulaire à de basses contraintes de confinement évoluant vers une forme plus au moins circulaire à de hautes contraintes de confinement.

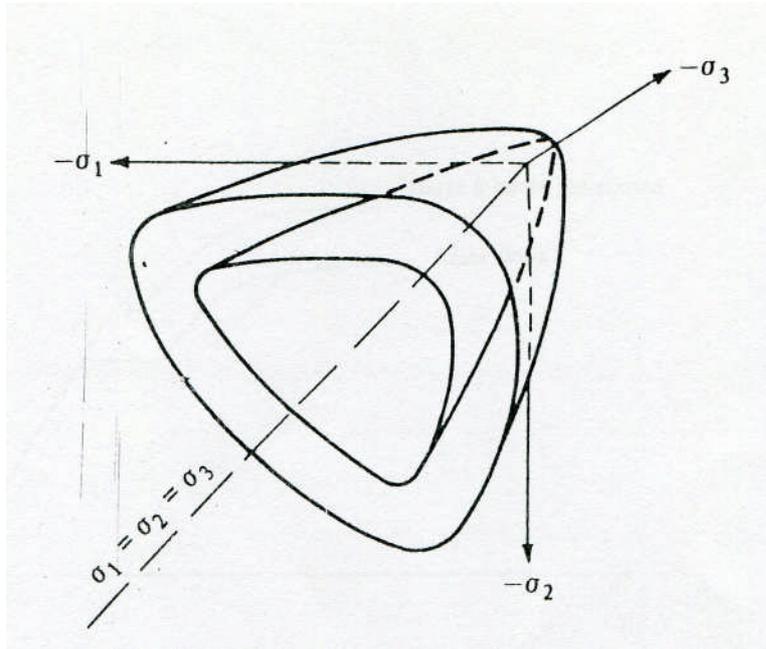


Figure 2.9 : Résistance ultime du béton sous un état de contraintes triaxiales

3 MODELISATION DE LA FISSURATION DU BETON: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

3.1 Introduction

Les modèles présentés dans cette partie considèrent que le béton est un matériau homogène puisque l'échelle des applications numériques est en général suffisamment élevée pour permettre cette hypothèse. Néanmoins, on peut noter l'existence de modèles d'éléments finis où la microstructure du béton est représentée par une matrice (ciment), des inclusions (granulats) et éventuellement des microfissures initiales introduites dans la matrice autour des inclusions. La position des granulats est alors déterminée soit par une procédure aléatoire

[13], soit par une reconstruction tridimensionnelle d'images digitales réelles [14]. Ce type de modèle doit également inclure un modèle de fissuration pour le ciment (similaire à un de ceux exposés dans les paragraphes suivants) et un modèle pour l'interface ciment-granulat mais permet seulement d'étudier l'évolution de la microstructure du béton soumis à une sollicitation. Une autre façon de prendre en compte l'hétérogénéité du béton est de distribuer de façon aléatoire sur les éléments du maillage le module d'Young et la résistance limite de traction du béton en fonction de leur valeur moyenne et de leur écart type obtenus expérimentalement [13]. En général, l'hétérogénéité du béton est rarement prise en compte directement, la modélisation de la fissuration par éléments finis étant déjà relativement complexe à mettre en œuvre.

La principale difficulté de la modélisation de la fissuration du béton par éléments finis est engendrée par la nature même de la fissure. En effet, une fissure est une discontinuité géométrique qui divise le matériau alors que la méthode des éléments finis est une technique basée essentiellement sur la mécanique des milieux continus. Cette incompatibilité apparente entre le problème posé et l'outil de modélisation nécessite le développement de schémas spécifiques qui, tout en conservant la notion générale de continuité dans la solution, entraîne des changements drastiques dans le matériau à l'endroit de la fissure. Les travaux pionniers en matière de modélisation de fissuration ont été ceux de Ngo & Scordelis en 1967 [26] qui ont introduit le concept de la fissuration *discrète* et ceux de Rashid en 1968 [29] qui a introduit le concept de la fissuration *diffuse*. La première approche modélise la fissure en insérant une discontinuité géométrique réelle dans le maillage et la seconde simule la fissuration en modifiant les propriétés du matériau à l'endroit de la fissure. Bien que ces deux modèles aient évolué et été améliorés au cours des dernières années, d'autres modèles, de nature différente, ont été également développés (modèles basés sur la théorie de la plasticité, de la viscoplasticité, sur la mécanique de l'endommagement continu, modèle microplan...) et sont brièvement présentés dans ce chapitre. Ces modèles qui décrivent le comportement du béton en *tension* sont en général couplés avec un autre modèle de type linéaire élastique, élastoplastique ou viscoplastique pour le comportement du béton en compression.

3.2 Critère d'amorçage et de propagation de fissure

On distingue en général trois modes de sollicitation susceptibles d'ouvrir une fissure: le mode I (mode d'ouverture) où les contraintes normales ouvrent la fissure, les modes II (mode de cisaillement plan) et III (mode de cisaillement Antipan) où ce sont les contraintes tangentielles qui ouvrent la fissure (figure 2.10).

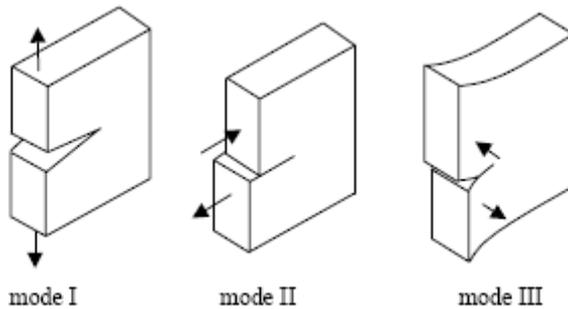


Figure 2.10: Modes de sollicitation d'une fissure

Les critères principalement utilisés pour la modélisation de la fissuration du béton sont développés à partir des deux constats suivants:

- la non linéarité de la partie croissante de la courbe uniaxiale liant les contraintes aux déformations de traction peut être négligée;
- la principale caractéristique du comportement du béton est probablement sa faible résistance limite en traction qui provoque une fissuration en tension à des niveaux de contrainte faibles comparés à la résistance limite en compression.

Par conséquent, dans la majorité des modèles de fissuration, le béton non fissuré est considéré comme linéaire élastique isotrope en tension et un simple critère de Rankine est utilisé pour détecter l'apparition d'une fissure. L'amorçage d'une fissure s'effectue dans ce cas uniquement en mode I. Ces hypothèses sont justifiées en l'absence de compression latérale significative [16]. Pratiquement, les contraintes principales et leurs directions sont calculées en un point d'intégration et si une de ces contraintes, positive, excède une valeur limite alors une fissure perpendiculaire à la direction de cette contrainte apparaît au point considéré. Selon les modèles, cette valeur limite est égale à la résistance limite en traction f_t ou est fonction de celle-ci, de la résistance limite en compression et des contraintes de compression si l'état de contrainte en ce point est un état de tension-compression combiné [27,33,34].

Shah et al. [33] ont proposé un critère d'amorçage de fissure en mode I, légèrement différent de celui de Rankine. En effet, ils prennent en compte la non linéarité de la partie croissante de la courbe de traction uniaxiale du béton ainsi que la non proportionnalité, due à l'effet de Poisson, de la contrainte principale maximale σ_m et de la déformation correspondante ε_m qui sont utilisées comme indicateurs dans les analyses. Dans leur modèle, une fissure s'amorce si le produit $1/2\sigma_m.\varepsilon_m$ est supérieur ou égal à l'aire sous la courbe de tension uniaxiale avant le pic (aire égale à $1/2f_t.\varepsilon_t$ dans le cas où le béton non fissuré est supposé linéaire élastique, avec ε_t la déformation correspondant à f_t).

Le critère de Rankine permet l'amorçage d'une fissure uniquement en mode I. Bien que l'utilisation de ce critère semble justifiée et que de ce fait celui-ci soit abondamment employé dans des modèles de fissuration, il peut paraître restrictif. C'est pourquoi, certains modèles utilisent, en plus du critère de Rankine, un critère d'ouverture de fissure en cisaillement [14] et d'autres emploient une enveloppe de rupture tridimensionnelle avec amorçage d'une fissure si le critère est transgressé avec au moins une contrainte principale de tension [23]. Tous ces modèles conservent le critère de propagation précédent avec un plan de fissure qui se propage perpendiculairement à la contrainte principale maximale. Il existe également des modèles où le critère d'amorçage de fissure et le critère de propagation de fissure dépendent tous les deux de l'état de contrainte au point considéré [14,15]. Récemment, Weihe & al. ont proposé un critère bidimensionnel d'amorçage et de propagation de fissure applicable à tout type de matériau prenant en compte la rupture en mode I, mode II et mode mixte mais ils s'accordent sur le fait qu'une fissure apparaît en mode I si le matériau, tel le béton, est suffisamment fragile [14,15,16].

3.3 Modèle de la fissure discrète

Le concept de la fissuration discrète se distingue de tous les autres modèles de fissuration et d'endommagement du béton car, dans cette approche, une discontinuité géométrique *réelle* est introduite dans le maillage d'éléments finis à l'endroit de la fissure.

Cette approche a été initialement développée par Ngo & Scordelis [26] qui ont modélisé la fissure en séparant par dédoublement des noeuds deux éléments ayant un côté en commun. Ce modèle possède deux inconvénients majeurs. Premièrement, il implique un changement continu de la connexion des noeuds et de la topologie du maillage. Deuxièmement, le chemin de propagation de fissure doit nécessairement suivre les côtés des éléments, ce qui rend la solution fortement dépendante du maillage. Pour pallier cette difficulté, l'approche a été

affinée en utilisant des méthodes de remaillage adaptatif de façon à ce que des nouveaux éléments soient introduits avec leurs côtés orientés dans la direction de la fissure [27,28]. On peut noter également que l'approche de la fissure discrète ne semble pas avoir été développée en trois dimensions. De plus, cette technique semble plus performante si elle est appliquée à une classe de problèmes pour lesquels l'orientation de la fissure est connue par avance puisque les inconvénients liés à la dépendance vis à vis du maillage disparaissent d'eux-mêmes.

L'approche proposée par Ngo & Scordelis [26] a donc été améliorée et les fissures discrètes sont à présent généralement modélisées par des éléments d'interface interdisant le recouvrement des faces de la fissure mais permettant leur ouverture et glissement relatifs. Bien que la fissure soit ouverte, des contraintes normale et tangentielle peuvent être transmises à travers celle-ci du fait de la présence d'aspérités et sont fonction des déplacements relatifs normal et tangentiel de la fissure.

Le concept de la fissuration discrète se présente comme étant l'approche qui reflète le mieux l'état d'endommagement final d'une structure en béton car elle se rapproche de notre conception naturelle de la fissuration. Mais dans le cas de chevilles ancrées dans une dalle de béton et soumises à divers types de sollicitations, l'orientation des fissures est une inconnue du problème. Pour une telle structure, une technique de remaillage adaptatif pour modéliser les fissures individuellement serait trop lourde à gérer et extrêmement chère en temps de calcul, notamment en trois dimensions où cela semble être quasiment impossible à mettre en œuvre.

3.4 Modèle de la fissure diffuse

Ce modèle et les nombreuses possibilités qu'il offre sont exposés en détail car le modèle développé dans PLAST est basé sur cette approche.

3.5 Principe général

Le concept de la fissuration diffuse (*smearred crack approach*) n'introduit pas de discontinuité dans le maillage. Le béton est considéré comme un milieu continu et la fissuration est introduite en modifiant les propriétés du matériau à l'endroit de la fissure. Cette approche, développée initialement par Rashid [29], permet donc une description de l'endommagement du béton du à la fissuration en terme de relation entre les contraintes et les déformations. La loi initiale et isotrope du béton intact liant les contraintes aux déformations est transformée en une loi orthotrope après fissuration, les axes d'orthotropie étant alignés

avec la direction de la fissure. Comme les contraintes et les déformations sont évaluées aux points d'intégration, l'altération des propriétés du matériau affecte la région entourant ces points et *diffuse* les effets de la fissure dans cette région. Cette procédure est très attractive, non seulement parce qu'elle préserve la topologie originale du maillage d'éléments finis pendant toute l'analyse, mais aussi parce que seule la relation entre les contraintes et les déformations doit être actualisée après l'apparition d'une fissure.

3.6 Les différents concepts

Le modèle de la fissuration diffuse peut être divisé en deux catégories: le concept de la fissure fixe et celui de la fissure tournante. Dans le premier cas, l'orientation de la fissure dès son apparition est fixée pendant toute la durée du calcul alors que dans le second cas, les axes de la fissure tournent constamment afin de rester alignés avec ceux des déformations principales. Dans ce paragraphe, ces deux concepts sont exposés sans expliciter les lois de comportement du béton fissuré.

3.6.1 Le concept de la fissure diffuse fixe

3.6.1.1 Formulation à partir de la déformation totale

Traditionnellement, avec cette formulation, le béton non fissuré présente un comportement linéaire élastique. Si le critère d'amorçage de fissure est transgressé pour la première fois en un point d'intégration, une fissure apparaît dans le plan perpendiculaire à la direction de la contrainte principale maximale de tension en ce point. Le béton devient alors anisotrope et les axes principaux du matériau sont alignés avec ceux de la fissure. La loi de comportement pour la fissuration diffuse est exprimée dans le repère formé par les axes d'orthotropie, alignés avec ceux de la fissure, et relie les contraintes aux déformations dans le cas général de la façon suivante:

$$\Delta s = D \cdot \Delta e \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{ns} & E_{nt} & 0 & 0 & 0 \\ E_{ns} & E_{ss} & E_{st} & 0 & 0 & 0 \\ E_{nt} & E_{st} & E_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{st} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{nt} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

avec :

$\Delta s = [\Delta\sigma_{nn} \quad \Delta\sigma_{ss} \quad \Delta\sigma_{tt} \quad \Delta\sigma_{ns} \quad \Delta\sigma_{st} \quad \Delta\sigma_{nt}]^t$ le vecteur des contraintes locales,

$\Delta e = [\Delta\varepsilon_{nn} \quad \Delta\varepsilon_{ss} \quad \Delta\varepsilon_{tt} \quad \Delta\varepsilon_{ns} \quad \Delta\varepsilon_{st} \quad \Delta\varepsilon_{nt}]^t$ le vecteur des déformations locales,

n la direction normale à la fissure (mode I) et s et t les directions tangentielles à la fissure (mode II et III) définies sur la figure 2.11,

D la matrice du béton endommagé reliant les contraintes aux déformations totales dans le repère de la fissure et définie par neuf modules indépendants.

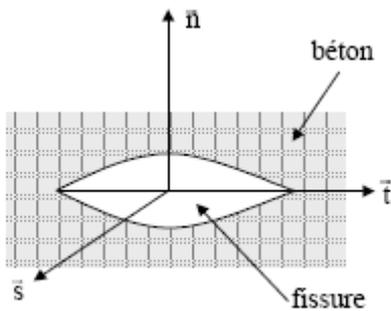


Figure 2.11: Définition du repère local lié à la fissure

En général, la contrainte normale σ_{nn} et les contraintes tangentielles σ_{ns} et σ_{nt} à la fissure sont réduites suivant une loi d'adoucissement en tension et une loi de transfert de cisaillement respectivement et l'effet de Poisson est négligé ($E_{ns}=E_{nt}=0$). Les modules restants

E_{ss} , E_{tt} , E_{st} et G_{st} qui ne sont pas affectés par la fissure sont les modules élastiques donnés par les lois de Hooke définies par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν du matériau.

Dans les premiers modèles de fissuration diffuse développés, seule une fissure pouvait se propager en un point d'intégration et, une fois apparue, sa direction était alors définitivement fixée pour toute la durée de l'analyse [29].

Mais si le chargement de la structure étudiée évolue, les directions principales des contraintes ne restent pas forcément alignées avec ceux de la fissure. De plus, l'enveloppe limite de rupture peut être atteinte une seconde fois, dans une direction différente de la première, surtout si le transfert de cisaillement à travers la fissure est permis. Ce phénomène peut alors entraîner une prédiction incorrecte du comportement global de la structure étudiée. Un remède

à ce problème est de permettre la formation de plusieurs plans de fissure, orthogonaux ou non orthogonaux, en un point d'intégration:

a) si c'est la solution des fissures orthogonales qui est retenue, la procédure de calcul qui en découle est relativement simple, notamment pour les modèles bidimensionnels où seuls deux plans de fissure peuvent se former en un point d'intégration. Dans ce cas, les axes d'orthotropie sont définitivement fixés dès l'amorçage de la première fissure et aucun autre changement de repère n'est nécessaire [34]. Dans le cas tridimensionnel, deux alternatives sont possibles pour déterminer la direction du second plan de fissure:

- les axes n , s et t du matériau sont définitivement fixés dès la formation de la première fissure (comme en deux dimensions) et le second plan de fissure sera normal soit à l'axe t , soit à l'axe s selon la contrainte qui transgressera en premier le critère d'amorçage, sans respecter une rotation possible des contraintes dans le plan de la fissure existante.

- la direction perpendiculaire n au premier plan de fissure est conservée et une recherche est effectuée pour déterminer la contrainte maximale de direction s' dans le plan parallèle à la fissure existante. Pour ce calcul, seules les contraintes normales et tangentielles agissant dans le plan de la première fissure sont nécessaires (σ_{ss} , σ_{tt} , σ_{st}).

Si cette valeur maximale atteint le critère limite alors un nouveau plan de fissure se forme perpendiculairement à la direction s' de cette contrainte (et perpendiculaire au premier) et les axes locaux du matériau n , s' et t' sont alors totalement déterminés (figure 2.12a). C'est généralement cette alternative qui est utilisée [4,5,6].

b) si c'est la solution des fissures non orthogonales qui est retenue, la procédure de calcul qui en découle devient alors plus complexe. Après apparition du premier plan de fissure défini par les axes s et t et de normal n , les contraintes principales tournent et ne coïncident plus avec les axes de la fissure. Elles sont donc recalculées à chaque pas de calcul.

Si l'enveloppe de rupture est atteinte une seconde fois, un deuxième plan de fissure se forme au point d'intégration considéré perpendiculairement à la direction de la contrainte principale maximale de tension *actuelle* n' . Les axes n' , s' et t' forment alors le repère du second plan de fissure avec s' et t' les directions tangentielles à la fissure. Cette méthode nécessite la définition d'un angle seuil entre les axes n et n' en dessous duquel le second plan de fissure

n'est pas autorisé à s'amorcer car il est considéré trop proche du premier. Avec la méthode des fissures non orthogonales, la détermination des contraintes après apparition du second plan de fissure est plus délicate que dans le cas où les fissures sont orthogonales. Ngo & Scordelis [26] Ont proposé une méthode de calcul pour le cas bidimensionnel. La procédure de calcul développée par ces derniers est simplifiée par le fait que la contrainte normale à un plan de fissure est annulée immédiatement après l'apparition de cette fissure: $E_{nn}=E_{ns}=E_{nt}=0$. Ensuite, lorsqu'un second plan de fissure de normal n' se forme en un point d'intégration, l'axe s' n'est pas choisi de façon aléatoire mais est défini comme étant l'intersection des deux plans de fissure existants (figure 2.12b). Par conséquent, dans le repère (n',s',t') , seule la contrainte normale $\sigma_{s's'}$ et les contraintes tangentielles $\sigma_{s'n'}$ et $\sigma_{s't'}$ à la fissure ne sont pas nulles. Un seul changement de repère suffit alors à évaluer les contraintes dans le repère global.

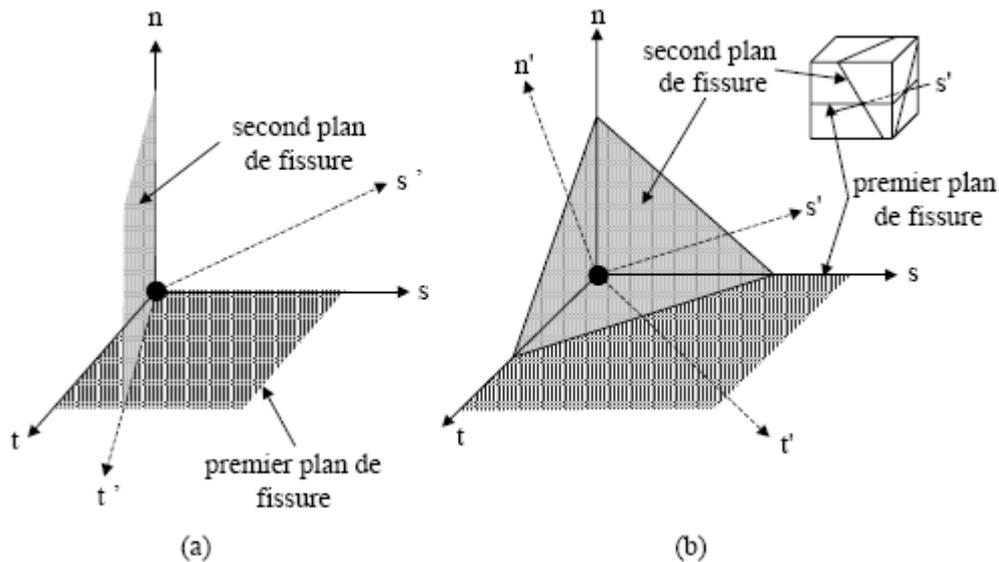


Figure 2.12: Axes locaux pour un point d'intégration avec deux fissures orthogonales (a) ou non orthogonales (b)

3.6.1.2 Formulation à partir de la décomposition des déformations

Le modèle est d'abord exposé pour une fissure en un point d'intégration et sera ensuite généralisé à plusieurs fissures.

Le vecteur des déformations de l'équation (2.1) représente la déformation totale du solide fissuré, incluant la déformation induite par la fissure et la déformation du matériau entre les fissures. La loi résultante entre les contraintes et les déformations correspond donc à une loi diffuse pour le solide fissuré sans distinction entre les fissures et le matériau intact. Un désavantage de cette formulation est l'impossibilité d'incorporer de manière transparente des

lois de fissuration particulières qui sont exprimées à partir de la notion de déformation de fissure plutôt que de la déformation totale. Un remède à cette déficience est de décomposer la déformation totale du matériau fissuré en une déformation de fissure $\Delta\varepsilon_{cr}$ et en une déformation du matériau solide entre les fissures $\Delta\varepsilon^{co}$ ("co" pour *concrete* et "cr" pour *crack*):

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^{co} + \Delta\varepsilon^{cr} \quad (2.2)$$

Une telle décomposition, illustrée figure 2.13 a été utilisée par de nombreux chercheurs [8,9,13,14,26], car ses avantages sont multiples. Elle permet de traiter le comportement de la fissure séparément des lois de comportement du béton entre les fissures. Une conséquence directe est que la fissuration peut être combinée avec d'autres comportements non linéaires du matériau. La déformation du béton intact $\Delta\varepsilon_{co}$ peut être composée d'une déformation élastique, plastique, viscoélastique, thermique ou de fluage [8,9], ce qui est impossible si le problème est formulé en déformation totale. Dans ce cas, le comportement du béton intact est systématiquement pris comme étant linéaire élastique en traction [1,2,3,4,5,6,14,29]. La décomposition de la déformation totale peut apparaître comme une tentative pour s'approcher du concept de la fissure discrète où le matériau solide est complètement dissocié de la fissure.

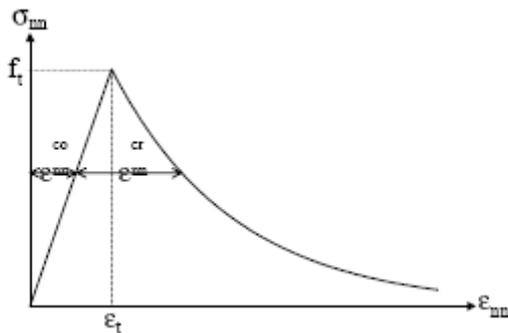


Figure 2.13: Exemple de décomposition de la déformation normale à la fissure

Si la loi de comportement pour le béton fissuré est de forme simple avec la formulation en déformation totale (équation 2.1), elle devient plus complexe lorsque la déformation est décomposée. Le vecteur des déformations de fissure en (2.2) est de la forme:

$$\Delta \varepsilon^{cr} = \left[\Delta \varepsilon_{xx}^{cr} \quad \Delta \varepsilon_{yy}^{cr} \quad \Delta \varepsilon_{zz}^{cr} \quad \Delta \gamma_{xy}^{cr} \quad \Delta \gamma_{yz}^{cr} \quad \Delta \gamma_{zx}^{cr} \right]^t \quad (2.3)$$

où x, y et z sont les axes qui forment le repère global. Dans le repère local de la fissure formé par les axes d'orthotropie n, s et t, la déformation locale de la fissure est définie par:

$$\Delta e^{cr} = \left[\Delta \varepsilon_{nn}^{cr} \quad \Delta \varepsilon_{ss}^{cr} \quad \Delta \varepsilon_{tt}^{cr} \quad \Delta \gamma_{ns}^{cr} \quad \Delta \gamma_{st}^{cr} \quad \Delta \gamma_{nt}^{cr} \right]^t \quad (2.4)$$

La relation entre les déformations de fissure locales et globales est la suivante:

$$\Delta \varepsilon^{cr} = N \cdot \Delta e^{cr} \quad (2.5)$$

où N est la matrice de transformation reflétant l'orientation de la fissure:

$$N = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_y^2 & l_z^2 & l_x l_y & l_y l_z & l_x l_z \\ m_x^2 & m_y^2 & m_z^2 & m_x m_y & m_y m_z & m_z m_x \\ n_x^2 & n_y^2 & n_z^2 & n_x n_y & n_y n_z & n_x n_z \\ 2l_x m_x & 2l_y m_y & 2l_z m_z & l_x m_y + l_y m_x & l_y m_z + l_z m_y & l_z m_x + l_x m_z \\ 2m_x n_x & 2m_y n_y & 2m_z n_z & m_x n_y + m_y n_x & m_y n_z + m_z n_y & m_z n_x + m_x n_z \\ 2n_x l_x & 2n_y l_y & 2n_z l_z & n_x l_y + n_y l_x & n_y l_z + n_z l_y & n_z l_x + n_x l_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

où l_x, m_x, n_x , forment le vecteur qui indique l'orientation de l'axe local n dans les coordonnées globales, l_y, m_y, n_y , celui de l'axe local s et l_z, m_z, n_z , celui de l'axe local t .

De la même façon, les vecteurs des contraintes $\Delta \sigma$ et Δs sont exprimés dans le repère global et dans le repère local respectivement:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= \left[\Delta \sigma_{xx} \quad \Delta \sigma_{yy} \quad \Delta \sigma_{zz} \quad \Delta \sigma_{xy} \quad \Delta \sigma_{yz} \quad \Delta \sigma_{zx} \right]^t \\ \Delta s &= \left[\Delta \sigma_{nn} \quad \Delta \sigma_{ss} \quad \Delta \sigma_{tt} \quad \Delta \sigma_{ns} \quad \Delta \sigma_{st} \quad \Delta \sigma_{nt} \right]^t \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ces deux vecteurs sont également reliés par la matrice de passage N:

$$\Delta s = N^t . \Delta \sigma \quad (2.8)$$

Pour compléter cette formulation, il est nécessaire de définir une loi de comportement pour le béton intact et une relation entre les contraintes et les déformations de fissure exprimée dans les axes d'orthotropie:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= D^{co} . \Delta \varepsilon^{co} \\ \Delta s &= D^{cr} . \Delta e^{cr} \end{aligned} \quad (2.9)$$

La matrice D_{co} traduit la loi de comportement du matériau non fissuré. Dans le cas où le béton intact est considéré comme étant linéaire élastique, la matrice D_{co} est la matrice élastique usuelle obtenue à partir des lois de Hooke.

La matrice D_{cr} relie les contraintes aux déformations de fissure, incluant les propriétés de la fissure en modes I, II, III et en mode mixte. Si on conserve uniquement les composantes des contraintes et des déformations locales de fissure qui ont une signification physique, c'est-à-dire la déformation et la contrainte normale à la fissure, ε_{cr}^{mn} et σ_{cr}^{mn} en mode I, les déformations et les contraintes tangentielles à la fissure, γ_{cr}^{ns} , γ_{cr}^{nt} , σ_{ns} et σ_{nt} en mode II et III respectivement, alors les vecteurs et la matrice de transformation se réduisent à:

$$\begin{aligned} \Delta e^{cr} &= [\Delta \varepsilon_{mn}^{cr} \quad \Delta \gamma_{ns}^{cr} \quad \Delta \gamma_{nt}^{cr}] \\ \Delta s &= [\Delta \sigma_{mn} \quad \Delta \sigma_{ns} \quad \Delta \sigma_{nt}] \end{aligned}$$

$$N = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_z l_x \\ m_x^2 & m_x m_y & m_z m_x \\ n_x^2 & n_x n_y & n_z n_x \\ 2l_x m_x & l_x m_y + l_y m_x & l_z m_x + l_x m_z \\ 2m_x n_x & m_x n_y + m_y n_x & m_z n_x + m_x n_z \\ 2n_x l_x & n_x l_y + n_y l_x & n_z l_x + n_x l_z \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Les autres composantes des vecteurs des contraintes et déformations n'ayant pas de significations physiques, elles peuvent être omises [32].

La matrice D^{cr} est alors supposée être de la forme suivante:

$$D^{cr} = \begin{bmatrix} D^I & 0 & 0 \\ 0 & D^{II} & 0 \\ 0 & 0 & D^{III} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

L'hypothèse des termes non diagonaux nuls dans (2.11) est utilisée dans la majorité des modèles diffuse. Elle implique que le couplage direct tangentiell-normal est ignoré, c'est-à-dire que la contrainte normale à la fissure est seulement fonction de la déformation normale et ne dépend pas des déformations tangentielles. De façon similaire, les contraintes tangentielles à la fissure ne sont fonction que des déformations tangentielles. Cela provient du fait que peu de données expérimentales sont disponibles sur ce sujet. De plus, la plupart des applications sont restreintes à des petites déformations et donc les termes non diagonaux de la matrice D_{cr} sont moins importants. On peut cependant noter que des théories de couplage avec des matrices non symétriques ont été proposées [10,11], car il existe des cas où l'importance de ce couplage a été mis en évidence expérimentalement (cas du glissement confiné le long d'une macrofissure existante).

En combinant correctement les équations (2.2), (2.5), (2.8), (2.9) et (2.11), la relation exprimée dans le repère global entre les contraintes et les déformations pour le béton fissuré, développée initialement en 1985 par De Borst & Nauta [10] est:

$$\Delta\sigma = \left[D^{co} - D^{co} N \left[D^{cr} + N^t D^{co} N \right]^{-1} N^t D^{co} \right] \Delta\varepsilon \quad (2.12)$$

Un avantage supplémentaire de la décomposition de la déformation totale est la possibilité de décomposer la déformation de fissure $\Delta\varepsilon^{cr}$ en contributions séparées d'un nombre de fissures individuelles qui apparaissent simultanément en un point d'intégration:

$$\Delta\varepsilon^{cr} = \Delta\varepsilon_1^{cr} + \Delta\varepsilon_2^{cr} + \dots \quad (2.13)$$

où $\Delta \varepsilon_1^{cr}$ est la déformation de la première fissure, $\Delta \varepsilon_2^{cr}$ la déformation de la seconde fissure et ainsi de suite. Dans cette approche développée initialement par De Borst & Nauta [10], chaque fissure (fixe) possède son propre vecteur de déformations locales $\Delta \varepsilon_i^{cr}$, son propre vecteur de contraintes locales Δs_i et sa propre matrice de transformation N_i , d'après les équations (3.11). De plus, ils ont démontré qu'il était efficace d'assembler ces vecteurs et matrices associés à une fissure unique en:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{e}^{cr} &= [\Delta e_1^{cr} \quad \Delta e_2^{cr} \quad \dots]{}^t \\ \Delta \hat{s}^{cr} &= [\Delta s_1 \quad \Delta s_2 \quad \dots]{}^t \\ \hat{N} &= [N_1 \quad N_2 \quad \dots] \end{aligned} \quad (2.14)$$

dans lesquels $\hat{}$ dénote un assemblage de fissures multidirectionnelles. Des substitutions répétées de (2.5) dans (2.14) conduisent à la relation suivante:

$$\Delta \varepsilon^{cr} = \hat{N} \cdot \Delta \hat{e}^{cr} \quad (2.15)$$

qui est l'équivalent de (2.5) en multi-fissures. De façon similaire, le relation locale liant les contraintes aux déformations de fissure (2.10) exprimée pour une seule fissure peut être généralisée au cas de multiples fissures:

$$\Delta \hat{s} = \hat{D}^{cr} \cdot \Delta \hat{e}^{cr} \quad \text{où :} \quad \begin{bmatrix} \Delta s_1^{cr} \\ \Delta s_2^{cr} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{cr} & D_{12}^{cr} & \dots \\ D_{21}^{cr} & D_{22}^{cr} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_1^{cr} \\ \Delta e_2^{cr} \\ \dots \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Cette relation est très générale car elle permet une interaction entre les différentes fissures présentes en un point d'intégration, via les sous-matrices situées hors de la diagonale. En général, les interactions entre les fissures sont ignorées et ces sous-matrices sont nulles. En effet, d'une part ces matrices ne sont pas évidentes à déterminer et d'autre part leur inclusion n'augmenterait pas le niveau de sophistication du modèle suffisamment pour justifier une diminution de l'utilité pratique du concept [Rot89a] [32]. La matrice D^{cr} se réduit alors à:

$$\hat{D}^{cr} = \begin{bmatrix} D_1^{cr} & 0 & \dots \\ 0 & D_2^{cr} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

où les matrices D_i^{cr} sont diagonales et de la forme de celle présentée (2.12). La matrice D^{cr} est par conséquent diagonale. Finalement, on obtient la relation liant les contraintes aux déformations globales pour le béton fissuré multidirectionnellement, similaire à (2.13):

$$\Delta\sigma = \left[D^{co} - D^{co} \hat{N} \left[\hat{D}^{cr} + \hat{N}^t D^{co} \hat{N} \right]^{-1} \hat{N}^t D^{co} \right] \Delta\varepsilon \quad (2.18)$$

Cette formulation permet donc la formation de plusieurs fissures non orthogonales en un même point d'intégration, ce qui n'est pas possible avec la formulation à partir de la déformation totale où le nombre de fissures est limité à trois quelque soit l'alternative choisie. Les fissures étant fixes, les axes principaux des contraintes peuvent tourner après la formation d'une fissure et un problème inhérent au modèle des fissures multidirectionnelles est de déterminer la condition d'amorçage d'une nouvelle fissure. A cette fin, quatre critères peuvent être distingués:

- a) la contrainte maximale principale de tension actuelle transgresse le critère d'amorçage,
- b) l'angle d'inclinaison entre la contrainte maximale principale de tension et la ou les fissures excède une valeur seuil,
- c) les deux conditions a) et b) sont transgressées,
- d) soit la condition a), soit la condition b) est transgressée.

Le problème de la condition a) est qu'elle ne limite pas le nombre de fissures par point d'intégration, ce qui est compliqué à gérer sur le plan numérique. Le problème de la condition b), c'est que le critère d'amorçage peut être transgressé avant que la valeur de l'angle seuil soit atteinte. Il faut donc trouver un juste compromis [32], ce qui peut devenir un choix relativement arbitraire.

Néanmoins un avantage majeur du modèle de la fissuration fixe multidirectionnelle est sa grande flexibilité. En effet, en fixant l'angle seuil à 90° et en utilisant le critère d'amorçage

c), on retrouve le modèle à fissures fixes orthogonales présenté précédemment. En outre, en utilisant uniquement le critère b) avec un angle seuil nul, le modèle se réduit au modèle de la fissure tournante, exposé dans le paragraphe suivant, pourvu que les fissures précédentes soient rendues inactives de façon à n'avoir qu'une seule fissure active par point d'intégration et que la mémoire des défauts précédents soit prise en compte dans la loi de comportement (2.10) [32].

3.7 : L'engrènement

La surface d'une fissure est rugueuse, constituée par des aspérités petites et denses superposées à d'autres, beaucoup plus grandes et espacées, qui sont les protubérances des granulas (Figure 2.14). Le glissement relatif des lèvres de la fissure met en contact ces aspérités, ce qui engendre d'une part l'apparition des efforts normaux et tangentiels et d'autre part l'écartement des lèvres (dilatance de la fissure).

Le phénomène de l'engrènement concerne les quatre grandeurs mentionnées, mais ce n'est que récemment que le couplage entre les effets normaux et tangentiels a reçu l'attention qu'il mérite.

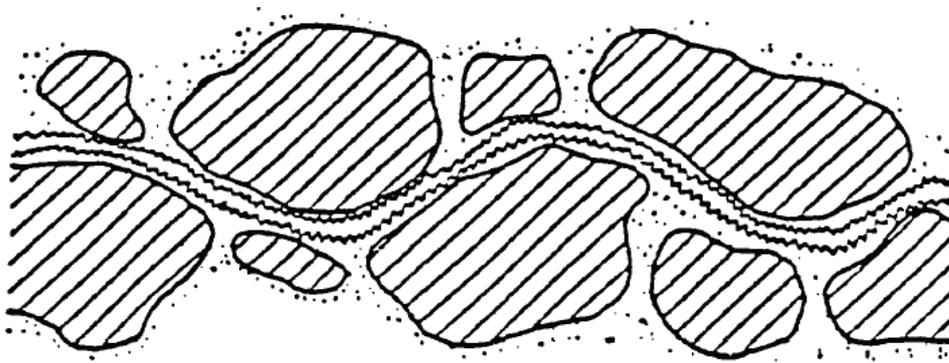


Figure 2.14 : Profil d'une fissure.

Les expériences [32,33,34] ont mis en évidence les paramètres primordiaux du phénomène, notamment l'ouverture de la fissure et la rugosité des lèvres, qui à son tour dépend de la taille des granulats ainsi que du rapport des résistances granulats/pâte.

En outre, les résultats expérimentaux ont montré l'importance du phénomène. Ainsi l'engrènement fournit une partie considérable de la résistance à l'effort tranchant d'une poutre fissurée (33 à 60 % selon [29]) et des contraintes de l'ordre de 3 MPa ont été enregistrées sur

des essais en cisaillement direct sous sollicitations cycliques sans atteindre la résistance ultime.

Pour approcher l'engrènement Bazant et Gambarova [2] proposent une formulation totale, où chacune des contraintes, normale et tangentielle, est fonction des déplacements relatifs actuels. Il s'agit de relations empiriques assez compliquées obtenues par le traitement de la plupart des résultats expérimentaux actuellement disponibles. Par ailleurs, Bazant et al. [1], donnent une loi simplifiée sous forme de deux équations découplées :

Une pour les contraintes $|\sigma_m| = -k\sigma_m + c$ (frottement)

et une pour les déplacements $\delta_n = \alpha_d|\delta_t| + e$ (dilatance)

D'autres auteurs proposent des modèles en faisant des hypothèses sur la forme de la fissure et la nature des phénomènes qui y ont lieu [32,33,36]. Ils supposent que les lèvres sont constituées par une série d'arcs paraboliques aléatoires (figure 2.15) qui restent indéformables pendant leurs déplacements mutuels et sur lesquels se superposent des aspérités locales.

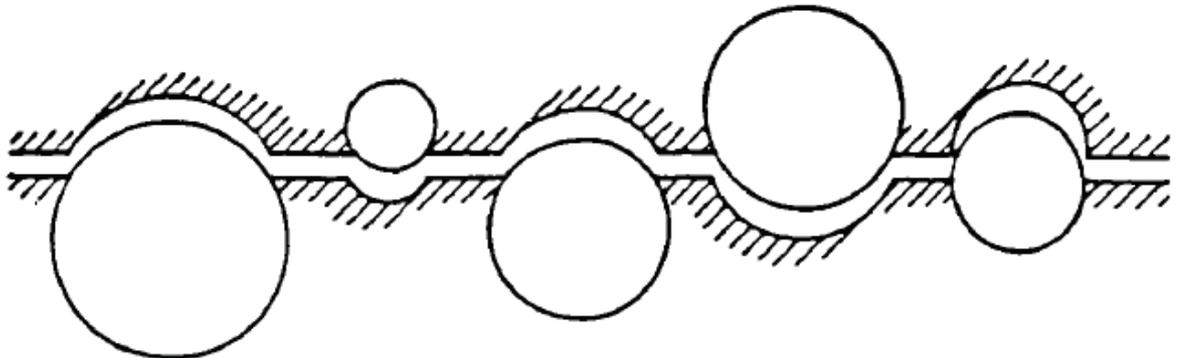


Figure 2.15 : Engrènement; forme de la fissure selon le modèle des Walraven et Reinhardt, extrait de [36].

3.7.1 : Engrènement et EF

La prise en compte du phénomène dans un code d'EF dépend de la représentation choisie des fissures. Ainsi, pour la schématisation "discrète" il suffit de choisir un modèle à partir duquel est déterminée la rigidité des éléments spéciaux de liaison que l'on interpose entre les lèvres de la fissure.

Pour la représentation "répartie", c'est dans la loi de comportement des éléments fissurés que l'on incorpore l'engrènement. La forme ci dessous reliant les incréments des contraintes et des déformations est largement utilisée.

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{nn} \\ \Delta\sigma_{tt} \\ \Delta\sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{nn} \\ \Delta\varepsilon_{tt} \\ \Delta\gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

n : la normale à la vitesse

t : la tangente

$$0 \leq \beta \leq 1$$

Elle impose la nullité de la contrainte normale le long de la fissure mais permet un certain transfert des contraintes tangentielles. La rigidité tangentielle est fixée à un pourcentage du module de cisaillement βG , terme qui tient compte d'une façon globale, tant de l'engrènement que de l'effet de goujon.

Une multitude de valeurs constantes a été utilisée pour β , allant de zéro, ce qui signifie la suppression du phénomène, à 1 [29,31] ; en bref on observe que ce paramètre, bien que supposé représenter un phénomène physique, est utilisé plutôt comme un facteur d'ajustement avec les résultats expérimentaux.

D'autres auteurs [33,36] introduisent une décroissance linéaire ou hyperbolique de β avec la déformation normale à la fissure, pour tenir ainsi compte de la dégradation de l'engrènement avec l'ouverture des fissures.

3.7.2 : Commentaires

Nous considérons que l'engrènement peut jouer un rôle non négligeable dans la réponse d'une structure en béton armé. Nous allons donc l'introduire dans notre code d'EF par le dernier schéma mentionné pour aussi tenir compte des effets de couplage.

3.8 : L'effet de Goujon :

L'effet de goujon est le transfert des efforts entre deux blocs, parallèlement à leur surface de séparation, par l'intermédiaire d'une barre qui traverse perpendiculairement cette surface (Figure 2.16). Le phénomène a été étudié initialement à propos des joints des chaussées en béton, où la collaboration des parties voisines est assurée par goujons.

Pour le cas d'une structure fissurée en béton armé il s'agit des armatures qui traversent une fissure.

L'approche de base est le modèle d'une poutre (la barre d'acier) qui repose sur une fondation élastique (le béton) assimilée à une série de ressorts linéaires indépendants ; la relation linéaire effort-déplacement tangentiel qui *en* résulte est obtenue par Friberg et ses prévisions concordent bien *avec* les résultats expérimentaux pour la phase linéaire du phénomène [37].

Cette phase se termine :

- soit par séparation du béton au niveau de la barre si l'enrobage est petit par rapport au diamètre de la barre ; ce qui arrive d'habitude à l'armature principale des poutres courantes (figure 2.17),
- soit par écrasement du béton sous la barre et/ou plastification de la barre ; ce qui peut arriver quand les barres sont assez loin des frontières de la structure (Figure 2.18).

Pour chacun de ces cas la suite du comportement est différent, ce qui a été aussi confirmé par les expériences [7]. Il existe des formulations pour la phase non linéaire de chaque type de réponse qui sont, plus ou moins, compliquées.

D'autre part, les expériences ont montré que l'effet de goujon n'est pas très important, au moins pour les structures courantes. Il est ainsi justifié d'adopter le modèle simple de la poutre sur sol élastique pour les calculs globaux des structures [30,31,32] ; choix pour lequel nous optons.

L'introduction de l'effet de goujon dans le calcul par EF se fait de la même manière que pour l'engrènement selon la représentation choisie des fissures et des armatures.

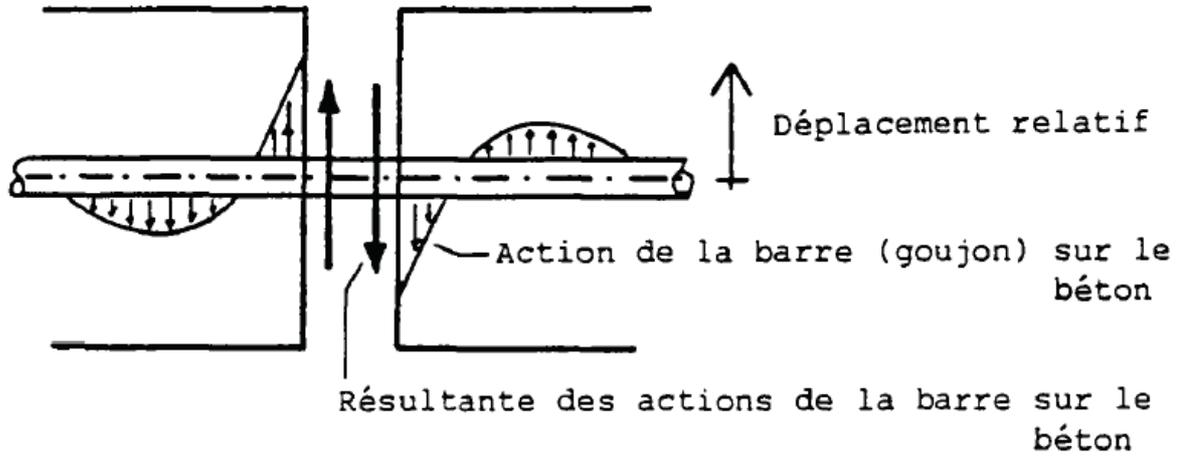


Figure 2.16 : Effet de goujon

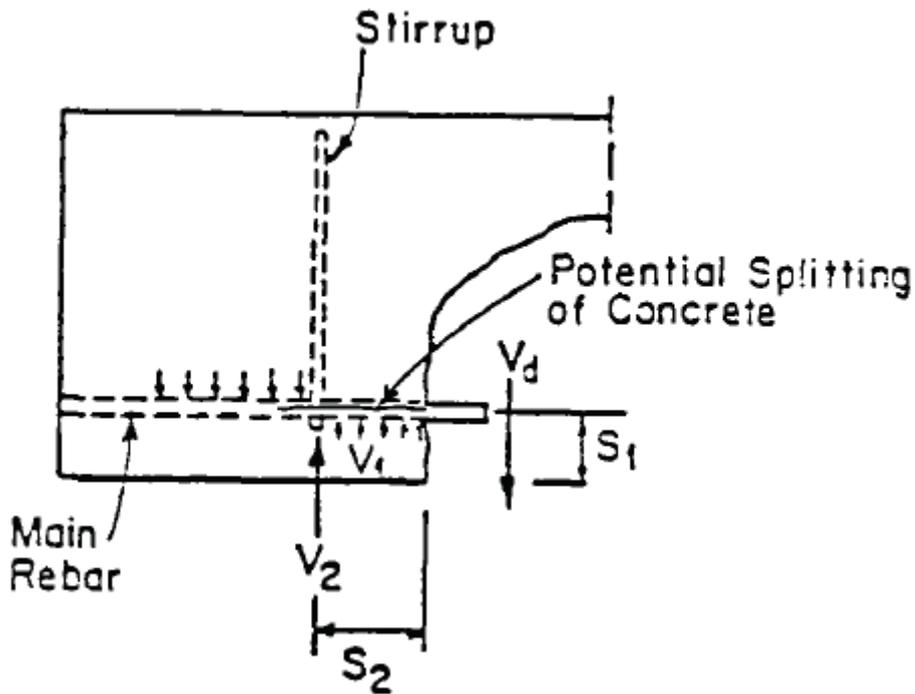


Figure 2.17 : Effet de goujon; éclatement du béton au niveau de la barre.

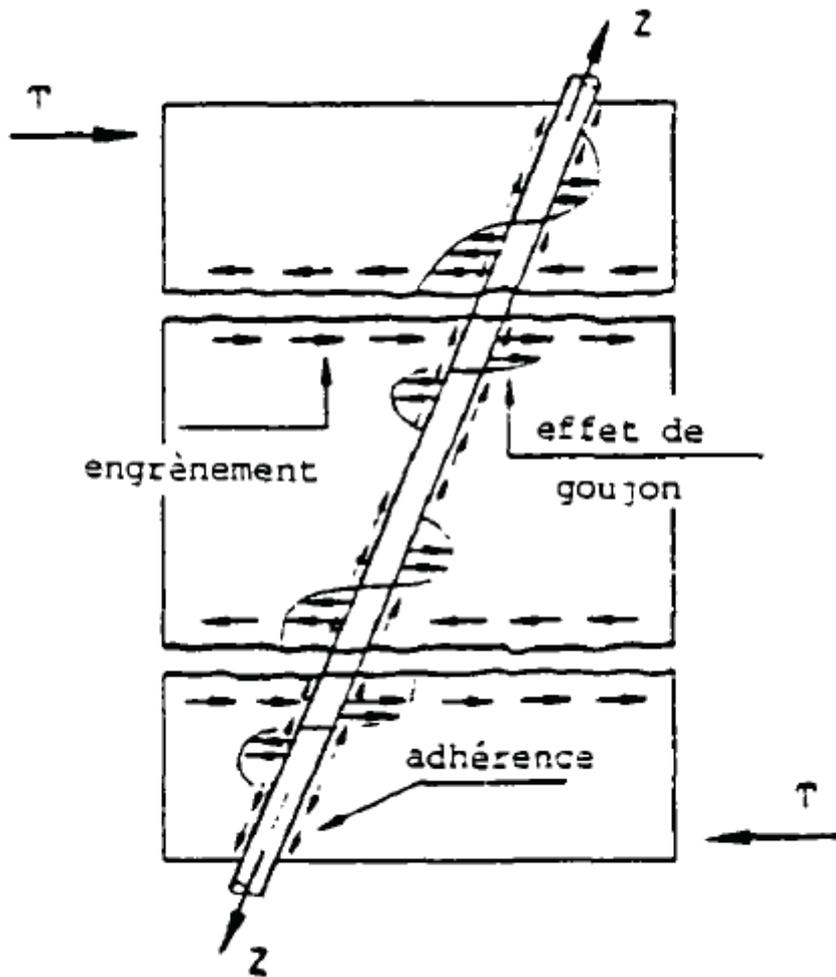


Figure 2.18 : Effet de goujon; écrasement du béton ou plastification de la barre.

3.9 : COMPORTEMENT DE L'ACIER

L'acier est introduit sous forme de barres d'armature avant bétonnage de l'élément d'où l'appellation du matériau résultant béton armé. A cet effet la résistance uniaxiale de l'armature est prédominante, d'où l'inutilité d'introduire la complexité d'une relation constitutive multiaxiale pour l'acier. Donc, une loi uniaxiale suffit largement pour décrire le comportement des armatures. Généralement deux types d'aciers sont utilisés pour le renforcement du béton : acier à haute résistance et acier doux (basses résistances). Les aciers de hautes résistances présentent un plateau de plasticité plus petit que les aciers de basses résistances (figure 2.19). Le module d'élasticité de l'acier est donné par la pente de la partie linéaire de la courbe contraintes - déformations. De plus, les aciers présentent le même comportement que ça soit en traction ou en compression.

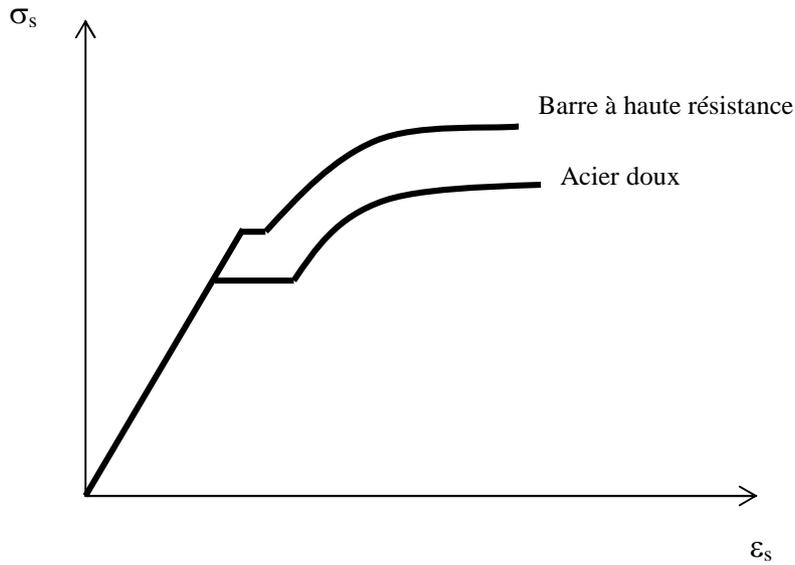


Figure 2.19 : Courbes typiques contraintes – déformations pour les aciers

3.9.1 : COMPORTEMENT DU COMPOSITE BETON ARME

On vient de voir que le béton présente un comportement fragile sous des contraintes de traction avec des résistances très faibles de l'ordre de 1/10 de sa résistance à la compression. Pour remédier à cet inconvénient, on introduit des armatures afin de reprendre les efforts de traction dans le matériau béton. Si la résistance à la traction du béton dépasse la valeur limite de critère, il se forme une ou plusieurs fissures. Après formation d'une fissure, le béton ne transmet pas d'efforts dans une direction normale à la fissure. A cause de la présence d'armatures dans le béton qui traversent la fissure et de la rugosité de la surface de la fissure, des contraintes substantielles de cisaillement peuvent se développer. La rugosité de la surface de la fissure conduit au transfert de cisaillement par engrenage des agrégats. Cela est plus effectif lorsque l'acier traverse la fissure parce qu'il a tendance à s'opposer au mouvement relatif des deux lèvres de la fissure.

3.10 : CONCLUSION

Après avoir revu sommairement le comportement général du béton sous différents états de sollicitation, on constate qu'il présente deux types de comportement selon l'état de contraintes. Sous des contraintes de tension, il est caractérisé par une rupture brutale accompagnée de petites déformations. Sous des contraintes de compression, il enregistre une

rupture ductile. Contrairement au béton, l'acier s'écoule une fois que la contrainte limite élastique est dépassée. Cette propriété est mise à bon escient par les ingénieurs en introduisant l'acier sous forme d'armatures dans le béton. Celles ci jouent un double rôle dans la section du béton. D'une part elles empêchent la propagation des fissures, améliorent la résistance à la traction du matériau béton armé, et d'autre part elles améliorent sa ductilité.

CHAPITRE 3

MODELISATION SOUS DES CHARGES MECANIQUES

3-1 INTRODUCTION

Le développement rapide des techniques d'analyse numériques a fourni aux ingénieurs un outil très puissant d'analyse non linéaire des structures, et ce avec un coût moindre par rapport aux études expérimentales. La méthode des éléments finis est l'une de ces techniques. Elle a été notamment utilisée pour prévoir le comportement des structures jusqu'à la ruine. En compression, les matériaux bétons ont été considérés comme des matériaux linéaires élastiques. Walraven et al. [36] ont introduit la non linéarité matérielle dans l'analyse en utilisant la résolution par la méthode incrémentale. Quant à la fissuration, elle a été représentée par l'approche dite modèle de *la fissure discrète*. Dans cette approche, quand la contrainte de traction calculée sur deux éléments adjacents dépasse la résistance à la traction du matériau béton, ces deux éléments sont disjoints le long de leur frontière commune ce qui entraîne la redéfinition du maillage. De plus les éléments triangulaires utilisés ne permettent que des angles de fissures prédéfinis. A cause de ces difficultés numériques, Rashid (1968) [29] a introduit pour la première fois le modèle de *la fissure continue*. Dans cette approche la fissure est représentée mathématiquement. Quand la contrainte de traction calculée en un point de Gauss dépasse la résistance en traction du matériau béton, le module d'élasticité dans la direction perpendiculaire à la fissure est annulé. Contrairement à l'approche précédente quia le mérite d'avoir une signification physique, cette nouvelle n'en possède pas. Cependant, elle a le mérite d'éviter de redéfinir le maillage et de ne pas fixer au préalable l'angle de la fissure. De plus, Rashid (1968) [29] considère que le matériau béton est un matériau élastoplastique. Zienkiewicz et al (1991) [38] ont adopté une approche similaire en utilisant des éléments isoparamétriques avec intégration numérique. Cervenka (1992) a analysé les panneaux en béton armé chargés dans leur plan en adoptant le même modèle de la fissuration. La deuxième approche est la plus utilisée dans l'analyse des structures par la méthode des éléments finis car elle donne une bonne description de l'état de l'état de contraintes et elle évite la redéfinition du maillage. Depuis, des progrès ont été enregistrés d'une part dans la réduction du temps de calcul et d'autre part dans la définition des lois de comportement des matériaux bétons.

Eléments finis et béton armé - Appréciation générale

Les premières applications des EF au calcul d'une structure en béton armé datent de la fin des années 1960 [26] ; depuis, une énorme quantité de travaux est apparue dans la littérature. Cet essor s'explique d'une part par l'intérêt du sujet et d'autre part par le nombre et la complexité des facteurs à prendre en compte ainsi que les diverses approches proposées pour chacun.

Comme tels facteurs on entend non seulement ceux développés le long de ce chapitre (loi du béton, adhérence, engrenement, goujon), mais aussi ceux exclus par nos hypothèses générales (non-linéarité géométrique, fluage, température etc).

Aujourd'hui une bonne partie de ces travaux gardent, au moins partiellement, leur originalité, chacun proposant une meilleure modélisation par rapport aux autres d'un phénomène particulier, ou une formulation plus simple et économique. Ceci parce que suivant le type de structure et le chargement auquel elle est soumise, le poids de chaque phénomène est différent ; on peut alors réduire le niveau d'approximation de certains d'entre eux, ou même les négliger, tout en suivant la réponse de la structure avec fidélité ; il va de soi que chaque simplification bien choisie nous permet des économies importantes tant dans la conception que dans l'exécution du programme. En revanche, il y a des cas où nous ne pouvons pas négliger un facteur sans appauvrir considérablement le niveau d'analyse. Par exemple :

- pour un tirant en traction, la loi de comportement du béton peut être très simple sans influencer les résultats ; ce qui s'est avéré aussi acceptable pour des structures de forme plus complexe (poutres, plaques, coques) dont la réponse est dictée par la fissuration du béton et la plastification de l'acier [7]. En revanche, nous avons intérêt à modéliser en détail l'adhérence acier-béton [4,5].
- Pour une structure en état des contraintes complexe, où la compression domine, l'introduction d'une loi de béton très sophistiquée est tout-à fait justifiée. C'est le cas des enceintes de réacteurs en béton précontraint [29], ou des réservoirs sous-marins à grande profondeur , ou autres constructions industrielles . Pour ce type de structures les effets de fluage, de la température et de leur couplage ont une grande importance et doivent être pris en compte.
- Pour les structures à grand élancement, les non-linéarités géométriques peuvent jouer un rôle non négligeable autour des sollicitations ultimes.

- Enfin pour les structures soumises à un choc les termes d'inertie sont pris en compte, mais aussi l'influence du facteur "temps" (vitesse de sollicitation) sur la loi du béton .

Pour conclure on peut dire que la complexité du calcul par EF des structures en béton armé dans sa généralité incite à des hypothèses simplificatrices, que nous devons choisir minutieusement, en fonction de la forme de la structure et de son chargement.

Nous croyons que l'étude des travaux de recherche précédents justifie, par rapport à l'objectif que nous nous sommes posés, nos hypothèses générales, c'est-à-dire les facteurs retenus.

D'autre part, elle nous a guidé pour nos choix sur la modélisation de chaque facteur ; choix que nous avons mentionné succinctement et que nous allons développer dans le chapitre suivant.

Méthodes de résolution des problèmes non linéaires

La méthode purement incrémentale constitue une linéarisation par intervalles de la réponse de la structure sans itérations sur l'équilibre, ce qui peut conduire à un écart considérable de la réalité par accumulation des erreurs (Figure III.27a).

Selon la méthode itérative on fixe le niveau de chargement et on itère le champ des déplacements jusqu'à l'équilibre en redistribuant les efforts non-équilibrés (résidus). Les itérations peuvent s'effectuer en utilisant la matrice de rigidité tangente (méthode Newton-Raphson standard, Figure.III.27b) ou initiale (méthode N-R modifiée, Figure 111.27c), ou une approximation de la matrice tangente ou de son inverse ; méthodes quasi-Newton.

Enfin, la combinaison des deux donne la méthode incrémentale avec itérations à l'équilibre ou mixte (Figure III.27d).

Les stratégies mentionnées ci-dessus, que nous pouvons appeler "classiques" [19,23,25] , sont utilisées dans la plupart des codes non-linéaires d'éléments finis.

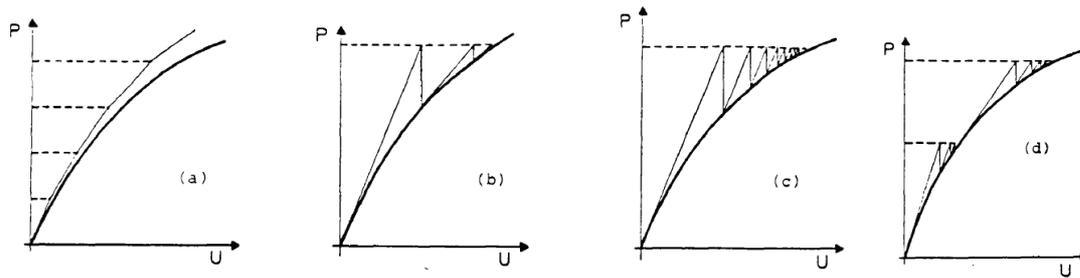


Fig. III.27 Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires

- (a) méthode purement incrémentale
- (b) méthode Newton-Raphson standard
- (c) méthode Newton-Raphson modifiée
- (d) méthode mixte

3.2 MATERIAU BÉTON NON FISSURE ET MODELISATION DE SON COMPORTEMENT

3.2.1 Généralités

Dans ce paragraphe, on adopte une loi de comportement élastoplastique pour le matériau béton soumis à des efforts de compression.

Soit à analyser le diagramme contraintes – déformations relevé dans un essai de compression simple sur une éprouvette en béton. On constate l'existence d'un seuil pour la contrainte, soit f_y , à partir duquel le comportement devient irréversible: l'éprouvette étant chargée au-delà du point A jusqu'au point B. Si on effectue une décharge, celle-ci suit le chemin BC et non le trajet BAO. Il est clair que la déformation totale ε est la somme d'une déformation élastique ε^e et d'une déformation plastique ε^p (figure 3.1).

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3-1)$$

La recharge jusqu'au point B s'effectue élastiquement. La nouvelle contrainte limite f_y est différente de σ_B ; on dit qu'il y a *écrouissage*.

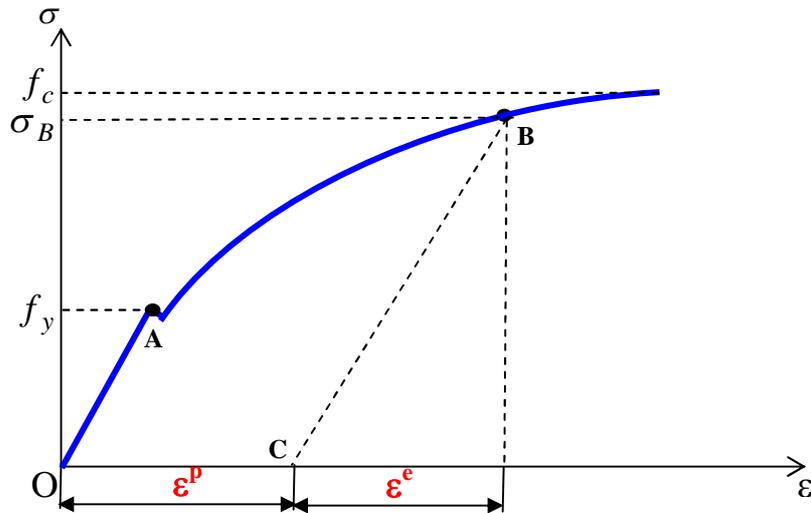


Figure 3.1 : Courbe contraintes – déformations pour l'éprouvette en béton.

Pour généraliser l'essai mono axial, évoqué précédemment, on peut rajouter à l'élément sollicité deux contraintes selon ces deux directions de façon à faire un catalogue complet de tous les tenseurs principaux qui conduisent à un état limite. C'est cet inventaire qui est nommé *critère*. Il prend la forme d'une fonction liant σ_1 , σ_2 et σ_3 comme :

$$f(\{\sigma\}) = 0 \quad (3.2)$$

Lorsqu'on atteint la frontière de l'élasticité et lorsqu'on la dépasse, deux cas du comportement plastique à une dimension peuvent se produire : le matériau est parfaitement plastique ou plastique écrouissable. Dans le premier cas, la contrainte n'évolue pas avec la déformation et la surface de charge reste inchangée. Dans le deuxième cas, la contrainte augmente avec la déformation et la surface de charge évolue. L'évolution de la surface de charge peut être représentée comme suit :

Ecrouissage isotrope

Il est caractérisé par une expansion de la surface d'écoulement dans l'espace des contraintes sans translation de l'origine. Il est représenté par une variable scalaire notée K représentant le rayon du domaine élastique à chaque instant (figure 3.2).

La fonction de charge s'écrit :

$$f(\{\sigma\}, k) = 0 \quad (3-3)$$

Écrouissage cinématique

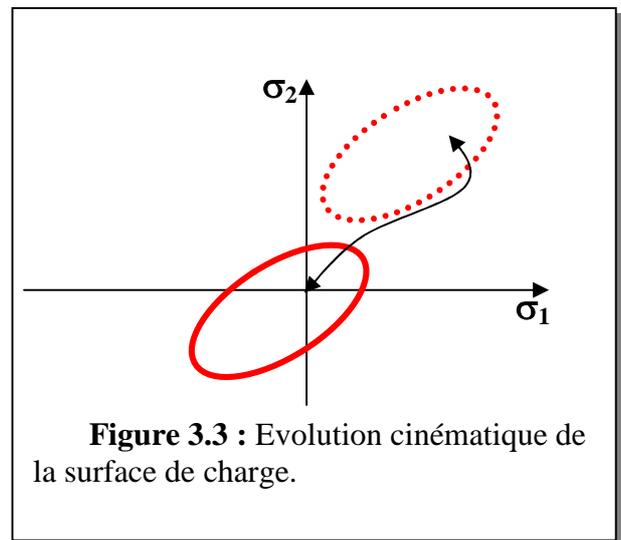
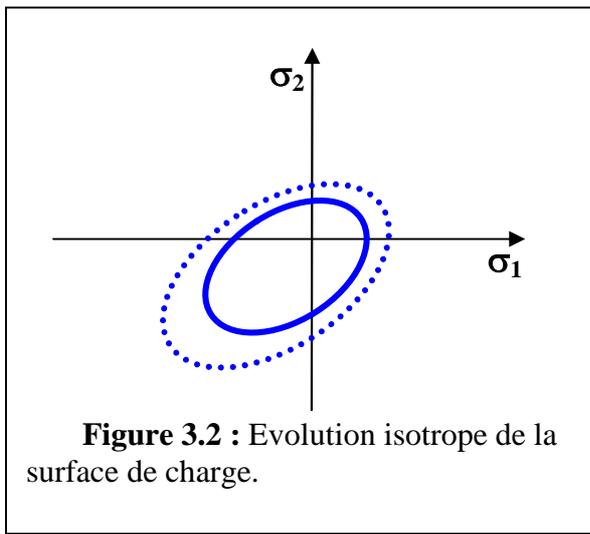
Il est caractérisé par une translation de la surface de charge dans l'espace des contraintes sans modification de son rayon. Il est représenté par un tenseur symétrique X_{ij} (figure 3.3). La fonction de charge s'écrit :

$$f(\{\sigma\}, \{x\}) = 0 \quad (3-4)$$

Dans le cas d'écrouissage cinématique combinée à l'écrouissage isotrope, la condition de plasticité s'écrit :

$$f(\{\sigma\}, \{x\}, k) = 0 \quad (3-5)$$

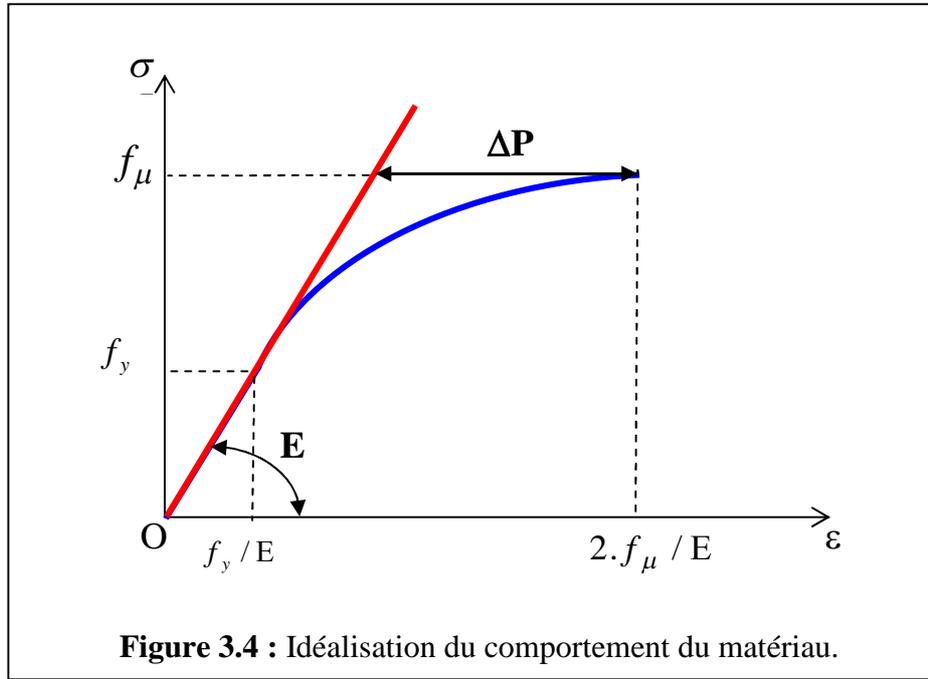
Pour le cas du matériau béton comme la fonte, l'écrouissage isotrope est le plus utilisé.



3.2.2 Surface de charge et la règle d'écrouissage

La surface de charge est une fonction de l'état de contraintes et du paramètre d'écrouissage H qui gouverne son évolution. Le paramètre H est déterminé dans un essai uniaxial contraintes – déformations (figure 3.4) et s'exprime en fonction de la contrainte effective, $\bar{\sigma}$, et de la déformation effective, ϵ_p . Cependant, la fonction de charge peut être réécrite comme :

$$f(\sigma, \bar{\sigma}) = 0 \quad (3-6)$$



On suppose que le matériau béton a un comportement linéaire élastique jusqu'à la limite d'élasticité f_y .

La contrainte effective, $\bar{\sigma}$, est considérée comme une fonction de la composante de la déformation plastique dans la courbe uni axiale contraintes – déformations (figure 3.4) et s'exprime en fonction de déformations plastiques multiaxiales moyennant deux méthodes [3]. Le travail plastique par unité de volume est donné par :

$$dW^p = \{\bar{\sigma}\} \{d\bar{\varepsilon}^p\} = \bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon} \quad (3-7)$$

La déformation effective plastique, $\bar{\varepsilon}_p$, est une simple combinaison des incréments de déformations plastiques.

$$d\bar{\varepsilon}_p = c \cdot \sqrt{\{d\varepsilon_p\}^T \{d\varepsilon_p\}} \quad (3-8)$$

Avec c est une constante.

La relation entre $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ est obtenue en reliant la contrainte à la déformation plastique dans la courbe contrainte – déformations (figure 3.4). Par conséquent, deux méthodes ont été proposées dans la littérature. La première méthode est appelée *Parabole de Madrid* [20,21] où la courbe uni axiale contraintes – déformations pour le matériau est assimilée à une parabole.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - \frac{E}{2 \cdot \varepsilon_\mu} \varepsilon^2 \quad (3-9)$$

Où E est le module d'élasticité, ε est la déformation totale, ε_μ est la déformation ultime correspondant au sommet de contraintes f_μ .

D'après la loi de Hooke, la déformation élastique s'exprime comme :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \quad (3-10)$$

En substituant l'équation (3-10) dans l'équation (3-9), on trouve :

$$\bar{\sigma} = - E \cdot \bar{\varepsilon}_p + \sqrt{2 \cdot E^2 \cdot \varepsilon_\mu \bar{\varepsilon}_p} \quad , \quad 0.3f_\mu < \bar{\sigma} < f_\mu \quad (3-11)$$

L'équation précédente donne la relation entre la contrainte effective $\bar{\sigma}$ et la déformation effective $\bar{\varepsilon}_p$.

La deuxième méthode proposée dans [18] considère la partie non linéaire de la courbe contrainte – déformations comme un quart d'une ellipse. En utilisant l'expression de l'ellipse, la relation entre $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}_p$ s'exprime comme :

$$\left(\frac{\bar{\sigma} - f_y}{f_\mu - f_y} \right)^2 + \left(\frac{\Delta P - \bar{\varepsilon}_p}{\Delta P} \right)^2 = 1 \quad (3-12)$$

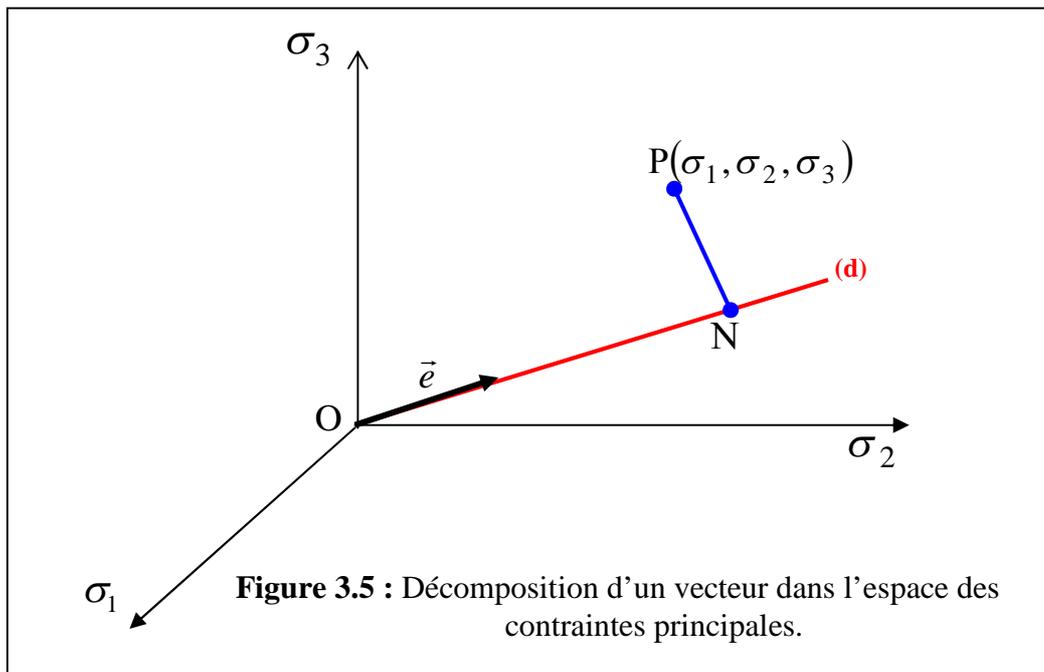
La relation elliptique entre σ et ε_P utilisée afin de formuler la relation entre $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}_P$ est :

$$d\bar{\sigma} = H \cdot d\varepsilon_P = \left(\frac{f_\mu - f_y}{\Delta P} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta P - \varepsilon_P}{\bar{\sigma} - f_y} \right) \cdot d\bar{\varepsilon}_P \quad (3-13)$$

Avec H étant le paramètre d'écrouissage.

3.3 CRITERE DE RUPTURE

Le principal type de représentation des critères est l'espace de contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 . Cette représentation possède l'avantage d'être valable pour tous les types de critères.



Le segment porté par la diagonale (d) représente l'axe hydrostatique ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$).

Le vecteur unitaire \vec{e} le long de cette diagonale est donné par l'expression suivante :

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 111 \rangle \quad (3-14)$$

Le point P appartient à un plan perpendiculaire en N à l'axe hydrostatique. Ce plan est appelé plan octaédrique. Lorsque le point N sera en O, le tenseur sera purement déviatorique, le plan est appelé plan déviatorique.

La relation géométrique donne :

$$\vec{OP} = \vec{ON} + \vec{NP} \quad (3-15)$$

Le vecteur \vec{OP} se décompose en deux parties : la partie hydrostatique est définie par le vecteur \vec{ON} et la partie déviatorique est représentée par le vecteur \vec{NP} .

Le critère n'est pas valable que dans le cas où il est bien adapté au matériau utilisé. On trouve dans la littérature, [4,5,6,8,9,10,12,15], toute une variété de critères dont voici quelques uns :

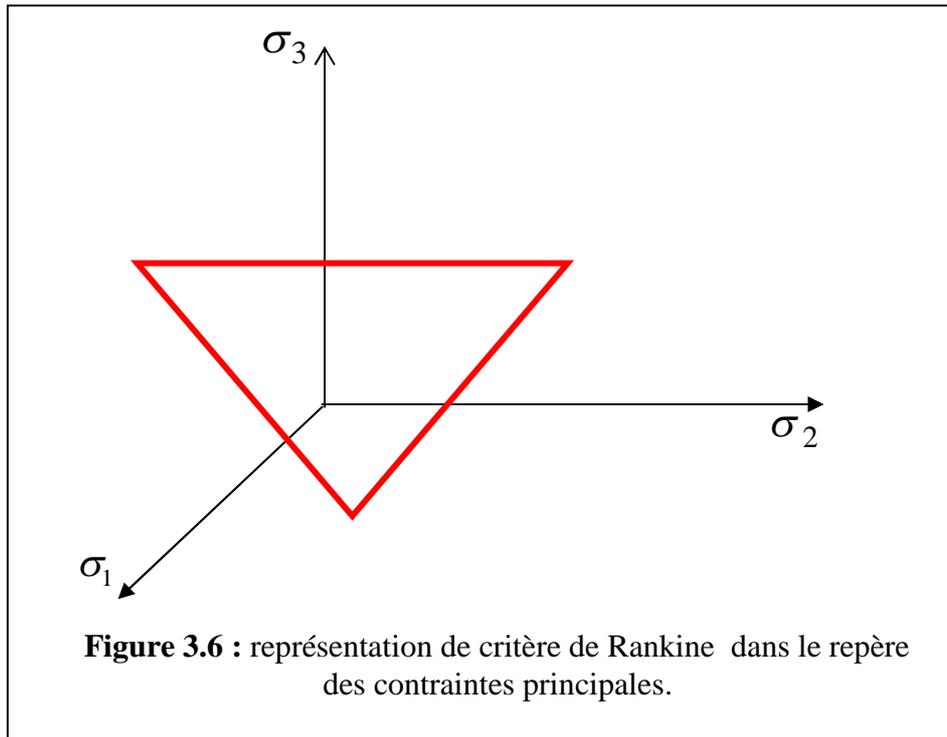
Critère de contraintes de tensions maximales (Rankine)

Ce critère consiste à imposer à chacune des contraintes principales d'être inférieure à la résistance de tension du matériau f_t .

Les équations des surfaces de rupture sont définies par le critère comme :

$$\sigma_1 = f_t \quad , \quad \sigma_2 = f_t \quad , \quad \sigma_3 = f_t \quad (3-16)$$

Dans le repère des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, le critère est représenté comme montré sur la figure ci-contre :



Ce critère est généralement utilisé en mécanique des sols.

Critère de contraintes de cisaillement (Tresca)

Ce critère est porté sur la contrainte tangentielle maximale. Grâce au cercle de Mohr, on démontre facilement que la contrainte tangentielle maximale est égale à :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| \quad (3-17)$$

Avec τ_{\max} est la contrainte tangentielle limite.

Le critère s'exprime dans le repère des contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 comme :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y(k)$$

Où $Y(k)$ est une fonction de paramètre d'érouissage k est déterminée expérimentalement.

Ce critère ne fait pas intervenir la contrainte intermédiaire dans les calculs. Dans l'espace des contraintes principales, la surface limite associée à ce critère est un prisme hexagonal.

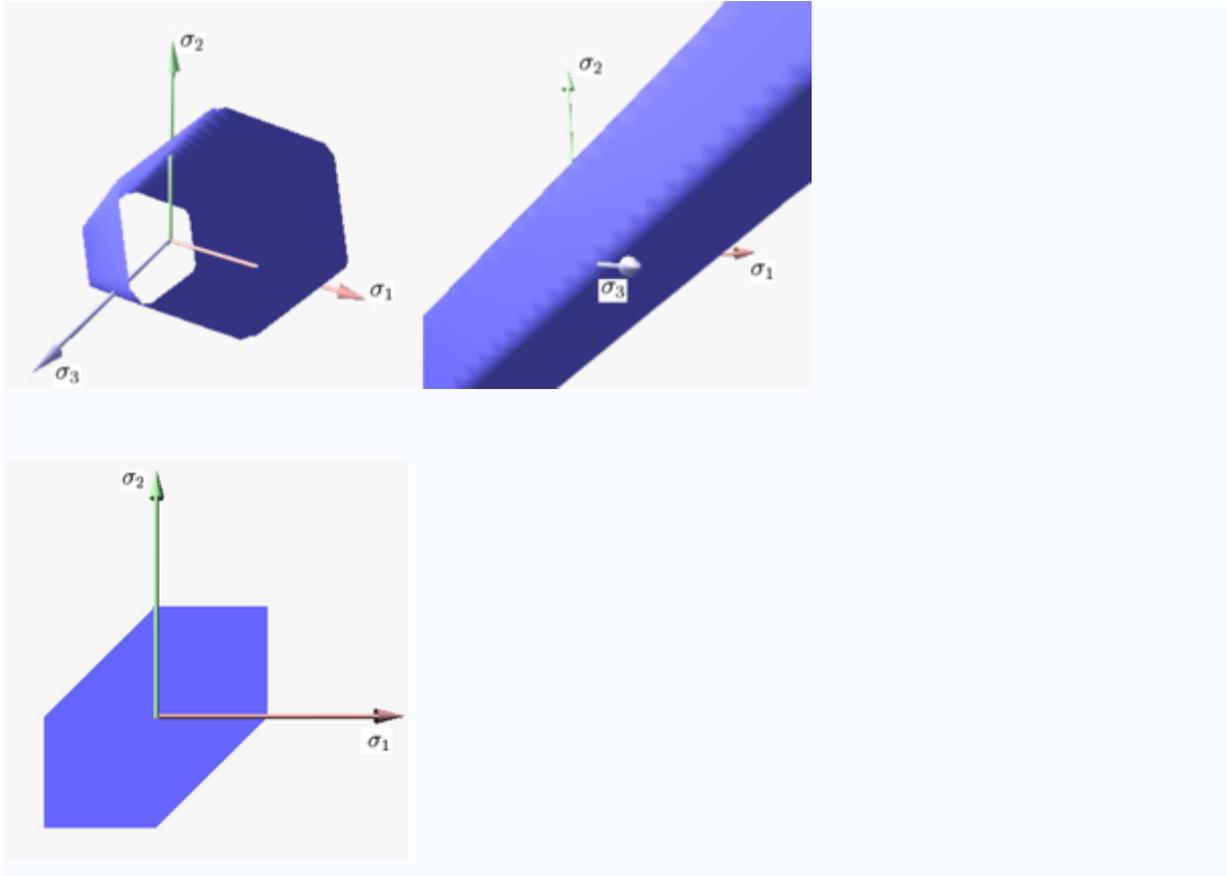
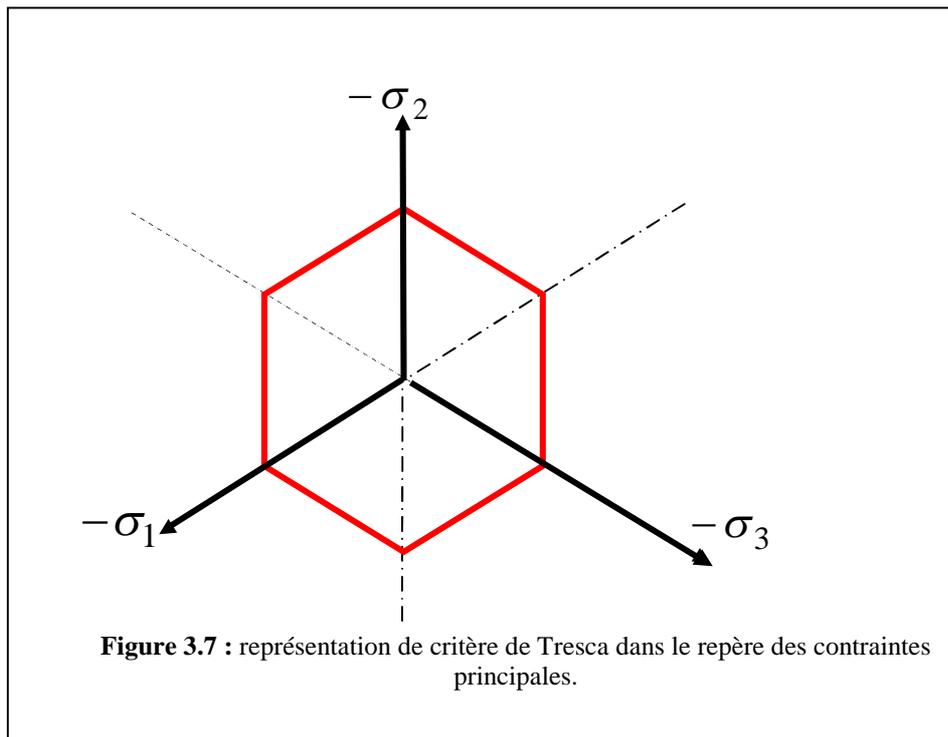


Figure 3.7 : représentation de critère de Tresca dans le repère des contraintes principales.



Ce critère est généralement utilisé pour les métaux.

Critère de Mohr – Coulomb

Ce critère est gouverné par la relation suivante :

$$\tau = f(\sigma)$$

Et assimile cette fonction à une droite faisant un angle ϕ avec l'axe σ dans le plan de Mohr (figure 3.8).

$$\tau = c - \sigma \cdot \text{tg}\phi \tag{3-18}$$

Où :

ϕ : Angle de frottement interne,

c : Cohésion du matériau.

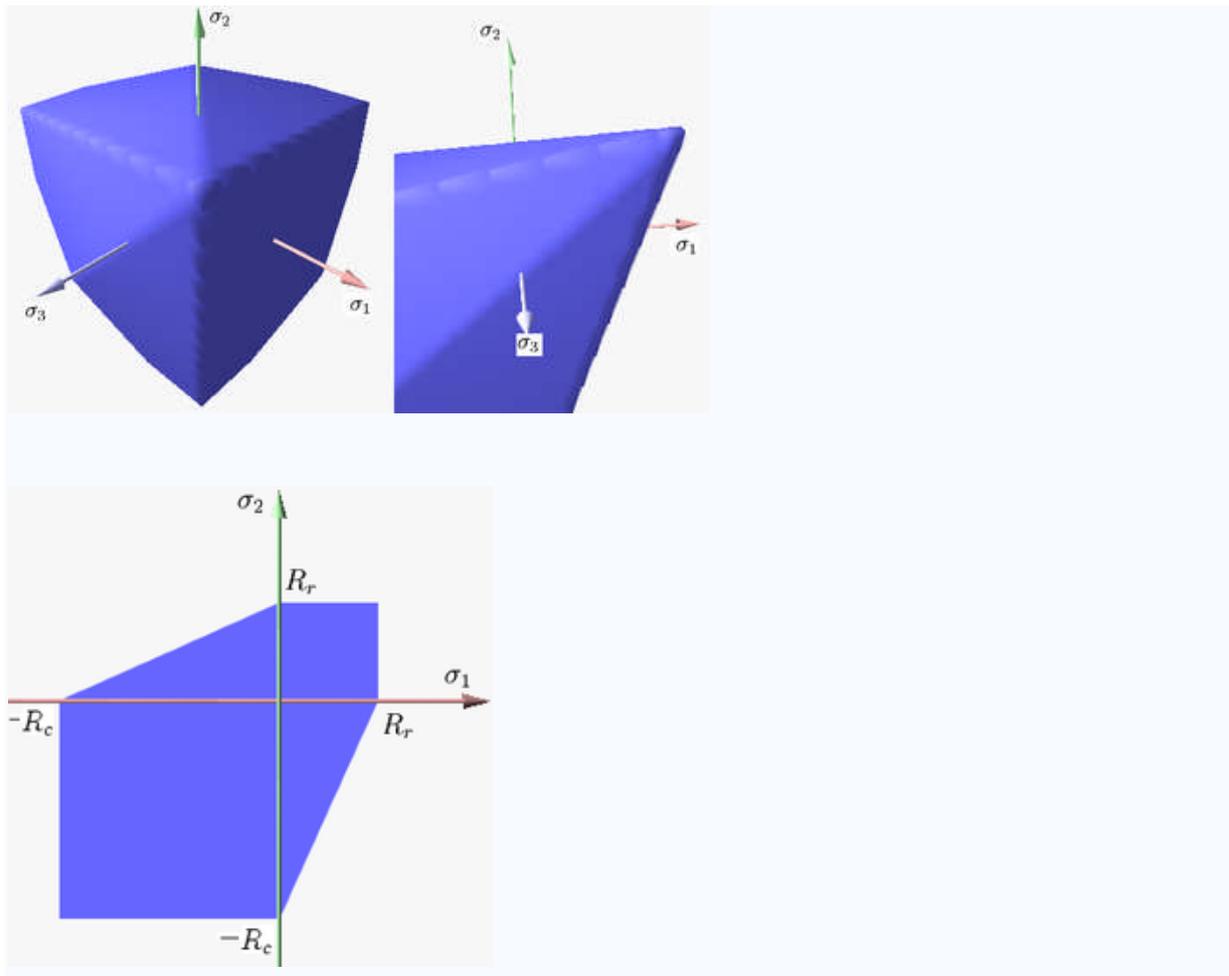
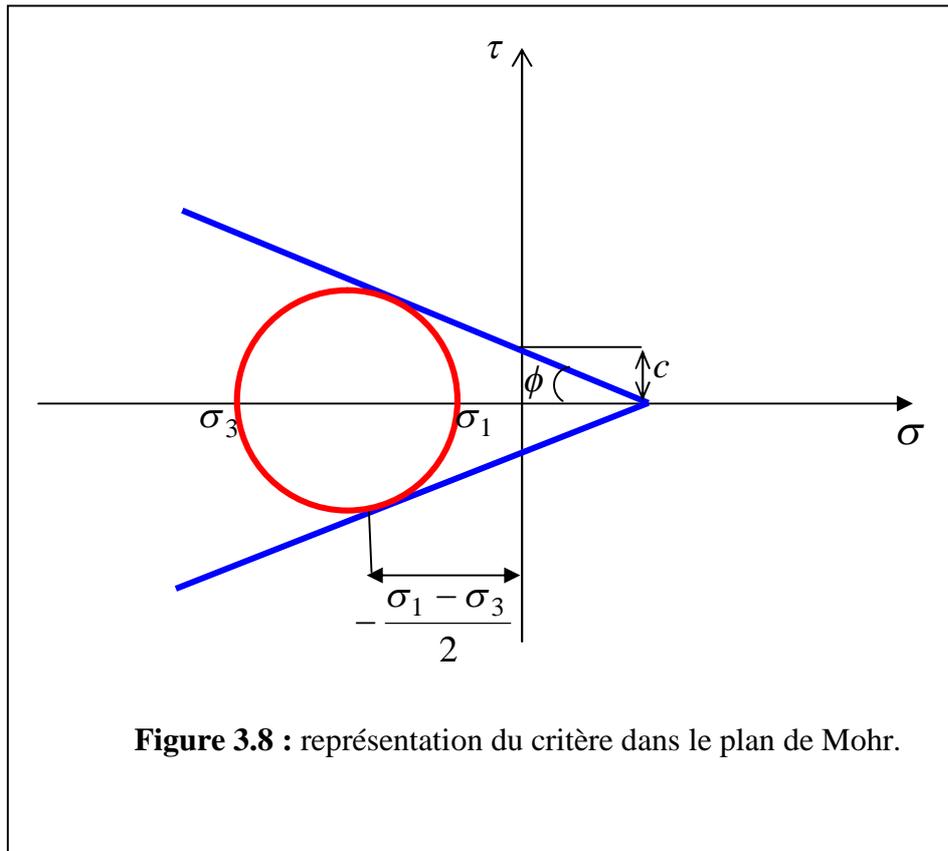


Figure 3.8 : représentation du critère dans le plan de Mohr.



Les considérations géométriques montrent que :

$$(\sigma_1 + \sigma_3) \cdot \sin \phi - (\sigma_1 - \sigma_3) + 2 \cdot c \cdot \cos \phi = 0 \quad (3-19)$$

L'équation précédente peut être réécrite comme :

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{f_t} - \frac{\sigma_3}{f_\mu} = 1 \quad (3-20)$$

avec :

$$f_\mu = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad ; \quad f_t = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

Où f_{μ} est la résistance maximale de compression du matériau et f_t est la résistance maximale de traction du matériau.

$$\text{Posant } m = \frac{f_{\mu}}{f_t}$$

En substituant la valeur de m dans l'équation (3-20), on trouve :

$$m \cdot \sigma_1 - \sigma_3 = f_{\mu} \tag{3-21}$$

Les résultats des testes [28,29] montrent que le coefficient m pour les matériaux bétons vaut 4,1. Ce critère est souvent appliqué pour les sols.

Les inconvénients de critère de Mohr – Coulomb sont :

- ne tient pas compte de la valeur de la contrainte intermédiaire σ_2 dans les calculs,
- les méridiens sont des lignes droites. Cette approximation n'est pleinement justifiée dans le cas de grandes pressions hydrostatiques,
- la surface de charge n'est pas convexe.

Critère de Von Mises

La présence d'un point anguleux sur la surface de charge de Tresca suggère à Von Mises l'idée de remplacer le prisme hexagonal par un cylindre circonscrit sur celui-ci (figure3-9). Ce critère à un paramètre et il sera aisé de vérifier qu'il ne peut être que pour des matériaux dont la limite élastique en traction est en module égale à la limite d'élasticité en compression. Par conséquent, il est plus adapté pour les métaux et il a l'inconvénient de vérifier la traction hydrostatique infinie.

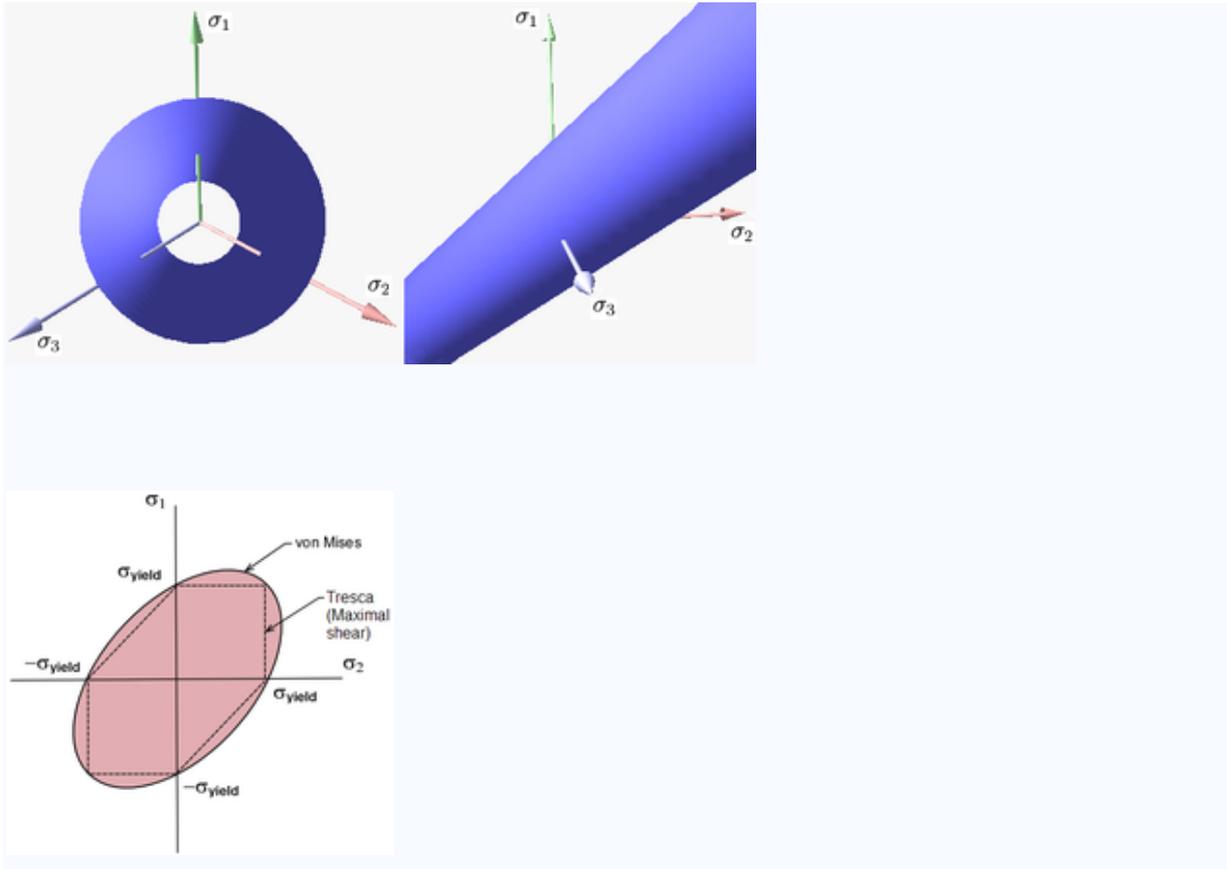
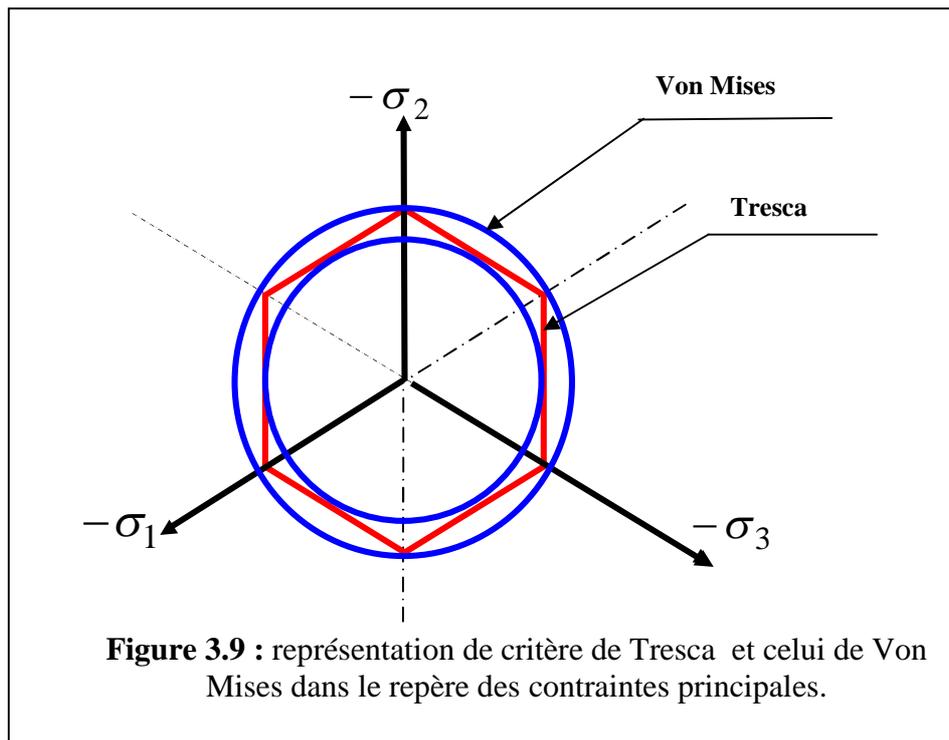


Figure 3.9 : représentation de critère de Tresca et celui de Von Mises dans le repère des contraintes principales.



Critère de Drucker-Prager

Une approximation du critère de Mohr – Coulomb est représenté par Drucker-Prager [12] comme une modification du critère de Von Mises.

Le critère s'exprime dans le repère de contraintes principales comme :

$$\alpha \cdot I_1 + \sqrt{J_2} = K' \tag{3-22}$$

avec :

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ étant le premier invariant du tenseur de contraintes,

$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$ étant le deuxième invariant du tenseur

déviatorique.

Pour la valeur de $\alpha = 0$, l'équation précédente se réduit à l'expression de critère de Von Mises. La surface de charge a la forme d'un cône circulaire. Les dimensions du cône peut être ajusté par deux paramètres α et K' .

Si on coïncide le cercle de Drucker - Prager avec les sommets extérieurs de l'hexagonal de Mohr – Coulomb (figure3.10) [12], on peut montrer que :

$$\alpha = \frac{2 \cdot \sin \phi}{\sqrt{3} \cdot (3 - \sin \phi)} \quad \text{et} \quad K' = \frac{6 \cdot c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3} \cdot (3 - \sin \phi)}$$

Si on coïncide le cercle de Drucker - Prager avec les sommets intérieurs de l'hexagonal de Mohr - Coulomb, on peut montrer que [] :

$$\alpha = \frac{2 \cdot \sin \phi}{\sqrt{3} \cdot (3 + \sin \phi)} \quad \text{et} \quad K' = \frac{6 \cdot c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3} \cdot (3 + \sin \phi)}$$

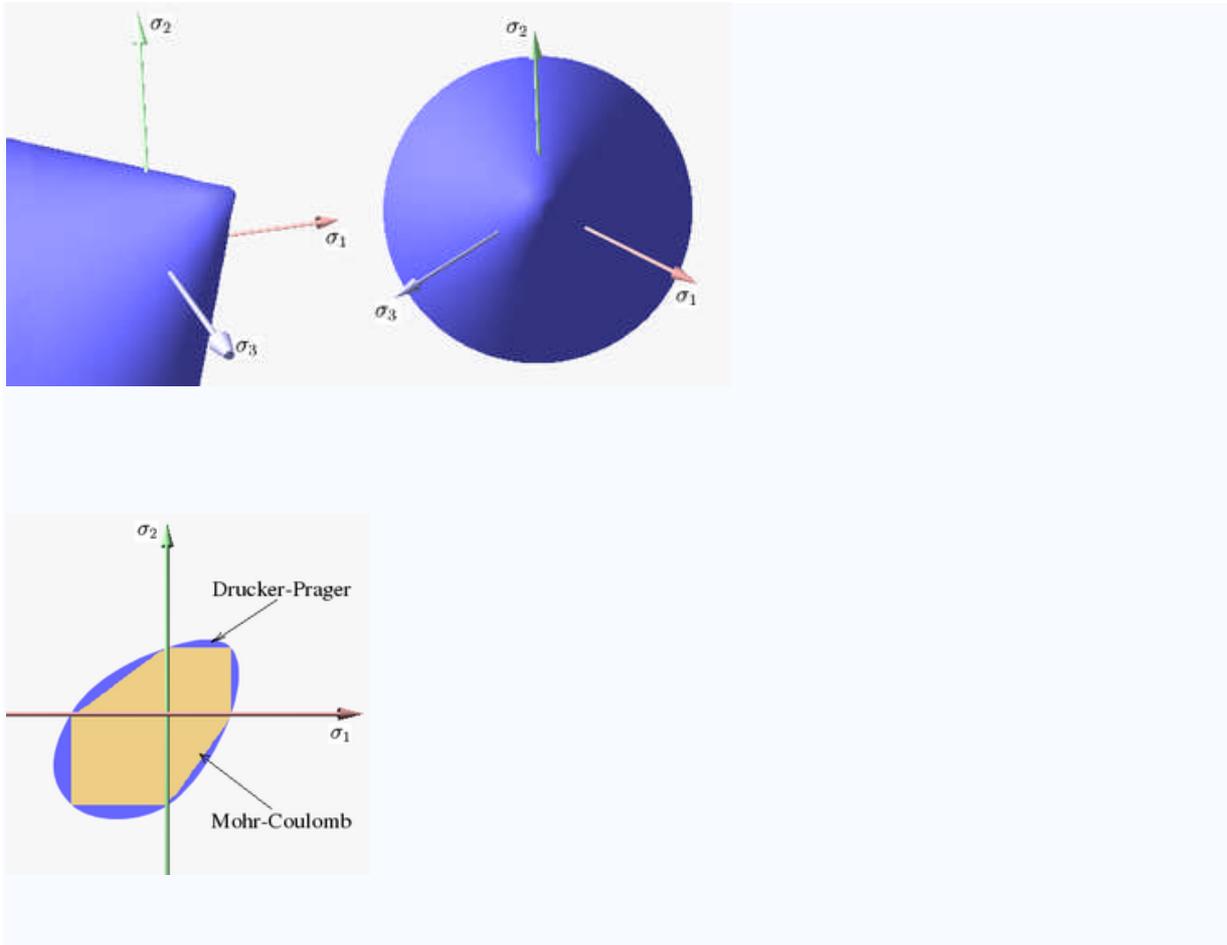
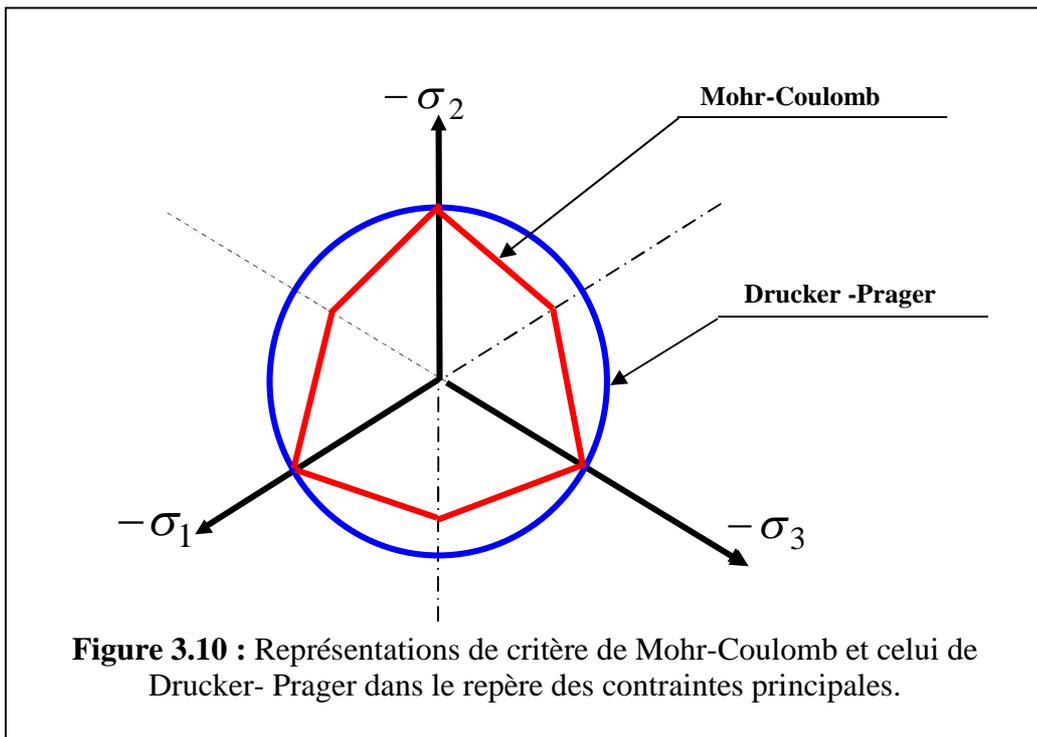


Figure 3.10 : Représentations de critère de Mohr-Coulomb et celui de Drucker- Prager dans le repère des contraintes principales



Ce critère est généralement utilisé pour le béton.

Critère de Nadai

La surface limite de Nadai [18] de type Drucker- Prager [12] se traduit par deux équations suivantes, en fonction des contraintes octaédrales σ_{oct} et τ_{oct} :

- *En compression biaxiale :*

$$\tau_{oct} + \sqrt{2} \cdot \frac{\beta - 1}{2 \cdot \beta - 1} \cdot \sigma_{oct} - \frac{\sqrt{2} \cdot \beta}{3 \cdot (2 \cdot \beta - 1)} \cdot f_{\mu} = 0 \quad (3-23)$$

$$\sigma_1 < 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2 < 0$$

- *En traction biaxiale et en traction – compression*

$$\tau_{oct} + \sqrt{2} \cdot \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \cdot \sigma_{oct} - \frac{2\sqrt{2} \cdot \alpha}{3 \cdot (1 + \alpha)} \cdot f_{\mu} = 0 \quad (3-24)$$

$$\sigma_1 > 0 \quad \text{et / ou} \quad \sigma_2 > 0$$

avec :

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \quad ; \quad \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

$$\alpha = \frac{f_t}{f_c} : \text{étant le rapport de la résistance du matériau en traction simple à la}$$

résistance en compression simple,

$$\beta = \frac{f_{\mu}}{f_c} : \text{étant le rapport de la résistance maximale du matériau en compression}$$

biaxiale (pour $\sigma_1 = \sigma_2$) à la résistance en compression simple. Les essais de Kupfer et al [18] montrent que les coefficients α et β sont respectivement voisins de 0,1 et 1,16.

La surface de charge est déduite de la surface limite en compression biaxiale comme :

$$\tau_{oct} + a \cdot \sigma_{oct} + b \cdot f_c(H) = 0 \quad (3-25)$$

où

$$a = \frac{\sqrt{2} \cdot (\beta - 1)}{2 \cdot \beta - 1} \quad ; \quad b = \frac{\sqrt{2} \cdot \beta}{3 \cdot (2 \cdot \beta - 1)} \quad \text{et } H \text{ étant le paramètre d'écroutissage.}$$

C'est ce critère qui sera utilisé dans ce présent travail (fig.3.11).

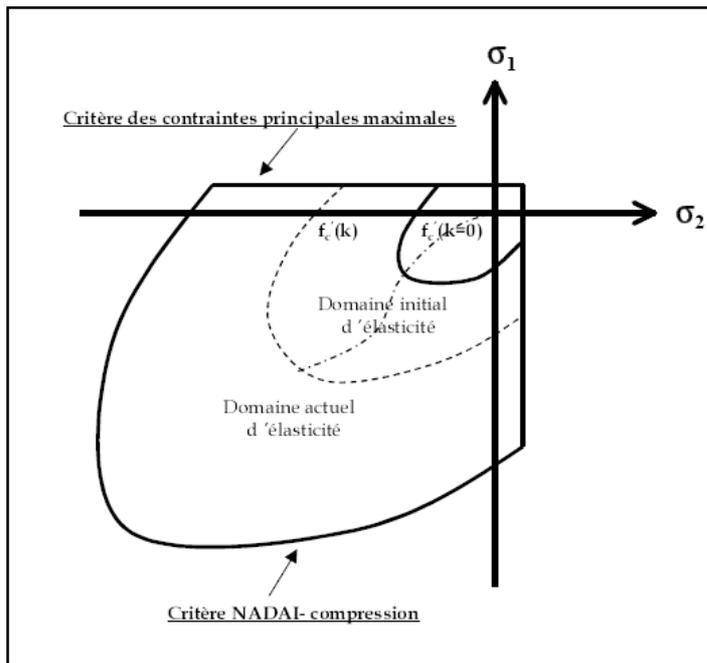


Figure 3.11: Surface de rupture et surface de charge dans le plan des contraintes principales.

Calcul de l'expression du vecteur normal à la surface de charge

On assume que la fonction de charge a la même forme que celle de critère de Nadai. Il suit que l'expression du vecteur normal à la surface de charge s'écrit comme :

$$\vec{a} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad (3-26)$$

L'équation (3-25) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$F(\sigma) = \tau_{oct} + a \cdot \sigma_{oct} + b \cdot \bar{\sigma} = 0 \quad (3-27)$$

d'où :

$$\vec{a} = \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \{\sigma\}} + a \cdot \frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \{\sigma\}} \quad (3-28)$$

Sachant que :

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \sigma_1} \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \sigma_2} \cdot \frac{\partial \sigma_2}{\partial \{\sigma\}}$$

$$\frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \{\sigma\}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial \{\sigma\}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \sigma_2}{\partial \{\sigma\}} \quad (3-29)$$

Les expressions de la résistance des matériaux donnent :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \right) \quad (3-30)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \{\sigma\}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau_{xy}} \end{pmatrix} \quad (3-31)$$

De même raisonnement, on trouve :

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial \{\sigma\}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_x} \\ -\frac{\partial \sigma_2}{\partial \tau_{xy}} \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

D'autre part, on a :

$$\frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \sigma_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \{\sigma\}} \quad (3-33)$$

Sachant que :

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2)}}{3} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \sigma_1} = \frac{\sqrt{2} \cdot (2\sigma_1 - \sigma_2)}{6\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}} \\ \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial \sigma_2} = \frac{\sqrt{2} \cdot (2\sigma_2 - \sigma_1)}{6\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}} \end{cases} \quad (3-34)$$

Après substitution des équations (3-29), (3-30), (3-31), (3-32), (3-33) et (3-34) dans l'équation (3-28), on trouve facilement l'expression analytique du vecteur normal \vec{a} .

L'équation (3-27) montre que : $b = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}$

3.4 RELATIONS CONTRAINTES – DEFORMATIONS

3.4.1 Equations incrémentales

Le vecteur incrémental de déformations plastiques est donné par la règle de flux comme :

$$\{d\varepsilon^p\} = d\lambda \cdot \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}$$

avec g étant le potentiel plastique.

Du moment qu'on aborde le comportement du matériau béton dans le cadre de la plasticité associée ($g \approx f$), l'incrément de déformation plastique s'écrit :

$$\{d\varepsilon^p\} = d\lambda \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} = d\lambda \cdot \vec{a} \quad (3-35)$$

En substituant l'équation (3-35) dans l'équation (3-8), on trouve :

$$d\bar{\varepsilon}_p = d\lambda \cdot A \quad (3-36)$$

Où A est un scalaire défini par la relation suivante :

$$A = \sqrt{\vec{a}^T \cdot \vec{a}}$$

En remplaçant la valeur de $d\lambda$ dans l'équation (3-35), on obtient :

$$\{d\varepsilon^p\} = d\bar{\varepsilon}_p \cdot \frac{\vec{a}}{A} \quad (3-37)$$

Le vecteur incrémental de contraintes est donné par :

$$\{d\sigma\} = [D] \left(\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\} \right) \quad (3-38)$$

où $\{d\varepsilon\}$ représente le vecteur total de déformations, $\{d\varepsilon^p\}$ le vecteur de déformations plastiques et $[D]$ étant la matrice d'élasticité est donnée comme :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

avec :

E : Le module d'élasticité,

ν : Le coefficient de poisson.

L'équation (3-38) peut s'écrire sous la forme condensée comme :

$$\{d\sigma\} = [D]^{ep} \cdot \{d\varepsilon\} \quad (3-40)$$

Posant :

$$[D]^{ep} = [D] + [D]^p \quad (3-41)$$

avec :

$[D]^{ep}$: étant la matrice élastoplastique,

$[D]$: étant la matrice d'élasticité,

$[D]^p$: étant la matrice plastique.

L'équation constitutive de la fonction de charge s'exprime par la relation suivante :

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \{d\sigma\} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \cdot d\bar{\sigma} = 0 \quad (3-42)$$

En substituant la valeur de $\{d\sigma\}$ dans l'équation (3-42), on aura :

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} [D] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}) + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \cdot d\bar{\sigma} = 0 \quad (3-43)$$

En substituant $d\bar{\sigma}$ donnée par l'équation (3-13) dans l'équation précédente, on trouve :

$$-\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \cdot \mathbf{H} \cdot d\bar{\varepsilon}_p = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\})$$

L'équation (3-37) donne :

$$d\bar{\varepsilon}_p = \frac{A}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \cdot \{d\varepsilon^p\}$$

d'où :

$$-\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{A}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \{d\varepsilon^p\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\})$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{A}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \right) \{d\varepsilon^p\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \{d\varepsilon\}$$

ce qui donne :

$$\{d\varepsilon^p\} \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \{d\varepsilon\}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \omega} \right\}^T [D] - \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \mathbf{H} \frac{A}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}}} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{a}^T [D]}{\bar{a}^T [D] \bar{a} - A \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \mathbf{H}} \{d\varepsilon\} \quad (3-44)$$

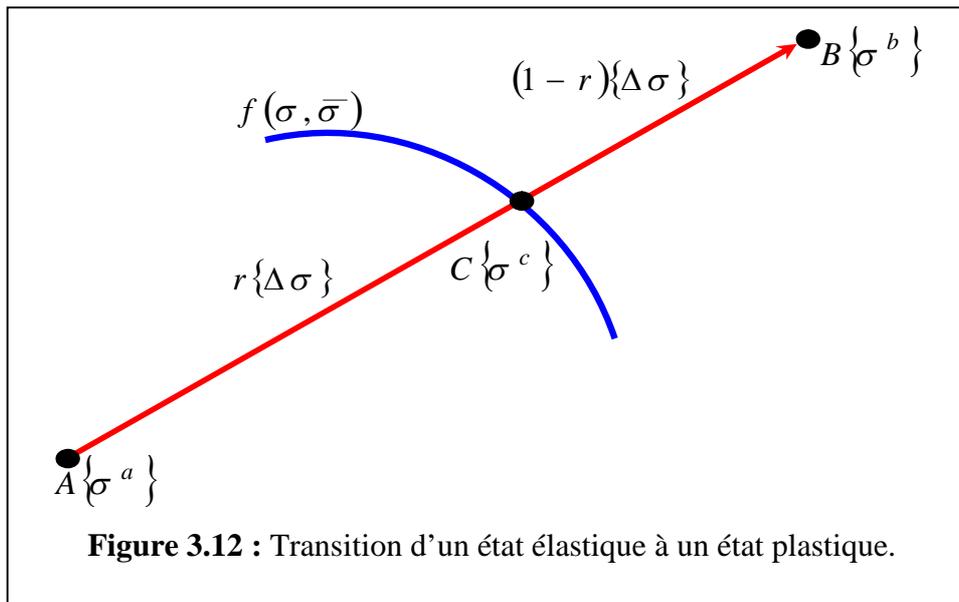
En substituant la valeur de $\{d\varepsilon^p\}$ dans l'équation (3-38), on trouve :

$$\{d\sigma\} = \left([D] - \frac{[D] \bar{a} \cdot \bar{a}^T [D]}{\bar{a}^T [D] \bar{a} - A \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \mathbf{H}} \right) \{d\varepsilon\} \quad (3-45)$$

D'où :

$$[D]^p = \frac{[D] \bar{a} \cdot \bar{a}^T [D]}{\bar{a}^T [D] \bar{a} - A \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \mathbf{H}} \quad (3-46)$$

Si la condition $f(\sigma) < 0$ n'est pas vérifiée alors le comportement du matériau devient plastique. Ceci est illustré graphiquement (figure 3.12), comme :



Considérant le comportement élastique au point A, la fonction de charge s'écrit :

$$f(\{\sigma^a\}, \bar{\sigma}) = f_0 < 0 \quad (3-47)$$

Après un certain nombre d'incrément de charges, l'état de contraintes peut atteindre le point C situé sur la surface ou le point B. la relation précédente devienne :

$$f(\{\sigma^b\}, \bar{\sigma}) = f_1 > 0 \quad (3-48)$$

Les conditions géométriques montrent que :

$$\{\sigma^c\} = \{\sigma^a\} + r \cdot \{\Delta\sigma\}$$

Au point C, la valeur de la fonction de charge est nulle ce qui donne :

$$f(\{\sigma^c\}, \bar{\sigma}) = f(\{\sigma\}, \bar{\sigma}) = f = 0$$

d'où :

$$f = f_0 + r \cdot (f_1 - f_0) = 0$$

Ce qui donne :

$$r = -\frac{f_0}{f_1 - f_0} \tag{3-49}$$

où r est un facteur scalaire obtenu par l'interpolation linéaire de la fonction de charge (Zienkiewicz et al.,1991) [38].

Une meilleure valeur de r est donnée dans par :

$$r_1 = r - \frac{f_2}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \{\Delta\sigma\}} \tag{3-50}$$

où :

$$f_2 = f(\{\sigma\} + r \cdot \{\Delta\sigma\}) \neq 0$$

$$\{\Delta\sigma\} = \frac{f(\{\partial\})}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{\sigma\}} \{\sigma\} \tag{3-51}$$

avec $\{\Delta\sigma\}$ étant un incrément de contraintes.

Les étapes de calcul utilisées pour l'évaluation du vecteur de contraintes résiduelles après plastification pour un point de Gauss sont données dans le chapitre 4.

3.2.3. Critère de rupture pour le béton

Pour le cas des pièces en béton armé, en général, la connaissance du comportement sous contraintes biaxiales est suffisante. La surface de rupture adoptée dans cette étude est celle de Kupfer [18] (Fig.3.2), et elle s'exprime en termes de contrainte de cisaillement octaédrale sous la forme suivante :

$$\tau_{oct} = a + b\sigma_{oct} \quad (3.52)$$

τ_{oct} est la contrainte de cisaillement octaédrale.

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (3.53)$$

σ_{oct} est la contrainte normale octaédrale.

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.54)$$

a et b sont des constantes déterminées expérimentalement.

Prenons (f_c) comme résistance à la compression uniaxiale du béton et (f_b) comme résistance à la compression équivalente sous une compression biaxiale $f_b = 1.16f_c$, et en définissant le rapport $m = f_t / f_c$, avec f_t est la résistance à la traction du béton. Les constantes a et b de l'équation (3.52) peuvent être établies comme suit :

Compression - Compression

- Pour la compression uniaxiale :

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} f_c \quad \text{et} \quad \sigma_{oct} = -\frac{f_c}{3}$$

d'où de l'équation (3.52), on obtient.

$$\frac{\sqrt{2}}{3} f_c = -b \frac{f_c}{3} + a \quad (3.55)$$

- Pour la compression biaxiale :

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} f_b \quad \text{et} \quad \sigma_{oct} = -\frac{2}{3} f_b$$

d'où

$$\frac{\sqrt{2}}{3} f_b = -\frac{2}{3} b f_b + a \quad (3.56)$$

Après résolution des équations (3.55) et (3.56), on trouve le critère de rupture du béton dans le cas de la compression biaxiale.

$$\frac{\tau_{oct}}{f_c} + 0,1714 \frac{\sigma_{oct}}{f_c} - 0,4143 = 0 \quad (3.57)$$

Traction - Compression

Les deux comportements sont découplés.

- Pour la traction uniaxiale :

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} f_t \quad \text{et} \quad \sigma_{oct} = \frac{f_t}{3}$$

d'où $\frac{\sqrt{2}}{3} f_t = b \frac{f_t}{3} + a$

ou bien $\frac{\sqrt{2}}{3} m f_t = \frac{b}{3} m f_t + a \quad (3.58)$

- Pour la compression uniaxiale :

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} f_c \quad \text{et} \quad \sigma_{oct} = -\frac{f_c}{3}$$

d'où $\frac{\sqrt{2}}{3} f_c = -b \frac{f_c}{3} + a \quad (3.59)$

En résolvant les équations (3.58) et (3.59), on obtient le critère de rupture dans le cas de traction - compression.

$$\frac{\tau_{oct}}{f_c} + \sqrt{2} \frac{1-m}{1+m} \frac{\sigma_{oct}}{f_c} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{1+m} = 0 \quad (3.60)$$

Le béton fissuré est traité comme un matériau orthotrope avec des axes orthotropes parallèles et normaux à la direction de la fissure [9,13]. L'effet de Poisson est négligeable à cause du manque d'interaction entre les deux directions orthogonales après fissuration. et le module d'élasticité du béton normal à la direction de la fissure est réduit à zéro.

L'une des plus importantes caractéristiques du béton est sa faible résistance à la traction qui donne naissance à la formation des fissures. Les lois constitutives formulées précédemment pour un béton sain ne sont plus valables lorsqu'il est fissuré. Par conséquent, il existe deux approches pour prendre en compte les phénomènes liés à la fissuration: l'approche de la **fissure discrète** et l'approche de la **fissure continue**.

3.3.2. Modèle de la fissure discrète

Le concept de la fissuration discrète (Fig.3.15) se distingue de tous les autres modèles de fissuration du béton car, dans cette approche, une discontinuité géométrique réelle est introduite dans le maillage d'élément finis à l'endroit de la fissure. Cette approche a été initialement développée par Ngo & Scordilis [26] qui ont modélisé la fissure en séparant par dédoublement des nœuds deux éléments ayant un coté en commun. Ce modèle possède deux inconvénients majeurs. Premièrement, il implique un chargement continu de la connexion des nœuds et de la topologie du maillage. Deuxièmement, le chemin de propagation de fissure doit nécessairement suivre les cotés des éléments, ce qui rend la solution fortement dépendante du maillage.

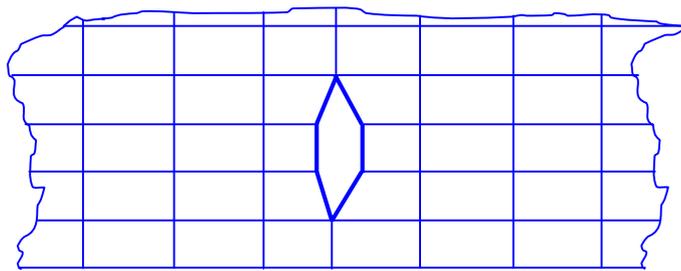


Fig. 3.15 : Représentation d'une fissure discrète

3.3.3. Modèle de la fissure continue (diffuse)

Le concept de la fissure diffuse (*smearred crack approach*) (Fig.3.16) n'introduit pas de discontinuité dans le maillage. Le béton est considéré comme un milieu continu et la fissuration est introduite en modifiant les propriétés du matériau à l'endroit de la fissure. Cette

approche, développée initialement par Rashid [29] , permet donc une description de l'endommagement du béton du à la fissuration, les axes d'orthotropie étant alignés avec la direction de la fissure. Comme les contraintes et les déformations sont évaluées aux points d'intégration, l'altération des propriétés du matériau affecte la région entourant ces points et diffuse les effets de la fissure dans cette région. Cette procédure est très attractive, non seulement parce qu'elle préserve la topologie originale du maillage d'éléments finis pendant toute l'analyse, mais aussi parce que seule la relation entre les contraintes et les déformations doit être actualisé après l'apparition d'une fissure.

Négliger le transfert des contraintes tangentielles à travers la fissure est une déficience du concept de la fissuration diffuse. Non seulement une telle hypothèse peut engendrer des difficultés d'ordre numérique, mais l'expérience a montré que des contraintes tangentielles peuvent apparaître dans le plan de rupture et qu'elles sont dues au contact d'aspérités entre les deux surfaces rugueuses opposées de la fissure.

Pour remédier à cela, Ngo and Scordelis [26] ont réinséré un pourcentage du module de cisaillement initial G dans le calcul du transfert de contraintes. Le facteur de réduction correspondant est appelé facteur de conservation de cisaillement, noté β .

Dans de nombreux modèles, le facteur de conservation de cisaillement β est constant et compris entre 0 et 1 [23,25,29,32]. Lorsque les faces de la fissure sont totalement séparées (plus d'aspérités ni de ligaments) le transfert de contrainte n'est plus possible. Ce modèle est retenu dans cette étude pour décrire le comportement de la fissuration du béton.

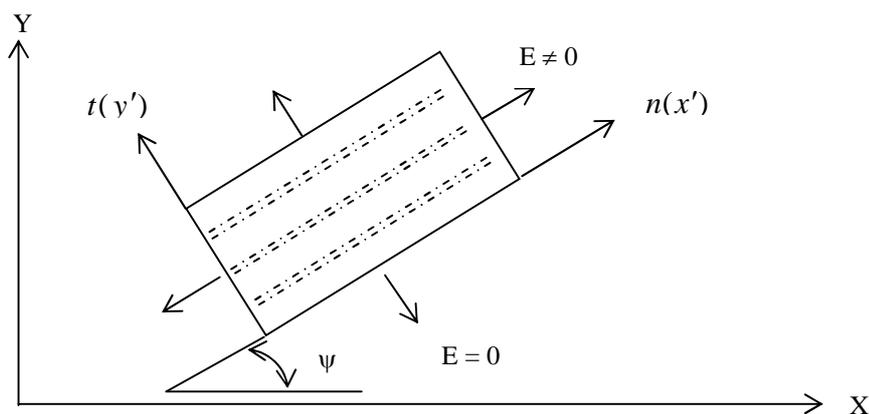


Fig. 3.16 : Représentation d'une fissure continue

3.3.4. Analyse de la traction

Lorsque la contrainte de traction dépasse la valeur limite de la résistance à la traction du béton, il se forme une ou plusieurs fissures. Après fissuration, le béton ne transmet plus de contraintes dans la direction normale à la fissure. La direction de la fissure est supposée normale à la direction de la contrainte principale. Deux fissures orthogonales peuvent se former si les deux contraintes principales dépassent la résistance à la traction du béton. La direction de la fissure est évaluée par la formule suivante:

$$\operatorname{tg}(2\psi) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad -45^\circ \leq \psi \leq 45^\circ \quad (3.62)$$

La direction de la fissure actuelle ψ_{cr} est calculée par rapport à l'axe X (figure 3.16) comme suit :

- calculer les contraintes principales avec l'expression standard suivante:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.63)$$

- calculer la contrainte normale associée à l'angle ψ par:

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \psi + \sigma_y \cdot \sin^2 \psi + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos \psi \cdot \sin \psi \quad (3.64)$$

- si $\sigma_n = \sigma_1$, l'angle de la fissure est : $\psi_{cr} = \psi + \pi/2$,

- si $\sigma_n = \sigma_2$, l'angle de la fissure est : $\psi_{cr} = \psi$.

3.3.5. Fissuration simple du béton

Le béton fissuré est traité comme un matériau orthotrope avec des axes d'orthotropie parallèles et normaux à la direction de la fissure. L'effet de Poisson est négligeable à cause du manque d'interaction entre les deux directions orthogonales après fissuration et le module d'élasticité du béton normal à la direction de la fissure est réduit à zéro. Les contraintes totales après fissuration sont données par rapport aux axes de coordonnées locales (n,t) par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} = [D_c] \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

avec :

E_b : est le module d'élasticité du béton,

β : est le facteur de conservation de cisaillement de béton ($0 < \beta < 1$),

G : est le module de cisaillement du béton,

$[D_c]$: la matrice d'élasticité après fissuration dans repère local (n,t)

Afin de transformer les contraintes du béton d'un repère local à un repère global (Fig.16), on utilise la procédure suivante :

$$[D] = [P]^T \cdot [D_c] \cdot [P] \quad (3.66)$$

avec :

$$[P] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & c \cdot s \\ s^2 & c^2 & -c \cdot s \\ -2 \cdot c \cdot s & 2 \cdot c \cdot s & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$c = \cos \psi, s = \sin \psi$$

$[D]$: la matrice d'élasticité après fissuration dans le repère global (X,Y)

le vecteur résiduel de contraintes après fissuration est donné par la relation suivante :

$$\{\sigma_0\} = \left([I] - \begin{bmatrix} c^4 & c^2 \cdot s^2 & 2 \cdot s \cdot c^3 \\ c^2 \cdot s^2 & s^4 & 2 \cdot s^3 \cdot c \\ c^3 \cdot s & c \cdot s^3 & 2 \cdot s^2 \cdot c^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.68)$$

Avec :

$\{\sigma_0\}$: vecteur de contraintes ajustées après fissuration,

$[I]$: matrice identique d'ordre 3×3 .

La relation incrémentale (contraintes vs déformation) dans le béton fissuré est donnée comme suit:

$$\{d\sigma\} = [D_c] \{d\varepsilon\} \quad (3.69)$$

Les contraintes totales libérées après fissuration $\{\sigma_0\}$ seront distribuées dans les éléments adjacents (Fig.3.17).

La variation totale des contraintes sera donc:

$$\{\Delta\sigma\} = \{d\sigma\} - \{\sigma_0\} = [D_c] \{d\varepsilon\} - \{\sigma_0\} \quad (3.70)$$

Avec:

$[D_c]$: Matrice de rigidité du béton fissuré.

$\{\sigma_0\}$: Contraintes libérées après fissuration du béton.

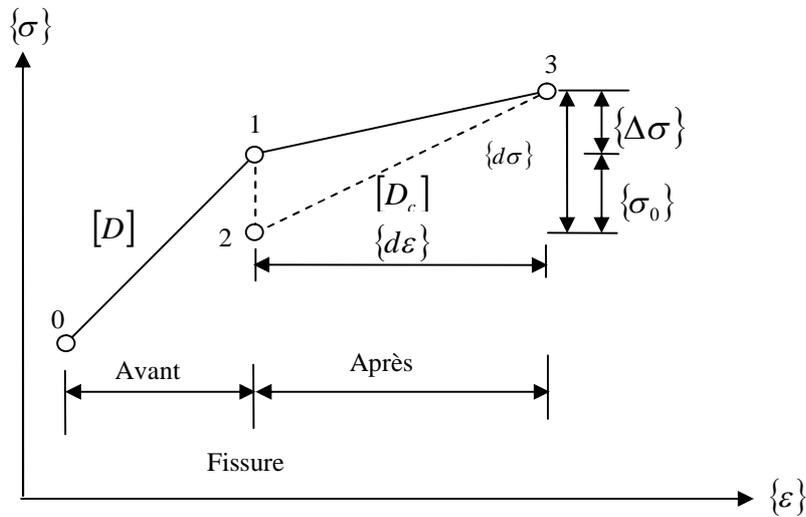


Fig. 3.17: Modèle (contraintes - déformations) du béton fissuré

3.3.6. Fissuration double au béton

Le béton peut se fissurer selon deux directions orthogonales si les deux contraintes principales sont de traction et excèdent la résistance à la traction du béton, (Fig.3.18). Dans ce cas la relation contraintes - déformations est donnée par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

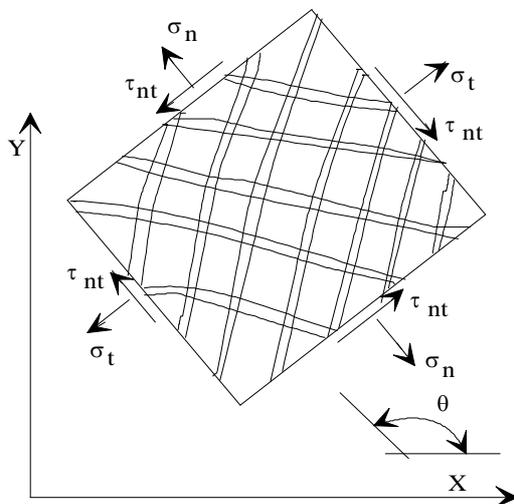


Fig.3.18 : Contraintes dans le béton doublement fissuré

Afin de transformer les contraintes dans le béton fissuré simplement ou doublement, et qui sont définies par rapport aux axes d'orthotropie dans le système de coordonnées globales (X, Y), en utilisant la procédure standard qui s'écrit comme suit:

$$[D_c^*] = T^T D_c T \quad (3.72)$$

où

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Où $C = \cos\theta_{cr}$, $S = \sin\theta_{cr}$ et θ_{cr} est l'angle de la fissuration par rapport à l'axe (X), et $[D_c]$ est la propriété matérielle dans les axes locaux d'orthotropie et dépend du type de fissuration du béton, qui est donnée par les formules (3.65) et (3.71).

Les contraintes finales dans le système de coordonnées globales (X, Y) peuvent être obtenues avec l'équation suivante:

$$\{\sigma\} = [D_c^*]\{\varepsilon\} \quad (3.74)$$

Les étapes de calcul utilisées pour l'évaluation du vecteur de contraintes résiduelles après fissuration sont données dans la section programmation.

3.4. Modélisation des armatures

Le comportement symétrique de l'acier en traction et en compression est approché par un modèle élastique parfaitement plastique.

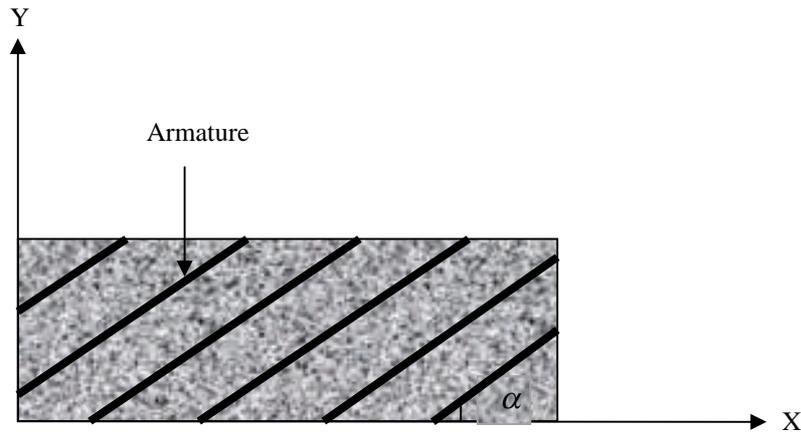


Fig. 3.19 : Représentation répartie des armatures

La disposition dense des armatures dans le béton conduit nécessairement à une densification du maillage et par conséquent alourdit considérablement le calcul. Cependant, une alternative consiste à supposer les armatures uniformément réparties (fig.3.19) [29,30,31] dans la masse du béton et considérer l'acier comme matériau ne travaillant que suivant la direction des barres.

La matrice d'élasticité de l'acier est obtenue de la même manière que la matrice d'élasticité du béton après fissuration et est exprimé par :

$$[D_s] = \rho \cdot E_s \cdot \begin{bmatrix} c^4 & c^2 \cdot s^2 & 2 \cdot s \cdot c^3 \\ c^2 \cdot s^2 & s^4 & 2 \cdot s^3 \cdot c \\ c^3 \cdot s & c \cdot s^3 & 2 \cdot s^2 \cdot c^2 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

où $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$ et α est l'angle que fait l'axe de la barre avec l'axe X, E_s est le module d'élasticité de l'acier, ρ est le pourcentage d'armatures dans la section du béton.

3.5. Méthode d'analyse non linéaire

Généralement, les matériaux solides sont considérés comme matériaux à comportement linéaire élastique. Cette approximation n'est pas pleinement justifiée pour des applications techniques avancées ; donc, il est nécessaire de prendre en compte le

comportement non linéaire et l'irréversibilité des déformations. En mécanique des structures, un problème est non linéaire si la matrice de rigidité ou le vecteur chargement dépend des déplacements. Dans les problèmes linéaires, la solution était toujours unique, il n'en est plus de même dans la plupart des problèmes non linéaires. Ainsi si l'on obtient une solution ce n'est pas nécessairement la bonne. L'analyste doit comprendre avant tout le problème physique et se mettre au courant de diverses stratégies de résolution. Une stratégie unique ne donnera pas forcément de bons résultats et peut être inefficace pour certains types de problèmes. Il n'existe pas de méthodes directes de résolution de ces systèmes. Ces derniers sont solutionnés par la résolution de plusieurs problèmes linéaires successifs où les conditions de non linéarité sont respectées pour certaines tolérances.

Dans l'analyse des structures, le comportement non linéaire est dû essentiellement à deux types de non linéarité. La solution non linéaire est souvent obtenue par l'une des méthodes itératives du paragraphe suivant.

3.5.1. Méthodes de résolution des problèmes non linéaires

La méthode purement incrémentale constitue une linéarisation par intervalles de la réponse de la structure sans itérations sur l'équilibre, ce qui peut conduire à un écart considérable de la réalité par accumulation des erreurs (Figure 3.20a).

Selon la méthode itérative on fixe le niveau de chargement et on itère le champ des déplacements jusqu'à l'équilibre en redistribuant les efforts non-équilibrés (résidus). Les itérations peuvent s'effectuer en utilisant la matrice de rigidité tangente (méthode Newton-Raphson standard, Figure 3.20b) ou initiale (méthode N-R modifiée, Figure 3.20c), ou une approximation de la matrice tangente ou de son inverse (méthodes quasi-Newton,).

Enfin, la combinaison des deux donne la méthode incrémentale avec itérations à l'équilibre ou mixte (Figure 3.20 d).

Les stratégies mentionnées ci-dessus, que nous pouvons appeler "classiques" , sont utilisées dans la plupart des codes non-linéaires d'éléments finis.

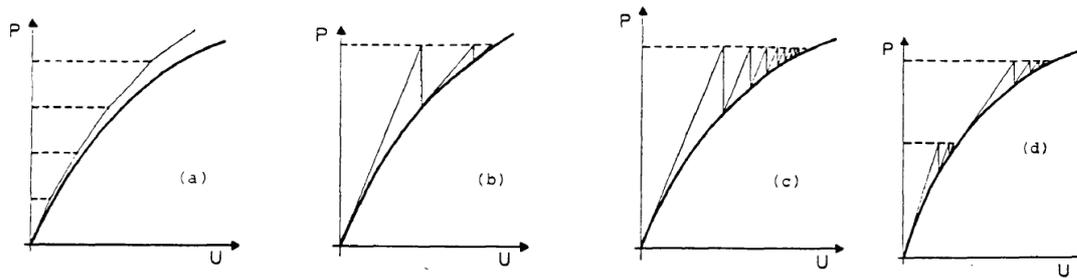


Figure 3.20 : Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires

- (a) méthode purement incrémentale
- (b) méthode Newton-Raphson standard
- (c) méthode Newton-Raphson modifiée
- (d) méthode mixte

Dans ce qui suit, on donne les étapes de calcul utilisées ce qui contribuera à une meilleure compréhension en cas d'une éventuelle utilisation future.

3.5.2. Structure du programme

Les étapes de calcul utilisées sont les suivantes :

- 1- introduction des données nécessaires pour le maillage
 - 2- introduction des conditions aux limites
 - 3- génération du maillage en tenant compte des aciers longitudinaux et verticaux. [Les instructions 1, 2 et 3 sont réalisées par le **module 1**]
 - 4- appliquer un incrément de charge Δf_i
 - 5- début de la procédure itérative (Newton Raphson)
 - 6- analyse par la méthode des éléments finis [L'instruction 6 est réalisée par le **module 2**]
 - 7- évaluer le vecteur de contraintes résiduelles, $\{ \sigma_0 \}$, et le vecteur des forces résiduelles, $\{ f_0 \}$, [L'instruction 7 est réalisée par le **module 3**]
 - 8- calculer la norme du vecteur de forces résiduelles, $\{ f_0 \}$
- Si la norme de $\{ f_0 \}$ est inférieure à la tolérance. La convergence est vérifiée. Si le chargement final n'est pas atteint, appliquer un nouvel incrément. Répéter les étapes précédentes à partir de (4).

- Si la norme de $\{f_0\}$ est supérieure à la tolérance. La convergence n'est pas vérifiée et le nombre d'itération maximum n'est pas atteint, répéter les étapes précédentes à partir de (5)
 - Si le nombre d'itérations maximum est atteint, ce qui correspond au palier horizontal de la courbe charge - déplacement, alors la charge ainsi trouvée correspond à la charge ultime.
- 9- affichage des résultats.

3.5.3. Descriptions des modules

3.5.3.1. Génération du maillage (module 1)

L'un des inconvénients majeurs de l'utilisation la méthode des éléments réside dans la l'élaboration des données. Ces données comprennent les numérations des éléments et des nœuds, la table de connectivité des éléments, les coordonnées cartésiennes des nœuds ainsi que les conditions aux limites. De ce fait, un générateur de maillage est utilisé. Il permet de minimiser la demi-largeur de bande et d'inclure les conditions aux limites les plus diverses telles que les déplacements imposés. Il est basé sur la méthode de génération par super éléments initialement développée par Zienkiewicz et all [28] dont le principe de base peut se résumer comme suit : "à l'aide d'une transformation géométrique, le super élément est transformé en un carré de référence; le maillage est réalisé sur celui ci pour être ensuite transformé via la transformation inverse au super élément"

3.5.3.2. Assemblage des matrices de rigidités et résolution du système d'équations (module 2)

Cette partie est détaillée dans Smith et Griffiths [35]. Elle calcule la matrice de rigidité de chaque élément et l'assemble dans le vecteur qui contient la matrice de rigidité globale. Le système d'équations résultant est résolu avec la méthode de Gauss.

3.5.3.3. Analyse non linéaire (module 3)

Pour chaque élément

- calculer le vecteur incrémental du déplacement $\{\Delta\delta_i\}$ correspondant à l'incrément de charge Δf_i ,

Pour chaque point de Gauss

- calculer le vecteur incrémental de déformations, $\{\Delta \varepsilon^e\}$, et de contraintes, $\{\Delta \sigma^e\}$, correspondant,
- calculer le vecteur total de contraintes par addition des valeurs incrémentales aux valeurs précédentes : $\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + \{\Delta \sigma^e\}$,
- calculer les contraintes principales σ_1 et σ_2 et la direction principale ψ ,
- vérifier l'état de contraintes :

Si l'état de contraintes est en (compression – compression) ou (tension – compression) alors le comportement est gouverné par la plasticité. Sinon (tension-tension), il est gouverné par la fissuration.

Calcul à la plasticité du béton

- si $\sigma_1 < 0$ ou $\sigma_2 < 0$, on calcule la valeur de la fonction de charge, f_1 , correspondant au vecteur de contraintes $\{\sigma_i\}$,
- initialement, on pose : $f_0 = 0$ et $r = 0$
- si $f_1 > 0$ et $f_0 < 0$, on calcule la valeur de r par son expression analytique,
- évaluer la nouvelle quantité : $\{\sigma_n\} = \{\sigma_{n-1}\} + r \cdot \{\Delta \sigma^e\}$,
- évaluer la nouvelle valeur de critère $f(\{\sigma_n\})$, le vecteur normal à la surface de charge $\frac{\partial f}{\partial \{\sigma_n\}}$ et la matrice de plasticité $[D]^p$,
- déterminer la nouvelle valeur de r : $r_1 = 1 - r$,
- calculer la quantité : $\{\varepsilon_n\} = \{\varepsilon_{n-1}\} + r_1 \cdot \{\Delta \varepsilon^e\}$,
- évaluer le vecteur de contraintes résiduelles : $\{\sigma_0\} = [D]^p \cdot \{\varepsilon_n\}$.
- sinon le vecteur de contraintes résiduelles, $\{\sigma_0\}$, dû à la plasticité est nul.

Calcul à la fissuration du béton

- si $\sigma_1 > f_t$, on forme la nouvelle matrice d'élasticité du béton par son expression analytique (3.65) et on calcule le vecteur de contraintes résiduelles $\{\sigma_0\}$ par l'équation (3.68).
- sinon le vecteur de contraintes résiduelles, $\{\sigma_0\}$, dû à la fissuration est nul.

Plasticité des armatures

Si un élément est armé, on ajoute à la rigidité du béton celle liée à l'acier. Comme l'acier est caractérisé par un même comportement en tension et en compression, donc il est nécessaire de vérifier son comportement à la plasticité. Pour cela, un modèle linéaire élastique parfaitement plastique est utilisé. Si la contrainte uniaxiale dépasse la valeur de la contrainte limite d'élasticité de l'acier, l'armature se plastifie et le vecteur résiduel de contraintes résultant s'ajoute à celui du matériau béton.

Une fois que la composante du vecteur de contraintes résiduelles, $\{\sigma_0\}$, pour le béton fissuré ou plastifié et de l'acier est connue en chaque point de Gauss, on calcule le vecteur de forces résiduelles, $\{f_0\}$, pour chaque élément par l'expression suivante : $\{f_0\} = \int B^T \{\sigma_0\} dV$. En suite, on assemble le vecteur global des forces résiduelles qui sera redistribué aux éléments moins sollicités tout en mettant à jour les matrices de rigidités.

CHAPITRE 4

PROGRAMMATION

4-1 INTRODUCTION

Une analyse non linéaire par la méthode des éléments finis est utilisée pour simuler le comportement des matériaux fragiles chargés dans leur plan en vue d'évaluer leur capacité portante de charge.

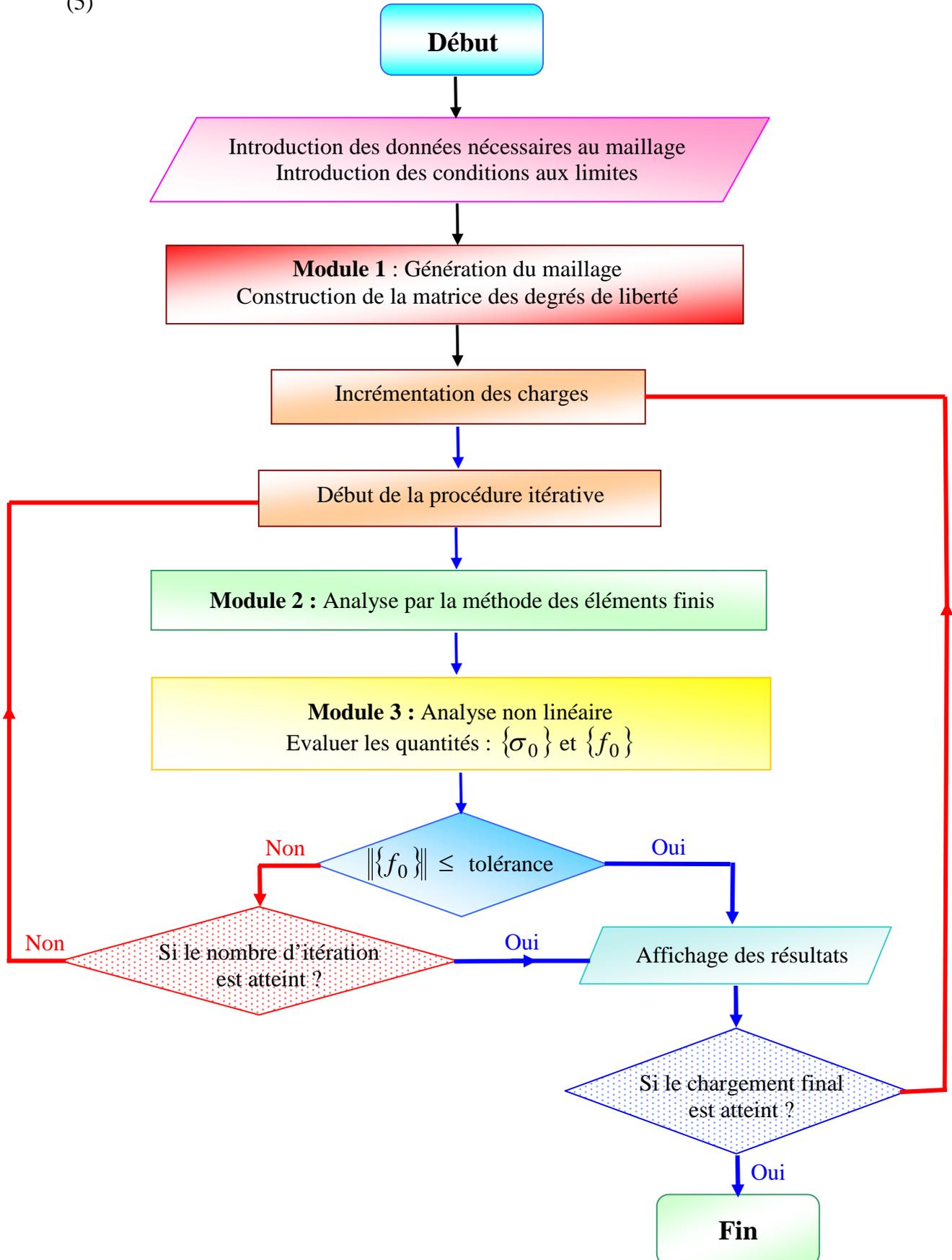
Dans ce qui suit, on donne les étapes de calcul et la signification des différents sous programmes utilisés. Ceci contribuera à une meilleure compréhension en cas d'une éventuelle utilisation future.

4-2 STRUCTURE DU PROGRAMME

Les étapes de calcul utilisées sont les suivantes :

- 1- introduction des données nécessaires pour le maillage
 - 2- introduction des conditions aux limites
 - 3- génération du maillage. [Les instructions 1, 2 et 3 sont réalisées par le **module 1**]
 - 4- appliquer un incrément de charge Δf_i
 - 5- début de la procédure itérative (Newton Raphson)
 - 6- analyse par la méthode des éléments finis [L'instruction 6 est réalisée par le **module 2**]
 - 7- évaluer le vecteur de contraintes résiduelles, $\{\sigma_0\}$, et le vecteur des forces résiduelles, $\{f_0\}$, [L'instruction 7 est réalisée par le **module 3**]
 - 8- calculer la norme du vecteur de forces résiduelles, $\{f_0\}$,
- Si la norme de $\{f_0\}$ est inférieure à la tolérance. La convergence est vérifiée. Si le chargement final n'est pas atteint, appliquer un nouveau incrément. Répéter les étapes précédentes à partir de (4).

- Si la norme de $\{f_0\}$ est supérieure à la tolérance. La convergence n'est pas vérifiée et le nombre d'itération maximum n'est pas atteint, répéter les étapes précédentes à partir de (5)



Organigramme 1 : Etapes de calcul du programme d'analyse non linéaire.

- Si le nombre d'itérations maximum est atteint, ce qui correspond au palier horizontal de la courbe charge - déplacement, alors la charge ainsi trouvée correspond à la charge ultime.

9- affichage des résultats.

4-3 DESCRIPTION DES MODULES

4-3-1 Module 1 : Génération du maillage

4-3-1-1 Généralités

L'un des inconvénients majeurs de l'utilisation de la méthode des éléments réside dans la l'élaboration des données à utiliser par le code de calcul proprement dit. Ces données comprennent les numérations des éléments et des nœuds, la table de connectivité des éléments, les coordonnées cartésiennes des nœuds ainsi que les conditions aux limites. En effet, ces données nécessitent beaucoup de temps à préparer. De plus, le risque d'erreur dans leur élaboration est fonction de leur volume. De ce fait, les générateurs automatiques de maillage sont non seulement utiles mais très importants pour l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Un générateur de maillage utilisant l'élément isoparamétrique à huit (8) nœuds est présenté dans ce travail. Il permet de minimiser la demi-largeur de bande et d'inclure les conditions aux limites les plus diverses telles que les déplacements imposés. Il est basé sur la méthode de génération par super éléments initialement développée par Zienkiewicz et Phillips [20] dont le principe de base peut se résumer comme suit : "*à l'aide d'une transformation géométrique, le super élément est transformé en un carré de référence; le maillage est réalisé sur celui ci pour être ensuite transformé via la transformation inverse au super élément*".

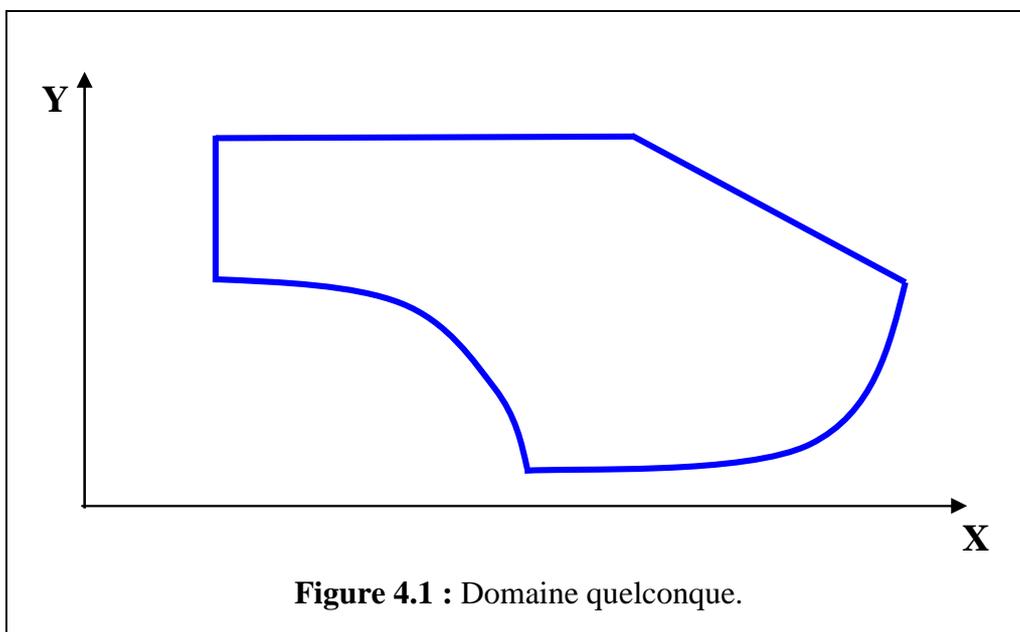
L'avantage de l'utilisation de l'élément isoparamétrique à huit nœuds réside dans sa capacité à représenter correctement les frontières courbes.

Le code présenté dans ce travail fonctionne pour un nombre inférieur ou égal à trois super éléments. Ce qui est largement suffisant pour les problèmes courants rencontrés en pratique.

GENERATION PAR SUPER ELEMENT

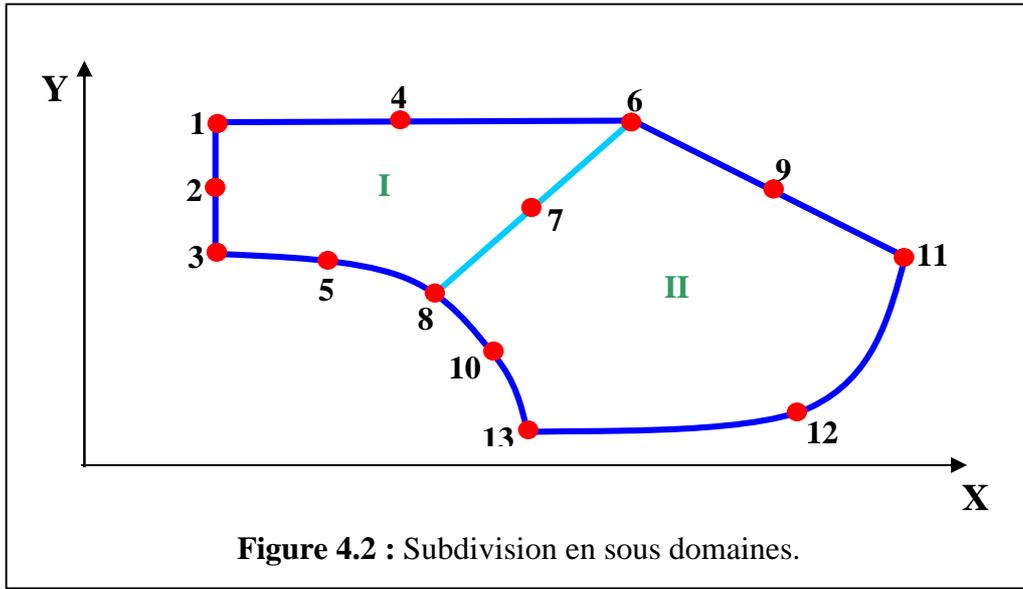
Principe et étapes de maillage

Soit à mailler avec un élément Q8 (isoparamétrique à 8 nœuds) le domaine représenté sur la figure suivante :



- *Première étape*

La première étape consiste à diviser le domaine précédent en un nombre inférieur ou égal à trois sous domaines (super éléments) tel que représenté sur la figure suivante :



• *Deuxième étape*

La deuxième étape consiste à relever dans deux tableaux les coordonnées géométriques des nœuds et la connectivité des super éléments comme suit :

	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3	Nœud 4	Nœud 5	Nœud 6	Nœud 7	Nœud 8
Super élément I	1	2	3	5	8	7	6	4
Super élément II	6	7	8	10	13	12	11	9

Tableau 4.1 : Connectivité des super éléments.

Noeud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
X	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃
Y	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	Y ₆	Y ₇	Y ₈	Y ₉	Y ₁₀	Y ₁₁	Y ₁₂	Y ₁₃

Tableau 4.2 : Coordonnées géométriques des noeuds.

• *Troisième étape*

La troisième étape consiste à transformer chaque super élément en un carré de référence via la transformation suivante [5, 8] :

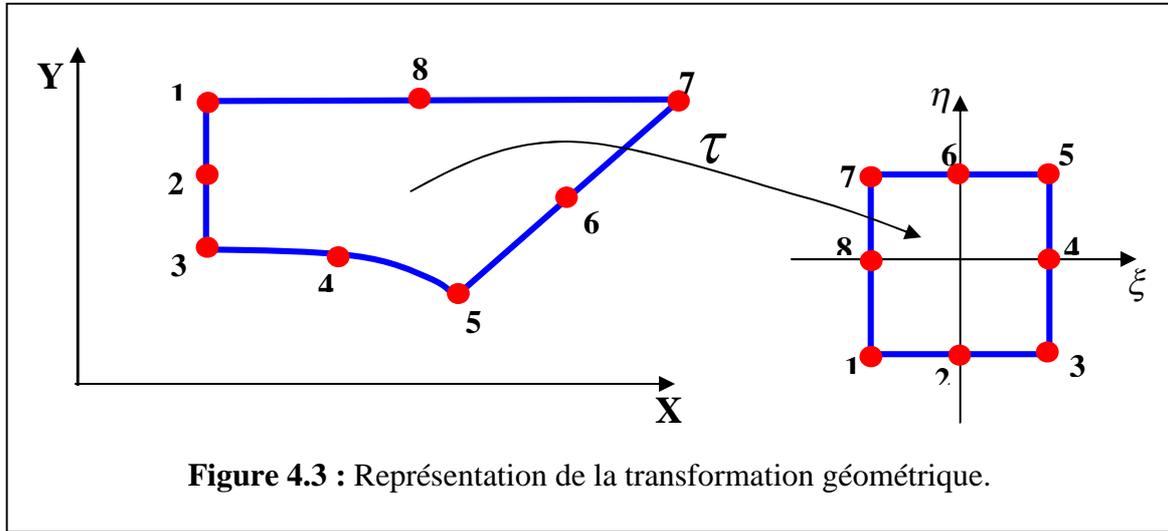


Figure 4.3 : Représentation de la transformation géométrique.

La représentation analytique de la transformation géométrique est donnée par :

$$X = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) X_i$$

$$Y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) Y_i$$

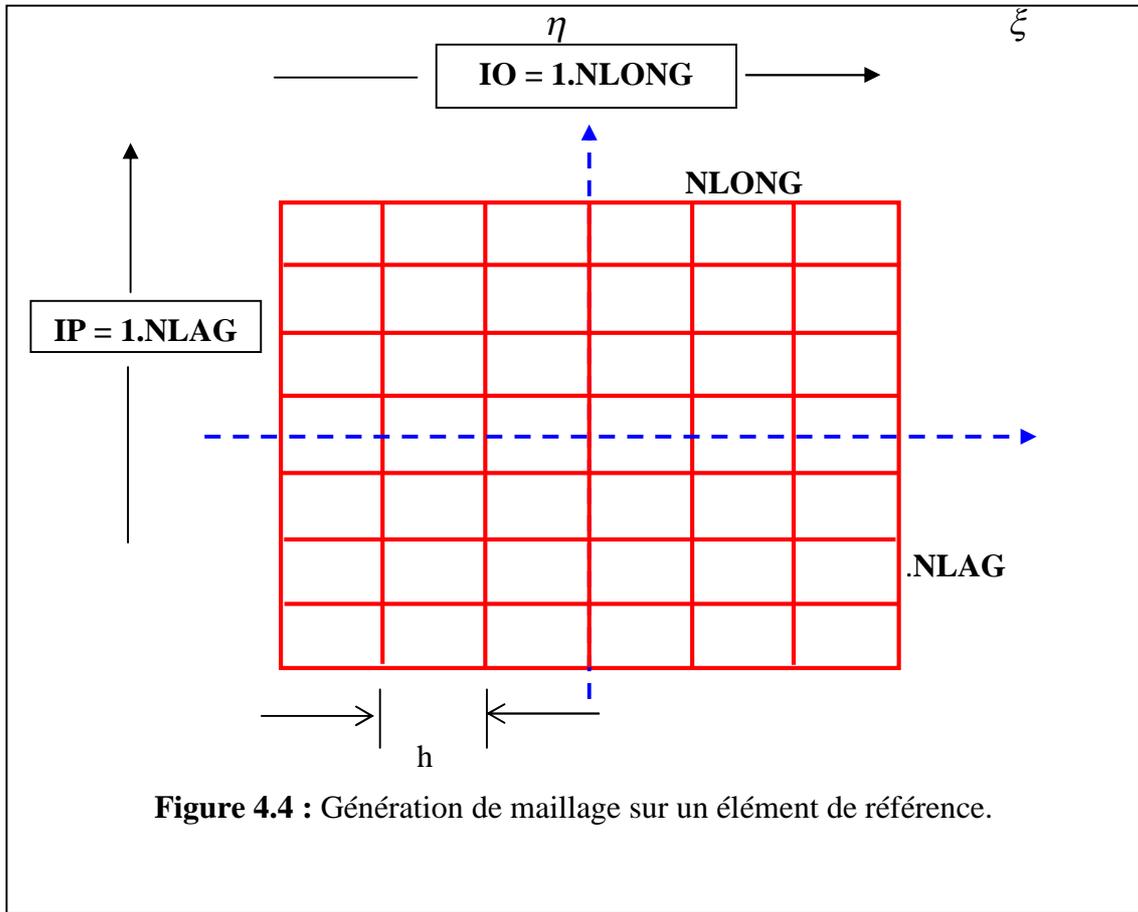
Où :

- X et Y représentent les coordonnées d'un point quelconque du super élément qu'on appelle aussi élément parent et ξ et η les coordonnées du point correspondant du carré de référence,
- Les X_i et Y_i sont les coordonnées cartésiennes des nœuds de l'élément parent,
- Les coordonnées ξ et η varient de -1 à +1,
- Les fonctions $N_i(\xi, \eta)$ sont les fonctions de forme d'un élément isoparamétrique à huit nœuds [5,8].

• *Quatrième étape*

La quatrième étape consiste à réaliser le maillage sur l'élément de référence de la manière suivante :

- Le nombre d'élément suivant la largeur NLAG et suivant la longueur NLONG ainsi que la taille de la maille H sont choisis par l'utilisateur.



- **Cinquième étape**

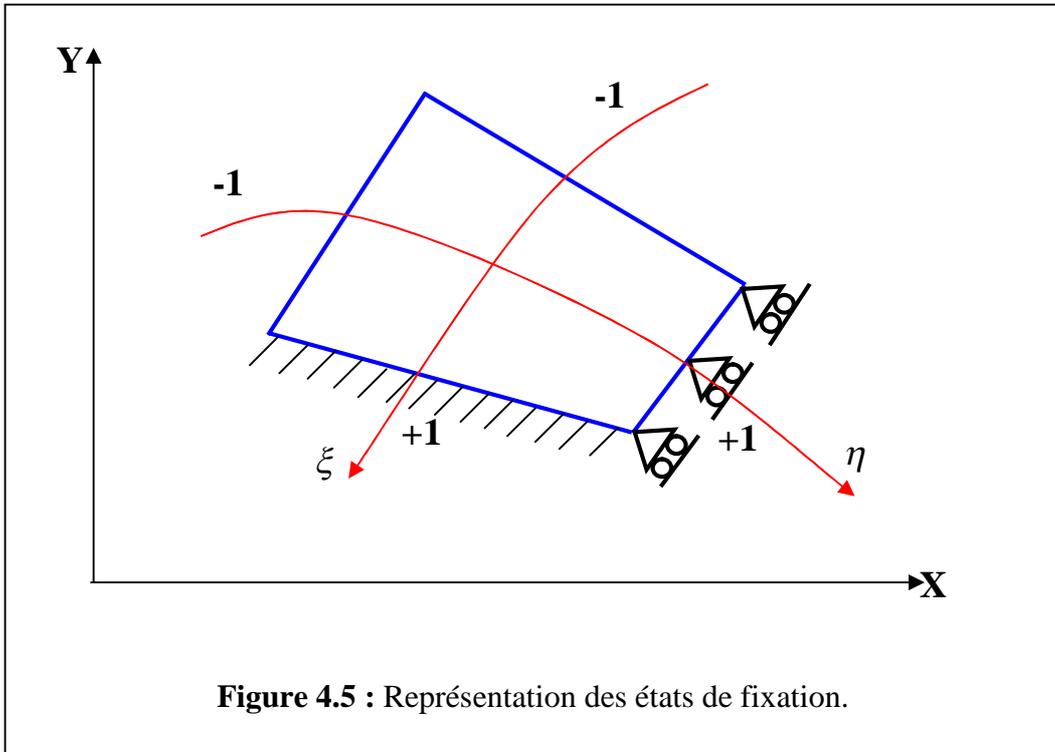
La cinquième étape consiste à utiliser la transformation inverse pour trouver les coordonnées des nœuds sur l'élément parent.

- **Sixième étape**

La sixième étape consiste à former la matrice des degrés de liberté [NF]. Les conditions aux limites sont les états de fixation des cotés de chaque sous domaine et sont introduites numériquement comme suit :

- le degré de liberté actif = 1,
- le degré de liberté inactif = 0.

Il est plus simple d'illustrer l'introduction des conditions de fixation moyennant cet exemple :



	$\xi = +1$		$\eta = +1$		$\xi = -1$		$\eta = -1$	
Suivant l'axe :	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
Ncf (8)	0	0	0	1	1	1	1	1

Tableau 4.3 : Conditions aux limites.

Avec Ncf (8) représente le vecteur contenant les degrés de liberté de chaque coté du sous domaine.

Les opérations suivantes sont réalisées au fur à mesure que les éléments sont générés :

- les nœuds et les éléments sont numérotés suivant le cote ayant peu d'éléments et leurs coordonnées sont stockées dans la matrice GEOMG(igeom,2),
- la connectivité entre éléments est générée et stockée dans la matrice LCONNEC(ielem,8),

- calcule le nombre total de nœuds,
- calcule le nombre total d'éléments.

Une fois que la matrice des degrés de liberté [NF] est initialisée à 1 et les vecteurs contenant les conditions de fixation de chaque sous domaine sont introduits, la subroutine MAP8XY forme la matrice [NF]. Les degrés de liberté sont comptés et des numéros successifs leurs sont assignés à l'intérieur même de la matrice [NF] ce qui facilitera sans doute l'évaluation du nombre de degrés de liberté actifs N.

4-3-2 Module 2 : Assemblage des matrices de rigidités et résolution du système d'équations

Cette partie est détaillée dans Smith et Griffiths [35]. Elle calcule la matrice de rigidité de chaque élément et l'assemble dans le vecteur qui contient la matrice de rigidité globale. Le système d'équations résultant est résolu avec la méthode de Gauss.

4-3-3 Module 3 : Analyse non linéaire

- *Pour chaque élément*

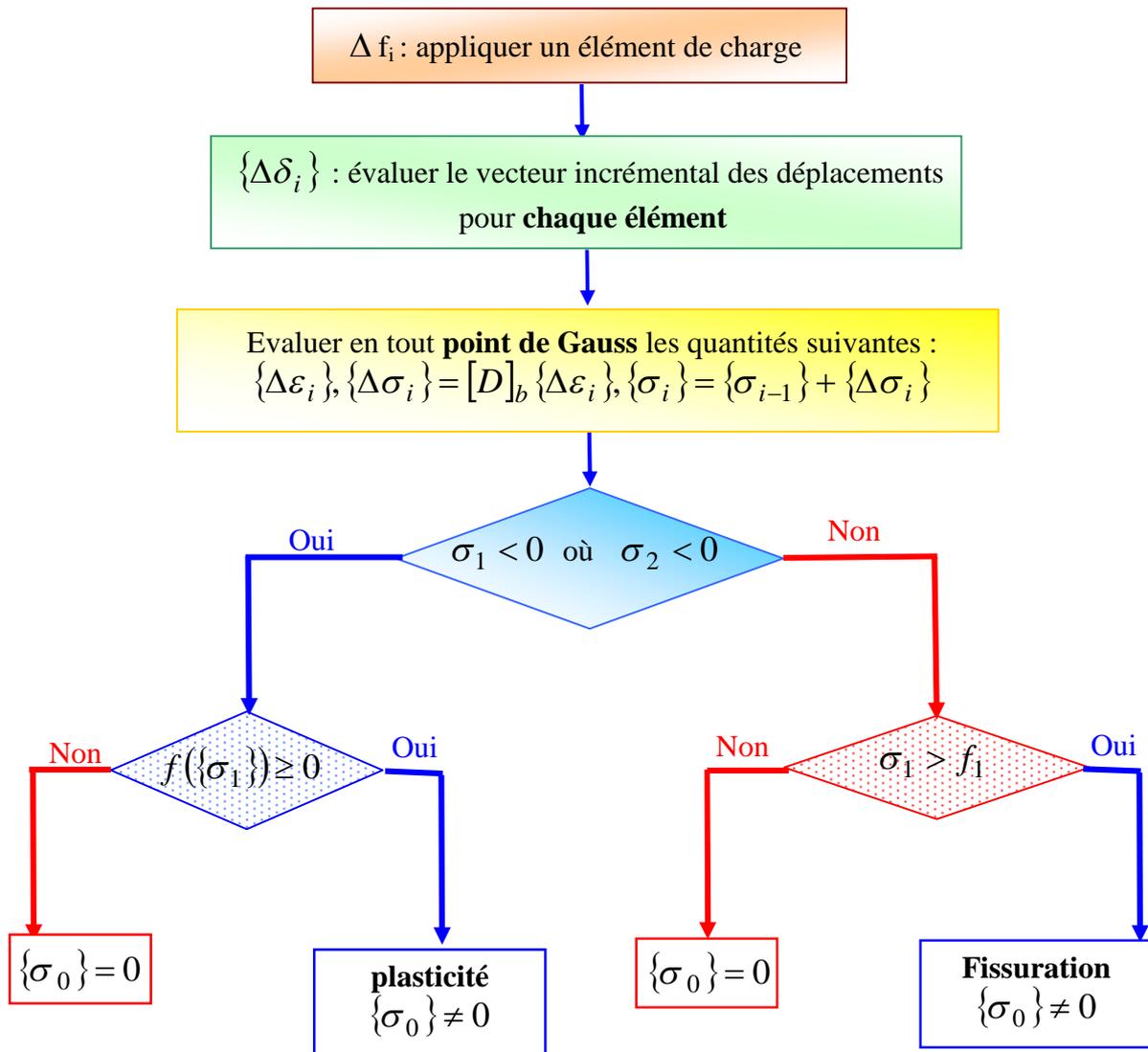
- calculer le vecteur incrémental du déplacement $\{\Delta \delta_i\}$ correspondant à l'incrément de charge Δf_i ,

- *Pour chaque point de Gauss*

- calculer le vecteur incrémental de déformations, $\{\Delta \varepsilon^e\}$, et de contraintes, $\{\Delta \sigma^e\}$ correspondant,
- calculer le vecteur total de contraintes par addition des valeurs incrémentales aux valeurs précédentes : $\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + \{\Delta \sigma^e\}$,
- calculer les contraintes principales et la direction principale Ψ ,
- vérifier l'état de contraintes :
Si l'état de contraintes est en compression – compression ou tension – compression alors le comportement est gouverné par la plasticité. Sinon (tension – tension), il est gouverné par la fissuration.

Calcul à la plasticité du matériau

- si $\sigma_1 < 0$ ou $\sigma_2 < 0$, on calcule la valeur de la fonction de charge, f_1 , correspondant au vecteur de contraintes,
- initialement, on pose : $f_0 = 0$ et $r = 0$,
- si $f_1 > 0$ et $f_0 < 0$, on calcule la valeur de r par son expression analytique (3- 49),
- évaluer la nouvelle quantité : $\{\sigma_n\} = \{\sigma_{n-1}\} + r \cdot \{\Delta\sigma^e\}$,



Organigramme 2 : Etapes de calcul du vecteur de contraintes résiduelles dû à la fissuration où à la plasticité du matériau.

- évaluer la nouvelle valeur de critère $f(\{\sigma_n\})$, le vecteur normal à la surface de charge $\frac{\partial f}{\partial \{\sigma_n\}}$ et la matrice de plasticité $[D]^p$,
- déterminer la nouvelle valeur de r : $r_1 = 1 - r$,
- calculer la quantité : $\{\varepsilon_n\} = \{\varepsilon_{n-1}\} + r_1 \cdot \{\Delta \varepsilon^e\}$,
- évaluer le vecteur de contraintes résiduelles : $\{\sigma_0\} = [D]^p \cdot \{\varepsilon_n\}$,
- sinon le vecteur de contraintes résiduelles, $\{\sigma_0\}$, dû à la plasticité est nul.

Calcul à la fissuration

- $\sigma_1 > f_t$, on forme la nouvelle matrice d'élasticité du matériau par son expression analytique (3 - 65) et on calcule le vecteur de contraintes résiduelles $\{\sigma_0\}$ par l'équation (3 - 68).
- sinon le vecteur de contraintes résiduelles, $\{\sigma_0\}$ dû à la fissuration est nul.

4-4 DESCRIPTION DES SOUS PROGRAMMES

Dans cette section, on présente quelques sous-routines principales :

- MAILLE** : sous-routine qui réalise le maillage.
- DBAND** : calcule la largeur de la demi – bande de la matrice de rigidité globale.
- ELQ8N** : elle donne les coordonnées x et y des huit nœuds d'un élément et forme le vecteur LG qui contient les numéros des degrés de liberté de ses nœuds.
- FMQUAD** : évaluation pour un élément à huit nœuds des fonctions d'interpolation nodales et leurs dérivées par rapport à ξ et η .
- TWOBY2** : calcule le déterminant et l'inverse du Jacobien.
- FORMB** : forme la matrice de déformations pour un élément fini à partir des dérivées des fonctions de forme par rapport aux coordonnées x et y .
- FORMKV** : assemble la matrice de rigidité globale à partir des matrices de rigidité des éléments et la stocke dans un vecteur SKV.
- GAUSS** : est utilisée pour l'intégration numérique de Gauss Legendre.

BANRED : fait la triangularisation de la matrice de rigidité SKV.

BACSUB : fait la résolution du système d'équations linéaires par la substitution en arrière.

CRITERE_SIG : vérifié les états de contraintes et elle calcule le vecteur de contraintes résiduelles.

CONCLUSION

Ce chapitre décrit un algorithme d'analyse non linéaire des matériaux fragiles. Ce dernier comprend un mailleur automatique utilisant un élément isoparamétrique à huit nœuds qui permet non seulement de minimiser la demi largeur de bande mais aussi d'inclure des conditions aux limites les plus diverses tels les déplacements imposés. De plus, la partie non linéaire est détaillée dans un module à part. celle ci incluse une méthode itérative de type Newton- Raphson. En dernier, une nomenclature de sousroutines essentielles est présentée.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS ET DISCUSSION DES RESULTATS

5.1 Validation et exemples d'application numériques

Le modèle élaboré pour le calcul plan des structures en béton armé par la méthode des éléments finis est appliqué à l'étude d'un panneau [4] en béton armé soumis à une charge concentrée en son milieu (Fig.5.1), et d'une poutre isostatique [31] dont les dimensions, le ferrailage, et le chargement sont illustrés dans la Figure 5.5. Pour des raisons de symétrie, seule la moitié du panneau et de la poutre est modélisée.

Les Figures 5.2, 5.3, 5.6 et 5.7 présentent la réponse des éléments (panneau et poutre isostatique) en termes de diagramme liant la flèche de l'élément à l'effort appliqué et comparent les résultats numériques aux résultats expérimentaux.

L'allure générale des résultats numériques s'accorde assez bien avec l'expérience. Le raffinement du maillage conduit, comme attendu, à une réponse plus souple qui approche bien l'expérience.

Afin d'apprécier l'influence du facteur de cisaillement β , une simulation avec les différentes valeurs a été réalisée. Les courbes charge - flèche ainsi obtenues sont représentées (voir Figures 5.2, 5.3, 5.6, et 5.7) au même temps que la courbe expérimentale. On constate que la charge ultime est mieux approchée par les valeurs de β comprises entre 0.3 et 0.5.

Afin d'étudier l'influence de la finesse du maillage par élément finis sur la solution, des simulations d'essais ont été effectuées avec deux maillages différents :

Les courbes reliant l'effort à la flèche de l'élément obtenues par les deux maillages sont aussi représentées.

Les Figures 5.4, et 5.8 nous donnent les déplacements a mi-travée de l'élément pour une charge de 90 KN et pour chaque valeur de β allant de 0 à 1.0.

On constate que pour la valeur de β comprise entre 0.3 et 0.5 les déplacements sont presque constants et s'accordent bien avec les valeurs expérimentales de 1.6235 mm pour le panneau et 3.7125 mm pour la poutre isostatique. Donc on peut conclure que le choix du facteur β influe considérablement sur la réponse des éléments de structures en béton armé.

5.1.1. Influence de la densité du Maillage

Il n'y a pas de rapport direct entre le paramètre de cisaillement β et la finesse du maillage.

Par contre dans la modélisation par éléments finis, un maillage plus fin conduit généralement à des résultats plus précis. Cependant, plus le maillage est dense, plus le temps d'exécution augmente. Comment peut-on avoir un maillage nécessaire pour satisfaire au même temps la précision des résultats et le temps d'exécution ? On doit réaliser une étude de convergence de maillage comme suit:

- créer un maillage en utilisant, le nombre raisonnable d'éléments et analyser le modèle.
- Recréer le maillage avec une distribution plus dense d'élément, le ré analyser et comparer les résultats à ceux du maillage précédent.
- Augmenter la densité du maillage en réanalysant le modèle jusqu' à ce que les résultats convergent d'une manière satisfaisante.

Ce type d'étude de convergence de maillage peut nous permettre d'obtenir une solution précise avec un maillage qui est suffisamment dense et qui n'exige pas excessivement de temps d'exécution.

Les Figures 5.9 et 5.10 nous donnent les déplacements trouvés à mi-travée en fonction de la densité du maillage pour le panneau et la poutre isostatique respectivement. Les résultats convergent vers la valeur objective dès un maillage de 50 éléments. Ceux ci peut s'expliquer par la fait que l'élément isoparametrique quadrilatérale utilisé pour la modélisation reconstitue correctement la déformée requise par la théorie des poutres en générale.

5.1.2. Panneaux en béton armé [4]

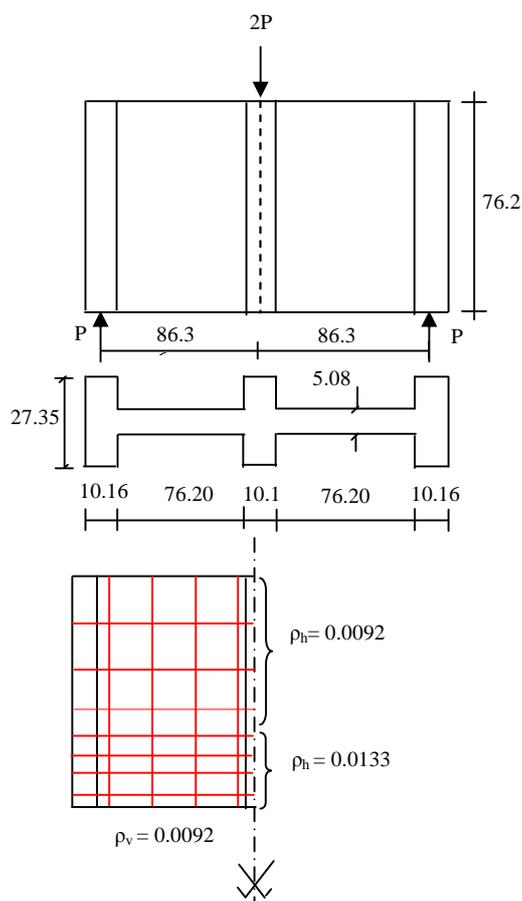


Fig. 5.1 : Géométrie, chargement et ferrailage du panneau (Dimensions en cm)

Propriétés mécaniques	Béton	Acier
E (MPa)	20400	192000
v	0.2	0.3
Fc 28 (MPa)	26.7	--
Ft 28 (MPa)	3.4	--
F _y	--	360

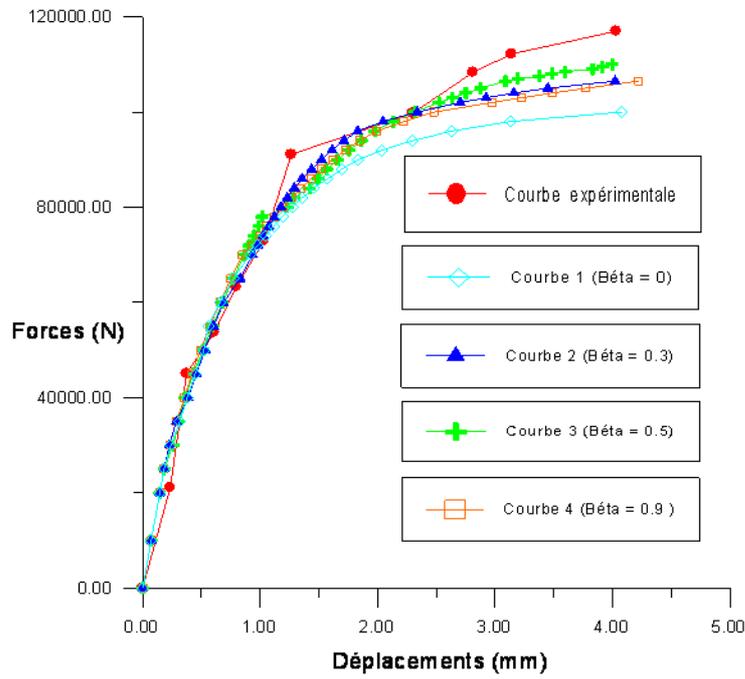


Fig.5.2 : Courbe charge-déplacement pour les différentes valeurs de Béta (panneau de 20 éléments)

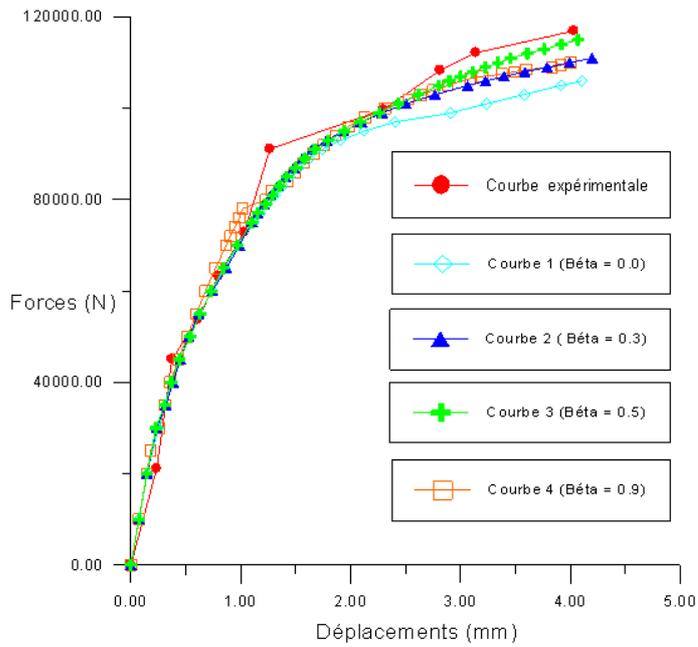


Fig.5.3 : Courbe charge-déplacement pour les différentes valeurs de Béta (panneau de 77 éléments)

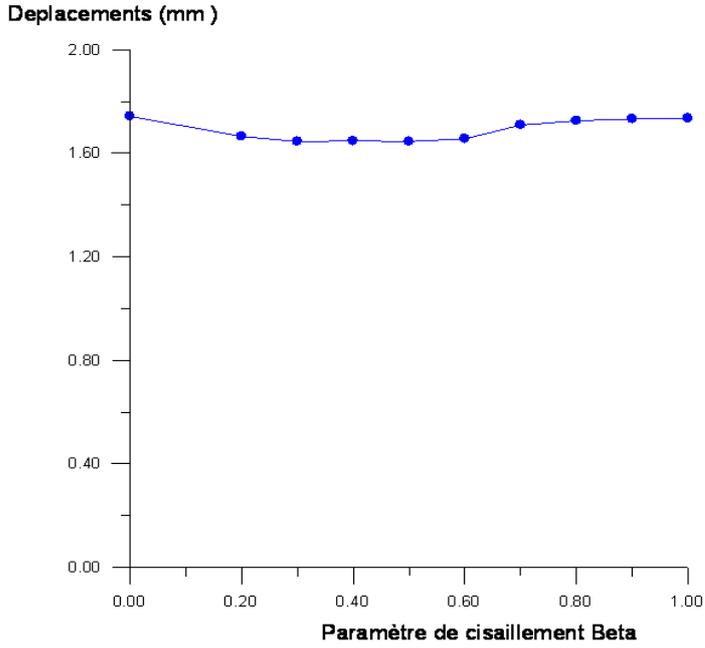


Fig.5.4 : Déplacement à mi-travée en fonction du paramètre de cisaillement

5.1.3 Poutre isostatique [31]

Propriétés mécaniques	Béton	Acier
E (MPa)	30000	20700
v	0.2	0.3
Fc 28 (MPa)	56	--
Ft 28 (MPa)	6	--
F _y	--	320

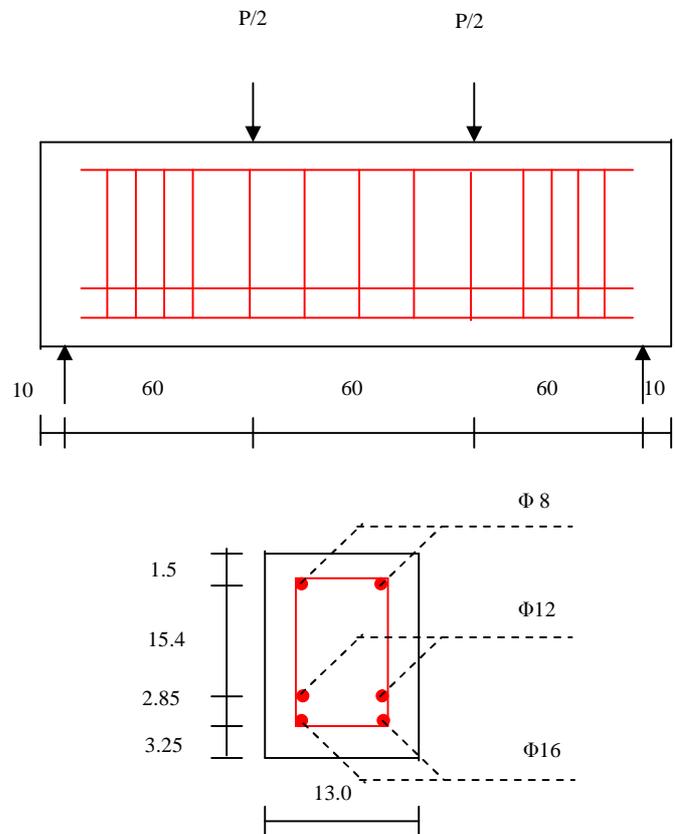


Fig. 5.5 : Géométrie, chargement et ferrailage de la poutre (Dimensions en cm)

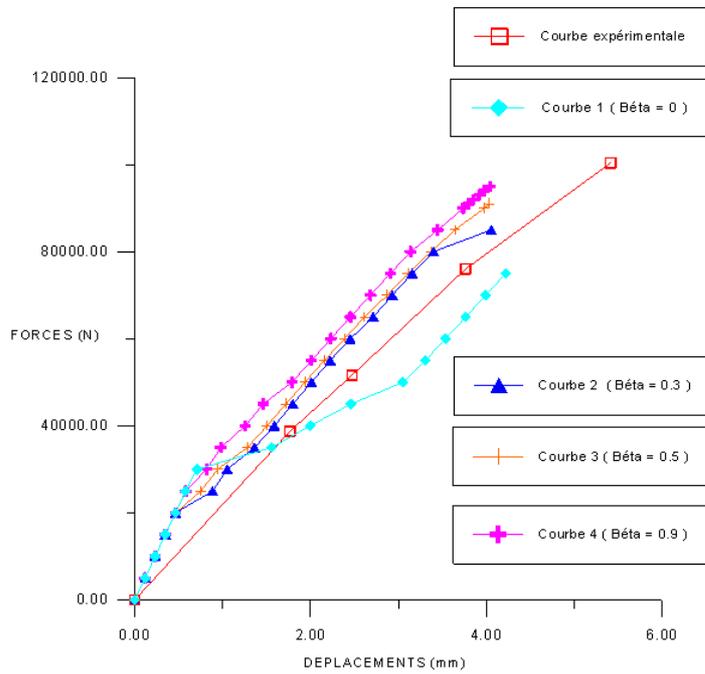


Fig.5.6 : Courbe charge-déplacement pour les différentes valeurs de Béta (poutre de 20 éléments)

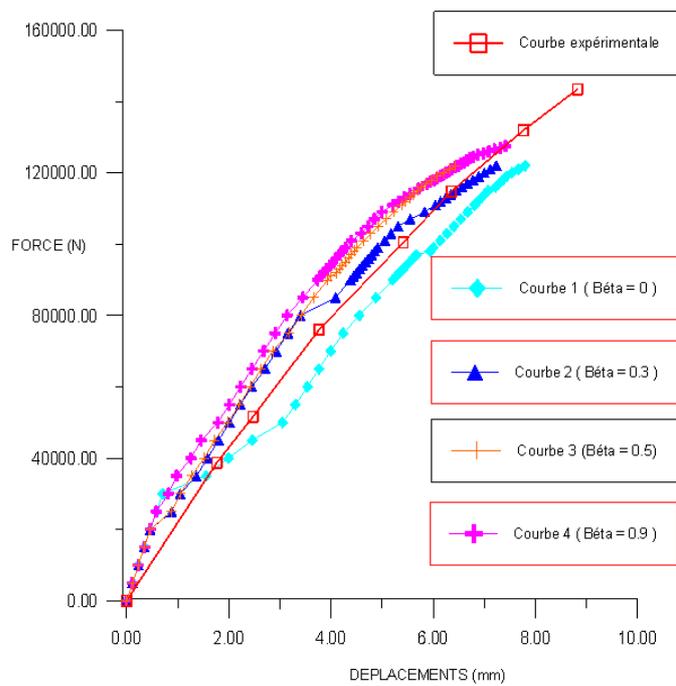


Fig.5.7 : Courbe charge-déplacement pour les différentes valeurs de Béta (poutre de 60 éléments)

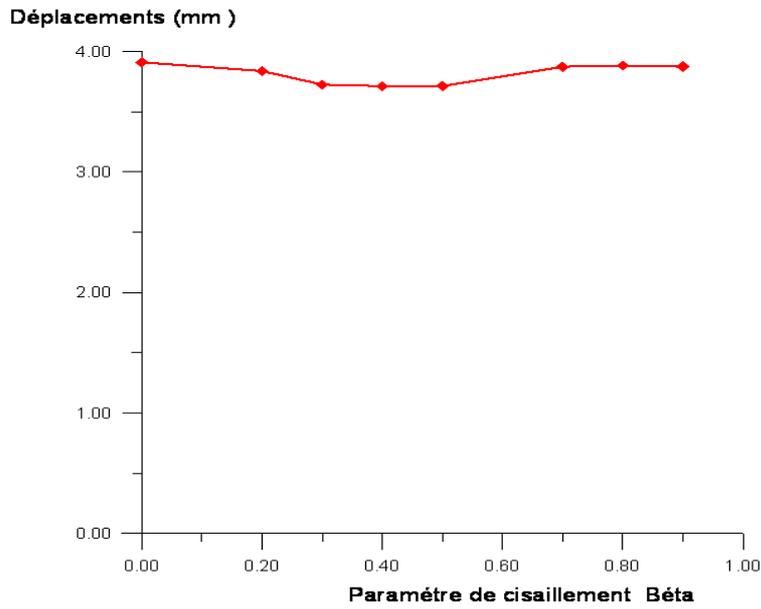


Fig. 5.8 : Déplacement à mi travée en fonction du paramètre de cisaillement Béta

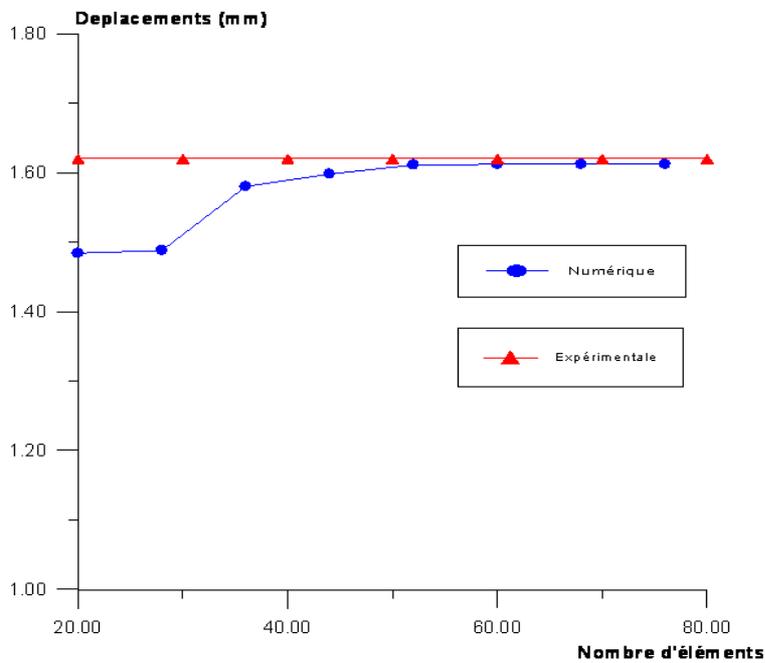


Fig. 5.9 : Déplacement à mi-travée en fonction du nombre d'éléments (panneau de Cervinka)

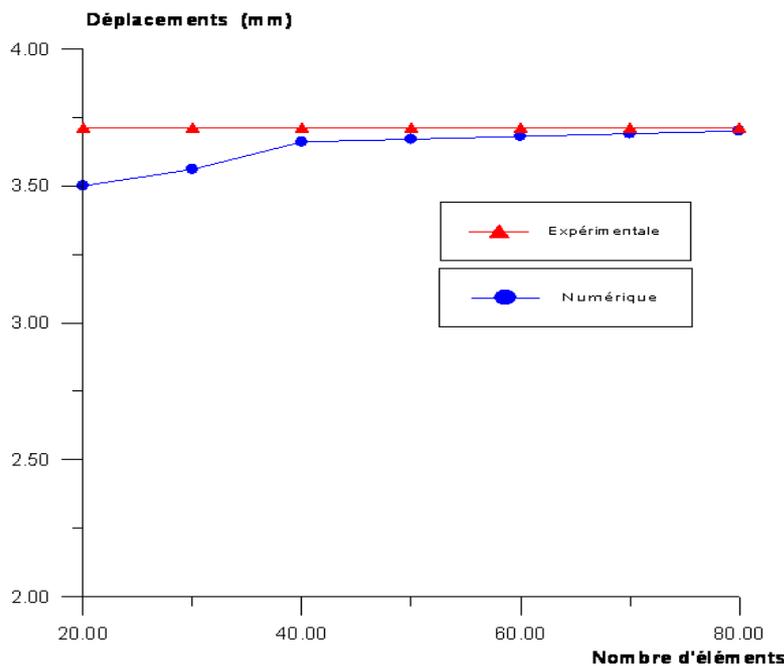


Fig. 5.10 : Déplacement à mi travée en fonction du nombre d'éléments (poutre isostatique)

5.2. Conclusion

Il est présenté ici un modèle de calcul numérique pour évaluation de la réponse des éléments de structures en béton armé sous l'action des charges statiques dans le domaine élasto-plastique.

Le béton est considéré comme élastoplastique écrouissable et l'acier élastique - parfaitement plastique.

La représentation '*répartie*' est utilisée tant pour les armatures que pour les fissures. Les prévisions du code d'analyse non linéaire développé dans ce travail donnent une très bonne représentation du comportement jusqu'à la ruine. Donc, la modélisation de la fissuration par l'approche continue combinée à la plasticité avec écrouissage non linéaire constitue une bonne procédure pour décrire le comportement global du matériau béton armé. La connaissance de la géométrie, des conditions aux limites, du chargement et des propriétés mécaniques des matériaux béton et acier suffisent au modèle de calcul.

La précision des solutions obtenues par la méthode des éléments finis dépend essentiellement de la taille d'élément utilisé (Fig.5.9 et 5.10) ; plus le maillage est raffiné

plus la précision de la solution s'améliore. Son utilisation efficace dépend de la compréhension du problème à analyser.

Les résultats de simulation numériques s'accordent bien avec les résultats expérimentaux. On constate aussi que le choix d'un paramètre de cisaillement joue un rôle important dans la réponse globale des éléments en béton armé. La valeur de β comprise entre 0.3 et 0.5 donne des résultats satisfaisant (voir Fig.5.4 et 5.8).

Pour les futures recherches et comme perspective, une amélioration peut être obtenue en introduisant dans le modèle un facteur de cisaillement β qui diminue lorsque la déformation normale à la fissure augmente c'est-à-dire un coefficient qui varie en fonction de l'ouverture des fissures.

Une remarque est portée sur l'influence du facteur de cisaillement du béton, car il joue un rôle assez important. Un consensus pourrait être fait sur la valeur de 0.5 car elle a donnée des résultats satisfaisants dans toutes les applications.

La déficience inhérente à tous les concepts diffuse pour la fissuration du béton est le danger de verrouillage des contraintes, c'est à dire un transfert erroné de contrainte à travers une fissure largement ouverte et donc à une valeur erronée de la charge de ruine de la structure ; cas où pour $\beta = 0$.

Son utilisation n'est pas limitée à une étude de cas précis et il peut par conséquent avec une petite modification être employé pour l'analyse du comportement mécanique des structures axisymétriques telles que les enceintes de stockages.

D'autres phénomènes peuvent être incorporés, tels que : le fluage, le retrait et l'effet de la température.

CHAPITRE 6

CONCLUSION GENERALE

Arrivé au terme de ce travail qui consiste à modéliser le comportement mécanique des composants en béton armé et à déterminer leur capacité portante de chargement par la méthode des éléments finis, on peut conclure que les prévisions du code d'analyse non linéaire développé dans ce travail donnent une très bonne représentation du comportement jusqu'à la ruine. Donc, la modélisation de la fissuration par l'approche continue combinée à la plasticité avec écrouissage non linéaire constitue une bonne procédure pour décrire le comportement global du matériau béton armé. La connaissance de la géométrie, des conditions aux limites, du chargement et des propriétés mécaniques des matériaux béton et acier suffisent au modèle de calcul.

La précision des solutions obtenues par la méthode des éléments finis dépend essentiellement de la taille d'élément utilisé ; plus le maillage est raffiné plus la précision de la solution s'améliore. Son utilisation efficace dépend de la compréhension du problème à analyser.

Une remarque est portée sur l'influence du facteur de cisaillement du béton, car il joue un rôle assez important. Un consensus pourrait être fait sur la valeur de 0.5 car elle a donnée des résultats satisfaisants dans toutes les applications.

Toutefois, il convient de faire progresser le modèle notamment dans le cas des chargements cycliques et dynamiques. D'autres phénomènes peuvent être incorporés, tels que : le fluage, le retrait et l'effet de la température. D'autres types d'éléments peuvent être rajoutés. Ce programme peut être facilement modifié pour tenir compte d'un état de contraintes axisymétriques.

REFERENCES

1. Bazant, Z.P. ; Planas J. ; (1998); “ Fracture and Size-Effect in Concrete and Quasi-Brittle Materials”. CRC press, Boca Raton, Fla.
2. Bazant, Z.P. and Gambarova, P. , (1980), "Rough cracks in reinforced concrete" J. Struct. Div. ASCE , Vol. 106, n° ST4, April, proc. pap. 15330, pp. 819-842.
3. Chaouadi, R.; de Meester, P. & Vandermeulen, W. (1994) ; “Damage Work as Ductile Fracture Criterion”, International Journal of Fracture, Vol. 66, pp. 155-164.
4. Cervenka, V., Pulk, R.,(1992), “ Computer models of concrete structures”, Structural Engineering International, 2/92, IABSI , Vol.2, pp. 103-107.
5. Cervenka, V.; Eligehausen, R. and Pukl, R. (1990) "SBETA-Computer Program for Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures". Report 90/1, Institute of Building Materials, University of Stuttgart.
6. Cervenka, V. , (1985), “ Constitutive model for cracked reinforced concrete”, Journal of the American Concrete Institute, vol.82, pp. 877-882.
7. Chang, T.Y.; Taniguchi, H., and Chen, W.F. , (1987), “Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels,” ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 1, January, pp. 122-140.
8. Chen, W. F. and Han, D. J., (1988), “Plasticity for structural engineers”. Springer-Verlag New-York.
9. Chen, F.U. and Suzuki, H. , (1980), "Constitutive models for concrete" Computers & Structures, Vol. 12, pp. 23-32.
10. De Borst, R. and Nauta, P. , (1985), "Non-Orthogonal Cracks in a Smeared Finite Element Model". Engineering Computations, Vol. 2, pp. 35-46.
11. Dhatt G. et Touzot G. , (1984), "Une presentation de la méthode des éléments finis" Collection Université de Compiègne, Paris, deuxième éd.
12. Drucker D.C.; Prager W., (1952), “Soil mechanics and plastic analysis or limit design”, Quart. Appl. Math., 10, 157-165.
13. Elfgren, L. , (1989), “Fracture Mechanics of Concrete Structures – from theory to applications”. Chapman and Hall Ltd., New York.
14. Gillemot, L.F. , (1976), “ Criterion of Crack Initiation and Spreading”, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 8, pp. 239-253.
15. Grelat A. , (1978), “Comportement non linéaire et stabilité des ossatures en béton armé”, Annale de l’ITBTP, Série TMC/223,1978.

16. Hillerborg, A., (1983), "Analysis of One Single Crack", Fracture Mechanics of Concrete (Edited by F. H. Wittmann). Amsterdam: Elsevier Science, pp. 223-49.94
17. Khennane, A. , (1997) , " Méthode des éléments finis. Enoncé des principes de bases". OPU, Ben Aknoun, Alger.
18. Kupfer, H.B.; Gerstle, K.H., (1973), "Behaviour of brittle material under biaxial stresses", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE , Vol.99, n°4, pp. 853-866.
19. Kwak H.G ,(1990), " finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads", Structural engineering mechanics and materials.UCB/SEMM-90/14.november 1990.
20. Lemaitre, J. ,(1985), " A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture", Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 107, pp. 83- 89.
21. Lemaitre, J. ; Chaboche J. L, (1986), "Mécanique des matériaux solides ", 2eme édition, Dunod.
22. Matic, P. , (1985), " Numerically Predicting Ductile Material Behavior from Tensile Specimen Response", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Volume 4, pp. 13-28.
23. Merabet O. , (1990), "Modélisation des structures planes en béton armé sous chargement monotone et cyclique. Construction et validation d'un modèle numérique", Thèse de Doctorat, INSA Lyon, 1990, 267 p.
24. McClintock, F. A. ; Argon, A. S. , (1966), " Mechanical Behaviour of Materials", Addison- Wesley Publishing Company, Inc., New York.
25. Mourad, K., (2000), "Analyse par éléments finis des panneaux en béton armé" , Thèse de Magister, Dept. Génie Civil, UMMTO.
26. Ngo, D. ; Scordelis, A.C ,(1967), " Finite element analysis of reinforced concrete beams", Journal of the American Concrete Institute, 1967, vol. 64, n° 3, pp.152-163.
27. Ottozen, S. N., (1980);" A failure criteria for brittle materials". J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 103, n°EM4, Proc. Pap. 13111, August, pp. 527-535.
28. Owen, D.R.J. ; Hinton, E.; (1980); " Finite elements in plasticity : theory and practice". Swansea, U.K. : Pineridge press , 594 p.
29. Rashid, Y. R. , (1968), " Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels", Nuclear Engineering Des., Volume 7, No. 4, pp. 334-355.
30. Rossi, P.; Ulm, F.J , (1997), "Size effects in the biaxial tensile-compressive behaviour of concrete: physical mechanisms and modelling"., Materials and Structures, 1997, vol. 30, pp. 210-216.
31. Rots, J.G. , (1991), " Smeared and discrete representations of localized fracture". International Journal of Fracture, 1991, vol. 51, pp. 45-59.

32. Rots, J.G.; Blaauwendraad, J ,(1989 a), “ Crack models for concrete: discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating?”, Heron, 1989, vol. 34, n° 1, pp.1-59.
33. Shah, S.P.; Swartz, S.E. and Ouyang C. , (1995) , “Fracture Mechanics of Concrete”, Wiley, New York.
34. Sih, G. C. ; Ditommaso, A. , (1985), “Fracture Mechanics of Concrete”. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Netherlands.
35. Smith, I. M.; Griffith, D. V.,(1988), “ Programing the finite element method”. Deuxième édition. John Wiley and sons, Chichester.
36. Walraven, J.C. and Reinhardt, H.U. ,(1981), "Theory and experiments on the mechanical behaviour of cracks in plain and reinforced concrete subjected to shear loading" Heron, Vol. 26, n° 1A.
37. White, R.; Gersely, P. and Jimenez, R. , (1979), "Sliding shear and dowel forces in cracked reinforced concrete subjected to seismic loading" CEB Bull. d'Info. n° 132, Avril, pp. 77-84, (AICAP-CEB Symp. Rome, Mai 1979).
38. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., (1991), “the finite element method”, fifth edition Volume 1: the basis [chapter 8 pp 174]