

Table des matières

Introduction générale	2
1 Topologie de la norme et compacité	4
1.1 Définitions et propriétés	4
1.2 Applications continues et compacité	10
1.3 Ensembles compacts dans les espaces vectoriels normés	12
1.3.1 Critère de compacité dans l'ensemble des fonctions continues	15
1.3.2 Critère de compacité dans $\mathbf{L}_p[a, b]$	20
1.3.3 Critère de compacité dans l_p	23
2 Topologie faible et compacité	26
2.1 Topologies faibles sur E	26
2.1.1 Espaces duals	26
2.1.2 Convergence faible dans un espace normé	30
2.2 Compacité faible	31
2.3 Compacité dans les espaces réflexifs	33
2.3.1 Définitions et propriétés	33
2.3.2 Application à l'optimisation	36
Conclusion	37
Annexe	38
Bibliographie	41

Inroduction générale

La compacité est une notion omniprésente en analyse fonctionnelle, la propriété de Bolzano-Weierstrass et la propriété de Borel-Lebesgue constituent les idées fondamentales qui ont conduit à l'élaboration de cette notion. Le lien entre ces idées est établi pour la première fois par **Fréchet** qui a formulé la première définition d'un ensemble compact. Cette notion s'est affinée en même temps que celle d'ensemble complet grâce à **Hausdorff** et **Alexandroff**.

La notion d'espace compact, comme celle d'espace complet qui y est intimement lié, s'est dégagée peu à peu au fur et à mesure que les idées maîtresses de l'analyse classique et notamment celle de limite ont été adaptées au domaine plus général de la topologie.

Dans le long processus qui a conduit à la notion rigoureuse de limite, en 1817 **Bolzano** a formulé avant **Cauchy** le premier énoncé du célèbre "critère de Cauchy". D'autre part en se basant sur les travaux de Bolzano, **Weierstrass** a démontré que toute partie infinie bornée de la droite numérique admet au moins un point limite : c'est le théorème de Weierstrass ; cette propriété est généralement appelée "la propriété de Bolzano-Weierstrass".

Dans le même ordre d'idées, après que Bolzano eut formulé la définition moderne de la continuité d'une fonction, Weierstrass a pu démontrer dans ses cours que toute fonction continue dans un intervalle limité y atteint au moins une fois son minimum.

En 1894, **Borel** a démontré dans sa thèse un théorème fondamental auquel il a donné la formulation suivante quatre ans plus tard :

" Si l'on a sur un segment limité de droite une infinité dénombrable d'intervalles partiels, tels que tout point du segment soit intérieur à l'un au moins des intervalles, il existe un nombre limité d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété".

En 1904, **Lebesgue** a généralisé le théorème pour une infinité non dénombrable d'intervalles :

"Si l'on a une famille d'intervalles Δ tels que tout point d'un intervalle $[a, b]$, y compris a et b , soit intérieur à l'un au moins des Δ , il existe une famille formée d'un nombre fini des intervalles Δ et qui jouit de la même propriété : tout point de $[a, b]$ est intérieur à l'un d'eux".

Le résultat du théorème est connu sous le nom de théorème de Borel-Lebesgue.

Dans une communication adressée à l'académie des sciences de Paris le 21 novembre 1904, Fréchet a cherché à étendre le résultat de Weierstrass sur l'existence du minimum d'une fonction continue. À cette occasion, il a introduit de nouvelles définitions [15]

Par ailleurs, il a qualifié de fermé tout ensemble qui n'a aucun élément limite ou contient ses éléments limites ; il a pu formuler alors la première définition d'un ensemble compact. Et après avoir introduit la notion d'espace métrique en 1906, Fréchet a ainsi été le premier à se rendre compte du lien existant entre la propriété de Bolzano-Weierstrass et celle de Borel-Lebesgue.

Il faut aussi mentionner les noms de **Heine**, **Riesz**, **Baire**, et pleins d'autres mathématiciens qui ont contribué au développement de cette notion.

Dans ce manuscrit nous allons étudier la notion de compacité et ses caractéristiques.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des résultats importants de compacité dans les espaces métriques et topologiques au sens de la topologie de la norme

Dans le second chapitre on introduit les notions nécessaires à la compréhension de la topologie faible et \star -faible. La compacité au sens de ces dernières est étudiée.

À la fin de ce mémoire nous avons mis une partie annexe où nous avons rappelé quelques résultats de l'analyse fonctionnelle.

Chapitre 1

Topologie de la norme et compacité

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de compacité dans les espaces topologiques, et nous présentons les propriétés essentielles liées à cette notion. Nous nous intéressons à la caractérisation d'ensembles compacts dans les espaces normés, dans le cas où la dimension est finie et dans le cas où la dimension est infinie.

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1 (*Propriété de Borel-Lebesgue*) *Un ensemble K d'un espace topologique séparé X est compact, s'il vérifie la condition suivante : pour tout recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de K par des ensembles ouverts («recouvrement ouvert») il existe une sous-famille finie $(U_i)_{i \in H}$ ($H \subset I$ et fini) qui est un recouvrement de K .*

Définition 1.1.2 *Un ensemble A de X est relativement compact lorsque son adhérence \bar{A} est compacte. (On note ici par \bar{A} l'adhérence ou la fermeture de A et non le complémentaire de A)*

Théorème 1.1.1 (*Tykhonov*)

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides. Alors l'espace topologique produit $X = \prod_{i \in I} X_i$ est compact si et seulement si pour tout $i \in I$, X_i est compact. (pour la preuve voir [2] p.63)

Une caractérisation de la compacité est donnée via les familles centrées.

1.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Définition 1.1.3 Nous dirons qu'une famille de parties A d'un espace topologique X est centrée, si aucune intersection finie $\bigcap_{i=1}^n A_i$ d'ensembles de cette famille n'est vide.

Théorème 1.1.2 Pour qu'un espace topologique X soit compact, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante :

(\mathcal{R}) Toute famille centrée de sous-ensembles fermés de X admet une intersection non vide.

Preuve

Soit X un espace topologique compact. Considérons $\{F_\alpha\}_{\alpha \geq 1}$ une famille centrée de sous-ensembles fermés de X . Les ensembles $G_\alpha = X - F_\alpha$ sont ouverts et comme aucune intersection finie $\bigcap_{i=1}^n F_i$ n'est vide, on en déduit qu'aucune famille d'ensembles $G_i = X - F_i$ ne recouvre X entièrement. Mais alors (en vertu de la compacité de X) l'ensemble de tous les G_α ne peut pas constituer un recouvrement de X , ce qui signifie que $\bigcap_{\alpha \geq 1} F_\alpha \neq \emptyset$. Ainsi donc, si X est un espace compact, il remplit la condition (\mathcal{R}).

Réciproquement, supposons que X vérifie la condition (\mathcal{R}) et soit $\{G_\alpha\}_{\alpha \geq 1}$ un recouvrement ouvert de X . En posant $F_\alpha = X - G_\alpha$, on obtient $\bigcap_{\alpha \geq 1} F_\alpha = \emptyset$, d'où l'on déduit en vertu de la condition (\mathcal{R}) que la famille $\{F_\alpha\}_{\alpha \geq 1}$ ne peut pas être centrée. Il existe donc des ensembles F_1, \dots, F_n , tels que $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$. Mais alors les ouverts correspondants $G_i = X - F_i$ forment un sous-recouvrement fini du recouvrement $\{G_\alpha\}_{\alpha \geq 1}$. Donc la condition (\mathcal{R}) est équivalente à la compacité.

Donnons maintenant quelques propriétés des espaces compacts.

Théorème 1.1.3 Un compact est fermé dans tout espace séparé qui le contient.

Preuve Soit K un sous-ensemble compact d'un espace topologique séparé X et soit $y \notin K$. Alors, $\forall x \in K$, il existe un voisinage $U(x)$ du point x et $V_x(y)$ du point y dépendant de x tels que

$$U(x) \cap V_x(y) = \emptyset$$

Les voisinages $U(x)$ forment un recouvrement ouvert de K . En vertu de la compacité de K on peut extraire un sous-recouvrement fini $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)$.

Posons

$$V = V_{x_1}(y) \cap V_{x_2}(y) \cap \dots \cap V_{x_n}(y)$$

Alors V est un voisinage du point y qui ne rencontre pas $U(x_1) \cup U(x_2) \cup \dots \cup U(x_n)$. Comme $K \subset U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n)$ donc V ne rencontre pas K . Par conséquent, $y \notin \overline{K}$, ce qui signifie que K est fermé.

1.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Théorème 1.1.4 *Tout sous-ensemble fermé d'un espace compact est compact.*

Preuve

Soient X un espace topologique compact et F un sous-ensemble fermé de X , et soit $\{F_\alpha\}_{\alpha \geq 1}$ une famille centrée quelconque de sous-ensembles fermés du sous-espace $F \subset X$. Comme tout ensemble F_α fermé dans F , est aussi fermé dans X , $\{F_\alpha\}_{\alpha \geq 1}$ est une famille centrée de sous-ensembles fermés de X . Par conséquent, $\bigcap_{\alpha \geq 1} F_\alpha \neq \emptyset$. En vertu du théorème 1.1.2 on en déduit la compacité de F .

Définition 1.1.4 (compacité en termes de suites) *On dit qu'un ensemble A d'un espace métrique E est compact si toute suite infinie de A possède au moins une valeur d'adhérence.*

Cela revient au même de dire, de toute suite $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset A$, on peut extraire une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$ convergente vers un $x \in A$. (propriété de Bolzano-Weierstrass)

Remarque 1.1.1 *La définition précédente est plus commode si E est un espace métrique.*

En effet, dans les espaces topologiques la notion de convergence ne joue pas un rôle si important que dans les espaces métriques. Cela tient à ce que dans un espace métrique E , un point x est adhérent à un ensemble $M \subset E$ si et seulement s'il existe dans M une suite convergente vers x , tandis que si E est un espace topologique le fait que x est point adhérent à l'ensemble M n'entraîne pas l'existence dans M d'une suite convergente vers x . (Pour plus de détails voir [13] p.61).

Proposition 1.1.1 *Un ensemble relativement compact d'un espace métrique est borné.*

Preuve

Supposons A relativement compact et non borné et soit x_1 un point arbitraire de A . L'ensemble A n'étant pas borné, il existe un point $x_2 \in A$ extérieur à la boule $B(x_1, 1)$.

Posons $r_2 = d(x_1, x_2) + 1$. L'ensemble A n'étant pas borné, il existe un point $x_3 \in A$ extérieur à la boule $B(x_1, r_2)$. Posons $r_3 = d(x_1, x_3) + 1$ et poursuivons cette procédure. Nous obtenons une suite $\{x_n\} \subset A$ telle que $d(x_1, x_j) \geq 1$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, c'est-à-dire une suite ne contenant aucune valeur d'adhérence, ce qui contredit la compacité relative de l'ensemble A .

Remarque 1.1.2 *De la proposition précédente on peut affirmer qu'un ensemble compact est fermé et borné.*

1.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Remarque 1.1.3 *Il est clair qu'un espace métrique compact est complet. En effet, toute suite de Cauchy d'un espace métrique qui possède une sous-suite convergente est elle-même convergente vers la même limite.*

Cependant, la réciproque est fautive, par exemple \mathbb{R}^n est complet mais non compact.

Exemples 1 .

1. Si $E = \mathbb{R}$, muni de sa distance usuelle, on a :

L'intervalle $[a, b]$ est compact.

En effet, soit $[a, b]$, avec $a \leq b$, un intervalle fermé et borné de \mathbb{R} . Puisque \mathbb{R} est séparé, alors $[a, b]$ est séparé. Si $a = b$, alors $[a, b] = a$ est un ensemble fini, donc en vertu de la définition 1.1.1 c'est un espace compact. On suppose donc $a < b$, et soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de \mathbb{R} telle que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Soit F l'ensemble des points x de $[a, b]$ tels qu'il existe une partie finie J de I vérifiant $[a, x] \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. L'ensemble F n'est pas vide car $a \in F$, et majoré par b , donc F admet une borne supérieure c . De plus on a $c \in [a, b]$. On va montrer que $c \in F$ et que $c = b$. Soit $i_c \in I$ tel que $c \in U_{i_c}$. Puisque U_{i_c} est un ouvert de \mathbb{R} , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset U_{i_c}$. Comme c est la borne supérieure de F , alors il existe $x \in F$ tel que $c - \varepsilon < x \leq c$, d'où on a $[x, c] \subset U_{i_c}$. Soit J une partie finie de I telle que $[a, x] \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Soit $J' = J \cup \{i_c\}$, alors J' est une partie finie de I et on a $[a, c] = [a, x] \cup [x, c] \subset \bigcup_{i \in J'} U_i$. On a donc $c \in F$. Il reste à montrer que $c = b$. Supposons $c < b$. Alors il existe $d \in]c, c + \varepsilon[\cap]c, b[$, d'où on a $d \in [a, b]$ et $[c, d] \subset U_{i_c}$. Donc on a $[a, d] \subset \bigcup_{i \in J'} U_i$. Par conséquent, on a $d \in F$, ce qui est impossible car $d > c$.

Donc on a bien $c = b$, d'où $b \in F$.

2. \mathbb{R} n'est pas compact, puisque son sous ensemble \mathbb{N} ne possède aucune valeur d'adhérence, et comme \mathbb{N} est fermé alors \mathbb{R} n'est pas compact. Mais tout fermé borné de \mathbb{R} est compact en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass

3. \mathbb{R}^n n'est pas compact, mais tout sous ensemble fermé borné de \mathbb{R}^n est compact.

Soit A une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^n . Alors il existe des $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ tels que $A \subset \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$. On a de l'exemple 1) que $[a, b]$ est compact et donc $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ est compact en vertu du théorème de Tykhonov 1.1.1.

Comme A est fermée dans $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, on déduit que A est compact.

1.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

4. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. Cet espace n'est pas compact et de plus il existe dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ des ensemble bornés fermés et non compacts. (voir [13] p.55)
5. Soit $E = l_2$

$$l_2 = \left\{ (x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}, \sum_{n \geq 1} (x_n)^2 < \infty \right\}$$

On munit l_2 de la métrique naturelle :

$$d_2((x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}) = \left(\sum_{n \geq 1} (x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cet espace n'est pas compact. Il contient en outre des ensembles fermés bornés non compacts ; exemple : La boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$.

En effet , Considérons la suite $\{e_n\}$ de points de

$$\overline{B}_{l_2}(0, 1) = \left\{ (x_n)_{n \geq 1} / \sum_{n \geq 1} (x_n)^2 \leq 1 \right\}$$

Avec $e_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$; $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$... ; $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$

On a cependant $d_2(e_i, e_j) = \sqrt{2} \forall i, j, i \neq j$.Donc la suite $\{e_i\}$ ne converge pas et ne possède aucune valeur d'adhérence , ce qui prouve que $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.

Donnons un critère général de compacité d'un ensemble d'un espace métrique. Introduisant à cet effet la définition suivante :

Définition 1.1.5 Soient un espace métrique E et un ensemble $M \subset E$.

Prenons $\varepsilon > 0$. L'ensemble M_ε s'appelle ε -réseau de M si pour tout $x \in M$ il existe un $\hat{x} \in M_\varepsilon$ tel que $d(x, \hat{x}) < \varepsilon$.

La notion de ε -réseau d'un ensemble M admet une interprétation géométrique. Soit M_ε un ε -réseau de M et $\hat{x} \in M_\varepsilon$. Prenons une boule $B(\hat{x}, \varepsilon)$. Alors $M \subset \bigcup_{\hat{x} \in M_\varepsilon} B(\hat{x}, \varepsilon)$. Cela signifie que M est contenu dans la réunion des boules de rayon ε ayant leurs centres aux points de l'ensemble M_ε . Autrement dit, le système de ces boules couvre M .

On dit que l' ε -réseau est fini si M_ε est un ensemble fini.

Définition 1.1.6 On dit qu'un ensemble M de E est précompact ou totalement borné si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ε -réseau fini de M .

De ce fait, il est clair qu'un ensemble précompact est borné.

1.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Le théorème suivant donne le lien entre la précompacité et la relative compacité dans un espace métrique.

Théorème 1.1.5 (Hausdorff) *Pour qu'un ensemble M de E soit relativement compact, il faut, et si E est complet, il suffit que M soit précompact.*

Preuve

• *Nécessité.* Supposons que M est relativement compact. Soit x_1 un point de M . Si $d(x, x_1) < \varepsilon$ pour tout $x \in M$, on a déjà construit un ε -réseau fini. Sinon il existe un point x_2 de M tel que $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Si pour tout point x de M soit $d(x, x_1) < \varepsilon$, soit $d(x_1, x_2) < \varepsilon$, on a déjà construit un ε -réseau fini. Sinon il existe un point x_3 de M tel que $d(x_1, x_3) \geq \varepsilon$, $d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$.

En poursuivant cette procédure on trouve des points x_1, x_2, \dots, x_n tels que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ pour $i \neq j$. Deux cas peuvent se présenter : cette procédure s'achève en k pas ou bien elle se poursuit indéfiniment. Dans le premier cas pour tout $x \in M$ l'une des inégalités $d(x, x_i) < \varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sera réalisée et les points x_1, x_2, \dots, x_k forment un ε -réseau de M . Le second cas est exclu, puisque s'il avait lieu, on obtiendrait une suite infinie de points x_1, x_2, \dots, x_n telle que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ pour $i \neq j$ et cette suite ne converge pas et ne possède aucune valeur d'adhérence, ce qui contredit la compacité relative de M .

• *Suffisance.* Supposons que l'espace E est complet et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ε -réseau fini de M . Prenons une suite de nombres ε_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ et construisons pour chaque ε_n un ε_n -réseau fini $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$ de l'ensemble M . Prenons un sous-ensemble fini $T \subset M$. Comprenons chaque point $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}$ dans une boule fermée de rayon ε_1 . Chaque point de T est contenu dans l'une des boules. Ces boules étant en nombre fini, il en existe au moins une qui contiendra une infinité de points de T . Désignons ce sous-ensemble de T par T_1 . Prenons des points $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{k_2}^{(2)}$ et comprenons chacun d'eux dans une boule fermée de rayon ε_2 . En raisonnant comme précédemment on obtient un ensemble infini $T_2 \subset T_1$ strictement inclus dans l'une des boules de rayon ε_2 . En poursuivant cette procédure, on obtient une suite $T_1 \supset T_2 \supset \dots \supset T_n \supset \dots$ de sous-ensembles infini de T , de plus le sous-ensemble T_n est contenu dans une boule fermée de rayon ε_n , donc le diamètre de T_n est inférieur à $2\varepsilon_n$.

Prenons maintenant un point ξ_1 de T_1 , un point ξ_2 de T_2 distinct de ξ_1 , un point ξ_3 de T_3 distinct de ξ_1 et ξ_2 et ainsi de suite. On obtient alors une suite $T_\omega = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$ de points de T . Cette suite est de Cauchy. En effet, $\xi_n \in T_n$ et $\xi_{n+p} \in T_{n+p} \subset T_n$ pour tout p naturel. Donc $d(\xi_{n+p}, \xi_n) < 2\varepsilon_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, $p > 0$. L'espace E étant complet par hypothèse, la suite T_ω converge vers un point ξ de E ce qui prouve la compacité relative de l'ensemble M .

1.2. APPLICATIONS CONTINUES ET COMPACTITÉ

Corollaire 1.1.1 *Pour qu'un ensemble M d'un espace métrique complet E soit relativement compact, il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ε -réseau relativement compact de M .*

Preuve

Soit M_ε un $\frac{\varepsilon}{2}$ -réseau relativement compact de M . En appliquant le théorème précédent à M_ε , on trouve qu'il existe un $\frac{\varepsilon}{2}$ -réseau M_{ε_0} de M_ε . Donc M_{ε_0} est un ε -réseau fini de M . En effet, pour tout point $x \in M$ il existe un point $\xi \in M_\varepsilon$ tel que $d(x, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, pour le point ξ de M_ε il existe un point $x_\varepsilon \in M_{\varepsilon_0}$ tel que $d(\xi, x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tout point x de M il existe dans M_{ε_0} un point x_ε tel que

$$d(x, x_\varepsilon) \leq d(x, \xi) + d(\xi, x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

autrement dit, M_{ε_0} est un ε -réseau de M . L'espace M étant complet, le théorème précédent nous dit que M est relativement compact.

Corollaire 1.1.2 *Un espace métrique compact E est séparable.*

En effet, prenons une suite $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et construisons pour chaque ε_n un ε_n -réseau fini $M_{\varepsilon_n} = \{x_i^{(n)}\}_{i=1,2,\dots,k_n}$. Soit $M_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\varepsilon_n}$. Il est évident que M_ε est un ensemble dénombrable. Montrons qu'il est dense dans E . En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un n tel que $\varepsilon_n < \varepsilon$ et un élément $x_n \in M_{\varepsilon_n} \subset M_\varepsilon$ tel que $|x - x_n| < \varepsilon_n < \varepsilon$. Autrement dit, M_ε est dense dans E .

1.2 Applications continues et compacité

Théorème 1.2.1 *L'image d'un espace compact par une application continue est un espace compact.*

Preuve

Soit X un espace compact et f une application continue de X dans un espace métrique Y . Considérons un recouvrement quelconque $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de $f(X)$ par des ensembles ouverts dans $f(X)$. Posons $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$. Les ensembles U_α sont ouverts (comme images réciproques d'ensembles ouverts par une application continue) et constituent un recouvrement de l'espace X . En vertu de la compacité de X , de ce recouvrement on peut extraire un sous-recouvrement fini U_1, U_2, \dots, U_n . Alors les ensembles V_1, V_2, \dots, V_n où $V_i = f(U_i)$, recouvrent l'image $f(X)$ de l'espace X .

Remarque 1.2.1 *Notons que l'image d'un fermé par une application continue n'est pas forcément un fermé. En effet si on prend la fonction $f(x) = \arctan(x)$ définie de \mathbb{R} dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a l'image de $f([0, \infty[) = [0, \frac{\pi}{2}[$, il est clair que $[0, \frac{\pi}{2}[$ n'est pas un fermé.*

1.2. APPLICATIONS CONTINUES ET COMPACTITÉ

Théorème 1.2.2 *Toute application continue d'un compact métrique dans un espace métrique est uniformément continue.*

Preuve

Soit f une application continue, mais non uniformément continue d'un compact métrique K dans un espace métrique M . Cela signifie que pour un certain $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel n on peut trouver dans K deux points x_n et x'_n tels que $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ et pourtant $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$. En vertu de la compacité de K , de la suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$ on peut extraire une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$ convergeant vers un point $x \in K$. Alors la suite $\{x'_{n_k}\}_{k \geq 1}$ converge aussi vers x . D'autre part, pour chaque valeur de k au moins l'une des inégalités

$$d(f(x), f(x_{n_k})) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad d(f(x), f(x'_{n_k})) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

est vérifiée, ce qui contredit l'hypothèse que l'application f est continue au point x .

Remarque 1.2.2 *Le théorème précédent est valable que pour les espaces métriques car la définition de la continuité uniforme dépend de la métrique.*

Théorème 1.2.3 *Toute application bijective et continue f d'un compact X sur un espace séparé Y est un homéomorphisme.*

Preuve

Soient Q un ensemble fermé dans X et $P = f(Q)$ son image dans Y . D'après le théorème 1.2.1 P est un compact et, par conséquent P est fermé dans Y . Donc l'image réciproque de tout ensemble fermé $Q \subset X$ dans l'application f^{-1} est fermée. D'où la continuité de l'application f^{-1} .

Ce qui prouve que f est un homéomorphisme. .

Théorème 1.2.4 (Weierstrass) *Soient K une partie compacte d'un espace topologique X et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.*

Alors f est bornée et atteint sur K ses bornes inférieure et supérieure. Autrement dit, il existe $a, b \in K$ tels que $f(a) = \inf_{x \in K} f(x)$ et $f(b) = \sup_{x \in K} f(x)$

Preuve

On sait que l'image de K par f est compacte dans \mathbb{R} . Par conséquent, l'image de K est un fermé borné de \mathbb{R}

Corollaire 1.2.1 *Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

Exemples 2 *Voici un exemple d'un sous-ensemble fermé et borné de $C([0, 1])$ qui n'est pas compact.*

Considérons dans $C([0, 1])$ l'ensemble :

$$C = \{x/x(0) = 0, x(1) = 1 \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty \leq 1\}$$

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Cet ensemble est clairement fermé borné.

Soit maintenant la fonction définie par $f(x) = \int_0^1 x^2(t)dt$, cette fonction est clairement continue.

Vérifions qu'elle n'atteint pas sa borne inférieure sur C .

En effet, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x_n(t) = t^n$ est un élément de C , de plus $f(x_n) = \frac{1}{2n+1}$. Par conséquent :

$$\inf_{x \in C} f(x) = 0$$

On a x est dans C , donc on a nécessairement $f(x) > 0$. Cela résulte de la continuité de x , des conditions $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ et des propriétés de l'intégrale de fonctions positives continues non identiquement nulles.

Ainsi f n'atteint pas sa borne inférieure, par conséquent C n'est pas compact.

1.3 Ensembles compacts dans les espaces vectoriels normés

Un espace vectoriel normé étant métrique, toutes les caractéristiques relatives aux ensembles compacts dans des espaces métriques sont valables pour un espace vectoriel normé. La structure algébrique d'un espace vectoriel normé permet d'établir de nouveaux résultats.

Définition 1.3.1 *On dit qu'un espace métrique E est localement compact si tout ensemble fermé et borné dans cet espace est compact.*

Théorème 1.3.1 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) E est de dimension finie.

ii) E est un espace localement compact.

iii) La boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$ dans $(E, \|\cdot\|)$ est compacte.

Preuve

Montrons i) \implies ii) Si $\dim E = n$, alors E est isomorphe à \mathbb{R}^n , donc toute partie fermée bornée de E serait compacte, donc $(E, \|\cdot\|)$ est localement compact.

Montrons ii) \implies iii). Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace localement compact, alors tout ensemble fermé et borné est compact, par conséquent la boule unité fermée dans E est compacte.

iii) \implies i) On suppose $\dim E = \infty$, on va montrer que la boule $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte. $\dim E = \infty$, alors il est possible de construire une suite infinie

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

$\{x_n\}_{n \geq 1} \subset E$ vérifiant $\|x_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ et $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \forall n \neq m$. Une telle suite est contenue dans la boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$. De plus d'après l'inégalité $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \forall n \neq m$, il est clair que cette suite n'admet aucune sous suite convergente. Cela signifie par définition que $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte. Il reste donc à construire à l'aide du lemme de Riesz 1 (Annexe), la suite $\{x_n\}$. Soit $x_1 \in \overline{B}(0, 1)$, on note $F_1 = \text{vect}\{x_1\}$, le sous-espace engendré par x_1 . D'après le lemme de Riesz 1, $\exists x_2 \in \overline{B}(0, 1)$ tel que $\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. On note $F_2 = \text{vect}\{x_1, x_2\}$, toujours par le lemme de Riesz, $\exists x_3 \in \overline{B}(0, 1)$ tel que $\|x_1 - x_3\| \geq \frac{1}{2}$ et $\|x_2 - x_3\| \geq \frac{1}{2}$. Du fait que $\dim E = \infty$, cette construction se poursuit indéfiniment et on obtient donc une suite $\{x_n\} \subset \overline{B}(0, 1)$ vérifiant $\|x_n\| = 1 \forall n$ et $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \forall n \neq m$. Ceci termine la démonstration.

Corollaire 1.3.1 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension finie et A un sous ensemble de E . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1) A est compact.
- 2) A est fermé et borné dans E .

Preuve On sait déjà qu'un compact est fermé et borné, et d'après le théorème précédent $\dim E = n$ alors E est localement compact ce qui implique qu'un sous ensemble A fermé et borné de E est compact.

Théorème 1.3.2 Soit A un ensemble de \mathbb{R}^n . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) A est précompact.
- (ii) A est relativement compact.
- (iii) A est borné.
- (iv) Toute suite dans A possède une sous-suite convergente dans \mathbb{R}^n .

Preuve

Montrons (i) \implies (ii). Supposons A précompact i.e $\forall \varepsilon > 0$ il existe un ε -réseau fini de A . Considérons A_ε cet ε -réseau alors on a $A \subset \bigcup_{\hat{x} \in A_\varepsilon} B(\hat{x}, \varepsilon)$.

D'autre part on sait que $A \subset \overline{A}$ et $B(\hat{x}, \varepsilon) \subset \overline{B}(\hat{x}, \varepsilon)$ ce qui implique que $\overline{A} \subset \bigcup_{\hat{x} \in A_\varepsilon} \overline{B}(\hat{x}, \varepsilon)$, comme \overline{A} est fermé et borné donc d'après le corollaire précédent \overline{A} est compact, par conséquent A est relativement compact.

(ii) \implies (iii) Supposons A relativement compact i.e son adhérence \overline{A} est compacte donc fermée et bornée, et comme $A \subset \overline{A}$ alors A est borné.

(iii) \implies (iv) Soit A borné alors toute suite d'éléments de A est bornée, alors d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut extraire une sous-suite convergente.

(iv) \implies (i) Supposons que toute suite de A possède une sous-suite conver-

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

gente dans \mathbb{R}^n ce qui implique que A est compact, et comme \mathbb{R}^n est complet alors d'après le théorème 1.1.5 de Hausdorff A est précompact.

Proposition 1.3.1 Les deux définitions 1.1.1 et 1.1.4 sont équivalentes pour un espace métrique compact.

Pour démontrer ce résultat, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3.1 Soit (E, d) un espace métrique compact, et $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E par des ouverts de E . Alors $\exists \alpha \geq 0 / \forall x \in E, \exists i \in I / B(x, \alpha) \subset O_i$

Preuve

On raisonne par l'absurde :

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in E / \forall i \in I, B(x, \alpha) \not\subset O_i$$

On prend $\alpha = \frac{1}{n}$. On alors :

$$\forall n > 0, \exists x_n \in E / \forall i \in I, B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i$$

D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass on peut extraire une sous-suite convergente x_{n_k} avec

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \mu \in E$$

Par continuité de l'application distance, on a donc aussi $\forall i \in I, \forall \varepsilon > 0, B(\mu, \varepsilon) \not\subset O_i$. Donc on a $\mu \notin \overset{\circ}{O}_i = O_i$ car O_i est ouvert, donc $\mu \notin E$ ce qui est contradictoire.

Preuve de la proposition 1.3.1

Montrons 1.1.1 \implies 1.1.4, soit $\{x_n\}_{n \geq 1}$ une suite infinie de l'espace compact E et soit F_n l'adhérence de l'ensemble $\{x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}, \dots\}$, on va montrer que $\{x_n\}_{n \geq 1}$ admet une valeur d'adhérence. Comme E est compact alors d'après le théorème 1.1.2 l'intersection $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ n'est pas vide donc elle contient au moins un point a , et donc elle contient un voisinage de ce point alors d'après la proposition 2 (Annexe) et d'après la définition d'un point adhérent, a est une valeur d'adhérence de $\{x_n\}_{n \geq 1}$

Montrons 1.1.4 \implies 1.1.1, soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E par des ouverts de E . Alors d'après le lemme 1.3.1

$$\exists \alpha > 0 / \forall x \in E, \exists i_0 \in I, B(x, \alpha) \subset O_{i_0}$$

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Comme E est compact donc d'après le théorème précédent E est précompact, donc il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon α :

$$\exists (x_i)_{1 \leq i \leq n} / E \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \alpha)$$

Donc il existe $j_{x_i} \in I$ tel que $B(x_i, \alpha) \subset O_{j_{x_i}}$ pour tout $i = 1, \dots, n$ d'où :

$$\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \alpha) \subset \bigcup_{i=1}^n O_{j_{x_i}}$$

Donc on a bien l'existence de $J \subset I$, avec J fini ($J = \{j_{x_i}\}_{1 \leq i \leq n}$) tel que :

$$E \subset \bigcup_{j \in J} O_j$$

On a donc E qui vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue.

1.3.1 Critère de compacité dans l'ensemble des fonctions continues

Définition 1.3.2 Soit \overline{G} un domaine fermé borné de l'espace \mathbb{R}^n . Considérons l'espace des fonctions continues $C(\overline{G}) = C(\overline{G}, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. Soit M un ensemble de fonctions dans $C(\overline{G})$

On dit que les fonctions d'un ensemble M sont uniformément bornées s'il existe une constante $c > 0$, commune à toutes les fonctions de M , telle que pour tout $x \in M$ on a $|x(t)| \leq c$, $t \in \overline{G}$ ou encore que $\|x\| \leq c$, $x \in M$.

Définition 1.3.3 On dit que les fonctions de M sont équicontinues si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour deux éléments quelconques $t', t'' \in \overline{G}$ vérifiant l'inégalité $\|t' - t''\| < \delta$ l'inégalité

$$|x(t') - x(t'')| < \varepsilon$$

est vérifiée à la fois pour tous les x de M .

Théorème 1.3.3 (Arzela) Pour qu'un ensemble $M \subset C(\overline{G})$ soit compact, il est nécessaire et suffisant que les fonctions $x(t)$ de M soient uniformément bornées et équicontinues.

Preuve

Nécessité. Il est évident que les fonctions de M sont uniformément bornées puisque tout ensemble compact est borné. Montrons qu'elles sont équicontinues. Prenons un $\varepsilon > 0$, soit $M_{\frac{\varepsilon}{3}} = \{x_1, x_2, \dots, x_{k(\varepsilon)}\}$ un $\frac{\varepsilon}{3}$ -réseau dans M .

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Les fonctions de $M_{\frac{\varepsilon}{3}}$ sont continues sur \overline{G} : alors d'après le théorème 1.2.2 elles y sont aussi uniformément continues. Par conséquent, pour tout x_i , $i = 1, 2, \dots, k(\varepsilon)$, il existe un $\delta_i = \delta_i(\varepsilon) > 0$ tel que

$$|x_i(t') - x_i(t'')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

à condition que $\|t' - t''\| < \delta_i$

Prenons $\delta = \min_{1 \leq i \leq k(\varepsilon)} \delta_i$: alors, quels que soient $t', t'' \in \overline{G}$ vérifiant l'inégalité $\|t' - t''\| < \delta$, l'inégalité (1) se trouve vérifiée à la fois pour tous $i = 1, 2, \dots, k(\varepsilon)$. Maintenant, $M_{\frac{\varepsilon}{3}}$ étant un $\frac{\varepsilon}{3}$ -réseau de M , il existe pour tout $x \in M$ un $\hat{x} \in M_{\frac{\varepsilon}{3}}$ tel que $\|x - \hat{x}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Si maintenant $\|t' - t''\| < \delta$, on a pour tous les $x \in M$

$$\begin{aligned} |x(t') - x(t'')| &\leq |x(t') - \hat{x}(t')| + |\hat{x}(t') - \hat{x}(t'')| + |\hat{x}(t'') - x(t'')| \\ &\leq 2\|x - \hat{x}\| + |\hat{x}(t') - \hat{x}(t'')| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les fonctions de M sont équi continues.

Suffisance. Soit $\{x_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions quelconque dans M . Montrons qu'on peut extraire une sous-suite de Cauchy. Prenons $\varepsilon > 0$ et, en vertu de l'équicontinuité des fonctions de M , cherchons un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Puisque \overline{G} est compact, il admet un $\delta(\frac{\varepsilon}{3})$ -réseau fini, i.e un ensemble de points $\overline{G}_{\frac{\varepsilon}{3}} = \{t_1, t_2, \dots, t_{l(\varepsilon)}\}$ tels que la distance entre un point t de \overline{G} et un point de $\overline{G}_{\frac{\varepsilon}{3}}$ soit inférieure à δ .

Revenons à $\{x_n\}_{n \geq 1}$. Considérons la suite numérique $\{x_n(t_1)\}$. Elle est bornée, parce que uniformément bornée. En vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass on peut en extraire une sous-suite convergente $\{x_{n'}(t_1)\}$. Considérons maintenant la suite $\{x_{n'}(t)\}$. Soit $t = t_2$. De $\{x_{n'}(t_2)\}$ on peut extraire comme précédemment une sous-suite convergente $\{x_{n''}(t_2)\}$. Passons à la suite $\{x_{n''}(t)\}$, etc.

Au bout de $l(\varepsilon)$ pas, nous obtiendrons une sous-suite $\{x_{n_k}(t)\}$ de $\{x_n(t)\}$ qui converge en tous les points du $\delta_{\frac{\varepsilon}{3}}$ -réseau $\overline{G}_{\frac{\varepsilon}{3}}$.

Montrons que $\{x_{n_k}\}$ est une suite de Cauchy dans $C(\overline{G})$, ce qui suffira à démontrer le théorème.

Prenons un $t \in \overline{G}$ et cherchons un $t_s \in \overline{G}_{\frac{\varepsilon}{3}}$ tel que $\|t - t_s\| < \delta$. Puisque les fonctions de M sont équi continues, on a

$$\begin{aligned} |x_{n_{k+p}}(t) - x_{n_k}(t)| &\leq |x_{n_{k+p}}(t) - x_{n_{k+p}}(t_s)| + |x_{n_{k+p}}(t_s) - x_{n_k}(t_s)| + |x_{n_k}(t_s) - x_{n_k}(t)| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + |x_{n_{k+p}}(t_s) - x_{n_k}(t_s)|. \end{aligned}$$

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Or, étant convergente, la suite $\{x_{n_k}(t_s)\}$ est à fortiori de Cauchy. $\forall \varepsilon > 0$ il existe donc un $q = q(\varepsilon)$ tel que pour $k > q$ on a $|x_{n_{k+p}}(t_s) - x_{n_k}(t_s)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout p entier naturel. On a donc pour tout $k > q$

$$|x_{n_{k+p}}(t) - x_{n_k}(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où

$$\|x_{n_{k+p}} - x_{n_k}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

i.e $\{x_{n_k}\}$ est une suite de Cauchy dans $C(\overline{G})$. Le théorème d'Arzela est complètement démontré.

Le théorème prouvé se généralise au cas d'applications d'ensembles compacts dans des espaces métriques.

Soient K un espace compact et (E, d) un espace métrique. On munit l'espace $C(K, E)$ des fonctions continues de K dans E de la distance uniforme.

Théorème 1.3.4 *Un ensemble A de $C(K, E)$ est relativement compact si et seulement si, pour tout $x \in K$:*

1. *L'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.*
2. *A est équicontinu en x , i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que*

$$\forall f \in A \quad \forall y \in V \quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Preuve

1. *Nécessité.*

Supposons que A est un ensemble inclu dans un compact D de $C(K, E)$.

- *Montrons que $A(x)$ est relativement compact. Fixons un élément x de K . Considérons la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} F : (C(K, E), d_\infty) &\longrightarrow (E, d_E) \\ f &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

On remarque que F est continue car

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{t.q.} \quad d_\infty(f_1, f_2) \leq \delta_\varepsilon \implies d_E(f_1(x), f_2(x)) \leq \varepsilon$$

on aura donc $d_E(f_1(x), f_2(x)) \leq d_\infty(f_1, f_2) = \sup_{x \in K} |f_1(x) - f_2(x)|$ (il

suffit de prendre $\delta_\varepsilon = \varepsilon$)

Alors on a d'après le théorème 1.2.1 $F(D)$ est compacte, il résulte que

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

$D(x) = \{f(x), f \in D\}$ est compact, et puisque $A \subset D$ il s'ensuit que $A(x) \subset D(x)$ d'où $A(x)$ est relativement compact.

• Montrons maintenant l'équicontinuité de D au point x . Soit $\varepsilon > 0$, comme D est compact alors il existe un $\frac{\varepsilon}{3}$ -réseau fini $D_{\frac{\varepsilon}{3}} = \{f_1, \dots, f_n\}$ de D tq $d(f_j, f) < \frac{\varepsilon}{3}$, $j = 1, \dots, n$.

Par continuité de f_1, \dots, f_n , il existe un voisinage V de x tel que

$$\forall j \leq n \quad \forall y \in V \quad d(f_j(x), f_j(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Pour toute fonction f dans D et tout point y dans V , l'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_j(x)) + d(f_j(x), f_j(y)) + d(f_j(y), f(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

par conséquent D est équicontinu, ce qui implique que A est aussi équicontinu

2. Suffisance.

Supposons que D est l'adhérence de A dans $C(K, E)$.

• Montrons d'abord que A est précompact. L'équicontinuité de A et la compacité de K nous donnent l'existence d'un nombre fini de points $x_1, \dots, x_n \in K$ et des voisinages V_1, \dots, V_m de ces points tels qu'on ait à la fois

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$$

et

$$\forall f \in A, \forall x \in V_i \implies |f(x) - f(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (*)$$

Posons $L = \prod_{i=1}^m A(x_i) = \{f(x_1), \dots, f(x_m), f \in A\}$. Par hypothèse $\forall i = 1, \dots, n$ $A(x_i)$ est relativement compact dans E donc d'après le théorème de Tykhonov L est relativement compact.

Alors il existe $\{f_j\}_{j=1, \dots, n} \subset A$ telle que

$$L \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_j(x_1), \dots, f_j(x_m))$$

Montrons que $A \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\varepsilon}(f_j)$ ce qui implique que A est précompact.

En effet, pour $f \in A$ fixée quelconque, on choisit $x_i \in V_i$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f_j(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_j(x_i)| + |f_j(x_i) - f_j(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

D'où $f \in B_\varepsilon(f_j)$. Ainsi $A \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(f_j)$, par conséquent A est précompact.

• Montrons maintenant que D est un ensemble complet. Il suffit de montrer que toute suite de Cauchy d'éléments f de A converge dans $C(K, E)$. Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $A \subset C(K, E)$ alors on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geq N, d_\infty(f_q, f_p) \leq \varepsilon \implies \sup_{x \in K} |f_q(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$$

Pour tout point x de K , la suite $f_n(x)$ est de Cauchy et à valeur dans $A(x)$, dont l'adhérence dans E est compacte donc complète, donc cette suite admet dans E une limite $f(x)$. Or par équicontinuité de A la convergence de f_n vers f est uniforme sur K , car la topologie de la convergence simple et celle de la convergence uniforme coïncident sur A (pour plus de précisions voir [22]).

Ce qui prouve que D est complet. Ainsi D est complet et précompact, il résulte alors du théorème de Hausdorff 1.1.5 que A est relativement compact.

Corollaire 1.3.2 Soient X un espace topologique compact non vide et Y un espace métrique compact. Les parties relativement compactes de $C(X, Y)$ sont les parties équicontinues.

Exemples 3 .

Considérons dans $C[a, b]$ un ensemble M de fonctions x continûment dérivables sur $[a, b]$ et telles que $x(a) = x_0$ et $|x(t)| \leq m$ sur $[a, b]$. (Les nombres x_0 et m sont les mêmes pour tous les $x \in M$, $m > 0$). Montrons, à l'aide du théorème d'Arzela, que M est compact.

Toute fonction $x(t) \in M$ peut être mise sous la forme

$$x(t) = x_0 + \int_0^t x'(s) ds$$

d'où $|x(t)| \leq |x_0| + m(b - a)$. Ensuite

$$|x(t') - x(t'')| = \left| \int_{t'}^{t''} x'(s) ds \right| \leq m|t'' - t'|$$

Ces inégalités montrent que les fonctions de M sont uniformément bornées et équicontinues. Par conséquent, M est compact.

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

1.3.2 Critère de compacité dans $L_p[a, b]$

Définissons d'abord l'espace L_p .
L'espace L_p est l'espace des fonctions mesurables p -intégrables muni de la norme $\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$, plus précisément

$$L_p = \left\{ x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

Soit $x \in L_p[a, b]$; $1 < p \leq \infty$. Prolongeons la fonction x à l'extérieur de $[a, b]$ en posant $x(t) = 0$, $t \notin [a, b]$.

Théorème 1.3.5 *Pour qu'un ensemble $M \subset L_p[a, b]$ soit relativement compact, il est nécessaire et suffisant que les fonctions $x(t)$ de cet ensemble soient uniformément bornées en norme et équicontinues en p -moyenne, i.e.*

1. $\exists c > 0$ tq $\|x\|_{L_p} \leq c$, $\forall x \in M$
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$ tq $\forall 0 \leq h \leq \delta(\varepsilon)$ $\|x(\cdot + h) - x(\cdot)\|_{L_p} < \varepsilon$ $\forall x \in M$.

• *Nécessité. la condition 1 est remplie de toute évidence.*

Prouvons la condition 2. L'ensemble M étant relativement compact, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\frac{\varepsilon}{3}$ -réseau, $M_{\frac{\varepsilon}{3}} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$. Les fonctions de $L_p[a, b]$ étant continues en p -moyenne, pour tout i il existe un δ_i tel que

$$\int_a^b |x_i(t+h) - x_i(t)|^p dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

pour $0 < h < \delta_i$. Soit $\delta = \min_i \delta_i$. Alors

$$\int_a^b |x_i(t+h) - x_i(t)|^p dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

pour $0 < h < \delta$ et pour tout $i = 1, 2, \dots, n$

Prenons maintenant une fonction arbitraire $x(t)$ de M . Il existe une fonction $x_i(t)$ telle que

$$\int_a^b |x(t) - x_i(t)|^p dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

Pour $0 < h < \delta$ on a

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

$$\begin{aligned}
 \left(\int_a^b |x(t+h) - x(t)|^p dt \right)^{1/p} &\leq \left(\int_a^b |x(t+h) - x_i(t+h)|^p dt \right)^{1/p} \\
 &\quad + \left(\int_a^b |x_i(t+h) - x_i(t)|^p dt \right)^{1/p} \\
 &\quad + \left(\int_a^b |x_i(t) - x(t)|^p dt \right)^{1/p} \\
 &< \left(\int_a^b |x(t+h) - x_i(t+h)|^p dt \right)^{1/p} + \frac{2\varepsilon}{3}
 \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |x(t+h) - x_i(t+h)|^p dt &= \int_{a+h}^{b+h} |x(s) - x_i(s)|^p ds \\
 &\leq \int_a^b |x(s) - x_i(s)|^p ds \\
 &< \left(\frac{\varepsilon}{3} \right)^p
 \end{aligned}$$

(on s'est servi du fait que $x(t)$ et $x_i(t)$ sont nulles à l'extérieur de $[a, b]$).
Les deux dernières inégalités entraînent

$$\left(\int_a^b |x(t+h) - x(t)|^p dt \right)^{1/p} < \varepsilon$$

pour $0 < h < \delta$ et puisque $x(t)$ est une fonction arbitraire de M , la nécessité de la condition 2 est prouvée.

• *Suffisance.* Considérons les moyennes de la fonction de Steklov

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) d\tau$$

On a pour h fixé et $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
 |x_h(t)| = \frac{1}{2h} \left| \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) d\tau \right| &\leq \frac{1}{2h} \left(\int_{t-h}^{t+h} d\tau \right)^{1/q} \left(\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} && \text{Inégalité de Hölder} \\
 &\leq \left(\frac{1}{2h} \right)^{1/p} \left(\int_a^b |x(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \\
 &\leq \left(\frac{1}{2h} \right)^{1/p} \|x\|_{L^p} \quad (3)
 \end{aligned}$$

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

et pour $0 < u < \delta$

$$\begin{aligned}
|x_h(t+u) - x_h(t)| &= \frac{1}{2h} \left| \int_{t+u-h}^{t+u+h} x(\tau) d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) d\tau \right| \\
&= \frac{1}{2h} \left| \int_{t-h}^{t+h} x(\tau+u) d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \left(\frac{1}{2h} \right) \int_{t-h}^{t+h} |x(\tau+u) - x(\tau)| d\tau \\
&\leq \left(\frac{1}{2h} \right)^{1/p} \left(\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau+u) - x(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\frac{1}{2h} \right)^{1/p} \left(\int_a^b |x(\tau+u) - x(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\frac{1}{2h} \right)^{1/p} \|x(\cdot+u) - x(\cdot)\|_{L^p} \quad (4)
\end{aligned}$$

Des conditions 1 et 2 et des inégalités (3) et (4) il s'en suit que les fonctions de la famille $\{x_h(t)\}$, où $x(t) \in M$, sont uniformément bornées et équicontinues pour h fixé. Donc en vertu du théorème d'Arzela cette famille est relativement compacte pour la convergence uniforme et a fortiori pour la convergence en moyenne d'ordre p . Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
|x(t) - x_h(t)| &\leq \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |x(t) - x(\tau)| d\tau \\
&= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |x(t) - x(t+\tau)| d\tau \\
&\leq \left(\frac{1}{2h} \right)^{1/p} \left(\int_{-h}^h |x(t) - x(t+\tau)|^p d\tau \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_a^b |x(t) - x_h(t)|^p dt &\leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left\{ \int_a^b |x(t) - x(t+\tau)|^p d\tau \right\} dt \\
&= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left\{ \int_a^b |x(t) - x(t+\tau)|^p dt \right\} d\tau \\
&< \frac{1}{2h} \varepsilon^p \int_{-h}^h d\tau \\
&= \varepsilon^p
\end{aligned}$$

puisque en vertu de la condition 2 $\int_a^b |x(t+\tau) - x(t)|^p dt < \varepsilon^p$ si $|\tau| < \delta$.
Donc la famille $\{x_h(t)\}$ forme un ε -réseau pour l'ensemble M et puisque cet

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

ε -réseau est relativement compact, il en est de même de l'ensemble M en vertu du corollaire du théorème de Hausdorff.

1.3.3 Critère de compacité dans l_p

Définissons d'abord l'espace l_p .
L'espace l_p est l'espace des suites numériques ($1 < p < \infty$) tel que $l_p = (\mathbb{R}_p^\infty, \|\cdot\|_p)$ avec $\mathbb{R}_p^\infty = \{(\xi_n)_{n \geq 1} = x, \sum_{n \geq 1} |\xi_n|^p < \infty\}$ et $\|x\|_p = \left(\sum_{n \geq 1} |\xi_n|^p\right)^{1/p}$, plus précisément

$$l_p = \left\{ x = (\xi_n)_{n \geq 1}, \|x\|_p = \left(\sum_{n \geq 1} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

On note par $l_p^{(n)}$ l'espace $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ où pour tout $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ on a $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p\right)^{1/p}$. Ainsi $l_p^{(n)} \subset l_p$

Dans cette partie nous utiliserons la notion d'opérateur linéaire explicitée dans la partie annexe de ce document.

Définition 1.3.4 Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Un ensemble d'éléments $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ de E est une base de E si tout élément $x \in E$ peut être représenté d'une seule façon sous la forme $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$, où ξ_i sont des nombres réels ou complexes.

Soit $E = l_p$. L'ensemble des éléments $e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots), \dots$ forme une base dans l_p , puisque tout $x \in l_p$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ si $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$

Soit maintenant E un espace de Banach ayant une base $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$. Considérons un espace de Banach F dont les éléments sont les suites numériques $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots\}$ telles que la série $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i$ converge. On munit F de la

norme $\|y\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \right\|$
Considérons un opérateur

$$\begin{aligned} A : E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow y_x \end{aligned}$$

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

où $x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i$ et $y_x = \{\eta_i\}_{i \geq 1}$, appliquant bijectivement F sur E . Il est immédiat de voir que l'opérateur A est linéaire. En outre, il est borné. En effet,

$$\|Ay\| = \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i \right\| \leq \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \right\| = \|y\|$$

Donc l'opérateur A est un opérateur linéaire continu borné de F sur E . d'après le théorème 6 (annexe), il existe un opérateur inverse $y = A^{-1}x$ qui est aussi linéaire, continu et borné.

Définition 1.3.5 (*Partition de l'opérateur identique*).

Soit x un élément quelconque de E , alors

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i e_i$$

et à chaque élément $x \in E$ on peut associer deux éléments uniques $y_n = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ et $z_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i e_i$. Ces égalités définissent deux opérateurs $y_n = S_n x$ et $z_n = R_n x$ de E dans E , de sorte

$$Ix = S_n x + R_n x$$

Il est évident que S_n et R_n sont des opérateurs linéaires bornés pour chaque n fixe. En effet, leur linéarité est évidente, quant au fait qu'il soient bornés, il résulte de l'inégalité

$$\|S_n x\| \leq \sup_m \left\| \sum_{i=1}^m \xi_i e_i \right\| = \|A^{-1}x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|x\|$$

et de façon analogue on a

$$\begin{aligned} \|R_n x\| &= \|x - S_n x\| \leq \|x\| + \|S_n x\| \\ &\leq \|A^{-1}x\| + \|A^{-1}x\| \\ &\leq 2\|A^{-1}\| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

Théorème 1.3.6 Pour qu'un ensemble fermé $M \subset l_p$ soit compact, il est nécessaire et suffisant qu'il soit borné et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang n_0 dépendant uniquement de ε à partir duquel $\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p$ pour tout $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\} \in M$.

1.3. ENSEMBLES COMPACTS DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

• *Nécessité.* L'ensemble M étant compact donc nécessairement borné. D'autre part, en prenant $\delta > 0$ il existe un δ -réseau fini $M_\delta = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, donc $\forall x \in M$ il existe un $x_i \in M_\delta$ pour $i = 1, \dots, k$ tq $d(x, x_i) < \delta$. Par ailleurs on sait que dans l_p chaque élément $x \in l_p$ peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{j \geq 1} \xi_j e_j = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_j e_j = S_n x + R_n x$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \|R_n x\| &= \|x - S_n x\| \\ &\leq \|x - x_i\| + \|x_i - S_n x\| \\ &\leq \|x - x_i\| + \|S_n x_i - S_n x\| + \|R_n x_i\| \\ &\leq (1 + \|A^{-1}\|) \|x - x_i\| + \|R_n x_i\| \\ &< (1 + \|A^{-1}\|) \delta + \|R_n x_i\| \end{aligned}$$

Pour tout x fixé $R_n x \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Il existe donc un n_0 tel que $\|R_n x_i\| < \delta$ pour $n \geq n_0$. Mais alors $\|R_n x\| < (2 + \|A^{-1}\|) \delta$ pour $n \geq n_0$. Il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{2 + \|A^{-1}\|}$, par conséquent on aura :

$$\|R_n x\| = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} < \delta < \varepsilon$$

Ainsi l'inégalité souhaitée est établie.

• *Suffisance.* Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. Prenons n tel que $\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p$ pour tout x de M et fixons ce n . Pour $x = \{\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots\} \in M$ posons $x_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots\}$. On voit que $\|x - x_n\| < \varepsilon$ et $M_n = \{x_n | x \in M\}$ est un ε -réseau pour M .

À chaque x_n de M_n associons l'élément \tilde{x}_n de l'espace $l_p^{(n)}$ ayant pour coordonnées les n premières coordonnées de x .

$$\begin{aligned} X_n : M_n &\longrightarrow l_p^{(n)} \\ x_n &\longrightarrow \tilde{x}_n \end{aligned}$$

Cette correspondance est un homéomorphisme, du fait que $\|x_n\| = \|\tilde{x}_n\|$. Soit $\tilde{M}_n = \{\tilde{x}_n | x_n \in M_n\}$. Il est immédiat de voir que \tilde{M}_n de l'espace à dimension finie $l_p^{(n)}$ est un ensemble borné puisque M est borné, d'autre part sa fermeture est compacte donc \tilde{M}_n est relativement compact et comme $l_p^{(n)}$ est de dimension finie alors \tilde{M}_n est compact. Par conséquent, M_n est aussi compact. Il résulte du corollaire 1.1.1 de Hausdorff que M est compact.

Chapitre 2

Topologie faible et compacité

La méthode la plus directe pour définir la topologie d'un espace consiste à indiquer tout simplement les ensembles qu'il convient de considérer comme ouverts. Ainsi, on introduit la topologie sur les espaces normés à l'aide de leurs normes, dite topologie de la norme.

Cette topologie est en fait fine, elle contient trop d'ouverts et c'est la raison pour laquelle, en dimension infinie, les espaces normés ne présentent pas de bonnes propriétés topologiques : les parties fermées bornées ne sont pas compactes.

Dans ce qui suit on se proposera de définir une nouvelle topologie sur E moins fine contenant moins d'ouverts, dite topologie faible.

Cette topologie s'avérera très riche en parties compactes et possède la propriété d'extraction de sous-suites.

Elle n'est toutefois pas métrisable et donc ne peut pas être entièrement décrite par la norme.

2.1 Topologies faibles sur E

Pour présenter la topologie faible, on a besoin d'introduire la définition du dual d'un espace de Banach

2.1.1 Espaces duals

Définition 2.1.1 *L'ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé forme un espace de Banach E^* appelé espace dual de E . On peut construire $E^{**} = (E^*)^*$, et ainsi de suite.*

*Étudions maintenant l'espace E^{**} en détail. Cet espace qui s'appelle bidual de E est l'espace des fonctionnelles linéaires continues définies sur E^**

2.1. TOPOLOGIES FAIBLES SUR E

Considérons l'application canonique

$$\begin{aligned} \pi : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longrightarrow \pi_x \end{aligned} \tag{2.1}$$

définie par $\pi_x(f) = f(x), \forall f \in E^*$

Ainsi à tout $x \in E$ est associée une fonctionnelle bien définie $\pi_x \in E^{**}$ et cette correspondance entre E et $\pi(E) \subset E^{**}$ est isomorphe et isométrique. Autrement dit, on peut identifier E à $\pi(E) \subset E^{**}$.

Exemples d'espaces duals

1. **Espace dual de l'espace** $L_p([0, 1], \|\cdot\|_p), 1 < p < \infty$.

Soit $X = L_p[0, 1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$, telle que $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Considérons simultanément l'espace $L_q[0, 1]$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Il existe une bijection entre l'espace $L_p^*[0, 1]$ et l'espace $L_q[0, 1]$, puisqu'à toute fonctionnelle f de $L_p^*[0, 1]$ est associée une seule fonction $g(t)$ de $L_q[0, 1]$ et réciproquement, cette correspondance est isomorphe et isométrique i.e

$$L_p^*[0, 1] = L_q[0, 1]$$

à un isomorphisme isométrique près. Plus précisément toute fonctionnelle linéaire f sur L_p s'écrit d'une façon unique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f : L_p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \int_0^1 x(t)g(t)dt \end{aligned}$$

où $g \in L_q$. (pour plus de détails voir [13] p.164-168)

En particulier, pour $p = 2$ on a $L_2^*[0, 1] = L_2[0, 1]$. Pour cette raison l'espace $L_2[0, 1]$ s'appelle espace ipsodual.

2. **Espace dual de l'espace** $l_p, 1 < p < \infty$.

Pour l'espace l_p muni de la norme $\|\cdot\|_p$, telle que $\|x\|_p = \left(\sum_{n \geq 1} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

on montre de manière analogue (comme pour L_p) que $l_p^* = l_q$, et que l_2 est ipsodual en se servant de la forme générale des fonctionnelles linéaires sur l_p . Plus précisément, toute fonctionnelle linéaire sur l_p s'écrit de façon unique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f : l_p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \sum_{k \geq 1} c_k \xi_k \quad , \quad x = \{\xi_k\}_{k \geq 1} \end{aligned}$$

2.1. TOPOLOGIES FAIBLES SUR E

avec $y = \{c_k\}_{k \geq 1} \in l_q$ (voir [13] p. 163-164).

3. Espace dual de $C([0, 1], \mathbb{R})$.

Pour caractériser le dual de l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, on commence par rappeler la définition d'une fonction à variation bornée.

Définition 2.1.2 Une fonction f , définie sur le segment $[a, b]$, s'appelle fonction à variation bornée, s'il existe une constante c telle que pour toute subdivision du segment $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

on ait

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq c \quad (1)$$

Remarque 2.1.1 Toute fonction monotone est à variation bornée, car la somme figurant au premier membre de l'inégalité (1) pour une telle fonction ne dépend pas du choix de la subdivision et vaut toujours $|f(b) - f(a)|$.

Définition 2.1.3 Soit f une fonction à variation bornée. La borne supérieure des sommes (1) pour toutes les subdivisions finies possibles du segment $[a, b]$ s'appelle variation totale de la fonction f sur le segment $[a, b]$ et se note $V_{[a,b]}[f]$. Ainsi,

$$V_{[a,b]}[f] = \sup \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

Remarque 2.1.2 Si f est à variation bornée, alors cette borne supérieure $V_{[a,b]}(f)$ est finie.

Considérons l'ensemble de toutes les fonctions g à variation bornée définies sur $[0, 1]$ et nulles en $t = 0$, qu'on notera par V_r . On admettra que $g(t) = g(t - 0)$ aux points de discontinuité. On munit cet espace par la norme $\|\cdot\|_{V_r}$ donnée par $\|g\| = V_{[0,1]}(g)$.

Considérons d'autre part l'espace $X^* = C^*([0, 1])$ des fonctionnelles définies sur $C([0, 1])$, il existe une bijection entre l'espace $C^*([0, 1])$ et V_r . Ces espaces sont isomorphes et isométriques donc on a bien $C^*([0, 1]) = V_r$. Plus précisément on a :

2.1. TOPOLOGIES FAIBLES SUR E

Théorème 2.1.1 *Toute fonctionnelle linéaire définie sur l'espace $C([0, 1])$ s'exprime à l'aide de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes (voir annexe) par la formule $f(x) = \int_0^1 x(t)dg(t)$, où g est une fonction à variation bornée qui se définit à l'aide de la fonctionnelle f . (Pour la preuve voir [13] p.161)*

Donnons maintenant la définition de la topologie faible.

Définition 2.1.4 *Soient E un espace de Banach et E^* son dual. La topologie faible sur E , notée $\sigma(E, E^*)$ est définie comme suit : Pour chaque $x_0 \in E$, on considère la famille d'ensembles $V(x_0)$, dont les éléments $v \in V(x_0)$ sont donnés par :*

$$v = V(x_0, f_1, \dots, f_n, \varepsilon) = \{x \in E, |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \forall i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2)$$

$\forall \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, \forall f_i \in E^*$.

La famille $V(x_0)$ est une base de voisinages en x_0 de $\sigma(E, E^)$*

Une base de voisinages de zero $V(0)$, est constituée par la famille des éléments $u \in V(0)$ définis par :

$$u = U(0, f_1, \dots, f_n, \varepsilon) = \{x \in E, |f_1| < \varepsilon, \dots, |f_n| < \varepsilon\}, \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, \forall f_i \in E^*$$

De ce fait on a $V(x_0, f_1, \dots, f_n, \varepsilon) = x_0 + U(0, f_1, \dots, f_n, \varepsilon)$

Par ailleurs la topologie \star -faible sur E^ , notée $\sigma(E^*, E)$ est définie par la base de voisinages suivante :*

$$v = V(x_1, \dots, x_n, f_0, \varepsilon) = \{f \in E^*; |f(x_1) - f_0(x_1)| < \varepsilon, \dots, |f(x_n) - f_0(x_n)| < \varepsilon\} \quad (3)$$

$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1, \text{ pour tout } x_1, \dots, x_n \in E$.

Une définition équivalente des topologies faible et \star -faible est donnée comme suit :

Définition 2.1.5 *Soient (E, τ) un espace vectoriel topologique et E^* son dual topologique. On suppose que E^* sépare les points de E^1*

1. *La topologie faible sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $f \in E^*$*
2. *La topologie \star -faible est la topologie la moins fine sur E^* rendant continues toutes les formes linéaires*

$$\begin{aligned} \pi : E^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longrightarrow \pi_x(f) \end{aligned}$$

lorsque x parcourt E , où $\pi_x(f) = f(x)$, pour tout $f \in E^$.*

-
1. Autrement dit, pour tout $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

2.1. TOPOLOGIES FAIBLES SUR E

Remarque 2.1.3 Lorsque $\dim E$ est finie alors les trois topologies forte, $\sigma(E, E^*)$ et $\sigma(E^*, E)$ coïncident sur E .

Remarque 2.1.4 .

1. Les ouverts (resp. les fermés) de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ sont aussi ouverts (resp. fermés) pour la topologie forte. Lorsque E est de dimension infinie la topologie faible est strictement moins fine que la topologie forte i.e il existe des ouverts (resp. des fermés) pour la topologie forte qui ne sont pas ouverts (resp. fermés) pour la topologie faible.
2. L'ensemble $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ n'est jamais fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.
3. L'ensemble $U = \{x \in E, \|x\| < 1\}$ n'est jamais ouvert pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. (voir [3] p.37)
4. Comme $E \subset E^{**}$, il est clair que la topologie $\sigma(E^*, E)$ est moins fine que la topologie $\sigma(E^*, E^{**})$. Autrement dit la topologie $\sigma(E^*, E)$ possède moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie $\sigma(E^*, E^{**})$.

Théorème 2.1.2 Soit M un ensemble convexe d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$. Alors M est fermé pour la topologie faible ssi il l'est pour la norme. (pour la preuve voir [3] p.38)

Corollaire 2.1.1 Soit $\phi : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, semi-continue inférieurement pour la topologie de la norme. Alors, ϕ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

En particulier si x_n converge faiblement vers x pour $\sigma(E, E^*)$, alors

$$\phi(x) \leq \underline{\lim} \{\phi(x_n)\}$$

(voir aussi [3] p.38)

2.1.2 Convergence faible dans un espace normé

La convergence dans E , définie par cette topologie, constitue une notion importante que l'on appelle convergence faible.

La convergence en norme est souvent appelée convergence forte.

Définition 2.1.6 On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$ d'un espace de Banach E est faiblement convergente si pour toute application $f \in E^*$ la suite numérique $\{f(x_n)\}$ est convergente i.e, $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge faiblement vers $x \in E$ ssi $\forall f \in E^*, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$

2.2. COMPACTITÉ FAIBLE

La notion de convergence faible peut être formulée de la manière suivante : Une suite $\{x_n\}_{n \geq 0}$ converge faiblement vers $x \in E$, lorsqu'elle converge vers x pour la topologie $\sigma(E, E^*)$, c-à-d : $\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1, \exists n_\varepsilon / p \geq n_\varepsilon \implies x_p \in V(x_0, f_1, \dots, f_n, \varepsilon)$.

Proposition 2.1.1 (Pour la preuve voir [7]) Soient $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ et $x \in E$. Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite dans E^* et $f \in E^*$. Alors on a :

1. $(x_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers x si et seulement si $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.
2. Si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x pour la norme, alors $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x pour la topologie faible et la suite $(\|x_n\|)_{n \geq 0}$ converge vers $\|x\|$
3. Si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x pour la topologie faible, alors la suite $(\|x_n\|)_{n \geq 0}$ est bornée et on a $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$. Si de plus, pour tout $n \geq 0$, on a $\|x_n\| \leq \|x\|$ alors $(\|x_n\|)_{n \geq 0}$ converge vers $\|x\|$
4. Si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x pour la topologie faible et si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans E^* pour la norme, alors $(f_n(x_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(x)$
5. Si $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach et si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans E^* pour la topologie \star -faible, alors la suite $(\|f_n\|)_{n \geq 0}$ est bornée et on a $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow 0} \|f_n\|$. De plus, si pour tout $n \geq 0$, on a $\|f_n\| \leq \|f\|$, alors $(\|f_n\|)_{n \geq 0}$ converge vers $\|f\|$
6. Si $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach, on a $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x pour la norme et $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans E^* pour la topologie \star -faible, implique que $(f_n(x_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(x)$.

Remarque 2.1.5 En ce qui concerne la continuité pour la topologie faible, comme tout ouvert pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ est ouvert pour la topologie de la norme, il résulte qu'une fonction faiblement continue est continue pour la topologie de la norme (ou continue tout court) mais l'inverse n'est pas vrai, car un ouvert pour la topologie forte n'est pas forcément ouvert pour la topologie faible.

D'autre part une fonction \star -faiblement continue est faiblement continue l'inverse n'est pas vrai puisque la topologie \star -faible est moins fine que la topologie faible.

2.2 Compacité faible

L'intérêt principale de la topologie faible est de nous permettre d'obtenir des résultats de compacité. On sait que si E est un espace normé de dimension infinie la boule unité fermée n'est pas compacte. Jusqu'à un certain

2.2. COMPACITÉ FAIBLE

point, la topologie faible nous permettra d'éviter cet inconvénient.

Le théorème suivant est très important et d'usage fréquent dans les applications de l'analyse fonctionnelle.

Bornons-nous au cas d'un espace réel.

Théorème 2.2.1 (Alaoglu) *La boule unité fermée $\overline{B^*}(0, 1)$ de l'espace E^* dual d'un espace vectoriel normé E est \star -faiblement compacte.*

Preuve

Associons à tout $x \in E$ la droite numérique $\mathbb{R}_x =]-\infty, \infty[$ et dans le produit direct $T = \prod_{x \in E} \mathbb{R}_x$ muni de la topologie produit, considérons l'ensemble $M =$

$\prod_{x \in E} [-\|x\|, \|x\|]$. L'ensemble M est compact en vertu du théorème de Tykhonov 1.1.1.

Appliquons E^* dans T en associant à chaque f de E^* le point $t(f)$ de T de coordonnées $t_x(f) = f(x)$.

$$\begin{aligned} t : E^* &\longrightarrow T \\ f &\longrightarrow t(f) \end{aligned}$$

Soit Y l'ensemble des points $t(f)$. Si K est l'image de $\overline{B^*}(0, 1)$ par cette application, alors $K \subset M$.

Montrons que l'ensemble K est fermé dans T pour la topologie produit. En effet, soit $t_0 = t_x^0$ un point d'accumulation de K . Définissons une fonctionnelle f_0 sur E en posant $f_0(x) = t_x^0$.

Montrons que $f_0 \in \overline{B^*}(0, 1)$. Pour tous $x_1, x_2 \in E$ et $\varepsilon > 0$, considérons un voisinage u de t dans lequel seuls $u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1+x_2}$ sont distincts de la droite \mathbb{R}_x et respectivement égaux à $]t_{x_1}^0 - \varepsilon, t_{x_1}^0 + \varepsilon[$, $]t_{x_2}^0 - \varepsilon, t_{x_2}^0 + \varepsilon[$ et $]t_{x_1+x_2}^0 - \varepsilon, t_{x_1+x_2}^0 + \varepsilon[$. Il existe alors un point $t \in K$ tel que $t \in t_0 + u$. Ceci exprime que $|t_{x_1} - t_{x_1}^0| < \varepsilon$, $|t_{x_2} - t_{x_2}^0| < \varepsilon$, $|t_{x_1+x_2} - t_{x_1+x_2}^0| < \varepsilon$. Puisque $t \in K$, il vient que $t_{x_1} = f(x_1)$, $t_{x_2} = f(x_2)$, $t_{x_1+x_2} = t_{x_1} + t_{x_2} = f(x_1) + f(x_2)$ pour une fonctionnelle $f \in \overline{B^*}(0, 1)$. Mais alors

$$\begin{aligned} |f_0(x_1 + x_2) - f_0(x_1) - f_0(x_2)| &= |t_{x_1+x_2}^0 - t_{x_1}^0 - t_{x_2}^0| \\ &\leq |t_{x_1+x_2}^0 - t_{x_1+x_2}| + |t_{x_1}^0 - t_{x_1}| + |t_{x_2}^0 - t_{x_2}| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

et puisque ε est arbitraire, la dernière inégalité exprime que $f_0(x_1 + x_2) = f_0(x_1) + f_0(x_2)$

Et de façon analogue pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe un $t_{\lambda x} \in \lambda t_x^0 + u$ i.e $|t_{\lambda x} - \lambda t_x^0| < \varepsilon$, et comme $t \in K$ on a $t_{\lambda x} = \lambda t_x$

2.3. COMPACTITÉ DANS LES ESPACES RÉFLEXIFS

cela implique

$$\begin{aligned} |t_{\lambda x}^0 - \lambda t_x^0| &\leq |t_{\lambda x} - \lambda t_x^0| + |\lambda t_x^0 - \lambda t_x| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

Par conséquent $t_{\lambda x}^0 = f_0(\lambda x) = \lambda t_x^0 = \lambda f_0(x)$.

Et comme $K \subset M$ on a alors

$$|f_0(x)| \leq \|x\|$$

Donc $f_0 \in \overline{B^*}(0, 1)$, $t_0 = t(f_0) \in K$.

L'ensemble K est compact dans T , puisque c'est un sous-ensemble fermé de l'ensemble compact M . Or, on vérifie immédiatement de la définition 2.1.4 que la topologie produit sur $Y \supset K$ est en même temps la topologie faible de E^* , ce qui prouve la faible compacité de $\overline{B^*}(0, 1)$.

Corollaire 2.2.1 Toute boule des espaces l_p et $L_p[a, b]$, $1 < p < \infty$, est \star -faiblement compacte.

Ceci résulte du fait que $l_p = l_q^*$ et $L_p[a, b] = L_q^*[a, b]$.

Dans ce qui suit, on se proposera de définir la notion d'espace réflexif et d'étudier quelques propriétés des espaces de Banach réflexifs concernant la topologie faible.

2.3 Compacité dans les espaces réflexifs

2.3.1 Définitions et propriétés

Définition 2.3.1 Soit π l'application canonique définie par (2.1). On dira que l'espace E est réflexif lorsque $\pi(E) = E^{**}$

Si E est réflexif, l'isométrie π permet d'identifier E et E^{**} et on écrit dans ce cas $E = E^{**}$

Exemples 4 .

1. L'espace euclidien \mathbb{R}^n est réflexif. En effet, si $E = \mathbb{R}^n$, il en est de même de E^* et donc de E^{**} .
2. L'espace $L_p[0, 1]$ ($1 < p < \infty$) est réflexif. En effet,

$$L_p^{**}[0, 1] = (L_p^*[0, 1])^* = (L_q[0, 1])^* = L_p[0, 1]$$

Notons que L_1 et L_∞ ne sont pas réflexifs.

2.3. COMPACTITÉ DANS LES ESPACES RÉFLEXIFS

3. L'espace l_p ($1 < p < \infty$) est réflexif, on procède comme précédemment

$$l_p^{**} = (l_p^*)^* = (l_q)^* = l_p$$

4. L'espace $C[0, 1]$ n'est pas réflexif.

Supposons par absurde que $C([0, 1])$ est réflexif. Toute fonctionnelle linéaire π définie sur l'espace des fonctions à variation bornée doit alors être de la forme $\pi_x(f) = f(x)$, où x est un élément de $C([0, 1])$ convenablement choisi. D'après le théorème 2.1.1 on a toute fonctionnelle linéaire $\pi(f)$ est de la forme

$$\pi_x(f) = f(x) = \int_0^1 x(t)dg(t) \quad (1)$$

(par $g(t)$ on désigne la fonction à variation bornée correspondant à la fonctionnelle $f(x)$ de $C^*([0, 1])$). Considérons la fonctionnelle

$$\pi_0(f) = g(t_0 + 0) - g(t_0 - 0)$$

qui à toute fonction $g(t)$ à variation bornée associe le saut de cette fonction au point t_0 . On a

$$|\pi_0(f)| = |g(t_0 + 0) - g(t_0 - 0)| \leq V_{[0,1]}(f) = \|f\|$$

Donc $\pi_0(f)$ est bornée et sa norme est ≤ 1 . De plus, il est évident que $\pi_0(f)$ n'est pas identiquement nulle. En effet, il suffit de considérer $\pi_0(f_1)$, où

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & \text{pour } t_0 < t \leq 1 \end{cases}$$

De l'égalité (1) il s'ensuit qu'il existe une fonction continue $x_0(t)$ telle que

$$\pi_0(f) = \pi_{x_0}(f) = \int_0^1 x_0(t)dg(t)$$

Considérons maintenant la fonction $g_0(t) = \int_0^t x_0(\tau)d\tau$. On a $\pi_{x_0}(f_0) = 0$, puisque $g_0(t)$ est continue sur $[0, 1]$. Mais d'autre part, on a $\pi_0(f)$ n'est pas identiquement nulle il résulte que $x_0(t)$ est aussi non identiquement nulle et

$$\pi_{x_0}(f_0) = \int_0^1 x_0(t)dg_0(t) = \int_0^1 x_0^2(t)dt > 0$$

2.3. COMPACTITÉ DANS LES ESPACES RÉFLEXIFS

ce résultat s'obtient grâce à la propriété de l'intégrale de Stieltjes², cette contradiction avec le fait que toute fonctionnelle linéaire π de $C^*([0, 1])$ est de la forme π_x prouve que $C([0, 1])$ n'est pas réflexif.

Théorème 2.3.1 (Kakutani). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) E est réflexif.

(ii) $B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible.

Pour démontrer ce théorème on a besoin du résultat suivant :

Théorème 2.3.2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, E^* son dual et E^{**} son bidual. Pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$ la boule unité fermée $B_{E^*} = \{x \in E^*, \|x\| \leq 1\}$ est dense dans $B_{E^{**}} = \{x \in E^{**}, \|x\| \leq 1\}$. (pour la preuve voir [1], p.37)

Preuve du théorème 2.3.1

Montrons l'implication (i) \implies (ii). Si E est réflexif, alors on a $E = E^{**}$ et ainsi on a $B_E = B_{E^{**}}$. D'après le théorème 2.2.1, $B_{E^{**}}$ munie de la topologie \star -faible est compacte. On déduit que B_E muni de la topologie faible est aussi compacte.

Inversement (ii) \implies (i). Supposons B_E est faiblement compacte. Puisque l'application canonique $\pi : E \longrightarrow E^{**}$ est continue de $\sigma(E, E^*)$ dans $\sigma(E^{**}, E^*)$ (par définition de $\sigma(E, E^*)$), B_E est $\sigma(E^{**}, E^*)$ -compact dans E^{**} . Puisque elle est dense dans $B_{E^{**}}$ pour $\sigma(E^{**}, E^*)$, nous avons $B_{E^{**}} = B_E$, et comme π est isométriquement isomorphe, alors on a $E^{**} = E$ donc E est réflexif.

Comme conséquences du théorème 2.3.1 on a les propriétés suivantes :

Corollaire 2.3.1 Si E est réflexif, son dual E^* est aussi réflexif.

Preuve

Nous savons que $\overline{B^*}(0, 1)$ est $\sigma(E^*, E)$ -compact. Si E est réflexif, $\overline{B^*}(0, 1)$ est $\sigma(E^*, E^{**})$ -compact, donc d'après le théorème précédent, E^* est réflexif.

Corollaire 2.3.2 Si E est réflexif, il en est de même de tous ses sous-espaces fermés.

Preuve

Soient E un espace réflexif et F un sous-espace fermé de E , on a alors $\overline{B}(0, 1)$ est $\sigma(E, E^*)$ -compact et $\overline{B}_F(0, 1) \subset E$, il résulte donc que $\overline{B}_F(0, 1)$ est aussi $\sigma(E, E^*)$ -compact, par conséquent F est réflexif.

2. $\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$

2.3. COMPACTITÉ DANS LES ESPACES RÉFLEXIFS

Corollaire 2.3.3 *Si E^* est réflexif, alors E l'est aussi.*

Preuve Ceci résulte des deux corollaires précédents, si E^* est réflexive il en est de même de E^{**} et par suite E l'est aussi.

Remarque 2.3.1 .

1. Des deux théorèmes 2.2.1 et 2.3.1 on déduit que dans un espace réflexif les fermés bornés convexes sont faiblement compacts tandis que dans un espace non réflexif ces derniers sont \star -faiblement compacts
2. Si E est réflexif alors les topologies faible et \star -faible coïncident sur E^*
3. Tout espace de Banach réflexif est faiblement complet. (voir [18] p.227)

2.3.2 Application à l'optimisation

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in C} f(x) \tag{2.2}$$

f est une fonction réelle définie sur un ensemble E et C un sous ensemble de E .

Dans le cas de la topologie de la norme, pour f continue et C compact le théorème de Weierstrass 1.2.4 assure l'existence de points réalisant (2.2).

Dans le cas de la topologie faible les conditions d'existence de points réalisant (2.2) sont données par le théorème suivant :

Théorème 2.3.3 *Soit E un espace de Banach, si les conditions :*

1. E est un espace réflexif.
2. C est une partie convexe fermée et bornée de E .
3. f est faiblement semi-continue inférieurement.

sont vérifiées. Alors le problème (2.2) admet au moins une solution.

Remarque 2.3.2 1. Ce théorème est une version du théorème de Weierstrass, en considérant la topologie faible sur E . En effet, d'après le théorème 2.3.1 C est une partie convexe fermée et bornée d'un espace réflexif par suite C est faiblement compacte.

2. Si de plus f est convexe, on a du corollaire 2.1.1, f est faiblement semi-continue inférieurement, alors f est fortement semi-continue inférieurement.

Conclusion

Dans ce manuscrit nous avons présenté la notion de compacité pour la topologie de la norme et la topologie faible. Ainsi nous avons constaté son importance dans la recherche d'extrémums et dans la résolution de problèmes d'optimisation.

Annexe

Rappels de quelques résultats de topologie

Définition 1 On dit qu'une suite $\{x_n\}$ d'éléments d'un espace métrique E est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang $n_0(\varepsilon)$ à partir duquel $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Toute suite convergente $\{x_n\}$ vers x_0 est de Cauchy.

Théorème 1 (Bolzano-Weierstrass dans le cas réel). De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème 3. Les espaces vectoriels normés de dimension n sont isomorphes à l'espace euclidien \mathbb{R}^n et, par suite, isomorphe l'un à l'autre.

Lemme 1 (F. Riesz). Soit L un sous-espace d'un espace vectoriel normé E non confondu avec E . Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe dans E un élément y de norme unité tel que $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ pour tout x de L .

Définition 2 Un espace métrique E sera dit complet, si toute suite de Cauchy $\{x_n\} \subset E$ converge vers $x \in E$.

Citons quelques particuliers :

1. \mathbb{R}^n muni de l'une des métriques usuelles est complet
2. $C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la distance $d_\infty(f, g) = \sup_{[0,1]} |f(x) - g(x)|$ est complet.
3. $l_\infty(\mathbb{R}) = \{(x_n), \sup |x_n| < \infty\}$ muni de la métrique $d_\infty(Z, W) = \sup |x_n - y_n|$ avec $Z = (x_n)$, $W = (y_n)$ est complet.
4. $L_p([0, 1], \mathbb{R})$ est complet.

Définition 3 Un espace topologique X est dit séparé s'il satisfait au deuxième axiome de séparation ou axiome de Hausdorff : $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists V(x), V(y)$ tel que $V(x) \cap V(y) = \emptyset$.

2.3. COMPACTITÉ DANS LES ESPACES RÉFLEXIFS

Proposition 1 *Tout espace métrique est séparé.*

Proposition 2 *Pour qu'un point $b \in E$ soit valeur d'adhérence d'une suite $\{x_n\} \subset E$, il faut et il suffit que, pour tout voisinage V de b , et tout entier m , il existe un entier $n \geq m$ tel que $x_n \in V$.*

Définition 4 *Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés. On appelle opérateur linéaire toute application de E dans F qui vérifie la condition*

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2$$

Pour tout α, β dans \mathbb{K} et pour tout x_1, x_2 dans E

Un opérateur A est borné s'il existe une constante M telle que $\|Ax\| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$.

Le plus petit des nombres M vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur A et se note $\|A\|$

Un opérateur prenant des valeurs numériques s'appelle fonctionnelle.

Un opérateur $Ax = x$ pour tous les $x \in E$ qui transforme tout élément de l'espace en lui-même s'appelle opérateur identique.

Théorème 4 *Pour tout opérateur borné A d'un espace normé dans un espace normé, on a*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Théorème 5 *Soit A un opérateur linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est continu en 0.*
2. *A est continu en $x_0 \in E$.*
3. *A est borné.*
4. *A est uniformément continu sur E .*

Définition 5 *Soit A un opérateur de E dans F . A est dit inversible si pour tout $y \in F$ l'équation*

$$Ax = y$$

a une solution et une seule.

Si A est inversible, à chaque $y \in F$ on peut faire correspondre un élément et un seul $x \in E$ à savoir la solution de l'équation $Ax = y$. L'opérateur qui réalise cette correspondance s'appelle inverse de A et se note A^{-1} .

2.3. COMPACTITÉ DANS LES ESPACES RÉFLEXIFS

Théorème 6 *L'opérateur inverse d'un opérateur linéaire A , est aussi linéaire.*

Théorème 7 *Si un opérateur linéaire continu A applique bijectivement un espace de Banach E sur un espace de Banach F , il existe un opérateur linéaire continu A^{-1} inverse de A de F sur E .*

Définition 6 *Soit E un espace normé. Une fonction $f : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est semi-continue inférieurement (resp. faiblement semi-continue inférieurement) si*

$$x_k \rightarrow x \quad (\text{resp. } x_k \xrightarrow{\text{faiblement}} x) \implies \underline{\lim} f(x_k) \geq f(x).$$

Intégrale de Lebesgue-Stieltjes

Définition *Soit μ_g une mesure sur le segment $[a, b]$, engendrée par une fonction monotone g . Pour cette mesure on définit la classe des fonctions sommables et la notion d'intégrale de Lebesgue (pour plus de précision voir [11])*

$$\int_a^b f(x) d\mu_g$$

Une telle intégrale, prise par rapport à la mesure μ_g engendrée par la fonction g , s'appelle intégrale de Lebesgue-Stieltjes et se note

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

Considérons quelques cas particuliers.

1. *Si g est une fonction absolument continue, on a*

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

2. *Si l'une des intégrales de Lebesgue-Stieltjes $\int_a^b f dg$ ou $\int_a^b g df$ existe alors les deux existent et on a*

$$\int_a^b f dg = [fg]_a^b - \int_a^b g df$$

Bibliographie

- [1] B.Beauzamy, introduction to Banach spaces and their Geometry, Édition North-Holland, 1982.
- [2] N.Bourbaki, Éléments de mathématique, Topologie générale, Chapitres 1 à 4, Édition Springer, 2006.
- [3] Haim Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Édition Masson, Paris, 1983.
- [4] Elisabeth Burroni, La topologie des espaces métriques, Édition ellipses.
- [5] Jean Dieudonné, Éléments d'analyse, Tome 1, fondements de l'analyse moderne, Éditions Jacques Gabay, Paris 1979.
- [6] Jacques Dixmier, Topologie générale , Édition Press universitaire de France, 1981.
- [7] N.El Hage Hassan, Topologie générale et espaces normés, Édition Dunod, 2011.
- [8] Godfrey Harold Hardy,(traduit de l'anglais par Alexandre Moreau) Des mathématiques et mathématiciens, Édition Nitens, 2018
- [9] Einar Hille,Ralph S.Phillips Functional analysis and semi-groups, Édition Dutt press, 2007
- [10] John L.Kelley, General topology, Édition Springer, 1991.
- [11] A.Kolmogorov, S.Fomine, Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle , Éditions Mir-Moscou, 1998.
- [12] Komornik, Vilmos, Précis d'analyse réelle, volume 2, Analyse fonctionnelle, intégrale de Lebesgue, espaces fonctionnelle, Édition Ellipses, 2002.
- [13] L.Lusternik, V.Sobolev, Précis d'analyse fonctionnelle, Éditions Mir-Moscou, 1989.
- [14] <http://www.normalesup.org/~baglio/maths/Borel-Lebesgue.pdf>
- [15] Jean Paul Pier, Historica Mathematica 7 1980, 425-443, histoire de la notion de compacité, centre universitaire de Luxembourg, 126A avenue de la Faïencerie, Luxembourg.

BIBLIOGRAPHIE

- [16] Georges Skandalis, Topologie et analyse 3ème année, Édition Dunod coll Sciences Sup, 2004
- [17] Mannal Smaali, Thèse de Magister, Département de Mathématiques, Université de Tizi-Ouzou, 2003
- [18] V.Trénoguine, analyse fonctionnelle, Édition Mir, 1985
- [19] Claude Wagschal, Topologie et analyse fonctionnelle, Édition Hermann, coll Méthodes, 1995.
- [20] Michel Willem, Analyse convexe et optimisation, Édition Ciaco, 1987.
- [21] https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d'Ascoli#cite_ref-2
- [22] https://fr.wikiversity.org/wiki/fr:Topologie_g%C3%A9n%C3%A9rale/Exercices/%C3%89quicontinuit%C3%A9#Exercice_1