

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté du Génie de la Construction

Thèse de Doctorat

Spécialité : Génie Civil

Option : Modélisation et calcul non linéaire

Présenté par

Fatiha IGUETOULENE

Thème

MODELISATION NON LINEAIRE DES STRUCTURES TRIANGULEES A NŒUDS DEPLAÇABLES

Devant le jury d'examen composé de :

M ^f KACI Salah	Professeur UMMTO	Président
M ^f BOUAFIA Youcef	Professeur UMMTO	Rapporteur
M ^f ZERZOUR Ali	Professeur USTHB	Examineur
M ^f ZERIZER Abdellatif	Professeur UMB Boumerdes	Examineur
M ^f KADRI Mohammed	Professeur UMB Boumerdes	Examineur
M ^f DERRADJ Mohamed	Maitre de conférences A UMMTO	Examineur

Soutenu le 19 / 06 / 2019

Remerciements

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements à mon directeur de thèse Monsieur BOUAFIA Yousef, Professeur à l'Université de Mouloud MAMMERY Tizi-Ouzou, pour ses conseils très utiles durant ma période de recherche, son aide et pour l'intérêt bienveillant qu'il a bien voulu porter à ce travail ; ses qualités scientifiques ont contribué à l'avancement de mon travail.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur KACHI Mohand Said, Professeur à l'Université de Mouloud MAMMERY Tizi-Ouzou pour son guide sur ce travail, et pour ses conseils.

Je remercie Monsieur le Professeur KACI Salah Professeur à l'Université de Mouloud MAMMERY Tizi-Ouzou pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur ZERZOUR Ali Professeur à USTHB pour avoir accepté de participer à ce jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur ZERIZER Abdellatif Professeur à UMB Boumerdes pour avoir accepté de participer à ce jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur KADRI Mohammed Professeur à UMB Boumerdes pour avoir accepté de participer à ce jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur DERRADJ Mohamed Maître de conférences classe A à l'Université Mouloud MAMMERY Tizi-Ouzou pour avoir accepté de participer à ce jury de thèse.

Je tiens à exprimer des remerciements affectueux à mes parents pour leur compréhension durant ce travail et pour l'aide qu'ils n'ont cessé de m'apporter.

J'adresse mes remerciements à tous mes collègues chercheurs, doctorants et docteurs, que j'ai rencontré au cours de ma thèse, Enseignants, Techniciens et Secrétaires et tout le personnel de l'administration du département génie civil. Tous ceux qui ont contribué de près et de loin à ce travail de thèse.

J'adresse enfin mes remerciements à mes collègues de la Direction des Travaux Publics de la Wilaya de Tizi- Ouzou en particulier mes collègues de la subdivision où je travaille actuellement.

DEDICACES

Je dédie ce travail :

A mes parents
A mes frères
A toute ma famille

Résumé

Le but de ce présent travail est l'étude du comportement non linéaire des structures poteaux poutres et les structures triangulées jusqu' à la ruine soumises à un chargement monotone croissant, ces structures sont modélisées en trois dimensions. Un programme de calcul non linéaire de ces structures est élaboré. Il est montré que le comportement linéaire crée des difficultés au niveau du dimensionnement des structures.

Le calcul non linéaire dans cette présente étude traite la prise en compte de la non linéarité matérielle et les effets de second ordre où le comportement réel des matériaux est pris en compte et la discrétisation de la structure en éléments fini pour aboutir à une réponse non linéaire. Les conditions aux limites aux niveaux des noueds des structures triangulées sont également étudiées dans le calcul non linéaire. Le développement de la méthode de calcul en 3D pour un élément poutre a été effectué, les différentes étapes de calcul tridimensionnel sont développées dans le cadre de ce travail; par la suite, des structures triangulées ont été étudiés dans un modèle non linéaire pour un élément barre, en montrant que le calcul des structures triangulées se fait avec certaines conditions.

La formulation de l'élément a été établie pour la modélisation du comportement non linéaire élastique des structures en 3D, en se basant sur la méthode des déplacements. Pour le matériau béton, la formulation uni-axiale du comportement du béton à la compression et à la traction (contrainte - déformation) est utilisée, ainsi que pour le béton de fibres. Et pour l'acier la relation bi-linéaire est utilisée. L'approche est basée sur la discrétisation de la section droite en tables trapézoïdales.

Les prévisions du programme ont été comparées avec les données expérimentales sur des exemples des structures telles que les poutres et des structures triangulées en béton armé et métalliques. Les résultats sont globalement encourageants et plusieurs aspects de la réponse des structures ont été approchés d'une façon satisfaisante.

Mots - clés : Pieux – structures triangulées – analyse non linéaire – barre compression traction – béton fibré – poteau poutre – système treillis – formulation en 3D – réponse charge flèche.

ABSTRACT

The aim of this work is the study of the nonlinear behaviour beam-column structures and triangulated structures until ruin subjected to increasing monotonous loading, the formulation is capable of modelling the structures in 3D, and the development of computational program nonlinear structures. It is shown that linear behavior creates difficulties at the level sizing of the structures.

The nonlinear computation in this present study deals with the consideration of material nonlinearity and the second order effects where the real behaviour of the materials is taken into account and the discretization of the finite element structure to lead at the nonlinear response. The boundary at the nodes of the triangulated structures are also in the nonlinear computation.

The development an 3D calculation method for beam element has been carried out, the various three - dimensional calculation steps are developed in the context of this work, afterwards, triangular structures have been studied in non-linear model for an element bar ; we show that the calculation of structures is done with certain conditions.

The formulation of the element has been established for modeling the elastic nonlinear behavior of 3D structures, based on the displacement method.

For the concrete material, the uni- axial formulation of the concrete behaviour in compression and tension (stress- strain) is used, as well for the fiber concrete.

And for steel the bi-linear relationship is used. The approach is based on the discretization of the cross section in trapezoidal tables.

The program forecasts were compared with experimental data on examples of structures such as beams and triangular structures in reinforced concrete and metal. The results are encouraging and several aspects of the structural response have been satisfactorily approached.

KEYWORDS Pious, triangulated structures, nonlinear analysis, compression traction bar, fiber concrete, column beam, trellis system, 3D formulation, charge-arrow response.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	v
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xii
Abréviations, notations	xiii
Introduction générale.....	1

Chapitre 1 : Synthèse bibliographique

1.1 Introduction	5
1.2 Les méthodes de calcul non linéaire, revues bibliographique dans le cas des structures poteaux poutres	5
1.2.1 Les méthodes de calcul non linéaire en 2D	5
1.2.2 Les méthodes de calcul non linéaire en 3D	8
1.3 Quelques travaux réalisés sur les modèles d'analyse non linéaire des Structures triangulées	15
1.3.1 Introduction	15
1.3.2 Définition	16
3.2.3 Quelques travaux réalisés sur les structures triangulées	16
1.4 Comportement des matériaux (béton, béton de fibres, acier)	26
1.4.1 Lois de béton en compression	26
1.4.2 Comportement du béton en traction	28
1.4.3 Comportement des aciers	29
1.4.4 Comportement du béton de fibres	30
1.5 Conclusion.....	31

Chapitre 2 La méthode de calcul

2.1 Introduction	32
2.2 Lois de comportement des matériaux.....	32
2.2.1 Le modèle de comportement du béton en compression	33
2.2.2 Comportement du béton en traction	34
2.2.3 Loi de comportement du béton de fibres	36
2.2.4 Le comportement uni axiale de l'acier	37

2.3	Hypothèses de calcul.....	39
2.4	Modélisation de la section.....	39
2.4.1	Introduction.....	39
2.4.2	Etude d'une section droite.....	40
2.4.2.1	Géométrie des déformations.....	40
2.4.2.1.1	Déformations normales.....	41
2.4.2.1.2	Déformations tangentes.....	41
2.4.2.1.3	Déformations des armatures.....	41
2.4.2.2	Calcul des sollicitations internes.....	42
2.4.2.2.1	Sollicitations normales dues à la matrice de la section (béton).....	42
2.4.2.2.2	Sollicitations tangentes dues à la matrice de la section (béton).....	43
2.4.2.2.3	Sollicitations normales dues aux armatures de la section.....	44
2.4.2.2.4	Sollicitations tangentes dues aux armatures de la section.....	45
2.4.2.3	Sollicitations externes.....	47
2.4.2.4	Equilibre de la section.....	48
2.4.3	Méthode itérative de résolution et critère de convergence de la section à 3D.....	48
2.4.4	Organigramme de calcul de la section.....	51
2.5	Etapas de calcul (Etablissement des matrices de rigidités).....	52
2.5.1	Matrice de rigidité corde d'un élément poutre en élasticité non linéaire.....	52
2.5.1.1	Hypothèses.....	52
2.5.1.2	Notations.....	52
2.5.1.3	Matrice de rigidité de l'élément dans le repère intrinsèque.....	53
2.5.1.3.1	Relation entre sollicitations dans une section et les efforts aux noeuds de l'élément.....	55
2.5.1.3.2	Relation entre les déplacements des nœuds de l'élément et les déformations des sections.....	57
2.5.1.3.3	Relation entre les efforts et les déplacements des noeuds de l'élément.....	58
2.5.1.4	Matrice de rigidité de l'élément dans le repère local.....	59
2.5.1.4.1	Notations.....	59
2.5.1.4.2	Relation entre accroissement d'efforts $\{\Delta F_u\}$ et accroissements de déplacement $\{\Delta S_u\}$	61
2.5.1.5	Matrice de rigidité de l'élément dans le repère absolu.....	67
2.5.1.5.1	Relation entre accroissements de déplacements et d'efforts dans le repère absolu.....	67
2.6	Etat d'équilibre global de la structure.....	70
2.6.1	Algorithme général de résolution.....	70
2.6.2	Séquences de calcul.....	72
2.6.3	Organigramme de calcul.....	76

2.7	Modélisation des structures triangulées et des structures triangulées en arc	78
2.7.1	Modélisation de la section.....	78
2.7.1.1	Géométrie des déformations.....	78
2.7.1.2.1	Déformations normales	79
2.7.1.2.2	Déformations des armatures.....	80
2.7.1.2	Calcul des sollicitations internes	80
2.7.1.2.1	Sollicitations normales dues à la matrice de la section (béton).....	80
2.7.1.2.2	Sollicitations normales dues aux armatures de la section	81
2.7.1.3	Sollicitations externes	82
2.7.1.4	Equilibre de la section	82
2.7.2	Etapas de calcul (Etablissement des matrices de rigidités).....	83
2.7.2.1	Matrice de rigidité corde d'un élément poutre en élasticité non linéaire	83
2.7.2.1.1	Hypothèses	83
2.7.2.1.2	Matrice de rigidité de l'élément dans le repère intrinsèque.....	83
2.7.2.1.2.1	Relation entre sollicitations dans une section et les efforts aux nœuds de l'élément.....	84
2.7.2.1.2.2	Relation entre les déplacements des nœuds de l'élément et les déformations des sections.....	85
2.7.2.1.2.3	Relation entre les efforts et les déplacements des nœuds de l'élément.....	85
2.7.2.1.3	Matrice de rigidité de l'élément dans le repère local.....	86
2.7.2.1.3.1	Notations	86
2.7.2.1.3.2	Relation entre accroissement d'efforts $\{\Delta F_u\}$ et accroissements de déplacement $\{\Delta S_u\}$	88
2.7.2.1.4	Matrice de rigidité de l'élément dans le repère absolu	92
2.7.2.1.4.1	Relation entre accroissements de déplacements et d'efforts dans le repère absolu	92
2.8	Présentation du programme en 3D	95
2.8.1	Introduction	95
2.8.2	Les principales soubroulines	96
2.8.3	Fichiers de données	97
2.8.4	Description des données.....	97
2.8.4.1	Paramètres de description de la structure et de la section	97
2.8.4.2	Paramètres de description du béton.....	99
2.8.4.3	Conventions de signes	100
2.8.4.4	Unités	100
2.9	Conclusion.....	101

Chapitre 3 Validation du modèle

3.1 Introduction	102
3.2 Confrontations des résultats du programme développé aux résultats numériques et expérimentaux.....	102
3.2.1 Exemples de calcul des structures en béton armé et en béton de fibres	102
3.2.1.1 La poutre OG 3.....	102
3.2.1.2 Le portique de Vecchio et Emara.....	104
3.2.1.3 Observations et détail expérimental sur l'essai de Zhan	106
3.2.2 Exemples de structures triangulées	110
3.2.2.1 Poutre en treillis métallique	110
3.2.2.2 Poutre triangulaire en béton armé	112
3.2.2.3 Structure treillis en arc	115
3.3 Conclusion.....	117
Conclusion générale	118
Références.....	120

Liste des figures

Figure 1.1 : L'élément dans le repère local et global	9
Figure 1.2 : Représentation de la section en T par une surface rectangulaire	11
Figure 1.3 : Le modèle du béton utilisé	11
Figure 1.4 : Le degré de libertés au repère local	11
Figure 1.5 : Déformations généralisées par membre entre le nœud i et le nœud j	13
Figure 1.6 : Modèle rigide cohésif, modèle non rigide cohésif	14
Figure 1.7 : Développement des fissures radiales dans la couverture du béton effective alentours de l'acier. (a) l'interaction mécanique du béton fissuré et le alentours. (c) le béton fissuré alentours de l'acier quand l'acier est tiré à l'extérieur	14
Figure 1.8 : Courbe charge déplacement corne cadre FC1 et FC2 pour les différents des Particules	15
Figure 1.9: Courbe charge déplacement	15
Figure 1.10 : Courbe charge – flèche	17
Figure 1.11: Degré de liberté tridimensionnelle de l'élément de la ferme	17
Figure 1.12 : Élément poutre-colonne	19
Figure 1.13: Treillis plan	19
Figure 1.14: Courbe charge / flèche	19
Figure 1.15 : Numérotation et géométrie d'un système à deux poutres	21
Figure 1.16 : Forces aux extrémités de l'élément et la notation des déplacements	22
Figure 1.17 : Déformation de la ferme en arc	23
Figure 1.18: Ferme mixte acier et dalle en béton	24
Figure 1.19 : L'élément et le repère global	24
Figure 1.20 : Schéma de la structure en treillis	25
Figure 1.21: Mode de rupture	25
Figure 1.22: Principales caractéristiques de la typologie des poutres étudiées	25

Figure 1.23 : modèle de COENEN	26
Figure 1.24 : (a) critère de chargement ; (b) contrainte-déformation et chargement	27
Figure 1.25 : comportement de béton à la compression selon Sargin	27
Figure 1.26 : le modèle de Grelat	28
Figure 1.27 : Loi de comportement des aciers naturels	29
Figure 1.28 : Loi de comportement des aciers écrouis	29
Figure 1.29 : Loi de comportement des aciers naturels d'après le BAEL	30
Figure 1.30 : Le modèle de Bouafia et al.	30
Figure : 2.1 : Loi de comportement uniaxiale du béton sous contrainte de Compression (loi de Sargin générale)	33
Figure 2.2: Répartition fictive des contraintes dans une section pour le béton tendu	35
Figure 2.3 : Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton sur le bord tendu (Grelat)	36
Figure .2.4 : Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton de fibres	37
Figure 2.5 : Diagramme contrainte – déformation d'acier naturel	38
Figure . 2.6 : Comportement des aciers écrouis	38
Figure 2.7 : Discrétisation de la section du béton en tables trapézoïdales	40
Figure 2.8 : Armature inclinée par rapport à la section droite	42
Figure 2.9 : Résolution itérative de l'équilibre de la section	50
Figure 2.10: Organigramme de l'algorithme de recherche d'équilibre de la section	51
Figure 2.11: Courbe non linéaire force - déplacement	51
Figure 2.12: Système d'axe de l'élément en 3D – état initial et déformable de l'élément	53
Figure 2.13 : Position de l'axe du repère intrinsèque par rapport au repère local xoyozo	53
Figure 2.14 : Orientation du repère intrinsèque par rapport au repère (x, y1, z1)	54
Figure 2.15 : Efforts et déplacement correspondants dans le plan (x,y)	54
Figure 2.16 : Efforts et déplacements correspondants dans le plan (x, z)	54
Figure 2.17 : Géométrie de la barre déformée.	59
Figure 2.18 : Projection de la barre déformée dans le plan (x _o , y _o)	61

Figure 2.19 : Projection de la barre déformée dans le plan (x_o, z_o)	61
Figure 2.20 : Repère absolu	69
Figure 2.21 : Orientation des axes principaux (y_o, z_o) d'une section droite par rapport aux axes (Y, Z), liés à la structure	71
Figure 2.22 : Représentation graphique de la méthode de Newton raphson	71
Figure 2.23 : Première itération de l'incrément	72
Figure 2.24 : Organigramme de l'algorithme de recherche d'équilibre de la structure	77
Figure 2.25: Géométrie d'un élément barre	78
Figure 2.26 : Elément de barre tridimensionnel	79
Figure 3.1 : Poutre OG3	102
Figure 3.2 : Ferrailage de la poutre OG3	103
Figure 3.3 : Courbe force-flèche de la poutre OG3	104
Figure 3.4 : Portique de Vecchio et Emara : Géométrie et chargement	105
Figure 3.5 : Modélisation de portique Vecchio et Emara	105
Figure 3.6 : Courbe charge latérale-déplacement latéral	106
Figure 3.7 : Montage de l'essai en flexion composée du pieu en béton armé à section Circulaire	108
Figure 3.8 : Courbe charge-flèche (BT)	108
Figure 3.9 : Courbe charge-flèche (BA)	109
Figure 3.10 : Courbe charge-flèche (BF)	109
Figure 3.11 : Poutre triangulée métallique	111
Figure 3.12 : Courbe charge - flèche de la poutre triangulée métallique	111
Figure 3.13 : Détails constructifs de la poutre triangulaire d'épreuve	113
Figure 3.14 : Courbe numérique pour différentes valeurs de la résistance à la compression du béton	114
Figure 3.15 : Géométrie de la structure treillis en arc	115
Figure 3.16: Relation charge- déplacement pour la structure en arc, nœud 10	116

Liste des tableaux

Tableau 2.1	tableau des fonctions des sous programmes principaux	96
Tableau 3.1	Caractéristiques mécaniques de l'échantillon	103
Tableau 3.2	Caractéristiques mécaniques du béton mesuré sur éprouvettes	103
Tableau 3.3	Caractéristiques mécaniques du composite (béton armé). Epreuves cylindriques (ZHAN)	107
Tableau 3.4	Caractéristiques mécaniques du composite (béton témoin). Epreuves cylindriques (ZHAN)	107
Tableau 3.5	Caractéristiques mécaniques du composite (béton armé de fibres d'acier). Epreuves cylindriques (ZHAN)	107
Tableau 3.6	Propriétés des fibres. Epreuves cylindriques (ZHAN)	108
Tableau 3.7	Les coordonnées de chaque nœud de la structure en arc pour Kondoh et Atluri	115
Tableau 3.8	L'aire de la section pour chaque élément de la structure en arc pour Kondoh et Atluri	116
Tableau A.1	Données du programme tridimensionnel	134

Liste de Principales Notations

A/ Notations matricielles

- [K] Matrice de rigidité,
{ ΔU } Vecteur des accroissements des déplacements des noeuds,
{ ΔF } Vecteur des accroissements des efforts internes aux noeuds,
{ ΔP } Vecteur d'accroissement du chargement appliqué aux noeuds,
{ ΔS } Vecteur des accroissements des déplacements aux noeuds,
Indice N Repère intrinsèque de l'élément de barre ou poutre,
Indice U Repère local intermédiaire,
Indice L Repère local d'un élément de barre,
Indice X Repère absolu,
[Ks] Matrice de rigidité (6x6) symétrique de la section,
[Ss] Matrice de souplesse de la section,
[B], [D] Matrices de transformations géométriques,
[RT] Matrice de passage du repère local au repère absolu,

B/ lettres latines

- e Allongement longitudinal d'un élément,
 E_a Module élastique de l'armature passive,
 E_p Module élastique de l'armature,
 E_{b0} Module élastique du béton à l'origine,
 f_{cj} Résistance à la compression du béton au jour j,
 f_{tj} Résistance à la traction du béton au jour j,
 f_{c28} Résistance du béton à la compression à 28 jours,
 f_{t28} Résistance du béton à la traction à 28 jours,
 f_{peg} La limite élastique conventionnelle à 0.1% du câble de précontraint,
 f Coefficient de frottement angulaire du câble de précontrainte sur la gaine,
 G Module de cisaillement,
 E_{ct} Le module initial de composite en la traction,

f_{ft}	Résistance à la traction du composite,
K_b et K'_b	Paramètres adimensionnels caractérisant respectivement la branche Ascendante et descendante de la courbe contrainte-déformation de SARGIN,
L_0	Longueur initiale de la barre avant déformation,
L	Longueur de la barre après déformation,
M	Moment fléchissant,
N	Effort Normal,
T	Effort Tranchant,
u, v	Déplacements longitudinaux des nœuds,
l_f	Longueur d'une fibre,
A_y, A_z	Sections réduites,
I_x	Inertie de torsion de la section,

C/ Lettres grecs

θ, ζ, γ	Rotations des éléments,
Δ	Variable Accroissement de la variable,
ε	Déformation longitudinale,
ε_{b0}	La déformation au pic qui correspond à f_{cj} ,
ε_u	La déformation correspondant à la mobilisation totale de l'adhérence fibres –matrice,
ε_r	Déformation de rupture du composite en traction,
ε_{su}	Déformation ultime de l'acier,
σ_e	Contrainte élastique de l'acier passif,
σ_r	Contrainte à la rupture de l'acier passif,
σ_{uc}	Contrainte résiduelle des fibres définie dans la relation (2.11) (La contrainte ultime maximale de composite (valeur « plateau »),
Δ	Variable : Accroissement de la variable,
$\bar{\omega}$	Pourcentage des fibres,
θ_o	Coefficient d'orientation des fibres,
τ_u	Contrainte d'adhérence ultime fibre - matrice béton,
ϕ	Diamètre d'une fibre,

Introduction générale

Introduction générale

La recherche sur le calcul non linéaire des structures a beaucoup progressé ces dernières années ; elle est nécessaire pour la prédiction de la réponse réelle des structures. Il est montré que les méthodes qui s'inspirent de l'analyse non linéaire ont permis de mieux estimer le domaine de sécurité.

L'étude de la capacité des structures en béton armé et en béton de fibre nécessite des modèles réalistes sur les matériaux, une discrétisation en éléments finis, et la recherche d'une réponse non linéaire GRELAT A., NAIT-RABAH, Florent ROBERT, Adjrad et al. [18, 27, 28,33].

La procédure appliquée à des problèmes non linéaire, et les problèmes de fissures modérées pour atteindre la réponse statique des structures en béton armé a été étudiée par plusieurs approches. On peut citer les travaux présentés par Rabczuk et al. [32, 121,122, 123, 124] leurs approches sont basées sur la méthode de fissuration cohésive en trois dimensions pour des structures en béton armé, où la fissuration dans le béton est modélisée par l'extension d'élément - la méthode Glerkin qui est couplée à des éléments finis pour l'armature, suivant la formulation générale des problèmes géométriquement non linéaire. La fissure a été modélisée sous la forme d'un ensemble de particules fissurées. La modélisation des fissures est une approche basée sur une étude où la fissure peut être orientée arbitrairement. Une autre approche a été suggérée pour la modélisation des fissures discrètes dans des méthodes des particules sans maille en trois dimensions. L'approche bidimensionnelle de la fissuration des structures en béton armé sous des conditions de charge statique croissante a été établie. Une idée pour la modélisation des fissures dans des structures, dont laquelle le béton est discrétisé en particules et l'acier est discrétisé en éléments, a été effectuée.

Depuis les années 70, de nombreuses approches, s'inscrivant dans le cadre des éléments finis de type déplacement ont été développées. Celles-ci reposent sur le choix des déformations des sections, qui permet l'évaluation directe de la matrice de rigidité élémentaire, bien que la plupart des ces approches ne considèrent pas la résistance du béton à la traction. Cependant, des modèles, basés sur une réponse tenant compte de la formulation non linéaire, ont été faits par plusieurs auteurs lesquels ont montré la formulation de la matrice de rigidité qui varie d'une approche à une autre, comme s'est montré dans les travaux de B.A. Izzuddin et al. [29, 30].

Ce dernier a pris uniquement en considération la non linéarité géométrique pour la formulation de la matrice tangente. Dans certaines approches sur les structures en béton armé, la non linéarité géométrique et la formulation de l'élément fini sont accompagnées par le développement et l'état d'avancement des modèles constitutifs du béton et leurs interactions avec l'acier comme les travaux de B.A. Izzuddin et al. et Rabczuk et al. [30,32]. Le modèle analytique développé par Adjrard et al. [33] a pour but la modélisation des structures en béton armé en l'élasticité non linéaire.

La recherche d'une solution non linéaire nécessite la connaissance du comportement réel des matériaux, plusieurs modèles du béton ont été établis par des auteurs tels que le modèle du béton à la compression Sargin [107]. La théorie endochronique au comportement du béton a été établie par Bažant et Bhat [129-130], Bažant [131]; cette théorie dans laquelle des propriétés spéciales de déchargement sont incluses ont été suggérées par Bažant [132]. Le modèle basé sur la théorie de bande de fissuration pour la rupture du béton est présenté par Bažant et Oh [133]; l'auteur présente une relation uni axiale contrainte-déformation du matériau ductile comme le béton [134]. Un modèle général de micro plan qui est applicable à la fois à la traction et à la compression et à la fois à la fissuration fragile et la réponse jusqu'à la plasticité qui caractérisent le dommage dans le béton est développé par Bažant [135]. D'autres études, intégrant des modèles du béton de fibres ont été faites par Bouafia et al., Park S H et al. Mohamed N et al. [106, 136,137].

Dans cette présente étude, la réponse recherchée est obtenue par la méthode des déplacements qui prend en compte les phénomènes non linéaire en utilisant la théorie des poutres. Nous avons tenu compte de la contribution du béton tendu entre deux fissures successives. Cette méthode nous permet de décrire, de façon proche de la réalité, le comportement jusqu'à la ruine des structures subissant des déplacements ou des redistributions d'efforts considérables.

La modélisation en 3D est basée sur la discrétisation de la structure en éléments finis " poutre" et chaque élément fini est constitué de plusieurs sections droites elles mêmes décomposées en trapèzes.

L'équilibre de la structure est résolu en utilisant des méthodes itératives dans une formulation incrémentale à rigidité variable, Nous établirons la matrice de rigidité corde d'un élément poutre, en tenant compte de la non linéarité des matériaux et des effets du second ordre dus aux

déplacements des nœuds. Le modèle présenté est porté sur l'introduction des rigidités de torsion et des efforts tranchants dans le domaine linéaire. Un autre objectif de notre travail est la simulation au moyen du programme de calcul informatique des structures tridimensionnelles soumises à un chargement croissant jusqu'à la ruine.

Une partie de notre thèse est consacrée à l'étude du comportement des structures triangulées et les structures en arc. En effet, la prise en compte d'un comportement global réaliste des liaisons et éléments permet d'avoir une meilleure image du comportement effectif d'une structure et notamment la distribution précise des sollicitations. Ceci peut conduire alors à une optimisation interactive lors du choix des barres et des liaisons. L'extrême difficulté de la forme de liaison et d'éléments de discontinuité ne permettent pas d'utiliser les hypothèses classiques de la résistance des matériaux. A cet effet une modélisation non linéaire est nécessaire pour les structures triangulées [39]. De plus, L'allègement des structures transversales des tabliers et le recours à la triangulation [40] pour alléger des structures à grande portées, sont apparues récemment, (légèreté et résistance). Ces particularités stimulent l'intérêt des chercheurs sur les structures triangulées. La modélisation par des liaisons parfaites (non dissipatrices d'énergie) est en fait très éloignée de la réalité car les liaisons apparentes à des articulations sont capables d'une rigidité parfois non négligeable.

Dans cette thèse nous utiliserons la méthode d'analyse non linéaire qui tient compte de la non linéarité matérielle et des effets de second ordre dus aux déplacements des nœuds. Cette méthode permet de connaître le comportement de la structure jusqu'à la ruine, nous pouvons analyser aussi les poutres triangulées en béton armé et les poutres triangulées métalliques soumises à la flexion.

Notre thèse est organisée comme suit :

Au premier chapitre nous donnons les différents travaux réalisés sur le comportement non linéaire des structures poteaux poutres et les structures triangulées. Ainsi que les lois de comportement non linéaire des matériaux.

Dans le chapitre 2, nous donnons les différentes lois de comportement des matériaux (béton, acier, béton de fibres), puis ; nous décrivons l'équilibre de la section, ainsi que l'établissement de la matrice de rigidité et les différentes étapes de calcul en 3D pour l'élément poutre et barre et la

présentation du programme tridimensionnel, et l'organigramme d'équilibre de la section ainsi que la structure.

Au chapitre 3 une vérification de la fiabilité des développements théoriques et du logiciel développé est effectuée par une comparaison des résultats numériques aux résultats expérimentaux publiés dans la littérature.

Enfin une conclusion est proposée à la fin du document.

Chapitre 1

Synthèse bibliographique

1.1 Introduction

La prise en compte du comportement non linéaire dans le calcul des ossatures en béton armé est un problème qui a été étudié depuis très longtemps. En effet, de nombreux auteurs ont cherché à représenter des fissures dans un matériau élastique. Certaines méthodes actuelles de dimensionnement sont fondées sur une analyse non linéaire. Les structures articulées offrent plusieurs avantages, notamment par leur légèreté, et leur facilité de mise en œuvre par assemblage successif de différents éléments qui les composent, Cependant, leur application en béton est restée exceptionnelle.

Face à la diversité des études réalisées, on va en premier lieu décrire les principaux travaux sur les structures poteaux poutres en (2D et 3D) réalisés et leurs brèves explications. Ceci nous permettra de détacher de cette étude les principales caractéristiques du phénomène non linéaire. Dans la seconde partie du chapitre, on présentera les travaux réalisés sur les structures triangulées, ainsi que le comportement de quelques matériaux.

1.2 Les méthodes de calcul non linéaire, revues bibliographiques dans le cas structures poteaux-poutres

On peut citer les études effectuées depuis les années soixante dans le but de déterminer le comportement réel des structures poteaux poutres en béton armé. Ces études concernent des essais sur des poutres ou portiques en flexion quatre (ou trois) points chargés jusqu'à la ruine.

1.2.1 Les méthodes de calcul non linéaire en 2D

Dés (1967), Ngo et Scordelis [01] ont cherché à représenter l'existence des fissures dans un matériau élastique. Nilson [02] a introduit des caractéristiques non linéaires pour les lois contrainte déformation du béton et l'adhérence acier-béton. Cette approche a été perfectionnée tant sur le plan d'une meilleure concordance entre modélisation et les données expérimentales. Raschid [03], Bell [04], que sur ce celui de l'efficacité des algorithmes – Zienkiewicz [05], parallèlement, les résultats expérimentaux obtenus sur des essais de poutres et de portiques plans ont permis d'introduire dans les méthodes de calcul habituelles des systèmes de poutres des lois moment - courbure non linéaire obtenus directement par les essais Cranstan [06] ou, d'une manière approchée, par le calcul – Ferry Borges [07] élabore

une formulation plane où apparaissent pour chaque nœud les 3 degrés de liberté plans habituels : 2 translations et 1 rotation. La matrice de rigidité ainsi formée est de la forme suivante :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{K_0}{L} & 0 & -\frac{K_1}{L} & -\frac{K_0}{L} & 0 & \frac{K_1}{L} \\ 12\frac{K_2}{L^3} & 6\frac{K_2}{L^2} & 0 & -12\frac{K_2}{L^3} & 6\frac{K_2}{L^2} & 0 \\ & 4\frac{K_2}{L} & \frac{K_1}{L} & -6\frac{K_2}{L^2} & 2\frac{K_2}{L} & 0 \\ sym & & \frac{K_0}{L} & 0 & -\frac{K_1}{L} & 0 \\ & & & 12\frac{K_2}{L^3} & -6\frac{K_2}{L^2} & 0 \\ & & & & 4\frac{K_2}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$K_0 = \int_{\Omega} E \cdot d\Omega \quad (1.2)$$

$$K_1 = \int_{\Omega} E \cdot y \cdot d\Omega \quad (1.3)$$

$$K_2 = \int_{\Omega} E \cdot y^2 \cdot d\Omega \quad (1.4)$$

La non - linéarité matérielle est introduite par le biais de calcul de K_0 , K_1 , K_2 , qui sont supposées constantes le long de l'élément. La non linéarité géométrique est absente dans cette approche. L'approche est tangente, et les lois de comportement sont données point par point (multi - linéaire). La rigidité de béton tendu entre deux fissures est négligée, l'auteur a validé le modèle sur quelques poutres simplement fléchies.

Une synthèse de deux approches [06] et [07] est ébauchée en (1972) par Franklin [08], qui utilise dans la méthode des éléments finis une discrétisation en couches, la comptabilité des déformations étant assurée par la conservation des sections planes.

Depuis (1970), d'après Grelat de nombreuses méthodes inélastiques ont été développées pour le calcul des ossatures en béton armé. Le type de discrétisation utilisé, est selon le problème traité, une discrétisation en éléments finis bi ou tridimensionnels.

La résistance du béton à la traction et la contribution du béton tendu entre deux fissures est négligée, les méthodes sont présentées dans les références [9-12].

En (1970), Gunnin [13] est le premier qui a introduit dans une certaine mesure la non linéarité géométrique, la matrice des contraintes initiales (ou rigidité géométrique) est absente, en ce qui concerne la matrice de rigidité matérielle, la rigidité flexionnelle (supposée constante le long de l'élément, tout comme la rigidité extensionnelle) est évaluée comme une pente dans un diagramme moment-courbure préétabli. De nombreux calculs de comparaison sont effectués avec des résultats d'essai sur des colonnes et des cadres en béton armé.

Au début des années (1970), des formulations semblables à celle de Gunnin apparaissent, dans la plus connue est celle de Lazaro [14] qui introduit une correction qui tient compte de la fissuration.

Blauwendraad [15] en (1972), est le premier à faire des éléments finis «classiques » issus de la méthode des déplacements. Il a introduit les fonctions de forme pour interpoler le champ des déplacements, et en déduire les quantités K_0 , K_1 , K_2 résultantes d'une intégration numérique des déformations issues du champ des déplacements.

De plus à ces travaux, un article de Jennings [16], va être le point de départ d'une série de travaux.

Menegotto et Pinto [17] sont les premiers à utiliser une technique qui tient compte de la non linéarité géométrique à 2D d'une façon exacte grâce à l'additivité et la commutativité des rotations planes. On en déduit la matrice de souplesse de l'élément qui, une fois inversée, donna la matrice de rigidité élémentaire, qui est ensuite assemblée dans la matrice de rigidité globale, de façon classique. Il discrétise l'élément en couches horizontales ; la résistance à la traction du béton est négligée.

Grelat [18] s'inspire du programme de Menegotto et Pinto, il introduit pour le béton comprimé la loi de Sargin, ainsi qu'une forme originale et efficace de tension-stiffening, et valide son programme par de nombreux cas tests.

Ferraro-Mia [19] poursuit le travail de Grelat au CEBTP, en développant la prise en compte des effets différés et de la précontrainte. Cette dernière est introduite par la méthode interne. L'inclinaison des câbles par rapport à la section n'est pas prise en compte.

En (1986), Espion [20] introduit un élément de poutre plan à 9 degrés de liberté. Cette approche est plus complète et réaliste vis à vis de la non linéarité matérielle et géométrique. La tension stiffening est prise en compte. Le programme mis au point par Espion est confronté à un grand nombre d'essais expérimentaux ou théoriques publiés. En plus dans une deuxième partie la prise en compte des effets différés est présentée d'une façon détaillée.

Au début des années (2000) Bouafia, Fouré, Kachi [21], ont fait la suite des travaux de GRELAT, en développant un programme à 2D qui tient compte en plus de la flexion de l'effet des déformations dues à l'effort tranchant en élasticité non linéaire appliquée aux poutres en béton armé et en béton précontraint.

1.2.2 Les méthodes de calcul non linéaire en 3D

Le premier élément de poutre en béton armé tridimensionnel a été développé par Chan [22] cette analyse prend en compte les effets du second ordre, ainsi que les effets différés. L'influence de l'effort tranchant est absente, la torsion est découplée. Les sections sont discrétisées en fibres. La rigidité torsionnelle provient d'une pente dans un diagramme idéalisé trilineaire moment de torsion-rotation construit à l'aide d'une théorie de treillis pour déterminer le moment et la rotation de plastification sans tenir compte de l'effort normal.

Le programme de Mari [23] est le prolongement du travail de Chan. La matrice des contraintes initiales est complétée. La précontrainte est introduite selon la méthode de Kang [24] mais la validation du programme ne se fait que sur des exemples théoriques. Les développements en éléments finis classiques vont être nombreux.

Pour les structures métalliques, on peut citer le travail effectué par De Ville de Goyet [25] en (1989). Faisant suite aux travaux de Frey [26] de Ville de Goyet établit un bilan des différentes formulations en grands déplacements et se livre à une comparaison très complète de différents éléments finis. Il introduit un élément fini dit de Marguerre modifié à 7 degrés de liberté, qui modélise le gauchissement des sections.

En (1990), Nait-Rabah [27], poursuit le travail de Grelat, qui est basé sur les coordonnées convectées introduites par Jennigs. Le programme est étendu aux problèmes tridimensionnels. La prise en compte de la non-linéarité matérielle est complète. Les effets dus à l'effort tranchant et au moment de torsion sont introduits, mais en faisant l'hypothèse d'un comportement linéaire du matériau sous sollicitations tangentes. La non linéarité géométrique n'est que partiellement appréhendée. En effet, les déplacements doivent rester modérés, et les rotations petites. Le programme est validé sur des de nombreux cas expérimentaux, ayant néanmoins des déplacements modérés.

En (1999), Florent Robert [28] a effectué un calcul non linéaire sur les ouvrages d'art de génie civil.

En (2001) d'après Izzuddin B.A. [29], de nombreuses recherches se sont concentrées sur les difficultés associées aux rotations nodales finies dans l'espace en 3D, ces difficultés proviennent principalement du la non commutativité des rotations finies autour des axes fixes et la double transmission des moments non conservatifs autour des axes fixes. L'approche conventionnelle de l'analyse non linéaire géométrique des structures en 3D a été existée en utilisant une matrice de rigidité tangente de l'élément ce qui augmente la matrice de rigidité constante (utilisée pour l'analyse linéaire) avec une matrice de rigidité géométrique

proportionnelle au niveau des contraintes de l'élément. Son travail vise à clarifier les problèmes suivants :

Démontrer que la symétrie de la matrice de rigidité tangente est liée au travail conjugué de la définition adoptée aux moments utilisés pour des équations d'équilibre du moment et la définition adoptée aux rotations libres, et illustre aussi que la symétrie de la matrice de rigidité tangente est toujours possible pour l'atteindre.

Il a montré aussi que la classification catégorique des moments à la fin d'un élément n'est pas nécessaire, et la réponse non linéaire géométrique peut être formée, pour toute définition adaptée aux rotations qui exprime une transformation vectorielle unique, sans noter aucune hypothèse à cet égard.

Il utilise trois variantes : (A) incremental with resultant vector rotations (B) incremental with modified Euler angles (C) total with Euler angles, en modélisant le portique en béton armé en 3D. La matrice de rigidité tangente est symétrique. Il traite les difficultés associées aux rotations nodales de l'élément dans l'espace à 3D.

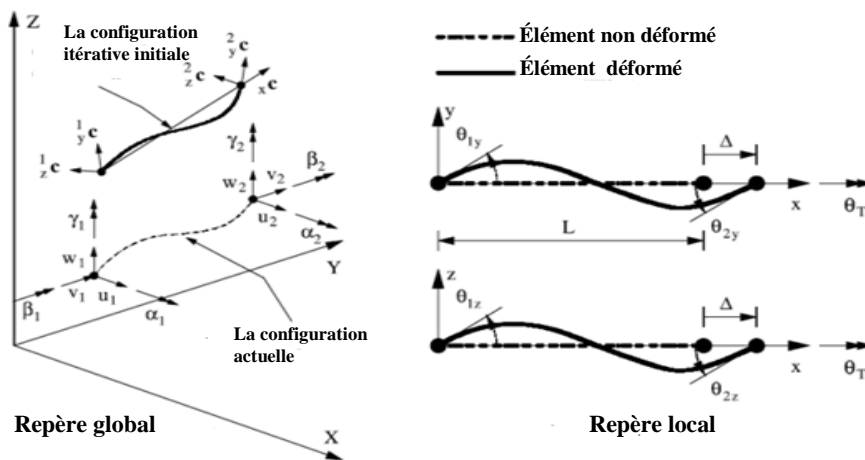


Figure 1.1 : L'élément dans le repère local et global [29]

- La matrice de rigidité tangente est donnée comme suit :

$$\mathbf{K}_{i,j} = \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{u}_j} \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

Où \mathbf{u} est le vecteur nodal libre

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{R}_i^e - \mathbf{P}_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

\mathbf{R}_i^e résistance forces/moments

n nombre total des translations/rotations libres

- La matrice de rigidité tangente symétrique est donnée comme suit :

$$\mathbf{K}_{i,j} = \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{u}_i} - \frac{\partial \mathbf{P}_i^e}{\partial \mathbf{u}_j} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{u}_i \partial \mathbf{u}_j} \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (1.5)$$

Avec

$$\mathbf{R}_i = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_i}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{P}_i^e = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_i}, \quad (1.7)$$

\mathbf{u}_i le vecteur nodal libre

Π est la somme de l'énergie de déformation du système (U) et l'énergie potentielle de chargement ($-W$)

$$\Pi = U - W. \quad (1.8)$$

En (2002) Izzuddin B.A. et al. [30], proposent une nouvelle formulation poutre – colonne, cette formulation est basée sur une approche élastique. La formulation est destinée à modéliser le comportement élastique non linéaire d'un assemblage poutre – colonne, il utilise uniquement un seul élément par membre (poteau ou poutre), qui est un paramètre essentiel pour l'analyse élasto plastique adaptative. La formulation est dérivée dans le système local Eulerian où la fonction de forme quartique est utilisée pour deux déplacements transversaux. Pour l'acier un modèle non linéaire est utilisé ; et pour la relation du béton, les contraintes à la traction sont négligées et l'affaissement du béton à la compression n'est pas pris en compte. La section est décomposée en surfaces rectangulaires et ses surfaces sont décomposées en sous-sections triangulaires.

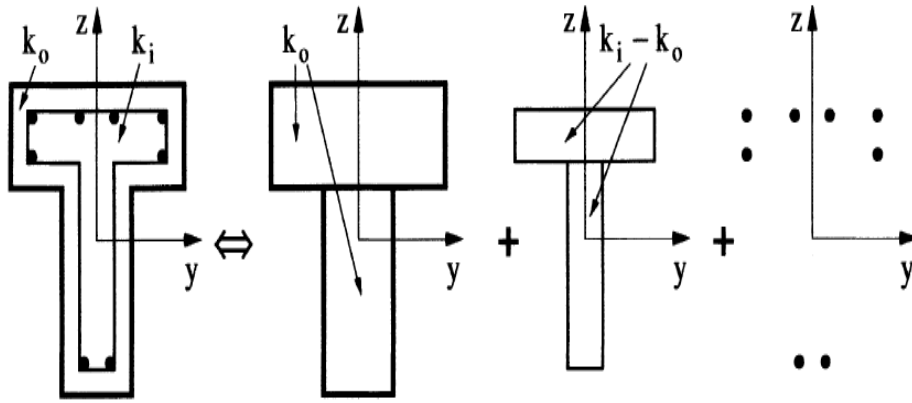


Figure 1.2: Représentation de la section en T- béton armé par des surfaces rectangulaires [30]

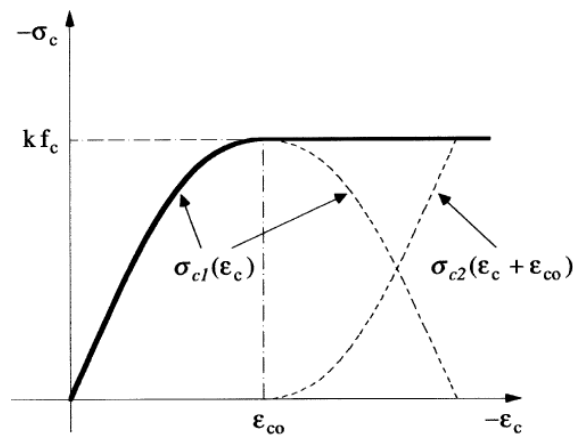


Figure.1.3 : Le modèle du béton utilisé [30]

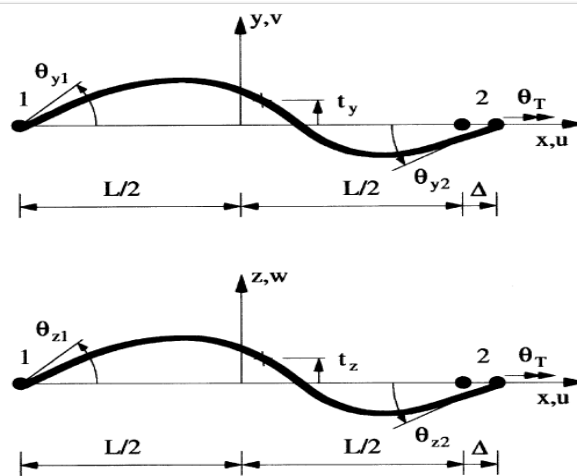


Figure 1.4: Le degré de libertés au repère local [30].

La matrice de rigidité tangente généralisée reflète la variation infinitésimale des contraintes généralisées avec les déformations généralisées au niveau de la section transversale globale.

${}^t\mathbf{k}$ obtenue à partir les contributions de l'acier et les blocs rectangulaires du béton.

$${}^t\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_a}{\partial \varepsilon_a} & \frac{\partial f_a}{\partial k_y} & \frac{\partial f_a}{\partial k_z} \\ \frac{\partial m_y}{\partial \varepsilon_a} & \frac{\partial m_y}{\partial k_y} & \frac{\partial m_y}{\partial k_z} \\ \frac{\partial m_z}{\partial \varepsilon_a} & \frac{\partial m_z}{\partial k_y} & \frac{\partial m_z}{\partial k_z} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} f_a &= f_{as} + \sum_{i=1}^{n_c} \mathbf{f}_{ac,i} \\ m_y &= m_{ys} + \sum_{i=1}^{n_c} \mathbf{m}_{yc,i} \\ m_z &= m_{zs} + \sum_{i=1}^{n_c} \mathbf{m}_{zc,i} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Où

f_a, m_y, m_z La force axiale et le moment bi axial au centre de gravité

f_{as}, m_{ys}, m_{zs} La force axiale et le moment de flexion bi axial de l'acier.

En 2003 Marante M E, Flórez-López J. [31], ont présenté une formulation générale pour l'analyse inélastique des ossatures en béton armé, le modèle a été développé dans le cadre de la mécanique de l'endommagement. Cette théorie est basée sur les méthodes de la mécanique de l'endommagement continu.

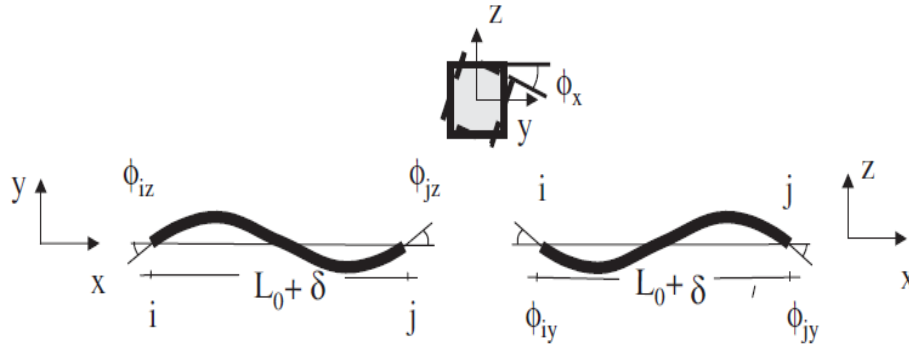


Figure 1.5: Déformations généralisées d'un élément entre les nœuds i et j [31]

La matrice de transformation est donnée comme suit :

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -\frac{m_1}{L} & -\frac{m_2}{L} & -\frac{m_3}{L} & n_1 & n_2 & n_3 & \frac{m_1}{L} & \frac{m_2}{L} & \frac{m_3}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{L} & \frac{m_2}{L} & \frac{m_3}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_1}{L} & -\frac{m_2}{L} & -\frac{m_3}{L} & n_1 & n_2 & n_3 \\ -t_1 & -t_2 & -t_3 & m_1 & m_2 & m_3 & t_1 & t_2 & t_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n_1}{L} & \frac{n_2}{L} & \frac{n_3}{L} & m_1 & m_2 & m_3 & -\frac{n_1}{L} & -\frac{n_2}{L} & -\frac{n_3}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n_1}{L} & \frac{n_2}{L} & \frac{n_3}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{n_1}{L} & -\frac{n_2}{L} & -\frac{n_3}{L} & m_1 & m_2 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 & -t_1 & -t_2 & -t_3 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Où

T, n, et m sont les vecteurs unitaires dans les directions x, y, et z, respectivement. On note que le zéro doit être ajouté aux colonnes et les lignes qui ne correspondent pas à aucun degré de liberté de l'élément. Le comportement de ces vecteurs est exprimé à l'égard de système global.

La matrice $[\mathbf{B}]$ est en fonction des déplacements nodaux quand les effets dus à la non linéarité géométrique sont pris en compte.

En 2008 Timon Rabczuk et al. [32] ont présenté une méthode en 3D de modélisation arbitraire de la fissure initiale et le développement des fissures dans les structures en béton armé, cette méthode (meshfree method) est basée sur la répartition de concept du l'unité ; elle est établie pour des problèmes géométriquement non linéaire. La cinématique de la fissure est obtenue en enrichissant l'espace de la solution dans le but de capturer la cinématique correcte de la fissure. Un modèle de zone cohésive est utilisé après l'initiation de la fissure. L'acier est modélisé par des éléments poutres ou triangulaires est connecté par un modèle de liaison au béton.

La matrice de rigidité est donnée comme suit :

$$K_{mat} = \begin{bmatrix} K_{uu}^{ref,ref} & K_{uu}^{ref,con} & K_{ua}^{ref,con} & K_{ub}^{ref,con} & K_{u\Lambda}^{ref,\lambda} \\ K_{uu}^{ref,con} & K_{uu}^{con,con} & K_{ua}^{con,con} & K_{ub}^{con,con} & K_{u\Lambda}^{con,\lambda} \\ K_{au}^{con,ref} & K_{au}^{con,con} & K_{aa}^{con,con} & K_{ab}^{con,con} & K_{a\Lambda}^{con,\lambda} \\ K_{bu}^{con,ref} & K_{bu}^{con,con} & K_{ba}^{con,con} & K_{bb}^{con,con} & K_{b\Lambda}^{con,\lambda} \\ K_{\Lambda u}^{\lambda,ref} & K_{\Lambda u}^{\lambda,con} & K_{\Lambda a}^{\lambda,con} & K_{\Lambda b}^{\lambda,con} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

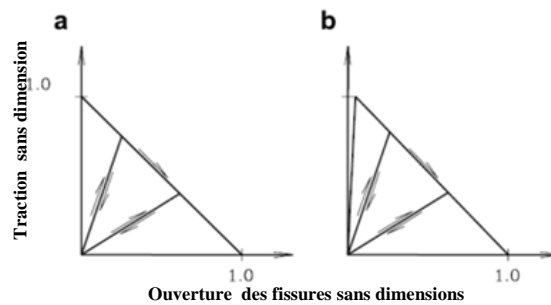


Figure 1.6 : Modèle cohésif rigide, modèle non cohésif rigide [32]

Selon ce modèle, la traction et le déplacement d’ouverture des fissures, ne sont pas dimensionnés par la résistance à la traction et le déplacement critique de l’ouverture de la fissure.

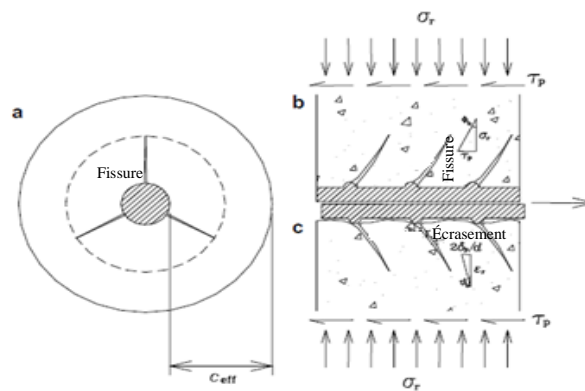


Figure 1.7 : Développement des fissures radiales dans la couverture effective du béton alentours de l’acier. (a) l’interaction mécanique du béton fissuré et les alentours. (c) le béton fissuré alentours de l’acier quand l’acier est tiré à l’extérieur [32]

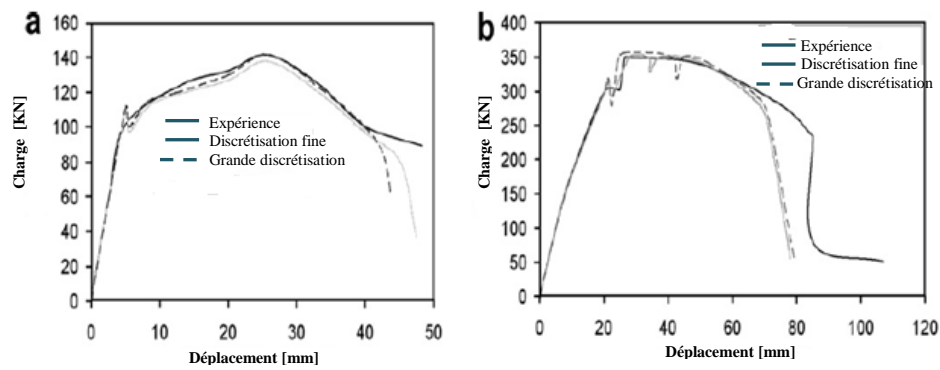


Figure 1.8 : Courbe charge déplacement (FC1 et FC2) pour les différentes particules [32]

En 2011 Adjrad et al. [33], ont développé un programme en 3D qui tient compte en plus de la flexion de l'effet des déformations dues à l'effort tranchant en élasticité non linéaire appliquée aux poutres en béton armé.

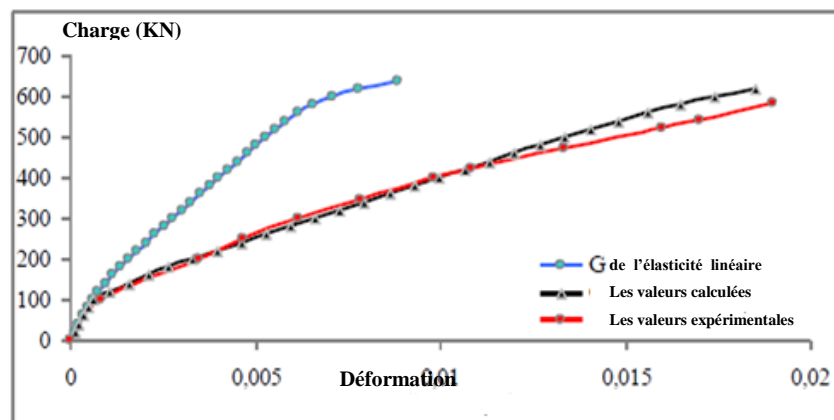


Figure 1.9 : Courbe charge déplacement [33]

1.3 Quelques travaux réalisés sur les modèles d'analyse non linéaire des structures triangulées

1.3.1 Introduction

Les structures à treillis sont utilisées dans plusieurs applications en génie civil comme les pylônes, les antennes de télécommunications, les fermes de toit, les tabliers de ponts de grande portée, les structures de concentrateurs solaires et de nombreuses structures industrielles. Ce type de structure est reconnu pour sa grande résistance ainsi qu'un faible poids propre ce qui implique une utilisation économique des matériaux.

1.3.2 Définition

Le système triangulé est une structure spatiale, articulée, où les efforts principaux sont des efforts axiaux de traction ou de compression. La géométrie présente une membrure inférieure et supérieure et les diagonales ainsi que des montants, ce qui lui confère une grande rigidité. Elles sont articulées car leurs éléments constitutifs sont associés par des liaisons autorisant de potentielles rotations. Ces liaisons sont appelées nœuds du système. Les sollicitations induites dans les éléments sont uniquement des sollicitations de traction ou de compression simple lorsque les charges extérieures sont appliquées aux nœuds. Au début du XX^e siècle, les poutres en treillis métallique étaient dénommées poutres américaines, car c'est aux États-Unis que la technique est apparue.

3.2.3 Quelques travaux réalisés sur les structures triangulées

Dans les années (1960), Mallett et Schmit [34] ont résolu le problème non linéaire avec la non linéarité géométrique et le flambement élastique des éléments en utilisant la recherche d'énergie. Par la suite en (1970) Wolf [35] a analysé la résistance post-flambement des treillis spatiaux, et en (1980) Paradiso et Tempesta [36] ont étudiés les effets de flambement des éléments dans les cas de l'analyse non linéaire des treillis spatiaux ; plus tard, Ramm [37] a proposé des stratégies pour tracer la réponse non linéaire autour des points limites.

Papadrakakis [38] utilise la méthode de relaxation dynamique pour étudier les conditions de charge ultime des treillis spatiaux.

Hill et al. [39] ont développé une méthodologie, en utilisant une procédure d'éléments finis pour effectuer l'analyse non linéaire d'un système en treillis métallique.

Le retour en arrière évoque deux générations successives d'ouvrages [40]. La toiture du Stade Olympique de TEHERAN est représentative de la première époque. Les poutres maitresses sont conçues en treillis bidimensionnel; elles sont découpées en voussoirs à joints conjugués, puis assemblés par précontrainte intérieure en béton. La seconde génération mérite qu'on s'y attarde quelque peu : l'exemple significatif est le pont de BUBIYAN (Koweït). Cet ouvrage assure une liaison autoroutière entre le continent et l'île de BUBIYAN de longueur de 2.383 mètres, il comprend 58 travées de 40 mètres et une passe navigable de 51 mètres de portée, l'ensemble étant regroupé en 11 viaducs successifs continus. Transversalement, sa largeur est d'environ 20 mètres.

En (2001) Richard T. Brown [41], ont effectué un programme d'étude sur des fermes, (Agence pour les projets de recherche avancée de défense)

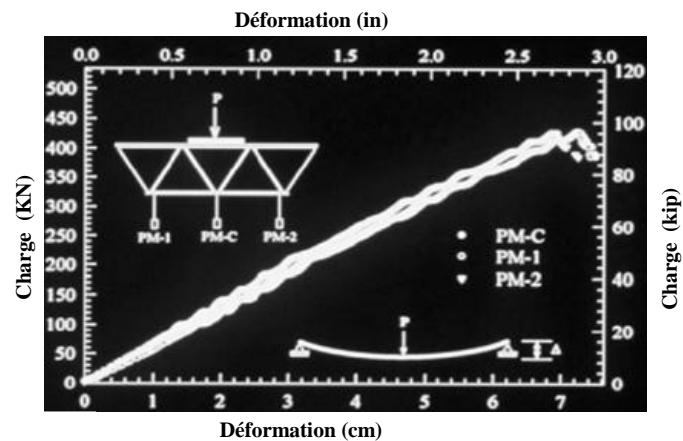


Figure 1.10: Courbe charge – flèche [41]

En (2001), Seung-Eock Kim et al. [42], ont présenté une méthode en 3D d'analyse non linéaire des ponts en treillis. La non linéarité géométrique est considérée en se basant sur la formulation Lagrangienne actualisée (the updated Lagrangian formulation). La non linéarité matérielle a été implantée par l'utilisation de (Column Research Council (CRN)) module tangent.

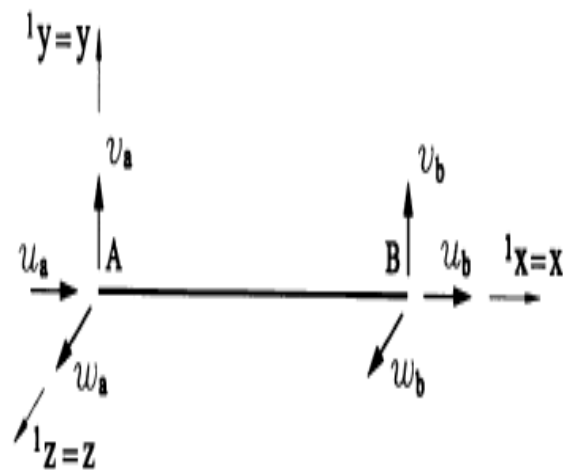


Figure 1.11 : Degrés de liberté de l'élément en treillis tridimensionnel [42]

La matrice d'inélasticité K_e s'écrit

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{E_t A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E_t A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E_t A}{L} & 0 & 0 & \frac{E_t A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

La matrice de rigidité géométrique de l'élément en treillis tridimensionnel s'écrit :

$$[K_g] = \begin{bmatrix} \frac{{}^1F_{xb}}{L} & 0 & 0 & -\frac{{}^1F_{xb}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{{}^1F_{xb}}{L} & 0 & 0 & -\frac{{}^1F_{xb}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{{}^1F_{xb}}{L} & 0 & 0 & -\frac{{}^1F_{xb}}{L} \\ -\frac{{}^1F_{xb}}{L} & 0 & 0 & \frac{{}^1F_{xb}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{{}^1F_{xb}}{L} & 0 & 0 & \frac{{}^1F_{xb}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{{}^1F_{xb}}{L} & 0 & 0 & \frac{{}^1F_{xb}}{L} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Chen WF, Kim SE; Kim SE, Chen WF.[43, 44], ont étudié l'analyse avancée, en indiquant toutes les méthodes capable de capturer l'état de la résistance limite du système structurel et les éléments appropriés, il s'agit de séparer la capacité des éléments.

La solution de la zone plastique est connue comme une 'solution exacte', mais elle ne peut pas être utilisée pour conception pratique Clarke MJ et al. [45].

Prakash et Powell [47], et Liew et Tang [48]. Papadrakakis [49], Blandford [50], et Yang et al. [51], ont étudié le comportement en flambement des fermes spatiales.

En (2002) X. Sun and S. L. Chan [52], ont effectué une étude sur l'application de l'analyse avancée des structures composées de cornières.

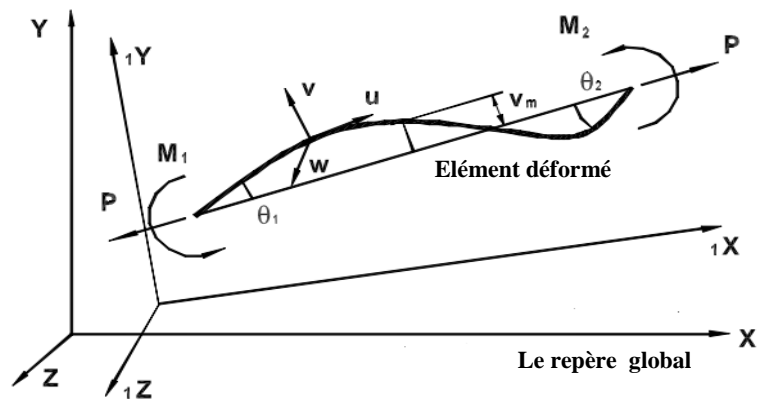


Figure 1.12 : Élément poutre-colonne [52]

La matrice de transformation de rotation est donnée comme suit :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

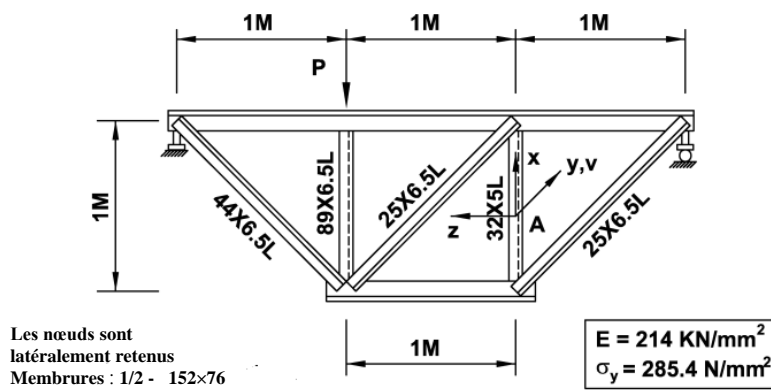


Figure 1.13: treillis plan [52]

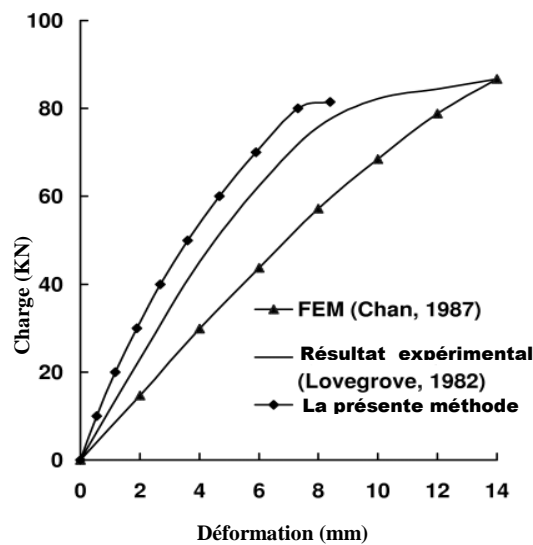


Figure 1.14 : courbe charge / flèche [52]

Timoshenko et Gere [53] ont donné la valeur critique de la force à la compression comme suit :

$$(P - P_x)(P - P_y)(P - P_z) \frac{I_s}{A} - P y_0^2 (P - P_z) - P z_0^2 (P - P_y) = 0 \quad (1.16)$$

I_s moment polaire d'inertie au centre de cisaillement de la section droite

P_y et P_z charges critiques d'Euler du flambement suivant les deux axes principales respectivement. P_x charge critique du déversement, y_0 z_0 sont les coordonnées du centre de cisaillement de la section droite ; A aire de la section droite.

Timoshenko et Gere ont donné, les courbes de flambement des barres et des poutres dans divers conditions aux limites idéalisées sous chargement axial et latéral.

L'analyse linéaire permet de prendre, en compte des petites déformations (où uniquement, les effets $P-\delta$ sont pris en compte) or l'analyse non linéaire permet de prendre en compte des grandes déformations (où en plus, les effets $P-\Delta$ sont pris en compte).

On peut citer les travaux de Livesley (1956) [54], Livesley et Chandler (1955) [55], Halldorsson et Wang (1968) [56], Majid (1972) [57], (1989), où la connexion avec l'analyse de la stabilité linéaire a été faite. Kondoh et Atluri (1985, 1986) [58,59], Ekhande et al. (1989) [60] et Chandra et al. (1990) [61] ; ont utilisé la méthode des éléments finis (FEM) basée sur les fonctions des déplacements.

Les travaux de Gallagher et Padlog (1963) [62] , Hartz BJ(1965) [63] , Hill et al. (1989) [64] , et Spillers (1990) [65] sont basées l'analyse de la stabilité non linéaire.

Manolis et Beskos (1983) [66] ont discuté l'effet de la distribution de la force axiale interne à la fois sur la base des fermes planes et les structures poteaux- poutres dans le cadre de l'analyse de la stabilité élastique linéaire.

La complexité de l'analyse de la stabilité linéaire et non linéaire augmente en plus quand en ajoute le couplage en flexion axiale, un couplage flexion - torsion des éléments de la structure. On peut mentionner les travaux de Renton (1962) [67], Krajinovic (1969) [68], Xykis et Galambos (1990) [69], Paavola et Salonen (1992) [70] Sallstrom (1996) [71] Barsoum et Gallagher (1970) [72] , Vacharajittiphan et Trahair (1975) [73], Ettouney et Kirby (1981) [74] , Bradford et Trahair (1982) [75], Roberts et Azizian (1983) [76].

Pour résoudre la matrice de rigidité, les effets $P-\delta$, $P-\Delta$ et les effets de la répartition de la force axiale interne sont pris en compte. Les effets des imperfections initiales des membres sont inclus dans la formulation, par une extension et généralisation de travail de Renton (1962) [67] et Xykis et Galambos (1990) [69], où on peut assumer les sections symétriques pour avoir un zéro gauchissement dans la matrice, on détermine la répartition de la force axiale par une analyse de premier ordre et de ne pas prendre en compte les effets $P-\Delta$.

En (2002) N. Bazeos, C. Xykis [77] ont présenté une approche qui n'est pas une analyse de stabilité totalement non-linéaire inclue des déformations qui peuvent être couvertes par les effets $P-\Delta$ pour déterminer la charge en élasticité jusqu'à la ruine des fermes et des structures en 3D avec des joints rigides mais avec des déformations latérales plutôt faibles.

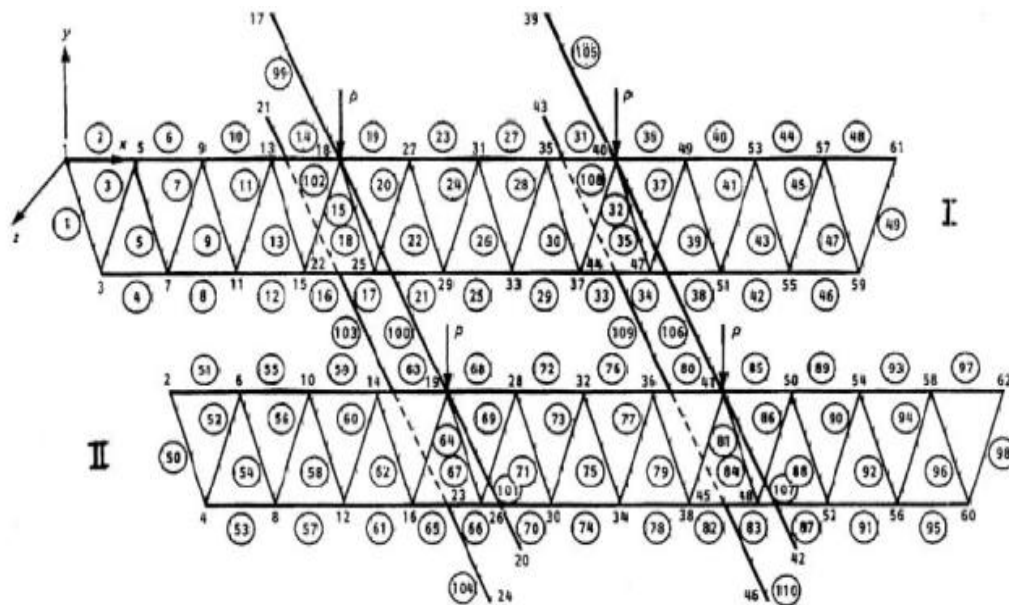


Figure 1.15 : Numérotation et géométrie d'un système à deux poutres [77]

En (2003) Seung-Eock Kim [78] et al. ont présenté une méthode de conception basée sur les performances des ponts en arc en acier, en utilisant l'analyse non linéaire.

Récemment, de nombreuses études sur les ponts en arc en acier ont été réalisées par Nazmy [79], et Pi Yong-Lin et Trahair [80]. Ces études sont basées sur l'analyse élastique non linéaire.

La matrice de transformation est donnée comme suit :

$$[T]_{6 \times 12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

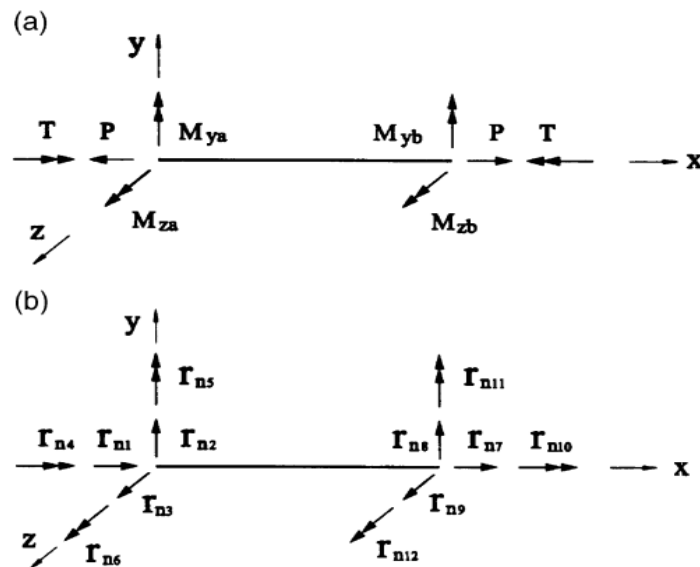


Figure 1.16 : forces aux extrémités de l'élément et la notation des déplacements [78]

En (2009) Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim [81] ont étudié le comportement non linéaire des des fermes spatiales en utilisant plusieurs modèles.

Afin de présenter le comportement réel des structures en treillis Hill et al. [82] ont présenté un modèle au moyen des équations empiriques.

Les fonctionnalités de Hill et al. sont prolongés par Ramesh et Krishnamoorthy [83] et Blandford [84] en utilisant la méthode de la relaxation dynamique (the dynamic relaxation method) et la méthode de longueur d'arc (the arc-length method), respectivement.

Une étude complète du comportement en grandes déformations des structures nécessite, un tracé d'un chemin d'équilibre et l'identification des points critiques.

De nombreuses méthodes et techniques pour réaliser l'équilibre de la trajectoire ont été présentées dans la littérature. La méthode de Newton Raphson a été créée la première à cet égard, mais elle ne parvient pas à proximité les points limites. Pour surmonter les difficultés rencontrées aux points limites, différentes méthodes numériques ont été développés telles que la méthode de contrôle des déplacements, la méthode de contrôle de travail et la méthode (arc-length). Chaque méthode a ses propres avantages et inconvénients. Une discussion de ces approches est disponible dans Yang et Kuo [85], Chen [86]. Comme a noté Yang et Kuo, la méthode de contrôle de déplacement généralisé (GDC) proposé par Yang et Shieh [87] est plus avantageuse par rapport à la plupart des méthodes existantes pour les raisons suivantes :

1) auto-adaptatif changement de la direction de la charge aux points limites; (2) la stabilité numérique des points critiques; et (3) l'ajustement automatique de la taille du pas.

Cette méthode a été appliquée par Liew et al. [88] pour l'avancement de l'analyse et la conception des fermes spatiales, et par Yang et al. [89] pour l'analyse d'inélasticité des fermes spatiales sous chargement thermique.

L'extension du modèle de Hill et al. a été effectué par Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim [81], en introduisant la non linéarité matérielle et géométrique en (2009).

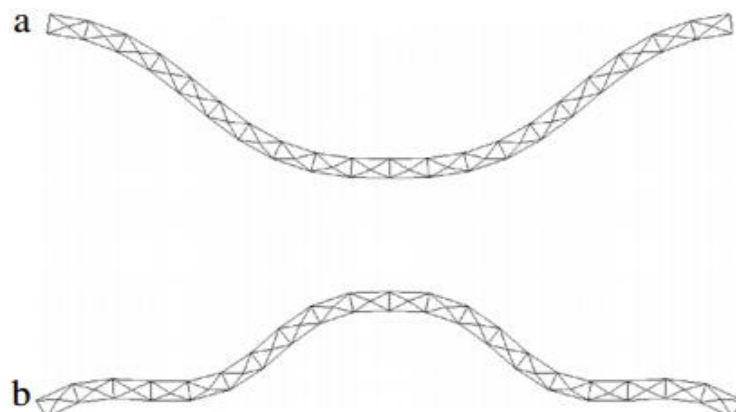


Figure 1.17 : Déformation de la ferme en arc [81]

En (2009) Josef Machacek, Martin Cudejko [90] , ont effectué un modèle numérique des fermes composites, le modèle est vérifié par des résultats expérimentaux, ils ont employé une étude paramétrique sur la distribution du flux de cisaillement dans l'interface entre l'acier et les parties du béton.

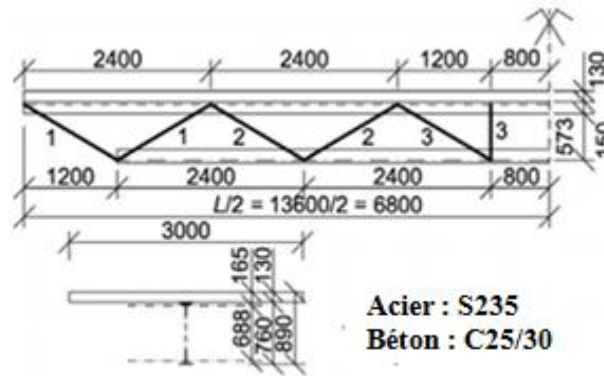


Figure 1.18 : Ferme mixte acier et dalle en béton [90]

En (2011), Morteza A.M. Torkamania,, Jyh-Hung Shieh [91] ont étudié l'analyse non linéaire des structures en treillis métalliques plans, en utilisant la méthode des éléments finis.

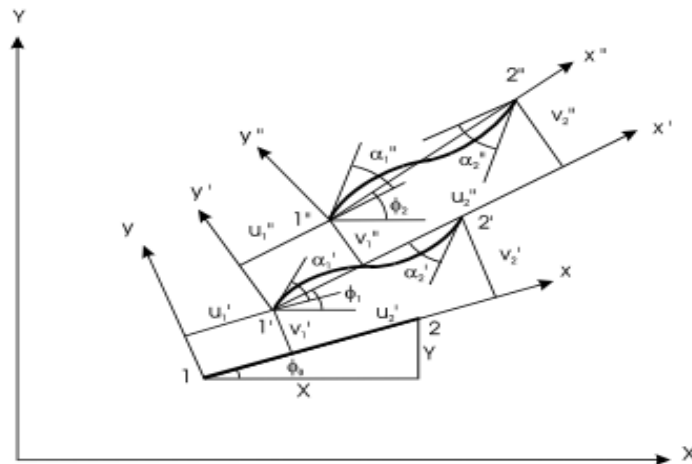


Figure 1.19 : l'élément et le repère global [91]

En (2014) Yu Chen et al. [92], ont effectué une étude expérimentale sur le comportement en flexion des fermes avec des tubes en acier remplis du béton. Ils ont observé différents modes de rupture des structures en treillis.

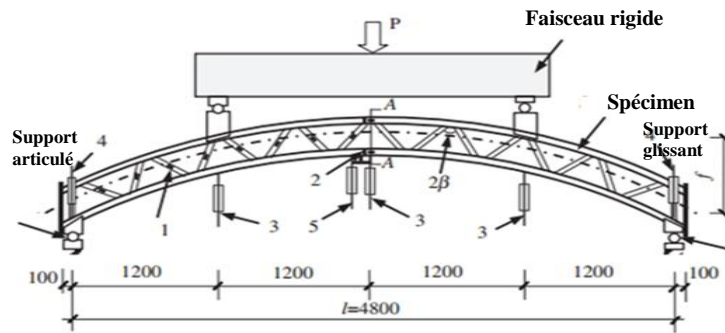


Figure 1.20: Schéma de la structure en treillis [92]

Le mode de rupture est schématisé comme suit :

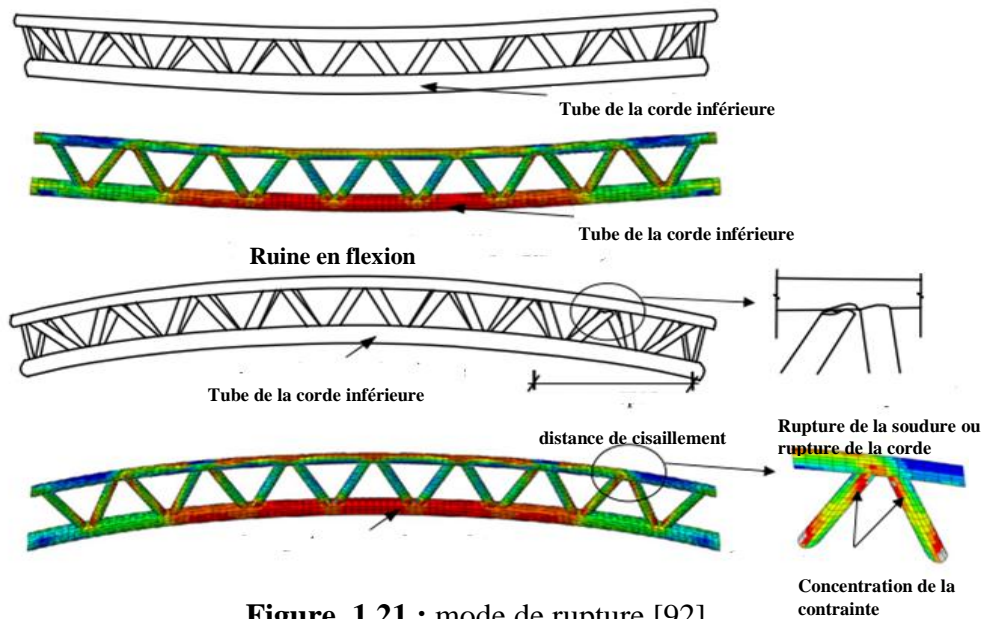


Figure 1.21 : mode de rupture [92]

En (2015), Piero Colajanni, Lidia La Mendola, Alessia Monaco [93], ont effectué une étude expérimentale et numérique sur le comportement cyclique des poutres en béton armé, la forme de l'armature pour le béton armé est présenté sur la figure 1.22.

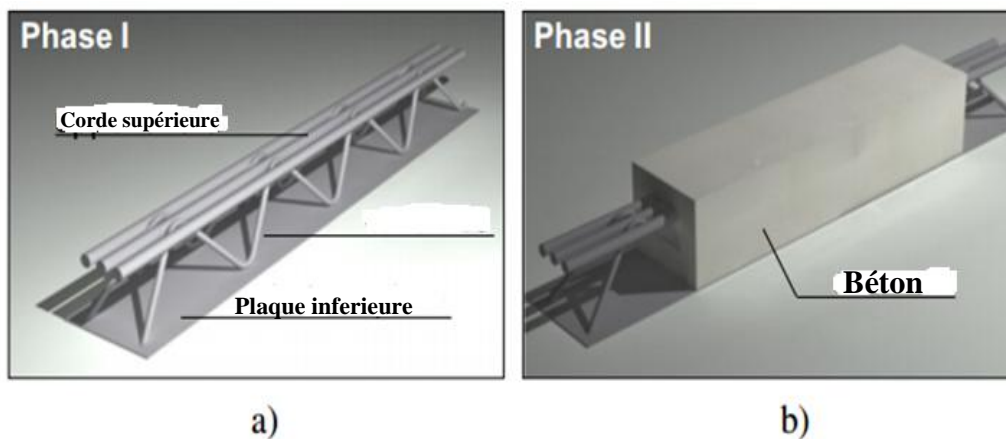


Figure 1.22 : Principales caractéristiques de la typologie des poutres étudiées [93]

1.4 Comportement des matériaux (béton, béton de fibres, acier)

1.4.1 Lois de béton en compression

On trouve beaucoup de modèles dans la littérature qui ont été réalisés par différents auteurs, on peut citer :

COENEN [94] propose la relation suivante :

$$\begin{cases} \sigma_t = E_0 \varepsilon_t & \text{si } \varepsilon_t \leq \varepsilon_{ct} \\ \sigma_t = f_{ct} + E_f (\varepsilon_t - \varepsilon_{ct}) & \text{si } \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tu} \end{cases} \quad (1.16)$$

Avec

$$-0,1 E_0 \leq E_f \leq -0,3 E_0 \quad (1.17)$$

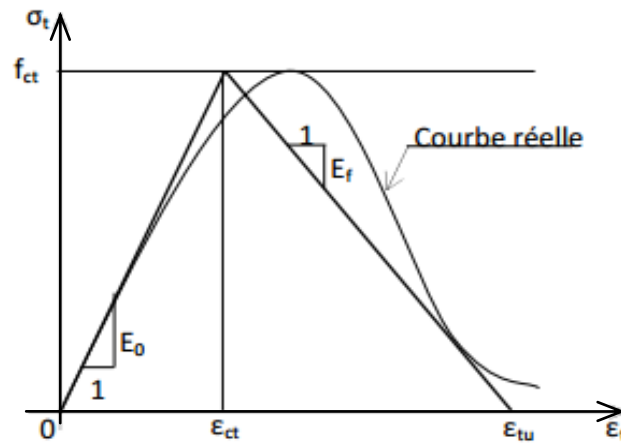


Figure 1.23 : Le modèle de COENEN [94]

Bazant et OH [95], avec la même loi bilinéaire définissent E_f , dans la relation précédente (1.17) en fonction de E_0 et f_{ct} (avec unités en psi).

$$E_f = -\frac{70 E_0}{57 + f_{ct}}, \quad (1.18)$$

Bazant [135] propose, un autre modèle pour un matériau fragile

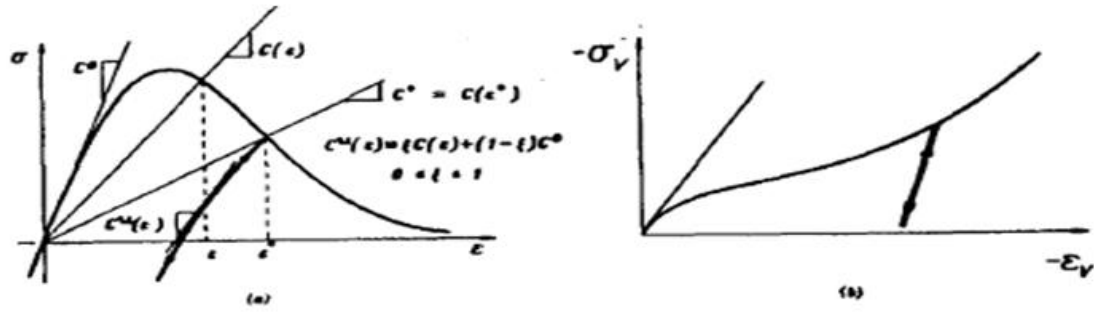


Figure 1.24 : (a) critère de chargement ; (b) contrainte-déformation et chargement [135]

-Loi de Sargin [96]

Sargin a décrit le comportement du béton en compression en admettant un modèle élastique non linéaire. L'allure de la courbe contrainte - déformation est représentée sur la figure.

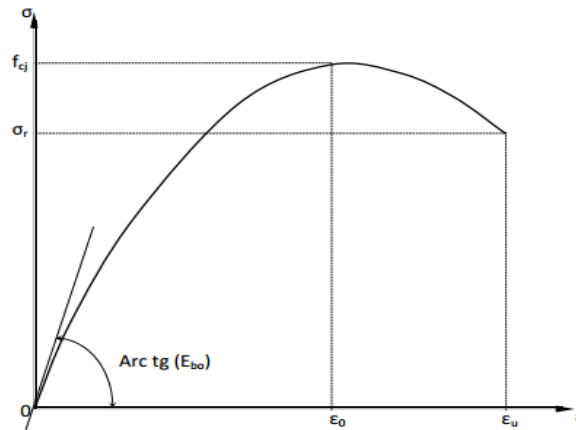


Figure 1.25 : comportement de béton à la compression selon Sargin [96]

La contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\sigma = f_{cj} \frac{k_b \bar{\epsilon} + (k'_b - 1) \bar{\epsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\epsilon} + k'_b \bar{\epsilon}^2} \tag{1.19}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \tag{1.20}$$

k_b paramètre ajustant la courbe ascendante : $k_b = \frac{E_{b0} \epsilon_0}{f_{cj}}$

f_{cj} résistance à la compression du béton à j jours ;

ϵ_0 déformation de pic correspondant à f_{cj} ;

E_{b0} module élastique du béton à l'origine ;

k'_b est un paramètre permettant d'ajuster la branche décroissante de la courbe :

En général, pour un béton normal, on peut prendre : $k'_b = k_b - 1$

- pour $k'_b = 0$, on obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, ce qui correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile (cas des bétons légers).

- pour $k'_b = 1$, on obtient les courbes avec une branche descendante assez douce qui correspond à un béton ayant un comportement ductile

1.4.2. Comportement du béton en traction

Le modèle de Grelat [18]

$$\begin{aligned} \sigma_{bt} &= E_{b0} \cdot \varepsilon_{bt} & \text{si} & \quad |\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{ft} \\ \sigma_{bt} &= -f_{tj} \cdot \frac{(\varepsilon + \varepsilon_r)^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_{ft})^2} & \text{si} & \quad \varepsilon_{ft} < |\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_r \\ \sigma_{bt} &= 0 & \text{si} & \quad |\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_r \end{aligned} \quad (1.21)$$

E_{b0} module d'élasticité longitudinale du béton,

f_{tj} résistance du béton à la traction,

ε_{ft} déformation de traction correspondant à f_{tj} ,

ε_r déformation correspondant à la plasticité de l'acier le plus tendu,

ε_{bt} déformation de la fibre de béton la plus tendue

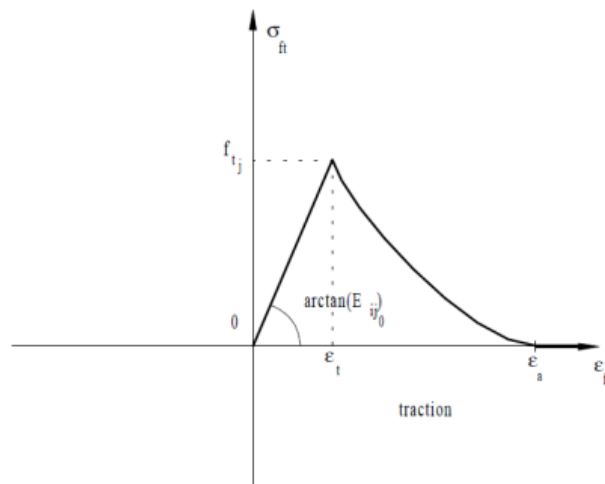


Figure 1.26 : le modèle de Grelat [18]

1.4.3 Comportement des aciers [97]

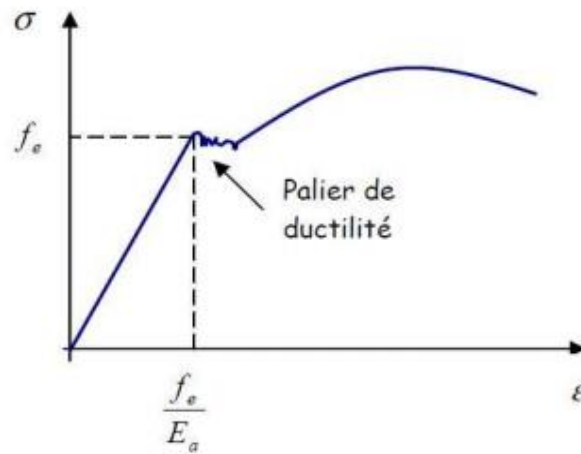


Figure 1.27 : Loi de comportement des aciers naturels

$$\begin{cases} \sigma = E_a \varepsilon_s & \text{si} & \varepsilon_s \leq \varepsilon_e \\ \sigma = f_e & \text{si} & \varepsilon_e \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \\ \sigma = 0 & \text{si} & \varepsilon_s \geq \varepsilon_{su} \end{cases} \quad (1.22)$$

E_a module longitudinal de l'acier,

ε_e déformation limite élastique de l'acier,

f_e contrainte élastique de l'acier,

ε_{su} déformation ultime de l'acier

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_a \varepsilon_s & \text{pour} & \quad \sigma_s \leq 0,7\sigma_e \\ \varepsilon_s &= \frac{\sigma_s}{E_a} + 0,823 \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_e} - 0,7 \right)^5 & \text{pour} & \quad 0,7\sigma_e < \sigma_s < 1,1\sigma_e \\ \sigma_s &= 1,1 \sigma_e & \text{pour} & \quad 1\%_0 < \varepsilon_s < \varepsilon_r \end{aligned} \quad (1.23)$$

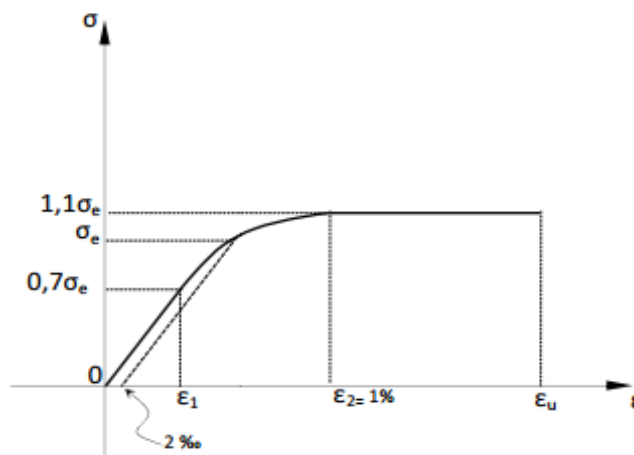


Figure 1.28: Loi de comportement des aciers écrouis

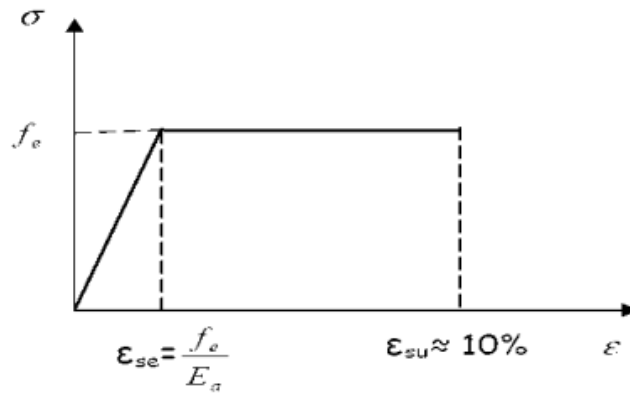


Figure 1.29 : Loi de comportement des aciers naturels d’après le BAEL [97]

1.4.4 Comportement des B.A.F [99]

Le béton de fibres est appliqué dans des sols industriels en béton, des dallages portuaires, des revêtements routiers, l’industrie de préfabrication et les bétons de fondations. Les recherches des milieux industriels et scientifiques visent à étendre à terme cette utilisation à des pièces structurales telles que des colonnes, des voiles, des structures triangulées. L’évaluation de l’accroissement de résistance à la compression du béton armé de fibres en fonction de la teneur en fibres et les caractéristiques mécaniques des matériaux a été décrite dans diverses théories. Les essais réalisés par ZHAN [98], les pieux en béton de fibres dans les années 80. -Le Modèle de bouafia et al. en 2002 [100]

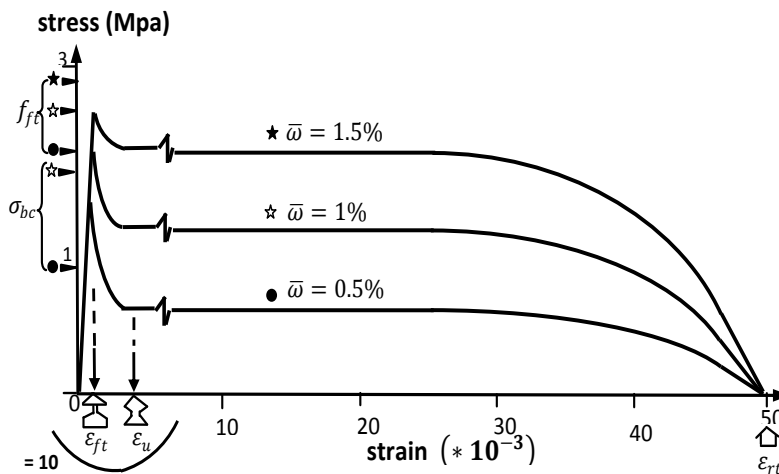


Figure 1.30 : le modèle de Bouafia et al. [100]

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = E_{ct} \varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ \sigma = \sigma_{uc} - [\sigma_{uc} - f_{ft}] \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{ft} - \varepsilon_u)^6} & \text{si } \varepsilon_{ft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ \sigma = \sigma_{uc} \left[1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_r - \varepsilon_u)^6} \right] & \text{si } \varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r \end{array} \right. \quad (1.24)$$

σ_{uc} est donnée sur la formule suivante :

$$\sigma_{uc} = \bar{\omega} \theta_o l_f \tau_u / \phi \quad (1.25)$$

1.5 Conclusion

L'analyse du comportement non linéaire des poutres avec certains détails constructifs a été établie par (Grelat ; 1978). Parmi les travaux les plus récents on note également, la mise en œuvre de la méthode calcul vis-à-vis de l'effort tranchant (kachi, bouafia, adjrad).

La majorité des applications du calcul à la rupture des structures en béton armé reste, le plus souvent limitée au dimensionnement des structures poteaux poutres, pour lesquelles ont été effectuées des études théoriques ainsi qu'une validation expérimentale plus étendue (voir par exemple, Nait-Rabah 1990).

C'est dans ce cadre que nous effectuons la modélisation non linéaire des structures triangulées fondée sur le calcul non linéaire, la formulation d'une telle approche passe en premier lieu par le choix d'une modélisation mécanique du béton ainsi que les armatures.

Chapitre 2

La méthode de calcul

2.1 Introduction

Dans la méthode de calcul non linéaire que nous développons, nous introduisons la non linéarité des lois contrainte - déformation des matériaux ainsi que la non linéarité due aux déplacements (effets du second ordre). Cette méthode nous permet de décrire, de façon proche de la réalité, le comportement jusqu'à la ruine des structures subissant des déplacements importants ou des redistributions d'efforts considérables.

L'étude présentée ici a porté sur l'introduction des rigidités de torsion et des efforts tranchants dans le domaine linéaire. Le problème non linéaire est résolu par une succession d'étapes de calcul linéaire. Nous utilisons une résolution itérative basée sur la méthode des déplacements, dans laquelle nous recalculons, à chaque étape, la matrice de rigidité corde reliant les accroissements de déplacements aux accroissements d'efforts.

Pour chaque étape de chargement extérieur, le problème consiste à chercher l'accroissement de déplacement des nœuds $\{\Delta U\}$ solution de système non linéaire suivant :

$$\{\Delta P\} + \{A\} = [K].\{\Delta U\} \quad (2.1)$$

La matrice de rigidité $[K]$ et le vecteur $\{A\}$ sont formés respectivement à partir des matrices $[K_X]$ et des vecteurs $\{A_X\}$ des différents éléments compte tenu de l'équilibre des nœuds de la structure.

Pour chaque élément, la matrice de rigidité $[K_X]$ et le vecteur $\{A_X\}$ sont donnés dans le repère absolu lié à la structure, $[K_X]$ et $\{A_X\}$ sont formés en étudiant le comportement mécanique d'un certain nombre de sections le long de l'élément dans le repère intrinsèque (lié à la position déformé de l'élément), l'étude de la section droite est présentée dans le paragraphe (2.4) ; les effets de second ordre sont introduits dans le passage de repère intrinsèque au repère fixe.

2.2 Lois de comportement des matériaux

Les matériaux utilisés sont : le béton, l'acier et le béton de fibres.

Des lois de comportement non linéaire des matériaux, ont été présentées pour décrire le comportement du béton, le béton de fibres et de l'acier.

La non-linéarité matérielle intervient au niveau de la construction de la matrice de rigidité $[K_n]$ de l'élément dans le repère intrinsèque, à partir des matrices de rigidité des sections $[K_s]$ constitutives de l'élément.

La section étudiée soit homogène, soit composite, elle est homogène s'il s'agit d'un profil métallique, où bien composite s'il s'agit du matériau béton armé où précontraint.

2.2.1 Le modèle de comportement du béton en compression

Le béton présente un comportement différent en traction et en compression. Différents modèles existent pour représenter le comportement du béton, nous avons présenté quelques modèles dans le premier chapitre.

La loi de comportement du béton utilisée dans cette étude est celle de Sargin, cette loi tient compte du comportement élastique non linéaire du matériau en compression.

- Loi de comportement uniaxiale du béton en compression

En élasticité non linéaire, les contraintes sont liées aux déformations par la relation suivante :

$$\sigma = \varphi(\varepsilon)$$

$\varphi(\varepsilon)$: définit le comportement réel des matériaux.

La relation qui lie les contraintes aux déformations du béton comprimé est connue à l'âge t quelconque.

Cette loi est définie en fonction des paramètres : E_{b0} , f_{cj} , ε_{b0} , ε_u

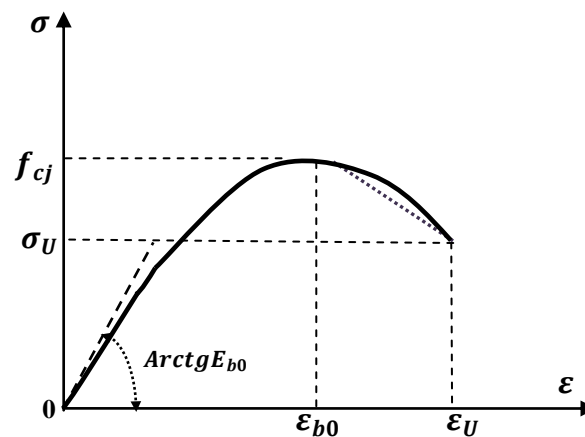


Figure 2.1 : Loi de comportement uniaxiale du béton sous contrainte de Compression (loi de Sargin générale)

- Caractéristiques de la courbe

Le comportement du béton en compression, est décrit par la loi de SARGIN dans la référence [106]

$$\sigma = f_{cj} \frac{k_b \bar{\varepsilon} + (k'_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} + k'_b \bar{\varepsilon}^2} \quad (2.2)$$

Avec :

f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l'âge j jours, donnée en Mpa.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \quad (2.3)$$

ε_{b0} : Déformation de pic correspondant à f_{cj} ,

$$k_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_{b0}}{f_{cj}} \quad (2.4)$$

$$E_{b0} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}} \quad (2.5)$$

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton à l'origine.

k_b et k'_b : paramètres adimensionnels, ajustent la branche descendante et ascendante, respectivement, de la loi de Sargin.

Le paramètre k'_b influe essentiellement sur l'allure de la branche descendante et dans la zone de pic. VIRLOGEUX [118]

$k'_b = 0$ On obtient des courbes correspondant à des bétons fragiles, avec une descente brutale

$k'_b = 1$ On obtient des courbes assez plates correspondant à des bétons peu fragiles.

Nous pouvons prendre les expressions suivantes :

$$K'_b = \begin{cases} K_b - 1 & \text{pour } f_{cj} \leq 30 \text{Mpa} \\ 0 & \text{pour } f_{cj} \geq 55 \text{Mpa} \\ (K_b - 1) \left(\frac{55 - f_{cj}}{25} \right) & \text{pour } 30 \text{Mpa} < f_{cj} < 55 \text{Mpa} \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2.2 Comportement du béton en traction, Grelat [18]

La résistance du béton à la traction et la contribution du béton tendu entre les fissures sont généralement négligées dans les calculs habituels. Ces hypothèses de calcul sont acceptables pour l'étude de l'équilibre d'une section au droit d'une fissure.

Dans la représentation du comportement moyen d'un tronçon fissuré, le béton tendu entre les fissures contribue à la rigidité globale du tronçon.

Du point de vue du comportement global d'une structure, l'aspect essentiel de la fissuration est le fait qu'elle provoque des pertes de rigidité, entraînent au niveau de la structure l'augmentation des déformations et des redistributions des contraintes, le comportement d'un tirant en béton armé résume la participation du béton tendu entre les fissures, les différentes dents de béton restent intacts reliés par l'acier longitudinal contribuent à la rigidité globale du tronçon d'une poutre et cette rigidité reste valable tant que l'acier est complètement adhérent au béton, elle diminue et s'annule à la plastification et à la rupture de l'acier.

Afin de tenir compte de la contribution du béton tendu entre les fissures dans notre étude, nous utiliserons le modèle développé par GRELAT [18], qui simule le comportement moyen du béton entre deux fissures. Ce modèle est censé modéliser la résistance du béton entre deux fissures, plus connue sous le nom de « tension-stiffening ». Cette contribution est décrite en références [100], [109].

Pour la représentation du comportement moyen de l'élément fissuré, nous schématisons une section qui représente une certaine longueur de cet élément, et nous allons affecter, l'ensemble des fibres du béton tendu d'une section, un module élastique fictif E_{bt} variable au cours du chargement. La section tendue aura donc, une répartition de contrainte triangulaire.

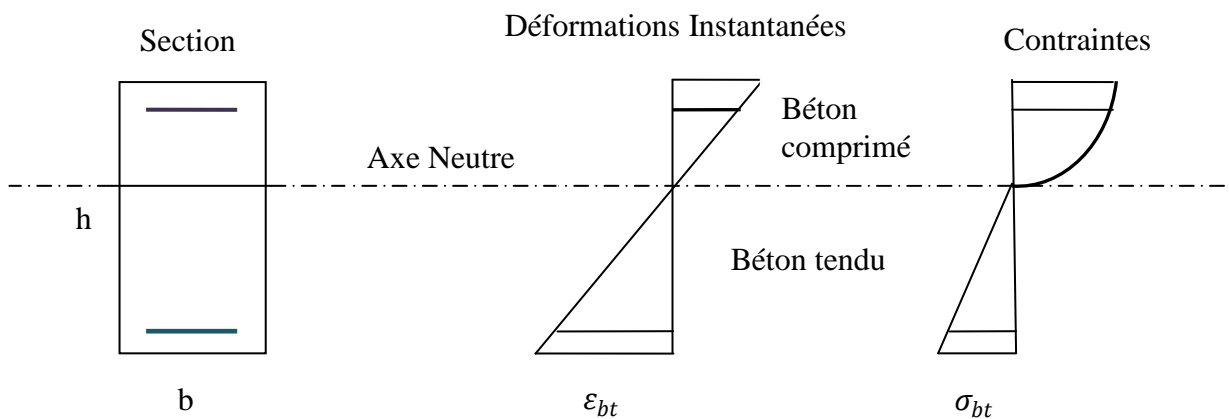


Figure 2.2: répartition fictive des contraintes dans une section pour le béton tendu

Le module de déformation E_{bt} est défini à partir de la contrainte et de la déformation instantanée du bord tendu.

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}}$$

La participation du béton tendu peut alors être traduite en fonction des limites ε_{ft} , correspondant à la résistance à la traction du béton, et ε_r , correspondant à la contrainte limite d'écoulement des aciers, de la façon suivante :

$|\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{ft}$: Pas de fissuration, participation complète du béton avec le module E_{bt}

$$\sigma_{bt} = E_{b0} \cdot \varepsilon_{bt} \quad (2.7)$$

$\varepsilon_{ft} < |\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_r$: Fissuration avec participation du béton tendu

$$\sigma_{bt} = -f_{tj} \cdot \frac{(\varepsilon + \varepsilon_r)^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_{ft})^2} \quad (2.8)$$

$|\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_r$: Fissuration sans participation du béton tendu

$$\sigma_{bt} = 0 \quad (2.9)$$

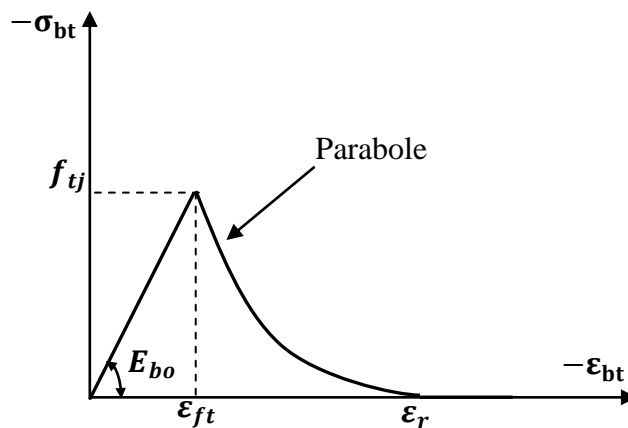


Figure 2.3 : Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton sur le bord tendu (Grelat)

Avec :

E_{bt} : Module d'élasticité longitudinale du béton

E_{b0} : Module d'Young tangent à l'origine ;

f_{tj} : Résistance à la traction du béton

ε_{ft} : Déformation correspondant à une traction f_{tj} : $\varepsilon_{ft} = \frac{f_{tj}}{E_{b0}}$

ε_r : Déformation limite d'élasticité de l'acier le plus tendu

2.2.3 Loi de comportement du béton de fibres [100]

Pour les structures en béton de fibres nous avons utilisé le modèle de Bouafia et al. [100]. pour modéliser le comportement du béton à la traction.

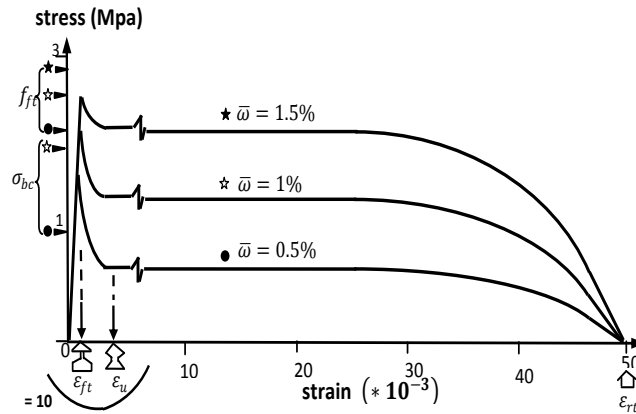


Figure .2.4 : Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton de fibres

- Les propriétés mécaniques du béton de fibres [100]

La loi de comportement de béton de fibres est représentée sous la relation (2.10), cette loi décrit la contrainte à la compression σ .

$$\begin{cases} \sigma = E_{ct} \varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ \sigma = \sigma_{uc} - [\sigma_{uc} - f_{ft}] \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{ft} - \varepsilon_u)^6} & \text{si } \varepsilon_{ft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ \sigma = \sigma_{uc} \left[1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_r - \varepsilon_u)^6} \right] & \text{si } \varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r \end{cases} \quad (2.10)$$

σ_{uc} est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_{uc} = \bar{\omega} \theta_o l_f \tau_u / \phi \quad (2.11)$$

2.2.4 Le comportement uni axiale de l'acier à la traction

La loi de comportement contrainte – déformation de l'acier sous chargement monotone est supposée identique en traction et en compression. Les différents types d'aciers utilisés dans la présente étude sont les aciers passifs.

-Aciers passifs

On distingue les aciers naturels et les aciers écrouis

Les aciers naturels sont caractérisés par une loi de comportement élasto-plastique parfaite

1. Aciers naturels

On peut adopter pour les aciers naturels la loi élastoplastique parfaite qui s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma = E_a \varepsilon_s & \text{if } \varepsilon_s \leq \varepsilon_e \\ \sigma = f_e & \text{if } \varepsilon_e \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \\ \sigma = 0 & \text{if } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{su} \end{cases} \quad (2.12)$$

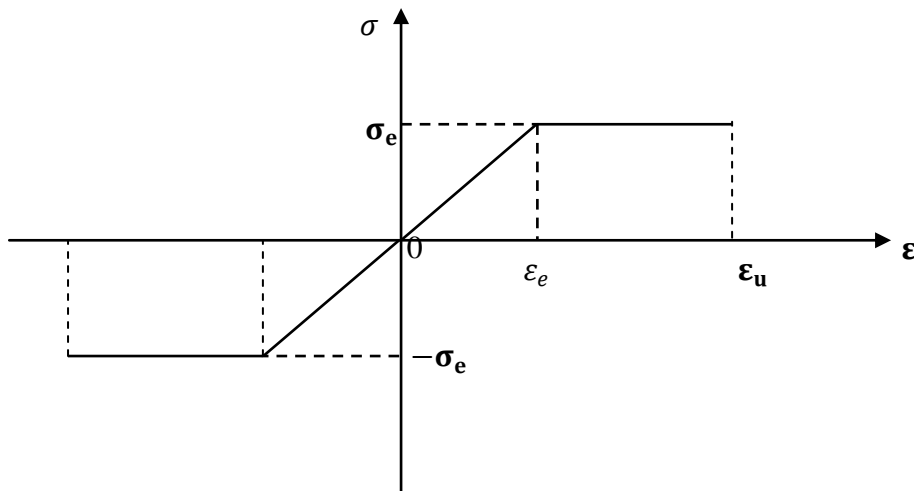


Figure 2.5 : Diagramme contrainte – déformation d'acier naturel

2. Aciers écrouis

On adopte la loi du BAEL [143], dans cette loi on conserve une zone élastique jusqu'à 70% de la limite élastique, au-delà, et jusqu'à des déformations de l'ordre 1%, on adopte une courbe de cinquième degré, et pour des déformations supérieures à 1%, on suppose que la déformation reste constante jusqu'à un 4 %.

Le diagramme du comportement des aciers écrouis est symétrique par rapport au point O, et se décompose en partie linéaire et une partie non linéaire :

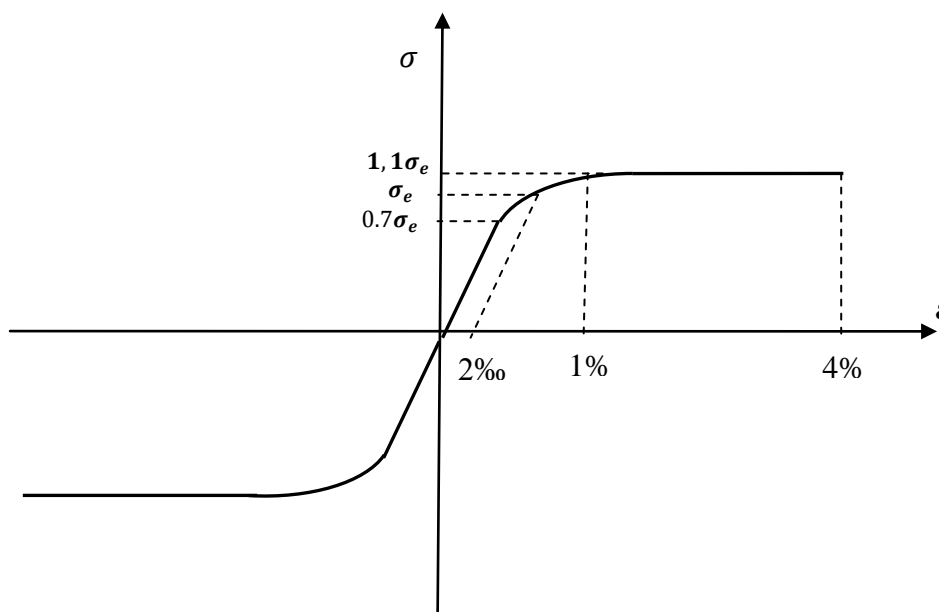


Figure 2.6 : Comportement des aciers écrouis

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_a \varepsilon_s && \text{pour} && \sigma_s \leq 0,7\sigma_e \\ \varepsilon_s &= \frac{\sigma_s}{E_a} + 0,823 \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_e} - 0,7 \right)^5 && \text{pour} && 0,7\sigma_e < \sigma_s < 1,1\sigma_e \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\sigma_s = 1,1 \sigma_e \quad \text{pour} \quad 1\% < \varepsilon_s < \varepsilon_r$$

Où :

E_a : est le module d'Young de l'acier à l'origine

σ_e : la limite élastique conventionnelle à 2%,

$0,7\sigma_e$: est la contrainte où s'arrête le diagramme linéaire

2.3 Hypothèses de calcul

Pour cette méthode les éléments 'poutre' joignant les nœuds principaux de la structure sont divisées en tronçons de faible longueur, généralement supposés chargés seulement en leurs extrémités.

Un tronçon est schématisé en élément fini unidimensionnel, représenté par son axe géométrique, auquel sont attribuées les caractéristiques mécaniques respectivement du tronçon. Le comportement mécanique des sections, les caractéristiques de déformabilité d'un tronçon sont obtenues par l'étude d'une ou plusieurs sections, quelques hypothèses de base sont toujours admises.

- La conservation de la planéité des sections droites
- Absence du glissement entre les armatures et le béton.
- Cette méthode ne tient pas compte de la déformation à l'effort tranchant,
- La résistance du béton à la traction, ainsi que la contribution du béton tendu entre les fissures sont généralement négligées.

2.4 Modélisation de la section

2.4.1 Introduction

Le traitement de la non linéarité matérielle intervient au niveau de la section. Le comportement mécanique est modélisé par des relations unidimensionnelles (de type $\sigma - \varepsilon$), la modélisation géométrique de la section est considérée dans le cas spatial en trois dimensions (x, y, z) .

Le développement du calcul de la section décrit d'une façon générale la modélisation de la section et son implémentation dans le programme en 3D. Cette section a été calculée déjà en 2D (voir l'annexe A).

2.4.2 Etude d'une section droite

La prise en compte de la non linéarité matérielle intervient dans la construction de la matrice de rigidité de l'élément dans le repère intrinsèque. Cette matrice va être construite à partir des matrices de rigidités des sections constitutives de l'élément.

2.4.2.1 Géométrie des déformations

La section étudiée appartient à l'élément dont on veut calculer la matrice de rigidité. Selon l'hypothèse des sections planes, la déformation d'une fibre m peut être exprimée, en fonction de ces coordonnées et de la déformation de la section sollicitée avec un effort normal N et des moments de flexion M_y et M_z .

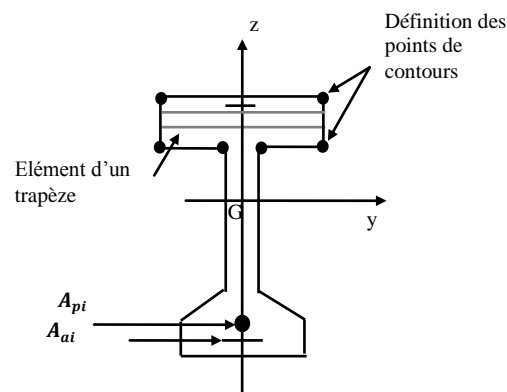


Figure 2.7 : Discrétisation de la section du béton en tables trapézoïdales

Avec

- G : Centre de gravité de la section
- G_x : l'axe tangent à la fibre moyenne de l'élément (en supposant que les déplacements dans le repère intrinsèque reste modéré)
- G_y, G_z : les axes liés directement au repère intrinsèque.
- C : le centre de torsion de la section dans le repère G_{yz} , et y_c, z_c sont respectivement les coordonnées de point c.

On suppose que la section est symétrique et que le centre de gravité coïncide avec le centre de torsion

2.4.2.1.1 Déformations normales

On suppose que les effets dus au gauchissement sont négligés et on faisant appel à l'hypothèse de la planéité des sections. La déformation $\varepsilon(y, z)$ est donnée par :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_x + \phi_y Z + \phi_z Y \quad (2.14)$$

Où

$\varepsilon(y, z)$: la déformation normale en un point de coordonnée (y, z) de la section.

ε_x : la déformation au centre de gravité de la section (effort associé est l'effort normal N)

ϕ_y et ϕ_z : les rotations de la section autour des axes G_y et G_z respectivement.

La non linéarité matérielle ne sera prise en compte que par la relation entre les sollicitations normales (N, M_y, M_z) et les déformations normales associées $(\varepsilon_x, \phi_y, \phi_z)$

Les déformations normales seront désignées par le vecteur $\{\varepsilon_n\} = (\varepsilon_x, \phi_y, \phi_z)^T$

On peut écrire

$$\{\varepsilon_{(x,y,z)}\} = (1, Z, Y)\{\varepsilon_n\} \quad (2.15)$$

2.4.2.1.2 Déformations tangentes

Les sollicitations tangentes à la section sont les efforts tranchants T_y et T_z et le moment de torsion M_{cx} . Les déformations tangentes sont γ_y, γ_z et l'angle de torsion θ_x

On désigne les déformations tangentes par le vecteur

$$\{\varepsilon_t\} = (\gamma_y, \gamma_z, \theta_x)^T \quad (2.16)$$

2.4.2.1.3 Déformations des armatures

On note (y_f, z_f) : les coordonnées du point de passage de l'armature dans le repère GYZ, l'armature est supposée parfaitement adhérente au béton.

Pour un accroissement des déformations de la section, l'accroissement des déformations dans l'armature est donné par :

$$\{\Delta\varepsilon_f\} = \cos^2\alpha(1, z_f, y_f)\{\Delta\varepsilon_n\} + \sin\alpha\cos\alpha(|\cos\beta, \sin\beta, y_f\sin\beta - z_f\cos\beta|)\{\Delta\varepsilon_t\} \quad (2.17)$$

α : angle que fait la ligne moyenne de l'armature avec l'axe Gx. (figure 2.8)

β : angle entre la projection de l'armature dans le plan de la section et l'axe Gy.

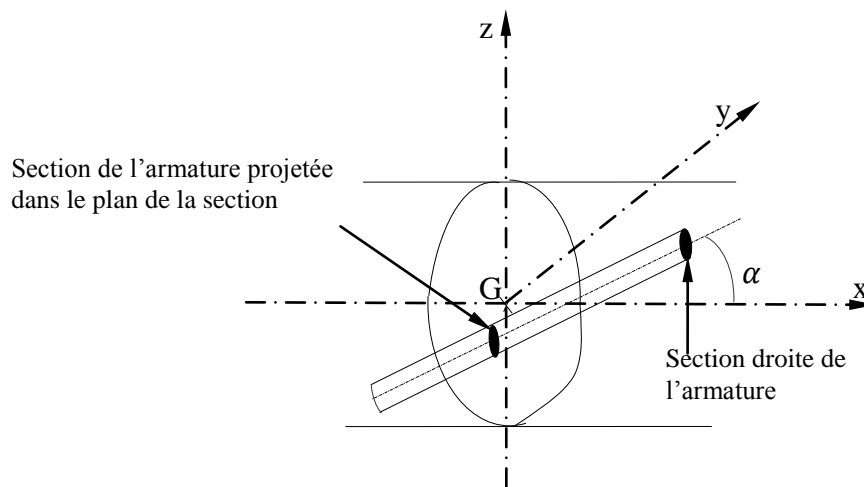


Figure 2.8 : Armature inclinée par rapport à la section droite

2.4.2.2 Calcul des sollicitations internes

Les éléments constitutifs de la section, que sont la matrice et les aciers, vont engendrer des sollicitations que l'on va séparer en deux catégories : les sollicitations normales et les sollicitations tangentes.

Où :

F_{m_n} les sollicitations normales dues à la matrice de la section (du béton en général) ;

F_{m_t} les sollicitations tangentes dues à la matrice de la section ;

F_{f_n} les sollicitations normales dues aux armatures de la section (les armatures métalliques, actives ou passives) ;

F_{f_t} les sollicitations tangentes dues aux armatures de la section.

2.4.2.2.1 Sollicitations normales dues à la matrice de la section (béton)

Dans le repère OXYZ, on peut écrire : $\{F_{mn}\} = \begin{Bmatrix} N_m \\ M_{my} \\ M_{mz} \end{Bmatrix}$ avec N_m l'effort normal, M_{my}

et M_{mz} moments fléchissant dus à la matrice de la section (c. à. d. le béton). L'accroissement des sollicitations normales du béton s'écrit :

$$\{\Delta F_{mn}\} = \int \Delta \sigma_m(y, z) \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ y \end{Bmatrix} \cdot dS_m \quad (2.18)$$

On peut écrire l'accroissement de contrainte normale

$$\{\Delta \sigma(y, z)\} = E_m(y, z) \cdot \{\Delta \varepsilon(y, z)\} \quad (2.19)$$

Avec : $E_m(y, z)$ l'accroissement de déformation normale

Compte tenu des relations (2.14), (2.18), (2.19) on peut écrire sous la forme matricielle :

$$\langle \Delta F_{mn} \rangle = \int E_m(y, z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & z & y \\ z & z^2 & yz \\ y & yz & y^2 \end{bmatrix} \cdot dS_m \cdot \{\Delta \varepsilon_n\} \quad (2.20)$$

Qu'on peut écrire sous la forme

$$\{\Delta F_{mn}\} = [K_{mn}] \cdot \{\Delta \varepsilon_n\} \quad (2.21)$$

$[K_{mn}]$: matrice de rigidité corde reliant l'accroissement de sollicitations normales de la matrice de la section à la variation de déformation normale de la section.

2.4.2.2 Sollicitations tangentés dues à la matrice de la section (béton)

Dans le repère OXYZ, on peut écrire également

$$\{F_{mt}\} = \begin{Bmatrix} T_{my} \\ T_{mz} \\ M_{mcx} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

T_{my}, T_{mz} : efforts tranchants et M_{mcx} : moment de torsion autour de C.

On note $[K_{mt}]$ la matrice de rigidité tangente reliant les sollicitations tangentés de la matrice de la section aux déformations tangentés de la section et en supposant cette relation linéaire

On peut écrire :

$$\{F_{mt}\} = [K_{mt}] \cdot \{\varepsilon_t\} \quad (2.23)$$

Avec :

G : module de cisaillement de coulomb $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

A_y, A_z : sections réduites d'efforts tranchants.

I_x : inertie de torsion de la section.

$$[K_{mt}] = \begin{bmatrix} G.A_y & 0 & 0 \\ 0 & G.A_z & 0 \\ 0 & 0 & G.I_x \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Comme l'équation (2.23) est linéaire, et comme les rigidités à l'effort tranchant et à la torsion sont constantes, la relation (2.23) est valable pour les accroissements d'efforts :

$$\{\Delta F_t\} = [K_{mt}] \cdot \{\Delta \varepsilon_t\} \quad (2.25)$$

En tenant compte des relations (2.21) et (2.25) on peut écrire sous forme matricielle la relation liant les accroissements de déformations dans une section droite et les accroissements de sollicitations internes développés dans le béton ou l'acier dans le cas des structures métalliques.

$$\begin{pmatrix} \{\Delta F_{mn}\} \\ \{\Delta F_{mt}\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{mn}] & 0 \\ 0 & [K_{mt}] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \{\Delta \varepsilon_n\} \\ \{\Delta \varepsilon_t\} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

2.4.2.2.3 Sollicitations normales dues aux armatures de la section

Les armatures sont supposées parfaitement adhérentes au béton

Dans le repère Gxyz lié à la section droite on écrit :

$$\{f_{fn}\} = \begin{pmatrix} N_f \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Avec :

N_f : effort normal due aux armatures de la section.

M_{fy}, M_{fz} : moments fléchissants dus aux armatures de la section.

L'accroissement de l'effort normal de l'armature d'ordre i s'écrit :

$$\Delta F_{fn} = \sum_{i=1}^{n_f} \Delta \sigma_{fi} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z_{fi} \\ y_{fi} \end{pmatrix} \cdot \cos \alpha_i \cdot s_{fi} \quad (2.28)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_f} E_{fi} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z_{fi} \\ y_{fi} \end{pmatrix} \cdot \cos \alpha_i \cdot s_{fi} \cdot \Delta \varepsilon_{fi} \quad (2.29)$$

En utilisant la relation (2.29) :

$$\Delta F_{fn} = [K_{fn}] \cdot \Delta \varepsilon_n + [K_{fnt}] \cdot \Delta \varepsilon_t \quad (2.30)$$

Où

$[K_{fn}]$ représente une matrice symétrique (3×3) définie par :

$$[K_{fn}] = \sum_{i=1}^{n_f} E_{fi} \cdot \cos^3 \alpha_i \cdot s_{fi} \cdot \begin{bmatrix} 1 & z_{fi} & y_{fi} \\ z_{fi} & z_{fi}^2 & y_{fi} z_{fi} \\ y_{fi} & y_{fi} z_{fi} & y_{fi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$[K_{fnt}] = \sum_{i=1}^{n_f} E_{fi} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos^2 \alpha_i \cdot s_{fi} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z_{fi} \\ y_{fi} \end{pmatrix} \cdot (\cos \beta_i \sin \beta_i (y_{fi}) \sin \beta_i - (z_{fi}) \cos \beta_i) \quad (2.32)$$

Où

β_i l'angle existant entre la projection de l'armature d'ordre i dans le plan G_{yz} , et l'axe G_y .

(y_{fi}, z_{fi}) Sont des points de passage de l'armature d'ordre i dans le repère G_{yz}

α_i est l'angle existant entre l'armature d'ordre i et l'axe G_x ,

s_{fi} est la section droite de l'armature d'ordre i

E_{fi} est le module élastique longitudinal corde (le module reliant l'accroissement de contrainte à l'accroissement de déformation de l'armature d'ordre i)

2.4.2.2.4 Sollicitations tangentés dues aux armatures de la section

Dans le repère G_{xyz} on a :

$$\{f_{ft}\} = \begin{pmatrix} T_{fy} \\ T_{fz} \\ M_{fc_x} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Où T_{fy} et T_{fz} sont les efforts tranchants, et M_{fc_x} le moment de torsion autour de C, tous trois dus aux armatures adhérentes et traversant la section.

L'accroissement de sollicitations tangentés dû aux armatures de la section s'écrit :

$$\Delta F_{ft} = \sum_{i=1}^{n_f} \Delta \sigma_{fi} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \\ y_{fi} \sin \beta_i - z_{fi} \cos \beta_i \end{pmatrix} \cdot \sin \alpha_i \cdot s_{fi} \quad (2.34)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_f} E_{fi} \cdot \sin \alpha_i \cdot s_{fi} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \\ y_{fi} \sin \beta_i - z_{fi} \cos \beta_i \end{pmatrix} \cdot \Delta \varepsilon_{fi} \quad (2.35)$$

En utilisant la relation (2.34) :

$$\Delta F_{ft} = [K_{f_{tn}}] \cdot \Delta \varepsilon_n + [K_{ft}] \cdot \Delta \varepsilon_t \quad (2.36)$$

Avec

$$[K_{f_{tn}}] = \sum_{i=1}^{n_f} E_{fi} \cdot \cos^3 \alpha_i \cdot s_{fi} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \\ y_{fi} \sin \beta_i - z_{fi} \cos \beta_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z_{fi} & y_{fi} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

On constate que

$$[K_{f_{tn}}] = {}^t [K_{f_{nt}}] \quad (2.38)$$

Si on pose :

$$V_{f_{ti}} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \\ y_{fi} \sin \beta_i - z_{fi} \cos \beta_i \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

La matrice $[K_{ft}]$ s'obtient de la façon suivante :

$$[K_{ft}] = \sum_{i=1}^{n_f} E_{fi} \cdot \sin^2 \alpha_i \cdot s_{fi} \cdot V_{f_{ti}} \cdot {}^t V_{f_{ti}} \quad (2.40)$$

On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \Delta F_{fn} \\ \Delta F_{ft} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{fn} & K_{f_{nt}} \\ {}^t K_{f_{nt}} & K_{ft} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ \Delta \varepsilon_t \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

2.4.2.3 Sollicitations externes

La section est soumise à des sollicitations extérieures que sont l'effort normal N . Les efforts tranchants T_y et T_z , les moments fléchissants M_y et M_z et le moment de torsion M_{cx}

On peut écrire :

Le vecteur des sollicitations normales s'écrit :

$$F_{sn} = \begin{pmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Celui de sollicitations tangentes est donnée par :

$$F_{st} = \begin{pmatrix} T_y \\ T_z \\ M_{cx} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Où

F_{sn} : le vecteur des sollicitations normales à la section.

F_{st} : le vecteur des sollicitations tangentes à la section.

De plus, si la section subit l'action de la précontrainte, que l'on peut décomposer en deux composantes, la composante normale à la section notée : A_{sn} et une composante tangente notée : A_{st}

On peut écrire :

$$A_{sn} = - \sum_{i=1}^{n_{fp}} \sigma_{f_{p0_i}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ Zf_{pi} \\ Yf_{pi} \end{pmatrix} \cos\alpha_{pi} \cdot Sf_{pi} \quad (2.44)$$

$$A_{st} = - \sum_{i=1}^{n_{fp}} \sigma_{f_{p0_i}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta_{pi} \\ \sin\beta_{pi} \\ (yf_{pi})\sin\beta_{pi} - (zf_{pi})\sin\beta_{pi} \end{pmatrix} \sin\alpha_{pi} \cdot Sf_{pi} \quad (2.45)$$

Où:

n_{fp} : le nombre de câbles de précontraint tendus au cours de l'opération courante et traversant la section.

$\sigma_{f_{p0_i}}$: la tension courante dans le câble d'ordre i , compte tenant des pertes instantanées.

L'indice p montre que seuls les câbles de précontrainte sont considérés.

2.4.2.4 Equilibre de la section

L'équilibre de la section est exprimé par le fait que l'accroissement de sollicitations externes et l'action de la précontrainte sont équilibrés par l'accroissement de sollicitations internes.

$$\begin{pmatrix} \Delta F_{sn} \\ \Delta F_{st} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{sn} \\ A_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta F_{mn} \\ \Delta F_{mt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta F_{fn} \\ \Delta F_{ft} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Le développement des équations d'équilibre nous permet d'aboutir à la relation

$$\begin{pmatrix} \Delta F_{sn} \\ \Delta F_{st} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{sn} \\ A_{st} \end{pmatrix} = [K_s] \cdot \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ \Delta \varepsilon_t \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Où $[K_s]$: matrice de rigidité corde de la section reliant l'accroissement d'effort externes à l'accroissement des déformations dont la formulation est donnée par :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K_{mn}] + [K_{fn}] & [K_{fnt}] \\ {}^t[K_{fnt}] & [K_{mt}] + [K_{ft}] \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Dans le cas de la précontrainte, on ajoute le terme $[K_{fp}]$ dans le terme de la première ligne et la première colonne de la matrice $[K_s]$.

Les sous matrices $[K_{mn}]$, $[K_{mt}]$, $[K_{fn}]$, $[K_{fnt}]$ et $[K_{ft}]$ sont respectivement définies par les relations (2.20), (2.24), (2.31), (2.32) et (2.40).

2.4.3 Méthode itérative de résolution et critère de convergence de la section en 3D

En élasticité non linéaire, il est facile de calculer les efforts développés par une déformation donnée, mais il n'existe pas une méthode directe permettant de calculer les déformations produites par des efforts donnés.

A cet effet on utilise une méthode itérative pour la recherche de la solution en déformation.

Considérons un état d'équilibre de la section et ε_s est le vecteur des déformations de la section

$$\varepsilon_s = \begin{pmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$F_s = \begin{pmatrix} F_{sn} \\ F_{st} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

F_s : le vecteur des sollicitations externes

Cette section va subir un accroissement d'efforts correspondant à :

$$\Delta F_s = \begin{pmatrix} \Delta F_{sn} \\ \Delta F_{st} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Ainsi que l'action de la précontrainte

$$A_s = \begin{pmatrix} A_{sn} \\ A_{st} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Nous cherchons à calculer l'accroissement des déformations de la section correspondant :

$$\Delta \varepsilon_s = \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ \Delta \varepsilon_t \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Pour un accroissement donné d'effort sollicitant, la résolution en déformation de l'équation (2.47) est itérative.

A l'équilibre de la section, l'accroissement des déformations est donné par :

$$\Delta \varepsilon = [S_s] \cdot (\Delta F_s + A_s) \quad (2.54)$$

Où $[S_s]$ est la matrice de souplesse de la section, définie par :

$$[S_s] = [K_s]^{-1} \quad (2.55)$$

Considérant un état d'équilibre de la section soumise à des sollicitations extérieures, qui peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\{F_s\}$, défini par :

$$\{F_s\} = (N, M_y, M_z, T_y, T_z, M_c)^T \quad (2.56)$$

$\{\varepsilon_s\}$ est le vecteur de déformation de la section correspondant

$$\{\varepsilon_s\} = (\varepsilon_x, \phi_y, \phi_z, \gamma_y, \gamma_z, \theta_x) \quad (2.57)$$

Pour une variation $\{\Delta F_s\}$ de sollicitations, l'accroissement de déformation $\{\Delta \varepsilon_s\}$ est recherchée en utilisant la méthode des substitutions utilisant les matrices cordes.

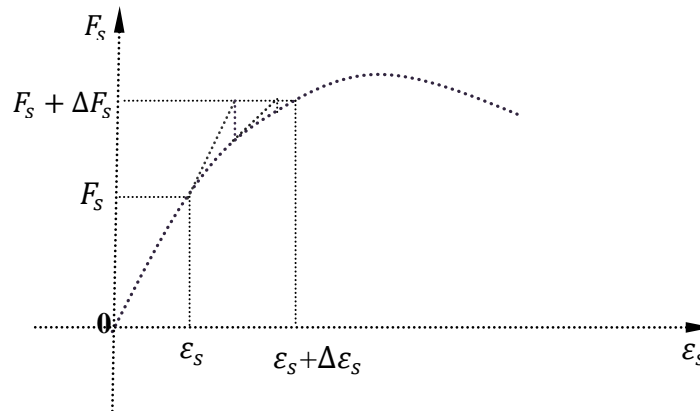


Figure 2.9 : résolution itérative de l'équilibre de la section

La méthode de substitutions consiste à construire une suite de vecteurs déformations de la section $\Delta \varepsilon_i$ définie par :

$$\Delta \varepsilon_{s0} = (0) \quad (2.58)$$

$$\Delta \varepsilon_{si+1} = [S_s]_i \cdot (\Delta F_s + A_s) \quad (2.59)$$

$[S_s]_i$: la matrice de souplesse de la section corde entre les états de déformations ε_s et $\varepsilon_s + \Delta \varepsilon_{si}$

La convergence est attendue quand on a :

$$\eta = \left[\frac{\langle \Delta \varepsilon_i - \Delta \varepsilon_{i-1} \rangle \cdot (\{\Delta \varepsilon\}_i - \{\Delta \varepsilon\}_{i-1})}{\langle \varepsilon_s + \Delta \varepsilon_i \rangle \cdot (\{\varepsilon_s\} + \{\Delta \varepsilon\}_i)} \right]^{1/2} < T_u \quad (2.60)$$

Avec : $\langle \quad \rangle$ désigne le vecteur ligne

δ_s : Déformation à l'étape précédente équilibrée

Généralement une dizaine d'itérations suffisent pour assurer la convergence (2.59)

2.4.4 Organigramme de calcul de la section

L'organigramme de la recherche de l'état d'équilibre de la section à 3D est décrit sur la figure (2.10).

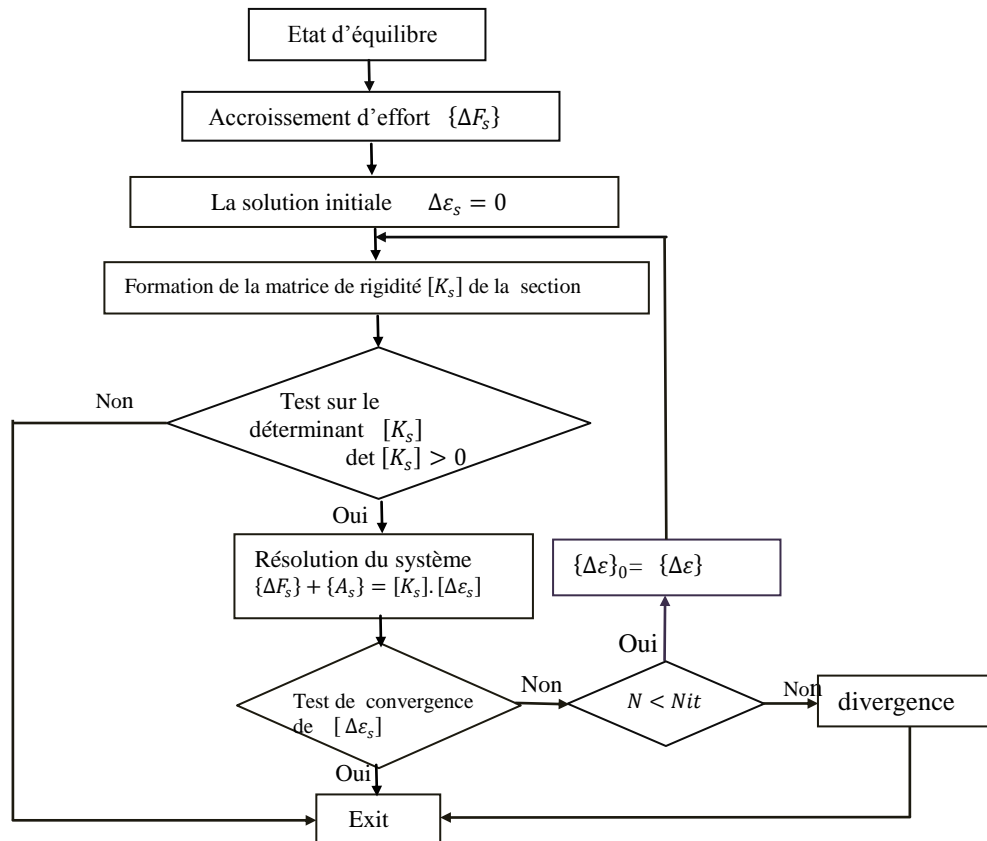


Figure 2.10: Organigramme de l'algorithme de recherche d'équilibre de la section

Pour la solution de la méthode, le programme en fortran combine la procédure incrémentale à rigidité variable et itérative (basées sur la méthode des déplacements).

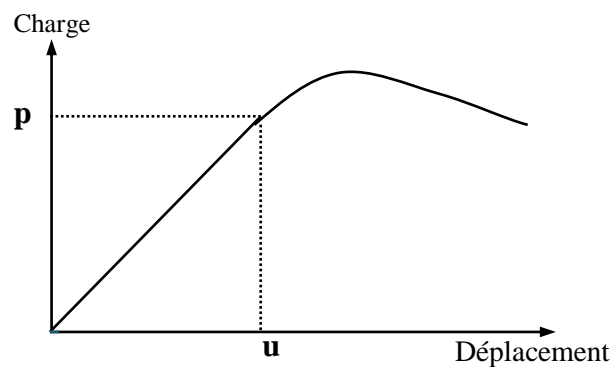


Figure 2.11 : courbe non linéaire force - déplacement

2.5 Etapes de calcul (Etablissement des matrices de rigidités)

2.5.1 Matrice de rigidité corde d'un élément poutre en élasticité non linéaire

2.5.1.1 Hypothèses

Nous établirons la matrice de rigidité corde d'un élément poutre, en tenant compte de la non linéarité des matériaux et des effets du second ordre dus aux déplacements des noeuds.

Dans un premier temps nous ne considérons que les effets de la non- linéarité matérielle, en étudiant l'élément dans son repère intrinsèque (repère de l'élément après déformation). Les effets du second ordre s'introduisent en passant du repère intrinsèque au repère local, lié à la position initiale de la barre.

Les hypothèses admises dans cette étude sont :

- les déplacements sont petits,
- les forces sont conservatives,
- l'élément est chargé seulement en ses extrémités, supposé court, de sorte que les effets du second ordre dans ce repère soient négligeables,
- les rigidités de torsion et les efforts tranchants sont calculés en élasticité linéaire,
- les contraintes normales dues à la torsion sont négligées (il n'y a pas d'effet de bi- moment).

2.5.1.2 Notations

Sous sollicitations, l'élément s'est déplacé et déformé, dans le repère XYZ, on positionne le repère local $x_0 y_0 z_0$ de l'élément lié à la position initiale de l'élément, sous chargement croissant les noeuds I_0 et J_0 de l'élément s'est déplacé en I, respectivement J, on introduit la notion de repère intrinsèque, noté xyz (figure 2.12).

Les composantes (u_i, v_i, w_i) pour le noeud d'origine et (u_j, v_j, w_j) pour le noeud d'extrémité. Les rotations $(\theta_{ix_0}, \theta_{iy_0}, \theta_{iz_0})$ pour le noeud d'origine et $(\theta_{jx_0}, \theta_{jy_0}, \theta_{jz_0})$ pour le noeud d'extrémité.

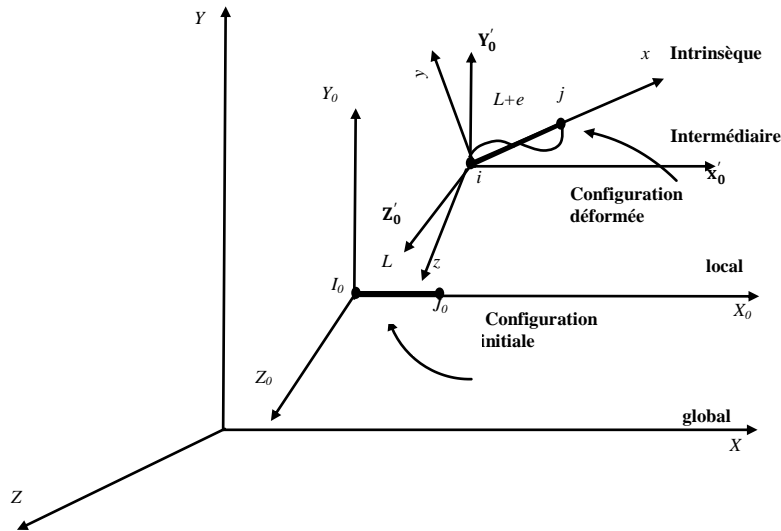


Figure 2.12 : système d’axe de l’élément en 3D – état initial et déformable de l’élément

2.5. 1.3 Matrice de rigidité de l’élément dans le repère intrinsèque

Soit (x, y, z) , le repère intrinsèque, lié à la position déformée de l’élément. Les efforts et les déplacements correspondants sont comptés positivement dans le sens des axes. La courbure $\phi_z(x)$ [respectivement, $\phi_y(x)$] est positive lorsque la cavité de l’axe déformé est dirigée dans le sens positif de l’axe y [respectivement de l’axe z].

Le repère intrinsèque xyz est défini comme suit : l’origine des axes est au nœud I ; l’axe x pointant vers le nœud J , est parfaitement positionné par rapport au repère local $xoyozo$ à l’aide de deux angles d’EULER α et β , qui sont en fonction des déplacements relatifs, de translations des nœuds I et J .

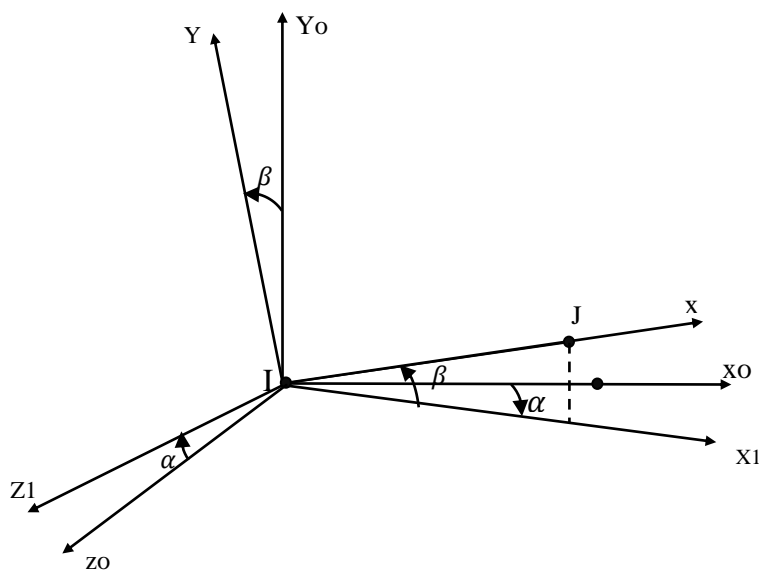


Figure 2.13 : Position de l’axe du repère intrinsèque par rapport au repère local $xoyozo$

L'orientation du repère intrinsèque est obtenue en considérant une rotation γ (définie ultérieurement) autour de l'axe x

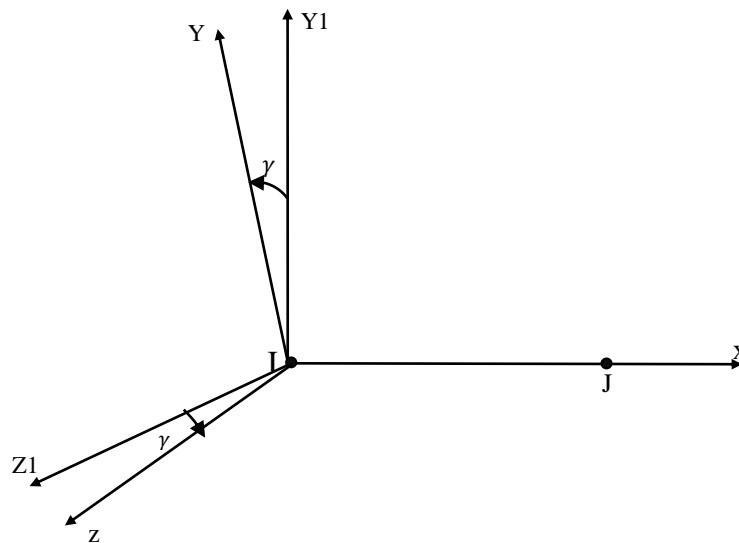


Figure 2.14 : Orientation du repère intrinsèque par rapport au repère $(x, y1, z1)$

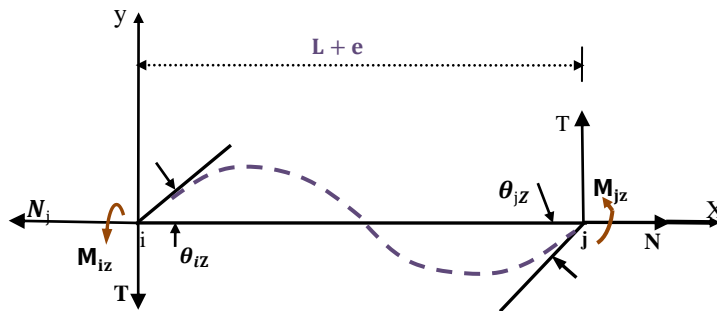


Figure 2.15: Efforts et déplacement correspondants dans le plan (x, y)

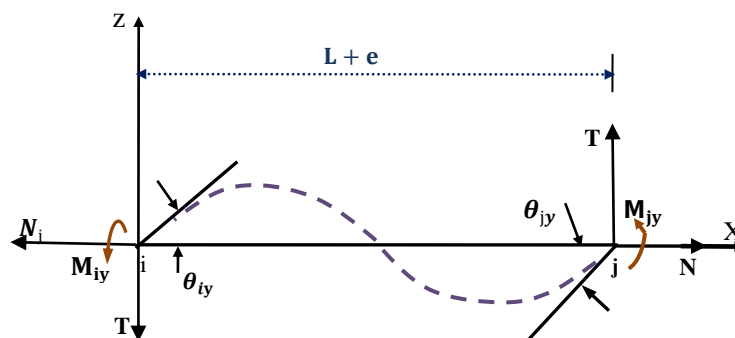


Figure 2.16: Efforts et déplacements correspondants dans le plan (x, z)

Les sollicitations aux extrémités de l'élément sont :

$$\{F_n\} = (N_j, M_{iy}, M_{iz}, M_{jx}, M_{jy}, M_{jz})^T \quad (2.61)$$

Les efforts tranchants T_y et T_z sont fonctions des moments de flexion M_{iz} , M_{iy} , M_{jz} et M_{jy} compte tenu de l'équilibre de l'élément.

Les déplacements correspondants sont :

$$\{S_n\} = (e, \theta_y, \theta_z, \theta_x, \theta_jy, \theta_jz)^T \quad (2.62)$$

Avec

$$\theta_x = \theta_{jx} - \theta_{ix}$$

$$e = L - L_0$$

Où

θ_x : rotation relative de torsion des nœuds j et i ,

θ_{ix} : rotation de torsion à l'extrémité initiale de l'élément autour de l'axe x ,

θ_{jx} : rotation de torsion à l'extrémité finale de l'élément autour de l'axe x ,

e : variation de longueur de l'élément,

L_0 : longueur initiale de l'élément avant déformation

L : longueur de l'élément après déformation

Soient $\{\Delta F_n\}$ et $\{\Delta S_n\}$ les accroissements des efforts et des déplacements aux extrémités de l'élément :

$$\{\Delta F_n\} = (\Delta N_j, \Delta M_{iy}, \Delta M_{iz}, \Delta M_{jx}, \Delta M_{jy}, \Delta M_{jz})^T \quad (2.63)$$

$$\{\Delta S_n\} = (\Delta e, \Delta \theta_y, \Delta \theta_z, \Delta \theta_x, \Delta \theta_jy, \Delta \theta_jz)^T \quad (2.64)$$

2.5. 1.3.1 Relation entre sollicitations dans une section et les efforts aux nœuds de l'élément

L'élément n'étant chargé qu'en ses extrémités, et en négligeant les effets du second ordre dus à ses déformations dans le repère intrinsèque, les sollicitations dans une section transversale d'abscisse x sont linéaires.

En tenant compte de la condition d'équilibre et des conventions sur les sollicitations, nous avons

$$\begin{cases} N(x) = -N_j \\ My(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot M_{iy} - \frac{x}{L} \cdot M_{jy} \\ Mz(x) = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot M_{iz} + \frac{x}{L} \cdot M_{jz} \\ Ty(x) = \frac{1}{L}(M_{iz} + M_{jz}) \\ Tz(x) = -\frac{1}{L}(M_{iy} + M_{jy}) \\ Mx(x) = -M_{jx} \end{cases} \quad (2.65)$$

Le moment de torsion dans une section d'abscisse x étant calculé au centre de torsion C définit par ses coordonnées (x, y_c, z_c) dans le repère intrinsèque (x, y, z) .

En vertu de la relation (2.14) et l'équation (2.65) on peut écrire sous forme matricielle, la relation liant les sollicitations dans une section aux efforts aux extrémités de l'élément dans le repère intrinsèque.

$$\{F_s\} = [L(x)] \cdot \{F_n\} \quad (2.66)$$

Avec :

$$\{F_s\} = (N(x), My(x), Mz(x), Ty(x), Tz(x), Mc(x))^T \quad (2.67)$$

et

$$[L(x)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 & 0 & -\frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 & 0 & \frac{x}{L} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{y_c}{L} & \frac{z_c}{L} & -1 & \frac{y_c}{L} & \frac{z_c}{L} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

En négligeant la variation de longueurs dans le calcul des variations de sollicitations, nous pouvons écrire compte tenu de la relation (2.66) :

$$\{\Delta F_s\} = [L(x)] \cdot \{\Delta F_n\} \quad (2.69)$$

2.5. 1.3.2 Relation entre les déplacements des nœuds de l'élément et les déformations des sections

Toute variation d'efforts $\{\delta F_n\}$ aux extrémités de l'élément engendre ;

$$\text{- un travail virtuel extérieur : } \delta W_e = \{\delta F_n\}^T \cdot \{S_n\} \quad (2.70)$$

$$\text{- un travail virtuel de déformations } \delta W_i \text{ tel que : } \delta W_i = \int_0^L \{\delta F_s\}^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (2.71)$$

Où $\{\delta(x)\}$ représente la matrice colonne (6x1) contenant les déformations dans une section transversale d'abscisse x .

$$\{\delta(x)\} = \left(\varepsilon_g(x), \phi_y(x), \phi_z(x), \gamma_y(x), \gamma_z(x), \phi_x(x) \right)^T \quad (2.72)$$

D'après le théorème des travaux virtuels complémentaire :

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (2.73)$$

Et compte tenu des équations (70) et (71)

$$\{\delta F_n\}^T \cdot \{S_n\} = \int_0^L \{\delta F_s\}^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (2.74)$$

La variation des sollicitations $\{\delta F_s\}$ est statiquement admissible. Nous pouvons donc écrire compte tenu de l'équation (2.69).

$$\{\delta F_s\} = [L(x)] \cdot \{\delta F_n\} \quad (2.75)$$

D'où par substitution dans la relation (2.74) :

$$\{\delta F_n\}^T \cdot \{S_n\} = \{\delta F_n\}^T \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (2.76)$$

La variation $\{\delta F_n\}$ étant arbitraire, il vient :

$$\{S_n\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (2.77)$$

En négligeant la variation de longueur dans le calcul des déplacements des nœuds, il en résulte de l'équation :

$$\{\Delta S_n\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\Delta \delta(x)\} \cdot dx \quad (2.78)$$

2.5.1.3.3 Relation entre les efforts et les déplacements des noeuds de l'élément

En vertu de la relation (2.54), liant les accroissements de déformations aux accroissements de sollicitations dans une section transversale, la relation (2.78) devient :

$$\{\Delta S_n\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot ([S_s] \cdot \{\Delta F_s\} + \{G_s\}) \cdot dx \quad (2.79)$$

En tenant compte de l'équation (2.69), nous arrivons à :

$$\{\Delta S_n\} = [K_n]^{-1} \cdot \{\Delta F_n\} + \{G_n\} \quad (2.80)$$

Où :

$[K_n]^{-1}$: Matrice de souplesse réduite (6x6) de l'élément dans le repère intrinsèque xyz

$$[K_n]^{-1} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot [S_s] \cdot [L(x)] \cdot dx \quad (2.81)$$

Et $\{G_n\}$ une matrice colonne (6x1) définie par :

$$\{G_n\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{G_s\} \cdot dx \quad (2.82)$$

L'inversion de la matrice $[K_n]^{-1}$, nous conduit à la matrice de rigidité réduite (6x6) de l'élément dans le repère intrinsèque, notée $[K_n]$.

De l'équation (2.80), nous arrivons à la relation matricielle liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des noeuds de l'élément, dans le repère intrinsèque (x, y, z).

$$\{\Delta F_n\} + \{A_n\} = [K_n] \cdot \{\Delta S_n\} \quad (2.83)$$

Où

$[K_n]$ représente la matrice de rigidité réduite (6x6) de l'élément dans le repère intrinsèque xyz

$\{A_n\}$ une matrice colonne (6x1) définie par la relation :

$$\{A_n\} = [K_n] \cdot \{G_n\} \quad (2.84)$$

L'intégration des éléments de la matrice $[K_n]^{-1}$ est effectuée numériquement, dans le cas d'une analyse matériellement non linéaire, par la règle de SIMPSON, en considérant sur l'élément un nombre impaire de section de calcul.

Par contre dans le cas où le comportement des matériaux, constituant l'élément est linéaire, la matrice de souplesse se réduit considérablement.

2.5.1.4 Matrice de rigidité de l'élément dans le repère local

Nous établissons la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local, lié à la position initiale de l'élément, en tenant compte des effets du second ordre dus aux déplacements des noeuds. Ces effets s'introduisent dans le passage des efforts et déplacements du repère intrinsèque au repère local.

2.5.1.4.1 Notations

Soit un élément de la structure de noeud origine i_0 et de noeud extrémité j_0 et $x_0 y_0 z_0$ le repère local de référence. Sous sollicitations, l'élément de la structure s'est déplacé et s'est déformé et les noeuds i_0 et j_0 se sont déplacés en des points notés i et j , figure 2.17.

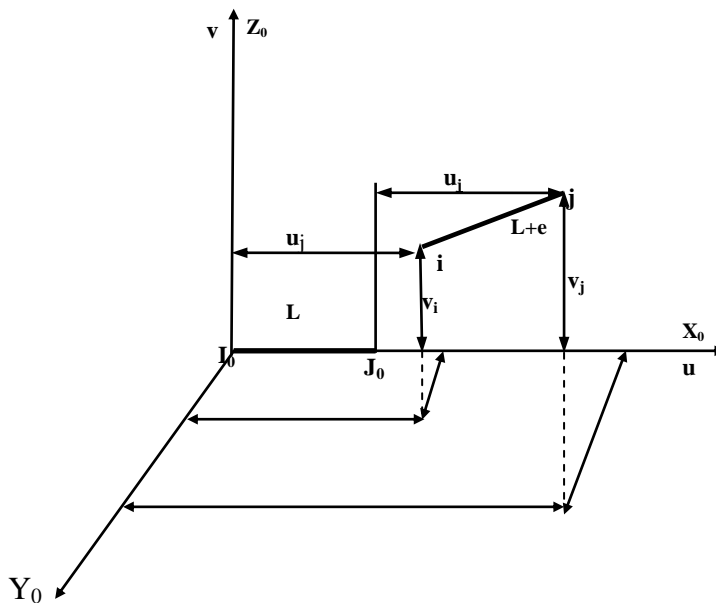


Figure 2.17 : Géométrie de la barre déformée.

Soient (u_i, v_i, w_i) (resp u_j, v_j, w_j) les composantes, dans le repère local de référence, du vecteur déplacement i_0i (resp j_0j). Nous notons $\theta_{ix_0}, \theta_{iy_0}, \theta_{iz_0}$ (resp $\theta_{jx_0}, \theta_{jy_0}, \theta_{jz_0}$) les rotations du noeud i_0 (resp j_0) respectivement autour des axes x_0, y_0, z_0 .

Nous noterons par : $\{F_L\}$ et $\{S_L\}$, les matrices colonne (12x1) contenant respectivement les sollicitations et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère local $x_0 y_0 z_0$.

$$\{F_L\} = (F_{ix_0}, F_{iy_0}, F_{iz_0}, M_{ix_0}, M_{iy_0}, M_{iz_0}, F_{jx_0}, F_{jy_0}, F_{jz_0}, M_{jx_0}, M_{jy_0}, M_{jz_0})^T \quad (2.85)$$

$$\{S_L\} = (u_i, v_i, w_i, \theta_{ix_0}, \theta_{iy_0}, \theta_{iz_0}, u_j, v_j, w_j, \theta_{jx_0}, \theta_{jy_0}, \theta_{jz_0})^T \quad (2.86)$$

Nous introduisons les matrices colonnes $\{F_U\}$ et $\{S_U\}$ de dimension (9x1) telles que :

$$\{F_U\} = (F_{jx_0}, F_{jy_0}, F_{jz_0}, M_{ix_0}, M_{iy_0}, M_{iz_0}, M_{jx_0}, M_{jy_0}, M_{jz_0})^T \quad (2.87)$$

$$\{S_U\} = (u, v, w, \theta_{ix_0}, \theta_{iy_0}, \theta_{iz_0}, \theta_{jx_0}, \theta_{jy_0}, \theta_{jz_0})^T \quad (2.88)$$

Où :

$$\begin{aligned} u &= u_j - u_i \\ v &= v_j - v_i \\ w &= w_j - w_i \end{aligned} \quad (2.89)$$

En tenant compte des équations (2.83), (2.85) et (2.86), nous avons :

$$\{S_U\} = [T_0] \cdot \{S_L\} \quad (2.90)$$

Avec :

$$[T_0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Compte tenu des relations (2.85) et (2.87), la condition d'équilibre de l'élément dans le repère local (x_0, y_0, z_0) nous mène à écrire :

$$\{F_L\} = [T_0]^T \cdot \{F_U\} \quad (2.92)$$

Enfin, nous noterons $\{\Delta F_U\}$ et $\{\Delta S_U\}$ respectivement les accroissements d'efforts et de déplacements aux extrémités de élément.

$$\{\Delta F_U\} = (\Delta F_{jx_0}, \Delta F_{jy_0}, \Delta F_{jz_0}, \Delta M_{ix_0}, \Delta M_{iy_0}, \Delta M_{iz_0}, \Delta M_{jx_0}, \Delta M_{jy_0}, \Delta M_{jz_0})^T \quad (2.93)$$

$$\{\Delta S_U\} = (\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta \theta_{ix_0}, \Delta \theta_{iy_0}, \Delta \theta_{iz_0}, \Delta \theta_{jx_0}, \Delta \theta_{jy_0}, \Delta \theta_{jz_0})^T \quad (2.94)$$

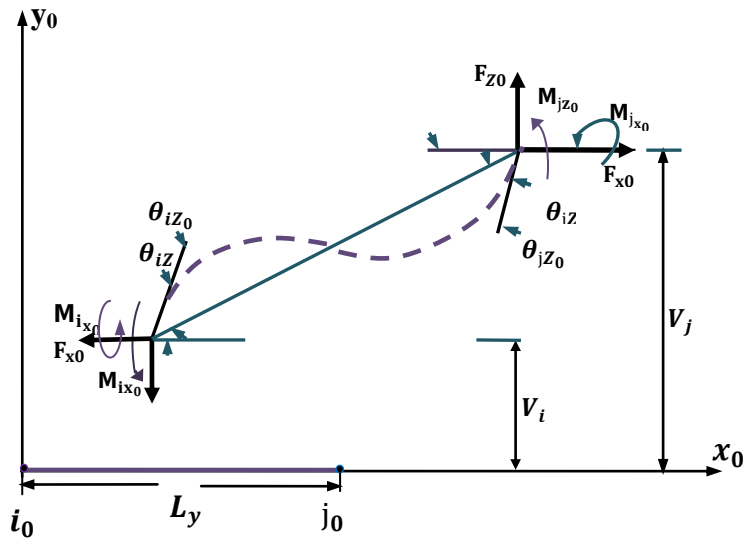


Figure 2.18 : Projection de la barre déformée dans le plan (x_0, y_0) .

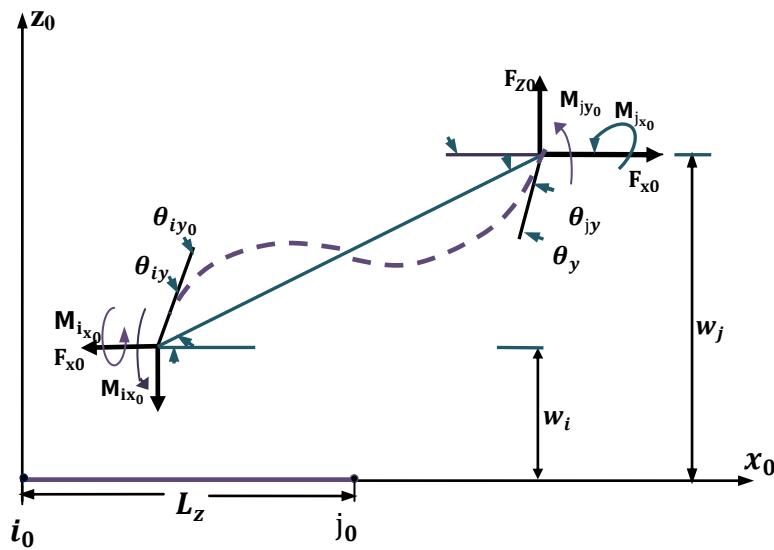


Figure 2.19 : Projection de la barre déformée dans le plan (x_0, z_0) .

2.5.1.4.2 Relation entre accroissement d'efforts $\{\Delta Fu\}$ et accroissements de déplacement $\{\Delta Su\}$

Pour un instant t quelconque, on peut écrire d'après les figures (2.15), (2.17) et (2.18) les relations géométriques suivantes :

$$\begin{cases} e = \sqrt{(Lo+u)^2 + v^2 + w^2} - Lo \\ \theta_{iz} = \theta_{izo} - \theta_v \\ \theta_{iy} = \theta_{iyo} + \theta_w \\ \theta_x = \frac{1}{2} \cdot (\theta_{jxo} - \theta_{ixo}) \\ \theta_{jz} = \theta_{jzo} - \theta_v \\ \theta_{jy} = \theta_{jyo} + \theta_w \end{cases} \quad (2.95)$$

Où :

$$\begin{cases} \theta_v = \text{Arcsin} \frac{v}{\sqrt{(Lo+u)^2 + v^2 + w^2}} \\ \theta_w = \text{Arcsin} \frac{w}{\sqrt{(Lo+u)^2 + v^2 + w^2}} \end{cases} \quad (2.96)$$

La différenciation des expressions (2.96) permet d'établir la relation entre les accroissements de déplacements nodaux $\{\Delta S_n\}$ dans le repère intrinsèque, et les accroissements de déplacements nodaux dans le repère local.

$$\{\Delta S_n\} = [B] \cdot \{\Delta S_u\} \quad (2.97)$$

Où [B] : Matrice de transformation géométrique, s'écrit :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial u} & \frac{\partial e}{\partial v} & \frac{\partial e}{\partial w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \theta_w}{\partial u} & 0 & \frac{\partial \theta_w}{\partial w} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \theta_v}{\partial u} & -\frac{\partial \theta_v}{\partial v} & -\frac{\partial \theta_v}{\partial w} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \theta_w}{\partial u} & 0 & \frac{\partial \theta_w}{\partial w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial \theta_v}{\partial u} & -\frac{\partial \theta_v}{\partial v} & -\frac{\partial \theta_v}{\partial w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements, nous pouvons nous contenter des termes du premier ordre dans le développement en série des dérivées partielles des fonctions.

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & v/L_0 & w/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w/L_0^2 & 0 & 1/L_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/L_0^2 & -1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ w/L_0^2 & 0 & 1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/L_0^2 & -1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Selon le théorème des travaux virtuels, en tenant compte du fait que les travaux des forces sont nuls dans un déplacement de corps rigide du repère intrinsèque en équilibre au repère local, nous pouvons dire que le travail virtuel des forces appliquées aux noeuds $\{F_n\}$ dans le repère intrinsèque, du à un déplacement virtuel $\{\Delta S_n\}$ est égal au travail des forces appliquées aux noeuds, dans le repère local, $\{F_u\}$ du à un déplacement $\{\Delta S_u\}$, c'est à dire :

$$\{F_n\}^T \cdot \{\Delta S_n\} = \{F_u\}^T \cdot \{\Delta S_u\} \quad \forall \{\Delta S_u\}, \forall \{\Delta S_n\} \quad (2.100)$$

La variation de Δs_u est arbitraire, d'où :

$$\{F_u\} = [B]^T \cdot \{F_n\} \quad (2.101)$$

La différenciation de l'équation (2.101), nous conduit à :

$$\{\Delta F_u\} = [B]^T \cdot \{\Delta F_n\} + [\Delta B]^T \cdot \{F_n\} \quad (2.102)$$

Compte tenu des relations (2.83) et (2.97), l'équation (2.102) devient :

$$\{\Delta F_u\} = [B]^T \cdot [[K_n] \{\Delta S_n\} - \{A_n\}] + [\Delta B]^T \cdot \{F_n\} \quad (2.103)$$

Considérant le terme $[\Delta B]^T \cdot \{F_n\}$:

En vertu de la relation (2.99), les termes de la matrice $[B]$ ne dépendent que des dérivées partielles des fonctions e et θ qui sont fonction des déplacements relatifs u et v des noeuds i et j .

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_n\} = \begin{bmatrix} \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial u} \right) & \Delta \left(\frac{\partial \theta_w}{\partial u} \right) & \Delta \left(-\frac{\partial \theta_v}{\partial u} \right) & 0 & \Delta \left(\frac{\partial \theta_w}{\partial u} \right) & \Delta \left(-\frac{\partial \theta_v}{\partial u} \right) \\ \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right) & 0 & \Delta \left(-\frac{\partial \theta_v}{\partial v} \right) & 0 & 0 & \Delta \left(-\frac{\partial \theta_v}{\partial v} \right) \\ \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial w} \right) & \Delta \left(\frac{\partial \theta_w}{\partial w} \right) & \Delta \left(-\frac{\partial \theta_v}{\partial w} \right) & 0 & \Delta \left(\frac{\partial \theta_w}{\partial w} \right) & \Delta \left(-\frac{\partial \theta_v}{\partial w} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_j \\ M_{iy} \\ M_{iz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

Après un développement, nous arrivons à :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_n\} = \begin{bmatrix} N_j \cdot \Delta \frac{\partial e}{\partial u} + (M_{iy} + M_{jy}) \cdot \Delta \frac{\partial \theta_w}{\partial u} - (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \Delta \frac{\partial \theta_v}{\partial u} \\ N_j \cdot \Delta \frac{\partial e}{\partial v} + (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \Delta \frac{\partial \theta_v}{\partial v} \\ N_j \cdot \Delta \frac{\partial e}{\partial w} + (M_{iy} + M_{jy}) \cdot \Delta \frac{\partial \theta_w}{\partial w} - (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \Delta \frac{\partial \theta_v}{\partial w} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_n\} = [D] \cdot \{\Delta S_u\} \quad (2.106)$$

Nous écrivons alors la matrice [D] (9x9) qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u^2} + (M_{iy} + M_{jy}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial u^2} - (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial u^2} \\ D_{12} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u \cdot \partial v} + (M_{iy} + M_{jy}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial u \cdot \partial v} - (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial u \cdot \partial v} \\ D_{13} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u \cdot \partial w} + (M_{iy} + M_{jy}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial u \cdot \partial w} - (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial u \cdot \partial w} \\ D_{21} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v \cdot \partial u} - (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial v \cdot \partial u} \\ D_{22} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} - (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial v^2} \\ D_{23} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v \cdot \partial w} - (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial v \cdot \partial w} \\ D_{31} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial w \cdot \partial u} + (M_{iy} + M_{jy}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial w \cdot \partial u} - (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial w \cdot \partial u} \\ D_{32} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial w \cdot \partial v} + (M_{iy} + M_{jy}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial w \cdot \partial v} - (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial w \cdot \partial v} \\ D_{33} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial w^2} + (M_{iy} + M_{jy}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial w^2} - (M_{iz} + M_{jz}) \cdot \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial w^2} \end{array} \right. \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta F_U\} &= [B]^T \cdot [K_n] \cdot \{\Delta S_n\} - [B]^T \cdot \{A_n\} + [D] \cdot \{\Delta S_U\} \\ \{\Delta F_U\} &= ([B]^T \cdot [K_n] \cdot [B] + [D]) \cdot \{\Delta S_U\} - [B]^T \cdot \{A_n\} \end{aligned} \quad (2.109)$$

D'où la relation :

$$\{\Delta F_U\} + \{A_U\} = [K_U] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (2.110)$$

Où :

$[K_U]$: Matrice de rigidité (9x9), de l'élément poutre dans le repère local intermédiaire ;

définie par :

$$[K_U] = [B]^T \cdot [K_n] \cdot [B] + [D] \quad (2.111)$$

En vertu des relations (2.90) et (2.92) établies au paragraphe (2.5.1.4.1), nous arrivons à la relation liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des noeuds de l'élément dans le repère local :

$$\{\Delta F_L\} + \{A_L\} = [K_L] \cdot \{\Delta S_L\} \quad (2.112)$$

Où :

$[K_L]$: Matrice de rigidité systémique (12x12), de l'élément dans le repère local, définie par :

$$[K_L] = [T_0]^T \cdot ([B]^T \cdot [K_n] \cdot [B] + [D]) \cdot [T_0] \quad (2.113)$$

Et, $\{A_L\}$: représente une matrice colonne (12x1) définie par :

$$\{A_L\} = [T_0]^T \cdot \{A_U\} \quad (2.114)$$

Ici ; $\{A_U\}$ représente une matrice colonne (9x1) définie par :

$$\{A_U\} = [B]^T \cdot \{A_n\} \quad (2.115)$$

En remplaçant l'équation (2.107) dans l'équation (2.108), nous obtenons la relation liant les accroissements de déplacements et d'efforts aux extrémités de l'élément, dans le repère local intermédiaire :

Compte tenu de l'hypothèse des petits déplacements, nous pouvons nous contenter des termes du premier ordre dans le développement en série des termes de la matrice $[D]$. Il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = -\frac{2.v.(M_{iz} + M_{jz})}{L_0^3} + \frac{2.w.(M_{iy} + M_{jy})}{L_0^3} \\ D_{12} = D_{21} = -\frac{v.N_j}{L_0^2} + \frac{(M_{iz} + M_{jz})}{L_0^2} \\ D_{13} = D_{31} = -\frac{w.N_j}{L_0^2} - \frac{(M_{iy} + M_{jy})}{L_0^2} \\ D_{22} = \frac{N_j}{L_0} + \frac{2.v.(M_{iz} + M_{jz})}{L_0^3} \\ D_{23} = D_{32} = 0 \\ D_{33} = \frac{N_j}{L_0} - \frac{2.w.(M_{iy} + M_{jy})}{L_0^3} \end{array} \right. \quad (2.116)$$

2.5. 1.5 matrice de rigidité de l'élément dans le repère absolu

2.5. 1.5.1 Relation entre accroissements de déplacements et d'efforts dans le repère absolu

La structure étudiée est repérée arbitrairement dans un repère absolu OXYZ. Il est nécessaire de former les matrices de rigidité élémentaire définissant la structure dans le repère OXYZ pour permettre de faire l'assemblage de la matrice de rigidité de la structure.

La relation liant les grandeurs dans le repère local est indépendante des efforts et déplacements et ne dépend que de l'orientation initiale de la barre.

Soit un élément de la structure, de noeud origine i_0 et de noeud extrémité j_0 lié au repère local de référence $x_0 y_0 z_0$, et OXYZ le repère absolu lié à la structure, figure.2.20.

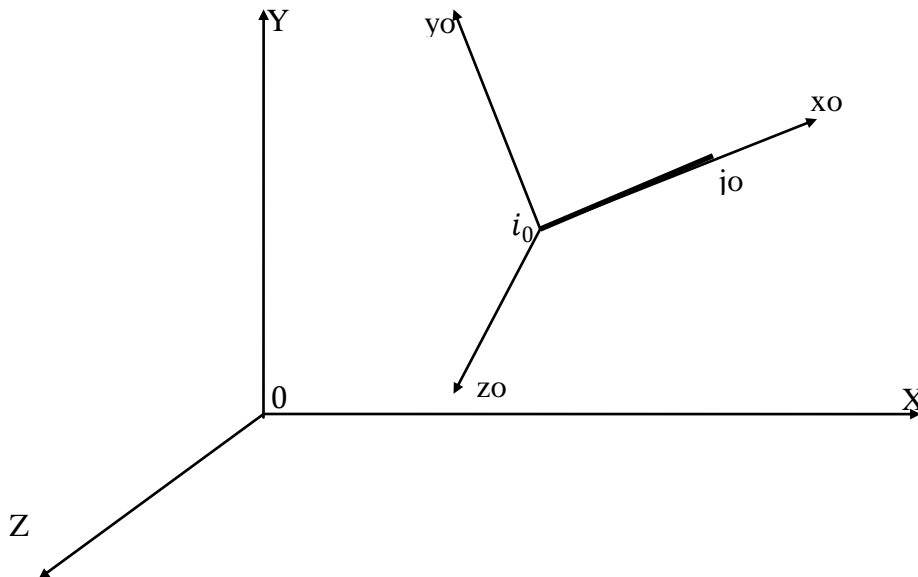


Figure 2.20: Repère absolu

Nous notons par $\{F_x\}$ la matrice colonne (12x1) contenant les efforts appliqués aux extrémités d'un élément, dans le repère absolu OXYZ.

$$\{F_x\} = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, M_{ix}, M_{iy}, M_{iz}, F_{jx}, F_{jy}, F_{jz}, M_{jx}, M_{jy}, M_{jz})^T \quad (2.117)$$

De même, nous notons par $\{S_x\}$ la matrice colonne (12x1) contenant les déplacements aux extrémités d'un élément, dans le repère absolu OXYZ.

$$\{S_x\} = (X_i, Y_i, Z_i, \zeta_{ix}, \zeta_{iy}, \zeta_{iz}, X_j, Y_j, Z_j, \zeta_{jx}, \zeta_{jy}, \zeta_{jz})^T \quad (2.118)$$

Les incréments d'efforts et des déplacements dans le repère absolu sont donnés respectivement

$$\{\Delta FX\} = (\Delta F_{ix}, \Delta F_{iy}, \Delta F_{iz}, \Delta M_{ix}, \Delta M_{iy}, \Delta M_{iz}, \Delta F_{jx}, \Delta F_{jy}, \Delta F_{jz}, \Delta M_{jx}, \Delta M_{jy}, \Delta M_{jz})^T \quad (2.119)$$

$$\{\Delta SX\} = (\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i, \Delta \zeta_{ix}, \Delta \zeta_{iy}, \Delta \zeta_{iz}, \Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j, \Delta \zeta_{jx}, \Delta \zeta_{jy}, \Delta \zeta_{jz})^T \quad (2.120)$$

La rotation spatiale du repère absolu OXYZ donnant le repère local $x_0y_0z_0$ d'un élément, peut être décomposé en trois rotations simples d'angles α, β, γ .

La matrice de passage [Ro] est la composée de trois (3) matrices orthogonales directes [R α], [R β] et [R γ].

$$[Ro] = [R\gamma] \cdot [R\beta] \cdot [R\alpha] \quad (2.121)$$

Avec :

$$[R\alpha] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

$$[R\beta] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

$$[R\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Les angles α et β sont fonction des coordonnées des noeuds donnés dans le repère absolu, lié à la structure.

L'angle γ définit l'orientation des axes principaux y_0, z_0 par rapport aux axes Y,Z

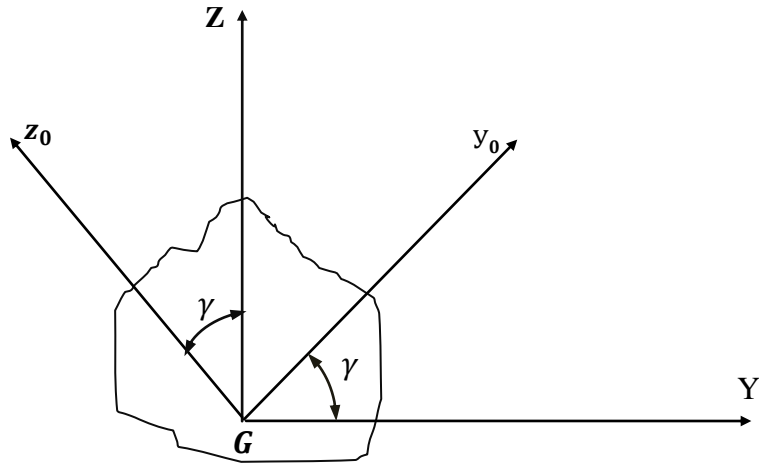


Figure 2.21 Orientation des axes principaux (y_0, z_0) d'une section droite par rapport aux axes (Y, Z), liés à la structure.

La relation entre accroissement des efforts et des déplacements dans le repère absolu s'obtient au moyen de la matrice de rotation orthogonale $[RT]$, telle que :

$$[RT] = \begin{bmatrix} [Ro] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [Ro] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [Ro] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [Ro] \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

La relation matricielle entre les déplacements des noeuds $\{S_L\}$ dans le repère local et les déplacements des noeuds $\{S_X\}$ dans le repère absolu, s'écrit :

$$\{S_L\} = [RT] \cdot \{S_X\} \quad (2.126)$$

Par analogie à l'équation (2.126), nous pouvons écrire pour la transformation d'efforts :

$$\{F_X\} = [RT]^T \cdot \{F_L\} \quad (2.127)$$

La différenciation de l'équation (2.127), nous amène à :

$$\{\Delta F_X\} = [RT]^T \cdot \{\Delta F_L\} \quad (2.128)$$

En substituant à l'équation (2.127), l'équation (2.112), il vient :

$$\{\Delta F_X\} + \{A_X\} = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot \{\Delta S_L\} \quad (2.129)$$

Où :

$\{A_X\}$: Matrice colonne (12x1), définie par :

$$\{A_X\} = [RT]^T \cdot \{A_L\} \quad (2.130)$$

$\{A_L\}$: Matrice colonne (12x1), définie par l'équation (2.114)

D'autre part la différenciation de l'équation (2.126), nous amène à :

$$\{\Delta S_L\} = [RT] \cdot \{\Delta S_x\} \quad (2.131)$$

En substituant à l'équation (2.129), l'équation (2.131), nous arrivons à la relation matricielle liant les accroissements d'efforts et les accroissements de déplacements aux extrémités d'un élément dans le repère absolu OXYZ, lié à la structure :

$$\{\Delta F_x\} + \{A_x\} = [K_x] \cdot \{\Delta S_x\} \quad (2.132)$$

Avec :

$[K_x]$: Matrice de rigidité (12x12) d'un élément dans le repère absolu OXZ,

$$[K_x] = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot [RT] \quad (2.133)$$

La méthode ainsi établie est applicable aux ossatures spatiales poteaux – poutres en béton armé et/ou en béton précontraint. Une extension peut être faite pour tenir compte des effets différés, de la précontrainte extérieure et de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire

2.6 Etat d'équilibre global de la structure

2.6.1 Algorithme général de résolution

La structure étudiée est positionné dans le repère global OXYZ.

- Cette structure est en état d'équilibre sous un chargement P défini dans le repère global OXYZ, avec le déplacement correspondant $\{U\}$ et les efforts internes dans le même repère $\{F_n\}$; la déformation de chacune des sections est connue.

- La structure va subir un accroissement de chargement ΔP et l'action éventuelle de la précontrainte $\{A\}$ à la mise en tension des câbles.

- Le problème non linéaire consiste à trouver l'accroissement de déplacement $\{\Delta U\}$ correspondant à l'accroissement de chargement $\{\Delta P\}$ avec la méthode des substitutions utilisant les matrices de rigidités 'cordes'. Pour cela on doit créer une suite de solution

$$\{\Delta U_0\}, \dots, \{\Delta U_i\}$$

de la façon suivante :

$$\Delta P + \{A\}_{i-1} = [K]_{i-1} \cdot \{\Delta U\}_i$$

$[K]_{i-1}$: La matrice de rigidité de la structure, obtenue après assemblage des matrices des rigidités élémentaire à l'étape $i-1$, la suite est initialisée avec $\{\Delta U\}_0 = \{0\}$

- $\{A\}_{i-1}$: Action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles de la précontrainte à l'itération $i-1$

- A chaque itération, chaque matrice de rigidité élémentaire est recalculée dans le repère global, puis est assemblée dans la matrice globale. On constate que la suite a convergé lorsque :

$$\eta_u = \left(\frac{\langle \Delta U_i - \Delta U_{i-1} \rangle \cdot \{\{\Delta U\}_i - \{\Delta U\}_{i-1}\}}{\langle U_s + \Delta U_i \rangle \cdot \{\{U_s\} + \{\Delta U\}_i\}} \right)^{1/2} \leq T_u$$

Où

U_s représente le vecteur déplacement des nœuds de la structure correspondant à la dernière étape stable

- Si le nombre d'itérations devient important la solution est déclarée divergente.
- Au cours de formation des matrices élémentaires, une rupture ou une divergence d'une section peut être observée. Ceci arrête le processus de calcul.
- Une fois que la solution est convergée en termes de déplacement. Nous formons les efforts internes à la structure, correspondant au nouvel état de déformation.

Certains auteurs utilisent l'algorithme de Newton – Raphson modifié, qui consiste à itérer sur un pas de chargement avec une matrice de rigidité constante correspondant à la dernière étape équilibrée. Elle déconseillée par d'autres auteurs de fait de sa lenteur de convergence.

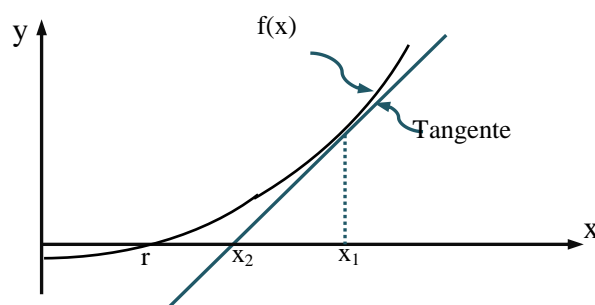


Figure 2.22 : Représentation graphique de la méthode de Newton raphson

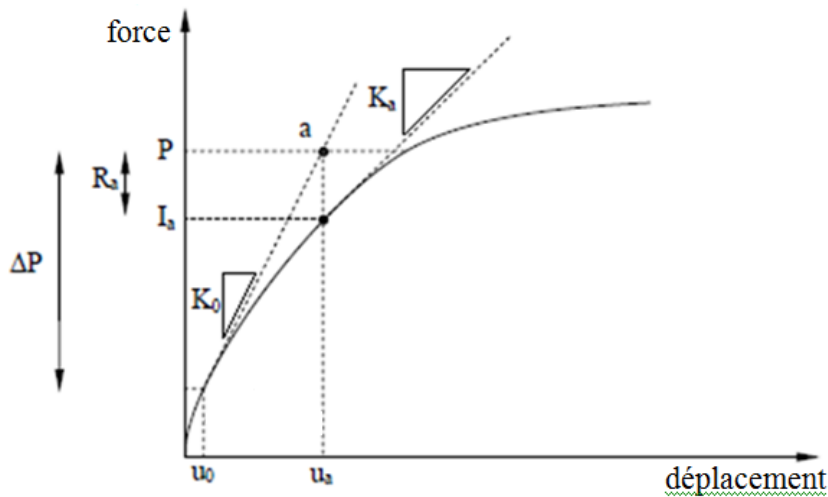


Figure 2.22 : première itération de l'incrément

2.6.2 Séquences de calcul

L'analyse de la structure est effectuée pas à pas où le paramètre de chargement vaut λ . L'état complet de la structure (sollicitations, déformations, déplacements) est supposé connu à l'étape r où le paramètre λ vaut λ_r .

Soit $\{\Delta P\}$ le vecteur des accroissements de charges extérieures, appliquées aux nœuds, lorsque le paramètre λ passe de λ_r au λ_{r+1} .

$$\lambda_{r+1} = \lambda_r + \Delta\lambda$$

Les différentes phases de l'algorithme de calcul d'une étape « r » sont :

1. la valeur des accroissements de déplacements $\{\Delta u\}_0$ des nœuds est supposé connu, cette valeur est initialisée à $\{0\}$ pour la première itération, ensuite c'est celle fournie par l'itération précédente.
2. on calcule la valeur des accroissements d'efforts internes $\{\Delta F_n\}$ aux extrémités des éléments, dans le repère intrinsèque, on utilise pour chaque élément la relation (2.80)

$$\{\Delta F_n\} + \{A_n\} = [K_n] \cdot \{\Delta S_n\}$$

La valeur de la matrice $[K_n]$ est celle obtenue à l'itération précédente

Le vecteur $\{\Delta S_n\}$ des accroissements des déplacements aux extrémités d'un élément est calculé à partir de $\{\Delta u\}_0$

3. Nous effectuons l'étude de l'équilibre des sections des éléments, à partir de $\{\Delta F_n\}$ et les déformations $\{\varepsilon\}$ des sections correspondant à l'étape précédente.

Dans une section de calcul, le vecteur des accroissements de sollicitations $\{\Delta F_s\}$, est déterminé à partir de la relation (2.69).

$$\{\Delta F_s\} = [L(x)] \cdot \{\Delta F_n\}$$

L'équilibre d'une section est effectué en résolvant le système non linéaire (2.47)

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{sn} \\ \Delta F_{st} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{sn} \\ A_{st} \end{Bmatrix} = [K_s] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ \Delta \varepsilon_t \end{Bmatrix}$$

Si à un moment donné, nous observons une rupture d'une des sections, ou une divergence au niveau des sections, le pas de chargement est divisé par 2, $\left\{\frac{\Delta P}{2}\right\}$ correspondant à un nouveau calcul.

4. l'équilibre des sections, l'accroissement de déformations $\{\Delta \varepsilon\}$ étant connu.

l'intégration selon la méthode numérique du Simpson, donne la matrice de rigidité $[K_n]$ en chaque élément.

5. dans le repère local intermédiaire la matrice $[K_u]$ et le vecteur $\{A_u\}$ se déduisent par les équations :

$$[K_u] = [B]^T \cdot [K_n] \cdot [B] + [D]$$

$$\{A_u\} = [B]^T \cdot \{A_n\}$$

6. la matrice $[K_L]$ et le vecteur $\{A_L\}$ dans le repère local sont obtenus par les relations

$$[K_L] = [T_o]^T \cdot \left([B]^T \cdot [K_n] \cdot [B] + [D] \right) \cdot [T_o]$$

$$\{A_L\} = [T_o]^T \cdot \{A_u\}$$

7. le passage à $[K_X]$ et $\{A_X\}$ dans le repère absolu, lié à la structure est effectué par

L'intermédiaire de rotation $[RT]$, donné par la relation

$$[RT] = \begin{bmatrix} [Ro] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [Ro] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [Ro] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [Ro] \end{bmatrix}$$

Et

$$[Ro] = [R\gamma] \cdot [R\beta] \cdot [R\alpha]$$

Avec :

$$[R\alpha] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R\beta] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Et en utilisant les relations

$$[K_x] = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot [RT]$$

$$\{A_x\} = [RT]^T \cdot \{A_L\}$$

8. Nous formons, la matrice de rigidité $[K]$ et le vecteur second membre $\{A\}$ de l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles, en écrivant l'équilibre des nœuds dans le repère absolu lié à la structure

9. Les accroissements de déplacements des nœuds de la structure $\{\Delta U\}$ correspondant à l'itération en cours s'obtient en résolvant le système

$$\{\Delta P\} + \{A\} = [K] \cdot \{\Delta U\}, \text{ en tenant compte des conditions aux limites de la structure.}$$

10. Une fois qu'on a obtenu l'accroissement de déplacement des nœuds $\{\Delta U\}$ on passe à la vérification de la convergence par la relation

$$\eta_u = \left(\frac{\langle \Delta U_i - \Delta U_{i-1} \rangle \cdot \{\{\Delta U\}_i - \{\Delta U\}_{i-1}\}}{\langle U_s + \Delta U_i \rangle \cdot \{\{U_s\} + \{\Delta U\}_i\}} \right)^{1/2} \leq T_u$$

Si le test de convergence n'est pas vérifié le calcul est répété avec une nouvelle valeur $\{\Delta U\}$. Le défaut de convergence peut être de fait de l'instabilité d'ensemble, ou bien le nombre d'itérations n'est pas fixé a priori n'est pas suffisant pour assurer la convergence ; dans ce cas le calcul est repris avec un pas de chargement réduit $\left\{\frac{\Delta p}{2}\right\}$.

11. Cumul

A la fin de chaque étape, on calcule les déformations totales de chaque section, les efforts totaux $\{F_u\}$ et les déplacements totaux $\{S_u\}$ et leur accroissement aux extrémités des éléments dans le repère local, ainsi que les déplacements totaux des nœuds $\{U\}$ et les charges extérieures totales $\{P\}$ dans le repère absolu, lié à la structure, en cumulant les accroissements de cette étape aux valeurs d'étape précédente.

12. la correction

Une fois que la solution est convergée, et avant de passer à une nouvelle étape de chargement, on passe à la correction des déplacements des nœuds $\{U\}$ obtenus. Cette opération est indispensable pour le cas des structures sensibles aux effets de second ordre.

Lors de la recherche de l'accroissement de déplacement $\{\Delta U\}$ des nœuds, les matrices $[B]$ et $[D]$

exprimant la transformation géométrique sont gardées constantes pendant l'étape, avec les valeurs obtenues à la fin de l'étape précédente.

Cette procédure a pour effet de sous estimé l'ensemble des déplacements dus aux effets de second ordre.

Pour corriger ce défaut, on effectue donc une étape de correction dans l'étape en cours, en y introduisant l'effet d'un accroissement de charge fictif $\{\Delta P^*\}$ qui est la différence entre les charges réelles $\{P\}$ et les charges $\{P^*\}$ qui sont en équilibre les efforts $\{F_X\}$ calculés compte tenu des déplacements des nœuds $\{U\}$:

$$\{\Delta P^*\} = \{P\} - \{P^*\}$$

Le vecteur des charges $\{P^*\}$, est obtenu en écrivant, pour chaque nœud, la somme des forces $\{F_X\}$ exercées par le nœud sur les éléments qui le croisent.

Les réactions d'appuis qui en résultent de l'équilibre des nœuds, ne sont pas considérées dans le vecteur $\{P^*\}$.

L'algorithme est dispensé de l'étape de correction, si la norme euclidienne η_f des efforts est inférieure à une certaine tolérance choisie a priori :

$$\eta_f = \left[\frac{\langle \Delta P^* \rangle \cdot \{ \Delta P \}}{\langle P \rangle \cdot \{ P \}} \right]^{1/2} < T_f$$

Où : la notation $\langle \rangle$ désigne le vecteur ligne.

Dans le cas où la norme η_f serait supérieur à T_f , une étape de correction suffit en général pour obtenir une valeur correcte des déplacements des nœuds.

La charge de ruine est obtenue lorsque l'algorithme de résolution diverge pour un accroissement de charge inférieur ou égal à une précision fixée a priori.

2.6.3 Organigramme de calcul

La structure étudiée est positionné dans le repère global OXYZ, l'organigramme de recherche de l'équilibre de la structure est décrit sur la figure 2.24.

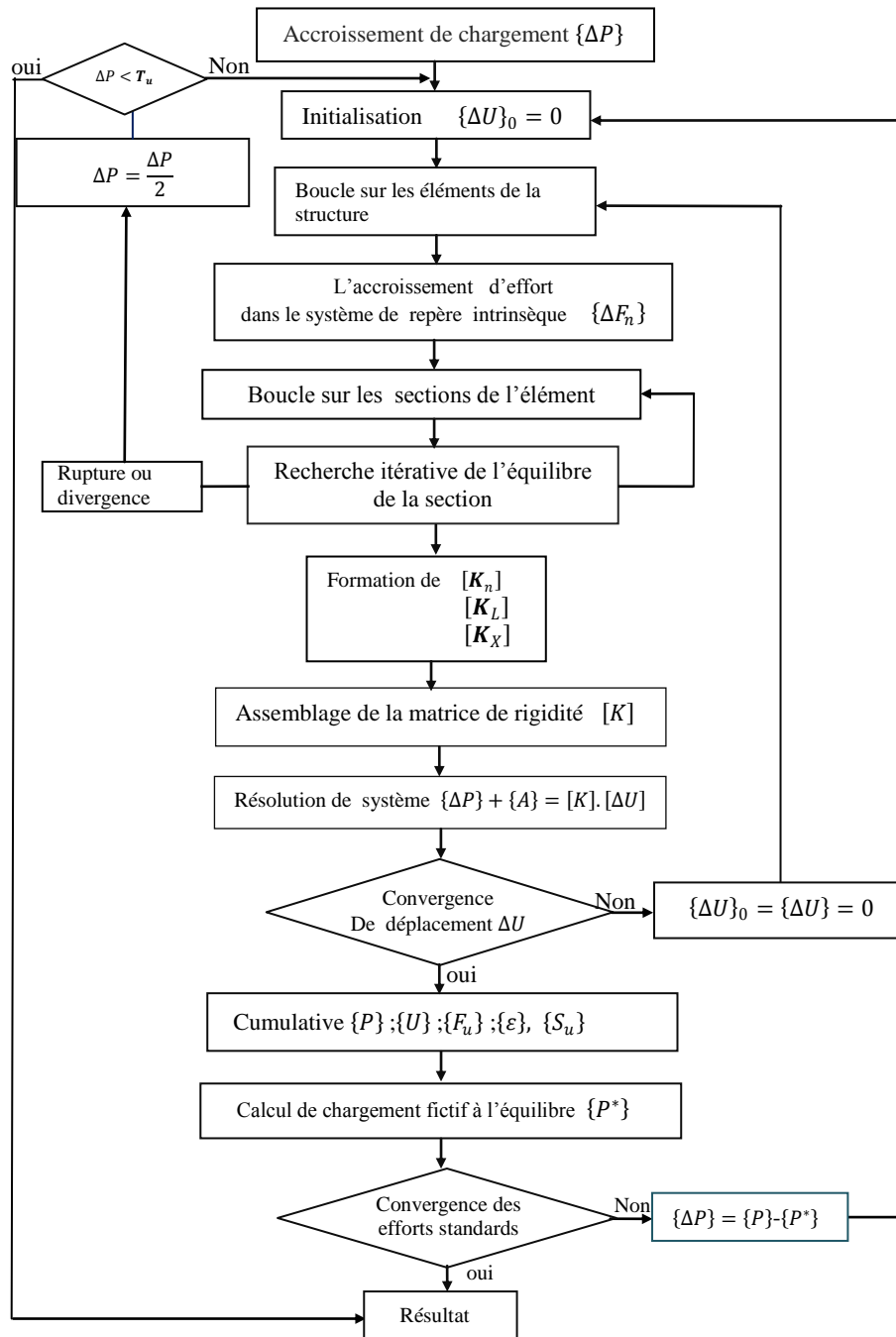


Figure 2.24 : Organigramme de l’algorithme de recherche d’équilibre de la structure

2.7 Modélisation des structures triangulées métalliques, en béton et les structures triangulées métalliques en arc

2.7.1 Modélisation de la section

Les éléments d'un treillis ne travaillent qu'en traction ou compression, ils sont modélisés par des éléments finis de type barre. L'élément contient 2 nœuds, et chaque nœud comporte 3 inconnues, représentant les composantes de son déplacement dans l'espace. Les nœuds n'ont pas de degré de liberté de rotation dans notre étude (donc ne tourne pas) car elles n'ont pas de signification physique. En effet, l'existence d'un degré de liberté de rotation signifierait la présence au sein de l'élément barre (élément bi-articulé) de moment de flexion ou de torsion, ce qui est exclu.

La méthode qu'on présente a pour objet l'analyse élastique non-linéaire d'un élément barre qui sera implémentée dans un logiciel de calcul développé dans le cas poteaux - poutres.

La section est discrétisée sous la forme des tables trapézoïdales. Cette section est définie dans son repère principal.

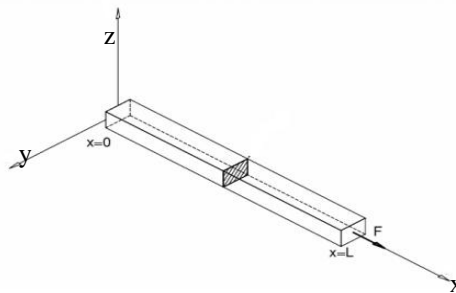


Figure 2.25: Géométrie d'un élément barre

2.7.1.1 Géométrie des déformations

La section étudiée appartient à l'élément dont on veut calculer la matrice de rigidité. Selon l'hypothèse des sections planes la déformation d'une fibre m peut être exprimée, en fonction de ces coordonnées et de la déformation de la section sollicitée avec un effort normal N .

Un élément barre tridimensionnelle est modéliser par la position des deux nœuds d'extrémités et qui s'avère suffisant pour définir son orientation dans l'espace.

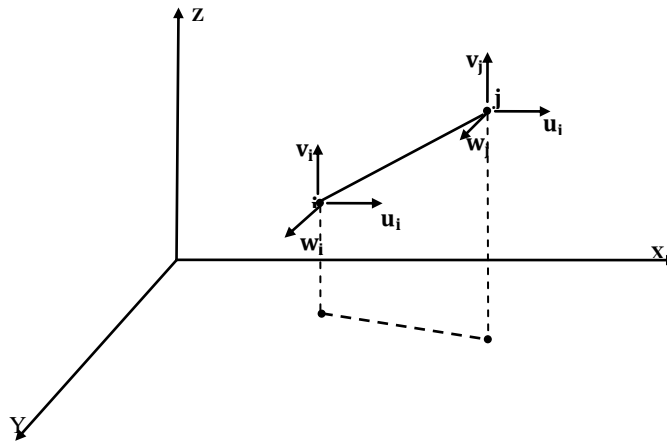


Figure 2.26 : élément de barre tridimensionnel

2.7.1.1.1 Déformations normales

On suppose la planéité des sections, la déformation normale longitudinale $\varepsilon(y, z)$ de la section d'un élément en un point de coordonnées (y, z) est la déformation au centre de gravité de la section qu'est compté positive dans le sens des raccourcissements des fibres de la section, est donnée par :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_x \quad (2.134)$$

Où

$\varepsilon(y, z)$: la déformation normale longitudinale en un point de coordonnée (y, z) de la section.

ε_x : la déformation au centre de gravité de la section (effort associé est l'effort normal N)

Les déformations normales dues aux ϕ_y et ϕ_z (les rotations de la section autour des axes G_y et G_z respectivement) et tangentes γ_y, γ_z et l'angle de torsion θ_x ainsi que leur accroissement $\Delta\phi_y, \Delta\phi_z, \Delta\gamma_y, \Delta\gamma_z$ sont négligées.

La non linéarité matérielle ne sera prise en compte que par la relation entre la sollicitation normale (N) et la déformation normale associée (ε_x), $\varepsilon_n = \varepsilon_x$,

Les déformations normales seront désignées par le vecteur

$$\{\varepsilon_n\} = (\varepsilon_x, 0, 0)^T \quad (2.135)$$

On peut écrire

$$\{\varepsilon_{(x)}\} = (1, 0, 0)\{\varepsilon_n\} \quad (2.136)$$

2.7.1.1.2 Déformations des armatures

On note (y_f, z_f) : les coordonnées du point de passage de l'armature dans le repère GYZ, l'armature est supposée parfaitement adhérente au béton.

Pour un accroissement de déformation de la section, l'accroissement de déformation dans l'armature est donné par :

$$\{\Delta\varepsilon_f\} = \cos^2\alpha(1, z_f, y_f)\{\Delta\varepsilon_n\} + \sin\alpha\cos\alpha(|\cos\beta, \sin\beta, y_f\sin\beta - z_f\cos\beta|)\{\Delta\varepsilon_t\} \quad (2.137)$$

α : angle que fait la ligne moyenne de l'armature avec l'axe Gx.

β : angle entre la projection de l'armature dans le plan de la section et l'axe Gy

2.7.1.2 Calcul des sollicitations internes

Les éléments constitutifs de la section, que sont la matrice de béton et les aciers dans le cas des structures en béton armé et les aciers dans le cas des structures métalliques, vont engendrer des sollicitations que l'on va séparer en deux catégories : les sollicitations normales et les sollicitations tangentes (sont négligées).

Où :

F_{m_n} les sollicitations normales dues à la matrice de la section (du béton en général) ;

F_{f_n} les sollicitations normales dues aux armatures de la section (les armatures métalliques, actives ou passives) ;

2.7.1.2.1 Sollicitations normales dues à la matrice de la section (béton)

Dans le repère OXYZ, on peut écrire : $\{F_{mn}\} = \begin{Bmatrix} N_m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ avec N_m l'effort normal

L'accroissement des sollicitations normales du béton s'écrit :

$$\{\Delta F_{mn}\} = \int \Delta\sigma_m(y, z) \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot dS_m \quad (2.138)$$

On peut écrire l'accroissement de contrainte normale

$$\{\Delta\sigma(y, z)\} = E_m(y, z) \cdot \{\Delta\varepsilon(y, z)\} \quad (2.139)$$

Avec : $E_m(y, z)$ l'accroissement de déformation normale

Compte tenu des relations (136), (138), (139) et après développement on aura :

$$\langle \Delta F_{mn} \rangle = \int E_m(y, z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot dS_m \cdot \{\Delta\varepsilon_n\} \quad (2.140)$$

Qu'on peut écrire sous la forme

$$\{\Delta F_{mn}\} = [K_{mn}] \cdot \{\Delta \varepsilon_n\} \quad (2.141)$$

$[K_{mn}]$: matrice de rigidité corde reliant l'accroissement de sollicitations normales de la matrice de la section à la variation de déformation normale de la section.

2.7.1.2.2 Sollicitations normales dues aux armatures de la section

Les armatures sont supposées parfaitement adhérentes à la section car elles participent à la résistance de la section

Dans le repère Gxyz on écrit :

$$\{f_{fn}\} = \begin{Bmatrix} N_f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.142)$$

Avec :

N_f : effort normal due aux armatures de la section.

L'accroissement d'effort normal de l'armature d'ordre i s'écrit :

$$\Delta F_{fn} = \sum_{i=1}^{n_f} \Delta \sigma_{fi} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos \alpha_i \cdot s_{fi} \quad (2.143)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_f} E_{fi} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos \alpha_i \cdot s_{fi} \cdot \Delta \varepsilon_{fi} \quad (2.144)$$

En utilisant la relation (137) :

$$\Delta F_{fn} = [K_{fn}] \cdot \Delta \varepsilon_n \quad (2.145)$$

Avec

$$[K_{fn}] = \sum_{i=1}^{n_f} E_{fi} \cdot \cos^3 \alpha_i \cdot s_{fi} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

Où

β_i l'angle existant entre la projection de l'armature d'ordre i dans le plan G_{yz} , et l'axe G_y .

α_i est l'angle existant entre l'armature d'ordre i et l'axe G_x ,

s_{fi} est la section droite de l'armature d'ordre i

E_{fi} est le module élastique longitudinal corde (le module reliant l'accroissement de contrainte à l'accroissement de déformation de l'armature d'ordre i

2.7.1.3 Sollicitations externes

La section est soumise à des sollicitations extérieures que sont l'effort normal N .

On peut écrire :

$$F_{sn} = \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.147)$$

$$F_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.148)$$

Où

F_{sn} : le vecteur des sollicitations normales à la section.

F_{st} : le vecteur des sollicitations tangentes à la section.

De plus, la section subit l'action de la précontrainte, que l'on peut décomposer en deux composantes, la composante normale à la section notée : A_{sn} et une composante tangente notée : A_{st} : (négligée)

2.7.1.4 Equilibre de la section

L'équilibre de la section est exprimé par le fait que l'accroissement de sollicitations externes et l'action de la précontrainte sont équilibrés par l'accroissement de sollicitations internes.

$$\begin{pmatrix} \Delta F_{sn} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{sn} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta F_{mn} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta F_{fn} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.149)$$

Le développement des équations d'équilibre nous permet d'aboutir à la relation

$$\begin{pmatrix} \Delta F_{sn} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{sn} \\ 0 \end{pmatrix} = [K_s] \cdot \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.150)$$

Où $[K_s]$: La matrice de rigidité corde de la section $[K_s]$ est singulière. Et afin de simplifier la présentation des équations d'équilibre de l'élément barre, on gardera les mêmes dimensions des matrices et des vecteurs correspondant à l'élément poutre.

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K_{mn}] + [K_{fn}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

Pour le cas structure métallique nous avons :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K_{mn}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.152)$$

Pour une variation des efforts sollicitant, la résolution en déformation de l'équation (2.150) est itérative. La solution de cette équation peut s'exprimer par :

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_s]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta F_{sn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.153)$$

La matrice de rigidité corde de la section $[K_s]$ est singulière.

2.7.2 Etapes de calcul (Etablissement des matrices de rigidités)

2.7.2.1 Matrice de rigidité corde d'un élément barre en élasticité non linéaire

2.7.2.1.1 Hypothèses

Nous établirons la matrice de rigidité corde d'un élément barre, en tenant compte de la non linéarité des matériaux et des effets du second ordre dus aux déplacements des noeuds.

Dans un premier temps nous ne considérons que les effets de la non linéarité matérielle, en étudiant l'élément dans son repère intrinsèque (repère de l'élément après déformation). Les effets du second ordre s'introduisent en passant du repère intrinsèque au repère local, lié à la position initiale de la barre.

Les hypothèses admises dans cette étude sont :

- les déplacements sont petits,
- les forces sont conservatives,
- l'élément est chargé seulement en ses extrémités, supposé court, de sorte que les effets du second ordre dans ce repère soient négligeables,
- Les liaisons entre les barres sont considérées comme des liaisons rotules.
- Les forces s'appliqueront uniquement sur les nœuds du treillis.
- On négligera également le poids des barres, il n'y aura donc pas de flexion et les barres seront donc uniquement soumises à de la traction et de la compression (on aura uniquement une déformation axiale)

2.7.2.1.2 Matrice de rigidité de l'élément dans le repère intrinsèque

Les sollicitations aux extrémités de l'élément sont :

$$\{F_n\} = \{N_j, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \quad (2.154)$$

Le déplacement correspondant est :

$$\{S_n\} = \{e, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \quad (2.155)$$

Avec :

$$e = L - L_0$$

e : Variation de longueur de l'élément.

L_0 : longueur initiale de l'élément avant déformation

L : longueur de l'élément après déformation

Soient $\{\Delta F_n\}$ et $\{\Delta S_n\}$ les accroissements des efforts et des déplacements aux extrémités de l'élément :

$$\{\Delta F_n\} = \{\Delta N_j, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \quad (2.156)$$

$$\{\Delta S_n\} = \{\Delta e, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \quad (2.157)$$

2.7. 2.1.2.1 Relation entre sollicitations dans une section et les efforts aux noeuds de l'élément

Les efforts dans une section d'abscisse x d'un élément barre s'écrivent :

$$\begin{cases} N(x) = -N_j \\ M_y(x) = 0 \\ M_z(x) = 0 \\ T_y(x) = 0 \\ T_z(x) = 0 \\ M_x(x) = 0 \end{cases} \quad (2.158)$$

La matrice $\{F_S\}$ contenant les sollicitations dans une section peut être exprimé en fonction de la matrice $\{F_n\}$ contenant les efforts dans le repère intrinsèque par :

$$\{F_S\} = [L(X)]. \{F_n\} \quad (2.159)$$

Avec :

$$\{F_S\} = \{N(x), 0, 0, 0, 0, 0\}^T \quad (2.160)$$

Et :

$$[L(X)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

En négligeant la variation de longueurs dans le calcul des variations de sollicitations, nous pouvons écrire compte tenu de la relation (2.159)

$$\{\Delta F_S\} = [L(X)]. \{\Delta F_n\} \quad (2.162)$$

2.7. 2.1.1.2 Relation entre les déplacements des nœuds de l'élément et les déformations des sections

Toute variation d'efforts $\{\delta F_n\}$ aux extrémités de l'élément engendre :

$$\text{- un travail virtuel extérieur : } \delta W_e = \{\delta F_n\}^T \cdot \{S_n\} \quad (2.163)$$

$$\text{- un travail virtuel de déformations } \delta W_i \text{ tel que : } \delta W_i = \int_0^L \{\delta F_s\}^T \cdot \delta(x) \cdot dx \quad (2.164)$$

Où $\{\delta(x)\}$ représente la matrice colonne (6x1) contenant les déformations dans une section transversale d'abscisse x.

$$\{\delta(x)\} = (\varepsilon_g(x), 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (2.165)$$

D'après le théorème du travail virtuel complémentaire :

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (2.166)$$

Et compte tenu des équations (2.163) et (2.164)

$$\{\delta F_n\}^T \cdot \{S_n\} = \int_0^L \{\delta F_s\}^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (2.167)$$

La variation des sollicitations $\{\delta F_s\}$ est statiquement admissible. Nous pouvons donc écrire compte tenu de l'équation (2.159).

$$\{\delta F_s\} = [L(X)] \cdot \{\delta F_n\} \quad (2.168)$$

D'où par substitution dans la relation (2.167)

$$\{\delta F_n\}^T \cdot \{S_n\} = \{\delta F_n\}^T \int_0^L [L(X)]^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (2.169)$$

La variation $\{\delta F_n\}$ étant arbitraire, il vient :

$$\{S_n\} = \int_0^L [L(X)]^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (2.170)$$

En négligeant la variation de longueur dans le calcul des déplacements des nœuds, il en résulte de l'équation (2.170)

$$\{\Delta S_n\} = \int_0^L [L(X)]^T \cdot \{\Delta \delta(x)\} \cdot dx \quad (2.171)$$

2.7. 2.1.1.3 Relation entre les efforts et les déplacements des nœuds de l'élément

En vertu de la relation liant les accroissements de déformations aux accroissements de sollicitations dans une section transversale, la relation (2.168) devient :

$$\{\Delta S_n\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot ([S_s] \cdot \{\Delta F_s\} + \{G_s\}) \cdot dx \quad (2.172)$$

En tenant compte de l'équation (2.162), nous arrivons à :

$$\{\Delta S_n\} = [K_n]^{-1} \cdot \{\Delta F_s\} + \{G_n\} \quad (2.173)$$

Où

$[K_n]^{-1}$ Matrice de souplesse réduite (6x6) de l'élément dans le repère intrinsèque xyz

$$[K_n]^{-1} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot [S_s] \cdot ([L(x)]) \cdot dx \quad (2.174)$$

Et $\{G_n\}$ une matrice colonne (6x1) définie par :

$$\{G_n\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{G_s\} \cdot dx \quad (2.175)$$

L'inversion de la matrice $[K_n]^{-1}$, nous conduit à la matrice de rigidité tangente réduite (6x6) de l'élément dans le repère intrinsèque.

$$\{\Delta F_n\} + \{A_n\} = [K_n] \cdot \{\Delta S_n\} \quad (2.176)$$

Où $\{A_n\}$ une matrice colonne (6x1) définie par la relation :

$$\{A_n\} = [K_n] \cdot \{G_n\} \quad (2.177)$$

$$[K_n] = \begin{bmatrix} [k_{mn}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.178)$$

2.7. 2.1.3 Matrice de rigidité de l'élément dans le repère local

Nous établissons la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local, lié à la position initiale de l'élément, en tenant compte des effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds. Ces effets s'introduisent dans le passage des efforts et déplacements du repère intrinsèque au repère local.

2.7. 2.1.3.1 Notations

Soit un élément de la structure de nœud origine i_0 et de nœud extrémité j_0 et $x_0 y_0 z_0$ le repère local de référence. Sous sollicitations, l'élément de la structure s'est déplacé et s'est déformé et les nœuds i_0 et j_0 se sont déplacés en des points notés i et j ,

Soient (u_i, v_i, w_i) (resp u_j, v_j, w_j) les composantes, dans le repère local de référence, du vecteur déplacement i_{O_i} (resp j_{O_j}). Nous notons $\theta_{ix_O}, \theta_{iy_O}, \theta_{iz_O}$ (resp $\theta_{jx_O}, \theta_{jy_O}, \theta_{jz_O}$) les rotations du noeud i_O (resp j_O) respectivement autour des axes x_o, y_o, z_o .

Nous noterons par : $\{F_L\}$ et $\{S_L\}$, les matrices colonne (12x1) contenant respectivement les sollicitations et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère local $x_o y_o z_o$.

Soient $\{F_L\}$ et $\{S_L\}$ les matrices colonne (12x1) contenant respectivement les sollicitations et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère local $x_o y_o z_o$.

$$\{F_L\} = (F_{ix_o}, F_{iy_o}, F_{iz_o}, 0,0,0, F_{jx_o}, F_{jy_o}, F_{jz_o}, 0,0,0)^T \quad (2.179)$$

$$\{S_L\} = (u_i, v_i, w_i, 0,0,0, u_j, v_j, w_j, 0,0,0)^T \quad (2.180)$$

Nous introduisons les matrices colonnes $\{F_U\}$ et $\{S_U\}$ de dimension (9x1) telles que :

$$\{F_U\} = (F_{jx_o}, F_{jy_o}, F_{jz_o}, 0,0,0,0,0,0)^T \quad (2.181)$$

$$\{S_U\} = (u, v, w, 0,0,0,0,0,0)^T \quad (2.182)$$

Où :

$$\begin{cases} u = u_j - u_i \\ v = v_j - v_i \\ w = w_j - w_i \end{cases} \quad (2.183)$$

La relation qui lie les déplacements dans ces deux repères est donnée par l'équation :

$$\{S_U\} = [T_0].\{S_L\} \quad (2.184)$$

De même, les efforts sont liés par :

$$\{F_L\} = [T_0]^T.\{F_U\} \quad (2.185)$$

Avec :

$$[T_0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.186)$$

Enfin, nous noterons $\{\Delta F_U\}$ et $\{\Delta S_U\}$ respectivement les accroissements d'efforts et de déplacements aux extrémités de élément.

$$\{\Delta F_U\} = (\Delta F_{jx_0}, \Delta F_{jy_0}, \Delta F_{jz_0}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (2.187)$$

$$\{\Delta S_U\} = (\Delta u, \Delta v, \Delta w, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (2.188)$$

2.7.2.1.3.2 Relation entre accroissement d'efforts $\{\Delta F_U\}$ et accroissements de déplacement $\{\Delta S_U\}$

Pour un instant t quelconque, on peut écrire d'après les figures les relations géométriques suivantes

$$e = L - L_0 \quad (2.189)$$

Avec :

$$L = \sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2} \quad (2.190)$$

Le déplacement axial e du nœud J est fonction des déplacements relatifs u , v et w des nœuds I et J dans le repère intermédiaire. En effet, on a :

$$e = \sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2} - L_0 \quad (2.191)$$

$$\{\Delta S_n\} = [B].\{\Delta S_U\} \quad (2.192)$$

La différenciation des expressions (2.192) permet d'établir la relation entre les accroissements de déplacements nodaux $\{\Delta S_n\}$ dans le repère intrinsèque, et les accroissements de déplacements nodaux $\{\Delta S_U\}$, dans le repère local.

$$\{\Delta S_n\} = [B].\{\Delta S_U\} \quad (2.193)$$

Où $[B]$: Matrice de transformation géométrique, s'écrit :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial u} & \frac{\partial e}{\partial v} & \frac{\partial e}{\partial w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.194)$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements, nous pouvons nous contenter des termes du premier ordre dans le développement en série des dérivées partielles des fonctions.

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{L_0} & \frac{w}{L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.195)$$

La relation entre variations des efforts et des déplacements dans le repère intermédiaire est obtenue d'après le théorème des travaux virtuels :

$$\{F_n\}^T \cdot \{\Delta S_n\} = \{F_U\}^T \cdot \{\Delta S_U\} \quad (2.196)$$

Et en tenant compte de l'équation (2.196) :

$$\{F_n\}^T \cdot [B] \cdot \{\Delta S_U\} = \{F_U\}^T \cdot \{\Delta S_U\} \quad (2.197)$$

$\{\Delta S_U\}$ étant arbitraire, on peut écrire :

$$\{F_U\} = [B]^T \cdot \{F_n\} \quad (2.198)$$

D'où par différentiation, on obtient :

$$\{\Delta F_U\} = [B]^T \cdot \{\Delta F_n\} + [\Delta B]^T \cdot \{F_n\} \quad (2.199)$$

D'autre part, les termes de la matrice $[B]$ ne dépendent que des dérivées partielles de la fonction e , qui sont fonction du déplacement relatif u des nœuds I et J, respectivement. On a alors :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_n\} = \begin{bmatrix} \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial u} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial w} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{matrix} N_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (2.200)$$

Après un développement, nous arrivons à :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_n\} = \begin{bmatrix} \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial u} \right) \cdot N_j \\ \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right) \cdot N_j \\ \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial w} \right) \cdot N_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.201)$$

Après un développement, nous arrivons à :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_n\} = \begin{bmatrix} N_j \cdot \Delta \frac{\partial e}{\partial u} \\ N_j \cdot \Delta \frac{\partial e}{\partial v} \\ N_j \cdot \Delta \frac{\partial e}{\partial w} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.202)$$

Qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_n\} = [D] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (2.203)$$

Nous écrivons alors la matrice [D] (9x9) qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.204)$$

Avec

$$\begin{cases} D_{11} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u^2} \\ D_{12} = D_{21} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u \cdot \partial v} \\ D_{13} = D_{31} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u \cdot \partial w} \\ D_{22} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} \\ D_{23} = D_{32} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v \cdot \partial w} \\ D_{33} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial w^2} \end{cases} \quad (2.205)$$

En ne tenant compte que des termes de premier ordre dans le développement des termes de la matrice $[D]$, on obtient :

$$\begin{cases} D_{11} = D_{23} = D_{32} = 0 \\ D_{12} = D_{21} = \frac{-v \cdot N_j}{L_0^2} \\ D_{13} = D_{31} = \frac{-w \cdot N_j}{L_0^2} \\ D_{22} = D_{33} = \frac{N_j}{L_0} \end{cases} \quad (2.206)$$

En remplaçant l'équation (2.205) dans l'équation (2.206), nous obtenons la relation liant les accroissements de déplacements et d'efforts aux extrémités de l'élément, dans le repère local intermédiaire :

$$\{\Delta F_u\} = [B]^T \cdot [K_n] \cdot \{\Delta S_n\} - [B]^T \cdot \{A_n\} + [D] \cdot \{\Delta S_u\} \quad (2.207)$$

$$\{\Delta F_u\} = ([B]^T \cdot [K_n] \cdot [B] + [D]) \cdot \{\Delta S_u\} - [B]^T \cdot \{A_n\} \quad (2.208)$$

D'où la relation :

$$\{\Delta F_u\} + \{A_n\} = [K_u] \cdot \{\Delta S_u\} \quad (2.209)$$

Où :

$[K_u]$: Matrice de rigidité (9x9), de l'élément barre dans le repère local intermédiaire ; définie par :

$$[K_u] = [B]^T \cdot [K_n] \cdot [B] + [D] \quad (2.210)$$

En vertu des relations (2.208) et (2.210), nous arrivons à la relation liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des noeuds de l'élément dans le repère local :

$$\{\Delta F_L\} + \{A_L\} = [K_L] \cdot \{\Delta S_L\} \quad (2.211)$$

Où :

$[K_L]$: Matrice de rigidité systémique (12x12), de l'élément dans le repère local, définie par :

$$[K_L] = [T_0]^T \cdot ([B]^T \cdot [K_n] \cdot [B] + [D]) \cdot [T_0] \quad (2.212)$$

Et, $\{A_L\}$: représente une matrice colonne (12x1) définie par :

$$\{A_L\} = [T_0]^T \cdot \{A_U\} \quad (2.213)$$

Ici ; $\{A_U\}$ représente une matrice colonne (9x1)

2.7. 2.1.4 Matrice de rigidité de l'élément dans le repère absolu

2. 7. 1 .4 .1 relation entre accroissements de déplacements et d'efforts dans le repère absolu

La relation liant les grandeurs dans le repère local est indépendant des efforts et déplacements et ne dépend que de l'orientation initiale de la barre.

La matrice de rigidité de la structure est assemblée à partir des matrices de rigidité des éléments barres définissant la structure, dans le repère absolu OXYZ.

Soient $\{F_X\}$ et $\{S_X\}$ les matrices colonne (12x1) contenant les efforts appliqués et les déplacements aux nœuds de l'élément, respectivement dans le repère absolu OXYZ :

$$\{F_X\} = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, 0,0,0, F_{jx}, F_{jy}, F_{jz}, 0,0,0)^T \quad (2.214)$$

$$\{S_X\} = (X_i, Y_i, Z_i, 0,0,0, X_j, Y_j, Z_j, 0,0,0)^T \quad (2.215)$$

Les incréments d'efforts et des déplacements dans le repère absolu sont donnés respectivement par :

$$\{\Delta F_X\} = (\Delta F_{ix}, \Delta F_{iy}, \Delta F_{iz}, 0,0,0, \Delta F_{jx}, \Delta F_{jy}, \Delta F_{jz}, 0,0,0)^T \quad (2.216)$$

$$\{\Delta S_X\} = (\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i, 0,0,0, \Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j, 0,0,0)^T \quad (2.217)$$

La relation liant ces grandeurs (et leurs variations) dans les deux systèmes s'obtient au moyen de la matrice de rotation $[RT]$, dont les termes ne dépendent que de l'orientation initiale de l'élément. En effet, on a :

$$\{S_L\} = [RT] \cdot \{S_X\} \quad (2.218)$$

Un élément barre tridimensionnelle est modélisé par la position des deux nœuds d'extrémités et qui s'avère suffisant pour définir son orientation dans l'espace.

Les relations entre les grandeurs mesurées dans le repère local et celles mesurées dans le repère global pour un élément de barre tridimensionnel sont données par :

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_0] & 0 \\ 0 & [R_0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix} \quad (2.219)$$

Avec :

$$[R_0] = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ \frac{-c_y \cdot c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} & \sqrt{c_x^2 + c_z^2} & \frac{-c_y \cdot c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \\ \frac{-c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} & 0 & \frac{-c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \end{bmatrix} \quad (2.220)$$

Où :

$[R_0]$: Est la matrice de transformation géométrique d'un élément de barre tridimensionnel.

c_x , c_y et c_z : sont les cosinus directeurs, décrit par :

$$\begin{cases} c_x = \cos(\bar{x}, x) = \frac{x_j - x_i}{L} \\ c_y = \cos(\bar{y}, y) = \frac{y_j - y_i}{L} \\ c_z = \cos(\bar{z}, z) = \frac{z_j - z_i}{L} \end{cases} \quad (2.221)$$

Après simplification nous obtenons :

$$[R_0] = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ \frac{-c_x \cdot Y}{S} & \frac{S}{L} & \frac{-c_y \cdot Z}{S} \\ \frac{-Z}{S} & 0 & \frac{-X}{S} \end{bmatrix} \quad (2.222)$$

Avec :

$$\begin{cases} L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \\ S = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \end{cases} \quad (2.223)$$

Et de même :

$$\{F_X\} = [RT]^T \cdot \{F_L\} \quad (2.224)$$

Avec :

$$[RT] = \begin{bmatrix} [R_0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [R_0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.225)$$

Où

$[R_0]$: Est la matrice de transformation géométrique d'un élément de barre tridimensionnel définit :

$$[R_0] = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ \frac{-c_x \cdot Y}{S} & \frac{S}{L} & \frac{-c_y \cdot Z}{S} \\ \frac{-Z}{S} & 0 & \frac{-X}{S} \end{bmatrix} \quad (2.226)$$

Avec :

$$\begin{cases} L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \\ S = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \\ \cos(\bar{x}, x) = \frac{x_j - x_i}{L} = \frac{X}{L} \\ \cos(\bar{y}, y) = \frac{y_j - y_i}{L} = \frac{Y}{L} \\ \cos(\bar{z}, z) = \frac{z_j - z_i}{L} = \frac{Z}{L} \end{cases} \quad (2.227)$$

La relation matricielle liant les accroissements d'efforts et les accroissements de déplacements aux extrémités d'un élément barre dans le repère absolu OXYZ, lié à la structure

$$\{\Delta F_X\} = [K_X] \cdot \{\Delta S_X\} \quad (2.228)$$

Avec :

$[K_X]$: Matrice de rigidité (12x12) d'un élément dans le repère absolu OXYZ,

$$[K_X] = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot [RT] \quad (2.229)$$

Des pivots nuls apparaisse due a la singularité des matrices $[L(x)]$ et $[B]$ alors pour résoudre ce problème on procèdera de la même manière que pour la matrice de rigidité (au lieu d'annulée les termes de la diagonale des matrices, on les perturbe par un coefficient pris égale à 10^{-4}).

2.8 Présentation du programme en 3D

2.8.1 Introduction

Le programme à 3D est un logiciel de calcul des structures en béton armé et les structures métalliques, écrit en Fortran 90, il contient un programme principal et des sous-routines. L'ensemble des données et résultats sont présentés sous forme de fichier texte.

Ce programme permet de créer pour un certain nombre d'étapes des modes de calcul à partir des fonctions de base qui sont les sous-programmes (subroutines):

- Déplacement d'un ou de tous les nœuds de la structure.
- Effort nodaux d'un ou de tous les nœuds de la structure.
- Efforts internes aux extrémités.
- Déformations de toute section de calcul.

2.8.2 Les principales sousroutines

Tableau 2.1 tableau des fonctions des sous programmes principaux

N ⁰	NON	FONCTION
1	SSNOLI	Analyse incrémental pas a pas du chargement de la structure jusqu'a la ruine
2	RISEEL	Formation de la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local
3	SECTION	Etude de l'équilibre de la section
4	RISESE	Calcul de la matrice de rigidité de la section
5	COOR(x,y,z)	Calcul des coordonnées des nœuds ainsi que les angles de rotation des éléments /repère de la structure, et la vérification des longueurs des élément
6	FORMB	Formation de la matrice $[B]$
7	FORMD	Formation de la matrice $[D]$
8	FORML	Formation de la matrice $[L(x)]$
9	FORMT	Construire la matrice de passage $[T_0]$ de repère intrinsèque
10	ROTATION	Construire la matrice de passage $[RT]$ du repère intrinsèque au repère absolu
11	CHARTO	Effectuant la distribution des charges sur les nœuds
12	BACSUB	Résoudre le système linéaire $\{P\} = [K].\{U\}$ routine effectuant la méthode de substitution ($[A]*(X)=[B]$)
13	CHARGE	Construit le vecteur des charges extérieures
14	CONDLIM	En prenant en compte des conditions aux limites
15	FORMR	Assembler les matrices de rigidité des barres (repère absolu) pour former la matrice de rigidité de la structure
16	REPRI	Calcul des caractéristiques des sections dans leur repère intrinsèque
17	CARRACT	Préparation des données des sections et câbles de précontrainte
18	PERTE	calcul des pertes de précontrainte dans les câbles intérieurs
19	PASSAGE	calcul les points de passage du câble précontrainte dans les sections de calcul
20	POIDP	soubroutine effectuant la distribution du poids propre sur les nœuds de la structure
21	VADELO	calcul des déplacements d'un élément poutre spatiale dans le repère local à partir des déplacements des nœuds dans le repère absolu
22	NULL	sous programme annulant les termes d'une matrice
23	ASSEMB	assemblage de la matrice de rigidité élémentaire
24	FORMT(TEE)	routine formant la matrice TO (3D)
25	FORMT1(TM1)	routine calculant la matrice t1 (3D)

2.8.3 Fichiers

On présente tout les paramètres de calcul dans un fichier de données ayant l'extension.dat.

Les résultats de calcul se trouvent dans un fichier.res.

2.8.4 Description des données

Les données sont écrites en format libre (valeurs séparées par un blanc)

2.8.4.1 Paramètres de description de la structure et de la section

1. NBNOEU NEL NTYPE NPI NIMP ISEC

NBNOEU = nombre de nœuds

NEL = nombre d'éléments

NTYPE = nombre de types de section

NPI= nombre de câble de précontraint

NIMP= nombre de nœuds d'appuis

ISEC = nombre de section par élément

2. BRUTE (i) $i = 1, NEL$

3.K Coord(K, j) $j = 1, 3$

K= numéro du nœud ($K=1, NBNOEU$)

Coord = coordonnées des nœuds

4. K Connec (k, j) $j=1, 2$

K= numéro de l'élément

Connec = vecteur véhiculant la connectivité de l'élément

5. NUM (i) Comp (i, j) $j=1, 6$ et $i=1, Nimp$

Num = numéro du nœud d'appui (dans la liste des nœuds d'appuis)

i = indice du nœud (dans la liste des nœuds d'appuis)

j = indice composante (1/ox, 2/oy, 3/oz, 4 rotation suivant x, 5 rotation suivant y, 6 rotation suivant z)

Comp = indice de la composante : =1, appui imposé, =0, appuis libre

6. NNCF NNCV

NNCF= nombre de nœuds chargés dans le chargement fixe (P_0)

NNCV= nombre de nœuds chargés dans le chargement variable(P_1)

7. NUN (i) FFIX (i, j)

- NUN= numéro du nœud chargé par le chargement P_0 (dans la liste des nœuds)
 $i=1, NNCF$ i = indice des nœuds (dans la liste des nœuds chargés par (P_0))
 Force0 (i, j) $j=1$ Composante selon O_x de l'effort appliqué au nœud i
 $j=2$ Composante selon O_y de l'effort appliqué au nœud i
 $j=3$ Composante selon O_z de l'effort appliqué au nœud i
 $j=4$ Composante couple O_y, O_z de l'effort appliqué au nœud i
 $j=5$ Composante couple O_x, O_z de l'effort appliqué au nœud i
 $j=6$ Composante couple O_x, O_y de l'effort appliqué au nœud i
8. NON (i) FVAT (i, j) $j=1,6$
 NON= numéro du nœud chargé par le chargement (P_1) (dans la liste des nœuds)
 $i=1, NNCV$
 i = indice des nœuds (dans la liste des nœuds chargés par (P_1))
 force1 (i, j) $j=1$ Composante selon O_x de l'effort appliqué au nœud i
 $j=2$ Composante selon O_y de l'effort appliqué au nœud i
 $j=3$ Composante selon O_z de l'effort appliqué au nœud i
 $j=4$ Composante couple O_y, O_z de l'effort appliqué au nœud i
 $j=5$ Composante couple O_x, O_z de l'effort appliqué au nœud i
 $j=6$ Composante couple O_x, O_y de l'effort appliqué au nœud i
9. DALPO TOLP
 DALPO = Pas d'accroissement du coefficient de chargement,
 TOLP= tolérance
- Entre deux étapes consécutives, est augmenté de DALPO, en cas de divergence, DALPO est divisé par 2. Le calcul est arrêté lorsque $DALPO < TOLP$
- Les phases qui vont suivre de 10 à 18 sont répétées NTYPE fois ($i=1, NTYPE$)
10. nbtra(i) NNS (i) TTPE (i) NCABI(I)
 nbtra(i)= nombre de trapèzes de béton,
 NNS(i) = nombre de lits d'armatures passives,
 TTYPE(i) = type d'acier (1 : Naturel, 2 : Ecrouis),
 NCABI(I)= nombre de câbles de précontraint,
11. oordzi (I,J), oordzs(i,j) Absyi1(I,J),Absyi2(i,j) absys1(I,J),absys2(i,j)
 oordzi (I, J)= ordonnée inférieure de trapèze
 oordzs(i,j)= ordonnée supérieure de trapèze
 Absyi1 (I, J)= la première abscisse inférieure de trapèze suivant l'axe y

Absyi2 (i,j)= le deuxième abscisse inférieure de trapèze suivant l'axe y
 absys1(I,J)= la première abscisse supérieure de trapèze suivant l'axe y
 absys2(i,j)= le deuxième abscisse supérieure de trapèze suivant l'axe y

2.8.4.2 Paramètres de description de béton

12.FFE(I) FFT(I) EEC(I) RRB(I) RRC(I)

FFE(i)= f_{cj} - contrainte maximale de compression du béton,
 FFT(i)= f_{tj} - contrainte maximale de traction du béton,
 EEC(i) = E_b -Module de Young élastique du béton,
 RRB(i) = Paramètre caractérisant la branche ascendante de la loi de SARGIN.
 RRC(i)= Paramètre caractérisant la branche descendante de la loi de SARGIN.

13. EEPSRT (i) EEPSO (i) EEPSCU (i)

EEPSRT(i)= déformation de rupture en traction,
 EEPSO(i)= déformation du pic en compression ε_0
 EEPSCU(i)= déformation ultime de rupture en compression ε_u

14.SSE(i) EES(i) EEPSU(i) SSR(i) KKS(i)

SSE(i)= σ_e : Limite élastique de l'acier passif,
 EES(i)= E_a : Module de Young de l'acier passif,
 EEPSU(i)= déformation de rupture (10%),
 SSR(i) = contrainte de rupture (Acier Ecrouis)
 KKS(i) : Type d'acier (1:Naturel, 2:écrouis)

15. (VVYI(I,IES),IES=1,NNS(i)) (VVIZ(I,IES),IES=1,NNS(i))

(VVYI(I,IES),IES=1,NNS(i)) = cote de lit d'acier passif par rapport à l'axe de référence oy

(VVIZ(I,IES),IES=1,NNS(i))= cote de lit d'acier passif par rapport à l'axe de référence oz

16. (AAS (I, IES), IES=1, NNS (i))

AAS (I, ies)= Aire du lait d'acier passif

17. COMP (I), (I=1, INI=NEL*Ntype): Numéro de la section de l'élément(I).

Si la section est précontrainte on aura :

18. AAP(I), SSP(i) EEP(i) EEP SUP(i) SSRP(i) TTI(i) KKP(i)

AAP(I)= la section d'armatures de précontraint

SSP(i)= limite élastique de l'acier actif,

$EEP(i)$ = module élastique de l'acier actif,
 $EEPSUP(i)$ = déformation de l'acier actif,
 $SSRP(i)$ = contrainte de rupture
 $TTI(i)$ = tension initial du câble
 $KKP(i)$ = 1 pour section précontrainte; =0 pour section non précontrainte.

$I=1, NPI$

19. $ZC1(IL,J), ZC2(IL,J)$ $YC1(IL,J), YC2(IL,J)$ $XC1(IL,J), XC2(IL,J)$

$ZC1(IL,J)$ = ordonnée initiale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oz)

$ZC2(IL,J)$ = ordonnée finale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oz)

$YC1(IL,J)$ = ordonnée initiale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oy)

$YC2(IL,J)$ = ordonnée finale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oy)

$XC1(IL,J)$ = ordonnée initiale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe ox)

$XC2(IL,J)$ = ordonnée finale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe ox)

20. $ALPHAC(IL,J)$, $j=1, NPI$; $IL=1, NEL$

Angle que fait la ligne moyenne du câble d'ordre j avec l'axe horizontal de la section.

21. PFI PSI $SIGMO$ ITP

PFI = perte par frottement du câble,

PSI = perte du linge du câble

$SIGMO$ = contrainte de rupture

ITP = mode de traction du câble

2.8.4.4 Conventions de signes

- Les charges sont comptées positives vers les x ou les z ou les y positifs.
- Les moments sont positifs dans le sens trigonométrique
- Le pas DALP pour l'accroissement de coefficient de chargement sera, en général, choisi de l'ordre du 1/10 de la valeur ultime prévue de ALP et est sans dimension

2.8.4.5 UNITES

Elles sont imposées comme suit :

- Les longueurs = [m]
- Les aires = [m^2]
- Les forces = [KN]
- Les contraintes = [KN/m^2]
- Les moments = [KN.m]

2.9 Conclusion

Le programme du calcul développé a été implanté dans les normes de fortran 90, l'élément fini utilisé est de type linéaire, En se basant sur la méthode de déplacement.

La matrice de rigidité de l'élément $[K_X]$ dans le repère absolu s'exprime en fonction de la matrice de rigidité de l'élément $[K_n]$ dans le repère intrinsèque de l'élément, les matrices $[T_0]$, $[R_T]$ sont des matrices constantes, elle ne dépend pas des déplacements de l'élément. Les matrices $[\beta]$, $[D]$ prennent en compte des déplacements de l'élément.

La matrice $[K_n]$ tient en compte des déformations propres de l'élément dans le repère intrinsèque.

La formation en grands déplacements et en grands rotations est contenue dans les matrices $[\beta]$ et $[D]$.

Chapitre 3

Validation du modèle

3.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats des calculs obtenus pour tester la validité du programme développé. Certaines structures recensées dans la littérature ont été testées, ces structures qui ont fait l'objet d'études expérimentales ou numériques dans différents laboratoires de recherche. Les essais réalisés portent essentiellement sur des structures simples, poutres en béton armé, pieux en béton de fibres, portique simple en béton armé, poutre triangulée métallique, poutre triangulée en arc et poutre triangulée en béton armé. Les différents calculs effectués conformément à notre approche ont donné en général des résultats satisfaisants.

3.2 Confrontations des résultats du programme développé aux résultats numériques et expérimentaux

3.2.1 Exemples de calcul des structures en béton armé et en béton de fibres

3.2.1.1 La poutre OG3 [108]

Une poutre posée sur deux appuis simples distants de 3 m entre appuis et 0,5 m entre deux charges voir la figure 3.1, cette poutre a été réalisée par B.FOURE [108].

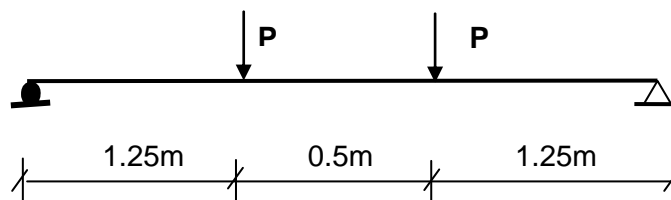


Figure 3.1 : Poutre OG3

L'expérience en laboratoire a été décrite comme suit :

Un vérin agissant sur un palonnier leur applique deux charges distantes de 0.5 m ; le palonnier porte, par l'intermédiaire de rouleaux (l'un fixe, l'autre mobile sur des plaques d'acier de 100 mm de longueur posées sur la poutre, on a une zone de moment constant dans laquelle il a étudié plus particulièrement les déformations.

La poutre de section rectangulaire théorique (0.15 m × 0.24 m) a pour armature principale deux barres $\phi 16$ soit un pourcentage géométrique rapporté à la section de hauteur utile égal à

1,2%, ces armatures sont en torsid, acier à palier plastique et raffermisssement avant rupture, les caractéristiques mécaniques mesurées sur les échantillons sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau 3.1 : Caractéristiques mécaniques de l'échantillon

Repère	Diamètre ϕ (mm)	Module E_a (MPa)	Limite d'élasticité f_e (MPa)	Contrainte de rupture f_r (MPa)
OG3	16	$2,05 \cdot 10^5$	575	700
	6	$2,05 \cdot 10^5$	215	700

Les caractéristiques du béton mesuré sur éprouvettes en béton sont :

Tableau 3.2: Caractéristiques mécaniques du béton mesuré sur éprouvettes

Compression						Traction (Flexion)
Gâchée	Age (jour)	f_{cj} (Mpa)	E_{ij} (MPa)	E_d (MPa)	ε_b (‰)	f_{tj} (MPa)
OG3(BN)	44	51,3	41600	42750	1,58	2,8

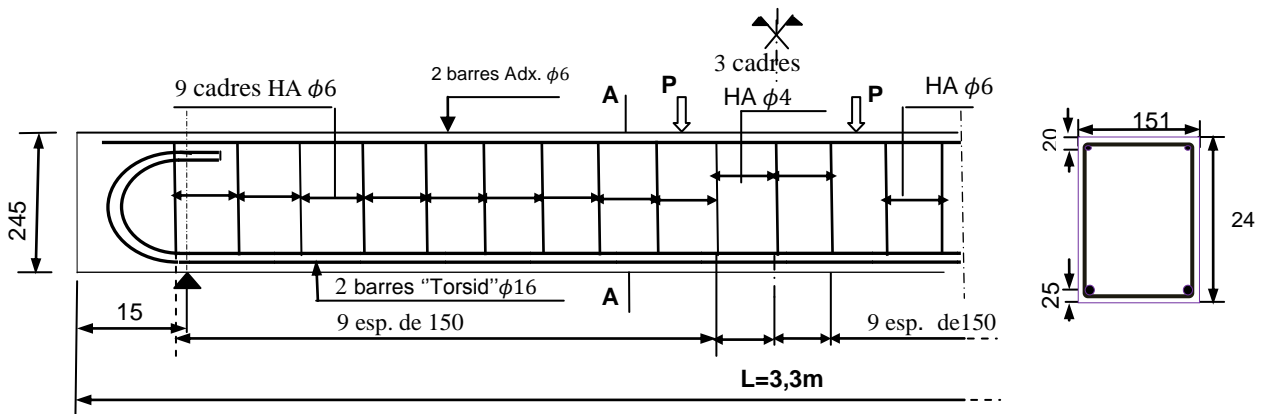


Figure 3.2 : Ferrailage de la poutre OG3

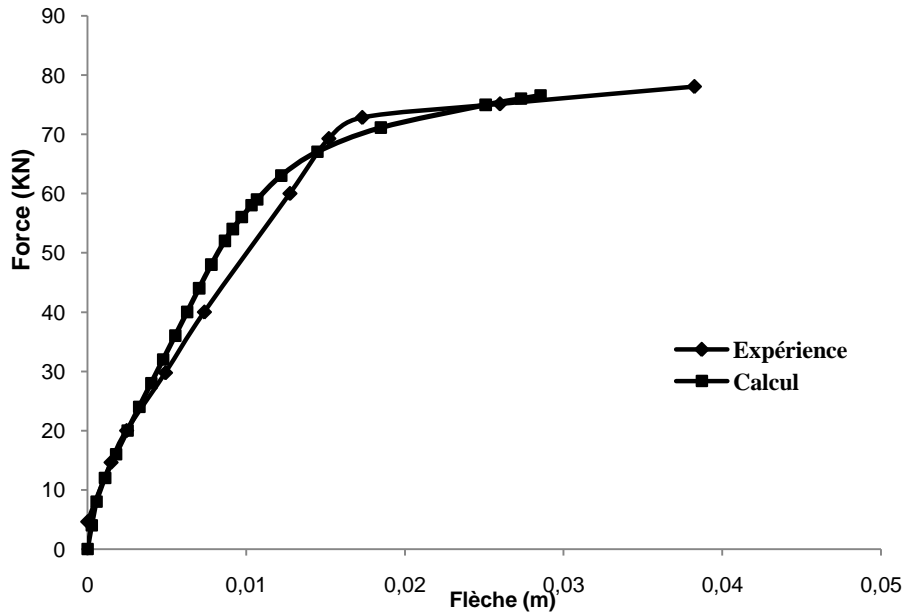


Figure 3.3 : Courbe force-flèche de la poutre OG3

Résultats

La figure 3.3 présente le résultat de calcul obtenu avec prise en compte du phénomène non linéaire et ce résultat est comparé au résultat expérimental. Ce résultat montre une bonne concordance entre les deux courbes jusqu'à la ruine.

3.2.1.2 Le portique de Vecchio et Emara [116]

Cet essai a été réalisé par Vecchio et Emara en 1992. Il s'agit d'un portique encasturé en pieds, le chargement consiste à appliquer une charge verticale totale de 700 KN sur chaque colonne, cette charge a été maintenue au cours de l'essai et une charge latérale (F) appliquée jusqu'à la ruine du portique. La résistance à la compression du béton est prise égale à 30 MPa, et le module longitudinal du béton est pris égal à 26 GPa. La limite d'élasticité des aciers est prise égale à 418 MPa, et la limite plastique est prise égale à 596 MPa. Le module longitudinal des aciers est pris égal à 192,5 GPa. Les dimensions du portique sont représentées sur la figure 3.4.

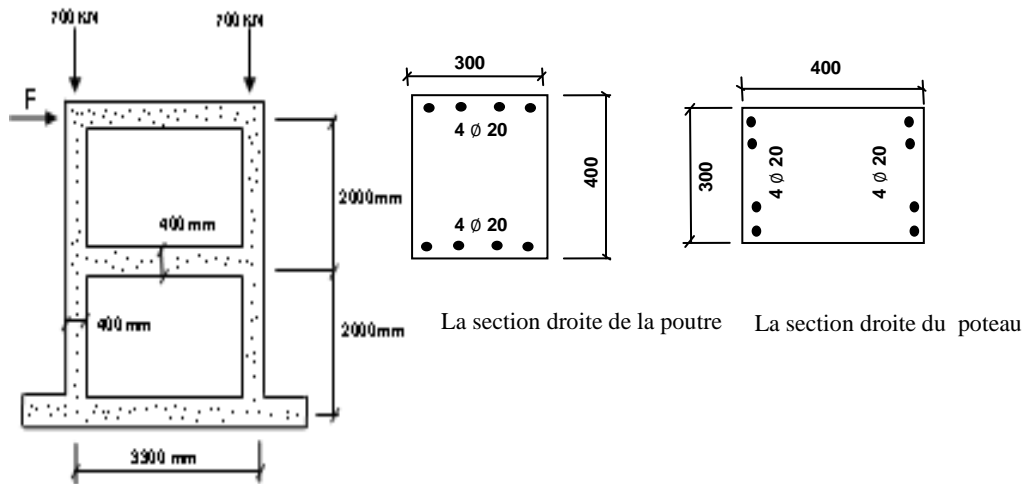


Figure 3.4 : Portique de Vecchio et Emara : Géométrie et chargement

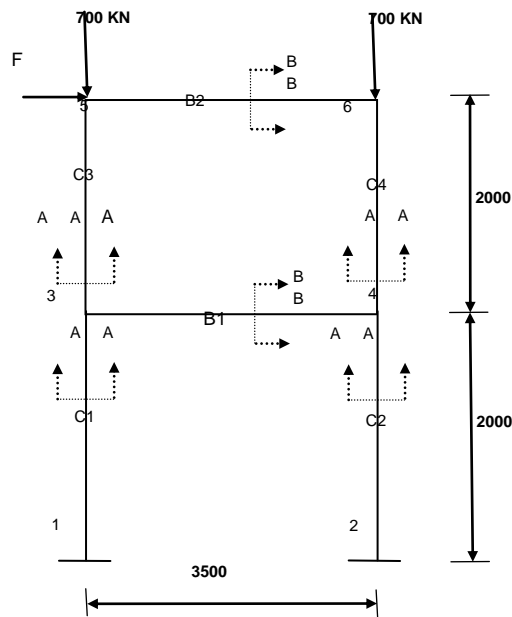


Figure 3.5 : Modélisation du portique de Vecchio et Emara

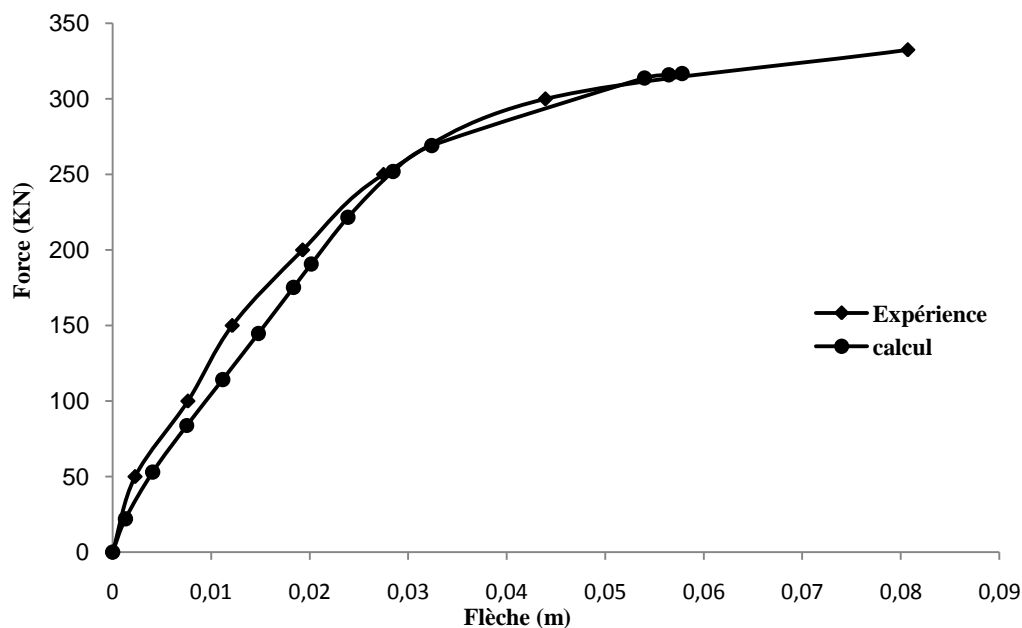


Figure 3.6 : Courbe charge latérale - déplacement latéral

Résultats

La figure 3.6 donne l'évolution de la flèche en fonction de la force F appliquée. La courbe calculée se rapproche de la courbe expérimentale, la flèche maximale calculée est cependant plus faible ; cela est probablement dû à un problème numérique (divergence du calcul due à la tangente nulle).

3.2.1.3 Observations et détail expérimental sur l'essai de Zhan [98]

Dans le but de tester les factures et les performances mécaniques du béton de fibres, nous avons pris les essais expérimentaux exécutés par Zhan [98], au laboratoire C.E.B.T.P pour faire une comparaison : calcul / expérimental.

Il s'agit des pieux – poutres de diamètre 500 mm en béton armé et en béton de fibres expérimentés par ZHAN. Le pieu en béton armé est ferrillé par 5 barres d'acier HA de diamètre 16 mm, (0,5 % volumique) (essai en vraie grandeur).

Les pieux sont soumis à une flexion composée. L'effort normal de compression est de 1370 KN (appliqué à l'aide d'une précontrainte extérieure), les caractéristiques géométriques du pieu sont représentées sur la figure 3.7.

Afin de déterminer les propriétés mécaniques du béton, des tests sur des éprouvettes cylindriques ont été faits.

- Composition du béton

La composition du béton a été formée selon le dosage utilisé couramment sur chantier, soit 350 Kg/m³ de ciment par mètre cube de béton.

Les caractéristiques du composite (béton armé) sont données dans le tableau 3.3.

Les caractéristiques du composite (béton témoin). sont données dans le tableau 3.4.

Le pieu en béton armé renforcé de fibres à crochets à raison de 25 Kg/m² (correspondant 0,31% en volume), il est noté BFAC. Le deuxième type de pieu en béton armé renforcé de fibres ondulées avec le même pourcentage, il est noté BFON. Les caractéristiques mécaniques du béton et les propriétés des fibres sont les mêmes que celles des éprouvettes décrites dans le tableau 3.3 et 3.4. Nous avons testé le pieu renforcé par des fibres d'acier à crochets.

Tableau 3.3 : Caractéristiques mécaniques du composite (béton armé). Eprouvettes cylindriques (ZHAN)

Indice de l'éprouvette	f_{cj} (MPa)	f_{tj} (MPa)	E_{b0} (GPa)	R_b	R_c	ε_{rt} (‰)	ε_0 (‰)
BA	41,42	3,08	34,40	1,6	0,7	-20	2,1

BA : Béton armé

Tableau 3.4 : Caractéristiques mécaniques du composite (béton témoin). Eprouvettes cylindriques (ZHAN)

Indice de l'éprouvette	f_{cj} (MPa)	f_{tj} (MPa)	E_{b0} (GPa)	R_b	R_c	ε_{rt} (‰)	ε_0 (‰)
BT	44,69	3,28	34,40	1,6	0,7	-5	2,1

BT : Béton témoin

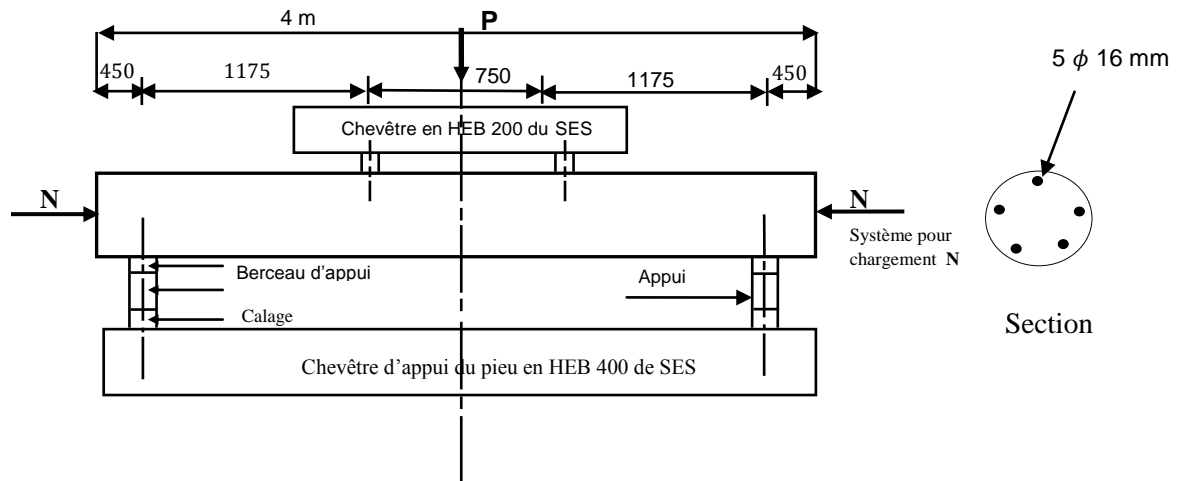
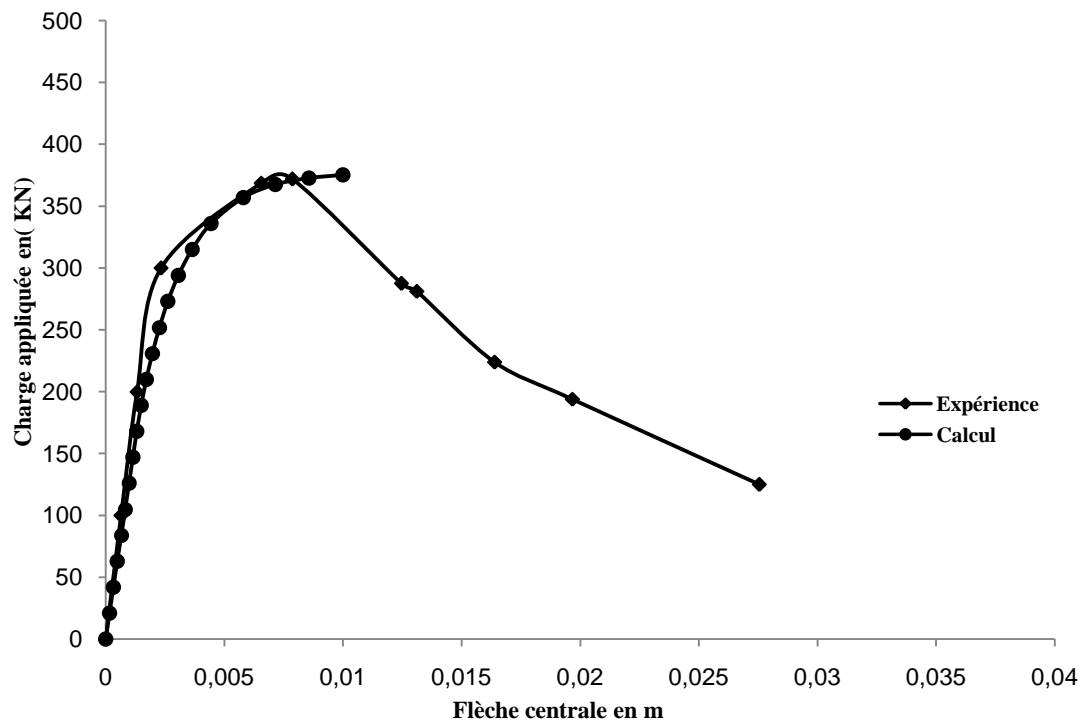
Tableau 3.5 : Caractéristiques mécaniques du composite (béton armé de fibres d'acier). Eprouvettes cylindriques (ZHAN)

Indice de l'éprouvette	f_{cj} (MPa)	f_{tj} (MPa)	E_{b0} (GPa)	R_b	R_c	ε_{rt} (‰)	ε_0 (‰)	ε_{cu} (‰)
BFAC	47,6	2,94	38,18	1,6	0,7	-50	2,1	3,5

Tableau 3.6 : Propriétés des fibres. Eprouvettes cylindriques (ZHAN)

Indice de l'éprouvette	E_a (GPa)	l_f (mm)	ω (%)	ϕ (mm)	ε_u (‰)	τ_u (Mpa)
BFAC	200	60	0.31	1	- 0.74	7

BFAC : Béton armé de fibres d'acier

**Figure 3.7 :** montage de l'essai en flexion composée du pieu en béton armé à section circulaire**Figure 3.8 :** courbe charge-flèche (BT)

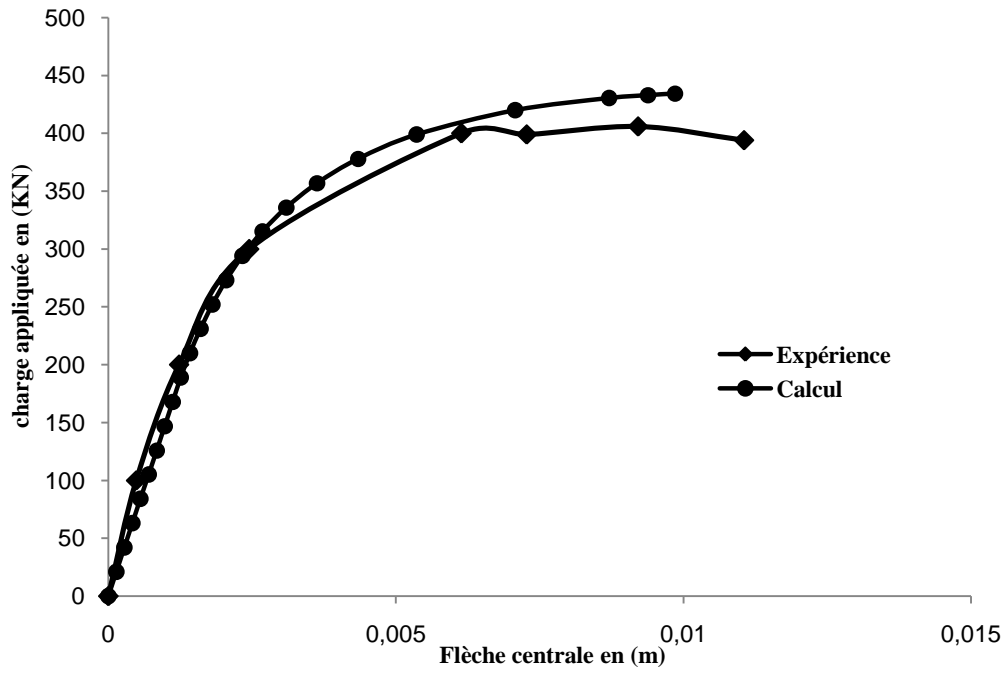


Figure 3.9 : courbe charge - flèche (BA)

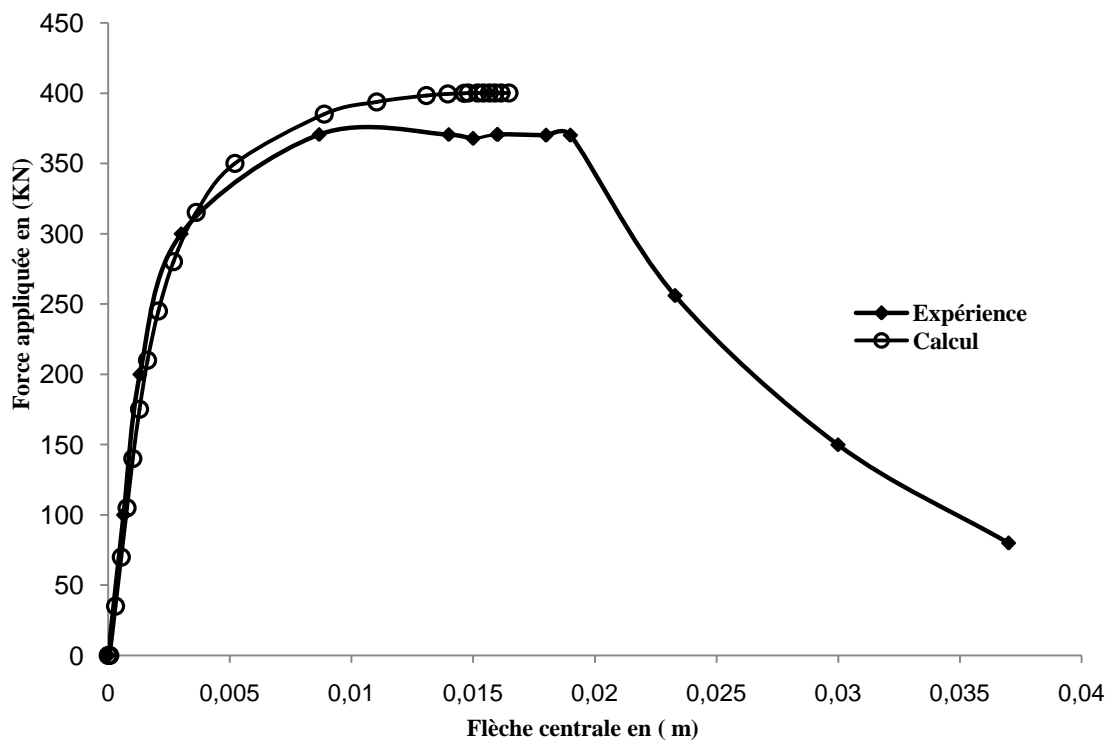


Figure 3.10 : Courbe charge - flèche (BF)

- Interprétation des résultats

- Le pieu en béton armé (**BA**) : la force de rupture obtenue expérimentalement est de 410 KN, le calcul permet d'obtenir une valeur de 434,44 KN. La courbe numérique est très proche de la courbe expérimentale, ce que explique que la méthode effectuée est bonne en terme de déformation et force à la rupture (figure 3.9).

- Le pieu en béton de fibres à crochets à 25 Kg/m² (**BF**) : la force de rupture obtenue expérimentalement est de 390 KN, le calcul nous donne une valeur de 389,81 KN, dans la phase du développement des fissures avec participation du béton de fibres le calcul est bon, bien que les déformations s'arrêtent à une valeur moins de celles de l'expérimental car la troisième phase (post fissuration avec participation du béton de fibres) seules des petites déformations ont été considérées dans le programme pour la loi de comportement du béton de fibres et le calcul est effectué par la méthode tangente (figure 3.10).

- Le pieu en béton témoin (non armé **BT**): la force de rupture obtenue expérimentalement est de 372 KN, numériquement 375,37 KN. Les résultats obtenus montrent qu'après avoir atteint la force de rupture, les déformations de calcul numérique se rapprochent de l'expérimental (figure 3.8).

Nous avons constaté aussi une amélioration importante de la flèche avant rupture du pieu en béton de fibres.

3.2.2 Exemples de structures triangulées

3.2.2.1 Poutre en treillis métallique [52]

Un treillis plan en trois travées égales a été testé, par LOVEGROVE et analysé par CHAN en utilisant la méthode des éléments finis. La disposition et les dimensions de la poutre en treillis ainsi que les sections des membrures sont montrées sur la figure 3. 11. La valeur du module d'élasticité est de 214 GPa, et la valeur de la limite d'élasticité est de 285,4 MPa. L'élément passant par le point (A) est conçu de telle sorte que la charge appliquée au voisinage le rend comme le point critique.

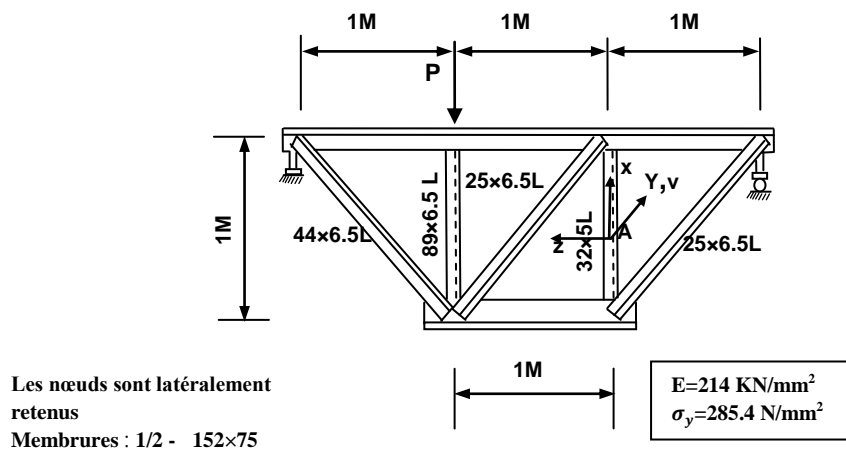


Figure 3.11 : Poutre triangulée métallique

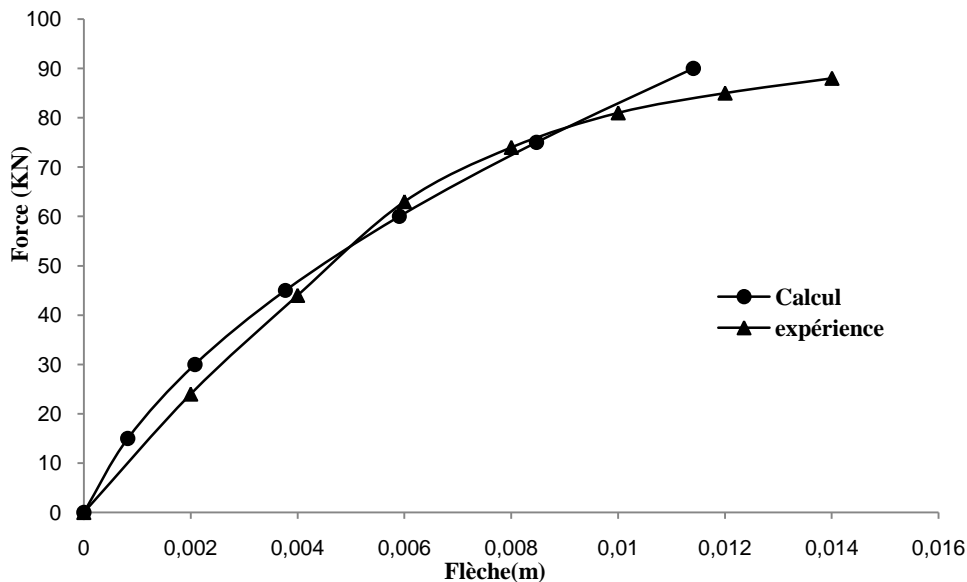


Figure 3.12 : Courbe charge - flèche de la poutre triangulée métallique

Interprétation des résultats

Le résultat de la charge et le déplacement latéral au point médian (A) est représenté sur la figure 3.12. La charge ultime expérimentale est donnée égale à 88 KN. La charge ultime calculée est de 90 KN, on constate que l'allure de la courbe calculée se rapproche de la courbe expérimentale. La concordance entre l'expérience et notre calcul est bonne.

3.2.2.2 Poutre triangulaire en béton armé [138]

Le Laboratoire de Ponts et Grandes Structures du Polytechnique Royal de Milan a entrepris des recherches expérimentales sur une poutre en treillis spécialement construite: quoiqu'importantes, ces recherches n'ont pas encore conduit à des résultats effectifs très précis. Ils ont préparé une poutre d'essai en treillis triangulaire symétrique avec membrures supérieure et inférieure parallèles, portée libre théorique 12 m. Hauteur entre les axes des membrures 2 m. Dans la figure 3.13 sont indiqués les détails d'armature et de la construction. L'appareil d'appui a été rendu solidaire de la poutre et est constitué, comme l'indique la même figure.

Par des petits blocs en béton armé qui se développent en dessous des nœuds théoriques d'extrémité et qui sont façonnés de manière à éviter le basculement latéral de la poutre.

Pour se rapprocher des conditions d'un appui simple, ils ont noyé des tôles légèrement recourbées dans les faces inférieures de ces petits blocs.

En outre, Ils ont formé les appuis avec des champignons de rails, afin de diminuer le frottement.

D'autres dispositions ont été écartées, la disposition susdite suffisante à réaliser les conditions d'un appui simple.

Le calcul général de la poutre a été conduit dans l'hypothèse communément adoptée des charnières dans les nœuds.

Les dimensions ont été déterminées de façon que, sous leur propre poids et dans l'un des cas suivants, il ne se produise pas dans le béton d'efforts de compression supérieurs à 30 kg par cm². Pour les barres sollicitées à la traction, ils ont considéré comme élément résistant l'armature métallique seulement, et cela afin d'obtenir des tensions très faibles dans le béton si l'on prend en considération son intervention d'ailleurs effective. Les conditions de charge prévues ont été:

- 1) Charge concentrée: 4 tonnes pour chaque nœud supérieur;
- 2) Charge concentrée: 4 tonnes pour chaque nœud inférieur;
- 3) Charge continue uniforme: 200 kg. par mètre linéaire sur la membrure supérieure;
- 4) Charge continue uniforme: 200 kg. par mètre linéaire sur la membrure inférieure.

Pour les deux derniers cas, en ce qui concerne la flexion, les barres ont été considérées comme demi-encastées aux extrémités.

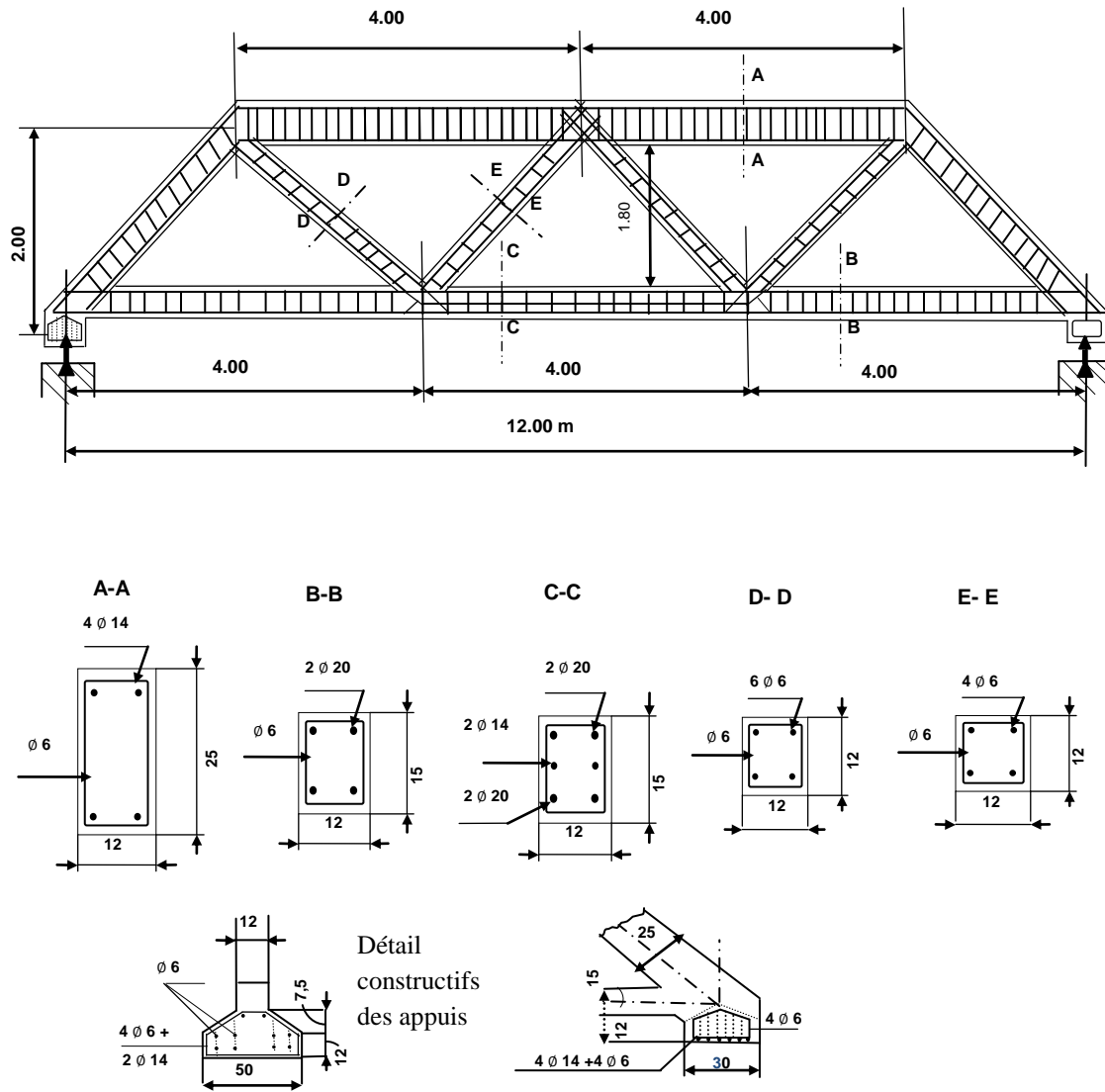


Figure 3.13 : Détails constructifs de la poutre triangulaire d'épreuve

Les résultats de notre calcul numérique sont les suivants :

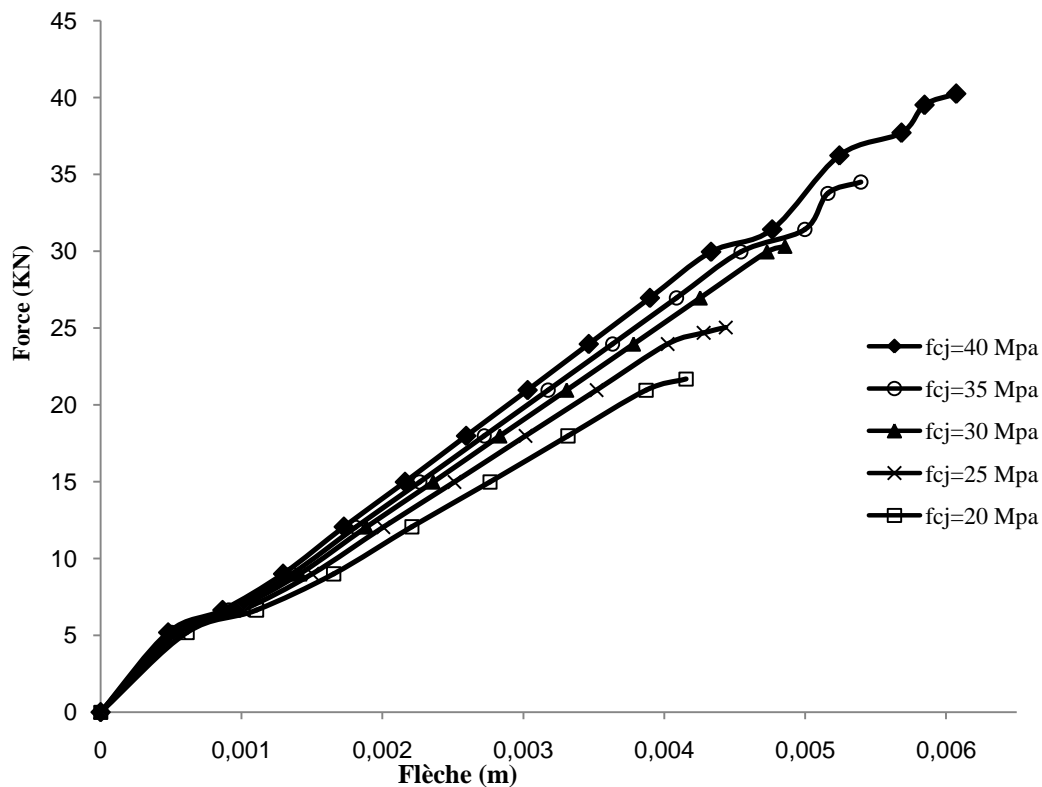


Figure 3.14 : Courbe charge - flèche pour différentes valeurs de la résistance à la compression du béton

Interprétation des résultats

L'analyse numérique de la poutre triangulaire en béton armé a été effectuée, avec des valeurs de résistances à la compression du béton 20, 25, 30, et 35 et 40 MPa respectivement.

La figure 3.14 nous montre que pour des résistances à la compression 20, 25, 30, et 35 MPa la charge de 4 tonnes n'est pas obtenue, et pour une résistance à la compression de 40 MPa, le calcul nous donne une charge de 4.25 tonnes et le comportement de la poutre est resté dans le domaine élastique linéaire. D'après la référence [138] la structure s'est toujours montrée parfaitement élastique sous réserve naturellement des caractéristiques élastiques du matériau utilisé.

3.2.2.3 Structure treillis en arc [91]

La structure sous forme d'un treillis en arc plan est soumise à l'effort un vertical concentré P . cet exemple a été analysé par Rosen et Schmit pour examiner l'influence des imperfections géométriques, et par Kondoh et Atluri pour analysé les effets des imperfections locales et globales de la structure entière en arc en treillis.

Cette structure est composée de 35 éléments (voir la figure 3.15), la section droite de l'élément est circulaire, le module d'élasticité équivalent est de : $E = 68,964 \text{ KN/m}^2$. Les coordonnées nodales de la structure en treillis en arc et la section droite pour chaque élément sont données dans les tableaux 3.6 et 3.7 respectivement.

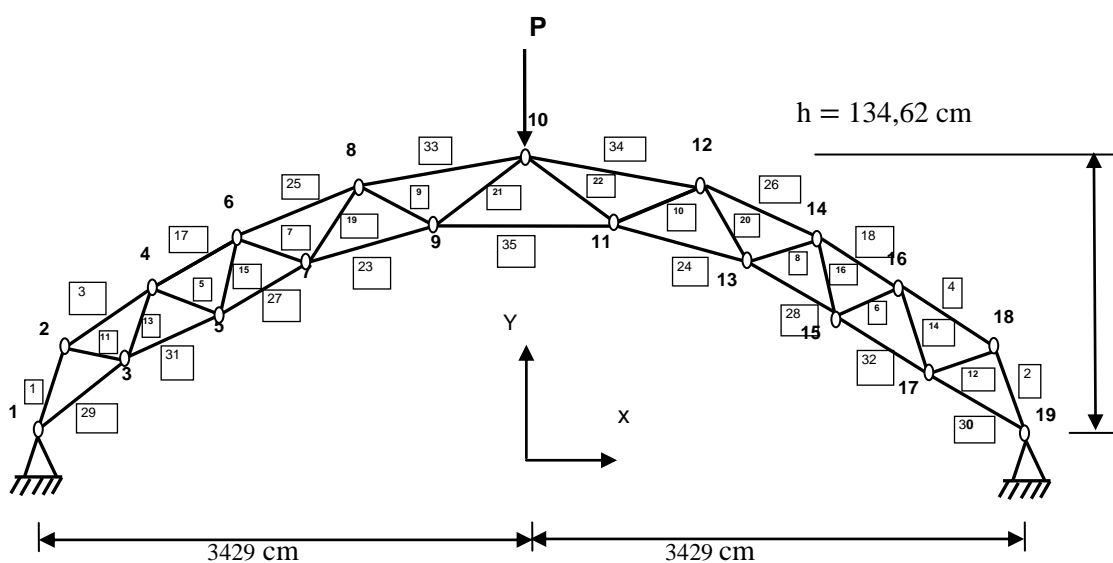


Figure 3.15 : Géométrie de la structure en treillis en arc

Tableau 3.7

Les coordonnées de chaque nœud de la structure en arc pour Kondoh et Atluri

Numéro de Nœud	coordonnées X	coordonnées Y
19,1	± 3429,0	0,00
18,2	± 3048,0	50,65
17,3	± 2667,0	34,75
16,4	± 2286,0	83,82
15,5	± 1905,0	65,30
14,6	± 1524,0	110,85
13,7	± 1143,0	87,99
12,8	± 762,0	128,50
11,9	± 381,0	100,65
10	0,0	134,60

Tableau 3.8

L'aire de la section pour chaque élément de la structure en arc pour Kondoh et Atluri

Numéro de Nœud	l'aire de la section droite en cm ²
1- 10- 35	51,61
11,12	64,52
13-16	83,87
17,18	96,77
19- 22	103,23
23,24	161,29
25,26	193,55
27,28	258,06
29,32	290,32
33,34	309,68

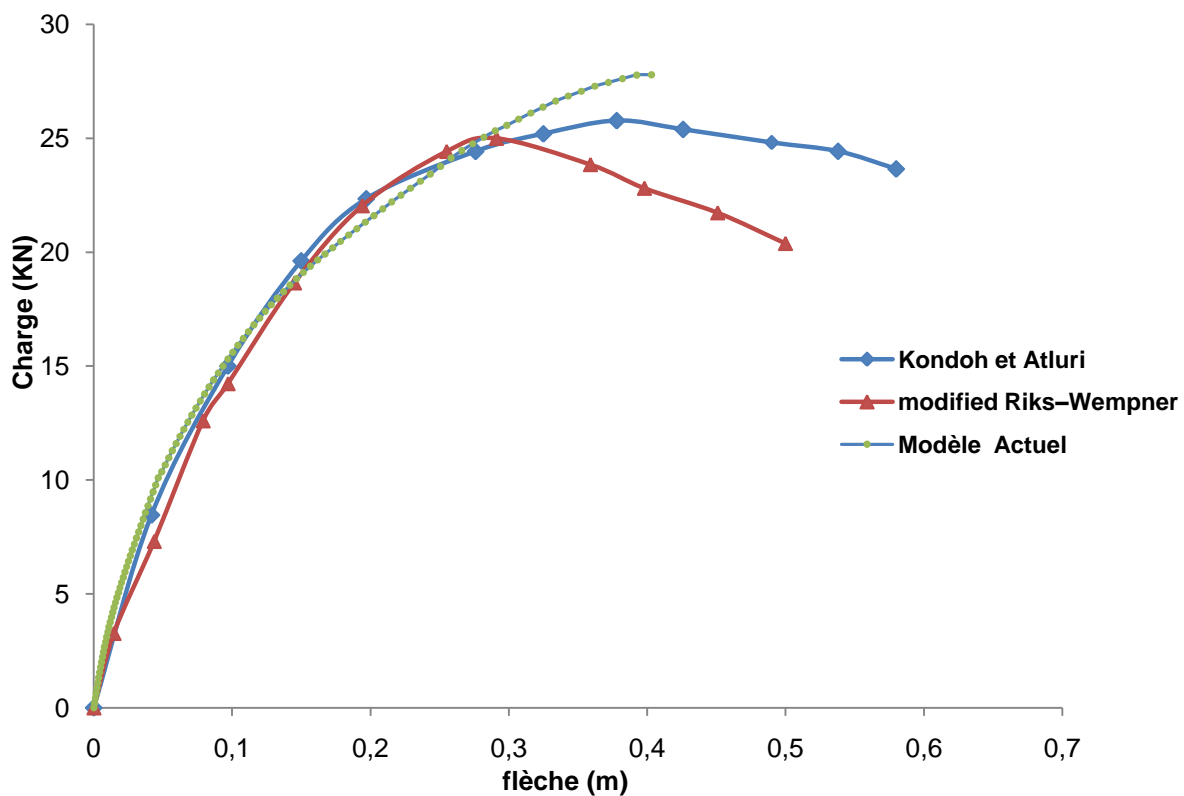


Figure 3.16 : La relation charge - déplacement pour la structure en arc, nœud 10

-Interprétation des résultats

La charge limite obtenue dans le présent travail est de 27,78 KN, un accord proche est obtenu en comparant à les valeurs obtenues, par la méthode de modified Riks-Wempner 25,11 KN, et par Kondoh et Atluri 25,87 KN. La figure 3.16 représente la courbe

charge - flèche pour le déplacement vertical du nœud 10 correspondant à la charge appliquée P.

On observe aussi sur cette figure qu'une certaine divergence se produit après la charge limite est atteinte, et on remarque que la courbe calculée se rapproche de celle calculée par les deux auteurs jusqu'à la valeur 19,37 KN en terme de force, à partir de cette valeur on remarque que la courbe calculée s'éloigne un peu des deux autres courbes. Cet exemple numérique présenté confirme que les résultats obtenus par le programme développé sont en accord avec la solution des exemples publiés par les autres auteurs.

3.3 Conclusion

Nous avons pu vérifier que la solution trouvée permet reproduire le comportement non linéaire des structures en flexion.

Dans cette étude, l'influence de l'effort tranchant a été négligée dans le domaine non linéaire. L'analyse non linéaire permet de définir des courbes charges - flèches sur n'importe quel point de la structure, la vérification de la capacité des structures jusqu'à la ruine devient plus pratique, car le comportement non linéaire est déterminé.

L'utilisation de la méthode de calcul dans le cas d'une poutre triangulaire en béton armé, nous permet de trouver le résultat du calcul, en ce qui concerne la prévision de la charge appliquée et le comportement élastique.

Conclusion

générale

Conclusion générale

L'objectif de notre travail était de définir une méthode de modélisation du comportement non linéaire des ossatures en béton armé et les structures triangulées en béton armé et métallique ainsi que les structures triangulées en arc sous un chargement monotone.

La formulation de l'élément a été établie pour la modélisation non linéaire des structures poteaux poutres telles que les pieux en béton de fibres et le portique en béton armé.

Nous avons présenté le comportement de quelques matériaux et nous avons utilisé les lois de comportement contrainte déformation du béton.

La participation du béton tendu entre deux fissures, la discrétisation de la section en tables trapézoïdales, et la prise en compte des effets différés permet d'évaluer correctement les déplacements. Le calcul de second ordre prend en compte la position déformée de la structure, pour mieux estimer la déformabilité et la charge à la ruine des structures.

Le comportement non linéaire de pieu en béton de fibres rompu par la flexion composée est considéré dans la partie linéaire, la partie non linéaire et la phase du développement des fissures avec participation du béton des fibres où nous avons utilisé la méthode tangente.

Le portique plan ou tridimensionnel obtenu par un assemblage d'éléments de poutres droites, ces éléments travaillent en flexion, traction et torsion. Ils sont modélisés par des éléments de type poutre.

Pour les treillis plans ou tridimensionnels obtenus par assemblage de barres articulées aux extrémités. Les éléments d'un treillis ne travaillent qu'en traction ou compression. Ils sont modélisés par des éléments de type barre.

La formulation de l'élément barre est utilisée pour modéliser le comportement élastique non linéaire des structures triangulées métalliques et les structures en arc, comme les structures en arc résistent à une plus grande compression axiale, mais génèrent moins de contrainte de flexion et moins de poussée horizontale.

Pour les structures triangulées en béton armé, peu de recherches ont été effectuées puisque le béton armé à cause de caractère monolithe qu'il prend après vieillissement, car dans ce genre des structures, une inconnue représentée par le module d'élasticité, qui varie non seulement d'une membrure à l'autre mais aussi d'un point à un autre, il est difficile de tenir de cette variabilité, mais dans notre méthode nous avons étudié le problème non linéaire et le module d'élasticité varie avec la méthode itérative incrémentale.

Pour le traitement numérique nous avons utilisé les algorithmes de calcul afin de présenter les différentes étapes de calcul.

Les résultats expérimentaux obtenus dans la littérature comparés aux résultats du notre programme tridimensionnel écrit en langage Fortran montrent une bonne concordance notamment pour les exemples analysés. La confrontation calcul/essai est satisfaisante et décrit correctement le comportement des structures jusqu'à la rupture.

Perspectives (recommandations pour futures extensions)

Pour les développements futurs du programme de calcul, on peut citer les orientations suivantes :

- Introduction des déformations dues à l'effort tranchant dans le domaine non linéaire.
- Etude du comportement des structures triangulées en béton armé en présence des fibres sur les diagonales.
- Une étude sur le comportement des liaisons des structures triangulées.
- Développement de cette technique en introduisant la matrice de masse pour tenir compte du comportement dynamique.

Liste bibliographique

-
- [01] NGO, D. SCORDELIS, A.C. Finite element analysis of reinforced concrete beams ACI, Journal, Proceedings Vol. 64, N^o 3 Mars 1967
- [02] NILSON, A.H. Finite analysis of reinforced concrete Dissertation, University of California, Berkeley, 1967.
- [03] RASHID Y.R. Ultimate strength analysis of prestressing concrete pressure vessels Nuclear Engineering and Design , Vol. 7, 1968. North – Holland Publishing Co., Amsterdam.
- [04] Bell. J.C. A complete analysis for reinforced concrete slabs and shells Dessertation, University of Canterbury, Chistchrch, New Zealand.
- [05] ZIENKIECZ, O.C. – OWEN D.R.J. – PHILIPPS D.V. – NAYAK G.C. Finite element method in analysis of reinforced and presstressed concrete structures.
- [06] W.B. CRANSTON. A computer method for inelastic analysis of plane frames C. and C.A. TRA/386 1965.
- [07] J. FERRY BORGES, E.R. ARANTES E .OLIVEIRA. Non linear analysis of reinforced concrete structures . Memorias do L.N.E.C. Lisbonne 1964
- [08] FRANKLIN H.A. Nonlinear analysis of reinforced concrete frames and panels Dissertation, University of California, Berkeley, 1970.
- [09] K.AAS JAKOBSEN. M. GRENACHER .Berechnug unelastischer Rahmen nach der theorie 2 Ordnung E.T.H. Zurich janvier 1973.
- [10] J.M.BECKER. Inelastic analysis of reinforced concrete Frames .Thesis of Cornell University Fevrier 1967.
- [11] P.G.BERGAN, E. ALDSTEDT. Large Deformation and Stability Analysis of Reinforced concrete Frames Considering Material Nonlinearities A.I.P.C. Symposium Quebec 1974.
- [12] V.C . KROENKE, M.J. GUTZWILLER, RH. LEE Finite element for reinforced concrete frame study Journal of the Sturctural Division A.S.C.E Preedings Juillet 1973.
- [13] GUNNIN, B.L., RAD,F.N.,FURLONG, R.W.A general non linear analysis of concrete structures and comparison with frame tests. Computers and structures, 1977, vol7, n^o3, p 257-265.
- [14] A.L. LAZARO .Analysis of the full range behavior of reinforced concrete beams and frames Dissertation. Faculty of Princeton Universty Mai 1971.
- [15] J.BLAAUWENDRAAD. Realistic Analysis of Reinforced Concrete Frame Structures HERON 1972.
- [16] JENNINGS, Alain. Frame analysis including change of geometry. Journal of the Structures and Division, ASCE, mars 1968, vol 94, n^oST3,P 627-644.

- [17] M.MENGOTTO, P.E. PINTO. Method of Analysis for cyclically Loaded Reinforced concrete Frames Including changes in geometry and non elastic behavior of elements Instituto di Scienza et Tecnica delle Costruzioni Pub N^o 32 Octobre 1972.
- [18] GRELAT A., Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé, Thèse de docteur Ingénieur, Université Paris VI, 1978.
- [19] Ferraro Mia, A.C. analyse non linéaire des portiques plans en béton armé ou précontraint compte tenu du comportement rhéologique du béton. Thèse de Doctorat-Ingénieur : Université Paris VI, 1979. 157p.
- [20] ESPION, BERNARD. Contribution à l'analyse non linéaire des ossatures planes application aux structures en béton armé. Thèse de doctorat : Université libre de Bruxelles, 1986. 495 p.
- [21] BOUAFIA, Y., FOURÉ, B., KACHI, MS., « Shear strength of externally prestressed beams ». II. International Symposium on Cement and Concrete Technology in the 2000s. Turkish Cement Manufacturers' Association with European Cement Association. Sept. 6 -10, 2000, Istanbul - Turkiye, ISBN 975-8136-09-7. Vol. 2, pp. 522-531.
- [22] CHAN, E.C. Nonlinear geometric, material and time-dependent analysis of reinforced concrete shells with edges beams. Ph.D. Thesis : Departement of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1982.361 p.
- [23] MARI,A.R. nonlinear geometric, material and time-dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames.Ph.D.THEISIS : Departement of civil engineering, University of California, Berkeley, 1984.141p.
- [24] KANG,Y.J. Non linear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete frames. Ph.D. Thesis: Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1977.243 p.
- [25] Ville de Goyet, Vincent. L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées des poutres a sections non symétriques. Thèse de doctorat :Université de Liège, faculté des sciences Appliquées,1988-1989. Pagination multiple.
- [26] Fery. l'analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application a la construction métallique. Thèse doctorat : Université de Liège, faculté des sciences appliquées, 1977-1978.230 p.
- [27] NAIT-RABAH, Simulation numérique des ossatures spatiales, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 1990.
- [28] Florent ROBERT, contribution à l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des ossatures spatiales en génie civil application aux ouvrages d'art. Thèse de doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 1999.

- [29] Izzuddin B A. Conceptual issues in geometrically nonlinear analysis of 3D framed structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 191(8–10): 1029–1053.
- [30] B.A. Izzuddin, A.A.F.M. Siyam, D. Lloyd Smith. An efficient beam–column formulation for 3D reinforced concrete frames. *Computers and Structures* 80 (2002) 659– 676.
- [31] Marante M E, Flórez-López J. Three-dimensional analysis of reinforced concrete frames based on lumped damage mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40(19): 5109–5123.
- [32] Rabczuk T, Zi G, Bordas S, Nguyen-Xuan H. A geometrically nonlinear three-dimensional cohesive crack method for reinforced concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, 75(16):4740–4758.
- [33] Adjrard A, Kachi M, Bouafia Y, Iguetoulene F. Nonlinear modeling structures on 3D. In: *Proc. 4th Annu.icsaam 2011. Structural Analysis of Advanced Materials, Romania, 2011*, 1–9.
- [34] Mallett RH, Schmit LA. Nonlinear structural analysis by energy search. *J Struct Division, ASCE* 1967; 93(6):221–34.
- [35] Wolf JP. Post buckling strength of large space-truss. *J Struct Division, ASCE* 1973;99(7):1708–12.
- [36] Paradiso M, Tempesta G. Member buckling effects in non-linear analysis of space trusses. in *Numerical Method of Nonlinear Problems 1980*; 1: 395–405. Taylor C, Hinton E Owen RDJ, Editors, Pineridge, Swansea, England.
- [37] Ramm E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: Wunderlich W, Stein E, Bathe KJ, editors. *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*. Springer-Verlag; 1981. p. 63–89.
- [38] Papadrakakis M. Post-buckling analysis of trusses. *J Struct Eng, ASCE* 1983; 109(9):2129–47.
- [39] Hill CD, Blandford GE, Wang ST. Post-buckling analysis of steel space trusses. *J Struct Eng, ASCE* 1989;115(4):900–19.
- [40] Association Française pour la Construction, les structures triangulées en béton précontraint. AFPC. 18 mai 1983. L'évolution récente des ponts en béton précontraint.
- [41] Richard T. Brown, Abdul-Hamid Zureick. Lightweight composite truss section decking. Atlantic Research Corporation, 5945 Wellington Rd., Gainesville, VA 20155, USA. Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, USA.(2001).
- [42] Seung-Eock Kim a,*, Moon-Ho Park b, Se-Hyu Choi c. Practical advanced analysis and design of three-dimensional truss bridges. *Journal of Constructional Steel Research* 57 (2001) 907–923.

- [43] Chen WF, Kim SE. LRFD steel design using advanced analysis. CRC Press, 1997.
- [44] Kim SE, Chen WF. Practical advanced analysis for braced steel frame design. ASCE, J Struct Eng 1996;122(11):1266–74.
- [45] Clarke MJ, Bridge RQ, Hancock GJ, Trahair NS. Benchmarking and verification of second- order elastic and inelastic frame analysis programs. In: White DW, Chen WF, editors. SSRCTG 29 Workshop and Nomograph on Plastic Hinge Based Methods for Advanced Analysis and Design of Steel Frames. Bethlehem (PA): SSRC, Lehigh University, 1992.
- [46] El-Zanaty M, Murray D, Bjorhovde R. Inelastic behavior of multistory steel frames. Structural Engineering Report No. 83, University of Alberta, 1980.
- [47] Prakash V, Powell GH. DRAIN-3DX: Base program user guide, version 1.10. A computer program distributed by NISEE/Computer Applications, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1993.
- [48] Liew JY, Tang LK. Nonlinear refined plastic hinge analysis of space frame structures. Research Report No. CE027/98, Department of Civil Engineering, National University of Singapore, Singapore, 1998.
- [49] Papadrakakis M. Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration method. Comput Struct 1981;14(5-6):393–402.
- [50] Blandford GE. Progressive failure analysis of inelastic space truss structures. Comput Struct 1996;58(5):981–90.
- [51] Yang YB, Yang CT, Chang TP, Chang PK. Effects of member buckling and yielding on ultimate strengths of space trusses. Eng Struct 1996;19(2):179–91.
- [52] X. SUN and S. L. CHAN. Design and second-order analysis of trusses composed of angle sections International Journal of Structural Stability and Dynamics Vol. 2, No. 3 (2002) 315- 334.
- [53] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [54] Livesley RK (1956) The application of an electronic digital computer to some problems of structural analysis. The Structural Engineer, 34(1): 1–12.
- [55] Livesley RK, Chandler DB (1956) Stability Functions for Structural Frameworks. Manchester University Press, Manchester, England
- [56] Halldorsoon OP, Wang CK (1968) Stability analysis of frameworks by matrix methods. J. Struct. Division, ASCE 94(7): 1745–1760.
- [57] Majid KI (1972) Non-linear Structures (Matrix Methods of Analysis and Design by Computers), Butterworth and Co.Ltd, London, England.
- [58] Kondoh K, Atluri SN(1985) Influence of local buckling on global instability: simplified, large deformation, post-buckling analyses of plane trusses. Comp. Struct., 21: 613–627

-
- [59] Kondoh K, Atluri SN(1986) A simplified finite element method for large deformation, post-buckling analyses of large frame structures, using explicitly derived tangent stiffness matrices. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 23: 69–90.
- [60] Ekhande SG, Selvappalam M, Madngula MKS(1989) Stability functions for three-dimensional beam-columns. *J. Struct. Eng.*, ASCE 115(2): 467–479.
- [61] Chandra R, Trikha DN, Krishna P(1990) Nonlinear analysis of steel space structures. *J. Struct. Eng.*, ASCE 116(4): 898–909.
- [62] Gallagher RH, Padlog J(1963) Discrete element approach to structural instability analysis. *AIAA J.* 1: 1437–1439.
- [63] Hartz BJ(1965) Matrix formulation of structural stability problems. *J. Struct. Division*, ASCE 91(6): 141–157
- [64] Hill CD, Blandford GE, Wang ST (1989) Post-buckling analysis of steel space trusses. *J. Struct. Eng.*, ASCE 115(4): 900–919.
- [65] Spillers WR (1990) Geometric stiffness matrix for space frames. *Comp. Struct.* 36: 29–37.
- [66] Manolis GD, Beskos DE (1983) Internal force distribution effect on framework stability. *J. Struct. Eng.*, ASCE 109(1): 250–257.
- [67] Renton JD (1962) Stability of space frames by computer analysis. *J. Struct. Division*, ASCE 88(4): 81–103
- [68] Krajcinovic D (1969) A consistent discrete elements technique for thin walled assemblages. *Int. J. Solids and Struct.*, 5: 639–662.
- [69] Xykis C, Galambos TV (1990) Lateral torsional stability analysis of large order space frame systems. *Eng. Struct.* 12: 235–242.
- [70] Paavola J, Salonen S (1992) Flexural–torsional stability of thinwalled columns. *J. Eng. Mech.*, ASCE 118(12): 2384–2400.
- [71] Sallstrom JH (1996) Accurate calculation of elastic buckling loads for space frames built up of uniform beams with open thin-walled cross-section. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 39: 2319–2333.
- [72] Barsoum RS, Gallagher RH (1970) Finite element analysis of torsional and torsional–flexural stability problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 2: 335–352
- [73] Vacharajittiphan P, Trahair NS (1975) Direct stiffness analysis of lateral buckling. *J. Struct. Mech.* 3: 107–13.
- [74] Ettouney MM, Kirby JB (1981) Warping restraint in three-dimensional frames. *J. Struct. Division*, ASCE 107(8): 1643–1656.
- [75] Bradford MA, Trahair NS (1982) Distortional buckling of thinweb beam-columns. *Eng. Struct.* 4: 2–10.

- [76] Roberts TM, Azizian ZG (1983) Instability of thin walled bars. *J.mEng. Mech.*, ASCE 109(3): 781–794.
- [77] N. Bazeos, C. Xykis. Elastic buckling analysis of 3-D trusses and frames with thin-walled Members. *Computational Mechanics* 29 (2002) 459–470 Springer-Verlag 2002.
- [78] Seung-Eock Kim *, Se-Hyu Choi, Sang-Soo Ma. Performance based design of steel Arch bridges using practical joints. *Engineering Structures* 56 (2003) 1557–1569.
- [79] Nazmy AS. Stability and load-carrying capacity of three-dimensional long-span steel arch bridges. *Comput Struct* 1997;65(6):857–68.
- [80] Pi Yong-Lin, Trahair NS. Inelastic lateral buckling strength and design of steel arches. *Eng Struct* 2000;22:993–1005.
- [81] Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim. Large deflection inelastic analysis of space trusses using generalized displacement control method. *Journal of Constructional Steel Research* 65 (2009) 1987_1994.
- [82] Hill CD, Blandford GE, Wang ST. Post-buckling analysis of steel space trusses. *J Struct Eng ASCE* 1989;115(4):900-19.
- [83] Ramesh G, Krishnamoorthy CS. Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method. *Int J Numer Meth Eng* 1994;37(21):3633-57.
- [84] Blandford G. Large deformation analysis of inelastic space truss structures. *J Struct Eng ASCE* 1996;122(4):407-15.
- [85] Yang YB, Kuo SR. *Theory and analysis of nonlinear frames structures*. Singapore: Prentice Hall; 1994.
- [86] Chen WF. *Structural Engineering: Seeing the big picture*. KSCE J Civil Eng 2008; 12(1):25-9
- [87] Yang YB, Shieh MS. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA J* 1990;28(12):2110-6.
- [88] Liew JYR, Punniyakotty NM, Shanmugam NE. Advanced analysis and design of spatial structures. *J Constr Steel Res* 1997;42(1):21-48.
- [89] Yang YB, Lin TJ, Leu LJ, Huang CW. Inelastic postbuckling response of steel trusses under thermal loadings. *J Constr Steel Res* 2008;64(12): 1394-1407.
- [90] Josef Machacek, Martin Cudejko. Longitudinal shear in composite steel and concrete trusses. *Engineering Structures* 31 (2009) 1313-1320
- [91] Morteza A.M. Torkamani , Jyh-Hung Shieh. Higher-order stiffness matrices in nonlinear finite element analysis of plane truss structures. *Engineering Structures* 33 (2011) 3516– 3526.

- [92] Yu Chen ^{a,b}, Ran Feng ^{c,*}, Shengwei Gao ^b. Experimental study of concrete-filled multiplanar circular hollow section tubular trusses. *Thin-Walled Structures* 94(2015) 199-213
- [93] Piero Colajanni, Lidia La Mendola, Alessia Monaco. Stiffness and strength of composite truss beam to R.C. column connection in MRFs.
- [94] Coenen j., équations de comportement du béton arme et application au calcul des structures par éléments finis. Thèse de doctorat, université Libre de Liège, (1978).
- [95] Bažant, Z.P. and Oh, B.H. deformation of progressively cracking reinforced concrete beams, *Proc, ACI*, 81, 268- 278, (1984).
- [96] SARGIN.M (1971). Stress- strain relation ships for concrete and the analysis on the Structural concrete section, S.M study N° 4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada.
- [97] Règles B.P.E.L. 91, Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites Edition EYROLLES mars 1993.
- [98] ZHAN., “Contribution au dimensionnement des pieux en béton de fibres”, Thèse de Docteur, Laboratoire C.’ E.B.T.P (1991).
- [99] Bouafia, Y., Fouré, B., Kachi, MS., « Relation effort - ouverture des fissures dans le cas du béton armé de fibres d'acier ». *Annales de l'ITB*, N° 2, avril 1998, ISSN 1270-9840, Ed. ESKA, France, pp. 5-14, <http://www.eska.fr>.
- [100] Bouafia, Y., Kachi, MS., Fouré, B., « Relation contrainte - déformation dans le cas du béton armé de fibres d'acier ». *Annales de l'ITB*, n° 3, juin 2002, ISSN 1270-9840, Ed. ESKA, France, pp. 5-17, <http://www.eska.fr>.
- [101] Bouafia Y., Analyse non linéaire des structures poteaux – poutres dans le plan en béton armé et béton précontraint. Laboratoire LaMoMS – Algérie équipement – janvier 2004.
- [102] Bouafia Y. Simulation numérique du comportement moyen jusqu’à rupture d’une zone de poutre. Application au béton armé, au béton précontraint et au béton de fibres. Mémoire de D.E.A., Université Pierre et Marie CURIE, Paris VI, 1987.
- [103] Bouafia Y., Résistance à l’effort tranchant des poutres en béton à précontrainte extérieure, Etude expérimentale et calcul à la rupture. Thèse de Doctorat, Ecole centrale des Arts et Manufactures, Paris, novembre 1991.
- [104] Bouafia, Y., Fouré, B., Kachi, MS., « Relation effort - ouverture des fissures dans le cas du béton armé de fibres d'acier ». *Annales de l'ITB*, N° 2, avril 1998, ISSN 1270-9840, Ed. ESKA, France, pp. 5-14, <http://www.eska.fr>.
- [105] Bouafia, Y., Kachi, MS., Muller P., « Modeling of externally prestressed concrete beams loaded in combined bending, axial load and shear until fracture (in nonlinear elasticity)». *ICSAAM*, 2009, ISBN 978-2-9534804-0-5, September 7 – 10, Tarbes, France.

- [106] Bouafia, Y., Kachi, MS., Fouré, B., « Numerical modeling of the behavior of steel fiber reinforced concrete ». II. International Symposium on Cement and Concrete Technology in the 2000s. Turkish Cement Manufacturers' Association – European Cement Association. Sept. 6 - 10, 2000, Istanbul - Turkiye, ISBN 975-8136-09-7. Vol. 2, pp. 582- 591.
- [107] Cengiz Dunder_, Ilker Fatih Kara, Three dimensional analysis of reinforced concrete frames with cracked beam and column elements. *Engineering Structures* 29 (2007) 2262–2273
- [108] Fouré B., Béton à haute résistance. Rapport interne OG, C.E.B.T.P., Nov. 1985
- [109] Kachi. M.S., Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieure, Thèse de doctorat d'état, Université Mouloud MAMMERRI de Tizi-Ouzou, novembre 2006.
- [110] Kachi, MS., Bouafia, Y., « Modélisation du comportement jusqu'à rupture en cisaillement d'une section de poutre en béton armé et précontraint ». Cinquième Conférence Internationale sur la Science des Matériaux (CSM5), CNRS France - Beyrouth - Liban, 17- 19 mai 2006, Editeur : T. Hamieh, Volume V.
- [111] Kachi M S, Bouafia Y, Muller P, Fouré B. "Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint en élasticité non linéaire". Colloque International - Caractérisation et Modélisation des matériaux et structures « CMMS08 », Univ. de Tizi-ouzou en collaboration avec les universités de Paris 6 et de Cergy – Pontoise, Tizi Ouzou – Algérie, 16, 17 et 18 Nov. 2008.
- [112] Kachi, MS., Fouré, B., Bouafia, Y., Muller, P., « L'effort tranchant dans la modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint». *Revue Européenne de Génie Civil*, volume 10, n° 10/2006, déc. 2006, ISSN 1774-7120, Ed. Lavoisier, France, pp. 1235 -1264, <http://www.ejece.revuesonline.com>.
- [113] Kachi, MS., Bouafia, Y., « Modélisation du comportement jusqu'à rupture en cisaillement d'une section de poutre en béton armé et précontraint ». Cinquième Conférence Internationale sur la Science des Matériaux (CSM5), CNRS France – Beyrouth - Liban, 17-19 mai 2006, Editeur : T. Hamieh, Volume V.
- [114] Steffen Mohr, Jesús M. Bairán, Antonio R. Marí., A frame element model for the analysis of reinforced concrete structures under shear and bending ; *Engineering Structures* 32 (2010) 3936–3954
- [115] Trinh J.L, Précontrainte partielle de la théorie de la pratique. *Annales de l'Institut Technique du bâtiment et des travaux publics*. N° 444. Mai, 1986.
- [116] Vecchio F.,J.,COLLINS MP., The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, *ACI Journal*,vol.83,pp 219-231, USA,english,1986.
- [117] Virlogeux. Michel., Recent evolution of cable-stayed bridges, 24 Rue de la Division Leclere, Bonnelles 78830, France.

- [118] Virlogeux Michel et Ahmed M'RAD, étude d'une section de poutre en élasticité non linéaire, application au béton armé ou précontraint, et aux sections mixtes Annales de l'Institut Technique Bâtiment et des travaux publics.
- [119] Fouré B., Béton à haute résistance. Rapport interne OG, C.E.B.T.P., Nov. 1985
- [120] Rabczuk T, Zi G, Bordas S, Nguyen-Xuan H. A simple and robust three dimensional cracking-particle method without enrichment. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010,199(37–40): 2437–2455.
- [121] Rabczuk T, Belytschko T. Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(13): 2316–2343.
- [122] Rabczuk T, Belytschko T. A three dimensional large deformation meshfree method for arbitrary evolving cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(29-30): 2777–2799.
- [123] Rabczuk T, Belytschko T. Application of particle methods to static fracture of reinforced concrete structures. *International Journal of Fracture*, 2006, 137(1–4): 19–49.
- [124] Rabczuk T, Akkermann J, Eibl J. A numerical model for reinforced concrete structures. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(5–6): 1327–1354.
- [125] Izzuddin B A, Siyam A A F M, Smith D L. An efficient beam–column formulation for 3D reinforced concrete frames. *Computers & Structures*, 2002, 80(7–8): 659–676.
- [126] Rabczuk T, Zi G, Bordas S, Nguyen-Xuan H. A geometrically nonlinear three-dimensional cohesive crack method for reinforced concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, 75(16): 4740–4758.
- [127] Izzuddin B A. Conceptual issues in geometrically nonlinear analysis of 3D framed structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 191(8–10): 1029–1053.
- [128] Fang C, Izzuddin B A, Elghazouli A Y, Nethercot D A. Modeling of semi-rigid beam-to-column steel joints under extreme loading. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, 2013, 7(3): 245–263.
- [129] Bažant Z P, Bhat P D. Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1976,102: 701–722.
- [130] Bažant Z P, Bhat P D. Prediction of hysteresis of reinforced concrete members. *American Society of Civil Engineers*, 1977, 103: 153–167.
- [131] Bažant Z P. On endochronic inelasticity and incremental plasticity. *Structural Engineering Rep. No. 76- 12/259*. Northwestern University, Evanston, Illinois, 1976.
- [132] Bažant Z P. Endochronic inelasticity and incremental plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, 14(9): 691–714.
- [133] Bažant Z P, Oh B H. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 1983, 16(3): 155–177

- [134] Bažant Z P, Belytschko T, Chang T P. Continuum theory for strain softening. *Journal of Engineering Mechanics*, 1984, 111: 381–389.
- [135] Bažant Z P, Prat P. Microplane model for brittle plastic materials I: Theory, II: verification. *Journal of Engineering Mechanics*, 1988, 114(10): 1672–1702.
- [136] Park S H, Kim D J, Ryu G S, Koh K T. Tensile behavior of ultra high performance hybrid fiber reinforced concrete. *Cement and Concrete Composites*, 2012, 34(2): 172–184.
- [137] Mohamed N, Soliman A M, Nehdi M L. Full-scale pipes using drycast steel fibre-reinforced concrete. *Construction & Building Materials*, 2014, 72: 411–422.
- [138] Santarella, Luigui. Efforts secondaires dans les travées à treillis en béton armé. Persistenter Link : <http://dx.doi.org/10.5169/seals-3409>.
- [139] Colson André, Galea Yvan, Pilvin Philippe. Structures à barres et modélisation du comportement des assemblages. Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBHKongressberic. Persistenter Link: <http://dx.doi.org/10.5169/seals-12182>.
Band (Jahr): 12 (1984).
- [140] Wu Xua, Lin-Hai Hana,, Zhong Tao b. Flexural behaviour of curved concretefilled steel tubular trusses.
- [141] Josef Machacek, Martin Cudejko. Longitudinal shear in composite steel and concrete Trusses. *Engineering Structures* 31 (2009) 1313-1320.
- [142] Piero Colajanni, Lidia La Mendola, Alessia Monaco. Stiffness and strength of composite truss beam to R.C. column connection in MRFs.
- [143] Règles B.A.E.L. 91 modifiées 99, Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé, suivant la méthode des états limites. Edition EYROLLES 2000.
- [144] Blandford G. Progressive failure analysis of inelastic space truss structures. *Comput Struct* 1996;58(5):981_90.
- [145] ECCS, Recommendations for Angles in Lattice Transmission Tower, European Convention for Construction Steelwork, Brussels, Belgium, 1985.
- [146] Murtha-Smith E. Alternate path analysis of space trusses for progressive collapse. *J Struct Eng ASCE* 1988;114(9):1978-99.
- [147] Zhen – Hai G. and Xiu- Qin Z., Investigation of complete stress –deformation curves for Concrete in tension, *ACI Materiel Journal*, July – August, 1987.
- [148] Hill CD, Blandford GE, Wang ST. Post-buckling analysis of steel space trusses. *J Struct Eng ASCE* 1989;115(4):900_19.
- [149] British Standards Institution, BS5950, Part 1, Structural Use of Steelwork in Buildings, BSI, London, 1990.

- [150] Yang YB, Shieh MS. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. AIAA J 1990;28(12):2110_6.
- [151] L. Bathon, W. H. Mueller and L. Kempner, "Ultimate load capacity of single steel angles," J. Struct. Eng. ASCE 119(1), pp. 279-300, 1992.
- [152] De Freitas JAT, Ribeiro ACBS. Large displacement elastoplastic analysis of space trusses. Comput Struct 1992;44(5):1007_16.
- [153] Spillers WR (1990) Geometric stiffness matrix for space frames. Comp. Struct. 36: 29-37
- [154] ECCS, Recommendations for Angles in Lattice Transmission Tower, European Convention for Construction Steelwork, Brussels, Belgium, 1985.
- [155] Smith E. Space truss nonlinear analysis. J Struct Eng ASCE 1984;110(4): 688-705.
- [156] Manolis GD, Beskos DE (1983) Internal force distribution effect on framework stability. J. Struct. Eng., ASCE 109(1): 250-257.
- [157] Beskos DE (1977) Framework stability by finite element method. J. Struct. Division, ASCE103(11): 2273-2276
- [158] Paavola J, Salonen S (1992) Flexural-torsional stability of thinwalled columns. J. Eng. Mech., ASCE 118(12): 2384-2400.
- [159] Vacharajittiphan P, Trahair NS (1975) Direct stiffness analysis of lateral buckling. J. Struct. Mech. 3: 107-13.

ANNEXES

A. MANUEL D'ENTREES ET SORTIES DU PROGRAMME TRIDIMENSIONNEL

A.1 Données de programme tridimensionnel

Les unités employées sont le kilo Newton, le mètre.

Les données sont par lignes et plusieurs caractères, les valeurs sont séparées par un blanc ou une virgule

Les données sont ainsi lues :

1) Lecture d'un titre de fichier de donné

2) Lecture des données relatives à la structure

NBNOEU NEL NTYPE NPI NIMP ISEC (1 ligne) (voir le chapitre 2.8.4.1)

3) POIB(I), POIS(I) (voir le chapitre 2.8.4.1)

4) Introduction des coordonnées de chaque nœud I dans le repère absolu.

i=1,NBNOEU

K, (COORD (k,j),j=1,3)

K numéro d'un noeud

5) Lecture de la connectivité

k,(FCON(k,j),j=1,2)

6) Introduction des conditions d'appuis.

I=1,NIMP

NIMP nombre de type d'appuis

XNUM(I),(COMP(XNUM(I),j),j=1,6)

NIMP = numéro du nœud avec déplacement imposé

XNUM(I)= indice qui caractérise si une composante de déplacement est libre ou bien bloqué.

Direction suivant : X, Y, Z

(COMP(XNUM(I),j),j=1,6) $\left\{ \begin{array}{l} 1 - \text{appui bloqué} \\ 0 - \text{appui libre} \end{array} \right.$

7) Chargement :

NBCF,NBCV chargement fixe et le chargement variable. (voir le chapitre 2.8.4.1)

8) lecture des données relatives à la section dans le repère générique (dans la version 3D tout type de section est disponible, soit la section rectangulaire, en Te, en I..., avec différents nombres de types d'armatures principales)

NBTRA(I),NNS(I),TTYPE(I),NCABI(I) (1 ligne)

oordzi(I,J),oordzs(i,j)
Absyi1(I,J),Absyi2(i,j) (voir le chapitre 2.8.4.1)
absys1(I,J),absys2(i,j)

FFE(I),FFT(I),EEC(I),RRB(I),RRC(I)
EEPSRT(I),EEPSO(I),EPPSCU(I)
EES(I),EEPSU(I),SSR(I),KKS(I)

9) Coordonnées des aciers passifs par rapport au repère générique dans la section

(VVIY(I,IES),IES=1,NNS(i))
(VVIZ(I,IES),IES=1,NNS(i)) (voir le chapitre 2.8.4.1)
(AAS(I,IES),IES=1,NNS(i))

10) Introduction de la précontrainte

AAP(I),SSP(I),EEP(I),EEPSUP(I),SSPR(I),TTI(I),KKP(I)

11) Introduction des points de passage des câbles dans les sections et d'extrémité de l'élément

ZC1(IL,J),ZC2(IL,J)
YC1(IL,J),YC2(IL,J) (voir le chapitre 2.8.4.1)
XC1(IL,J),XC2(IL,J)

12) Introduction de l'angle que fait le câble avec l'axe des x

(ANGP(IL,J), J=1,NPI) (ANGP c'est Angle de l'élément, et NPI c'est le nombre
de câble)

PFI,PSI,Sigmo,ITP (voir le chapitre 2.8.4.1)

A.2 Résumé des entrées du programme tridimensionnel

Tableau A.1 Données du programme

	LECTURE DES DONNEES	REPETITION (lignes)
1	NBNOEU,NEL,NTYPE,NPI,NIMP,ISEC	1
2	POIB(I),POIS(I)	I=1,NEL
3	K,(COORD(k,j),j=1,3)	i=1,NBNOEU
4	k,(FCON(k,j),j=1,2)	i=1,NEL
5	XNUM(I),(COMP(XNUM(I),j),j=1,6)	I=1,NIMP
6	NBCF,NBCV	1
7	NUN(i),(FFIX(i,j),j=1,6)	i=1,NBCF
8	i=1,NBCV	i=1,NBCV
9	NON(i),(FVAR(i,j),j=1,6)	i=1,NBCV
10	DALP0,TOLP	1
11	NBTRA(I),NNS(I),TTYPE(I),NCABI(I)	I=1,NTYPE
12	oordzi(I,J),oordzs(i,j) Absyi1(I,J),Absyi2(i,j) absys1(I,J),absys2(i,j)	J=1,nbtra(i)
13	FFE(I),FFT(I),EEC(I),RRB(I),RRC(I)	1
14	EEPSRT(I),EEPSO(I),EEPSCU(I)	1
15	SSE(I),EES(I),EEPSU(I),SSR(I),KKS(I)	1
16	VVIY(I,IES),IES=1,NNS(i) (VVIZ(I,IES),IES=1,NNS(i)) (AAS(I,IES),IES=1,NNS(i))	
17	AAP(I),SSP(I),EEP(I),EEPSUP(I),SSPR(I),TTI(I),KKP(I)	1
18	(ANGP(IL,J), J=1,NPI)	
19	PFI,PSI,Sigmo,ITP	IL=1,NEL

A.4 Sorties du programme

1) rappel des données

- Description des éléments relative à la structure.
- Conditions d'appuis.
- Description du chargement.
- Valeurs de DALP0, TOLP.
- Description des types de section.
- Caractéristiques mécaniques du béton.
- Caractéristiques mécaniques et géométrique de l'acier passif.
- La précontrainte ; caractéristiques mécaniques et géométriques, position du câble et la tension de précontrainte mesurée à la mise en tension dans les sections.

2) Résultats

A la fin de calcul les résultats des données sont les suivants :

- Charges extérieures appliquées aux nœuds (repère absolu)

X - Charge selon X

Y - Charge selon Y

M - Moment dans le plan X-Y, X-Z, Y-Z

- Déplacement des nœuds (repère absolu)

U - Déplacement selon X

V - Déplacements selon Y

W - Déplacement selon Z

Rotation

B. présentation du calcul dans le cas simplifiée d'une structure 2D

Le programme de calcul 2D destiné à la modélisation des structures planes en béton armé et précontrainte, écrit en fortran 90, l'ensemble des données et résultats sont accessibles sous la forme d'un fichier texte.

1. Etude de l'équilibre dans une section en élasticité non linéaire à 2D

1.1 Hypothèses de calcul

Nous considérons une section droite de poutre en béton armé et en béton précontraint, on suppose la planéité des sections droites sont conservées, et que les aciers sont parfaitement solidaire au béton. L'effet de l'effort tranchant est négligeable, ainsi on considère la participation de béton tendu à la résistance.

La section transversale de forme quelconque est modélisée en tables trapézoïdales (Fig. B.1), de centre de gravité G_i à l'ordonnée Z_i par rapport au centre géométrique G ou sont calculées les sollicitations.

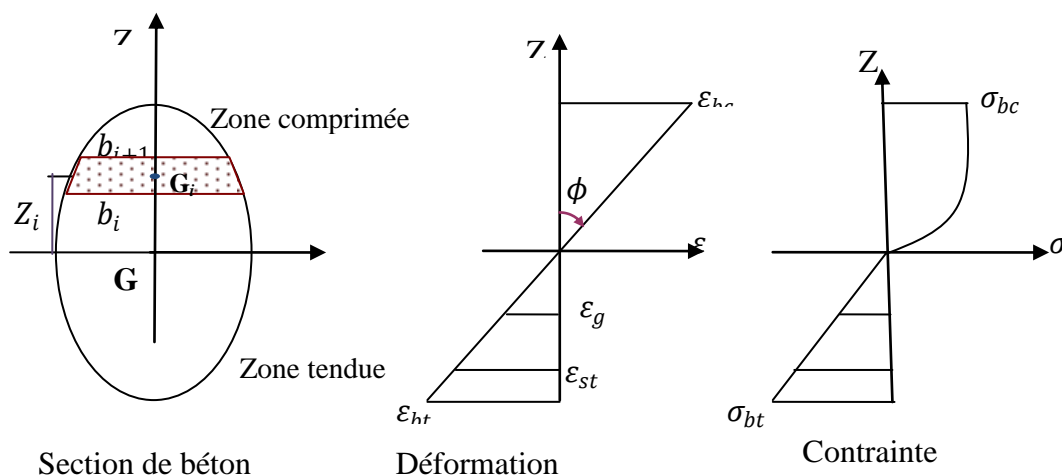


Fig. B.1 Diagramme contrainte-déformation

L'étude d'une section permet de trouver une relation entre les efforts internes (N , M) et déformations (ϵ_g , ϕ) dans une section, cette relation est non linéaire, mais peut être linéarisée à une étape donnée.

Sous sollicitations N, M_G la section subit un état de déformation plan, caractérisé par ϵ_g , Z_i . La déformation de la fibre i est :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_g + Z_i \cdot \delta\phi \quad (\text{B.1})$$

ε_g : Déformation (allongement unitaire) au centre de gravité de la section

$\delta\phi$: La rotation différentielle de la section

Z : l'ordonnée au point de calcul

1.2 Déformation de la section à l'équilibre

La section droite est supposée soumise :

Aux accroissements d'efforts sollicitant dus aux forces extérieures, ces sollicitations peuvent s'écrire sous la forme d'un vecteur $\{\Delta F_{sn}\}$ contenant les accroissements de sollicitations normales et d'un vecteur $\{\Delta F_{st}\}$ contenant les accroissements de sollicitations tangentes.

$$\{\Delta F_{sn}\} = (\Delta N, \Delta M)^T \quad (\text{B.2})$$

$$\{\Delta F_{st}\} = \Delta T \quad (\text{B.3})$$

A l'action de la précontrainte, lors de la mise en tension des câbles, qui peut s'écrire sous forme d'un vecteur $\{A_{sn}\}$ contenant les sollicitations normales et d'un vecteur $\{A_{st}\}$ contenant les sollicitations tangentes.

Compte tenu de la convention de signe adoptée au paragraphe (1.1), nous avons :

$$\{A_{sn}\} = - \sum_{i=1}^{N_{p2}} \sigma_{0i} \cdot \cos\alpha_i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z_{pi} \end{bmatrix} \cdot A_{pi} \quad (\text{B.4})$$

Et

$$\{A_{st}\} = - \sum_{i=1}^{N_{p2}} \sigma_{0i} \sin\alpha_i \cdot A_{pi} \quad (\text{B.5})$$

Avec :

σ_{0i} : Contrainte initiale dans le câble d'ordre i après pertes instantanées,

N_{p2} : Nombre de câbles de précontraintes, traversant la section, concernés par la mise en tension.

L'équilibre de la section droite se traduit par l'égalité des accroissements d'efforts sollicitant et les accroissements d'efforts internes.

$$\begin{bmatrix} \{\Delta F_{sn}\} \\ \{\Delta F_{st}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{A_{sn}\} \\ \{A_{st}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\Delta F_{mn}\} \\ \{\Delta F_{mt}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta F_{an} \\ \Delta F_{at} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta F_{pn} \\ \Delta F_{pt} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

En remplaçant les efforts internes par leurs expressions développées en référence [109], et les efforts externes par les relations (B.2), (B.3), (B.4), et (B.5), on arrive à la relation matricielle liant les accroissements d'efforts sollicitant et les accroissements de déformations dans une section droite en béton armé, béton précontraint.

Le vecteur $\{\Delta F_p\}$ contient l'action de la précontrainte, ainsi que tout le développement de calcul en détail est définie en référence [109]

$$\begin{bmatrix} \Delta F_{sn} \\ \Delta F_{st} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{sn} \\ A_{st} \end{bmatrix} = [K_s] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \delta_t \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$[K_s]$: représente la matrice de rigidité symétrique (3×3) de la section.

$$K_s = \begin{bmatrix} [K_{1m}] + [K_{1a}] + [K_{1p}] & [K_{12p}] \\ [K_{12p}]^T & [K_{2m}] + [K_{2p}] \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Les sous matrices $[K_{1m}]$, $[K_{1a}]$, $[K_{1p}]$, $[K_{12p}]$ et $[K_{2p}]$ sont respectivement définies en référence [109]

La matrice $[K_{12p}]$, permet de coupler les effets dus aux sollicitations normales et les effets dus aux sollicitations tangentes. Ce couplage est du à l'inclinaison des câbles de précontrainte par rapport la section droite.

Pour un accroissement donné d'efforts sollicitant, la résolution en déformation de l'équation (B.6), est itérative.

A l'équilibre de la section, l'accroissement de déformation $\{\Delta \delta\}$ est donné par :

$$\{\Delta \delta\} = [S_s] \cdot \{\Delta F_s\} + \{G_s\} \quad (\text{B.9})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \{\Delta \delta\} &= \begin{bmatrix} \{\Delta \delta_n\} \\ \{\Delta \delta_t\} \end{bmatrix} \\ \{\Delta F_s\} &= \begin{bmatrix} \{\Delta F_{sn}\} \\ \{\Delta F_{st}\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\{A_s\} = \begin{bmatrix} \{A_{sn}\} \\ \{A_{st}\} \end{bmatrix}$$

$$\{G_s\} = [S_s] \cdot \{A_s\} \quad [S_s] : \text{représente la matrice de souplesse de la section}$$

$$[S_s] = [K_s]^{-1} \quad (\text{B.11})$$

L'intégration d'un trapèze est fait par la méthode de Simpson, le calcul non linéaire est effectuer à chaque point d'intégration.

3 Modélisation des structures à deux dimensions :

3.1 Application du programme à 2D

Pour le comportement global de la structure, l'effet de l'effort tranchant est négligé dans le domaine non linéaire, le calcul se fait en tenant compte de la participation du béton tendu entre les fissures. Le type de la discrétisation est adopté en tronçons rectilignes de faible longueur supposés généralement chargés en leur extrémités et ces tronçons constituent les barres, joignant les nœuds principaux. Ce tronçon est représenté sous la forme d'un élément fini unidimensionnel et il est caractérisé par ces caractéristiques mécaniques, et il contient au moins trois sections pour pouvoir définir le comportement de la structure.

On peut calculer les déplacements par intégration des déformations, les relations sollicitations déformations sont calculées en une ou plusieurs sections le long de tronçon.

2. Principes équations d'équilibre

2.1 Elément de poutre plan

On considère un élément de poutre 2D décrit sur la figure B2

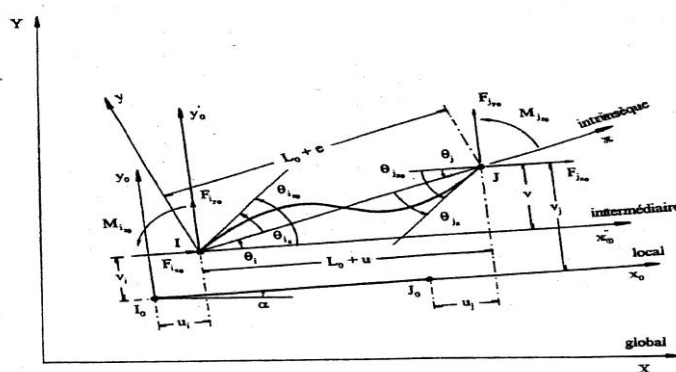


Figure B.2 Coordonnées naturelles planes

Dans le repère global XY , on positionne le repère local x_0y_0 de l'élément lié à la position initiale de cet élément. Sous l'effet de chargement, les nœuds I_0J_0 de l'élément sont déplacés respectivement en $I'J'$. Le premier axe dans le repère intrinsèque relie le nœud I au nœud J.

Dans le plan l'axe y se déduit directement de l'axe x , les inconnues nodales sont au nombre 6 : (u_i, v_i, θ_{i0}) pour le premier nœud d'origine, et (u_j, v_j, θ_{jz0}) pour le nœud d'extrémité.

Au passage de repère local au repère intrinsèque de l'élément on a : (u_i, v_i) et (u_j, v_j) sont respectivement les composantes du vecteur $\overrightarrow{I_0I}$ et $\overrightarrow{J_0J}$ respectivement dans le repère $x_0 y_0$ et que θ_{iz0} et θ_{jz0} sont les rotations de nœud I et J respectivement dans le même repère. Toute configuration est décrite par les seules inconnues qui créent une déformation. Ces inconnues sont les coordonnées convectées, ou coordonnées naturelles. Elles sont au nombre 3 pour une poutre plane :

e : allongement longitudinal de l'élément

θ_{iz}, θ_{jz} : rotations nodales.

Les rotations θ_{iz}, θ_{jz} sont les rotations qui permettent de passer du repère intrinsèque au repère tangent à la poutre déformée en I et J respectivement.

Les coordonnées convectées sont $S_n = (e, \theta_{iz}, \theta_{jz})$ et leurs expressions sont les suivantes

$$e = \sqrt{(L + u)^2 + v^2} - L \quad (\text{B.12})$$

$$\theta_{iz} = \theta_{iz0} - \text{Arctg} \frac{v}{L + u}$$

$$\theta_{jz} = \theta_{jz0} - \text{Arctg} \frac{v}{L + u}$$

2.2. Matrice de rigidité de l'élément dans le repère absolu

La relation liant les grandeurs dans le repère local est indépendante des efforts et déplacements. Elle ne dépend que de l'orientation initiale de la barre.

Un élément de la structure, de nœud origine i_0 et de nœud extrémité j_0 lié au repère local de référence (X_0, Y_0) , est représenté dans le repère absolu (X, Y) lié à la structure comme schématisé à la fig. B.3

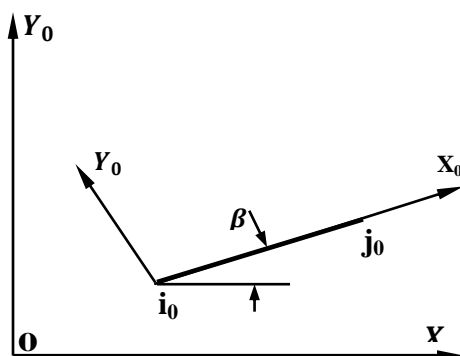


Fig. B.3 Repère absolu

$$\{F_x\} = (F_{ix}, F_{iz}, M_i, F_{jx}, F_{jz}, M_j)^T \quad (B.13)$$

$$\{S_x\} = (X_i, Z_i, \zeta_i, X_j, Z_j, \zeta_j)^T \quad (B.14)$$

$\{F_x\}$, $\{S_x\}$ matrices colonne (6× 1) contenant respectivement les efforts et les déplacements appliqués aux extrémités d'un élément dans le repère absolu (X, Y)

Les incréments d'efforts et de déplacement dans le repère absolu sont

$$\{\Delta F_x\} = (\Delta F_{ix}, \Delta F_{iz}, \Delta M_i, \Delta F_{jx}, \Delta F_{jz}, \Delta M_j)^T \quad (B.15)$$

$$\{\Delta S_x\} = (\Delta X_i, \Delta Z_i, \Delta \zeta_i, \Delta X_j, \Delta Z_j, \Delta \zeta_j)^T \quad (B.16)$$

Soit β l'angle de la direction initiale de l'élément avec l'axe ox.

La relation entre accroissement des efforts et des déplacements dans le repère absolu s'obtient au moyen de la matrice de rotation $[RT]$, fonction de l'inclinaison de la barre (β).

$$[RT] = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B.17)$$

La relation matricielle entre les déplacements de nœuds $\{S_L\}$ dans le repère local et les déplacements des nœuds $\{S_x\}$ dans le repère absolu s'écrit

$$\{S_L\} = [RT]. \{S_x\} \quad (B.18)$$

On peut écrire pour la transformation d'efforts, par analogie à l'équation

$$\{F_x\} = [RT]^T . \{F_L\} \quad (B.19)$$

La différenciation de l'équation, nous amène à :

$$\{\Delta F_x\} + \{A_x\} = [RT]^T . [K_L]. \{\Delta S_x\} \quad (B.20)$$

Où

$\{A_x\}$: Matrice colonne (6× 1),

$$\{A_x\} = [RT]^T . \{A_L\} \quad (B.21)$$

$\{A_L\}$: Matrice colonne (6× 1),

La différenciation de l'équation (B.18) nous amène à

$$\{\Delta S_L\} = [RT]. \{\Delta S_x\} \quad (B.22)$$

En substituant à l'équation (B.20), l'équation (B.19) on arrive à la relation matricielle liant les accroissements de déplacements aux extrémités d'un élément dans le repère absolu OXZ, lié à la structure :

$$\{\Delta F_x\} + \{A_x\} = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot \{\Delta S_x\} \quad (\text{B.23})$$

Avec

$[K_X]$: Matrice de rigidité (6×6) d'un élément dans le repère absolu OXY, et qui a pour expression

$$[K_X] = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot [RT] \quad (\text{B.24})$$