

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme

MASTER ACADEMIQUE EN AUTOMATIQUE
OPTION : COMMANDE DES SYSTEMES

Thème

Identification des Systèmes à Paramètres Distribués
Basé sur un Placement Optimal des Capteurs.

Proposé par : M. A.MAIDI

Présenté par : Melle. MAINCER Dihya
Melle. SERSOUR Lamia
M. SLIMANI Lounes

Dirigé par : M. A. MAIDI

Soutenu le : 01/ 07 /2013

Promotion 2013

Remerciements

Comme disait Marcel Proust : "Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers par qui nos âmes fleurissent".

Tout d'abord Nous remercions Dieu le tout puissant pour nous avoir donné le courage, la patience, la santé et la volonté d'élaborer ce travail.

Nous tenons à exprimer Nos vifs remerciements, et une profonde reconnaissance à notre promoteur Mr. MAIDI Ahmed, qui nous a aidé et orienté dans l'élaboration de ce travail.

Nous remercions les membres de jury, devant qui nous avons l'honneur d'exposer notre travail, et qui nous font l'honneur de le juger.

Nous tenons aussi à remercier tous les enseignants qui ont contribué à notre formation, ainsi qu'à l'équipe pédagogique de notre département ; qu'ils reçoivent l'expression de notre profonde gratitude.

Nous ne saurions oublier nos chères familles pour leur soutien moral et matériel, ainsi que tous ceux et celles qui nous ont apporté leur soutien et leur amitié tout le long de l'élaboration de ce travail.

Merci à tous.



DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

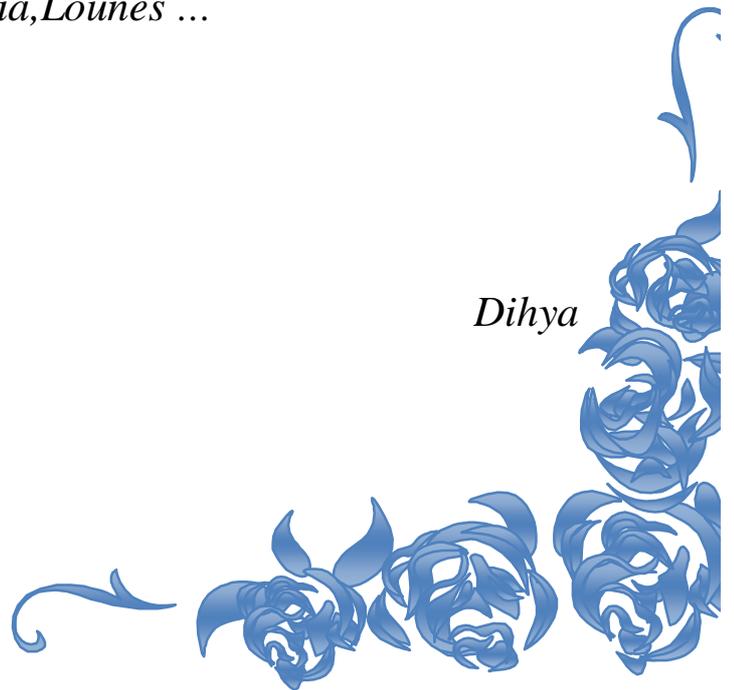
A mes très chers parents que je remercie beaucoup pour leur patience et sacrifice auxquels je ne pourrai rendre assez.

A mes très chères grandes mères paternelles et maternelles qui nous ont malheureusement quittés.

A mes très chers frères ,Sofiane ,Said et Aghiles ainsi qu'a mes sœurs Naima et Thiziri .

A tous mes amis(es) qui m'ont beaucoup aidé et soutenu sur tout Naima,koceila,Lamia,Lounes ...

Dihya





DEDICACES

*A ma très chère maman, qui ma toujours soutenue, et qui a toujours
était présente pour moi, pour son amour et sacrifices,*

A la mémoire de mon défunt père et ma chère Azizou,

A mes sœurs : Kahina et Nadia que j'adore,

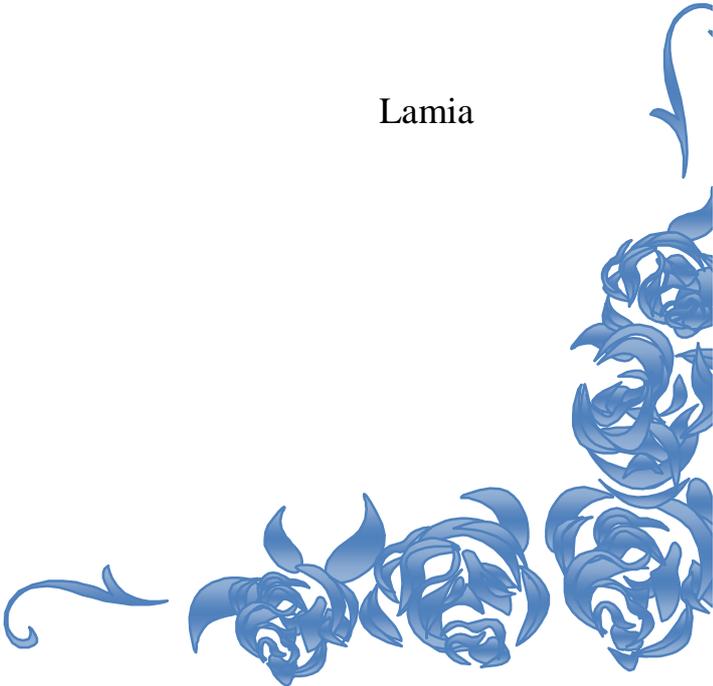
*A ma tante Ouardia que j'adore, et mon oncle Ali qui est
comme un père pour moi,*

A mes collègues de la promotion 2013.

*A tous ceux qui sont proches de mon cœur, que j'aime et
dont je n'ai pas cité le nom.*

Je vous dédie ce modeste travail.

Lamia





DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

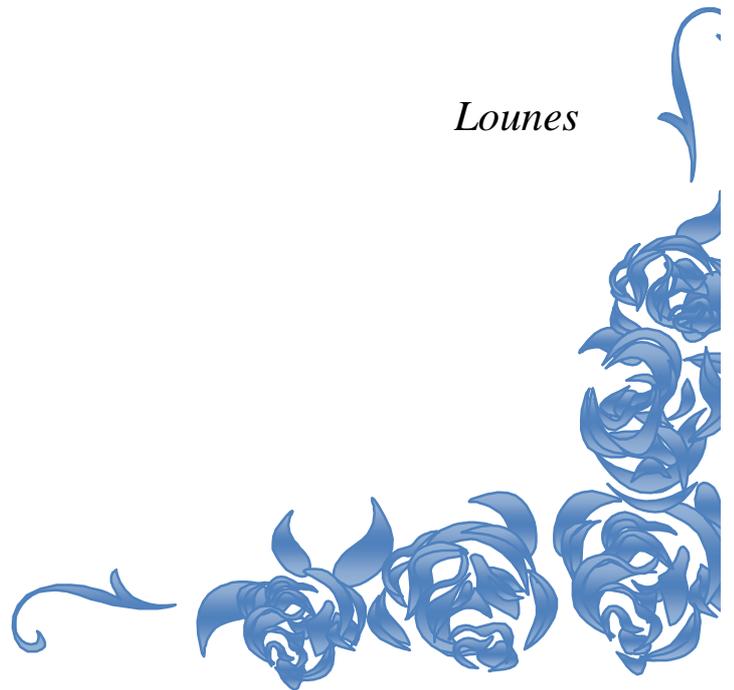
A mes très chers parents que je remercie beaucoup pour leur patience et sacrifice auxquels je ne pourrai rendre assez.

A mes très chères grandes mères paternelles et maternelles qui nous ont malheureusement quittés.

A mes très chers frères

A tous mes amis(es)

Lounes



SOMMAIRE

Introduction générale1

Chapitre I: Généralité sur les systèmes à paramètres distribués

I.1 Introduction.....	3
I.2 Définition des systèmes à paramètres distribués.....	3
I.3 Description mathématique des SPD.....	3
I.4 Classification des EDP.....	4
I.5 Commandes d'un système à paramètres distribués.....	5
I.5.1 La commande répartie.....	5
I.5.2 La commande par zone.....	6
I.5.3 La commande ponctuelle.....	6
I.5.4 La commande par balayage.....	6
I.5.5 La commande aux frontières(ou aux limites).....	6
I.6 Conditions aux limites.....	7
I.6.1 Condition de Dirichlet.....	7
I.6.2 Condition de Neumann.....	8
I.6.3 Condition mixte.....	9
I.7 Paramètres d'un système à paramètres distribués.....	9
I.7.1 Paramètres constants.....	9
I.7.2 Paramètres variant.....	9
I.8 Conclusion.....	10

Chapitre II Identification par la méthode du modèle.

II.1 Introduction.....	11
II.2 Identification des systèmes.....	11
II.2.1 Définition.....	11
II.3 Méthode du modèle.....	12
II.3.1 Méthodes numériques.....	14

II.3.1.1 Méthode du gradient.....	14
II.3.1.2 Méthode de Gauss-Newton.....	15
II.4 Choix de la méthode.....	15
II.5 Description mathématique des systèmes répartis.....	16
II.6 Identification des paramètres.....	19
II.7 Conclusion.....	20

Chapitre III Résolution des équations aux dérivées partielles.

III.1 Introduction.....	21
III.2 Définition d'une équation aux dérivées partielles (EDP).....	21
III.2.1 Exemples d'EDP.....	22
III.2.2 Equations aux dérivées partielles linéaires.....	23
III.2.3 Equations aux dérivées partielles non linéaires.....	23
III.3 La résolution des EDP par la méthode de séparation des variables.....	23
III.3.1 Application à des exemples.....	24
III.4 méthode d'itérations variationnelles VIM.....	34
III.4.1 Le principe de la méthode.....	35
III.4.2 Cas des équations aux dérivées partielles.....	38
III.5 Conclusion.....	41

Chapitre IV : Placement optimale des capteurs dans les systèmes à paramètres distribués

IV.1 Introduction.....	43
IV.2 La matrice d'information de Fisher.....	43

IV.3 Principales contraintes pour la résolution du Problème de l'emplacement des capteurs.....	47
IV.3.1 Dimension élevée du problème d'optimisation.....	47
IV.3.2 Coïncidence des emplacements des capteurs.....	48
IV.3.3 Dépendance des positions des capteurs des paramètres à identifier.....	51
IV.4 Application à l'identification des systèmes.....	53
IV.4.2 Formulation du problème d'identification.....	54
IV.4.1 Résolution analytique de l'EDP décrivant le modèle.....	55
IV.4.3 Formulation du problème d'optimisation et résolution.....	56
IV.5 Conclusion.....	57
Conclusion générale.....	58
Bibliographie	

t	:	Variables temps(s)
x	:	Variable espace(m).
$y(x, t)$:	Sortie du système.
M, H, L et B	:	Des opérateurs matriciels.
Ω	:	Domaine spatial admissible.
$\partial\Omega$:	Ensemble de frontière d'un système.
R	:	Ensemble des nombre réels.
$u_e(t)$:	Représente le signal d'entrée à la commande.
t_f	:	Domaine temporel(s).
$y_0(x)$:	Condition initial (°C).
$y_0(t)$ et $y_l(t)$:	Condition aux limite (°C).
$u(x, t)$:	La commande du système.
α, β et γ	:	Coefficients.
w	:	Valeur constante
u_b	:	Valeur de frontière.
u_0	:	Vecteur de condition initial.
u_t	:	Dérivée partielle par rapport au temps.
u_x	:	Dérivée partielle par rapport à l'espace.
SDP	:	Système à paramètres distribués.
EDO	:	Equation aux dérivées ordinaires.
EDP	:	Equation aux dérivées partielles.
FIM	:	Matrice d'information de Fisher
CI	:	Condition initial.
y_m	:	Sortie mesuré.
D	:	Distance.
y_0	:	Sortie objet.
\tilde{y}	:	Etat mesuré.
e	:	Ecart modèle procédé.
θ	:	Vecteur paramètres.
γ, d	:	Scalaire représentant le pas et La direction.
$\nabla D(\theta^m)$:	Le gradient.
$\nabla^2 D(\theta^m)$:	Le Hessien.

ε	:	Bruit gaussien.
x^j	:	Position des capteurs.
x^*	:	Point désiré de l'échangeur.
i, j	:	Indices généraux.
Ψ	:	Critère de performance.
$cov \theta$:	La covariance du paramètre estimé θ
M	:	La matrice de Fisher.
$\lambda(.)$:	La valeur propre maximale de son argument.
$z(t)$:	Le vecteur d'observation.

L'automatique a énormément évolué au cours de ces dernières décennies vers l'étude et la maîtrise de systèmes de plus en plus complexes. La complexité est liée à la dimension des systèmes étudiés qui représente le nombre de variables caractéristiques du système.

Les systèmes distribués sont multidimensionnels, ils sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles. La description mathématique des systèmes distribués fait apparaître des coefficients relatifs aux propriétés intrinsèques et/ou extrinsèques du système qui sont généralement à valeurs inconnues. Par conséquent, on a souvent recours à des méthodes d'identification paramétriques pour leur détermination.

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de l'emplacement optimal des capteurs dans les systèmes distribués pour une identification précise des paramètres du modèle. Pour ce type de problème, il existe pas mal de méthodes pour la détermination exacte des positions des capteurs. Parmi ces méthodes on retrouve *la matrice d'information de Fisher* qu'est la plus utilisée pour les systèmes à paramètres distribués.

L'exemple étudié concerne l'équation de chaleur, modélisant une barre métallique chauffée par une résistance. Comme le travail est théorique, les sorties mesurées sont obtenues par simulation après avoir fixé les paramètres du modèle. Ces mesures sont ensuite bruitées. Après avoir déterminé la position optimale du capteur, nous utilisons la méthode du modèle, pour identifier les valeurs des paramètres utilisées dans le modèle simulé.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres:

Dans le chapitre I, nous exposons quelques définitions et descriptions de la théorie des systèmes à paramètres distribués et leur description mathématique par des équations aux dérivées partielles. Ces dernières sont couplées avec des conditions aux limites et des conditions initiales pour avoir un problème bien posé. Puis, les différentes techniques de commandes utilisées dans cette classe de systèmes sont spécifiées.

Le chapitre II, présente l'identification des paramètres par la méthode du modèle, qui est basée sur la minimisation de l'erreur entre la sortie du système (mesures) et celle du modèle. Pour la minimisation de ce critère on utilise certaines méthodes de la programmation non linéaire exposées également dans ce chapitre.

Le chapitre III est réservé à certaines définitions relatives aux équations aux dérivées partielles et quelques méthodes de résolution de ces dernières.

Le chapitre IV, présente quelques exemples de systèmes à paramètres distribués pour lesquels on cherche les positions optimales des capteurs pour réaliser une identification précise en utilisant la *matrice de Fisher*. Pour montrer l'apport de cette approche, on présente un exemple d'identification des paramètres d'un modèle suivant la stratégie basée sur la matrice d'informations de Fisher.

Enfin, en termine notre travail par une conclusion générale sur le résultat réalisé.

I.1 Introduction

La modélisation des systèmes physiques est un des éléments essentiels pour l'étude de son comportement. Dans la théorie des systèmes, on trouve les systèmes à paramètres localisés qui sont de dimension finie avec des variables caractéristiques qui dépendent seulement du temps, leur description mathématique est décrite par des équations aux dérivées ordinaires, cependant dans la quasi-totalité des systèmes cela reste juste une approximation de la réalité physique des procédés, en plus de la variable temps il y a aussi la variable espace qu'il faut considérer pour la bonne modélisation de ces systèmes, ce qui conduit à des systèmes à paramètres distribués, qui modélisent souvent dans des processus thermiques tel que les échangeurs de chaleurs, les réacteurs chimiques. Ces systèmes sont de dimension infinie.

Dans ce chapitre, on donne les principales généralités sur les systèmes à paramètres distribués.

I.2 Définition des systèmes à paramètres distribués

Les systèmes dits à paramètres distribués ou à paramètres répartis (distributed parameter Systems, DPS) sont des systèmes d'évolution faisant apparaître des variables de temps et d'espace. Ils sont des fois augmentés d'entrées-sorties qui peuvent dépendre elles- aussi, des variables de temps et d'espace.

Les SPD sont décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP), qui sont couplées avec des conditions aux limites et des conditions initiales.

I.3 Description mathématique des SPD

Très nombreux problèmes issus des sciences physiques, mécaniques, chimiques (conductivité thermique, mécanisme de réaction-diffusion ...) sont décrits par des équations aux dérivés partielles (EDPs).

Une EDP fournit une relation entre les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables qui peut ou non dépendre du temps.

Dans le cas général [1] d'un système d'ordre 2, dont la solution $y(x, t)$ est fonction de deux variables indépendantes x et t , le modèle mathématique s'écrit comme suit :

$$a \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + [...] = 0 \quad (\text{I.1})$$

Où le terme entre crochets dépend de $y(x, t)$ et de ses dérivées premières.

I.4 Classification des EDP

L'équation (I.1) est dite :

- **Hyperbolique** si : $b^2 - 4ac > 0$.
Exemple : la propagation des ondes dans un milieu continu (unidimensionnel).
- **Elliptique** si : $b^2 - 4ac < 0$.
Exemple : l'équation de Laplace.
- **Parabolique** si : $b^2 - 4ac = 0$.
Exemple : équation de chaleur.

Dans le cas où les coefficients $a=b=c=0$, l'équation (I.1) dépend seulement des dérivés premières de x (équations hyperboliques du premier ordre).

Dans ce qui suit, on s'intéresse à une classe de système très répandue, pour laquelle $b=c=0$. L'équation (I.1) est dans ce cas soit parabolique ($a \neq 0$) soit hyperbolique ($a=0$).

Notons que cette classification peut se généraliser par:

$$\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 y}{\partial z_i \partial z_j} + \dots = 0 \quad (\text{I.2})$$

Si la matrice symétrique $A = (a_{ij})$ définie n valeurs propres de même signe (I.2) est elliptique.

Si au moins une valeur propre nulle (I.2) est parabolique.

Si les valeurs propres sont de signe opposé (I.2) est hyperbolique.

On considère la classe des systèmes [2] définie par l'équation d'état :

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = M[y(x,t)] + H(x)u(x,t). \quad (\text{I.3})$$

Sur un domaine spatial $\Omega \subset \mathbb{R}$ et un domaine temporel $T \subset \mathbb{R}$ tel que :

$$x \in \Omega \subset \mathbb{R} \text{ (cas monodimensionnel)} \quad (\text{I.4})$$

Et un domaine temporel :

$$t \in T \subset \mathbb{R} \quad (\text{I.5})$$

Avec les conditions initiales :

$$y(x, t_0) = y_0(x) \quad (\text{I.6})$$

Et les conditions aux limites établissant les relations entre l'état et la commande aux limites (s'elle existe) :

$$L(y(x', t)) = u_l(x', t), \quad x' \in \partial\Omega \quad (\text{I.7})$$

$\partial\Omega$ est la frontière de Ω .

M, H et L sont des opérateurs matriciels différentiels sur le vecteur d'état.

$u(x, t)$, $u_l(x', t)$ sont les entrées ou commandes du système.

I.5 Commandes d'un système à paramètres distribués

Les commandes vont être précisées par leur localisation géométrique et par la façon dont elles sont répartie géométriquement [4].

On distingue plusieurs catégories :

I.5.1 La commande répartie

Représentée sur $\Omega \times T$; dans de nombreux cas, $u(x, t)$ peut être décomposée comme suit :

$$u(x, t) = q(x)u_e(t) \quad (\text{I.8})$$

$q(x)$: représente la structure géométrique de l'ensemble des actionneurs.

$u_e(t)$: représente le signal d'entrée à la commande.

Cette formulation permet une simplification des calculs dans la transformation du modèle et la détermination de la loi de commande.

I.5.2 La commande par zone

Défini sur un sous ensemble Ω .

Si la commande est appliquée sur n zones, on a :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(x) u_{ie}(t). \quad (\text{I.9})$$

I.5.3 La commande ponctuelle

Le sous ensemble $\Omega \times T$, se réduit à un point.

C'est un cas particulier de la commande par zone.

La fonction $q_i(x)$ est remplacée dans l'équation précédente par un pic de Dirac.

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \delta(y - x_i) u_{ie}(t). \quad (\text{I.10})$$

I.5.4 La commande par balayage

Dans ce cas les zones ou les points d'actions sont mobiles dans le domaine Ω .

I.5.5 La commande aux frontières (ou aux limites)

Définie sur $\partial\Omega \times T$.

Ici la commande peut être par zone, fixe ou à balayage dans le cas où $\Omega \subset R^2$ ou R^3 .

I.6 Conditions aux limites

Considérons une barre métallique assimilée à un segment de droite de longueur l , ce qui permet de négliger la variation de la température dans les autres dimensions [3].

L'équation de la chaleur décrivant la variation de la température en un point $x \in]0, l[$ est :

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - b \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = u(x, t) \quad (\text{I.11})$$

Où ;

$y(x, t)$: est l'évolution de la température en un point $x \in]0, l[$.

$u(x, t)$: présente l'effet de l'ensemble des pertes ou sources de chaleur au point x .

b : caractérise la diffusion de chaleur (conductivité thermique) à l'intérieur du solide.

(b est ici supposé constant, autrement dit le matériau est supposé parfaitement homogène).

La résolution de cette équation différentielle requiert de bien poser ces problèmes en ajoutant des données supplémentaires par l'intermédiaire de contraintes qui sont :

Ø La condition initiale :

$$y(x, 0) = y_0(x). \quad (\text{I.12})$$

Ø Les conditions aux limites : sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée (pour $x = 0$ et $x = l$), pouvant être :

I.6.1 Condition de Dirichlet

Qui impose la valeur de la solution aux bornes du domaine spatial considéré.

Exemple

Les extrémités de la barre sont maintenues à des températures données $\theta_0(t)$, $\theta_l(t)$.

On aura (figure I.1) :

$$y(t, 0) = \theta_0(t) \quad (\text{I.13})$$

$$y(t, l) = \theta_l(t) \quad (\text{I.14})$$

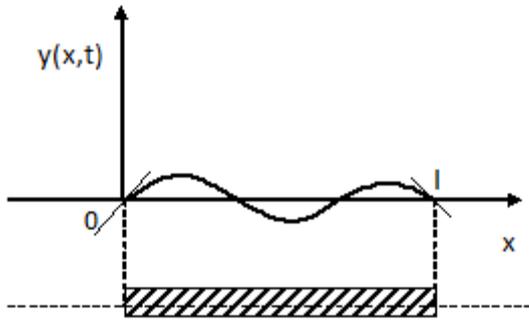


Figure (I.1) : condition de Dirichlet.

Dans le cas de la figure (I.1) :

$$y(t, 0) = y(t, l) = 0 \quad (\text{I.15})$$

I.6.2 Condition de Neumann

C'est pour la variation spatiale (dérivée) qu'on impose une valeur aux frontières.

Exemple

Si le flux de chaleur est donné au bord, c'est le gradient de la température qui est fixé et on aura les conditions aux limites suivantes (figure I.2) :

$$-\beta \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = g_0(t) \quad (\text{I.16})$$

$$\beta \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=l} = g_l(t) \quad (\text{I.17})$$

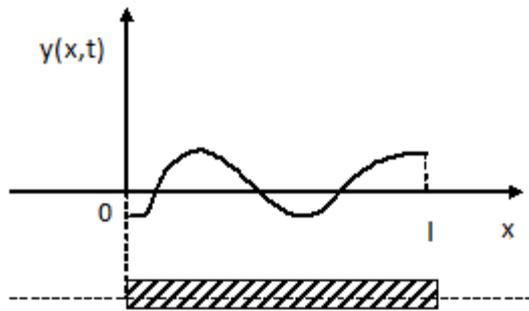


Figure (I.2) : condition de Neumann.

Dans le cas de la figure (I.2), on a

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \text{ en } x=0 \text{ et } l \quad (\text{I.18})$$

I.6.3 Condition mixte

Dans certains cas, on peut également être conduit à considérer des conditions aux bords différentes (Neumann et Dirichlet).

I.7 Paramètres d'un système à paramètres distribués

I.7.1 Paramètres constants

Exemple

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \square(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \theta)$$

(I.19)

$x \in \Omega, t \in T.$

Où t représente le temps, $T = (0, tf)$ la période, $y = y(x, t)$ la variable d'état avec des valeurs dans \mathbb{R} .

θ est le vecteur de paramètres inconnus.

F est une certaine fonction connue qui peut inclure l'explication de limites donnée a priori relatif aux entrées.

I.7.2 Paramètres variant

Quelques ou tous les composantes de q sont des fonctions elles-mêmes dépendent des paramètres inconnus.

Exemple

$$\frac{\partial y}{\partial x} = F(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \theta(x, t, y)) \quad (I.20)$$

I.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté la définition des systèmes à paramètres répartis et quelques exemples illustratifs. La modélisation mathématique de leur dynamique est régie par des équations aux dérivées partielles. La résolution de ces équations nous permet de déterminer l'expression des états du système qui représente une des étapes essentielles pour l'identification des paramètres inconnus qui apparaissent dans les EDP par la méthode du modèle.

Un autre point important lors de l'identification des paramètres est la position du capteur pour récupérer les mesures intéressantes pour l'identification précise des paramètres.

II.1 Introduction

Dans le cas des systèmes à paramètres répartis l'identification sert à estimer les coefficients (paramètres) inconnus du modèle mathématique décrivant la dynamique du système considéré.

L'estimation des paramètres est basée sur la prise de mesures, cela fait appel à un processus d'observation qu'est en général un ensemble de capteurs placés dans des positions bien déterminées, c'est ce qu'on verra en détail dans la suite du chapitre. Pour l'estimation des paramètres du système, nous allons utiliser une méthode d'identification très répandue qui est la méthode du modèle, basée sur la minimisation d'un critère, qui représente souvent l'erreur entre la sortie du modèle réel et celle prédite par le modèle choisi.

II.2 Identification des systèmes

II.2.1 Définition

Identifier un système consiste à choisir une classe spécifiée de modèles (caractérisant notre connaissance a priori sur le système) celui qui s'accorde le mieux avec les expériences réalisées [3].

L'identification est une opération qui consiste à déterminer les paramètres du modèle dynamique d'un système, à partir de mesures réalisées à l'entrée et à la sortie de ce système. C'est la connaissance du modèle qui permet de concevoir et de mettre en œuvre la commande du système.

Les modèles utilisés pour l'identification sont de deux types :

- ∅ Les modèles paramétriques : l'identification consiste à trouver les paramètres de fonction de transfert, d'équations différentielles, ou d'équations aux dérivées partielles qui caractérisent un système.
- ∅ Les modèles non paramétriques : par exemple les réponses fréquentielles (**bode**) ou temporelles (réponse impulsionnelle) permettent de caractériser par des courbes un système dynamique linéaire.

A partir du modèle utilisé, on dispose de plusieurs techniques d'identification : l'identification graphique, par corrélation temporelle ou fréquentielle, l'identification à partir de l'optimisation d'une distances temporelle ou fréquentielle.

Dans le cas d'un système soumis à des perturbations significatives, seul certaines techniques comme la méthode de l'erreur de prédiction permettent une identification correcte.

Dans la suite du travail, on s'intéresse à la méthode du modèle.

II.3 Méthode du modèle

La méthode du modèle est basée sur la comparaison des comportements du système et celui du modèle à identifier suite à une même excitation.

Du point de vue mathématique, l'identification d'un processus se traduit dans l'espace paramétrique par l'existence des surfaces iso-distances entourant le point nominal $O(p_0)$; [5] le but de l'identification est alors double :

- ∅ Déterminer la position du point réalisant le minimum du critère d'état.
- ∅ Analyser les iso-distances.

L'objectif de l'identification conduit à des algorithmes classiques d'optimisation paramétrique.

Schéma de la méthode :

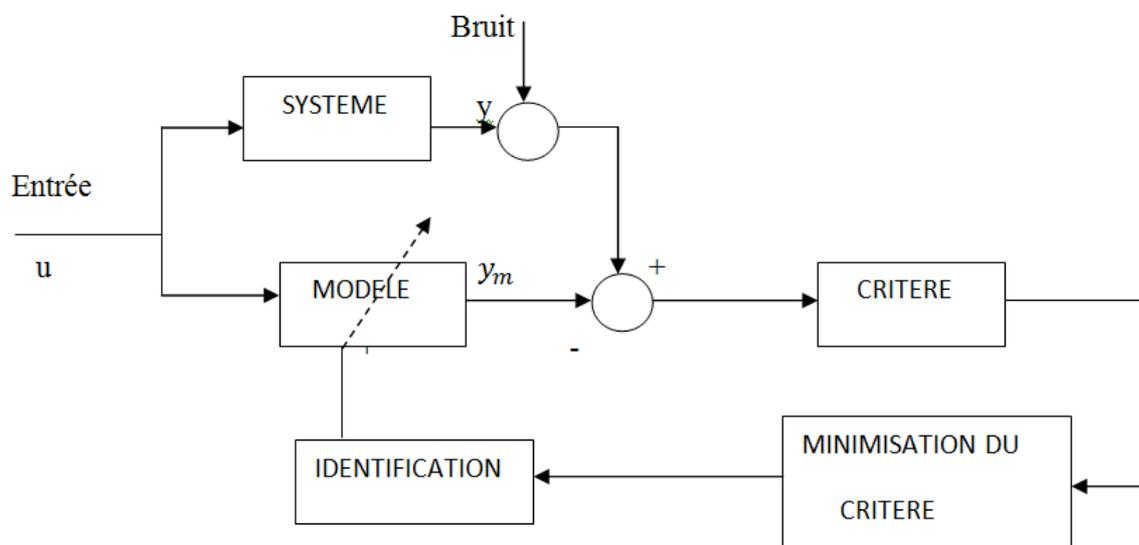


Figure 1: Principe de l'identification par la méthode du modèle.

Il faut noter que la distance est définie par

$$D = \sum_{n=1}^N \{y_o(n) - y_m(n)\}^2 \quad (\text{II.1})$$

Dans le cas d'un système représenté par un modèle de comportement discret, l'écart modèle procédé s'écrit sous la forme :

$$e(k) = y_o(k) - y_m(k) \quad (\text{II.2})$$

La méthode du modèle s'applique quel que soit la structure du modèle. En fait, la représentation importe peu, pourvu qu'elle soit paramétrable et que le modèle soit simulable.

La distance D dépend de paramètres structuraux, la minimisation de cette distance se ramène alors à un problème d'optimisation paramétrique classique d'une fonction à plusieurs variables. Pour résoudre ce problème d'optimisation, il existe de nombreux algorithmes itératifs qui relèvent des techniques de programmation non linéaire.

Le principe de ces algorithmes est de progresser pas à pas, dans l'espace paramétrique, à partir d'un point initial, le long de directions judicieusement choisies de façon à favoriser la convergence des paramètres vers le point recherché. Ces algorithmes ont la forme générale suivante :

$$\theta^{m+1} = \theta^m + \gamma^m d^m \quad (\text{II.3})$$

Où θ^m est le vecteur des paramètres après m itérations, d^m est la direction de recherche utilisée au cours de l'itération $m+1$ et γ^m un scalaire fixe ou calculer de façon à minimiser la fonction le long de la direction d^m , c'est-à-dire

$$D(\theta^m + \gamma^m d^m) \leq D(\theta^m + \gamma d^m) \quad \forall \gamma \quad (\text{II.4})$$

Les différents algorithmes se distinguent suivant la façon dont les directions d^m sont déterminées. On peut les classer comme suit :

- Méthodes numériques : les directions de recherche sont obtenues à partir des dérivées premières ou secondes de D .

- Méthodes géométriques (graphique) : les directions de recherche sont déterminées à partir des valeurs de D en un certain nombre de points, elles s'appuient sur les propriétés des diamètres conjugués des quadrants.
- Méthodes heuristiques ; ce sont des méthodes de type géométrique mixte (numérique-géométrique) qui explorent l'espace paramétrique par essais successifs la recherche s'orientant en fonction des résultats des étapes précédentes.
- Méthodes aléatoires (probabilité) : utilisation des probabilités pour progresser vers le point recherché. Coûteuses en temps de calcul.

II.3.1 Méthodes numériques

Ces méthodes nécessitent la connaissance des dérivées premières ou des dérivées secondes du critère à minimiser par rapport aux paramètres. Elles peuvent être classées en deux groupes :

- Les méthodes du premier ordre, telle que la méthode du gradient, qui utilise des informations du premier ordre sur le critère.
- Les méthodes du second ordre, telle que la méthode de Gauss-Newton, qui utilise des informations du second ordre sur le critère ; ces informations peuvent d'ailleurs être générées à partir des informations du premier ordre.

II.3.1.1 Méthode du gradient

Utilise des informations du premier ordre (dérivée première) sur le critère (la fonction distance) à minimiser dans l'espace paramétrique. Le principe repose sur la fonction de direction de la plus grande pente en un point donné qui est exactement opposée à celle du vecteur gradient

La variation des paramètres se fait alors par la relation itérative suivante :

$$\theta^{m+1} = \theta^m - \gamma \nabla D(\theta^m) \quad (\text{II.5})$$

La méthode du gradient est simple et facile à mettre en œuvre. Elle permet de diminuer rapidement la valeur du critère lorsque le point initial est situé loin du point recherché. Cependant, l'utilisation d'informations du premier ordre uniquement rend la convergence très lente au voisinage de ce point.

Le choix optimale de γ n'est pas aisé : trop petit la convergence est lente, trop grand il y a risque de divergence.

II.3.1.2 Méthode de Gauss-Newton

Cette méthode utilise des informations du second ordre (dérivée seconde ou hessienne) sur le critère :

$$\theta^{m+1} = \theta^m - \gamma (\nabla^2 D(\theta^m))^{-1} \nabla D(\theta^m) \quad (\text{II.6})$$

Cet algorithme nécessite le calcul de la matrice des dérivées secondes et de son inverse.

II.4 Choix de la méthode :

Ce choix inclut les phases suivant

- **phase d'initialisation**

L'estimation de la valeur initiale des paramètres peut être donnée par une connaissance à priori de la réalité physique. On peut également utiliser une méthode directe d'estimation telle que les moindres carrés.

- **phase de minimisation**

On cherche à minimiser l'iso-distance à partir du point initial.

- **Recherche au voisinage du minimum**

L'étape précédente permet d'aboutir à un point de l'espace paramétrique où la distance est relativement faible. Afin de favoriser la convergence de l'algorithme, on effectue une recherche au voisinage du minimum par le biais de la méthode Gauss-Newton.

II.5 Description mathématique des systèmes répartis

Ici on s'intéresse à l'aspect mathématique d'une classe particulière des systèmes à paramètres distribués.

Soit Ω un domaine borné muni d'une frontière $\partial\Omega$ d'un espace Euclidien de dimension d noté \mathbf{R} , pour $d=2$, le vecteur de coordonnées spatiales est $x(x_1, x_2)$ dans $\bar{\Omega}=\Omega$.

Les systèmes répartis ainsi obtenus sont décrits par des équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial y}{\partial t} = F(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \mathbf{q}) \quad x \in \Omega, t \in T \quad (\text{II.7})$$

Où t est la variable temps, $T=(0, t_f)$, $y=y(x, t)$ est la solution de l'équation aux dérivées partielles et f une fonction connue qui peut avoir des termes relatifs aux entrées. L'intervalle de temps le long duquel les mesures seront effectuées est de 0 à t_f .

L'équation (II.7) est accompagnée par des conditions aux limites de la forme générale.

$$y_L(x, t, \frac{dy}{dx_1}, \frac{dy}{dx_2}, \mathbf{q}) = 0 \quad x \in \partial\Omega, t \in T \quad (\text{II.8})$$

Et des conditions initiales

$$y(x, 0) = y_0(x), x \in \Omega \quad (\text{II.9})$$

Où y_L et y_0 sont des fonctions connues.

Nous supposons l'existence d'une solution unique pour l'équation (II.7) qu'est suffisamment régulière. Le model (II.7) contient des paramètres inconnus \mathbf{q} , notons aussi que \mathbf{q} pourrait apparaitre dans les conditions aux limites, nous supposons que \mathbf{q} appartient à l'espace de paramètres \mathbf{q} . Les formes possibles de \mathbf{q} sont

- **Paramètres constants**

$$\varphi_1 = \{ \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m) \in R \} \quad (\text{II.10})$$

- **Formes fonctionnelles**, quelques ou toutes les composantes de q sont des fonctions elles- mêmes dépendent des paramètres inconnus :

$$\varphi_2 = \theta(x, t, y) = g(x, t, y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \quad (\text{II.11})$$

- **Paramètres dépendant de l'espace x , et /ou du temps t , et/ou de l'état du système y**

$$\varphi_3 = \{\theta = (\theta_1(x, t, y), \dots, \theta_m(x, t, y))\} \quad (\text{II.12})$$

Le paramètre espace est de dimension infinie.

De point de vue pratique le cas 2 ne diffère pas du cas 1, et le cas 3 éventuellement doit être approximé à une dimension finie pour avoir des résultats numériques, alors dans notre projet on s'intéresse au cas 1.

L'objectif de l'estimation des paramètres est de choisir un θ optimal de φ pour que la solution y de (II.7) correspondant à θ optimal soit équivalente à l'état observé (mesuré) \tilde{y} .

De point de vue pratique, la mesure de la sortie ne pourra être réalisée qu'en quelques parties observables de l'état qui sont disponibles, et cela est dû au fait qu'il existe plusieurs manières dont les mesures sont effectuées :

1. le long du domaine spatial de manière continue dans le temps.
2. le long du domaine spatial dans des points discrets de l'intervalle du temps.
3. Dans des positions spatiales discrètes de manière continue dans le temps.
4. Dans des positions spatiales discrètes dans des points discrets du temps.

La méthode 1 et 2 sont un peu significatif car ce n'est pas possible de prendre des mesures tout au long du domaine spatial, cependant avec le développement des instruments de mesures, ces méthodes apparaissent clairement par exemple dans les microscopes à balayage, qui servent à visualiser des surface des solides, ce sont des applications qui nécessitent la prise de mesures sur tout le domaine de travail en continuité dans le temps.

La prise de mesures dans des points discrets de l'espace considéré est le plus courant dans les applications de l'ingénierie, par conséquent dans l'identification des paramètres, la méthode 3 impose le choix des positions spatiales et la méthode 4 implique le bon choix des positions spatiales aussi bien le choix de la synchronisation temporelle, la méthode la plus appropriée pour le bon déroulement du processus d'observation, c'est-à-dire de mesure, est bien méthode 3.

Maintenant, on suppose que les mesures sont décrites par l'équation de la forme

$$z(t) = y_m(t) + e_m(t) \quad (\text{II.13})$$

Où

$$y_m(t) = \begin{bmatrix} y(x^1, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y(x^n, t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

$$e_m(t) = \begin{bmatrix} e(x^1, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e(x^n, t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

$z(t)$ est le vecteur d'observation de dimension n , $x^j \in \Omega$ $j = 1, \dots, n$ dénote les positions des capteurs, et $e = e(x, t)$ représente le bruit blanc gaussien.

II.6 Identification des paramètres

En se basant sur les données $\{z(t)\}_{t \in T}$ qui ont été observées à partir du processus physique, On cherche à déterminer le vecteur q pour s'approcher des résultats issus des observations, cette identification est motivée par plusieurs facteurs qui sont en général les objectifs qu'on souhaite atteindre :

- 1) La détermination exacte des valeurs des paramètres qui pourrait avoir une signification physique telles que la chaleur spécifique et la conductivité thermique de certains matériaux.
- 2) Prédiction et prévision de la réponse.
- 3) La conception de la commande.

De point de vue mathématique, le problème est souvent traité par optimisation d'un critère d'erreur de sortie par l'approche des moindres carrés pour l'estimation des paramètres

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_0^T \|z(t) - y_m^\circ(t, \mathbf{q})\|_{\mathcal{Q}^{-1}(t)}^2 dt \quad (\text{II.16})$$

Où

$$\mathcal{Q}(t) = [q(x^i, x^j, t)]_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (\text{II.17})$$

est supposée positive définie,

$$\|a\|_{\mathcal{Q}^{-1}(t)}^2 = a^T \mathcal{Q}^{-1}(t) a, \forall a \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (\text{II.18})$$

$$y_m^\circ(t, \mathbf{q}) = \text{col} [y_m^\circ(x^1, t, \mathbf{q}), \dots, y_m^\circ(x^N, t, \mathbf{q})] \quad (\text{II.19})$$

Et $y_m^\circ(t, \mathbf{q})$ est la solution de l'équation pour un vecteur de paramètres \mathbf{q} donné.

Le critère peut être écrit sous forme matricielle suivante :

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_0^T \begin{bmatrix} z^1 - y(x^1, t, \mathbf{q}) & \dots & z^N - y(x^N, t, \mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11}^{-1} & \dots & \mathcal{Q}_{1N}^{-1} \\ \mathcal{Q}_{21}^{-1} & \dots & \mathcal{Q}_{2N}^{-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathcal{Q}_{N1}^{-1} & \dots & \mathcal{Q}_{NN}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 - y(x^1, t, \mathbf{q}) \\ \vdots \\ z^N - y(x^N, t, \mathbf{q}) \end{bmatrix} dt \quad (\text{II.20})$$

Evidemment pour bien interpréter ces résultats, il faut bien prendre en considération la procédure dont les mesures sont prises, dans notre cas nous avons opté pour la méthode 3

citée dans le paragraphe précédent, donc, on peut voir que les mesures sont prises à des instants $[t_1, \dots, t_n]$ bien déterminés.

Prendre des mesures pendant un certain intervalle de temps, infère la possibilité pour le critère à minimiser de prendre des valeurs diverses dépendamment de $[t_1, \dots, t_n]$. Dans ce cas le critère final sera le résultat d'une opération effectuée sur l'ensemble des critères, par exemple, on peut prendre la moyenne entre ces critères ou bien le plus convergent d'entre eux vers zéros.

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le principe de la méthode du modèle utilisée pour l'identification des modèles mathématiques des systèmes dynamiques. L'identification par la méthode du modèle est basée sur la minimisation du critère entre le système réel (mesures) et le modèle choisit en utilisant différentes méthodes d'optimisation. Le choix de la structure du modèle et la méthode d'optimisation constitue une étape très importante pour l'estimation des paramètres inconnus.

L'identification des paramètres impose un choix judicieux des positions des capteurs. Le choix de ces dernières passe nécessairement par la résolution des équations aux dérivées partielles. Le chapitre suivant est réservé à la résolution des équations aux dérivées partielles par la méthode de séparation de variables et la méthode d'itérations variationnelles.

III.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) régissent la dynamique des systèmes à paramètres repartis. Mais la raison d'être d'un modèle est son utilisation pour résoudre des problèmes posés en physique. La résolution de ces problèmes revient donc à résoudre les EDPs, malheureusement la plupart des EDPs ne possèdent pas de solutions exactes ou sont difficiles à résoudre. La nécessité de résoudre les problèmes physiques a conduit à l'élaboration de méthodes d'approximation pour la résolution des EDPs. Le principe de ces méthodes est de reformuler les EDP de manière à obtenir un autre problème le plus proche du problème initial que l'on sait résoudre.

Dans la suite de ce chapitre nous allons présenter les deux méthodes principales utilisées pour la résolution des EDPs qui sont la méthode de séparation des variables et la méthode d'itérations variationnelles (VIM).

III.2 Définition d'une équation aux dérivées partielles (EDP)

Une EDP fournit une relation entre les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables (qui peut ou non dépendre du temps).

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.

Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire (à une seule variable); les problèmes incluent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasi-totalité des problèmes.

Les EDP sont omniprésentes dans les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) ou des mathématiques financières (équation de

Black-Scholes). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP.

L'un des sept problèmes du prix du millénaire consiste à montrer l'existence et la continuité par rapport aux données initiales d'un système d'EDP appelé équations de Navier-Stokes. Ces équations servent énormément en mécanique des fluides.

III.2.1 Exemples d'EDP

Ø Equation de propagation (ou équation des ondes vibrantes)

Cette équation, appelée équation de propagation des ondes, décrit les phénomènes de propagation des ondes sonores et des ondes électromagnétiques (dont la lumière).

La fonction d'onde inconnue est notée $u(x, y, z, t)$, t représente le temps

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{III.1})$$

c : La célérité ou la vitesse de propagation de l'onde

Ø Equation de Fourier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{III.2})$$

Cette EDP est également appelée équation de chaleur. La fonction u représente la température. Le coefficient a est appelé diffusivité thermique.

Ø Equation de Langmuir

Soient $y(x, y, z, t)$, fonction d'onde $r(x, y, z, t)$ densité de charge.

$$\Delta y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{r}{e} \quad (\text{III.3})$$

Cette équation décrit des ondes électriques longitudinales en propagation dans un plasma

III.2.2 Equations aux dérivées partielles linéaires

On dit qu'une EDP est linéaire lorsque les relations entre ses dérivées partielles sont linéaires (soit on les additionne ou on les multiplie par un scalaire ou bien par une fonction indépendante de la solution cherchée).

III.2.3 Equations aux dérivées partielles non linéaires

Dans certains cas, on rencontre des EDP non linéaires, c'est-à-dire que la relation entre ses dérivées partielles est non linéaire. Par exemple elle fait intervenir le carré d'une dérivée ou un produit de deux fonctions qui dépendent de la solution.

Exemple

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{III.4})$$

III.3 Résolution des EDP par la méthode de séparation des variables

Le principe de la méthode de séparation des variables est, comme l'indique son nom, de supposer que l'inconnu y est le produit de deux fonctions dont chaque fonction dépend d'une seule variable. Par exemple dans le cas de deux variables x et t , la solution qui s'écrit :

$$y(x, t) = F(x)T(t) \quad (\text{III.5})$$

III.3.1 Exemples illustratifs

Pour illustrer le principe de la méthode de séparation de variables, on considère les exemples suivants :

Exemple III.1

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \theta \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{III.6})$$

$$t \in [0, t_f] \quad (\text{III.7})$$

$$x \in [0,1] \quad (\text{III.8})$$

Condition initiale

$$y(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (\text{III.9})$$

$$x \in [0,1] \quad (\text{III.10})$$

Conditions aux limites

$$y(0, t) = y(1, t) = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$t \in [0, t_f] \quad (\text{III.12})$$

L'équation (III.6) peut s'écrire sous la forme

$$y_t = \theta y_{xx} \quad (\text{III.13})$$

On pose

$$y(x, t) = F(x) T(t) \quad (\text{III.14})$$

On dérive l'équation (III.14) par rapport à t

$$y_t = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = F(x) T'(t) \quad (\text{III.15})$$

On dérive l'équation (III.14) par rapport à x

$$y_{xx} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = F''(x) T(t) \quad (\text{III.16})$$

On a

$$y_t = \theta y_{xx} \quad (\text{III.17})$$

alors

$$F(x)T'(t) = \theta F''(x) T(t) \quad (\text{III.18})$$

On divise par $\theta F(x) T(t)$

On obtient

$$\frac{F(x)T'(t)}{\theta F(x)T(t)} = \frac{\theta F''(x)T(t)}{\theta F(x)T(t)} \quad (\text{III.19})$$

Après simplification, on obtient

$$\frac{T'(t)}{\theta T(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\omega^2 \quad (\text{III.20})$$

Le problème revient à résoudre deux équations aux dérivées ordinaires du premier et deuxième ordre.

$$T'(t) = -\theta \omega^2 T(t) \quad (\text{III.21})$$

$$F''(x) = -\omega^2 F(x) \quad (\text{III.22})$$

Pour la première équation, on a

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\omega^2 \theta$$

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)} = - \int \omega^2 \theta dt$$

$$\ln T(t) = -\omega^2 \theta t + c_1$$

$$T(t) = c e^{-\omega^2 \theta t} \quad \text{avec } e^{c_1} = c$$

Pour la deuxième équation

$$F''(x) = -\omega^2 F(x)$$

Sa solution est de la forme

$$F(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x \quad (\text{III.23})$$

En imposant les conditions aux limites, on aura

$$y(0, t) = \theta F(0) T(t) = 0$$

$$F(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = 0$$

Avec $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$

D'où $A = 0$, alors

$$F(x) = B \sin(\omega x)$$

On a aussi

$$y(1, t) = \theta F(1) T(t) = 0$$

$$F(1) = B \sin(\omega) = 0$$

$$\circ \begin{cases} B = 0 & (1) \\ \sin(\omega) = 0 & (2) \end{cases}$$

La solution (1) est rejetée (*la solution générale* $y(x, t)=0$)

de (2): $\sin(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = n\pi$ avec $n=1, 2, 3, \dots$

On remplace w par sa valeur dans les expressions de $F(x)$ et $T(t)$, et on obtient

$$F(x) = B \sin(n\pi x) \quad (\text{III.24})$$

$$T(t) = c e^{-\theta n^2 \pi^2 t} \quad (\text{III.25})$$

Il reste à déterminer les constantes.

On a $y(x, t) = F(x)T(t)$

Donc $y_n(x, t) = F_n(x)T_n(t)$

Suite au développement des deux parties indépendamment l'une de l'autre, On arrive à la forme générale de la solution

$$y_n(x, t) = B_n c_n \sin(n\pi x) e^{-\theta n^2 \pi^2 t} \quad (\text{On suppose que } B_n c_n = M_n)$$

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1} y_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1} M_n \sin(n\pi x) e^{-\theta n^2 \pi^2 t} \end{aligned}$$

D'où

$$y_1 = M_1 \sin(\pi x) e^{-\theta \pi^2 t}$$

$$y_2 = M_2 \sin(2\pi x) e^{-4\theta \pi^2 t}$$

⋮

$$y_n = M_n \sin(n\pi x) e^{-\theta n^2 \pi^2 t}$$

On a $t=0$ (condition initiale)

$$y(x, 0) = \sin(\pi x)$$

$$y(x, 0) = \sum_{n=1} y_n(x, 0) = \sin(\pi x)$$

$$y_1(x, 0) + y_2(x, 0) + \dots + y_n(x, 0) = \sin(\pi x) + 0 + \dots + 0$$

$$M_1 \sin(\pi x) + M_2 \sin(2\pi x) + \dots + M_n \sin(n\pi x) = \sin(\pi x) + 0 + \dots + 0$$

Par identification, on trouve

$$M_1 = 1$$

$$M_2 = M_3 = \dots = M_n = 0$$

Alors la solution finale est

$$y(x, t) = \sin(\pi x) e^{(-\theta t \pi^2)} \quad (\text{III.26})$$

Exemple III.2

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \theta_1 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{III.27})$$

Condition initiale

$$y(x, 0) = \theta_2 \sin(x) \quad (\text{III.28})$$

$$x \in [0, \pi] \quad (\text{III.29})$$

Conditions aux limites

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0 \quad (\text{III.30})$$

$$t \in [0, 1] \quad (\text{III.31})$$

L'équation(III.2) peut être sous la forme

$$y_t = \theta_1 y_{xx} \quad (\text{III.32})$$

On pose

$$y(x, t) = \theta_1 F(x) T(t) \quad (\text{III.33})$$

D'où

$$y_t = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = F(x) T'(t) \quad (\text{III.34})$$

$$y_{xx} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = F''(x) T(t) \quad (\text{III.35})$$

On a $y_t = \theta_1 y_{xx}$, alors

$$F(x) T'(t) = \theta_1 F''(x) T(t)$$

On divise par

$$y(x, t) = \theta_1 F(x) T(t) \quad (\text{III.36})$$

On obtient

$$\frac{F(x) T'(t)}{\theta_1 F(x) T(t)} = \frac{\theta_1 F''(x) T(t)}{\theta_1 F(x) T(t)} \quad (\text{III.37})$$

Après simplification on obtient

$$\frac{T'(t)}{\theta_1 T(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\omega^2 \quad (\text{III.38})$$

On revient à résoudre deux équations aux dérivées ordinaires du premier et deuxième ordre :

$$T'(t) = -\theta_1 \omega^2 T(t) \quad (\text{III.39})$$

$$F''(x) = -\omega^2 F(x) \quad (\text{III.40})$$

Pour la première, on a

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\theta_1 \omega^2$$

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)} dt = \int -\theta_1 \omega^2 dt$$

$$\ln T(t) = -\theta_1 \omega^2 t + c_1$$

$$T(t) = e^{(-\theta_1 \omega^2 t + c_1)}$$

$$T(t) = ce^{(-\theta_1 \omega^2 t)}$$

Pour la deuxième équation

$$F''(x) = -\omega^2 F(x)$$

Sa solution est sous la forme

$$F(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) \quad (\text{III.41})$$

En imposant les conditions aux limites on aura

$$y(0, t) = \theta_1 F(0)T(t) = 0$$

$$T(t) \neq 0$$

$$F(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = 0$$

$$\text{D'où } A = 0 \quad (\text{Avec } \cos(0) = 1 \text{ et } \sin(0) = 0)$$

Alors $F(x) = B \sin(\omega x)$

On a aussi $y(\pi, t) = F(\pi) T(t) = 0$

$$F(\pi) = B \sin(\omega \pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 & (1) \\ \sin(\omega \pi) = 0 & (2) \end{cases}$$

La solution (1) est rejetée (la solution générale $y(x, t)=0$)

de (2): $\sin(\omega \pi)=0 \Rightarrow \omega \pi = n\pi \rightarrow \omega = n$, avec $n=1, 2, \dots$

$$F(x) = B \sin(n x)$$

$$T(t) = c_1 e^{-\theta_1 n^2 t}$$

On a $y(x, t) = \theta F(x)T(t)$

Donc $y_n(x, t) = \theta F_n(x)T_n(t)$

Et la forme générale de la solution est

$$y_n(x, t) = B_n c_n \sin(n x) e^{-\theta_1 n^2 t} \quad (\text{On suppose que } B_n c_n = M_n)$$

$$\begin{aligned} y_n(x, t) &= \sum_{n=1} y_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1} M_n \sin(n x) e^{-\theta_1 n^2 t} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} y_1 &= M_1 \sin(x) e^{-\theta_1 t} \\ y_2 &= M_2 \sin(2x) e^{-4\theta_1 t} \\ &\vdots \\ y_n &= M_n \sin(n x) e^{-\theta_1 n^2 t} \end{aligned}$$

A $t=0$

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= \theta_2 \sin(x) \\ y(x, 0) &= \sum_{n=1} y_n(x, 0) = \sum_{n=1} M_n \sin(n x) \end{aligned}$$

Donc

$$y_1 = M_1 \sin(\pi x) = \theta_2 \sin(x)$$

$$y_2 = M_2 \sin(2x) = 0$$

$$y_n = M_n \sin(nx)$$

Par identification

$$M_1 = \theta_2$$

$$M_2 = M_3 = \dots = M_n = 0$$

Alors la solution finale est

$$y(x, t) = \theta_2 \sin(x) e^{-\theta_1 t} \quad (\text{III.42})$$

Exemple III.3

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \theta \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{III.43})$$

$$x \in [0, \pi] \quad (\text{III.44})$$

$$t \in [0, t_f] \quad (\text{III.45})$$

Condition initiale

$$y(x, 0) = \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x), \quad x \in (0, \pi) \quad (\text{III.46})$$

Conditions aux limites

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0 \quad (\text{III.47})$$

$$t \in [0, t_f] \quad (\text{III.48})$$

L'équation (III.3) peut s'écrire sous la forme

$$y_t = \theta y_{xx} \quad (\text{III.49})$$

On pose

$$y(x, t) = F(x)T(t) \quad (\text{III.50})$$

$$\text{D'où } y_t = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \theta F(x)T'(t)$$

$$\text{et } y_{xx} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \theta F''(x)T(t)$$

On a $y_t = \theta y_{xx}$, alors

$$F(x)T'(t) = \theta F''(x)T(t)$$

On divise par $\theta y(x, t) = \theta F(x)T(t)$

On obtient

$$\frac{F(x)T'(t)}{\theta F(x)T(t)} = \frac{\theta F''(x)T(t)}{\theta F(x)T(t)}$$

Après simplification on obtient

$$\frac{T'(t)}{\theta T(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\omega^2$$

Le problème revient à résoudre deux équations aux dérivées ordinaires du premier et deuxième ordre :

$$T'(t) = -\theta \omega^2 T(t)$$

$$F''(x) = -\omega^2 F(x)$$

Pour la première équation, on a

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\omega^2 \theta$$

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)} = -\int \omega^2 \theta dt$$

$$\ln T(t) = -\omega^2 \theta t + c_1$$

$$T(t) = c e^{-\omega^2 \theta t}$$

Pour la deuxième équation

$$F''(x) = -\omega^2 F(x)$$

Sa solution est sous la forme

$$\square(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

En imposant les conditions aux limites, on aura

$$y(0, t) = \theta F(0) T(t) = 0$$

$$F(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = 0$$

Avec $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$

D'où $A = 0$, alors

$$F(x) = B \sin(\omega x)$$

On a aussi

$$y(\pi, t) = \theta F(\pi) T(t) = 0$$

$$F(\pi) = B \sin(\omega \pi) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 0 & (1) \\ \sin(\omega \pi) = 0 & (2) \end{cases}$$

La solution (1) est rejetée (*la solution générale* $y(x, t) = 0$)

de (2): $\sin(\omega \pi) = 0 \Rightarrow \omega = n$ avec $n = 1, 2, 3, \dots$

Ainsi on obtient les deux équations $F(x)$ et $T(t)$:

$$\square(x) = B \sin(n x)$$

$$T(t) = c e^{-n^2 \pi^2 \theta t}$$

Il reste à déterminer les constantes. Pour ce là, on procède comme suit :

On a $y(x, t) = \theta F(x) T(t)$

Donc $y_n(x, t) = \theta \square(x) T(t)$

On a la forme générale de la solution

$$y_n(x, t) = B_n c_n \sin(n x) e^{-\theta n^2 t} \quad (\text{on suppose que } B_n c_n = M_n)$$

Donc $y_n(x, t) = M_n \sin(n x) e^{-\theta n^2 t}$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t)$$

$$= \sum_{n=1} M_n \sin(nx) e^{-\theta n^2 t}$$

Alors

$$y_1 = M_1 \sin(x) e^{-\theta t}$$

$$y_2 = M_2 \sin(2x) e^{-4\theta t}$$

⋮

$$y_n = M_n \sin(nx) e^{-\theta n^2 t}$$

A $t=0$

$$y(x, 0) = \sum_{n=1} y_n(x, 0) = \sum_{n=1} M_n \sin(n\pi x)$$

Donc

$$y_1 = M_1 \sin(x) = \sin(x)$$

$$y_2 = M_2 \sin(2x) = 1/2 \sin(2x)$$

$$y_3 = M_3 \sin(3x) = 0$$

⋮

$$y_n = M_n \sin(nx) = 0$$

Par identification, on trouve

$$M_1 = 1,$$

$$M_2 = \frac{1}{2},$$

$$M_3 = \dots = M_n = 0$$

Alors la solution est

$$y(x, t) = e^{-\theta t} \sin(x) + 1/2 e^{-4\theta t} \sin(2x) \quad (\text{III.51})$$

III.4 Méthode d'itérations variationnelles VIM

La méthode de séparation de variables qu'on a vue précédemment est valable seulement pour des conditions aux limites homogènes. Par contre la deuxième méthode d'itérations variationnelles (variational iteration method, VIM) permet de surmonter cette limitation. On rappelle que la méthode VIM est valable non seulement pour les EDP mais aussi pour les EDO.

On va essayer de mettre en évidence le principe de cette méthode à travers des exemples illustratifs.

III.4.1 Le principe de la méthode

Considérons une équation aux dérivées partielles de la forme

$$Lu(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t) \quad (\text{III.52})$$

Où

L : Opérateur linéaire.

N : Opérateur non linéaire.

u : L'inconnu.

g : Terme homogène.

La fonctionnelle de correction est définie comme suit :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t I(t)(Lu_n(t) + N\delta_n(t) - g(t))dt \quad (\text{III.53})$$

$I(t)$: est le multiplicateur de Lagrange qui peut être déterminé avec la théorie des variations.

$\delta_n(t)$: est la variation restreinte qui signifie $\partial \delta_n(t) = 0$.

La première approximation est prise égale à la condition initiale.

$$u_0(t) = CI .$$

Les termes $u_n(t)$ déterminés itérativement

La solution est déterminée en calculant la limite suivante:

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) \quad (\text{III.54})$$

Exemple III.4

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) - u(t) = 0 \\ u(0) = A \end{cases} \quad (\text{III.55})$$

Ecrivons l'expression de la fonctionnelle de correction :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t I(t)(\ddot{u}_n(t) - u_n(t))dt \quad (\text{III.56})$$

En calculant la variation de l'équation (III.56)

$$du_{n+1}(t) = du_n(t) + d \int_0^t I(t)(\ddot{u}_n(t) - u_n(t))dt = 0 \quad (\text{III.57})$$

En procédant par intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned} &= du_n(t) + d \int_0^t I(t)d\ddot{u}_n(t)dt - \int_0^t I(t)du_n(t)dt = 0 \\ &= du_n(t) + I(t)d\dot{u}_n(t) - \int_0^t \dot{I}(t)d\dot{u}_n(t)dt - \int_0^t I(t)du_n(t)dt = 0 \\ &= du_n(t) + I(t)d\dot{u}_n(t) - \dot{I}(t)du_n(t) + \int_0^t \dot{I}(t)du_n(t) - \int_0^t I(t)du_n(t) = 0 \\ &\Rightarrow du_n(t) - \dot{I}(t)du_n(t) = 0 \end{aligned}$$

$$I(t)d\dot{u}_n(t) = 0$$

$$(\dot{I}(t) - I(t))\partial u_n(t) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{I}(t) - I(t) = 0 \\ 1 - \dot{I}(t) = 0 \dots (a) \\ I(t) = 0 \dots (b) \end{cases}$$

Ce système représente une équation différentielle ordinaire du premier ordre, sa solution est de la forme :

$$I(t) = Ee^{-t} + Be^t \quad (\text{III.58})$$

Pour l'identification de E et B , on dispose des conditions (a) et (b) :

$$u_{n+1}t = u_n(t) + \int_0^t sh(t-1)(\frac{d}{dt}u(t) - u(t))dt \quad (\text{III.59})$$

$$I(t) = 0 \Rightarrow Ee^{-t} + Be^t = 0 \rightarrow E = -Be^{2t}$$

$$I(t) = 1 \Rightarrow -Ee^{-t} + Be^t = 1$$

$$= Be^{2t}e^{-t} + Be^t = 1$$

$$B = \frac{1}{2}e^{-t} \Rightarrow E = -\frac{1}{2}e^t$$

$$I(t) = \frac{1}{2}e^{t-t} - \frac{1}{2}e^{-t+t}$$

$$I(t) = \sinh(t-t) \quad (\text{III.60})$$

Revenons à la fonctionnelle de correction

$$u_0(t) = A \quad (\text{III.61})$$

$$u_1 = A + \int_0^t sh(t-1)(0-A)dt$$

$$u_1 = A - A \int_0^t sh(t-1)dt$$

$$= A - A(ch(t-t))_0^t$$

$$u_1(t) = Ach(t) \quad (\text{III.62})$$

$$u_2(t) = u_1 + \int_0^t sh(t-t)\left(\frac{d^2 Ach(t)}{dt^2} - Ach(t)\right)dt$$

$$u_2(t) = u_1 + \int_0^t sh(t-t)(Ach(t) - Ach(t))dt$$

$$u_2(t) = u_1(t) \quad (\text{III.63})$$

Donc, la solution exacte du problème est

$$u(t) = Ach(t) \quad (\text{III.64})$$

Remarque

Si on néglige au moins un terme linéaire alors on trouve une valeur approchée pour

$I(t)$.

L'expression de la fonctionnelle de correction s'écrit comme suit

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t I(t) (u_n''(t) - \widetilde{u}_n(t))dt \quad (\text{III.65})$$

La variation de l'équation (III.65) est

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + I(t) \delta u_n'(t) - \int_0^t I(t) \delta u_n'(\tau) d\tau = 0$$

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + I(t) \delta u_n'(t) - I'(t) \delta u_n(t) + \int_0^t I''(\tau) \delta u_n(\tau) d\tau = 0$$

$$\delta 1 - I'(t) = 0$$

$$I(t) = 0$$

$$I''(\tau) = 0$$

La valeur de $I(\tau) = \tau - t$ est la valeur approchée

$$u_0(t) = A$$

$$u_1(t) = u_0 + \int_0^t (\tau - t)(0 - A) d\tau$$

$$u_1(t) = A - A \left(\frac{1}{2\tau^2} - t\tau \right) = A + At^2/2$$

$$u_2(t) = u_1 + \int_0^t (\tau - t)(u_1''(\tau) - u_1(\tau)) d\tau$$

$$u_2(t) = A + \frac{At^2}{2} + \int_0^t (\tau - t) \left(A - A - \frac{A\tau^2}{2} \right) d\tau$$

$$u_2(t) = A + \frac{At^2}{2} - A \int_0^t \left(\frac{\tau^3}{2} - \frac{t\tau^2}{2} \right)$$

$$u_2(t) = A + \frac{At^2}{2} + \frac{At^4}{24} = A + \frac{At^2}{2!} + \frac{At^4}{4!}$$

$$u_3(t) = A + \frac{At^2}{2} + \frac{At^4}{4!} + \frac{At^6}{6!}$$

$$u_n(t) = A + \frac{At^2}{2} + \frac{At^4}{4!} + \frac{At^6}{6!} + \dots + \frac{At^{2n}}{2n!}$$

$$u_n(t) = A \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \frac{At^6}{6!} + \dots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right)$$

Avec

$$\text{Ch}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

La solution finale est

$$u(t) = A \text{ch}(t) \tag{III.66}$$

III.4.2 Cas des équations aux dérivées partielles

Considérons une EDP non linéaire suivante

$$Lu(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t) \tag{III.67}$$

La procédure est similaire à celle des EDO sauf au niveau de formulation de la fonctionnelle de correction on doit choisir une direction d'itération soit dans la direction des x ou de t .

Suivant la direction de t , on a la fonctionnelle de correction :

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t I(t)(Lu_n(x,t) + N\phi_n(x,t) - g(x,t))dt \tag{III.68}$$

Suivant la direction de x :

$$u_{n+1}(x,t) = u(x,t) + \int_0^x I(t)(Lu_n(t,t) + N\phi_n(t,t) - g(t,t))dt \tag{III.69}$$

Exemple III.5

Considérons l'équation de chaleur suivant

$$\frac{dy(x,t)}{dt} - q \frac{d^2 y(x,t)}{dx^2} = 0 \tag{III.70}$$

$$y(x,0) = \sin(px) \tag{III.71}$$

Ecrivons la fonctionnelle de correction

$$y^{n+1}(x,t) = y^n(x,t) + \int_0^t I(t)(y_t^n(x,t) - q y_{xx}^n(x,t))dt \tag{III.72}$$

Le calcul de la variation

$$dy^{n+1}(x,t) = dy^n(x,t) + \int_0^t dl(t)y_t^n(x,t) - l(t)dq y_{xx}^n(x,t) dt = 0$$

$$= \underbrace{dy^n(x,t)}_{\text{Terme1}} + \underbrace{\int_0^t dl(t)y_t^n(x,t)}_{\text{Terme2}} - \int_0^t l(t)dq y_{xx}^n(x,t) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + I(t) = 0 \rightarrow I(t) = -1$$

$$l(t) = 0 \rightarrow I(t) = -1$$

On remplace $I(t)$ par sa valeur dans l'expression de la fonctionnelle

$$y^{n+1}(x,t) = y^n(x,t) - \int_0^t (y_t^n(x,t) - q y_{xx}^n(x,t)) dt \quad (\text{III.73})$$

On a

$$y^0(x,t) = y(x,0) = \sin(px)$$

$$y^1(x,t) = y^0(x,t) - \int_0^t (y_t^0(x,t) - q y_{xx}^0(x,t)) dt$$

$$y^1(x,t) = \sin(px) - \int_0^t (0 + qp^2 \sin(px)) dt$$

$$y^1(x,t) = \sin(px) - qp^2 \sin(pxt)$$

$$y^2(x,t) = y^1(x,t) - \int_0^t (-qp^2 \sin(px) - q(-p^2 \sin(px) + qp^4 \sin(pxt) + q^2 p^4 \sin(pxt)) dt$$

$$= y^1(x,t) + q^2 p^4 \sin(px \frac{t^2}{2})$$

$$y^2(x,t) = \sin(px) - qp^2 \sin(pxt) + q^2 p^4 \sin(px \frac{t^2}{2})$$

$$y^3(x,t) = y^2(x,t) - \int_0^t (y_t^2(x,t) - q y_{xx}^2(x,t)) dt$$

$$y^3(x,t) = y^2(x,t) - \int_0^t (-qp^2 \sin(px) + q^2 p^4 t \sin(pxt)) - q(-p^2 \sin(px) + qp^4 \sin(p) - q^2 p^6 \frac{t^2}{2} \sin(pxt)) dt$$

$$y^3(x,t) = \sin(px)(1 - qp^2 t + q^2 p^4 \frac{t^2}{2!} - q^3 p^6 \frac{t^3}{3!})$$

$$y^n(x,t) = \sin(px)(1 - qp^2 t + q^2 p^4 \frac{t^2}{2!} - q^3 p^6 \frac{t^3}{3!} + \mathbf{K} + (-1)^n q^n p^{2n} \frac{t^n}{n!}) \quad (\text{III.74})$$

On remarque que le terme entre parenthèse n'est que le développement en série de Taylor de la fonction exponentielle, donc :

$$y^n(x,t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y^n(x,t) = \sin(px)(e^{-qp^2 t}) \quad (\text{III.75})$$

III.5 Conclusion

Les EDPs jouent un rôle important dans la modélisation des systèmes distribués, quelques méthodes de résolution présentent une certaine particularité par rapport aux EDO qu'est la nécessité aux conditions aux limites, qui sont en général obtenus de l'espace de travail considéré par exemple la dimension d'une barre métallique le long de laquelle se propage une énergie thermique.

Ce chapitre a été consacré à la résolution des équations aux dérivées partielles. Deux méthodes ont été présentées. La première est la méthode de séparation de variables dont l'utilisation est limitée aux équations homogènes. Par contre la méthode des itérations variationnelles permet de résoudre les équations aux dérivées partielles quelque soit leur nature. Les deux méthodes sont illustrées par des exemples d'application.

Dans le chapitre suivant, on utilisera ces méthodes pour la détermination de la position optimale des capteurs pour une identification des paramètres d'un système à paramètres distribués.

IV.1 Introduction

Pour les systèmes à paramètres distribués, le vecteur de paramètres estimé \mathbf{q} résultant de la minimisation du critère dépend des positions du capteur. En plus de la qualité des mesures utilisées pour l'identification, les positions des capteurs influent considérablement sur la qualité de l'identification. Par conséquent, la mise en place d'une stratégie pour le choix des positions du capteur qui mènent vers de meilleures estimations des paramètres du système est une étape importante.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la détermination des meilleures positions des capteurs en utilisant la Matrice d'Information de Fisher pour la théorie de placement des capteurs.

IV.2 Matrice d'information de Fisher

La stratégie du choix de placement de capteur repose sur la comparaison entre les différentes positions où le capteur puisse y être placé, pour cela une mesure quantitative de la convenance des positions est requise, nous pouvons aussi reformuler cette problématique sous une forme consistant à la minimisation du nombre de capteurs à placer pour la prise de mesure (une étape substantielle pour l'identification des paramètres), ce qui réduit la complexité du système ainsi que pour le coût des opérations. Une telle mesure est souvent basée sur la matrice d'information de Fisher qu'est couramment utilisée dans la théorie des systèmes distribués. Quand l'horizon du temps est long, la non linéarité du modèle par rapport aux paramètres est douce et les erreurs de mesures sont indépendamment distribuées et ont des amplitudes minimales, la matrice inverse de Fisher est une approximation de la covariance du paramètre estimé \mathbf{q} [6].

$$\text{cov } \mathbf{q} \geq \mathbf{M}^{-1} \quad (IV.1)$$

On note par \mathbf{M} la matrice de Fisher, qui requiert une condition supplémentaire que l'estimateur \mathbf{q} soit non biaisé.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mathbf{s}^2} \sum_{j=1}^N \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial y(x^j, t)}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \left(\frac{\partial y(x^j, t)}{\partial \mathbf{q}} \right) dt \quad (IV.2)$$

Les éléments de M dépendent du nombre de capteurs aussi que des paramètres à identifier, la matrice de Fisher est une approche mathématique visant à placer les capteurs dans des endroits qui nous renseigne au mieux sur l'état du système.

Maintenant, on va essayer d'explicitier la forme de M

En prenant

$$N = 2$$

Et q_1, q_2 sont les paramètres à identifier, la matrice de Fisher est donnée comme suit

$$M = \frac{1}{s^2} \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{\partial y(x^1, t)}{\partial q_1} & \frac{\partial y(x^1, t)}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y(x^1, t)}{\partial q_1} & \frac{\partial y(x^1, t)}{\partial q_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y(x^1, t)}{\partial q_1} \\ \frac{\partial y(x^1, t)}{\partial q_2} \end{bmatrix} dt + \frac{1}{s^2} \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{\partial y(x^2, t)}{\partial q_1} & \frac{\partial y(x^2, t)}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y(x^2, t)}{\partial q_1} & \frac{\partial y(x^2, t)}{\partial q_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y(x^2, t)}{\partial q_1} \\ \frac{\partial y(x^2, t)}{\partial q_2} \end{bmatrix} dt \quad (IV.3)$$

La matrice de Fisher est la plus courante dans la théorie de placement de capteurs pour l'identification des systèmes à paramètres distribués ce qui justifie son utilisation dans ce travail.

Comme il apparait clairement dans la formule, les éléments de M dépendent des positions correspondantes du capteur. Dans le cas de N capteurs, on regroupe les positions dans le vecteur suivant

$$s = (x^1, \dots, x^N) \in \mathfrak{R}^{2N} \quad (IV.4)$$

et écrire :

$$M = M(s) \quad (IV.5)$$

L'emplacement optimal du capteur pour le système à identifier, peut être obtenu en choisissant des composantes de s en minimisant une certaine mesure scalaire (critère de performance) Ψ issue de la *FIM*. Plusieurs choix existent pour une telle fonction :

- La D- optimalité

$$\Psi(M) = -\log(\det M) \quad (IV.6)$$

- La E-optimalité (on note par $I(\cdot)$ la valeur propre maximale de son argument)

$$\Psi(M) = I_{\max}(M^{-1}) \quad (\text{IV.7})$$

- La A-optimalité (trace de la matrice)

$$\Psi(M) = \text{trace}(M^{-1}) \quad (\text{IV.8})$$

- Le critère de sensibilité

$$\Psi(M) = -\text{trace}(M) \quad (\text{IV.9})$$

Chaque méthode présente des avantages et des inconvénients. Dans ce qui suit on va utiliser la D-optimalité vu qu'elle est invariante par rapport aux variations des paramètres et les transformations linéaires de la sortie, alors que les A-optimalité et E-optimalité sont affectées par ces transformations. Le critère de sensibilité est souvent utilisé pour sa simplicité d'usage, cependant parfois il pose de sérieux obstacles quand il coïncide avec une FIM singulière. En conclusion, l'introduction du critère d'optimalité rend le problème de placement de capteurs un problème d'optimisation.

Les critères qu'on vient de citer sont les plus utilisées dans la théorie des systèmes.

Exemple IV.1

Considérons une barre métallique fine dont la surface latérale est insensible à la chaleur (surface isolée). Pour des raisons de modélisation, on suppose que le domaine spatial coïncide avec l'axe x allant de $x = 0$ à $x = 1$, on rappelle que la barre est faite d'un matériau uniforme, et elle a une section uniforme. On suppose bien que la température initiale de la barre est de $\sin(px)$. La distribution de la température $y = y(x, t)$ en l'absence d'une source de chaleur est donnée par la solution de l'équation de chaleur monodimensionnelle suivante

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t), x \in (0, 1), t \in (0, tf) \quad (\text{IV.10})$$

Sujet à la condition initiale

$$y(x, 0) = \sin(px), x \in (0, 1) \quad (\text{IV.11})$$

Où q représente la diffusivité du matériau de la barre. La température à l'intérieur de la barre va être aussi affectée par l'échange thermique de ses extrémités avec le milieu extérieur. Supposons maintenant que les extrémités à $t = 0$ et soudainement on les met en contact avec un morceau de glace à 0° , et ainsi la température est maintenue constante pour toutes les valeurs de t . Cela correspond aux conditions aux limites

$$y(0,t) = y(1,t) = 0, t \in [0, t_f] \quad (\text{IV.12})$$

Le modèle est défini pour un coefficient diffusivité q dont on ignore la valeur exacte. On suppose que la température $y(x,t)$ peut être mesurée continument par un seul thermocouple et les mesures sont décrites par

$$z(t) = y(x^1, t) + e(t) \quad (\text{IV.13})$$

Où e représente un bruit gaussien blanc avec une variance σ^2 , et x^1 signifie l'endroit de prise de la mesure. C'est souhaitable de sélectionner un endroit optimal du capteur x^1 afin d'avoir de meilleurs estimations du paramètre q . Cette étape est la première à effectuer avant l'expérimentation et l'étape d'identification.

Afin de poser notre problème, rappelons que la solution du modèle obtenue par les deux méthodes présentées au chapitre précédent est ;

Puisque il y a seulement un seul paramètre à identifier la matrice d'informations de Fisher est donnée comme suit :

$$M(x^1) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial y(x^1, t)}{\partial q} \right)^2 dt = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{t_f} \left\{ -p^2 \exp(-qp^2 t) \sin(px) \right\}^2 dt \quad (\text{IV.15})$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} p^4 \int_0^{t_f} t^2 \exp(-2qp^2 t) dt \sin^2(px)$$

1 4 4 4 4 2 4 4 4 4 3
constante positive

On remarque que le terme $\frac{1}{\sigma^2} \pi^2 \int_0^{t_f} t^2 \exp(-2\theta\pi^2 t)$ est indépendant de x , est une constante positive, pour atteindre le maximum de M , on utilise une méthode d'optimisation qui est la méthode analytique du premier ordre

L'évaluation de la dérivée donne

$$\nabla(\sin(\pi x)^2) = 0 \quad (\text{IV.16})$$

$$\Rightarrow 2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) = 0 \quad (\text{IV.17})$$

On a

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(\pi x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi x = 0 \\ \text{ou} \\ \pi x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

$$(\text{IV.19})$$

Par conséquent on atteint le maximum à $x^1 = \frac{1}{2}$.

D'après le calcul effectué sur le critère d'optimalité, au point $x^1 = 1/2$ le critère est à sa valeur minimale donc c'est en ce point (le centre de la barre) qu'il faut placer le capteur.

Beaucoup d'études expérimentales ont montré l'efficacité de la matrice de Fisher dans la théorie de placement de capteurs, preuve de la convergence rapide du critère d'identification dans l'estimation des paramètres du modèle.

IV.3 Principales contraintes pour la résolution du Problème de l'emplacement des capteurs

Le problème de l'emplacement de capteurs ne s'arrête pas à ce niveau, c'est-à-dire qu'on ne pourra pas toujours résoudre le problème de placement de capteurs aussi aisément que dans l'exemple précédent et cela est du à ce qui suit

IV.3.1 Dimension élevée du problème d'optimisation

En pratique, le nombre de capteurs à placer dans une région donnée peut être assez important. Par exemple, les recherches menées pour les prédictions de l'ozone sur les grands lacs des états unis, les mesures sont faites par 160 stations (Nychka et Saltzman). En traitant l'opération d'un problème de programmation non linéaire, le nombre réel de variables a doublé, puisque la position de chaque capteur est déterminée par deux coordonnées spatiales. En ce cas l'extremum global désiré est souvent confondu parmi beaucoup d'autres ou sa localisation est difficile à réaliser.

Par conséquent, trouver directement la solution numérique pourrait être très difficile.

IV.3.2 Coïncidence des emplacements des capteurs

L'un des sérieux problèmes, qui complique la sélection des points de mesures, c'est quand les capteurs se coïncident en un seul point conséquence de supposition que le bruit des mesures est spatialement non corrélé. Cela veut dire que dans la solution optimale, différents capteurs ont tendance de prendre des mesures en un point commun, ce qu'est inacceptable du point de vue technique.

Ce phénomène est illustré par l'exemple suivant

Exemple IV.2

Considérons l'équation de chaleur mono dimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = q_1 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, x \in [0, \Pi], t \in [0, 1] \quad (\text{IV.20})$$

Sujet à :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0,t) = y(\Pi,t) = 0, t \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (\text{IV.21})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x,0) = q_2 \sin(x), x \in [0, \Pi] \end{array} \right. \quad (\text{IV.22})$$

On suppose que les coefficients constants q_1 et q_2 sont inconnus et à estimer en se basant sur les données collectées par les deux capteurs stationnaires. Essayons de déterminer les positions des capteurs x^1 et x^2 en maximisant le déterminant de la FIM.

La solution est de l'équation aux dérivées partielles avec les conditions aux limites et stationnaires est de la forme :

$$y(x,t) = q_2 \exp(-q_1 t) \sin(x) \quad (\text{IV.23})$$

Il n'y aura pas de perte de précision en supposant $S = 1$ tant que cette valeur n'influence pas sur les positions des capteurs. D'où le résultat

$\det(M(x^1, x^2))$

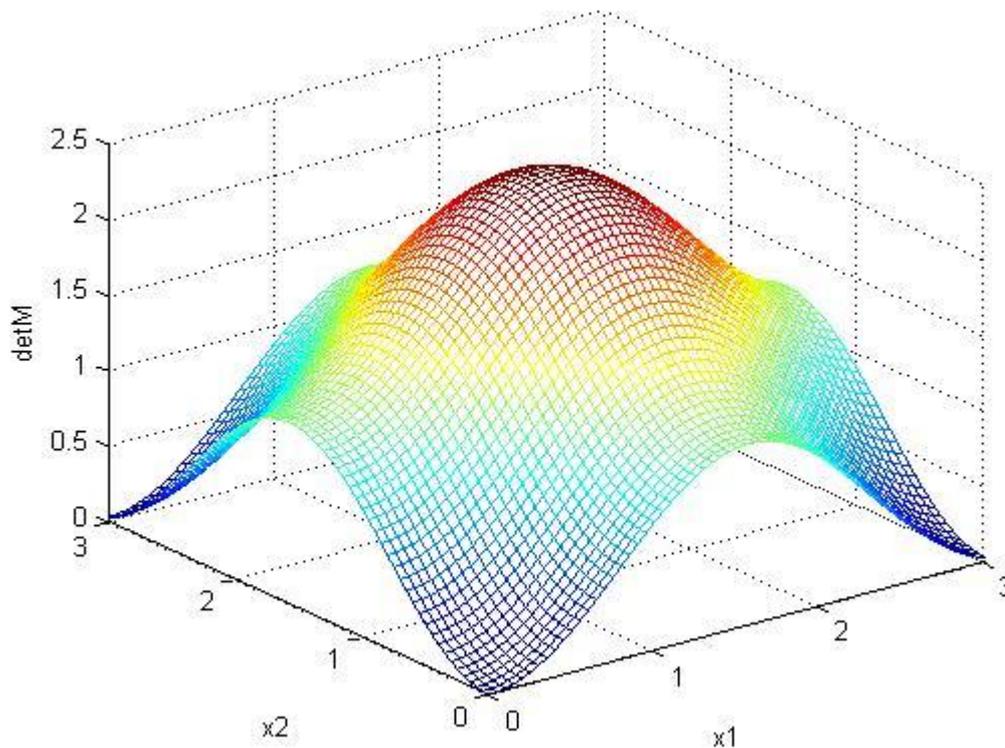
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4}(-2\theta_1^2 - \theta_2^2 + 2e^{(-2\theta_1 t_f)}\theta_1^2 + e^{(-2\theta_1 t_f)}\theta_2^2 \\
 &+ 2e^{(-2\theta_1 t_f)}\theta_2^2 t_f \theta_1 + 2e^{(-2\theta_1 t_f)}\theta_2^2 t_f^2 \theta_1^2)(-2 \\
 &+ \cos(x_1)^2 + \cos(x_2)^2)/(\sigma^2 \theta_1^3)
 \end{aligned} \tag{IV.24}$$

On remarque que le terme :

$$\frac{1}{4}(-2\theta_1^2 - \theta_2^2 + 2e^{(-2\theta_1 t_f)}\theta_1^2 + e^{(-2\theta_1 t_f)}\theta_2^2 + 2e^{(-2\theta_1 t_f)}\theta_2^2 t_f \theta_1 + 2e^{(-2\theta_1 t_f)}\theta_2^2 t_f^2 \theta_1^2)$$

est indépendant de la position x , et le terme $(-2 + \cos(x_1)^2 + \cos(x_2)^2)$ est dépendant de x_1 et x_2 positions des capteurs.

Après simulation de la solution de l'exemple IV.2, on obtient les figures suivantes :



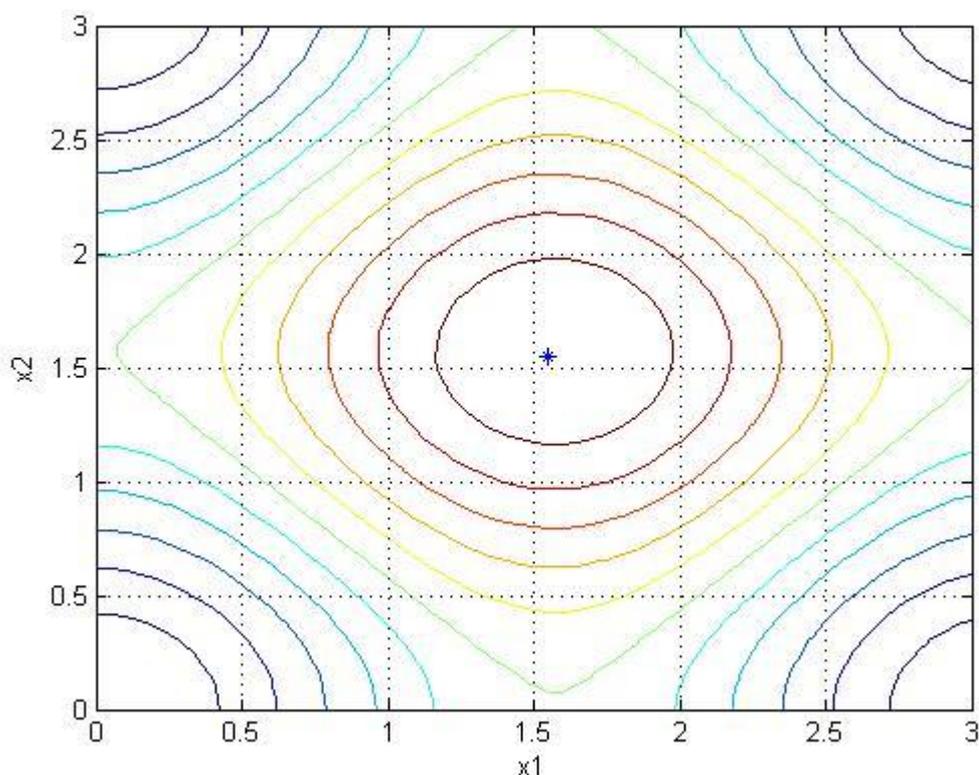


Figure IV.1 : le diagramme de la surface et le contour du $\det M$ en fonction des positions des capteurs.

La figure IV.1 nous montre la représentation spatiale du déterminant $M(x^1, x^2)$ en fonction de x^1 et x^2 , on voit que le déterminant de la matrice M atteint sa valeur maximale aux points $x^1 = x^2 = \pi/2$. Par conséquent, les deux capteurs à utilisés sont à placer à la même position. Dans ce cas un seul capteur suffit au lieu de deux.

Dans la théorie de placement de capteurs, la solution pour une telle situation est de fixer à priori un ensemble N' emplacements possibles, où $N' > N$, et après on cherche le meilleur ensemble parmi les N' possibles. Dans ce cas le problème devient combinatoire.

IV.3.3 Dépendance des positions des capteurs des paramètres à identifier

Une autre grande difficulté rencontrée dans la théorie de placement des capteurs est la dépendance de la solution optimale des paramètres à identifier qui ne sont pas connus avant l'expérimentation.

Ce cas est illustré par l'exemple suivant :

Exemple IV.3

Considérons à nouveau l'équation de chaleur

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = q \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, x \in [0, \Pi], t \in [0, t_f] \quad (\text{IV.25})$$

Avec les mêmes conditions aux limites mais avec une autre condition initiale

$$\begin{cases} y(0,t) = y(\Pi,t) = 0, t \in [0, t_f] \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

$$\begin{cases} y(x,0) = \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x), x \in [0, \Pi] \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

La solution peut être aisément trouvée sous la forme explicite

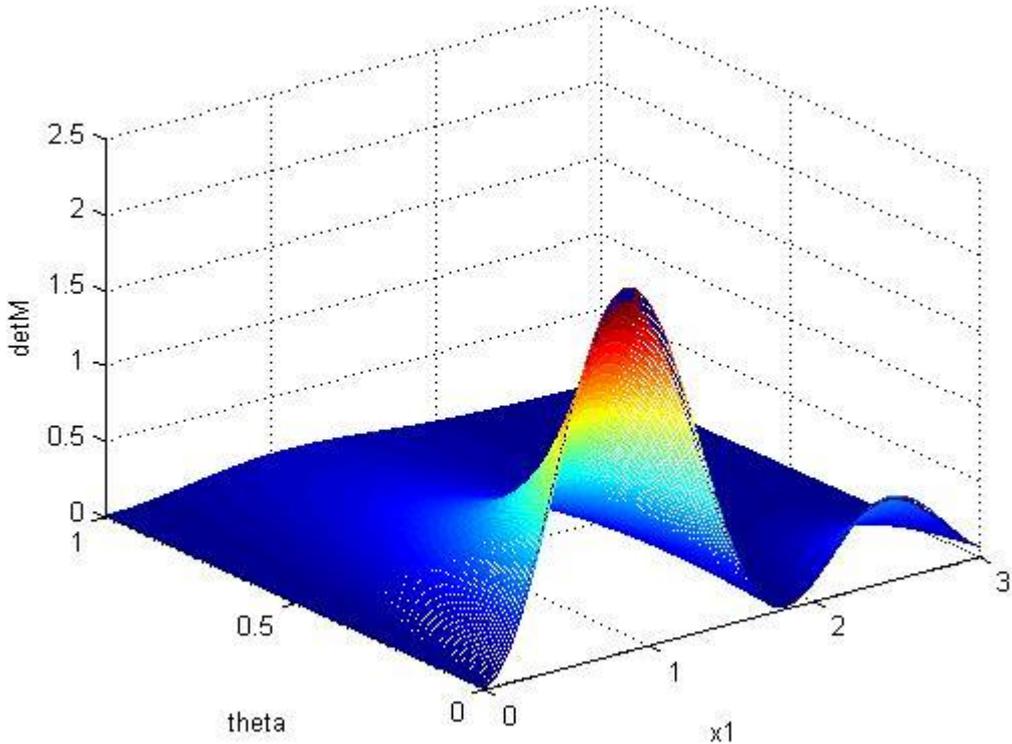
$$y(x,t) = \exp(-qt) + \frac{1}{2} \exp(-4qt) \sin(2x) \quad (\text{IV.28})$$

Supposant qu'on dispose seulement d'un seul capteur stationnaire à placer à la position x^1 afin d'estimer le paramètre constant q aussi précis que possible.

Pour cette exemple, la *FIM* est donnée comme suit (on suppose que $S = 1$)

$$\begin{aligned} \det(M(x^1)) &= \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial q} \right)^2 dt = \frac{1}{4q^3} \left\{ -\sin^2(x^1) (2q^2 t_f^2 + 2t_f q + 1) \exp(-2t_f q) \right. \\ &- \frac{32}{25} \cos(x^1) \sin^2(x^1) (10t_f q + 2 + 25q^2 t_f^2) \exp(-5t_f q) \\ &- \frac{1}{4} \cos^2(x^1) \sin^2(x^1) (1 + 32q^2 t_f^2 + 8t_f q) \exp(-8t_f q) \\ &\left. + \frac{1}{500} \sin^2(x^1) (500 + 256 \cos(x^1) + 125 \cos^2(x^1)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

Après simulation de la solution de l'exemple IV.2, on obtient les figures suivantes :



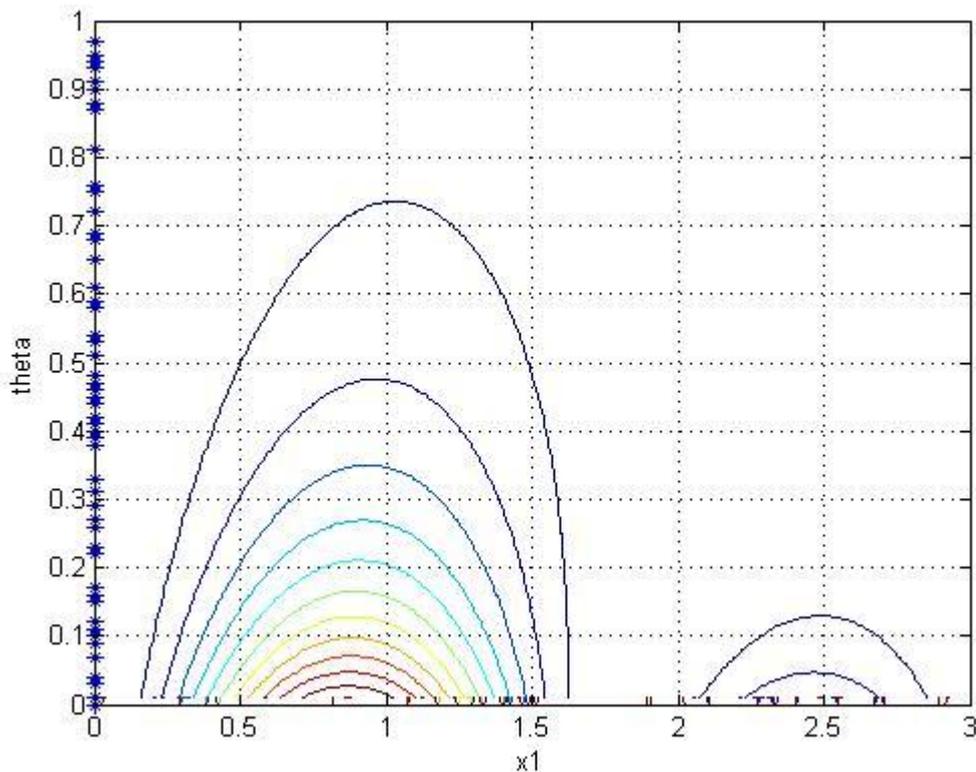


Figure IV.2 : la surface et les contours de $M(x^1)$ de l'exemple IV.3 en fonction de x et du paramètre q .

Dans ce cas on ne peut pas tirer directement la solution optimale de la matrice de Fisher, sachant bien qu'au niveau de l'expression de M on ne peut pas isoler les termes dépendant de x de ceux dépendant des q . Alors le remède à une telle situation consiste à tracer la représentation spatiale de M en fonction des x et q , puis on cherche là où M prend la valeur maximale. D'après les résultats obtenus donnés par la figure IV.2, on peut prendre comme position optimale un point se situant entre 0.9 et 1.

IV.4 Application à l'identification des systèmes

Dans la suite, on s'intéresse à l'identification des paramètres du système modélisant l'équation de chaleur de l'exemple IV.2, en utilisant la méthode du modèle tout en vérifiant la position optimale qui donne le modèle le plus proche du système réel.

Rappelons que l'équation de chaleur modélisant le système est décrite par l'EDP suivante

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \theta_1 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{IV.30})$$

Pour l'identification du système, on utilise comme sorties mesurées (sorties réelles) les sorties simulées obtenues par simulation du modèle, en considérant les paramètres réelles suivants

$$\theta_1 = 0.1 ; \theta_2 = 1$$

Sujet à la condition initiale

$$y(x, 0) = \theta_2 \sin x ; x \in [0, \pi] \quad (\text{IV.31})$$

Et les conditions aux limites

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0 \quad (\text{IV.32})$$

IV.4.1 Résolution analytique de l'EDP décrivant le modèle

L'équation (IV.30) est une EDP parabolique, avec des conditions aux limites de type Dirichlet. La résolution de l'équation (IV.30), obtenue par les deux méthodes déjà vu aux chapitre III, est

$$y(x, t) = \theta_2 e^{-\theta_1 t} \sin(x) \quad (\text{IV.33})$$

Le schéma représentant l'objectif est

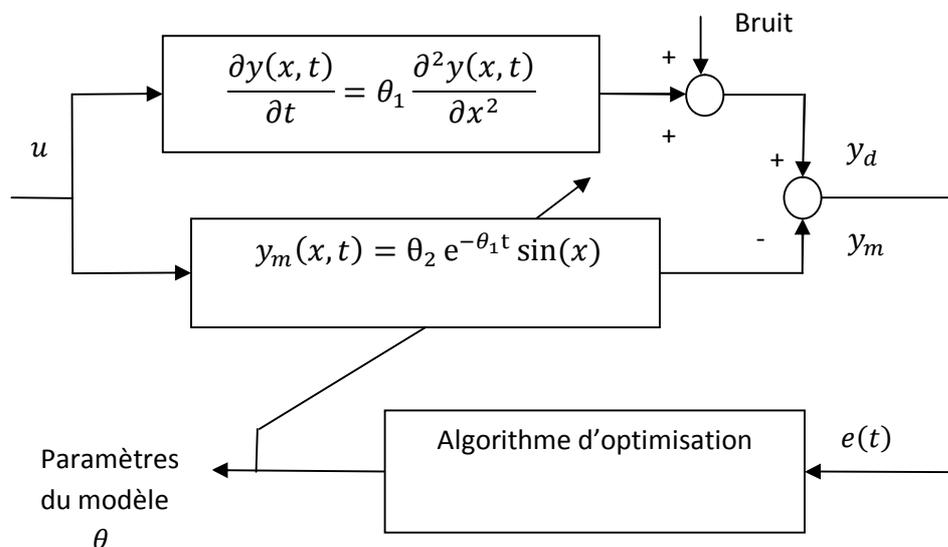


Figure IV.3 Estimation des paramètres du modèle de l'équation de chaleur.

IV.4.2 Formulation du problème d'identification

Pour identifier le modèle de l'équation de chaleur, on utilise l'identification par la méthode du modèle décrite au chapitre II, qui est basée sur la minimisation de l'erreur entre la sortie mesurée, en un point x^* qu'on note $y_d(x^*, t)$, et la sortie du modèle donné par la solution analytique $y_m(x^*, t)$ qui est comme suit

$$y_m(x^*, t) = \theta_2 e^{-\theta_1 t} \sin(x^*) \quad (\text{IV.34})$$

L'erreur entre la sortie mesurée et la sortie calculée est l'écart entre le procédé réel et son modèle, et s'écrit comme suit

$$e(t) = y_d(x^*, t) - y_m(x^*, t) \quad (\text{IV.35})$$

Le critère à minimiser est défini par

$$J(\theta) = \int_0^{\infty} [y_d(x^*, t) - y_m(x^*, t)]^2 dt \quad (\text{IV.36})$$

C'est la somme des carrés des erreurs sur un horizon de temps $t = \Delta t \cdot n$ suffisamment large.

Dans le cas discret, le critère à minimiser se ramène à

$$J(\theta) = \Delta t \sum_{i=1}^n [y_d(x^*, i\Delta t) - y_m(x^*, i\Delta t)]^2 \quad (\text{IV.37})$$

Où θ est le vecteur des paramètres du modèle, c'est-à-dire :

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

IV.4.3 Formulation du problème d'optimisation et résolution

Le problème d'identification se ramène donc à un problème de minimisation du critère, par conséquent à un problème d'optimisation.

Dans notre cas, la fonction objective sera le critère $J(\theta)$ défini par l'équation (IV.37), les paramètres à identifier sont θ_1 et θ_2 . C'est un problème d'optimisation sans contraintes.

Donc le problème est sous la forme

$$\min_{\theta_1, \theta_2} J(\theta_1, \theta_2) = \min_{\theta_1, \theta_2} \left(\Delta t \sum_{i=1}^n [y_d(x^*, i\Delta t) - \theta_2 e^{-\theta_1 t} \sin(x^*)]^2 \right) \quad (\text{IV.38})$$

La fonction objective est non linéaire. Le problème d'optimisation est un problème de programmation non linéaire [6].

Pour résoudre ce problème on peut utiliser les méthodes déjà vues au chapitre II. Et pour raison de complexité de calcul on propose d'utiliser une méthode numérique (itérative).

L'estimé de départ choisi est

$$\theta^0 = \begin{bmatrix} \theta_1^0 \\ \theta_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Considérons plusieurs positions pour faire l'identification. Les résultats ainsi obtenus sont résumés dans le tableau (IV.1) suivant

La position : x_i	θ_1^*	θ_2^*	$e_{\theta_1} = \theta_1^* - \theta_1 $	$e_{\theta_2} = \theta_2^* - \theta_2 $
0.25	0.2082	1.1523	0.1082	0.1523
0.50	-0.0507	0.7275	0.1507	0.2725
0.75	0.1622	1.2946	0.0622	0.2946
1	0.0976	1.0891	0.0024	0.0891
1.25	0.1384	1.0358	0.0384	0.0358
1.50	0.0735	0.9819	0.0265	0.0181
1.57	0.1021	1.0370	0.0021	0.037

Tableau IV.1 : les valeurs des paramètres à identifiés

On remarque que la valeur des paramètres θ dépend des positions (x_i), et on constate que la position qui donne une meilleur convergence de l'erreur vers zéro, donc de la valeur des paramètres du modèle a celle du système réel (précision d'identification), et bien $x = \frac{\pi}{2} = 1.57$, qui est la valeur trouvée par la MIF.

IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment déterminer les positions optimales des capteurs pour l'identification précise des paramètres du système à paramètres distribués. On a montré l'utilité de la matrice d'informations de Fisher pour la détermination des positions optimales des capteurs. Les positions optimales peuvent être déterminées analytiquement ou graphiquement selon la complexité du modèle.

Pour montré l'importance du placement des capteurs, on a présenté un exemple d'application où on a identifié deux paramètres d'un modèle en considérant plusieurs positions pour le capteur. On a constaté que la mesure effectuée à la position donnée par la matrice d'informations de Fisher a permis d'identification avec une très bonne précision les paramètres du modèle.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'identification des systèmes à paramètres distribués. Dans cette étude, nous nous sommes focalisés sur une méthode de placement optimal de capteurs appelée *matrice d'information de Fisher*. L'objectif est de déterminer les positions des capteurs assurant une identification précise des paramètres du modèle.

Les systèmes distribués est une classe de systèmes régis par des équations différentielles aux dérivées partielles, les modèles décrivant leurs dynamiques sont généralement munis de coefficients inconnus, ces derniers, sont déterminés par le biais des méthodes d'identification paramétrique (méthode du modèle). Pour une bonne identification, il faut d'abord élaborer une stratégie de placement de capteurs qui nous donne les positions idéales des capteurs. La résolution des équations aux dérivées partielles est une étape importante pour la détermination des positions optimales des capteurs en utilisant la matrice d'informations de Fisher.

Après avoir présentée les systèmes à paramètres distribués, nous avons présenté le principe de la méthode du modèle basée sur la minimisation de l'erreur entre la sortie mesurée et celle prédite par le modèle. Puis, on a présenté deux méthodes pour la résolution des équations aux dérivées partielles. La fin de notre travail a été réservée à la détermination des positions optimales des capteurs par la matrice d'informations de Fisher. Tous les cas possibles ont été étudiés. Puis pour montrer la justesse de cette méthode, nous avons présenté un exemple d'application, dont l'objectif est la détermination de la position optimale d'un seul capteur utilisé pour l'identification des paramètres. Les valeurs identifiées de ces paramètres ont été comparées pour différentes positions.

Les résultats de l'identification montrent clairement, que la mesure effectuée à la position optimale, donne des valeurs de paramètres très proches des valeurs réelles, considérées dans l'étape de simulation (récupération des mesures).

Bibliographie

[1]. **A.RACHID**, «Systèmes de Régulation»,Masson,Paris,1997.

[2]. **A.El jai et Marcel A Mouroux** « Automatique des systèmes distribués », Editions Hermès, Paris, 1990.

[3]. **P.Faurre et M.Robin** « Eléments d'automatique », Editions Bordas, Paris, 1984.

[4]. **A.EL JAI** « Eléments d'analyse et de contrôle des systèmes », Presse Universitaires de perpignan, 2004.

[5]. **J.Richalet** « Pratique de l'identification », Edition Hermes, 75004 Paris.

[6]. **D.Ucinski** «Optimal Measurement Methods for Distributed Parameter System Identification»,CRC press, 2004.

[7]. **R.Boudarel,J.Delmas et P.Guichet** «Commande Optimale des Processus,Tom1»Edition Dunod,1969.