MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

SPÉCIALITÉ: MATHEMATIQUES

OPTION: PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Présenté par:

M^{elle} **TOUATI Hadjar**

Sujet:

La loi de Wishart et ses applications

Devant le jury d'examen composé de :

Mme Merabet Dalila;	MCB ;	Président.
Mme Cheikh Malika;	MCB ;	Rapporteur.
Mme Belkacem Cherifa;	MCB ;	Examinatrice.

Soutenue: le 01 /10/ 2019

Remerciements

Tout d'abord, je remercie ALLAH pour m'avoir donné le savoir-faire et la volonté pour mener à terme ce travail.

En premier lieu, je tiens à remercier Madame CHEIKH Malika, pour la confiance qu'elle ma accordée en acceptant d'encadrer ce travail , pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'elle a consacrées à diriger ce mémoire . J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité, son soutien, ainsi que pour sa motivation et ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail.

Je souhaiterais aussi adresser ma gratitude aux professeurs intervenant tout au long de notre cursus qui étaient à la hauteur de leurs missions dévouées.

Nos remerciements vont également aux membres du jury pour avoir accepté d'examiner et d'évaluer ce travail.

Enfin, je remercie, mes chers parents, mes amis et à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'accomplissement de ce mémoire .

Merci.

Table des matières

Introduction générale **3**

1 Vecteurs aléatoires **6**

1.1 Introduction 6
1.2 Les vecteurs aléatoires : 6
1.2.1 Vecteur aléatoire discret 7
1.2.2 Vecteur aléatoire continu 8
1.3 Fonction caractéristique: 9
1.4 Moments d'un vecteur aléatoire 9
1.4.1 Moyenne d'un vecteur aléatoire : 9
1.4.2 Matrice de variance-Covariance : 10
1.5 Changement de variable : 11
1.6 Vecteur aléatoire gaussien 13
1.6.1 La loi $N(0,\mathbb{I}_p)$ 13
1.7 Loi normale vectorielle (multinormale) : 14
1.7.1 Fonction caractéristique 15
1.7.2 Fonction de densité 16

2 Matrices aléatoires **21**

2.1 Introduction 21
2.2 L'opérateur Vec(.) 21
2.3 Produit de kronecker 22
2.4 Matrices aléatoires 25
2.5 Moments d'une matrice aléatoire 25
2.5.1 Moyenne d'une matrice aléatoire 25
2.5.2 Matrice de variance-covariance 26
2.6 Lois normales matricielles 27

2.6.1 Définitions et exemples : 27
2.7 Fonction de densité 31

3 Loi de Wishart 33
3.1 Introduction 33
3.2 Matrice aléatoire de loi de Wishart 33
3.3 Fonction de densité 34
3.4 Fonction de Répartition 36
3.5 Moments de la loi de Wishart 39
3.5.1 Espérance : 39
3.5.2 La variance des éléments de W 40
3.5.3 Matrice de variance-covariance 40
3.6 Fonction caractéristique: 42
3.7 Fonction génératrice des moments : 44
3.8 Inference via la décomposition de Bartlett 46
3.9 Etude empirique : 48
3.10 Loi de Wishart et échantillonnage de la loi normale: 52
3.11 Liens avec d'autres lois de probabilités 53
3.11.1 Loi de khi-deux, χ^2 53
3.11.2 Loi de gamma multivariée 56
3.11.3 Loi du T^2 de Hotelling 57
3.11.4 Loi du lambda Λ de Wilks 58

4 Application de la loi de Wishart inverse dans la statistique bayésienne 59
4.1 Introduction 59
4.2 Loi de Wishart inverse 59
4.2.1 Matrice aléatoire de loi de Wishart inverse 59
4.2.2 Fonction de densité 60
4.2.3 Moments d'une Wishart inverse 60
4.3 Cas particulier de la loi de Wishart inverse : 60
4.3.1 Fonction de densité de χ^2 inverse : 61
4.3.2 Moments d'une χ^2 inverse: 61
4.4 Etude empirique 62
4.5 Les concepts de base de la statistique bayésienne : 64
4.5.1 Loi a priori - loi a posteriori 64

4.6 Le lien de la loi de Wishart inverse avec la statistique bayésienne : 66

Conclusion générale **69**

4.7 Rappels sur quelques propriétés de matrices: 70

4.7.1 Matrice symétrique définie positive(SDP): 70

4.7.2 Matrice non singulière : 71

4.7.3 Matrice triangulaire: 71

4.8 Décomposition de cholesky 72

4.9 Jacobien de certaines transformations 72

4.10 B.1 : Code d'échantillonnage d'une matrice aléatoire de loi de Wishart standard : 74

4.11 B.2 : Code d'échantillonnage d'une matrice aléatoire de loi de Wishart non standard 75

4.12 B.3 : Code du calcul de la matrice variance et la moyenne théorique d'une matrice aléatoire de loi de Wishart 76

4.13 B.4 : Code d'échantillonnage et le calcul de la matrice variance et la moyenne empiriques d'une matrice aléatoire de loi de Wishart 77

4.14 B.5 : Code d'échantillonnage et le calcul de la matrice variance et la moyenne empiriques d'une matrice aléatoire de loi de Wishart inverse : 78

4.15 C.1 : Code du graphe de la loi normale bivariée : 80

4.16 C.2 : Code du graphe de la loi khi-deux χ^2 : 80

4.17 C.3 : Code du graphe de la loi χ^2 inverse : 80

Introduction générale

La statistique multivariée est aujourd'hui un outil incontournable pour étudier des données provenant de nombreuses observations faites sur plusieurs variables, elle a pour but de résumer l'information contenue dans les données, pour cela l'information doit être organisée sous la forme d'une matrice.

L'étude des matrices aléatoires a aujourd'hui plus de quatre-vingts ans, son histoire commence à la fin des années vingt. Le statisticien John Wishart étudie alors des matrices de covariance empirique dont la taille est fixe, et les coefficients sont gaussiens, son premier article à ce sujet paraît dans Biometrika en 1928.([15]).

Dans les années cinquante, ce sont des physiciens qui s'intéresseront à certaines matrices aléatoires, afin de mieux comprendre la spectroscopie des atomes lourds : en effet, les ni- veaux d'énergie atomique correspondent aux valeurs propres (ou aux écarts entre les valeurs propres) de grands opérateurs hermitiens, comme le hamiltonien. Eugéne Wigner introduit les matrices aléatoires hermitiennes (GUE) pour étudier les propriétés statistiques de ces opérateurs, lorsque la taille de la matrice tend vers l'infini.

La loi de Wishart est une loi de probabilité associée aux matrices aléatoires symétriques définies positives, dénommée en l'honneur de John Wishart en (1928). La découverte de cette loi poussa de manière importante le développement de l'analyse multivariée .

La loi de Wishart apparaît comme la loi d'une matrice de covariance d'un échantillon de valeurs suivant une loi normale multidimensionnelle, on la trouve également dans la théorie spectrale des matrices aléatoires; et elle intervient aussi dans l'échantillonnage de la loi normale . De plus son inverse, appelée "loi de Wishart inverse " joue un rôle important en statistique bayésienne. Ainsi dans les mathématiques financières un sujet très riche fait appel au processus de Wishart.

A cet effet, on pose de nombreuses questions: quelle est la distribution d'une variable aléatoire de Wishart ? comment calculer la matrice de variance-covariance d'une telle variable? l'implication de la loi de Wishart dans la statistique bayésienne?...etc .

Notre manuscrit est constitué d'une introduction générale, de quatre chapitres et d'une conclusion générale.

Dans le premier chapitre, nous rappellerons les notions importantes des vecteurs aléatoires à savoir : vecteur moyen, matrice de variance-covariance, fonction de répartition, fonction caractéristique... . Nous donnons aussi les propriétés les plus importantes de la loi normale vectorielle (multivariée) .

Le deuxième chapitre, est dédié aux concepts de base des matrices aléatoires. Après avoir rappelé les définitions et les notions nécessaire pour ce chapitre (l'opérateur Vec(.), produit de kronecker, les moments d'une matrice aléatoire...), nous passerons à la partie la plus importante de ce chapitre qui est la loi normale matricielle.

Le troisième chapitre, constitue l'essentiel de notre mémoire. Nous développerons les propriétés de la loi de Wishart (fonction de densité, fonction de répartition, les moments, la décomposition de barlett...). Après avoir effectué une étude de simulation empirique sur la variance et la moyenne de la matrice de Wishart, on termine ce chapitre par le lien existant entre la loi de Wishart et d'autres lois de probabilité.

Le quatrième chapitre, est consacré à l'implication de la loi de Wishart inverse en statistique bayésienne. Au premier lieu, nous définissons la loi de Wishat inverse ainsi que quelques concepts importants de la statistique bayésienne; par la suite nous développerons la relation de cette loi dans de le domaine bayésien .

Nous achevons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Vecteurs aléatoires

1.1 Introduction

Avant de se lancer dans le vif du sujet, il convient de se remémorer de quelques notions fondamentales qui faciliteront la compréhension de ce mémoire, à cet effet, on verra dans ce chapitre les concepts de base des vecteurs aléatoires : vecteur moyen, matrice de variance-covariance, fonction de densité, fonction caractéristique,... et la loi normale vectorielle.

1.2 Les vecteurs aléatoires :

Définition 1.2.1. Soit (Ω,T,P) un espace probabilisé et $X_1,X_2,...,X_p$, p-variables aléatoires définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit l'application X de Ω dans $\mathbb{R}^p$ définie par:

$$\begin{aligned} X: \quad \Omega \rightarrow & \quad \mathbb{R}^p \\ \omega \rightarrow & \quad X(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ . \\ . \\ X_p(\omega) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On dit que X est un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^p$, on le note simplement par:

$$X = (X_1,X_2,.....,X_p)',$$

où chaque X_i, $(i = 1,...,p)$ est une variable aléatoire réelle.

Remarque 1.2.1. Un vecteur aléatoire est aussi appelé variable aléatoire multidimensionnelle ou multivariée .

1.2.1 Vecteur aléatoire discret

Définition 1.1. Un vecteur aléatoire $X = (X_1,...,X_p)'$ est dit discret si $X(\Omega)$ est un sous ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{R}^p$, où chaque variable X_i, $(i = 1,...,p)$ est une variable aléatoire discrète .

Fonction de masse conjointe :

Soit X un vecteur aléatoire discret de $\mathbb{R}^p$, sa fonction de masse conjointe est donné par:

$$P_X(x_1,.....,x_p) = P(X_1 = x_1,...,X_p = x_p) = P[(X_1 = x_1) \cap ...... \cap (X_P = x_P)],$$

tel que : $\sum_{x_i \in X(\Omega)} P_X(x_1,...,x_p) = 1$

Remarque 1.2.2. Si $X_1,.....,X_p$ sont indépendantes, alors :

$$P_X(x_1,....,x_p) = P(X_1 = x_1) \times ...... \times P(X_p = x_p) = \prod_{i=1}^{p} P[X = x_i]$$

Fonction de répartition conjointe :

Définition 1.2.2. ([7])
On appelle fonction de répartition conjointe du vecteur aléatoire $X = (X_1,...,X_p)'$, l'application F_X définie sur $\mathbb{R}^p$ et à valeur dans $[0,1]$ par :

$$\begin{aligned} F_X(x_1,....,x_p) &= P_X(]-\infty,x_1] \times .....\times]-\infty,x_p]) \\ &= P_X[\bigcap_{i=1}^{p}(X_i \leq x_i)] \end{aligned}$$

1.2.2 Vecteur aléatoire continu

Définition 1.2. On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1,...,X_p)'$ est continu s'il admet une densité, et chaque variable X_i, $(i = 1,...,p)$ est une variable aléatoire continue .

Densité de probabilité :

On dit que le vecteur aléatoire $X = (X_1,...,X_p)'$ (ou sa loi) est absolument continu(e) s'il existe une fonction

$$f_X : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^+$$

tel que pour tout $x = (x_1,..,x_p)$ dans $\mathbb{R}^p$, on ait :

$$P_X(]-\infty,x_1] \times .....\times]-\infty,x_p]) = \int_{-\infty}^{x_1} ..... \int_{-\infty}^{x_p} f_X(u_1,...,u_p) \quad du_1...du_p.$$

La fonction f_X est appelée densité de probabilité conjointe du vecteur aléatoire X .
Notons que :

$$F_X(x_1,...,x_p) = \int_{-\infty}^{x_1} ..... \int_{-\infty}^{x_p} f_X(u_1,...,u_p)du_1...du_p,$$

où F_X est la fonction de répartition du vecteur X .([7])

Proposition 1.2.1. *:([7])*
Toute densité de probabilité conjointe f_X de $\mathbb{R}^p$ vérifie les trois assertions suivantes :

1. *f_X est positive ;*
2. *f_X est mesurable ;*
3. *f_X est integrable et*

$$\int_{\mathbb{R}^p} f_X(x_1,...,x_p)dx_1..dx_p = 1$$

Réciproquement toute fonctions f_X dans $\mathbb{R}^p$ vérifiant les 3 assertions est une densité de probabilité.

Notons par ailleurs que si la densité f_X est continue au point $(x_1,..,x_p)$, on a :

$$f(x_1,..,x_p) = \frac{\partial^p F(x_1,..,x_p)}{\partial x_1 ... \partial x_p},$$

$F(x_1,..,x_p)$ est la fonction de répartition du vecteur X .

Proposition. *:([7])*
Si X est un vecteur aléatoire absolument continu, tout vecteur aléatoire marginal est également absolument continu et sa densité est obtenue en intégrant la densité conjointe de X par rapport aux coordonnées restantes.

1.3 Fonction caractéristique:

Définition 1.3.1. ([6])
Soit $X = (X_1,..,X_p)'$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$, sa fonction caractéristique est la fonction définie pour tout $u = (u_1,u_2,...,u_p)'$ de $\mathbb{R}^p$ et à valeur dans $\mathbb{C}$ par :

$$\varphi_X(u) = \varphi_X(u_1,..,u_p) = E[\exp\{iu'X\}] = E[\exp\{i\sum_{j=1}^{p} u_j X_j\}].$$

1.4 Moments d'un vecteur aléatoire

1.4.1 Moyenne d'un vecteur aléatoire :

Soit $X = (X_1,....,X_p)'$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$, tel que $(E(X_i) < +\infty)$, $\forall i = (1,..,p)$. $E(X)$ est le vecteur constitue des espérances de chaque composante du vecteur aléatoire X, on le définit par :

$$E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ E(X_p) \end{pmatrix}$$

1.4.2 Matrice de variance-Covariance :

Définition 1.4.1. ([5])
Soit $X = (X_1,...,X_p)'$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$ posséde des moments d'ordre 2, la covariance entre X_i et X_j, $\forall(1 \leq i,j \leq p\ )$ est définie par :

$$Cov(X_i,X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

Définition 1.4.2. (Matrice de variance-covariance)([5])
Pour tout vecteur aléatoire $X = (X_1,...,X_p)' \in \mathbb{R}^p$, possèdent des moments d'ordre 2, la matrice Σ de dimension $(p \times p)$ symétrique définie positive(SDP) donnée par :

$$\Sigma = Cov(X,X) = V(X) = E[(X-E(X))(X-E(X))'] = \begin{pmatrix} Cov(X_1,X_1) & \dots & Cov(X_1,X_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_p,X_1) & \dots & Cov(X_p,X_p) \end{pmatrix}.$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} V(X_1) & \dots & Cov(X_1,X_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_p,X_1) & \dots & V(X_p) \end{pmatrix}$$

est appelée variance de X, ou matrice de variance-covariance de X.

Définition 1.4.3. ([5])
Pour tout couple de vecteurs aléatoires $X \in \mathbb{R}^p$ et $Y \in \mathbb{R}^q$, possédant chacun des moments d'ordre 2, la matrice $(p \times q)$ est définie par:

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))'] = \begin{pmatrix} Cov(X_1,Y_1) & \dots & Cov(X_1,Y_q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_p,Y_1) & \dots & Cov(X_p,Y_q) \end{pmatrix},$$

est appelée matrice de covariance entre X et Y .

Proposition. *([5])*
Si les vecteurs aléatoires $X \in \mathbb{R}^p$ et $Y \in \mathbb{R}^q$ possédants chacun des moments d'ordre 2, sont indépendants alors :

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))'] = [E(X) - E(X)][E(Y) - E(Y)] = \mathbb{O}_{p,q}$$

Proposition. ***transformation linéaires:***
Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^p$, si on effectue un changement de variable linéaire de la forme $Z = LX$, où L est une matrice à p colonnes, alors on a les résultats suivants:

$$E(Z) = E(LX) \quad = LE(X) = L\mu_X,$$

où μ_X est le vecteur moyen de X.

$$Cov(Z) = L\Sigma_X L' = LCov(X)L' = L\Sigma_X L',$$

où Σ_X est la variance de X.

1.5 Changement de variable :

Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^p$ et φ une application mesurable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$, on veut déterminer la loi du vecteur aléatoire $\varphi(X)$. Rappelons en premier lieu que le jacobien d'une fonction:([7])

$$H : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$$

$$x = (x_1,..,x_p) \to H(x) = (h_1(x_1),h_2(x_2),..,h_p(x_p))$$

est le déterminant de la matrice des dérivées premières, c'est-à-dire :

$$J_H = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & . & \cdots & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & . & \cdots & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}$$

Théorème 1.5.1. *([7])*
Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans un ouvert S de $\mathbb{R}^p$, de loi absolument continue et de densité f_X. Soit φ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de S vers un ouvert T (i.e. une bijection continûment différentiable et de réciproque également continûment différentiable). Alors le vecteur aléatoire $Y = \varphi(X)$ est absolument continu et de densité, pour tout $y = (y_1,..,y_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))|J_\varphi^{-1}(y)|,$$

où J_φ^{-1} est le jacobien de la fonction φ^{-1}.

Notons que, parfois pour des raisons de calcul, il est plus simple de déterminer $J_{\varphi^{-1}}$ et on utilise alors l'égalité $J_{\varphi^{-1}} = J_\varphi^{-1}$.

Nous avons également une méthode assez proche pour déterminer la loi d'une transformée d'un vecteur aléatoire, basée sur la caractérisation suivante:

Théorème. *([7])*
Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ pour que sa loi P_X, absolument continue, soit de densité f_X il faut et il suffit que pour toute fonction borélienne bornée $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tel que $\varphi(X)$ soit integrable ou positive on ait:

$$E(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x) f(x) dx.$$

1.6 Vecteur aléatoire gaussien

Rappelons tout d'abord la loi normale univariée.

Définition 1.6.1. Une variable aléatoire réelle Z suit une loi normale centrés réduite (i.e $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$), on la note par $Z \backsim N(0{,}1)$, si la densité de Z sur $\mathbb{R}$ est donné par :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{z^2}{2}) \quad ; z \in \mathbb{R}.$$

Sa Fonction de répartition est généralement noté par F(z), où :

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp(-\frac{1}{2}t^2)dt, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Définition 1.6.2. Une variable aléatoire réelle X est dite gaussienne s'il existe $(\mu{,}\sigma)$ dans $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ et $Z \sim N(0{,}1)$ tels que $X = \mu + \sigma Z$. La densité de X est donné par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\},$$

on note $X \sim N(\mu{,}\sigma^2)$.

Définition 1.6.3. (Vecteur aléatoire gaussien)
Soit $X = (X_1{,}...{,}X_p)'$ un vecteur aléatoire, X est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire gaussienne.
Autrement dit, pour toutes suites $(a_1{,}..{,}a_p)$ de nombres réelles la variable aléatoire $Z = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_pX_p$ est une variable aléatoire gaussienne .

1.6.1 La loi $N(0{,}\mathbb{I}_p)$

La loi normale $N(0{,}\mathbb{I}_p)$ est la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1{,}..{,}X_p)'$ tel que X est un vecteur aléatoire gaussien centré réduit.

Propriétés 1.6.1. *([12]).*
Soit $X = (X_1,..,X_p)'$ *un vecteur gaussien tel que:* $X \sim N(0,\mathbb{I}_p)$.

1. *La moyenne et la matrice de variance-covariance sont données respectivement par :*

$$\mu = 0 \qquad et \qquad \Sigma = \mathbb{I}_p.$$

2. *La loi* $N(0,\mathbb{I}_p)$ *est absolument continue de densité :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\Pi)^p}} \exp\{-\frac{1}{2}x'x\} = \frac{1}{\sqrt{(2\Pi)^p}} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} {x_i}^2\}$$

3. $\forall a \in \mathbb{R}^p$, *la fonction caractéristique* $\varphi_X : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ *est définie par :*

$$\begin{aligned}
\varphi_X(a) &= E[\exp\{ia'X\}] \\
&= E[\exp\{i\sum_{j=1}^{p} {a_j}'X_j\}] = E[\prod_{j=1}^{p} \exp\{ia_jx_j\}] \\
&= \prod_{j=1}^{p} E[\exp\{ia_jx_j\}] = \prod_{j=1}^{p} \exp\{i\frac{{a_j}^2}{2}\}, \\
\varphi_X(a) &= \exp\{\frac{-1}{2}a'a\}.
\end{aligned}$$

1.7 Loi normale vectorielle (multinormale) :

Loi normale multivariée ou loi de gauss à plusieurs variables est une loi de probabilité qui est la généralisation multidimensionnelle de la loi normale $N(\mu,\sigma^2)$.

La loi normale multivariée est paramètrée par un vecteur moyen ($\mu \in \mathbb{R}^p$) et une matrice de variance-covariance définie positive Σ .

Définition 1.7.1. Soit $X = (X_1,..,X_p)'$ un vecteur aléatoire, on dit que X suit une loi normale sur $\mathbb{R}^p$ si et seulement s'il existe une matrice Σ de dimension $(p \times p)$ et un vecteur $\mu \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$X = AY + \mu \qquad ; \quad Y \sim N_p(0,\mathbb{I}_p),$$

dans ce cas, on a :
$E(X) = \mu$ car $E(Y) = 0$.
$V(X) = AV(Y)A' = A\mathbb{I}_pA' = AA'$, on désigne $\Sigma = AA'$.([12]).

1.7.1 Fonction caractéristique

Théorème 1.7.1. *([12])*
Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$ et φ une application dans $\mathbb{C}$, alors $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ est la fonction caractéristique du vecteur X qui suit une loi normale si et seulement si $\exists(\mu \in \mathbb{R}^p)$ et une matrice (SDP) $\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times p}$ tel que :

$$\varphi(a) = \exp\{ia'\mu - \frac{1}{2}a'\Sigma a\}; \quad a \in \mathbb{R}^p.$$

Preuve. ([12])
Par definition de la fonction caractéristique on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_X(a) &= E[\exp\{ia'X\}] = E[\exp\{ia'(AY + \mu)\}] \\
&= \exp\{ia'\mu\}E[ib'Y] \qquad ,(b = A'a) \\
&= \exp\{ia'\mu - \frac{1}{2}b'b\} = \exp\{ia'\mu - \frac{1}{2}a'\Sigma a\} \\
\varphi_X(a) &= \exp\{ia'\mu - \frac{1}{2}a'\Sigma a\}
\end{aligned}$$

Corollaire 1.7.1. ***(propriété de linéarité)***.*([13])*
Soit $X = (X_1,..,X_p)'$ un vecteur aléatoire, on note $\mu = E(X)$ son vecteur moyen et $\Sigma = V(X)$ sa matrice de variance-covariance, on pose $Y = AX + b$.
Pour toute matrice A de dimension $(p \times p)$ et pour tout vecteur $b \in \mathbb{R}^p$, on a :

$$Y = AX + b \sim N_p(A\mu + b \quad , \quad A\Sigma A').$$

1.7.2 Fonction de densité

Théorème 1.7.2. *On dit que $X = (X_1,..,X_p)'$ suit une loi normale multivariée $N_p(\mu,\Sigma)$ si et seulement si X est un vecteur aléatoire de densité :*

$$f_X(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p}\sqrt{|\Sigma|}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\}, \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{1.1}$$

où $|\Sigma|$: le déterminant de la matrice Σ.

Preuve. ([6])
La loi du vecteur aléatoire X c'est la loi du vecteur $AY+\mu$, où $Y \sim N_p(0,\mathbb{I}_p)$. Par conséquent Y a pour densité:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\Pi)^p}} \exp(-\frac{1}{2}y'y)$$

Si $X \sim N_p(\mu,\Sigma)$, alors pour toute fonction continue bornée $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, on a:

$$E[h(X)] = E[h(AY+\mu)] = \int_{\mathbb{R}^p} h(AY+\mu) f_Y(y)dy$$

Puisque $\Sigma = AA'$, alors $|detA| = \sqrt{det\Sigma}$. (où $|.|$ représente la valeur absolue).

De plus, Σ est inversible ssi A est inversible et A l'est, alors:

$$\Sigma^{-1} = (A^{-1})'A^{-1},$$

d'autre part, le changement de variable affine $x = Ay + \mu$ est un un difféomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dans lui-même si et seulement si A est inversible. Son jacobien est alors égal à $|A^{-1}|$. On en déduit que:

$$E[h(X)] = \frac{1}{\sqrt{(2\Pi)^p|\Sigma|}} \int_{\mathbb{R}^p} h(x)\exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu))dx.$$

Puisque, $E[h(x)] = \int_{\mathbb{R}^p} h(x)f(x)dx$, alors :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p}\sqrt{|\Sigma|}} \exp[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)], \quad x \in \mathbb{R}^p.$$

C'est qu'il faut démontrer .

Cas particuliers :

Si $p = 1$, on retrouve la loi normale univariée c'est-à-dire :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Si $p = 2$, on a $X = (X_1, X_2) \sim N(\mu, \Sigma)$, avec :

$$\mu = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{pmatrix}$$

et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} V(X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_2,X_1) & V(X_2) \end{pmatrix}$$

La fonction de densité du couple de variables aléatoires continues (X_1, X_2) est définie comme suit :

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\sqrt{(1-\rho^2)}} \times \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x_1-\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}})^2$$
$$-2\rho(\frac{x_1-\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}})(\frac{x_2-\mu_{X_2}}{\sigma_{X_1}}) + (\frac{x_2-\mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}})^2]\}, \tag{1.2}$$

avec :

- ρ est le coefficient de correlation entre X_1 et X_2, définit par :

$$\rho = corr(X_1,X_2) = \frac{cov(X_1,X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} \in [-1,1].$$

- σ_{X_1} et σ_{X_2} sont les écarts types de X_1 et X_2 respectivement, où $\sigma_{X_1} = \sqrt{V(X_1)}$ et $\sigma_{X_2} = \sqrt{V(X_2)}$

Preuve. Soit $X = (X_1,X_2)'$ un vecteur aléatoire tel que :$X \sim N_2(\mu,\Sigma)$, on a :

$$f_X(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp\{-\frac{1}{2}([x_1-\mu,x_2-\mu]'\Sigma^{-1}[x_1-\mu,x_2-\mu])\} \tag{1.3}$$

Par définition :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} {\sigma^2}_{X_1} & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_2,X_1) & {\sigma^2}_{X_2} \end{pmatrix}$$

Calcul du déterminant de la matrice de variance-covariance $|\Sigma|$:

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= {\sigma^2}_{X_1}{\sigma^2}_{X_2} - [Cov(X_1,X_2)]^2 \\ &= {\sigma^2}_{X_1}{\sigma^2}_{X_2}(1 - [\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}]^2) \\ &= {\sigma^2}_{X_1}{\sigma^2}_{X_2}(1-\rho^2), \end{aligned}$$

d'où :

$$\sqrt{|\Sigma|} = \sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}.$$

Calcul de la matrice inverse Σ^{-1}:
Par définition de l'inverse d'une matrice on a :

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{|\Sigma|}(com(\Sigma))',$$

où $com(\Sigma)$: est la comatrice de la matrice Σ

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{{\sigma_{X_1}}^2{\sigma_{X_2}}^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix} {\sigma_{X_2}}^2 & -Cov(X_1,X_2) \\ -Cov(X_2,X_1) & {\sigma_{X_1}}^2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)}\begin{pmatrix} \frac{1}{{\sigma_{X_1}}^2} & -\frac{Cov(X_1,X_2)}{{\sigma_{X_1}}^2{\sigma_{X_2}}^2} \\ -\frac{Cov(X_2,X_1)}{{\sigma_{X_1}}^2{\sigma_{X_2}}^2} & \frac{1}{{\sigma_{X_2}}^2} \end{pmatrix}$$

Évaluons la quantité suivante : $(x_1-\mu_{X_1},x_2-\mu_{X_2})'\Sigma^{-1}(x_1-\mu_{X_1},x_2-\mu_{X_2})$
$(x_1-\mu_{X_1},X_2-\mu_{X_2})'\Sigma^{-1}(x_1-\mu_{X_1},x_2-\mu_{X_2}) = \{\frac{(x_1-\mu_{X_1})^2}{\sigma^2{}_{X_1}} - 2\frac{(x_1-\mu_{X_1})(x_2-\mu_{X_2})}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}$

$$\times\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} + \frac{(x_2-\mu_{X_2})^2}{\sigma^2{}_{X_2}}\} \times \frac{1}{1-\rho^2}$$

$$= \{(\frac{x_1-\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}})^2 + (\frac{x_2-\mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}})^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_{X_1})(x_2-\mu_{X_2})}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}\} \times \frac{1}{1-\rho^2}. \tag{1.4}$$

On remplace :(1.4) dans (1.3), on retrouve (1.2).

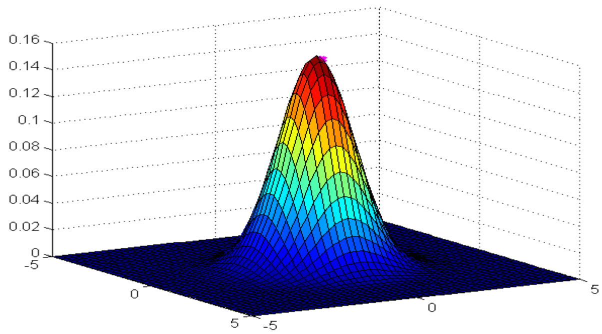

FIG. 1.1 – *Loi normale bivarié*

Exemples 1.7.1. Soit $X = (X_1,X_2)' \sim N(\mu,\Sigma)$, avec :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad et \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas la fonction de densité est définie comme suit:

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}({x_1}^2 + {x_2}^2)\}$$

Le graphe de f est donnée par la figure **FIG. 1.1**.
(Voir: Annexe C, Code matlab C.1).

Chapitre 2

Matrices aléatoires

2.1 Introduction

Le modèle des matrices aléatoires a été introduit par Wigner pour modéliser les hamiltoniens très complexes des gros noyaux atomiques. Ces matrices sont constituées d'éléments qui sont eux-mêmes des variables aléatoires ([8]).
Ce chapitre est constitué de deux parties:

Dans une premiere partie, nous définissons quelques concepts liées aux matrices aléatoires (produit de kronecker, l'application Vec(.), moyenne, matrice de variance-covariance d'une matrice aléatoire.).

La deuxième partie, est consacré à la loi normale matricielle et ses propriétés (fonction de densité, moyenne, matrice de variance-covariance).

2.2 L'opérateur Vec(.)

Une matrice A à n lignes et p colonnes est dite $(n \times p)$. Il est commode de noter $A = [a_{i,j}]$ lorsque A est une matrice dont l'élément générique de la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne est $a_{i,j}$ et

$$A = (a_j) = (a_1,..,a_p), \qquad (a_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ . \\ . \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad pour \quad j = 1,..,p,$$

désignent les vecteurs colonnes de A .

Si $A = [a_1,..,a_p]$ est une matrice $n \times p$, on désigne par:

$$Vec(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ a_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{np}$$

La matrice colonne $np \times 1$ obtenue en empilant dans l'ordre naturel les colonnes de A les une au dessus des autres.
On note $\mathcal{M}_{n,p} = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices $(n \times p)$ à coefficients réels, l'application Vec vérifie :

$$Vec : A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow Vec(A) \in \mathbb{R}^{np} = \mathcal{M}_{np,1}$$

L'opération $Vec(.)$ permet de passer de la forme matricielle à la forme vectorielle.([5])

Exemples 2.2.1. Soit A une matrice (2×2) tel que

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$Vec(A)$ est donné comme suit :

$$Vec(A) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}$$

2.3 Produit de kronecker

Définition 2.3.1. Soit $A = [a_{i,j}]$ une matrice $(n \times m)$ et B une matrice $(p \times q)$, le produit de Kronecker de A et B est une matrice $(np \times mq)$, notée $A \otimes B$ définie par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix}$$

Exemples 2.3.1. Prenons deux matrices A(2,3) et B(2,2) tel que :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Le produit de kroneker de A et B est donné par:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ 2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés 2.3.1. *([14])*
Le produit de kronecker satisfait les propriétés suivantes :

1. $(aA) \otimes (bB) = ab(A \otimes B), \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\ , \quad B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ *et* $(a,b) \in \mathbb{R}$

2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$.

3. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

4. $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$.

5. $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$.

6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$, *tel que A et B sont inversibles.*

7. $tr(A \otimes B) = (trA)(trB)$, *où tr : la trace d'une matrice.*

8. $|A \otimes B| = |A|^q |B|^p, \quad A \in {\mathbb{R}_p}^p\ , B \in {\mathbb{R}_q}^q$,
 où $|A|$*: déterminant de A .*

9. *Si $v \neq 0$ et $u \neq 0$ des vecteurs propres de A et B respectivement, $Av = \lambda v$, et $Bu = \gamma u$, donc $v \otimes u$ est un vecteur propre de $A \otimes B$ correspond à la valeur propre $\lambda\gamma$.*

10. *Si $A > 0$ et $B > 0$, alors $\quad A \otimes B > 0$.*

Lemme 2.3.1. *Si P une matrice $(r \times m)$, $\mathbb{X}'$ une matrice $(m \times n)$ et Q une matrice $(n \times s)$, alors :*

$$Vec(P\mathbb{X}'Q) = (Q' \otimes P)Vec(\mathbb{X}')$$

Ce lemme sera très utile pour la manipulation des matrices aléatoires.([5])

Preuve. ([5])
Posons $Q = [q_{ij}] \in \mathcal{M}_{p,s}$ et $\mathbb{X}' = [X_1,...,X_n] \in \mathcal{M}_{n,p}$. Comme:

$$P\mathbb{X}' = [PX_1,...,PX_n], \quad Q' \otimes P = \begin{pmatrix} q_{11}P & \dots & q_{n1}P \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1s}P & \dots & q_{ns}P \end{pmatrix}; \quad Vec(\mathbb{X}') = \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}.$$

On a :

$$(Q' \otimes P)Vec(\mathbb{X}') = \begin{pmatrix} q_{11}P & \dots & q_{n1}P \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1s} & \dots & q_{ns}P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n PX_i q_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n PX_i q_{is} \end{pmatrix}$$

$$= Vec[(\sum_{i=1}^n PX_i q_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n PX_i q_{is})]$$

$$= Vec[(PX_1, \dots, PX_n)Q] = Vec(P\mathbb{X}'Q),$$

c'est ce qu'il faut démontrer.

Lemme 2.3.2. *([5])*
Sous reserve que les produits correspondants soient définis, on a :

1. $Vec(BC) = (\mathbb{I} \otimes B)Vec(C) = (C' \otimes \mathbb{I})Vec(B) = (C' \otimes B)Vec(\mathbb{I})$;
2. $tr(BCD) = (Vec(B'))'(\mathbb{I} \otimes C)Vec(D)$;
3. $tr(B\mathbb{X}'C\mathbb{X}D) = (Vec(\mathbb{X}))'(B'D' \otimes C)Vec(\mathbb{X}) = (Vec(\mathbb{X}))'(DB \otimes C')Vec(\mathbb{X})$.

2.4 Matrices aléatoires

Définition 2.4.1. ([5])
Une matrice aléatoire dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice dont les éléments sont des variables aléatoires réelles, définit comme suit:

$$\mathbb{X} = [X_{ij}] = \begin{pmatrix} X_1{}' \\ . \\ . \\ X_n{}' \end{pmatrix},$$

$X_i(i = 1,..,n)$ sont des vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^p$, où $X_i{}' = (X_{i1},...,X_{ip})$.
Ils convient d'appliquer l'application Vec(.) non pas à $\mathbb{X}$ mais à sa transposée $\mathbb{X}'$, avec $\mathbb{X}' = [X_1,...,X_n] \in \mathcal{M}_{p,n}$.
La forme vectorielle de la matrice $\mathbb{X}$ est donnée comme suit :

$$Vec(\mathbb{X}') = \begin{pmatrix} X_1 \\ . \\ . \\ X_n \end{pmatrix},$$

2.5 Moments d'une matrice aléatoire

2.5.1 Moyenne d'une matrice aléatoire

Soit $\mathbb{X}$ une matrice aléatoire $(n \times p)$ sa moyenne est une matrice $(n \times p)$ donnée comme suit :

$$E(\mathbb{X}) = [\mu_{ij}] = M,$$

pour tout $(i = 1,...,n)$ et $(j = 1,..,p)$; $\mu_{i,j} = E(X_{i,j})$.

2.5.2 Matrice de variance-covariance

La variance de $\mathbb{X}$ est une matrice $(np \times np)$ définie par :

$$\begin{aligned} V(\mathbb{X}) &= [Cov(X_{ij},X_{kl})], \\ V(\mathbb{X}) &= V[Vec(\mathbb{X}')] = (\Omega_{ij}) = [Cov(X_i,X_j)]. \end{aligned}$$

Exemples 2.5.1. Soit:

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

où $X_1 = (X_{11},X_{12})'$, $X_2 = (X_{21},X_{22})'$.

Déterminons $E(\mathbb{X})$ et $V(\mathbb{X})$:

•La moyenne de la matrice $\mathbb{X}$:

$$E(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} E(X_{11}) & E(X_{12}) \\ E(X_{21}) & E(X_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} = M$$

•La variance de la matrice $\mathbb{X}$:

$$V(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix} = \Omega,$$

où $\Omega_{ij} = Cov(X_i,X_j)$.
On peut écrire aussi :

$$V(\mathbb{X}) = V(Vec(\mathbb{X}')) = V \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{21} \\ X_{22} \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} Cov(X_{11},X_{11}) & Cov(X_{11},X_{12}) & \vdots & Cov(X_{11},X_{21}) & Cov(X_{11},X_{22}) \\ Cov(X_{12},X_{11}) & Cov(X_{12},X_{12}) & \vdots & Cov(X_{12},X_{21}) & Cov(X_{12},X_{22}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Cov(X_{21},X_{11}) & Cov(X_{21},X_{12}) & \vdots & Cov(X_{21},X_{21}) & Cov(X_{21},X_{22}) \\ Cov(X_{22},X_{11}) & Cov(X_{22},X_{12}) & \vdots & Cov(X_{22},X_{21}) & Cov(X_{22},X_{22}) \end{pmatrix}$$

La matrice $V(\mathbb{X})$ est une matrice de dimension (4×4).

2.6 Lois normales matricielles

L'introduction de lois normales matricielles est particuliérement utile pour traiter des échantillons de vecteurs aléatoires normaux dans $\mathbb{R}^p$.
Soit $X_1,...,X_n$ un échantillon des vecteurs normaux dans $\mathbb{R}^p$, pour cela en range l'ensemble de ces données sous forme matricielle $(n \times p)$ donnée comme suit :

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1{}' \\ . \\ . \\ . \\ X_n{}' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p},$$

où : n représente la taille de l'échantillon, tandis que p est la dimenssion de l'espace des observations correspond au nombre de colonne de $\mathbb{X}$.([5])

2.6.1 Définitions et exemples :

Soit $X_1,...,X_n$ un échantillon de vecteurs aléatoires indépendants issu de la loi normale $N_p(\mu,\Sigma)$, les moments de $Vec(\mathbb{X}')$ s'expriment comme suit :

$$E(Vec(\mathbb{X}')) = \begin{pmatrix} \mu \\ . \\ . \\ . \\ \mu \end{pmatrix} = 1_n \otimes \mu \quad et \quad V(Vec(\mathbb{X}')) = \begin{pmatrix} \Sigma & \dots & \mathbb{O}_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_p & \dots & \Sigma \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n \otimes \Sigma, \qquad (2,1)$$

où $\mathbb{O}_p$ est la matrice nulle d'ordre p et $1_n = (1,1,....,1)'$ le vecteur unitaire d'ordre n.

D'après (2,1), on peut écrire :

$$Vec(\mathbb{X}') \sim N_{pn}(1_n \otimes \mu, \mathbb{I}_n \otimes \Sigma). \qquad (2,2)$$

Nous considérons maintenant un cas plus général que celui de l'échantillon, des matrices aléatoires $\mathbb{X}$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{M}_{n,p}$. Nous dirons que $\mathbb{X}$ suit une loi normale matricielle dans $\mathcal{M}_{n,p}$ si et seulement si $Vec(\mathbb{X}')$ suit une loi normale vectorielle dans $\mathbb{R}^{np}$.([5])

Définition 2.6.1. ([5])
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ une matrice réelle $(n \times p)$ et Ω une matrice symétrique positive $(np \times np)$, on dit que la matrice aléatoire $\mathbb{X}$ suit la loi normale matricielle $N_{pn}(M,\Omega)$
si $Vec(\mathbb{X}') \sim N_{pn}(Vec(M'),\Omega)$. En résumé

$$\mathbb{X} \sim N_{n,p}(M,\Omega) \rightleftarrows Vec(\mathbb{X}') \sim N_{np}(Vec(M'),\Omega),$$

on dit que $\mathbb{X}$ est une matrice aléatoire gaussienne à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,p}$.

Exemples 2.6.1. Nous reprenons le cas, décrit dans (2.1), où $\mathbb{X}' = [X_1,..,X_n]$, dans le cas ou les $X_1,...,X_n$ forment une suite de vecteurs aléatoires indépendants de même loi $N_p(\mu,\Sigma)$. Alors :

$$M = E(\mathbb{X}) = 1_n \otimes \mu' = 1_n \mu'; \qquad E(Vec(\mathbb{X}')) = Vec(M') = 1_n \otimes \mu$$

et

$$V(Vec(\mathbb{X}')) = \mathbb{I}_n \otimes \Sigma = \Omega.$$

On déduit que:

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} {X_1}' \\ \vdots \\ {X_n}' \end{pmatrix} \sim N_{n,p}(M, \mathbb{I}_n \otimes \Sigma)$$

équivaut a dire que:

$$Vec(\mathbb{X}') = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim N_{pn}(Vec(M'),\mathbb{I}_n \otimes \Sigma).$$

Exemples 2.6.2. Nous considérons maintenant un cas sensiblement généralisé par rapport à celui de l'exemple précédent. Partant, de $\mathbb{X}' = [X_1,..,X_n]$ une matrice à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,p}$ où $X_1,..,X_n$ une suite de vecteurs aléatoires indépendantes de même loi $N_p(\mu,\Sigma)$, nous posons :

$$\mathbb{Y}' = P\mathbb{X}'Q = (PX_1....PX_n)Q \in \mathcal{M}_{r,s} \quad \leftrightarrows \quad \mathbb{Y} = Q'\mathbb{X}P' \in \mathcal{M}_{s,r},$$

où $P \in \mathcal{M}_{r,p}$ et $Q \in \mathcal{M}_{n,s}$ deux matrices supposés constantes (non aléatoires),
d'après le lemme **(2.3.1)**, on obtient :

$$Vec(\mathbb{Y}') = Vec(P\mathbb{X}'Q) = (Q' \otimes P)Vec(\mathbb{X}')$$

en posant:

$$E(\mathbb{X}) = M \leftrightarrows E(Vec(\mathbb{X}')) = Vec(M') = 1_n \otimes \mu,$$

on obtient:

$$\begin{aligned} E[Vec(\mathbb{Y}')] &= E[(Q' \otimes P)Vec(\mathbb{X}')] \\ &= (Q' \otimes P)E[Vec(\mathbb{X}')] \\ &= (Q' \otimes P)Vec(M') \\ &= (Q' \otimes P)(1_n \otimes \mu) \\ &= Q'1_n \otimes P\mu. \end{aligned}$$

Comme $E(\mathbb{X}) = 1_n \otimes \mu' = 1_n\mu'$, alors :

$$E(\mathbb{Y}) = E(Q'\mathbb{X}P') = Q'(1_n\mu')P' = Q'1_n(P\mu)'.$$

De même

$$\begin{aligned} V[Vec(\mathbb{Y}')] &= V((Q' \otimes P)Vec(\mathbb{X}')) \\ &= (Q' \otimes P)V(Vec(\mathbb{X}'))(Q' \otimes P)' \\ &= Q' \otimes P)(\mathbb{I}_n \otimes \Sigma)(Q' \otimes P)' \\ &= (Q' \otimes P)(\mathbb{I}_n \otimes \Sigma)(Q \otimes P'), \end{aligned}$$

d'après les propriétés de kronecker on obtient :

$$V(Vec(\mathbb{Y}')) = (Q'\mathbb{I}_n Q) \otimes (P\Sigma P'),$$

on déduit que:

$$\mathbb{Y} = Q'\mathbb{X}P' \sim N_{s,r}(Q'1_n(P\mu)' \quad , \quad (Q'\mathbb{I}_n Q) \otimes (P\Sigma P')),$$

$$Vec(\mathbb{Y}') \sim N_{sr}(Q'1_n \otimes P\mu \quad , \quad Q'\mathbb{I}_n Q \otimes P\Sigma P').$$

On remarquera ici que les matrices $Q'\mathbb{I}_n Q$ et $P\Sigma P'$ sont toujours positives. Ceci implique que, $Q'\mathbb{I}_n Q \otimes P\Sigma P'$ est positive.([8])

Exemples 2.6.3. Nous considérons maintenant le cas particulier de l'exemple précédent, obtenu en choisissant $P = \mathbb{I}_p$ et $Q \in \mathcal{M}_{n,s}$, dans ce cas on pose :

$$\mathbb{Y} = Q'\mathbb{X} \quad \leftrightarrows \quad \mathbb{Y}' = \mathbb{X}'Q,$$

avec $\mathbb{X}' = [X_1,...,X_n] \in \mathcal{M}_{n,p}$, où $X_1,...,X_n$, désignent des vecteurs aléatoires indépendants de même loi $N_p(\mu,\Sigma)$. Posons $M' = E(\mathbb{X}') = [\mu_1,...,\mu_n]$.

Soit $Q \in \mathcal{M}_{n,s}$ une matrice $(n \times s)$ constante (non aléatoire), et soit $C = Q'Q$ une matrice constante $(s \times s)$, alors :

$$\mathbb{Y} = Q'\mathbb{X} \sim N_{s,p}(Q'M,C \otimes \Sigma).$$

Nous revenons au cas général, où $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_{n,p}$, il se trouve que la loi de la matrice aléatoire normale $\mathbb{X} \sim N_{n,p}(M,\Omega)$ s'exprime simplement lorsque Ω est de la forme $\Omega = C \otimes D$, on retiendra de cet exemple que si $Z \sim N_{n,p}(Q'R,(Q'Q) \otimes \Sigma)$ et $Q \in \mathcal{M}_{r,n}$ une matrice constante, alors:

$$\mathbb{X} = Q'Z \quad \sim \quad N_{n,p}(Q'R,(Q'Q) \otimes \Sigma),$$

est bien de la forme $N_{n,p}(M,C \otimes D)$, avec $M = Q'R \quad ; R = E(Z)$, $C = Q'Q$ et $D = \Sigma$.([5])

2.7 Fonction de densité

Théorème 2.7.1. *([5])*
Soit $\mathbb{X} \sim N_{n,p}(M,C \otimes D)$une matrice aléatoire normale, où $C > 0$ et $D > 0$ sont des matrices définies positives de dimension respectivement $(n \times n)$ et $(p \times p)$, alors $\mathbb{X}$ a une densité relativement à la mesure de lebesgue sur $M_{n,p}$ donnée par :

$$f(\mathbb{X}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}}|C|^{-\frac{p}{2}}|D|^{-\frac{n}{2}} \times etr(-\frac{1}{2}C^{-1}\{\mathbb{X} - M\}D^{-1}\{\mathbb{X} - M'\})$$

$$f(\mathbb{X}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}}|C|^{-\frac{p}{2}}|D|^{-\frac{n}{2}} \times etr(-\frac{1}{2}D^{-1}\{\mathbb{X} - M\}'C^{-1}\{\mathbb{X} - M\}). \tag{2.3}$$

avec $etr = exp(tr)$.

Preuve. ([5])
Posons $Z = Vec(\mathbb{X}')$ et $\mu = Vec(M')$.
On a par hypothèse si $\mathbb{X} \sim N_{n,p}(M,C \otimes D)$ équivaut à ce que
$Z = Vec(\mathbb{X}') \sim N_{pn}(Vec(M'),C \otimes D)$.

Comme $C \otimes D > 0$ ceci implique que la densité de Z dans $\mathbb{R}^{pn}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} g(Z) &= (2\pi)^{-\frac{np}{2}}|C|^{-\frac{p}{2}}|D|^{-\frac{n}{2}} \times \exp(-\frac{1}{2}\{Z - \mu\}'(C \otimes D)^{-1}\{Z - \mu)\}, \\ &= (2\pi)^{-\frac{np}{2}}|C|^{-\frac{p}{2}}|D|^{-\frac{n}{2}} \times \exp(-\frac{1}{2}(Vec\{\mathbb{X} - M\}')'(C \otimes D)^{-1}(Vec\{\mathbb{X} - M\}')), \end{aligned}$$

en posons $\mu = Vec(M')$, et faisant usage de la formule: $|C \otimes D| = |C|^p|D|^n$(propriétés de kroneker).

Nous écrivons maintenant l'identité du lemme **2.3.2** sous la forme particulière

$$tr(\mathfrak{B}\mathcal{X}'\mathcal{C}\mathcal{X}) = (Vec(\mathcal{X}))'(\mathfrak{B}' \otimes \mathcal{C})Vec(\mathcal{X}) \qquad (2.4)$$

Comme $(C \otimes D)^{-1} = C^{-1} \otimes D^{-1}$, l'observation que les matrices C^{-1} et D^{-1} sont définies positives, permet d'appliquer (2.4), avec $\mathcal{X} = \{\mathbb{X} - M\}'$; $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = C^{-1}$ et $\mathcal{C} = D^{-1}$, pour obtenir l'identité

$$\begin{aligned}(Z-\mu)'(C \otimes D)^{-1}(Z-\mu) &= (Vec\{\mathbb{X} - M\}')'(C^{-1} \otimes D^{-1})(Vec\{\mathbb{X} - \mathbb{M}\}') \\ &= tr(C^{-1}\{\mathbb{X} - M\}D^{-1}\{\mathbb{X} - M\}'),\end{aligned}$$

en appliquant l'identité $tr(AB) = tr(BA)$, avec $A = C^{-1}(\mathbb{X} - M)$ et $B = D^{-1}(\mathbb{X} - M)'$, on obtient :

$$tr(C^{-1}\{\mathbb{X} - M\}D^{-1}\{\mathbb{X} - M\}') = tr(D^{-1}\{\mathbb{X} - M\}'C^{-1}\{\mathbb{X} - M\}),$$

d'où

$$f(\mathbb{X}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}}|C|^{-\frac{p}{2}}|D|^{-\frac{n}{2}} \times \exp[tr(-\frac{1}{2}D^{-1}\{\mathbb{X} - M\}'C^{-1}\{\mathbb{X} - M\})],$$

Comme $\exp(tr(A)) = etr(A)$, avec A une matrice carré a la densité :

$$f(\mathbb{X}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}}|C|^{-\frac{p}{2}}|D|^{-\frac{n}{2}} \times etr(-\frac{1}{2}D^{-1}\{\mathbb{X} - M\}'C^{-1}\{\mathbb{X} - M\}).$$

C'est ce qu'il faut démontrer .

Chapitre 3

Loi de Wishart

3.1 Introduction

La loi de Wishart est une loi de probabilité d'une matrice aléatoire symétrique définie positive. Elle fût introduite par Wishart (1928) et sa découverte poussa de manière importante le développement de l'analyse multivariée .
Ce chapitre s'organise en trois parties:
La première partie comporte les définitions nécessaires de la loi de Wishart (fonction de densité, fonction de répartition, les moments, la fonction caractéristique et génératrice.).
Dans la deuxième partie, on a effectué deux exemples de simulation :
• Dans le premier exemple, on a simulé une loi de Wishart en utilisant la décomposition de barelett .
• Le deuxième exemple, est consacré à l'étude empirique sur la matrice de variance-covariance et la moyenne de la loi de Wishart .

Dans la troisième partie, nous donnons la relation de la loi de Wishart avec d'autres lois de probabilité .

3.2 Matrice aléatoire de loi de Wishart

Définition 3.1. Soit $\mathbb{X}$ une matrice aléatoire $(n \times p)$, où $(n \geq p)$ dont les linges sont linéarement indépendantes et proviennent d'une loi normale p-dimensionnelle d'espérance 0 (0 est le vecteur nul) et une matrice de variance-covariance Σ; c'est-a-dire $\mathbb{X}$ est de la forme:([9])

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ . \\ . \\ X'_n \end{pmatrix},$$

avec X_i, $\forall(i = 1,..,n)$ est un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^p$ tel que, $X_i' = (X_{i1},X_{i2},...,X_{ip})$, où $X_i \sim N_p(0,\Sigma)$. n représente la taille de l'échantillon et p la dimension des X_i .
On définit la matrice aléatoire $(p \times p)$(SDP) W par :

$$W = \mathbb{X}'\mathbb{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i X_i'.$$

W suit une loi de Wishart, de paramètre n et Σ, où n représente le degré de liberté, on écrit :

$$W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$$

3.3 Fonction de densité

Théorème 3.3.1. *Soit W une matrice aléatoire $(p \times p)$ de loi de Wishart, $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$, avec $(n \geq p)$. Sa fonction de densité est donnée par :*

$$f(W) = \frac{|W|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}W)\}}{\Gamma_p(\frac{n}{2})2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}; \quad n \geq p, \quad W > 0. \tag{3.1}$$

où $\Gamma_p(a)$ est la fonction Gamma multivariée tel que :

$$\Gamma_p(a) = \int_{A>0} |A|^{a-\frac{p+1}{2}} \exp\{tr(-A)\}dA,$$

où A est une matrice $(p \times p)$ définie positive . En pratique en utilise:

$$\Gamma_p(a) = \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod_{j=1}^{p} \Gamma[a + (1 - j)].$$

Remarques :

1. la loi de Wishart est liée à la fonction gamma multivariée donc c'est possible d'obtenir cette fonction de densité par l'intermédiaire de cette fonction, ce qu'on va voir dans la démonstration .

Preuve. ([9])
Commençons par l'evaluation de l'intégrale suivant:

$$\int_{A>0} \exp\{tr(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}A)\}|A|^{a-\frac{p+1}{2}}dA \tag{3.2}$$

où A est une matrice $(p \times p)$ définie positive et Σ une matrice symétrique définie positive. Posons le changement de variable suivant :

$$A = (2^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}})Y(2^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}})',$$

avec Y est une matrice symétrique arbitraire. Le jacobien associé à ce changement est donné par :

$$J(A \longrightarrow Y) = |2^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}|^{p+1},$$

d'où:

$$\begin{aligned} dA &= |2^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}|^{p+1}dY \\ &= 2^{\frac{p(p+1)}{2}}|\Sigma|^{\frac{p+1}{2}}dY \end{aligned}$$

(Voir la propriété **4.7.1** de l'annexe A).

d'où la formule **(3.2)** devient:

$$\int_{Y>0} \exp\{tr(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}(2^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}})Y(2^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}})')\}$$
$$\times|(2^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}})Y(2^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}})')|^{a-\frac{p+1}{2}}2^{\frac{p(p+1)}{2}}|\Sigma|^{\frac{p+1}{2}}dY.$$

Après simplifications :

$$\int_{Y>0} \exp\{tr(-Y)\}|2\Sigma Y|^{a-\frac{p+1}{2}} 2^{\frac{p(p+1)}{2}} |\Sigma|^{\frac{p+1}{2}} dY = \int_{Y>0} \exp\{tr(-Y)\}|\Sigma|^{a}|Y|^{a-\frac{p+1}{2}} 2^{ap} dY$$

$$= \Gamma_p(a) 2^{ap} |\Sigma|^{a}.$$

Donc:

$$\int_{A>0} \frac{\exp\{tr(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}A)\}|A|^{a-\frac{p+1}{2}}}{\Gamma_p(a)2^{ap}|\Sigma|^{a}} dA = 1,$$

prenons $a = \frac{n}{2}$, on aura:

$$\int_{A>0} \frac{\exp\{tr(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}A)\}|A|^{\frac{n-p+1}{2}}}{\Gamma_p(\frac{n}{2})2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}} dA = 1$$

On constate donc que la matrice aléatoire A suit une loi de Wishart puisque par definition d'une fonction de densité l'intégrale de celle ci égale à 1 .

3.4 Fonction de Répartition

Nous présentons quelques définitions dont on aura besoin dans la suite.

Définition 3.4.1. ([9])
Soit A une matrice symétrique, $(p \times p)$ et soit V_k l'espace vectoriel de polynômes homogènes de degré k en $\frac{1}{2}p(p+1)$ éléments distincts de A .

l'espace V_k peut être écrit comme une somme directe de sous-espaces invariants irréductibles V_k où $k = (k_1,..,k_p)$, $k_1 + ... + k_p = k$ et $k_1 \geq k_2 \geq .... \geq k_p \geq 0$.

Alors, le polynôme $[tr(A)]^k \in V_k$ est associé à une partition unique de polynômes $\mathcal{C}_k(A) \in V_k$ tel que :

$$[tr(A)]^k = \sum_k \mathcal{C}_k(A).$$

Définition 3.4.2. ([9])
Le polynôme zonal, $\mathcal{C}_k(A)$, est la représentation de $[tr(A)]^k$ dans le sous-espace V_k.

Définition 3.4.3. ([9])
La fonction hypergéométrique généralisée à argument matriciel est définie par :

$$F_{p,q}(a_1,..,a_p,b_1,..,b_q;A) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k}\frac{(a_1)k.....(a_p)k}{k!(b_1)k..(b_q)k}\mathcal{C}_k(A),$$

où A est une matrice symétrique, $\sum_k$ représente la somme de toutes les partitions de k, a_i, $(i = 1,..,p)$; b_j, $(j = 1,..,q)$ sont des nombres complexes arbitraires et $\mathcal{C}_k(A)$ est le polynôme zonal de A correspondant à k.

Remarque 3.4.1. Si p et q égales à zero, alors :

$$F_{0,0} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k}\frac{\mathcal{C}_k(A)}{k!} = \exp[tr(A)].$$

Théorème 3.4.1. ***(Fonction de répartition)****([9])*
Soit W une matrice aléatoire $(p \times p)$ de loi de Wishart, tel que $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$; $n \geq p$, sa fonction de répartition est donnée par :

$$P(W < \Lambda) = \frac{\Gamma_p[\frac{1}{2}(p+1)]|\Lambda|^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}\Gamma_p[\frac{1}{2}(n+p+1)]} \times F_{1,1}[\frac{n}{2};\frac{1}{2}(n+p+1);-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\Lambda], \quad (3.3)$$

où Λ est une matrice inversible $(p \times p)$, et $F_{1,1}$ est la fonction hypergéométrique pour $(p = 1,\ q = 1)$

Preuve. ([9])
Par définition d'une fonction de répartition d'une matrice aléatoire on a :

$$\begin{aligned} P(W < \Lambda) &= \int_{0<T<\Lambda} f_W(T)dT, \\ &= \frac{1}{\Gamma_p(\frac{n}{2})2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}\int_{0<T<\Lambda}|T|^{\frac{n-p-1}{2}}\exp(tr(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}T))dT \end{aligned}$$

de plus, si $W < \Lambda$ alors $\Lambda = W + X$, où X une matrice définie positive .
Considérons le changement de variable : $B = \Lambda^{-\frac{1}{2}} W (\Lambda^{-\frac{1}{2}})'$, Le jacobien associe à notre transformation est :

$$J([(W,X) \to (\Lambda,B)]) = |\Lambda|^{\frac{p+1}{2}},$$

(Voir la propriété 4.7.3, Annexe A) .
Donc :

$$\begin{aligned}
P(W < \Lambda) &= \frac{1}{\Gamma_p(\frac{n}{2}) 2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \int_{0<T<\Lambda} |T|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\{tr(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}T)\} dT \\
P(W < \Lambda) &= \frac{1}{\Gamma_p(\frac{n}{2}) 2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \int_{0<B<I_p} |\Lambda^{\frac{1}{2}} B \Lambda^{\frac{1}{2}}|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\{tr(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\Lambda^{\frac{1}{2}} B \Lambda^{\frac{1}{2}})\} \times |\Lambda|^{\frac{P+1}{2}} dB \\
P(W < \Lambda) &= \frac{1}{\Gamma_p(\frac{n}{2}) 2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \int_{0<B<I_p} |\Lambda^{\frac{1}{2}} B \Lambda^{\frac{1}{2}}|^{\frac{n-p-1}{2}} |\Lambda|^{\frac{P+1}{2}} \times F_{0,0}(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\Lambda^{\frac{1}{2}} B \Lambda^{\frac{1}{2}}) dB
\end{aligned}$$

Après simplification on aura :

$$P(W < \Lambda) = \frac{1}{\Gamma_p(\frac{n}{2}) 2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \int_{0<B<I_p} |B|^{\frac{n-p-1}{2}} |\Lambda|^{\frac{n}{2}} \times F_{0,0}(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\Lambda^{\frac{1}{2}} B \Lambda^{\frac{1}{2}}) dB$$

$$P(W < \Lambda) = \frac{|\Lambda|^{\frac{n}{2}}}{\Gamma_p(\frac{n}{2}) 2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \int_{0<B<I_p} |B|^{\frac{n-p-1}{2}} \times F_{0,0}(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\Lambda^{\frac{1}{2}} B \Lambda^{\frac{1}{2}}) dB \quad (3.4)$$

Lemme 3.4.1. *([9])*
Soit R une matrice symétrique $(p \times p)$ et S une matrice définie positive, alors:

$$\int_{0<B<I_p} |S|^{a-\frac{p+1}{2}} |I_p - S|^{b-\frac{p+1}{2}} F(n,m)(a_1,..,a_m; b_1,..b_n; RS) dS$$

$$= \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(b)}{\Gamma_p(a+b)} F_{(n+1,m+1)}(a_1,..,a_m,a; b_1,..b_n; a+b; R).$$

Nous utilisons ce lemme pour la suite de la démonstration.
Prenons $a = \frac{n}{2}$ et $b = \frac{p+1}{2}$, alors la formule (3.4) devient :

$$P(W < \Lambda) = \frac{|\Lambda|^{\frac{n}{2}}}{\Gamma_p(\frac{n}{2})2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \int_{0<B<I_p} |B|^{\frac{n}{2}-\frac{p+1}{2}}|I_p - B|^{\frac{p+1}{2}-\frac{p+1}{2}} \times F_{0,0}(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\Lambda B)dB$$

$$= \frac{|\Lambda|^{\frac{n}{2}}}{\Gamma_p(\frac{n}{2})2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma_p(\frac{n}{2})\Gamma_p(\frac{p+1}{2})}{\Gamma_p(\frac{n+p+1}{2})} \times F_{1,1}(\frac{n}{2}; \frac{n}{2} + \frac{p+1}{2}; -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\Lambda),$$

d'où:

$$P(W < \Lambda) = \frac{|\Lambda|^{\frac{n}{2}}\Gamma_p(\frac{p+1}{2})}{2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}\Gamma_p(\frac{n+p+1}{2})} \times F_{1,1}(\frac{n}{2}; \frac{n+p+1}{2}; -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\Lambda).$$

C'est qu'il faut démontrer .

3.5 Moments de la loi de Wishart

3.5.1 Espérance :

Propriétés 3.5.1. *Soit W une matrice aléatoire $(p \times p)$ de loi de Wishart tel que $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$, son espérance est définit comme:*

$$E[W] = n\Sigma \tag{3.5}$$

Preuve. On a :

$$W = \sum_{i=1}^{n} X_i X_i',$$

tel que les vecteurs X_i sont iid et $X_i \sim N_p(0,\Sigma)$.

$$E[W] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i X_i'] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i X_i'] = \sum_{i=1}^{n} \Sigma = n\Sigma.$$

car :

$$\Sigma = E[X_i X_i'] - E[X_i]E[X_i'],$$

de plus

$$E[X_i] = E[X_i'] = 0$$

3.5.2 La variance des éléments de W

Soit W_{ij} et W_{kl} deux éléments d'une matrice aléatoire de loi de Wishart, la covariance entre W_{ij} et W_{kl} est donné par :

$$Cov(W_{ij},W_{kl}) \quad = \quad n(\Sigma_{ik}\Sigma_{jl} + \Sigma_{il}\Sigma_{jk}) \tag{3.6}$$

La variance des l'éléments (ij) de W notée W_{ij} se simplifie en :

$$V(W_{ij}) \quad = \quad Cov(W_{ij},W_{ij}) = n(\Sigma_{ii}\Sigma_{jj} + {\Sigma_{ij}}^2) \tag{3.7}$$

où Σ_{ij} l'éléments (ij) de la matrice Σ.

3.5.3 Matrice de variance-covariance

Avant d'énoncer le théorème qui donne la matrice de variance-covariance de W, $V(W)$, nous présentons quelques definitions dont on aura besoin .

Définition 3.5.1. (Matrice de commutation.)
La matrice de commutation K_p est une matrice de blocs dont la position (i,j) est notée $K_{i,j}$: $K_{i,j} = e_j e_i{}'$, où $K_{i,j} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $e_j = (0,...,0,1,0,..,0)$ (c'est-à-dire le j-ième éléments vaut 1 et les autres 0).
K_p peut s'écrire comme suit:

$$K_p = (e_j e_i{}') \in \mathcal{M}_{(p^2,p^2)}(\mathbb{R}).$$

Exemples 3.5.1. Pour p=2, on a:

$$K_2 = \begin{pmatrix} K_{11} & \vdots & K_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{21} & \vdots & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 0 & 0 \\ 0 & 0 & : & 1 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 1 & : & 0 & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

En effet :

$K_{11} = e_1{e_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1{,}0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$K_{12} = e_2{e_1}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1{,}0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$K_{2,1} = e_1{e_2}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0{,}1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$K_{2,2} = e_2{e_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0{,}1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propriétés 3.5.2. *([14])*
Si $A{,}B \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ deux matrices et K_p la matrice de commutation alors les propretés suivantes sont vérifient:

1. $K_p = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p e_i{e_j}' \otimes e_j{e_i}'$,
2. $K_p Vec(A) = Vec(A')$,
3. $K_p(A \otimes B) = (A \otimes B)K_p$.

Théorème 3.5.1. *([9])*
Soit W une matrice aléatoire, $(p \times p)$, de loi de Wishart avec les paramètres Σ et $n \geq p$. La matrice de variance-covariance de celle-ci est de la forme:

$$V(W) \;=\; n(\Sigma \otimes \Sigma)(K_p + \mathbb{I}_{p^2}), \tag{3.8}$$

où K_p est la matrice $p^2 \times p^2$ de commutation et $\mathbb{I}_{p^2}$ est la matrice d'identité $p^2 \times p^2$

Preuve. On sait que $X_i \sim N_p(0{,}\Sigma){,}(i = 1{,}..{,}n)$ et soit la matrice W définie comme avant

$$W = \mathbb{X}\mathbb{X}' = \sum_{i=1}^{n} X_i{X_i}',$$

alors :

$$V(W) = V[\sum_{i=1}^{n} X_i{X_i}']$$

par indépendance des X_i on aura:

$$\begin{aligned} V(W) &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i{X_i}') \\ V(W) &= nV(X_i{X_i}') \end{aligned}$$

Calculons $V(X_i {X_i}')$:
Notons X_i par X, car toutes les variables X_i, $(i = 1,..,n)$ suivent la même loi.
Posons $X = Az$, où $z \sim N_p(0,\mathbb{I}_p)$ et $\Sigma = AA'$, donc:

$$V(W) = nV(Azz'A'),$$

comme $V(W) = V[Vec(W')] = V[Vec(W)]$, car W est symétrique donc $W = W'$

$$\begin{aligned}
V[Vec(W)] &= nV[Vec(Azz'A')] \\
V[Vec(W)] &= nV[(A \otimes A)Vec(zz')] \\
V[Vec(W)] &= n(A \otimes A)V[(Vec(zz'))](A' \otimes A')
\end{aligned}$$

Or $V[Vec(zz')]$ est déduite par [Magnus et Neudecker (1979)] comme suit :([4])

$$V[Vec(zz')] = \mathbb{I}_{p^2} + K_p,$$

alors:

$$\begin{aligned}
V[Vec(W)] &= n(A \otimes A)(\mathbb{I}_{p^2} + K_p)(A' \otimes A'), \\
V[Vec(W)] &= n[(A \otimes A)\mathbb{I}_{p^2}(A' \otimes A') + (A \otimes A)K_p(A' \otimes A')], \\
V[Vec(W)] &= n[(AA') \otimes (AA')\mathbb{I}_{p^2} + (AA') \otimes (AA')K_p], \\
V[Vec(W)] &= n[(\Sigma \otimes \Sigma)\mathbb{I}_{p^2} + (\Sigma \otimes \Sigma)K_p], \\
V[Vec(W)] &= n[(\Sigma \otimes \Sigma)(\mathbb{I}_{p^2} + K_p)].
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer .

3.6 Fonction caractéristique:

Soit W une matrice aléatoire $(p \times p)$ de loi de Wishart tel que $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$ avec $n \geq p$. Sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\phi_W(Z) = E[\exp\{tr(iZW)\}] = |I_p - 2iZ\Sigma|^{\frac{-n}{2}}, \tag{3.9}$$

où Z est une matrice symétrique de dimension $(p \times p)$.

Preuve. ([9])
Par définitions on a :

$$\phi(Z) = E[\exp\{tr(iZW)\}] = \int_{W>0} \exp[tr(iZW)] f_W dW.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\phi_W(Z) &= \int_{W>0} \exp\{tr(iZW)\} \frac{|W|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2} tr(\Sigma^{-1}W)\}}{\Gamma_p(\frac{n}{2}) 2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} dW \\
\phi_W(Z) &= \frac{1}{\Gamma_p(\frac{n}{2}) 2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \int_{W>0} \exp\{tr(iZW)\} |W|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2} tr(\Sigma^{-1}W)\} dW \\
\phi_W(Z) &= \frac{1}{\Gamma_p(\frac{n}{2}) 2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \int_{W>0} |W|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\{tr(-\frac{1}{2}(I_p - 2iZ\Sigma)\Sigma^{-1}W)\} dW.
\end{aligned}$$

Remarque 3.6.1. .
En imposant le changement de variable $A = T^{\frac{1}{2}} W T^{\frac{1}{2}}$ associé
au Jacobien $J(W \to A) = |T|^{\frac{p+1}{2}}$ à la loi de gamma multivariée, on observe que :

$$\begin{aligned}
\Gamma_p(a) &= \int_{A>0} |A|^{a-\frac{p+1}{2}} \exp\{tr(-A)\} dA \\
&= \int_{W>0} |T^{\frac{1}{2}} W T^{\frac{1}{2}}|^{a-\frac{p+1}{2}} \exp\{tr(-T^{\frac{1}{2}} W T^{\frac{1}{2}})\} |T|^{\frac{P+1}{2}} dW \\
&= \int_{W>0} |W|^{a-\frac{p+1}{2}} |T|^{a} |T|^{-\frac{P+1}{2}} \exp\{tr(-WT)\} |T|^{\frac{P+1}{2}} dW \\
&= \int_{W>0} |W|^{a-\frac{p+1}{2}} \exp\{tr(-TW)\} |T|^{a} dW.
\end{aligned}$$

D'ou:

$$\int_{W>0} |W|^{a-\frac{p+1}{2}} \exp\{tr(-TW)\} dW = \Gamma_p(a) |T|^{-a}$$

Insérons $\quad T = \frac{1}{2}(I_p - 2iZ\Sigma)\Sigma^{-1} \quad$ et $\quad a = \frac{n}{2}$,
on aura :

$$\int_{W>0} |W|^{\frac{n}{2}-\frac{p+1}{2}} \exp\{tr(-\frac{1}{2}W\Sigma^{-1}(I_p - 2iZ\Sigma))\}dW \;=\; \Gamma_p(\frac{n}{2})|\frac{1}{2}(I_p - 2iZ\Sigma)\Sigma^{-1}|^{-\frac{n}{2}}.$$

Donc:

$$\phi_W(Z) \;=\; \frac{\Gamma_p(\frac{n}{2})}{\Gamma_p(\frac{n}{2})2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \quad |\frac{1}{2}(I_p - 2iZ\Sigma)\Sigma^{-1}|^{-\frac{n}{2}}$$

$$\phi_W(Z) \;=\; |I_p - 2iZ\Sigma|^{-\frac{n}{2}}.$$

3.7 Fonction génératrice des moments :

Proposition. *([9])*
Soit W une matrice aléatoire $(p \times p)$, de loi de Wishart avec les paramètres Σ et $n \geq p$, sa fonction génératrice des moments ca veut dire des moments conjointe W_{11},W_{12},..,W_{pp} est donnée comme suit:

$$M_W(Z) \;=\; E[\exp\{tr(ZW)\}] = |I_p - 2Z\Sigma|^{-\frac{n}{2}}, \tag{3.10}$$

où Z est une matrice symétrique $(p \times p)$

Preuve. On suit la même procedure de la démonstration précédente, il suffit juste de poser : $\quad T = \frac{1}{2}(I_p - 2Z\Sigma)\Sigma^{-1} \quad$ *et* $\quad a = \frac{n}{2}$.

$$\int_{W>0} |W|^{\frac{n}{2}-\frac{p+1}{2}} \exp[tr\{-W(\frac{1}{2}(I_p - 2Z\Sigma)\Sigma^{-1})\}]dW \;=\; \Gamma_p(\frac{n}{2})|\frac{1}{2}(I_p - 2Z\Sigma)\Sigma^{-1}|^{-\frac{n}{2}},$$

on aura :

$$M_W(Z) \;=\; \frac{\Gamma_p(\frac{n}{2})}{\Gamma_p(\frac{n}{2})2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}|\frac{1}{2}(I_p - 2Z\Sigma)|^{-\frac{n}{2}},$$

$$M_W(Z) \;=\; |I_p - 2Z\Sigma|^{-\frac{n}{2}}.$$

Propriétés 3.7.1. *([11])*

La loi de Wishart satisfait les propriétés suivantes:

1. *Si* $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$ *et* B *est une matrice* $(p \times m)$, *on a :*

$$B'WB \sim \mathbb{W}_p(B'\Sigma B,n),$$

2. *Si* $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$, *où* $\Sigma > 0$ *on a:*

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}W\Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim \mathbb{W}_p(\mathbb{I}_p,n),$$

3. *Soit* W_i *des matrices indépendantes qui suivent* $\mathbb{W}_p(n,\Sigma)$, $(i = 1,...,k)$, *alors*

$$\sum_{i=1}^{k} W_i \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma),$$

où $n = n_1 + ... + n_k$.

4. *Si* W_1 *et* W_2 *sont indépendantes et satisfait* $W_1 + W_2 = W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$ *et* $W_1 \sim \mathbb{W}_p(n_1,\Sigma)$, *alors*

$$W_2 \sim \mathbb{W}_p(n - n_1,\Sigma).$$

5. *Par la loi des grands nombres et le théoreme de cramer-wold, on a*

$$\frac{W_n}{n} \to \Sigma$$

(convergence en probabilité), pour $n \to \infty$.

3.8 Inference via la décomposition de Bartlett

Définition 3.8.1. ([9])
Si W est une matrice aléatoire $(p \times p)$ de loi de Wishart avec les paramètres $\Sigma = \mathbb{I}_p$ et $n \geq p$, alors celle ci provienne d'une loi de Wishart standard.

L'orsque $\Sigma = \mathbb{I}_p$, la loi de Wishart standard $\mathbb{W}_p(n,\mathbb{I}_p)$ admet une décomposition simple, décrite dans le théorème suivant:

Théorème 3.8.1. *(Décomposition de Bartlett)([5])*
Soit $W \sim \mathbb{W}_p(n,\mathbb{I}_p)$ une matrice aléatoire de Wishart standard avec $n \geq p$ et soit $W = T'T$ la décomposition unique de W obtenue lorsque $T = (t_{i,j})$ est une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux $t_{i,i}$ positifs pour $1 \leq i \leq p$. Alors, les composantes $t_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq p$ de T sont des variables aléatoire indépendantes, telles que ${t_{i,i}}^2 \sim {\chi^2}_{n-i+1}$, pour $1 \leq i \leq p$ et $t_i{,}j \sim N(0,1)$ pour $1 \leq i \leq j \leq p$.

Démonstration :(Deheuvels(2013),page 128).
Ce théorème nous permet d'obtenir une matrice aléatoire de Wishart standard de manière relativement simple.

Algorithme d'échantillonnage d'une matrice aléatoire de loi de Wishart standard
(Voir: Annexe B, Code matlab B.1).

1. Assigner une dimension fixe p et une entier $n \geq p$.
2. obtenir une matrice triangulaire supérieure T, via la décomposition de bartlett .
3. calculer la matrice de Wishart telle que $W = T'T$.

Exemple. considérons les paramètres, $n = 4$ et une matrice Σ (SDP) de dimension 3×3.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

La matrice triangulaire supérieure T construire via la decomposition de bartlett.

$$T = \begin{pmatrix} 3.2656 & 0.5469 & 0.9575 \\ 0 & 2.1761 & 0.9706 \\ 0 & 0 & 0.3675 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons une matrice aléatoire $W_3(4,\Sigma)$.

$$W = T'T = \begin{pmatrix} 10.6644 & 1.7859 & 3.1269 \\ 1.7859 & 5.0344 & 2.6357 \\ 3.1269 & 2.6357 & 1.9939 \end{pmatrix}$$

Mais comment obtenir une matrice aléatoire de loi de Wishart non standard?

Théorème 3.8.2. *([9])*
Soit W une matrice aléatoire, $p \times p$, de loi de Wishart avec les paramètres $\Sigma = \mathbb{I}_p$ et $n \geq p$ et soit P une matrice $p \times p$ non singulière telle que $A = PP'$, alors:

$$PWP' \sim \mathbb{W}_p(n, P\mathbb{I}P' = A).$$

D'après ce théorème on peut écrire :

$$W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma) \quad = \quad P\mathbb{W}_p(n,\mathbb{I}_p)P',$$

où $\Sigma = PP'$ et $\mathbb{W}_p(n,\mathbb{I}_p)$ la loi de Wishart standard.

D'après le théorème il est préférable de considérer une décomposition de la matrice symétrique définie positive Σ. Dans le context suivant nous allons utiliser la factorisation de cholesky qui nous permet d'obtenir une matrice triangulaire inférieure P tel que $\Sigma = PP'$.

pour plus de détails sur la factorisation de cholesky . Voir Annexe A .

Algorithme d'échantillonnage d'une matrice aléatoire de loi de Wishart non standard
(Voir: Annexe B, Code matlab B.2).

1. Assigner une dimension fixe p et un entier $n \geq p$

2. obtenir la factorisation de cholesky de Σ tel que $\Sigma = PP'$
3. obtenir une matrice triangulaire supérieure T via la decomposition de barlett
4. calculer $W1 = T'T$, où W1 est la loi de Wishart standard .
5. Calculer $W = PW1P'$.

Exemple d'application : Simulation de la loi de Wishart avec la décomposition de Barlett:
Considérons les paramètres, $n = 4$ et une matrice symétrique définie positive de dimension 3×3:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.4000 \\ 0.5000 & 1.0000 & 0.8000 \\ 0.4000 & 0.8000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

La factorisation de cholesky de celle-ci est:

$$P = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.5000 & 0.8660 & 0 \\ 0.4000 & 0.6928 & 0.6000 \end{pmatrix}$$

Prenons une matrice aléatoire triangulaire supérieure T construire selon l'étape 3 de l'algorithme d'échantillonnage d'une matrice aléatoire de loi de Wishart telle que:

$$T = \begin{pmatrix} 3.2656 & 0.5469 & 0.9575 \\ 0 & 2.1761 & 0.9700 \\ 0 & 0 & 0.3675 \end{pmatrix}.$$

Alors, nous obtenons une matrice aléatoire $W_3(4,\Sigma)$:

$$W = P(T'T)P' = \begin{pmatrix} 10.6644 & 6.8788 & 7.3792 \\ 6.8788 & 7.9886 & 8.6985 \\ 7.3792 & 8.6985 & 9.5227 \end{pmatrix}.$$

3.9 Etude empirique :

Nous simulons un échantillon de 10 000 matrices aléatoires de la loi de $\mathbb{W}_p(n,\Sigma)$, on va comparer la matrice de variance-covariance et la moyenne empiriques de W avec leurs valeurs théoriques pour les différentes valeurs de degrés de liberté ($n = 4$,$n = 20$,30).

On prend Σ comme suit:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.4000 \\ 0.5000 & 1.0000 & 0.8000 \\ 0.4000 & 0.8000 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

(Voir: Annexe B, Code matlab B.3, B.4).

Pour n=4, on obtient la moyenne et la variance empiriques suivantes :

la matrice moyenne empirique :

$$M_e = \begin{pmatrix} 3.9595 & 1.9578 & 1.5593 \\ 1.9578 & 3.9715 & 3.1897 \\ 1.5593 & 3.1897 & 4.0218 \end{pmatrix}$$

La matrice de variance-covariance empirique :

$$V_e = \begin{pmatrix} 7.9976 & 3.9551 & 3.0940 & 3.9551 & 1.9486 & 1.5562 & 3.0940 & 1.5562 & 1.2113 \\ 3.9551 & 4.9417 & 3.9323 & 4.9417 & 3.9552 & 3.1552 & 3.9323 & 3.1552 & 2.5111 \\ 3.0940 & 3.9323 & 4.5596 & 3.9323 & 3.1790 & 3.2580 & 4.5596 & 3.2580 & 3.1769 \\ 3.9551 & 4.9417 & 3.9323 & 4.9417 & 3.9552 & 3.1552 & 3.9323 & 3.1552 & 2.5111 \\ 1.9486 & 3.9552 & 3.1790 & 3.9552 & 7.8806 & 6.3519 & 3.1790 & 6.3519 & 5.1192 \\ 1.5562 & 3.1552 & 3.2580 & 3.1552 & 6.3519 & 6.5571 & 3.2580 & 6.5571 & 6.4459 \\ 3.0940 & 3.9323 & 4.5596 & 3.9323 & 3.1790 & 3.2580 & 4.5596 & 3.2580 & 3.1769 \\ 1.5562 & 3.1552 & 3.2580 & 3.1552 & 6.3519 & 6.5571 & 3.2580 & 6.5571 & 6.4459 \\ 1.2113 & 2.5111 & 3.1769 & 2.5111 & 5.1192 & 6.4459 & 3.1769 & 6.4459 & 8.1089 \end{pmatrix}$$

.

Nous savons que, la matrice des espérances théoriques d'une matrice aléatoire de loi $\mathbb{W}_p(n,\Sigma)$ est égale à $n \times \Sigma$, pour notre exemple nous obtenons:

La matrice moyenne théorique :

$$M_t = 4 \times \Sigma = 4 \times \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.4000 \\ 0.5000 & 1.0000 & 0.8000 \\ 0.4000 & 0.8000 & 1.0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.0000 & 2.0000 & 1.6000 \\ 2.0000 & 4.0000 & 3.2000 \\ 1.6000 & 3.2000 & 4.0000 \end{pmatrix}$$

De plus, en se référant au théorème 1.5.1, la matrice de variance-covariance théorique d'une matrice aléatoire de loi de $\mathbb{W}_p(n,\Sigma)$ est obtenue d'après la formule suivante :

$$V[Vec(W)] = n \times (\Sigma \otimes \Sigma)(K_p + I_{P^2}).$$

La matrice de variance-covariance théorique

$$V_t = \begin{pmatrix} 8.0000 & 4.0000 & 3.2000 & 4.0000 & 2.0000 & 1.6000 & 3.2000 & 1.6000 & 1.2800 \\ 4.0000 & 5.0000 & 4.0000 & 5.0000 & 4.0000 & 3.2000 & 4.0000 & 3.2000 & 2.5600 \\ 3.2000 & 4.0000 & 4.6400 & 4.0000 & 3.2000 & 3.2800 & 4.6400 & 3.2800 & 3.2000 \\ 4.0000 & 5.0000 & 4.0000 & 5.0000 & 4.0000 & 3.2000 & 4.0000 & 3.2000 & 2.5600 \\ 2.0000 & 4.0000 & 3.2000 & 4.0000 & 8.0000 & 6.4000 & 3.2000 & 6.4000 & 5.1200 \\ 1.6000 & 3.2000 & 3.2800 & 3.2000 & 6.4000 & 6.5600 & 3.2800 & 6.5600 & 6.4000 \\ 3.2000 & 4.0000 & 4.6400 & 4.0000 & 3.2000 & 3.2800 & 4.6400 & 3.2800 & 3.2000 \\ 1.6000 & 3.2000 & 3.2800 & 3.2000 & 6.4000 & 6.5600 & 3.2800 & 6.5600 & 6.4000 \\ 1.2800 & 2.5600 & 3.2000 & 2.5600 & 5.1200 & 6.4000 & 3.2000 & 6.4000 & 8.0000 \end{pmatrix}.$$

Pour n=20, on obtient :

la matrice moyenne empirique :

$$M_e = \begin{pmatrix} 20.0099 & 10.0077 & 8.0119 \\ 10.0077 & 20.0606 & 16.0786 \\ 8.0119 & 16.0786 & 20.0960 \end{pmatrix}$$

La matrice de variance-covariance empirique

$$V_e = \begin{pmatrix} 40.4148 & 20.4784 & 16.6236 & 20.4784 & 10.5851 & 8.4774 & 16.6236 & 8.4774 & 6.8096 \\ 20.4784 & 25.8678 & 20.7565 & 25.8678 & 20.9944 & 16.8109 & 20.7565 & 16.8109 & 13.4677 \\ 16.6236 & 20.7565 & 24.0287 & 20.7565 & 16.6571 & 17.0865 & 24.0287 & 17.0865 & 16.6782 \\ 20.4784 & 25.8678 & 20.7565 & 25.8678 & 20.9944 & 16.8109 & 20.7565 & 16.8109 & 13.4677 \\ 10.5851 & 20.9944 & 16.6571 & 20.9944 & 41.0744 & 32.9445 & 16.6571 & 32.9445 & 26.4972 \\ 8.4774 & 16.8109 & 17.0865 & 16.8109 & 32.9445 & 33.9026 & 17.0865 & 33.9026 & 33.3412 \\ 16.6236 & 20.7565 & 24.0287 & 20.7565 & 16.6571 & 17.0865 & 24.0287 & 17.0865 & 16.6782 \\ 8.4774 & 16.8109 & 17.0865 & 16.8109 & 32.9445 & 33.9026 & 17.0865 & 33.9026 & 33.3412 \\ 6.8096 & 13.4677 & 16.6782 & 13.4677 & 26.4972 & 33.3412 & 16.6782 & 33.3412 & 41.8758 \end{pmatrix}.$$

Ainsi que, la matrice moyenne et la matrice de variance-covariance théorique :

La matrice moyenne théorique :

$$M_t = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 8 \\ 10 & 20 & 16 \\ 8 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

La matrice variance-covariance théorique :

$$V_t = \begin{pmatrix} 40.0000 & 20.0000 & 16.0000 & 20.0000 & 10.0000 & 8.0000 & 16.0000 & 8.0000 & 6.4000 \\ 20.0000 & 25.0000 & 20.0000 & 25.0000 & 20.0000 & 16.0000 & 20.0000 & 16.0000 & 12.8000 \\ 16.0000 & 20.0000 & 23.2000 & 20.0000 & 16.0000 & 16.4000 & 23.2000 & 16.4000 & 16.0000 \\ 20.0000 & 25.0000 & 20.0000 & 25.0000 & 20.0000 & 16.0000 & 20.0000 & 16.0000 & 12.8000 \\ 10.0000 & 20.0000 & 16.0000 & 20.0000 & 40.0000 & 32.0000 & 16.0000 & 32.0000 & 25.6000 \\ 8.0000 & 16.0000 & 16.4000 & 16.0000 & 32.0000 & 32.8000 & 16.4000 & 32.8000 & 32.0000 \\ 16.0000 & 20.0000 & 23.2000 & 20.0000 & 16.0000 & 16.4000 & 23.2000 & 16.4000 & 16.0000 \\ 8.0000 & 16.0000 & 16.4000 & 16.0000 & 32.0000 & 32.8000 & 16.4000 & 32.8000 & 32.0000 \\ 6.4000 & 12.8000 & 16.0000 & 12.8000 & 25.6000 & 32.0000 & 16.0000 & 32.0000 & 40.0000 \end{pmatrix}$$

.

Pour n=30, on obtient :

La matrice moyenne empirique :

$$M_e = \begin{pmatrix} 29.9476 & 14.9640 & 11.9593 \\ 14.9640 & 30.0334 & 24.0180 \\ 11.9593 & 24.0180 & 29.9825 \end{pmatrix}$$

La matrice variance-covariance empirique :

$$V_e = \begin{pmatrix} 60.8164 & 30.1653 & 24.2167 & 30.1653 & 14.6642 & 11.8895 & 24.2167 & 11.8895 & 9.3439 \\ 30.1653 & 37.9555 & 30.4017 & 37.9555 & 30.4176 & 24.3212 & 30.4017 & 24.3212 & 19.3665 \\ 24.2167 & 30.4017 & 35.1053 & 30.4017 & 24.0722 & 24.5786 & 35.1053 & 24.5786 & 23.6982 \\ 30.1653 & 37.9555 & 30.4017 & 37.9555 & 30.4176 & 24.3212 & 30.4017 & 24.3212 & 19.3665 \\ 14.6642 & 30.4176 & 24.0722 & 30.4176 & 60.6360 & 47.9676 & 24.0722 & 47.9676 & 37.8231 \\ 11.8895 & 24.3212 & 24.5786 & 24.3212 & 47.9676 & 48.6202 & 24.5786 & 48.6202 & 46.8628 \\ 24.2167 & 30.4017 & 35.1053 & 30.4017 & 24.0722 & 24.5786 & 35.1053 & 24.5786 & 23.6982 \\ 11.8895 & 24.3212 & 24.5786 & 24.3212 & 47.9676 & 48.6202 & 24.5786 & 48.6202 & 46.8628 \\ 9.3439 & 19.3665 & 23.6982 & 19.3665 & 37.8231 & 46.8628 & 23.6982 & 46.8628 & 58.1854 \end{pmatrix}.$$

Ainsi que, la matrice moyenne et la matrice de variance-covariance théorique :

La matrice moyenne théorique :

$$M_t = \begin{pmatrix} 30 & 15 & 12 \\ 15 & 30 & 24 \\ 12 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

La matrice variance-covariance théorique :

$$V_t = \begin{pmatrix} 60.0000 & 30.0000 & 24.0000 & 30.0000 & 15.0000 & 12.0000 & 24.0000 & 12.0000 & 9.6000 \\ 30.0000 & 37.5000 & 30.0000 & 37.5000 & 30.0000 & 24.0000 & 30.0000 & 24.0000 & 19.2000 \\ 24.0000 & 30.0000 & 34.8000 & 30.0000 & 24.0000 & 24.6000 & 34.8000 & 24.6000 & 24.0000 \\ 30.0000 & 37.5000 & 30.0000 & 37.5000 & 30.0000 & 24.0000 & 30.0000 & 24.0000 & 19.2000 \\ 15.0000 & 30.0000 & 24.0000 & 30.0000 & 60.0000 & 48.0000 & 24.0000 & 48.0000 & 38.4000 \\ 12.0000 & 24.0000 & 24.6000 & 24.0000 & 48.0000 & 49.2000 & 24.6000 & 49.2000 & 48.0000 \\ 24.0000 & 30.0000 & 34.8000 & 30.0000 & 24.0000 & 24.6000 & 34.8000 & 24.6000 & 24.0000 \\ 12.0000 & 24.0000 & 24.6000 & 24.0000 & 48.0000 & 49.2000 & 24.6000 & 49.2000 & 48.0000 \\ 9.6000 & 19.2000 & 24.0000 & 19.2000 & 38.4000 & 48.0000 & 24.0000 & 48.0000 & 60.0000 \end{pmatrix}$$

.

Conclusion:

D'après les résultats de simulation, on conclut la convergence des paramètres estimés (matrice de variance-covariance et matrice moyenne) vers leurs valeurs théoriques.

Notons que de la taille de l'échantillon doit être considérable pour avoir des résultats raisonnable.

3.10 Loi de Wishart et échantillonnage de la loi normale:

La loi de Wishart apparaît naturellement dans l'échantillonnage de la loi normale multivariée. Il s'agit de l'analyse statistique d'un échantillon aléatoires, composé d'une suite finie $X_1,...,X_n$ d'observations indépendantes de même loi normale $N_p(\mu,\Sigma)$. Ayant observé $X_1,...,X_n$, on cherche à en déduire des renseignements sur les paramètres, a priori inconnus, $\mu \in \mathbb{R}^p$ et Σ.([5])

Les estimateurs sans biais de μ et Σ sont données respectivement par :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

et

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})'$$
$$S = \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n} X_i X_i' - n\overline{X}(\overline{X})'].$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}(n-1)S &= \sum_{i=1}^{n} X_i X_i' - n\overline{X}(\overline{X})' \\ &= X'X - n\overline{X}(\overline{X})' \\ &= W - n\overline{X}(\overline{X})'\end{aligned}$$

Ce théorème nous donne les lois de $\overline{X}$ et S .

Théorème 3.10.1. *([11])*
Soient X_1,...,X_n, un échantillon de $n \geq 1$ vecteurs aléatoires indépendants de même loi normale $N_p(\mu,\Sigma)$, où $\Sigma > 0$ désigne une matrice $(p \times p)$ symétrique définie positive. Alors les statistiques

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{3.11}$$

et

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})' \tag{3.12}$$

sont indépendants et telles que:

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \mu) \sim N_p(0,\Sigma) \tag{3.13}$$
$$(n-1)S \sim \mathbb{W}_p(n-1,\Sigma). \tag{3.14}$$

3.11 Liens avec d'autres lois de probabilités

3.11.1 Loi de khi-deux, χ^2

La loi de khi-deux représente la somme des carrés de n variables aléatoires indépendants de loi normale univariée centrée réduite . Parallèlement, la loi de Wishart représente la somme des carrés de n vecteurs aléatoires indépendantes de loi normale multivariée. Donc l'on constate que la loi de Wishart est équivalente à la loi de khi-deux dans le contexte multivarié, i.e (la loi de Wishart est la généralisation multidimensionnelle de la loi du χ^2).

Si $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$ où $\Sigma = \sigma^2 = 1$ et $p = 1$ nous obtenons une loi de khi-deux avec n degrés de liberté. Dans ce cas X est un vecteur, donc:

$$W \quad = \quad X'X = \sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} \sim \chi^2 \tag{3.15}$$

De plus, il a été noté que la variance des éléments d'une matrice de Wishart a la forme suivante :

$$V(W_{ij}) = n(\sigma_{ii}\sigma_{jj} + {\sigma^2}_{ij}),$$

par conséquent, si $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$ où $\Sigma = \sigma^2 = 1$, nous obtenons:

$$V(W) = n(1 \times 1 + (1)^2) = 2n,$$

et ceci représente évidemment la variance d'une variable aléatoire de loi khi-deux.

Notons encore, si $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$, la moyenne de la matrice W est donné comme:

$$E(W) = n\Sigma,$$

par conséquent, si $\Sigma = \sigma^2 = 1$ nous obtenons:

$$E(W) = n \times 1 = n,$$

et ceci représente la moyenne d'une variable aléatoire de loi khi-deux.

Fonction de densité:

Soient X_1,...,X_n n variable aléatoire indépendantes suivant des lois normales centrés réduits, par définition, la variable X telle que :

$$X = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2,$$

suit une loi de χ^2 à n degrés de liberté. Sa fonction de densité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\{-\frac{x}{2}\}; \qquad \forall x > 0,$$

où Γ : est la fonction gamma.

Le graphe de khi-deux (χ^2):

La figure **FIG 3.1** représente la distributions de χ^2 pour divers degrés de liberté.

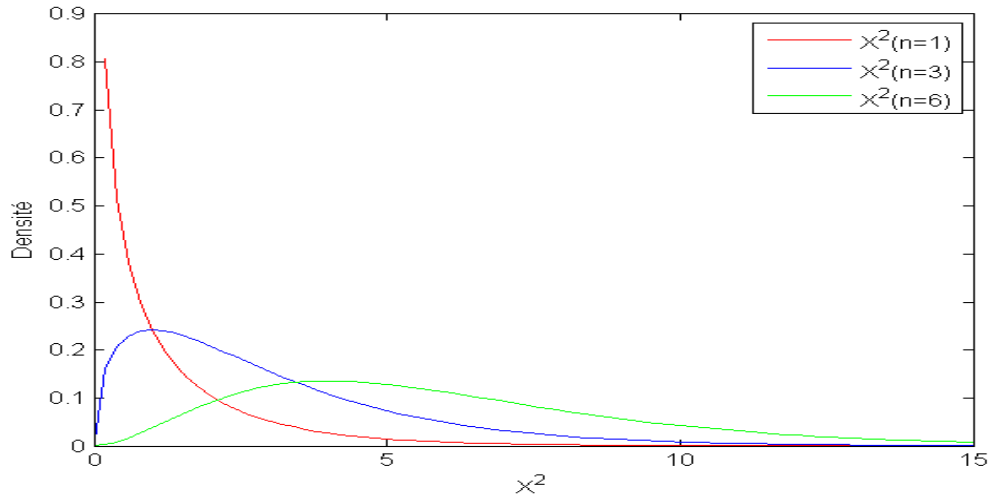

FIG. 3.1 – *Densité* χ^2

(Voir: Annexe C, Code matlab C.2).

Corollaire 3.11.1. *([11])*
Si $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$ *et* $a \in \mathbb{R}^p$ *un vecteur non nul indépendants de* W*, avec* $\Sigma > 0$*, alors*

$$\frac{a'Wa}{a'\Sigma a} \sim {\chi_n}^2.$$

Théorème 3.11.1. *([11])*
Si $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$*,* $a \in \mathbb{R}^p$ *et* $n \geq p$*, alors:*

$$\frac{a'\Sigma^{-1}a}{a'W^{-1}a} \sim {\chi^2}_{n-p+1}.$$

Démonstration. (Eaton (2007b), p.313)

3.11.2 Loi de gamma multivariée

La fonction gamma multivariée, $\Gamma_p(.)$ est la généralisation de la fonction gamma. Comme vu précédemment , elle apparaît dans la fonction de densité de la loi de Wishart. Dans ce qui suit, nous allons voir le lien entre la fonction gamma multivariée et la loi de Wishart.

Définition 3.11.1. Soit $A > 0$ une matrice symétrique, définie positive $(p \times p)$, on dit que A suit une loi Gamma multivariée $\Gamma_p(a,\psi)$ ce qui sera notée $A \sim \Gamma_p(a,\psi)$, si la densité de A est définie par :

$$f(A) \quad = \quad \frac{|\psi|^a}{\Gamma_p(a)}|A|^{a-\frac{p+1}{2}}etr(-\psi A), \tag{3.16}$$

où $\psi > 0$ une matrice symétrique définie positive $(p \times p)$ et $a > \frac{1}{2}(p-1)$.

Théorème 3.11.2. *([5])*
Soit $A > 0$ une matrice aléatoire $(p \times p)$ symétrique, on dit que A suit une loi de Wishart $\mathbb{W}_p(n,\Sigma)$ pour $n \geq p$, si elle suit une loi $\Gamma_p(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\Sigma^{-1})$, ceci est noté :

$$A \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma) \backsim \Gamma_p(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\Sigma^{-1}) \tag{3.17}$$

où $\Sigma > 0$ une matrice $(p \times p)$ symétrique définie positive et $n \geq p$.

Compte tenu de (3.14), $A \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$ si et seulement si sa densité est donnée par :

$$f(A) = \frac{|A|^{\frac{n-p-1}{2}}}{2^{\frac{np}{2}}\Gamma_p(\frac{n}{2})|\Sigma|^{\frac{n}{2}}} \quad etr(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}A); \quad A > 0, \quad n \geq p.$$

3.11.3 Loi du T^2 de Hotelling

La loi du T^2 de Hotelling est la généralisation de la loi de Student(ou plutôt son carré).

Définition 3.11.2. ([3])
Soit x une vecteur aléatoire, où $x \sim N_p(0,\Sigma)$ et W une matrice de Wishart indépendante de x telle que $W \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$. Alors la quantité $nx'W^{-1}x$ suit par definition une loi de T^2 Hotelling de paramètre p et n. On écrit :

$$nx'W^{-1}x \sim {T^2}_{p,n} \tag{3.18}$$

Remarque 3.11.1. Si $p = 1$, ${T^2}_{1,n}$ est une variable aléatoire de student au carrée à n degré de liberté.
De plus ${T^2}_{1,n} = F(1,n)$, où F est la loi de fisher.

Propriétés 3.11.1. *([3])*
La loi de hotelling $T^2 \sim {T^2}_{p,n}$, s'identifie a celle de Fisher, selon la formule :

$$T^2 = \frac{n-p+1}{np} F_{p,n-p+1},$$

où F représente la loi de Fisher.

3.11.4 Loi du lambda Λ de Wilks

Cette loi joue un grand rôle en analyse de variance multidimensionnelle où elle généralise celle de Fisher-Snedecor: elle concerne les rapports de variance généralisée qui sont des déterminants de matrices de Wishart. Λ est une variable unidimensionnelle.([3])

Définition 3.11.3. Soit A et B deux matrices de Wishart tel que $A \sim \mathbb{W}_p(n,\Sigma)$ et $B \sim \mathbb{W}_p(m,\Sigma)$ indépendantes où $(n,m \geq p)$, $|A| \neq 0$, alors le quotient :

$$\frac{|A|}{|A+B|} = \frac{1}{|A^{-1}B + \mathbb{I}_p|} = \Lambda \tag{3.19}$$

a une distribution de Wilks de paramètres p, n et m, $\Lambda(p,m,n)$. Cette distribution ne dépend pas de Σ.

Remarque 3.11.2. ([3])
A et B étant des matrices positives, alors Λ est une variable comprise entre 0 et 1.

Λ peut s'exprimer en fonction des valeurs propres θ_i de $A^{-1}B$ comme suit:

$$\Lambda = \prod_{i=1}^{n} (1+\theta_i)^{-1}.$$

Chapitre 4

Application de la loi de Wishart inverse dans la statistique bayésienne

4.1 Introduction

L'analyse bayésienne est une approche d'analyse statistique qui est basée sur la loi de bayes dont les paramètres estimés sont des variables aléatoires. Elle produit une inférence sur un paramètre qui dépendra des observations et de l'information a priori disponible. Dans ce context, la loi de Wishart inverse joue un rôle important dans le choix de la loi a priori de la matrice de variance-covariance d'une loi normale multivariée.

Dans une première partie de ce chapitre, nous définissons la loi de Wishart inverse ainsi que sa fonction de densité et ses moments, par la suite nous effectuons une simulation empirique sur la moyenne d'une matrice aléatoire de la loi de Wishart inverse .

Dans la deuxième partie, après avoir rappelé les concepts de base de la statistique bayésienne, nous mettons en oeuvre explicitement l'implication de cette loi dans le domaine bayésien .

4.2 Loi de Wishart inverse

4.2.1 Matrice aléatoire de loi de Wishart inverse

Définition 4.2.1. Soit W une matrice aléatoire, $(p \times p)$, de loi de Wishart avec les paramètres Σ et $n \geq p$. Alors son inverse, $T = W^{-1}$, suit une loi de Wishart inversée(également appelée loi de Wishart inverse.) notée :

$$T \backsim \mathbb{IW}_p(m,\Psi),$$

où $\Psi = \Sigma^{-1}$ est une matrice définie positive, $m = n$ représente le degrés de liberté .

4.2.2 Fonction de densité

Soit T une matrice aléatoire $(p \times p)$ tel que $T \backsim \mathbb{IW}_p(m,\Psi)$ avec $m \geq p$. Sa fonction de densité est donnée par :

$$f(T) = \frac{|\Psi|^{\frac{m}{2}}}{|T|^{\frac{m+p+1}{2}} 2^{\frac{mp}{2}} \Gamma_p(\frac{m}{2})} \exp[-\frac{1}{2} tr(\Psi T^{-1})], \tag{4.1}$$

où Ψ et T sont des matrices définies positives $(p \times p)$ et Γ_p la fonction gamma multivariée .

4.2.3 Moments d'une Wishart inverse

Soit T une matrice définie positive tel que $T \backsim \mathbb{IW}_p(\Psi,m)$.
La moyenne de la matrice T est donnée comme suit:

$$E(T) = \frac{\Psi}{m-p-1} \tag{4.2}$$

La variance de chaque élément de T est donnée comme suit:

$$V(T_{ij}) = \frac{(m-p+1){\Psi_{ij}}^2 + (m-p-1)\Psi_{ii}\Psi_{jj}}{(m-p)(m-p-1)^2(m-p-3)} \tag{4.3}$$

La variance de l'éléments (i,i) de la diagonale T est donnée par :

$$V(T_{ii}) = \frac{2{\Psi_{ii}}^2}{(m-p-1)^2(m-p-3)} \tag{4.4}$$

4.3 Cas particulier de la loi de Wishart inverse :

La loi inverse-χ^2 (ou loi de χ^2 inverse) est la loi de probabilité de la variable aléatoire dont l'inverse suit une loi du χ^2 .

Notons que la loi de Wishart inverse est la généralisation multidimensionnelle de la loi de χ^2 inverse.

On a si $T \sim \mathbb{IW}_p(m,\Psi)$, où $\Psi = \frac{1}{\sigma^2} = 1$ et p=1 nous obtenons une loi de khi-deux inverse à m degrés de liberté .

4.3.1 Fonction de densité de χ^2 inverse :

Soit X une variable aléatoire suit une loi de χ^2 inverse à m degrés de liberté. Sa densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{2^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} x^{-\frac{m}{2}-1} \exp\{-\frac{1}{2x}\}; \qquad \forall x > 0,$$

où Γ est la fonction gamma et m est le degrés de liberté.

4.3.2 Moments d'une χ^2 inverse:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de χ^2 inverse.

• Sa moyenne est donnée par :

$$E(X) = \frac{1}{m-2}; \quad \forall m > 2.$$

En effet, on remplaçant $p = 1$ et $\Psi = \frac{1}{\sigma^2} = 1$ dans (4.2), on trouve:

$$E(T) = \frac{1}{m-1-1} = \frac{1}{m-2},$$

et ceci représente évidemment la moyenne d'une variable aléatoire de χ^2 inverse.

•La variance d'une variable aléatoire de χ^2 inverse est donnée par la formule suivante :

$$V(X) = \frac{2}{(m-2)^2(m-4)}; \qquad \forall m > 4,$$

de la même procedure remplaçant $p = 1$ et $\Psi = \frac{1}{\sigma^2} = 1$ dans la formule (4.4), on obtient :

$$V(T_{ii}) = \frac{2 \times 1}{(m-1-1)^2(m-1-3)} = \frac{2}{(m-2)^2(m-4)}$$

d'où la variance d'une variable aléatoire de χ^2 inverse.

Le graphe de χ^2 inverse :

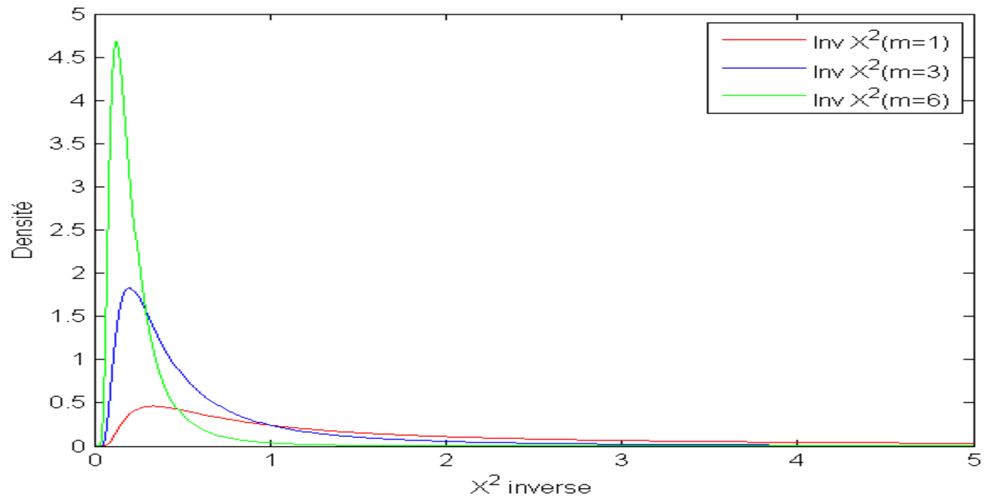

FIG. 4.1 – *Densité χ^2 inverse*

La figure **FIG 4.1** représente la distribution χ^2 inverse pour divers degrés de liberté. (Voir: Annexe C, Code matlab C.3).

4.4 Etude empirique

Nous simulons un échantillon de 10 000 matrices aléatoires de la loi de Wishart inverse $\mathbb{IW}_p(m,\Psi)$, puis en va comparer la matrice moyenne simulé (empirique) avec sa valeur théorique pour divers degrés de liberté (m=4, m=20,30), prenons pour cette simulation une matrice symétrique définie positive de dimension 2×2

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.5000 \\ 0.5000 & 0.3000 \end{pmatrix}.$$

(Voir: Annexe B, Code matlab B.5).

Pour m =4, on obtient la matrice de moyenne empirique M_e :

La matrice moyenne empirique :

$$M_e = \begin{pmatrix} 0.9467 & 0.4777 \\ 0.4777 & 0.2915 \end{pmatrix}.$$

On utilisons la formule (4.2),on trouve la matrice moyenne théorique suivante M_t :
La matrice moyenne théorique :

$$M_t = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.5000 \\ 0.5000 & 0.3000 \end{pmatrix}.$$

Pour m=20, on obtient :
La matrice moyenne empirique :

$$M_e = \begin{pmatrix} 0.0585 & 0.0292 \\ 0.0292 & 0.0175 \end{pmatrix}.$$

La matrice moyenne théorique :

$$M_t = \begin{pmatrix} 0.0588 & 0.0294 \\ 0.0294 & 0.0176 \end{pmatrix}.$$

Pour m=30, on obtient :
La matrice moyenne empirique :

$$M_e = \begin{pmatrix} 0.0370 & 0.0185 \\ 0.0185 & 0.0111 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la matrice moyenne théorique M_t :
La matrice moyenne théorique:

$$M_t = \begin{pmatrix} 0.0370 & 0.0185 \\ 0.0185 & 0.0111 \end{pmatrix}.$$

Conclusion: D'après les résultats de simulation on conclut La convergence de la matrice moyenne empirique vers sa valeur théorique.

D'autre part, on remarque que lorsque $m = 30$ (degrés de liberté), on a une égalité entre les deux matrices (empirique et théorique).

4.5 Les concepts de base de la statistique bayésienne :

Définition 4.5.1. (*modèle classique*)([2])
On se place dans un espace probabilisé paramétrique classique :

$$X \in \{\mathcal{X}, \quad p_\theta, \quad (\theta \in \Theta)\},$$

$\mathcal{X}$ désigne l'espace des données, Θ celui des paramètres θ.
On possède n observations X_1,....,X_n, avec

$$X = (X_1,....,X_n) \sim f_\theta(x),$$

avec $\theta \in \Theta$ est inconnu.

Le but de la statistique bayésienne est d'estimer le paramètre θ à partir de l'échantillon X_1,....,X_n

4.5.1 Loi a priori - loi a posteriori

Définition 4.5.2. *(La loi a priori)*[(10)]
Soit $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ une famille de densités de probabilités à paramètre dans Θ .
L'incertitude sur le paramètre θ est représentée par une probabilitée π sur Θ.
π est la loi a priori sur Θ .

Définition 4.5.3. On interprète la loi des observations f_θ comme la loi conditionnelle des observations sachant θ

$$f(X|\theta) = f_\theta(X)$$

Définition 4.5.4. *(modèle statistique bayésien)*[(10)]
Un modèle bayésien est la donnée, pour une v.a. (ou une suite de v.a.) d'une loi condition-

nelle et d'une loi a priori :

$$X \sim f(X|\theta)$$

$$\theta \sim \pi$$

A partir d'un modèle Bayésien, on peut calculer une loi a posteriori sur θ, cette loi n'est rien d'autre que la loi de θ conditionnellement aux observations X.

Définition 4.5.5. *(La loi a posteriori)*
La loi conditionnelle de θ sachant les observations X est appelée loi a posteriori. En vertu du théorème de bayes nous obtenons la distributions a posteriori :

$$\pi(\theta|X) = \frac{f(X|\theta).\pi(\theta)}{f(X)}$$

où $\pi(\theta)$ la distribution a priori;
$f(X|\theta)$ la distributions des observations ;
et $f(X) = \int_\theta f(X|\theta).\pi(\theta)d\theta$ la distribution marginale ou predictive, elle ne dépend que de X et de la loi a priori et donc pas du paramètre θ.

Remarque 4.5.1.
1. La statistique classique repose sur la vraisemblance et la statistique bayésienne repose sur la loi a posteriori.
2. En statistique bayésienne, pour estimer un paramètre θ a partir de données X, on se base sur la distribution a posteriori :

$$\pi(\theta|X) \propto f(X|\theta).\pi(\theta)$$

où $\propto$ représente le symbole de proportionalité.

4.6 Le lien de la loi de Wishart inverse avec la statistique bayésienne :

La distribution de Wishart inverse est fréquemment utilisée comme la loi a priori sur le paramètre de la matrice variance covariance (Σ) d'une distribution normale mulivariée . Le problème est posé comme suit :

$$\pi(\Sigma|X) = \pi(\Sigma) \times f(X|\Sigma).$$

Le modèle statistique paramétrique sera écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} f(X|\Sigma) &= \prod_{i=1}^{n} f(X_i|\Sigma) \\ &= [\prod_{i=1}^{n}(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}X_i{}'\Sigma^{-1}X_i\}] \\ &= (2\pi)^{-\frac{np}{2}}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i{}'\Sigma^{-1}X_i)\} \end{aligned}$$

où X_1,....,X_n sont des vecteurs indépendants identiquement distribuées selon une loi normale multivariée avec un vecteur moyen nul et une matrice de variance-covariance Σ, on écrit : $X_i \sim N_p(0,\Sigma)$

Théorème 4.6.1. *Si on met une distribution inverse de Wishart sur le paramètre Σ, (la distribution a priori) tel que $\Sigma \sim \mathbb{IW}_p(m,\Psi)$, alors la distribution a posteriori de Σ suit également une distributions de Wishart inverse, avec :*

$$\pi(\Sigma|X) \sim \mathbb{IW}_p(m+n,\Psi+S),$$

S est une matrice carré, où $S = \sum_{i=1}^{n} X_i X_i{}'$

Preuve. ([4])

On calcul la loi a posteriori de Σ: *La loi a posteriori $\pi(\Sigma|X)$:*

$$\begin{aligned} \pi(\Sigma|X) &= f(X|\Sigma) \times \pi(\Sigma) \\ &= (2\pi)^{-\frac{np}{2}}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i{}'\Sigma^{-1}X_i)\} \times \frac{|\Psi|^{\frac{m}{2}}}{|\Sigma|^{\frac{m+p+1}{2}}2^{\frac{mp}{2}}\Gamma_p(\frac{m}{2})} \exp\{-\frac{1}{2}tr(\Psi\Sigma^{-1})\} \end{aligned}$$

Notons que de nombreux termes dans cette dernière equation sont des constantes multiplicatives et peuvent être supprimées en toute sécurité sans affecter la forme des fonctions. Ces constantes sont $(2\pi)^{-\frac{np}{2}}$, $|\Psi|^{\frac{m}{2}}$, $2^{\frac{mp}{2}}$, et $\Gamma_p(\frac{m}{2})$. En les enlevons, on aura:

$$\begin{aligned}\pi(\Sigma|X) &\propto (2\pi)^{-\frac{np}{2}}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i{}'\Sigma^{-1}X_i)\}\times\frac{|\Psi|^{\frac{m}{2}}}{|\Sigma|^{\frac{m+p+1}{2}}2^{\frac{mp}{2}}\Gamma_p(\frac{m}{2})}\exp\{-\frac{1}{2}tr(\Psi\Sigma^{-1})\}\\ &\propto |\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i{}'\Sigma^{-1}X_i)\}\times|\Sigma|^{-\frac{m+p+1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}tr(\Psi\Sigma^{-1})\}\end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration, nous appliquons les propriétés du déterminant et de la trace. Premièrement, le déterminant d'un produit est le produit des déterminants (c-à-d $|AB| = |A||B|$), ce qui nous permet de combiner $|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}$ avec $|\Sigma|^{-\frac{m+p+1}{2}}$.

Deuxièmement, un scalaire est égal à la trace de lui-même donc:

$$(\sum_{i=1}^{n}(X_i{}'\Sigma^{-1}X_i)) = tr[\sum_{i=1}^{n}(X_i{}'\Sigma^{-1}X_i)].$$

On a aussi $tr(AB) = tr(BA)$, ce qui nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned}tr[\sum_{i=1}^{n}(X_i{}'\Sigma^{-1}X_i)] &= tr[\sum_{i=1}^{n}(X_iX_i{}'\Sigma^{-1})]\\ &= tr[(\sum_{i=1}^{n}(X_iX_i{}')\Sigma^{-1}]\end{aligned}$$

On pose $S = \sum_{i=1}^{n} X_iX_i{}'$, on aura :

$$tr[\sum_{i=1}^{n}(X_i{}'\Sigma^{-1}X_i)] = tr[S\Sigma^{-1}]$$

Finalement, en tenant compte que la somme des traces est égale a la trace de la somme, on obtiendra :

$$
\begin{aligned}
\pi(\Sigma|X) &\propto |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i{}'\Sigma^{-1}X_i)\} \times |\Sigma|^{-\frac{m+p+1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}tr(\Psi\Sigma^{-1})\} \\
&= |\Sigma|^{-\frac{n}{2}}|\Sigma|^{-\frac{m+p+1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}tr(S\Sigma^{-1})\} \exp\{-\frac{1}{2}tr(\Psi\Sigma^{-1})\} \\
&= |\Sigma|^{-\frac{(n+m)+p+1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}tr(S\Sigma^{-1} + \Psi\Sigma^{-1})\} \\
&= |\Sigma|^{-\frac{(n+m)+p+1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}tr(S\Sigma^{-1} + \Psi\Sigma^{-1})\} \\
&= |\Sigma|^{-\frac{(n+m)+p+1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}tr((S+\Psi)\Sigma^{-1})\}
\end{aligned}
$$

Donc: c'est une loi conjuguées

$$
\pi(\Sigma|X) = |\Sigma|^{-\frac{(n+m)+p+1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}tr((S+\Psi)\Sigma^{-1})\} \tag{4.5}
$$

Ceci implique que la loi a posteriori suit une loi de Wishart inverse avec un degré de liberté $n+m$ qui est la somme de la taille de l'échantillon a priori et celui de l'échantillon de données et une matrice qui est égale a $(S+\Psi)$, où $S = \sum_{i=1}^{n} X_i X_i{}'$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons élaboré, expliqué plusieurs notions fondamentales d'une matrice aléatoire de la loi de Wishart. Dans un cadre multidimensionnel, ceci s'avère problématique puisque il n'est pas si simple de les illustrer.

Pour simuler une loi de Wishart, un exemple a été présenté via la décomposition de Bartlett et pour observer son espérance et sa matrice de variance-covariance empirique une étude de simulation a été effectuée pour les différents valeurs de degrés de liberté. Cette étude nous a permis de conclure la convergence des ces estimateurs vers leurs valeurs théoriques.

Nous avons aussi mis en évidence le rapport de la loi de Wishart à d'autre lois de probabilités, en commençant par son equivalent dans le context univarié qui est la loi de χ^2.

L'inverse de la loi de Wishart joue aussi un rôle très important dans la statistique multivariée, on a d'abord définit ses propriétés, par la suite, l'étude empirique réalisé nous a conduit à déduire la convergence de la moyenne empirique vers sa valeur théorique.

Pour terminer, nous avons illustré l'implication de la loi de Wishart inverse dans la statistique bayésienne. En faite cette loi est souvent utilisée comme la loi a priori de la matrice variance-covariance Σ de la loi normale multivariée; et il a été prouvé que la loi a posteriori de Σ suit aussi une loi de Wishart inverse .

Annexe A

PRÉLIMINAIRES

4.7 Rappels sur quelques propriétés de matrices:

4.7.1 Matrice symétrique définie positive(SDP):

Soit une matrice $A = [a_{i,j}]$, $\forall(i,j = 1,...,p)$, A est dite symétrique, si $a_{i,j} = a_{j,i}$, ou bien $A = A'$, avec A' est la transposé de A.

Une matrice carré réelle symétrique A $(p \times p)$, est dite :
• Positive, ce qui est noté $A \geq 0$ si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \qquad x'Ax \geq 0$$

• Définie positive, ce qui est noté $A > 0$, si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \qquad x'Ax > 0.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A symétrique, $(p \times p)$ soit positive (resp définie positive) est que ses valeurs propres $(\lambda_1,..,\lambda_p)$ soient positives ou nulles (respectivement strictement positive).([8])

4.7.2 Matrice non singulière :

En algèbre linéaire, une matrice carrée A d'ordre p est dite inversible ou régulière ou encore non singulière.

4.7.3 Matrice triangulaire:

Les matrices triangulaires sont des matrices carrées dont une partie triangulaire des valeurs, délimitée par la diagonale principale est nulle.

Matrice triangulaire supérieure:

Une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont les valeurs sous la diagonale principale sont nulles.
A une matrice triangulaire supérieure de dimension $(p \times p)$, elle s'écrit sous la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,p} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

A est triangulaire supérieure si et seulement si :

$$\forall i > j, \quad a_{i,j} = 0$$

A est triangulaire inférieure si et seulement si :

$$\forall i < j, \quad a_{i,j} = 0$$

4.8 Décomposition de cholesky

La factorisation de Cholesky, nommée d'après André-Louis Cholesky, consiste, pour une matrice symétrique définie positive A, à déterminer une matrice triangulaire supérieure L telle que: $A = L'L$.

Théorème 4.8.1. *Factorisation de Cholesky d'une matrice:*
Si A est une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice réelle triangulaire supérieure L telle que :

$$A = L'L$$

On peut également imposer que les éléments diagonaux de la matrice L soient tous positifs, et la factorisation correspondante est alors unique.

4.9 Jacobien de certaines transformations

Dans cette section nous allons accéder au différents transformations matricielles qui seront nécessaires pour étudier les caractéristiques d'une matrice aléatoire de Wishart développer au chapitre trois.

Définition 4.9.1. ([9])
Soit Y et X deux matrices aléatoires, où $Y = (y_1,....,y_p)'$, $X = (x_1,...,x_p)'$. Supposons la transformation $X = F(Y)$, alors, le jacobien de la transformation de X à Y est définie par :

$$J(Y \rightarrow X) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_p}{\partial x_p} \end{vmatrix} \qquad ; d(Y) = J[d(X)], \quad J \neq 0,$$

où $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, $(i,j = 1,..,p)$ représentent les dérivées partielles des éléments de Y par rapport aux éléments de X.

Propriétés 4.9.1. *([9])*
Si $Y = AXA'$, tel que Y, X sont des matrices symétriques $(p \times p)$ et $|A| \neq 0$, alors :

$$dY = |A|^{p+1} dX$$

Propriétés 4.9.2. *([9])*

Si $Y = X^{-1}$, et X est une matrice symétrique $(p \times p)$, alors:

$$dY = |X|^{-(p+1)} dX$$

Propriétés 4.9.3. *([9])*
Soit Y, X, U, V des matrices symétriques définies positives ,$(p \times p)$.
On a si $U = X + Y$ et $V = U^{-\frac{1}{2}} Y (U^{-\frac{1}{2}})'$,
où $U = U^{\frac{1}{2}} (U^{\frac{1}{2}})'$, alors on aura :

$$J[(X,Y) \to (U,V)] = U^{\frac{p+1}{2}} dX.$$

Annexe B

CODE MATLAB

4.10 B.1 : Code d'échantillonnage d'une matrice aléatoire de loi de Wishart standard :

Code matlab à pour creation d'une matrice aléatoire de la loi de Wishart standard via une décomposition de barlett:

sig : est la matrice sigma

n : est le degrés de liberté.

sig=[1 0 0;0 1 0; 0 0 1];

p=size(sig,1);

`Création de la matrice triangulaire supérieure T.`

Z=zeros(p);

k1=zeros(p,1);

n=4;

for i=1:p

k1(i,1)=chi2rnd(n-i+1);

end

`Racine carré de la variable aléatoire de khi-deux sur la diagonale.`

k2=sqrt(k1);

M1=diag(k2);

`Variable aléatoire de loi normale de la partie supérieure de la matrice .`

N=rand(p);

M2=tril(N,-1);

A=Z+M1+M2;

T=A'

Calcul de la matrice de Wishart

S=T'*T

4.11 B.2 : Code d'échantillonnage d'une matrice aléatoire de loi de Wishart non standard

Code matlab à pour creation d'une matrice aléatoire de la loi de Wishart non standard via une décomposition de barlett:

sig : est la matrice sigma .

n : est le degrés de liberté.

factorisation de cholesky de la sigma .

sig=[1 0.5 0.4; 0.5 1 0.8; 0.4 0.8 1]

p=size(sig,1);

choles=(chol(sig))';

P=choles

création de la matrice triangulaire supérieur T.

Z=zeros(p);

k1=zeros(p,1);

n=4;

for i=1:p

k1(i,1)=chi2rnd(n-i+1);

end

racine carré de la variable aléatoire de khi-deux sur la diagonale.

k2=sqrt(k1);

M1=diag(k2);

variable aléatoire de loi normale de la partie supérieure de la matrice .

N=rand(p);

M2=tril(N,-1);

A=Z+M1+M2;

T=A'

Calcul de la matrice de Wishart

S=P*(T'*T)*P'

4.12 B.3 : Code du calcul de la matrice variance et la moyenne théorique d'une matrice aléatoire de loi de Wishart .

Code matlab a pour calcul de la matrice moyenne et matrice variance-covariance théorique d'une matrice aléatoire de la loi de Wishart .

```
Calcul de matrice de commutation K .
function K =commutation(p,p)
p=3;
K=zeros(p*p, p*p);
m=1:(p*p);
N=reshape(m, p,p)';
n=N(:);
for i=1:(p*p)
K(m(i),n(i))=1;
end
K
calcul de la matrice variance-covariance théorique
n: est le degrés de liberté.
sig :est la matrice sigma
sig=[1 0.5 0.4; 0.5 1 0.8; 0.4 0.8 1];
p=size(sig,1) ;
n=4;
Vt=n*(eye(p*p)+K)*kron(sig,sig);
Vt
calcul de la moyenne théorique
Et=n*sig;
Et
```

4.13 B.4 : Code d'échantillonnage et le calcul de la matrice variance et la moyenne empiriques d'une matrice aléatoire de loi de Wishart .

Code matlab donnant la moyenne empirique ainsi que la la matrice de variance-covariance empirique de la loi de Wishart.

reps : est la taille de l'échantillon.

n : est le degré de liberté.

sig : est la matrice Sigma.

```
simulation dune matrice aléatoire de Wishart .
sig=[1 0.5 0.4; 0.5 1 0.8; 0.4 0.8 1];
n=4;
p= size (sig, 1) ;
nbr=p*p;
reps=10000;
mat1=cell (reps, 1);
mat2=zeros (reps, nbr);
for i=1: reps
mat1 i = wishrnd(sig,n);
end
for k= 1: reps
mat2 (k,:) =reshape (mat1k, 1, nbr);
end
La matrice de variance-covariance empirique .
Ve=cov(mat2)
La matrice moyenne empirique .
moyenne=mean(mat2);
Me=reshape(moyenne,p,p);
Me
```

4.14 B.5 : Code d'échantillonnage et le calcul de la matrice variance et la moyenne empiriques d'une matrice aléatoire de loi de Wishart inverse :

Code matlab donnant la moyenne empirique ainsi que la la matrice de variance-covariance empirique de la loi de Wishart.

reps :est la taille de l'échantillon.
m : est le degré de liberté.
psi: est la matrice Psi.

```
simulation dune matrice aléatoire de Wishart inverse .
psi=[1 0.5 ; 0.5 0.3 ];
m=4;
p= size (psi, 1) ;
nbr=p*p;
reps=10000;
mat1=cell (reps, 1);
mat2=zeros (reps, nbr);
for i=1: reps
mat1 i = iwishrnd(psi,m);
end
for k= 1: reps
mat2 (k,:) =reshape (mat1k, 1, nbr);
end
La matrice de variance-covariance empirique.
Ve=cov(mat2)
calcul de la variance théorique.

for i=1:2
for j=1:2
```

$Vt(i,j) = ((m-p+1)*psi(i,j)^2 + (m-p-1)*psi(i,i)*psi(j,j))/((m-p)*(m-p-1)^2*(m-p-3));$

```
end
```

end

Vt

`La matrice moyenne empirique.`

moyenne=mean(mat2);

Me=reshape(moyenne,p,p);

Me

`La matrice moyenne théorique.`

Mt= psi/(m-p-1);

Mt

Annexe C

CODE MATLAB

4.15 C.1 : Code du graphe de la loi normale bivariée :

Code matlab pour tracer le graphe de la loi normal à deux dimension :

```
>> x1 = -5:.2:5 ;
>> x2 = -5:.2:5;
>> [X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
>> f = mvnpdf([X1(:) X2(:)]);
>> f = reshape(f,length(x2),length(x1));
>> surf(x1,x2,f);
```

4.16 C.2 : Code du graphe de la loi khi-deux χ^2 :

Code matlab pour tracer le graphe de la loi de χ^2 :

```
>>x=0:0.2:15;
>>y1=chi2pdf(x,1);
>>y2=chi2pdf(x,3);
>>y3=chi2pdf(x,6);
>>plot(x,y1,'r',x,y2,'b',x,y3,'g')
```

4.17 C.3 : Code du graphe de la loi χ^2 inverse :

Code matlab pour tracer le graphe de la loi de χ^2 :

```
>>x=0:0.01:5;
```

>>m=1;

>> $y1 = ((2^{(-m/2)})/gamma(m/2)) * x.^{(-(m/2)-1)}. * exp(-1./(2 * x));$

>>n=3;

>> $y2 = ((2^{(-n/2)})/gamma(n/2)) * x.^{(-(n/2)-1)}. * exp(-1./(2 * x));$

>>k=6;

>> $y3 = ((2^{(-k/2)})/gamma(k/2)) * x.^{(-(k/2)-1)}. * exp(-1./(2 * x));$

>>plot(x,y1,'r' ,x,y2,'b' ,x,y3,'g')

Bibliographie

Bibliographie

[1] *Anne Philippe .(2007).* ***Statistique Bayésienne.*** Laboratoire de Mathématiques Jean Leray Université de Nantes.

[2] *Judith Rousseau. (2009).* ***Statistique Bayésienne***

[3] *Saporta Gilbert. (2011).* ***Probabilités, Analyse des données et Statistique .*** Edition TECHNIP, 2^{e} édition révisée.

[4] *Nydick Steven.W. (May 25, 2012).* ***The Wishart and Inverse Wishart Distributions.***

[5] *Deheuvels Paul. (2012).* ***Cours d'Analyse Statistique Multivariée.***

[6] *Rush Jean-Jacques . (2013).* ***Vecteurs gaussiens.*** preparation à l'agrégation Bordeaux 1

[7] *DAUXOIS Jean.Yves . (2013).* ***Cours de Probabilités.***

[8] *Anthony Perret.(2015).* ***Statistique d'extrêmes de variables aléatoires fortement corrélées.*** Thèse de doctorat

[9] *Pilar Mercedes Amaya. (2018).* ***La loi de wishart .*** *Mémoire présenté comme exigence partielle de la maîtresse en mathématiques. Université Du Québéc à Montéral.*

[10] *Yann Traonmilin - Adrien Richou (2018).* ***Introduction aux Statistiques Bayésiennes.*** Basées sur les notes de cours de Charles Dossal et de Jérémie Bigot.

[11] *Bilodeau Martin , Bernner David.(1999)* ***Theory of multivariate statistics.*** chap.6 MULTIVARIATE SAMPLING P73.84

[12] *DUBACH Guillaume.* ***Introduction au domaine de recherche Théorie des matrices aléatoires.***

[13] *Bartlett, M. S. (1939) A note on tests of signicance in multivariate anal-ysis. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 35, 180{185}.*

Résumé:

Ce mémoire porte sur la loi de Wishart et ses application, une loi de probabilité définie sur les matrices aléatoires symétriques définies positives. Au premier lieu nous définissons les différentes notions de la statistiques multivariées; Les vecteurs aléatoires et les matrices aléatoires ainsi que la loi normale matricielle .
Par la suite la loi de Wishart est présenté par ces caractéristiques fondamentales; Une inference via la décomposition de bartlett pour une creation d'une matrice aléatoire de Wishart et pour observer son espérance et sa matrice de variance-covariance une simulation a été effectuée; Ainsi que le rapport existant avec d'autres lois de probabilités.
Enfin la loi de Wishart inverse et son implication dans le domaine de la statistique bayésienne sont explorée.

Mots clés:

distribution de Wishart, matrice aléatoire(SDP), loi normale matricielle, décomposition de bartlett, matrice de Wishart standard, factorisation de cholosky, distribution de Wishart inverse, échantillonnage, loi normale matricielle, fonction de vraisemblance, distribution a posteriori.