République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud MAMMERI de Tizi Ouzou

Faculté du Génie de la Construction

Département de Génie Civil



MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures et Matériaux

Présenté par : Mr YOUNSI Abderahman

THEME

SIMULATION DE L'INFLUENCE DE CONFINEMENT DU BETON SUR LE MODULE DE CISAILLEMENT G

Devant le jury d'examen composé de :

Mr BOUAFIA Youcef	Professeur	υμμτο	Président
Mr KACHI Mohand Said	Professeur	υμμτο	Rapporteur
Mr MEHADDENE Rachid	Professeur	υμμτο	Examinateur
Mr DAHMANI Lahlou	Professeur	UMMTO	Examinateur

Soutenue le : 13 / 06 / 2015

REMERCIEMENTS

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements à Monsieur KACHI Mohand Said, Professeur et Vice Doyen Chargé de la Post Graduation et de la Recherche Scientifique au département de Génie Civil de l'Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, qui a bien voulu proposer et diriger ce mémoire, pour son aide et ces précieux conseils qui m'ont permis de bénéficier de son expérience et d'acquérir de nombreuses connaissances tout au long de ce travail.

Je remercie Mr BOUAFIA Youcef, Professeur à l'UMMTO, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être président du jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Je remercie Mr MEHADDENE Rachid Professeur à l'UMMTO et Mr DAHMANI Lahlou Professeur à l'UMMTO, d'avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du corps enseignant qui a contribué à ma formation.

Que tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire, trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus chaleureux.

Enfin, je rends hommage à toute ma famille et à mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années d'études.

DÉDICACES

Je tiens à dédier ce travail à :

Mes très chers parents. Mes frères et ma sœur. Mes nièces et mes neveux. Tous mes amis (es) et toute la famille.

Résumé

Plusieurs études expérimentales et théoriques ont été effectuées de part le monde sur le comportement des éléments en béton armé ou précontraint en cisaillement. Ainsi plusieurs études ont étés orientés vers la construction d'un modèle général de comportement du béton armé en cisaillement. Il a été remarqué que l'angle d'inclinaison des directions principales des contraintes et des déformations n'est en fait qu'une condition parmi les conditions d'équilibre.

Il s'agit alors de construire un modèle théorique pour l'analyse du comportement en cisaillement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et /ou précontraint soumises à l'effet combiné d'un moment fléchissant, d'un effort normal, et d'un effort tranchant. Pour une section de poutre donnée, elle est définie par une succession de couche de béton et d'éléments longitudinaux d'acier. Chaque couche est définie par sa hauteur hi, sa largeur bi, et sa position par rapport à une extrémité de la section Y_{Gi} . Chaque élément longitudinal d'acier est également défini par sa section transversale, le seuil de plasticité, la déformation initiale de précontrainte, et sa position par rapport à une extrémité de la section. Le modèle doit permettre l'analyse des sections de poutres avec des formes et des détails de ferraillage variables. Il doit intégrer le phénomène du confinement du béton afin d'estimer l'influence de ce dernier sur le module de cisaillement G. Enfin, l'étude proposée pour le cas de sollicitations planes $\sigma_z = 0$, il s'agit alors étudier des sections soumises à une flexion composée avec un effort tranchant.

Mots clés : module de cisaillement, confinement, non linéaire, simulation

Abstract

Many experimental and theoretical studies have been conducted around the world on the behavior of reinforced and prestressed concrete shear elements. Several studies have been oriented to the construction of a general model of behavior of reinforced concrete shear. It was noted that the angle of inclination of the main directions of the stress and strain is actually a condition from the equilibrium conditions.

Then it is to build a theoretical model for the shear behavior analysis to failure of reinforced concrete beams and / or prestressed subject to the combined effect of bending moment, axial load, and shear loading. For a given beam section, it is defined by a layer of succession of concrete and of longitudinal steel elements. Each layer is defined by its height h, width bi, and its position relative to an end of the Y_{GI} section. Each steel longitudinal element is also defined by its cross-section, the yield stress, the initial deformation prestressing, and its position relative to an end of the section. The model must allow beam sections analysis with varying forms and reinforcement details. It must integrate the phenomenon of a concrete confinement in order to estimate the influence of the confinement on the shear modulus G. Finally, the study proposed for the case of plane stress $\sigma_z = 0$, then it is studying sections subjected to bending with shear loading.

Keywords: shear modulus, confinement, nonlinear, simulation

Table des matières

Ren	nercien	nents		ii
Déc	licaces.			iii
Rés	umé	••••••		iv
Abs	tract			v
Tab	le des r	natières		vi
List	e des ta	bleaux		X
List	e des fi	gures		xi
Not	ation			xiv
Inti	oducti	on généra	al	1
Cha	apitre	1 Étuc	le bibliographique	3
1.1	Introd	luction		3
1.2	Défin	ition du be	éton confiné	
1.3	Effet o	du confine	ement du béton sur la ductilité des structures en B.A	
1.4	Comp	ortement	du béton confiné en élasticité non linéaire	5
	1.4.1	Modèle	d'Hognestad (1951)	5
		1.4.1.1	Comportement en compression	6
		1.4.1.2	La prise en compte du confinement en compression	6
		1.4.1.3	Comportement en traction	7
	1.4.2	Modèle	de Sheikh et Uzumeri (1982)	
	1.4.3	Modèle	de Mander et al. (1988)	9
		1.4.3.1	La pression de confinement latérale effective et le coef	fficient
		d'efficac	cité	10
		1.4.3.2	Confinement par des cadres rectangulaires avec ou san	18
		épingles		11
		1.4.3.3	La résistance de compression du béton confiné	12
	1.4.4	Modèle	de Saatcioglu et Razvi (1992)	13
	1.4.5	Modèle	Hoshikuma et al. (1997)	14
	1.4.6	Modèle	HS. Chung et al. (2002)	15
	1.4.7	Modèle	de B. Bousalem et N. Chikh (2007)	
	1.4.8	Modèle	de Bouafia et al. (2010)	

1.5	Modè	les de calcul	. 20
	1.5.1	Modèle de Vecchio et Collins (1986)	. 20
		1.5.1.1 Élément sous effort tranchant et contraintes normales	
		constantes	. 20
		1.5.1.2 Élément sous effort tranchant constant et contraintes normales	
		variables	. 24
		1.5.1.3 Méthode générale de résolution pour un élément isolé	. 28
	1.5.2	Modèle de Stanciulescu (1996)	. 33
	1.5.3	Modèle de Kachi (2006)	. 39
1.6	Conc	lusion	. 41
Cha	apitre	2 Modélisation et étude d'une section droite	.42
2.1	Intro	luction	.42
2.2	Modé	Elisation des matériaux à comportement réels	.42
	2.2.1	Comportement du béton non confiné	. 42
		2.2.1.1 Comportement du béton en compression selon Sargin (1968)	. 43
		2.2.1.2 Comportement du béton en traction selon Grelat (1978)	. 45
	2.2.2	Comportement du béton confiné	. 46
	2.2.3	Comportement des aciers	.48
		2.2.3.1 Comportement des aciers passifs	.48
		2.2.3.2 Comportement des aciers actifs	. 50
2.3	Modé	lisation des sections	. 51
	2.3.1	Modélisation de la section de béton	. 51
	2.3.2	Modélisation géométrique des armatures	. 51
		2.3.2.1 Les armatures passives	.51
		2.3.2.2 Les armatures actives	.51
2.4	Étude	d'une section droite	. 52
	2.4.1	Calcul des sollicitations internes	. 54
	2.4.2	Déformation de la section à l'équilibre	. 59
	2.4.3	Méthode itérative de résolution et critères de convergence	60
	2.4.4	Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section	. 62
2.5	Conc	lusion	. 63

Cha	apitre	3 Prise en compte du confinement du béton dans la modélisation	1
		à l'effort tranchant	.64
3.1	Introd	luction	. 64
3.2	Etude	de l'équilibre d'une poutre en élasticité non linéaire	. 64
3.3	Expos	sé général de la modélisation	. 66
	3.3.1	Domaine d'application	. 66
	3.3.2	Discrétisation de la poutre	. 66
	3.3.3	Principes de la modélisation et équations générales	. 67
		3.3.3.1 Milieux continus équivalents	. 67
		3.3.3.2 Compatibilité partielle des déformations du béton avec les	
		déformations moyennes	. 69
		3.3.3.3 Equations d'équilibre	. 69
3.4	Lois c	le comportement des matériaux	. 70
	3.4.1	Comportement du béton en compression dans la direction D ₂	70
	3.4.2	Comportement du béton en traction dans la direction D ₁	. 71
	3.4.3	Comportement de l'acier	. 72
3.5	Calcu	ls spécifiques relatifs à l'effort tranchant	. 72
	3.5.1	Calcul de la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$. 72
	3.5.2	Calcul de la distorsion moyenne	. 73
3.6	Résol	ution du problème	. 74
	3.6.1	Transformation des équations générales	. 74
	3.6.2	Algorithme de calcul	. 74
3.7	Concl	usion	. 81

Cha	pitre	4 Exemple d'application et résultats des simulations	82
4.1	Introd	uction	82
4.2	Essais	de l'Université de Toronto –Comportement de section	82
	4.2.1	Résultats obtenus	84
	4.2.2	Analyse des résultats	91
4.3	Influe	ncé du confinement du béton sur le module de cisaillement G	92
4.4	Etude	paramétrique	94
	4.4.1	Influence de l'espacement des armatures transversales	94
4.5	Concl	lusion	97
Con	Conclusions générales		
Bibl	iograpł	nie 1	.00

Liste des tableaux

Tableau 4.1	Propriétés des différentes poutres (Vecchio et Collins 1982 et 1988) 8	83
Tableau 4.2	Caractéristique de la section confiné des différentes poutres	84
Tableau 4.3	Récapitulatif des valeurs de l'effort tranchant ultime	91
Tableau 4.4	Comparaison des valeurs de module de cisaillement G	93
Tableau 4.5	Caractéristique de la section confiné de la poutre SA3	94
Tableau 4.6	Caractéristique de la section confiné de la poutre SK3	95
Tableau 4.7	Caractéristique de la section confiné de la poutre CF1	96

Liste des figures

Figure	1.1	Représentation de la formation d'arches dans le béton confiné,
		P. Paultre et F. Légeron (2008) 4
Figure	1.2	Loi de comportement du béton confiné, Hognestad (1951)5
Figure	1.3	Comportement en traction du béton, Hognestad (1951)7
Figure	1.4	Courbe contrainte déformation du béton confiné, Sheikh et
		Uzumeri (1982)
Figure	1.5	Courbe contrainte déformation, Mander et al. (1988)
Figure	1.6	Béton effectivement confiné d'une section rectangulaire 10
Figure	1.7	Courbe contrainte-déformation du béton confiné et non confiné,
		Saatcioglu et Razvi (1992) 13
Figure	1.8	Comparaison entre le modèle proposé et les résultats expérimentaux,
		Hoshikuma et al. (1997) 14
Figure	1.9	Courbe contrainte déformation du béton confiné,
		HS. Chung et al. (2002)
Figure	1.10	Courbe contrainte – déformation du béton confiné,
		B. Bousalem et N. Chikh (2007) 16
Figure	1.11	Diagramme contrainte – déformation du béton confiné,
		Bouafia et al. (2010)
Figure	1.12	Elément en béton armé soumis à un cisaillement et à des contraintes
		normales constantes
Figure	1.13	Organigramme de calcul d'élément sous effort tranchant et contraintes
		normales constantes
Figure	1.14	Organigramme de calcul d'élément sous effort tranchant constant et
		contraintes normales variables
Figure	1.15	Organigramme générale de résolution pour un élément isolé,
		Vecchio et Collins (1986)
Figure	1.16	Organigramme générale de la méthode, Stanciulescu (1996) 37
Figure	1.17	Modèle simple du treillis, Kachi (2006)

Figure	1.18	Comportement local du béton armé dans le sens y, dans l'âme	41
Figure	2.1	Diagramme représentant la loi de comportement du béton	42
Figure	2.2	Loi de comportement uniaxiale du béton en compression,	
		Sargin (1968)	43
Figure	2.3	Comportement de béton ordinaire avant fissuration	45
Figure	2.4	Diagramme contrainte - déformation instantanée du béton sur le bord	
		tendu, Grelat (1978).	45
Figure	2.5	Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton confiné,	
		Bouafia et al. (2010)	46
Figure	2.6	Diagramme contrainte -déformation d'un acier naturel (Loi élasto-	
		plastique parfaite)	48
Figure	2.7	Comportement des aciers écrouis	49
Figure	2.8	Comportement des aciers précontraints.	50
Figure	2.9	Section de béton découpée en tables trapézoïdales.	51
Figure	2.10	Description d'une section typique d'une poutre en béton armé et	
		précontraint.	52
Figure	2.11	précontraint Organigramme simplifié de la recherche de l'équilibre de l'état	52
Figure	2.11	précontraint Organigramme simplifié de la recherche de l'équilibre de l'état d'équilibre d'une section	52 62
Figure Figure	2.113.1	précontraint	52 62 67
Figure Figure Figure	2.113.13.2	précontraint	52 62 67
Figure Figure Figure	2.113.13.2	précontraint	52 62 67 70
Figure Figure Figure Figure	2.113.13.23.3	précontraint	52 62 67 70 71
Figure Figure Figure Figure Figure	 2.11 3.1 3.2 3.3 3.4 	précontraint	52 62 67 70 71 72
Figure Figure Figure Figure Figure Figure	 2.11 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 	précontraint	52 62 67 70 71 72 80
Figure Figure Figure Figure Figure Figure Figure	 2.11 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 4.1 	précontraint	52 62 67 70 71 72 80
Figure Figure Figure Figure Figure Figure Figure	 2.11 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 4.1 	précontraint	 52 62 67 70 71 72 80 85
Figure Figure Figure Figure Figure Figure Figure	 2.11 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 4.1 4.2 	précontraint	52 62 67 70 71 72 80 85
Figure Figure Figure Figure Figure Figure Figure	 2.11 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 4.1 4.2 	précontraint	52 62 67 70 71 72 80 85 85
Figure Figure Figure Figure Figure Figure Figure	 2.11 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 4.1 4.2 4.3 	précontraint	52 62 67 70 71 72 80 85 85

Figure 4.4	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour	
	la poutre SK2.	86
Figure 4.5	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour	
	la poutre SK3.	87
Figure 4.6	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour	
	la poutre SK4	87
Figure 4.7	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour	
	la poutre SP0	88
Figure 4.8	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour	
	la poutre SP1	88
Figure 4.9	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour	
	la poutre SP2	89
Figure 4.10	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour	
	la poutre SP3	89
Figure 4.11	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour	
	la poutre SM1	90
Figure 4.12	Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour	
	la poutre CF1	90
Figure 4.13	Forme des courbes expérimentales (contrainte-déformation de	
	cisaillement)	92
Figure 4.14	Influence de l'espacement des armatures transversales pour	
	la poutre SA3.	94
Figure 4.15	Influence de l'espacement des armatures transversales pour	
	la poutre SK3.	95
Figure 4.16	Influence de l'espacement des armatures transversales pour	
	la poutre CF1	96

Notation

- f_{c0} : Résistance à la compression du béton non confiné,
- E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton,

 ε_{co} : Déformation de pic de béton non confiné,

- f_{cc} : Résistance à la compression maximale du béton confiné,
- ε_{cc} : Déformation de pic de béton confiné,
- \mathcal{E}_{65} : Déformation correspondant à 65 f_{cc} ,
- ε_{ccu} : Déformation ultime de béton confiné,
- E_s : Valeur contrôlant la pente de la partie descendante,
- f'_l : Pression latérale du renforcement transversale,
- k_e : Coefficient de confinement effectif,
- f_{ti} : Résistance du béton a la traction,
- \mathcal{E}_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{ti} ,
- \mathcal{E}_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,
- E_a : Module longitudinal de l'acier,
- ε_e : Déformation limite élastique de l'acier,
- σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier,
- \mathcal{E}_u : Déformation ultime de l'acier.
- $\Delta \delta u$: Accroissement de la déformation de la section,
- $\Delta \delta w$: Accroissement de la rotation différentielle de la section,
- ΔV : Accroissement de l'effort tranchant de la section,
- $\Delta \gamma_{moy}$: Accroissement de la distorsion moyenne de la section,
- ΔN : Accroissement de l'effort normal de la section,
- ΔM : Accroissement du moment fléchissant de la section.

INTRODUCTION GENERALE

Le problème de cisaillement dans les constructions en béton armé et précontraint est depuis longtemps l'objet d'études expérimentales et théoriques dans plusieurs laboratoires et centres de recherches dans le monde.

La plupart des sections en béton armé, béton précontraint sont calculées suivant le formalisme linéaire de la théorie de l'élasticité établie au 19 eme siècle .Or de nombreux essais effectués sur ces sections et les matériaux constitutifs laissent penser qu'il n'est pas possible d'obtenir, par le calcul linéaire, une représentation exacte de la déformabilité des sections.

Actuellement peux de modèles numériques permettent de caractériser le comportement en cisaillement d'une section de poutre en béton armé ou béton précontraint.

L'objet de notre travail est l'élaboration d'une méthode de calcul basée sur l'élasticité non linéaire, permettant la modélisation jusqu'à rupture des sections de poutre en béton armé ou béton précontraint soumises à l'effort tranchant en tenant en compte le confinement du béton par la présence des armatures transversales.

Sur la base de cette étude, un programme informatique est élaboré suivant les normes Fortran 90, développé par Kachi (2006) ainsi que la prise en compte du confinement du béton proposée par Bouafia et al. (2010), est utilisé et appliqué pour apprécier l'effet des caractéristiques du béton et des armatures ainsi que les espacements des armatures transversales et aussi, pour estimer le comportement mécanique et tracer les courbes de chargement. Ceci nous a permis d'évaluer la distorsion moyenne en fonction de l'effort tranchant des sections des poutres en béton armé ou béton précontraint jusqu'à rupture.

Méthodologie et organisation du mémoire

Pour répondre à ces objectifs, ce mémoire est organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre est une étude bibliographique sur quelques lois de comportement contrainte-déformation du béton confiné et les modèles utilisés pour la modélisation non linéaire des éléments en béton armé ou précontraint soumis à l'effort tranchant.

Dans le deuxième chapitre on s'intéresse à l'étude d'une section d'un élément de poutre en béton armé et/ou précontraint. En présentant la méthode de calcul concernant l'étude de l'équilibre d'une section en prenant en compte le confinement du béton sous forme d'un organigramme de calcul.

Le troisième chapitre est consacré au calcul de la rigidité à l'effort tranchant d'une poutre armé en présentant l'ensemble des paramètres liés à l'effort tranchant, l'inclinaison des bielles de béton et la distorsion sous forme d'un algorithme et organigramme général de calcul. Ce programme permet la modélisation numérique du comportement non linéaire, jusqu' à rupture des sections de poutre en béton armé et/ou précontraint, soumises à la flexion composée et à l'effort tranchant.

Finalement le quatrième chapitre présente une série d'exemples d'applications et la confrontation des résultats avec et sans confinement du béton puis une étude paramétrique a été effectuée.

On termine par une conclusion générale, obtenues à l'issue de cette étude.

Chapitre 1 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, tout d'abord nous allons exposer les points principaux de notre étude bibliographique, on va présenter quelques lois de comportement contrainte-déformation proposées du béton confiné par la présence des armatures transversales. Par la suite, nous allons présenter les modèles utilisés pour la modélisation non linéaire des éléments en béton armé ou précontraint soumis à l'effort tranchant.

1.2 Définition du béton confiné

C'est un volume de béton pourvu d'armatures transversales disposées de façon à s'opposer au gonflement du matériau sous l'effet des contraintes de compression ainsi qu'au flambement des armatures longitudinales en zone comprimée, ce qui impose une entre distance (s) limitée.

L'armature de confinement est soumise à une pression latérale perpendiculaire à la surface, qui la mit en traction. La déformation à la rupture du béton confiné peut être estimée en fonction de l'armature transversale et sont imposées dans les zones dissipatives ou critiques.

Les armatures transversales ont une contribution essentielle au bon comportement des structures, leur efficacité dépend des facteurs suivants :

- L'importance du pourcentage en volume des armatures transversales ;
- Le rapport entre l'espacement des armatures et le dimensionnement du noyau fretté ; une réduction de l'espacement améliore l'effet de frettage ;
- La forme des armatures transversales ;
- L'ancrage des armatures transversales.

1.3 Effet du confinement du béton sur la ductilité des structures en B.A

La prise en compte de la contribution des armatures transversales (confinement interne) améliore la résistance du béton à la compression. Ces armatures doivent être disposées de façon adéquate dans les éléments en béton armé poteaux - poutres pour permettre à la structure d'avoir un comportement ductile sous les sollicitations qui lui sont appliquées (efforts sismique,...). En effet, l'augmentation de la résistance du béton à la compression par des armatures transversales

exerce un effet positif qui peut se traduire par la capacité de résister à des déformations ou déplacements importants que la structure peut subir.

Les effets du béton confiné sur la ductilité des structures en béton armé seront quantifiés au niveau de la section puis au niveau de la structure entière.



Figure 1.1 Représentation de la formation d'arches dans le béton confiné, P. Paultre et F. Légeron (2008).

1.4 Comportement du béton confiné en élasticité non linéaire

La plupart des recherches sur le confinement du béton se sont inspirées du modèle de Richart et al. (1928) qui a été développé pour des cylindres soumis à une pression hydraulique, c'est-à-dire triaxiale. Richart et al. ont remarqué que la résistance en compression du béton confiné f_{cc} augmentait en fonction de la pression appliquée. Pour ce, ils ont proposé le modèle suivant :

$$f_{cc} = f_{co} + 4.1 f_l \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0} \left(\frac{5f_{cc}}{5f_{co}} - 4 \right)$$
(1.2)

où f_{co} est la résistance du béton non confiné et f_l est la pression de confinement.

Ce modèle permet d'évaluer la contrainte maximale et la déformation du béton confiné. Par la suite, plusieurs autres chercheurs se sont intéressés à ce sujet.

Dans ce qui suit, un résumé sur quelques modèles analytiques a été établit que ce soit pour les sections rectangulaires ou circulaires.

1.4.1 Modèle d'Hognestad (1951)

La loi de comportement du béton reprend le modèle d'Hognestad (1951) permet de reproduire l'adoucissement après fissuration, le comportement unilatéral du béton (refermeture des fissures) ainsi que l'adoucissement après avoir atteint la résistance en compression et la prise en compte du confinement sur cet adoucissement et la résistance en compression. Deux fonctionnements d'ouverture et refermeture de fissures sont possibles, (Figure 1.2).



Figure 1.2 Loi de comportement du béton confiné, Hognestad (1951).

1.4.1.1 Comportement en compression

Sous chargement monotone, la loi est du type parabole puis linéaire avec adoucissement. Un plateau avec une contrainte résiduelle non nulle peut-être défini après l'adoucissement. En utilisant les conventions génie civil (déformation positive en compression) :

Avec:

 $\sigma_{_{c0}}$

-
$$\varepsilon_{c0} = 2 \cdot \frac{\sigma_{c0}}{E}$$
 et de plus il faut prendre la contrainte résiduelle ;

- σ_{pt} = 20% de la contrainte maximale ;

- (
$$\varepsilon_{c0}, \sigma_{c0}$$
) Sont les coordonnées du pic de la courbe de compression ;

- Z : pente après le pic ;

- σ_{c0} : contrainte résiduelle.

1.4.1.2 La prise en compte du confinement en compression

La ductilité d'une section en béton armé et donc le comportement sismique de la structure dépendent fortement du confinement du béton et le paramètre Z qui est directement fonction du confinement apporté par les cadres.

Si Z < 0 : la valeur de Z est calculée à partir des coefficients α et ω_w . De plus, dans ce cas, la contrainte et la déformation au pic corrigées d'un facteur β :

$$\sigma_{c0}' = \beta . \sigma_{c0} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{c0}' = \beta^2 . \varepsilon_{c0} \tag{1.5}$$

$$\beta = \min(1 + 2, 5.\alpha.\omega_w, 1, 125 + 1, 25.\alpha.\omega_w)$$
(1.6)

Avec : Donc :

$$Z = \frac{\beta - 0.85}{\beta . (0.1.\alpha . \beta + 0.0035 + \varepsilon_{c0})}$$
(1.7)

Les coefficients α et ω_w sont déterminés à l'aide des formules suivantes :

$$\alpha = \left(1 - \frac{8}{3n}\right) \left(1 - \frac{s}{2.b_c}\right) \left(1 - \frac{s}{2.h_c}\right)$$
(1.8)

$$\beta = \frac{A_{cadre.f_{yt}}}{b_c.h_c.f_{cu}} \sum \left(\frac{l_w}{s}\right)$$
(1.9)

Avec :

n : Nombre de barres de flexion ;

 b_c et h_c : Dimension de la surface de béton confiné par les cadres ;

s : Espacement des cadres ;

A_{cadre} : Section d'un cadre ;

 l_{w} : Longueur totale des cadres ;

 f_{cu} : Contrainte ultime pour le béton ;

 f_{vt} : Contrainte de plastification des cadres.

Si Z > 0: Les coefficients α et ω_w sont ignorés, et la valeur de Z peut être déterminée à l'aide des formules précédentes.

1.4.1.3 Comportement en traction

Le béton possède une résistance en traction mais est fragile après fissuration. La loi est linéaire par morceau en traction :

- jusqu'au pic, le comportement est linéaire, la résistance en traction est notée σ_{c0} ;

- l'adoucissement est linéaire la déformation ultime est proportionnelle à la déformation au pic, le facteur de proportionnalité étant noté \mathcal{E}_{rt} ,

- un plateau résiduel a été introduit, la résistance résiduelle est notée (\mathcal{E}_{rt}).

L'avantage de ce type de modèle, réside dans la prise en compte implicite de l'effet de l'effert normal sur le moment fléchissant résistant maximal ainsi que sur la ductilité de la section.



Figure 1.3 Comportement en traction du béton, Hognestad (1951).

1.4.2 Modèle de Sheikh et Uzumeri (1982)

Sheikh et Uzumeri publient une explication rationnelle concernant l'effet de confinement du béton. La détermination de la résistance du béton confiné se défini comme une fonction :

- de la valeur de la résistance au centre du béton ;
- du volume total d'acier ;
- de l'espacement des étriers ;
- de la limite élastique des étriers ;
- de la configuration des étriers ;
- de l'effet des dimensions de la section.





La résistance à la compression maximale du béton confiné f_{cc} est donnée par la formule suivante :

$$f_{cc} = 0.85 f_c' \left(1 + \frac{A_e \beta \sqrt{\rho_s f_s'}}{P_{occ}} \right)$$
(1.10)

Avec : - A_e : surface du béton confiné ;

- f_c' : contrainte du béton non renforcé ;

- f'_s : limite élastique de l'acier ;
- ρ_s : rapport entre le volume latéral de renforcement et le volume du béton confiné ;
- β constante ;

$$-P_{occ} = 0.85 f_c' (c_x . c_y - A_s)$$

- $-c_x$: distance d'axe à axe des étriers extérieurs dans une direction ;
- $-c_y$: distance d'axe à axe des étriers extérieurs.

1.4.3 Modèle de Mander et al. (1988)

Mander a proposé une loi contrainte – déformation pour le béton confiné par les aciers transversal.



Figure 1.5 Courbe contrainte déformation, Mander et al. (1988).

Le modèle contrainte-déformation est illustré dans la figure (1.5) est basé sur l'équation proposé par Popovics (1973) pour un taux quasi statique de déformation et de chargement mono tonique.

L'influence des différents types de confinement a été prise en compte par l'introduction de la contrainte effective latérale de confinement qui dépend à son tour de la configuration de l'armature transversale ainsi que longitudinale. Cette approche est similaire à celui adopté par Sheikh et Uzumeri (1982).

La contrainte de compression longitudinale f_c est donnée par l'équation :

$$f_{c} = \frac{f'_{cc} xr}{r - 1 + x^{r}}$$
(1.11)

Où f'_{cc} : la résistance à la compression du béton confiné.

$$x = \frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}_{cc}}$$

Où \mathcal{E}_c : la déformation longitudinal du béton.

$$\varepsilon_{c} = \varepsilon_{c0} \left[1 + 5 \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right]$$
(1.12)

Où f'_{co} et \mathcal{E}_{co} sont la résistance du béton non confiné et la déformation correspondante.

$$r = \frac{E_c}{E_c - E_{\text{sec}}} \tag{1.13}$$

Où $E_c = 5,000 \sqrt{f'_{co}} MPa$

 E_c : est le module tangent d'élasticité du béton ;

 E_{sec} : est le module sécant d'élasticité du béton à la résistance pic.





1.4.3.1 La pression de confinement latérale effective et le coefficient d'efficacité

Lorsqu'on utilise l'équation (1.11) pour le calcul de la ductilité et la résistance des poteaux, il est supposé que la section du béton confiné est la section du béton entre les aciers transversaux.

Pour répondre à la condition $A_e \prec A_{cc}$

On considère que la pression latérale effective de confinement est égale à :

$$f'_l = f_l k_e \tag{1.14}$$

 f_l : La pression latérale des aciers transversaux supposée uniformément distribuée autour de la surface du béton confiné ;

$$k_e = \frac{A_e}{A_{cc}} \tag{1.15}$$

 k_e : Le coefficient d'efficacité de confinement ;

Ae : La surface du béton confiné efficace

$$A_{cc} = A_c \left(1 - \rho_{cc} \right) \tag{1.16}$$

 ρ_{cc} : Rapport de la section d'armatures longitudinales à la surface du béton confiné ;

 A_c : La surface du béton confiné prise entre axes d'armature transversale.

1.4.3.2 Confinement par des cadres rectangulaires avec ou sans épingles

Les sections carrées ou rectangulaires sont les plus intéressantes dans l'investigation du confinement à cause de l'action de courbement, qui est supposée agir selon une forme de parabole du second degré avec une tangente initiale de 45°.

La surface efficace confinée au niveau des armatures transversales est obtenue par soustraction de la surface de la parabole qui contient le béton confiné inefficace, voir figure (1.6).

Par conséquent la surface totale du béton confiné inefficace au niveau des armatures transversales pour n bars longitudinales est:

$$A_{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(w_{i}')^{2}}{6}$$
(1.17)

En incorporant l'influence des surfaces ineffectives en élévation, voir figure (1.6).

La surface efficace du béton confiné à mi-chemin entre les niveaux des armatures transversales est :

$$A_{e} = \left(b_{c}d_{c} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(w_{i}')^{2}}{6}\right) \left(1 - \frac{s'}{2b_{c}}\right) \left(1 - \frac{s'}{2d_{c}}\right)$$
(1.18)

Où b_c et d_c sont les dimensions du béton confiné entre axes des armatures transversales Ainsi de l'équation (1.15) la valeur du coefficient d'efficacité pour les armatures transversales rectangulaires est :

$$K_{e} = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(w_{i}')^{2}}{6b_{c}d_{c}}\right) \left(1 - \frac{s'}{2b_{c}}\right) \left(1 - \frac{s'}{2d_{c}}\right)}{\left(1 - \rho_{cc}\right)}$$
(1.19)

(1.25)

Les quantités des aciers transversaux de confinement dans les directions x et y sont données par les équations suivantes :

$$\rho_{x} = \frac{A_{sx}}{sd_{c}}$$

$$\rho_{y} = \frac{A_{sy}}{sb_{c}}$$

$$A_{cc} = A_{c} \left(1 - \rho_{cc}\right)$$
(1.20)
(1.21)

 A_{sx} et A_{sy} sont les sections d'armatures totales dans les directions x et y respectivement. Les contraintes latérales de confinement dans le béton dans les deux directions x et y sont données par les équations suivantes :

$$f_{lx} = \frac{A_{sx}}{sd_c} f_{yh} = \rho_x f_{yh}$$

$$f_{ly} = \frac{A_{sy}}{sb_c} f_{yh} = \rho_y f_{yh}$$
(1.22)

De l'équation (1.14) les contraintes de confinement latérales effectives dans les directions x et y sont :

$$f_{lx} = k_e \rho_x f_{yh}$$

$$f_{ly} = k_e \rho_y f_{yh}$$
(1.23)

Où K_e est donné par l'équation (1.19).

La contrainte effective latérale de confinement f'_l des cadres est déterminée comme suit:

$$f_{l}' = \frac{1}{2} \left(f_{lx}' + f_{ly}' \right) = K_{e} \rho_{s} f_{yh}$$
(1.24)

Tel que :

1.4.3.3 La résistance de compression du béton confiné

 $\rho_s = \frac{1}{2} \left(\rho_x + \rho_y \right)$

La résistance de compression du béton confiné $f_{cc}^{'}$ est déduite en fonction de la contrainte effective latérale de confinement $f_{l}^{'}$. Celle-ci est déterminée dans le cas général par l'équation (1.24)

La résistance de compression du béton confiné est donnée par la relation :

$$f_{cc}^{'} = f_{co}^{'} \left(-1.254 + 2.254 \sqrt{1 + \frac{7.94f_{l}^{'}}{f_{co}^{'}}} - 2\frac{f_{l}^{'}}{f_{co}^{'}} \right)$$
(1.26)

1.4.4 Modèle de Saatcioglu et Razvi (1992)

La courbe contrainte déformation est délimitée par trois régions selon la valeur de la déformation où il a été aussi tenu compte du confinement (figure 1.7).



Figure 1.7 Courbe contrainte-déformation du béton confiné et non confiné, Saatcioglu et Razvi (1992).

$$\sigma_{cc} = f_{cc} \left[2x - (x)^2 \right]^{\frac{1}{(1+2K)}}$$
 (Partie ascendante) (1.27)

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - Z \ \left(\varepsilon_c - \varepsilon_{cc0}\right) \ge 0.2 f_{cc} \qquad \text{(Partie descendante)} \tag{1.28}$$

$$Z = \frac{0.15 \times f_{cc}}{(\varepsilon_{85} - \varepsilon_{cc0})} \tag{1.29}$$

Avec :

 σ_{cc} : Contrainte du béton confiné ;

 f_{cc} : Résistance limite du béton confiné ;

K : Coefficient de confinement effectif ;

 \mathcal{E}_{cc0} : Déformation correspondante à la contrainte du béton confiné ;

 ε_{85} : Déformation correspondante à 85% de $f_{cc}\,$.

1.4.5 Modèle Hoshikuma et al. (1997)

Un modèle contrainte-déformation du béton confiné est développé suite à une analyse rigoureuse des résultats des essais expérimentaux sur des poteaux en béton armés soumise à une compression axiale.



Figure 1.8 Comparaison entre le modèle proposé et les résultats expérimentaux, Hoshikuma et al. (1997).

$$f_c = E_c \varepsilon_c \left[1 - \frac{1}{n} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \right)^{n-1} \right]$$
(1.30)

$$f_c = f_{cc} - E_{des} \left(\varepsilon_c - \varepsilon_{cc} \right) \ge 0.5 f_{cc} \tag{1.31}$$

$$n = \frac{E_c \varepsilon_{cc}}{E_c \varepsilon_{cc} - f_{cc}} \quad \text{et} \quad E_{des} = \frac{11.2 \times f_{c0}^2}{\rho_{sh} \times f_{yh}}$$
(1.32)

Avec :

 f_c : Contrainte du béton confiné ;

- \mathcal{E}_{c} : Déformation du béton confiné ;
- f_{cc} : Résistance limite du béton confiné ;
- E_{des} : Module de déformation régit la partie descendante poste pic ;
- f_{vh} :Contrainte limite des aciers transversaux ;
- ρ_{sh} : Rapport entre le volume des armatures de confinement transversales et le volume du béton confiné,
- f_{c0} :Contrainte du béton non confiné à l'age j.

1.4.6 Modèle H.-S. Chung et al. (2002)

La courbe contrainte-déformation du béton confiné peut être prédite par les trois coordonnées, A, B et C comme montré par la Figure (1.9). La coordonner A correspond au pic contrainte / déformation (f_{cc}, \mathcal{E}_{cc}), B la contrainte / déformation ($0.85f_{cc}, \mathcal{E}_{0.85}$), et C la contrainte / déformation ($0.3f_{cc}, \mathcal{E}_{0.3}$). Le C coordonner localise à la ligne d'extension pour connecter les coordonnées A et B.



Figure 1.9 Courbe contrainte déformation du béton confiné, H.-S. Chung et al. (2002).

D'après les résultats et les équations empiriques présentées par Popovics (1973), la relation contrainte-déformation dans la région ascendante OA peut être calculée comme suit :

où γ est la pente initiale de la courbe ascendante OA.

$$\gamma = \frac{E_c}{E_c - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}} \qquad ; \qquad E_c = \frac{f'_c}{\varepsilon_B}$$

La relation contrainte-déformation de la partie descendante AC peut être déterminée par la relation suivante :

où D est la pente de la courbe descendante, et définie comme suite :

$$D = \frac{0.15f_{cc}}{\varepsilon_{0.85} - \varepsilon_{cc}} \tag{1.35}$$

Après la contrainte f_c avoir atteint la contrainte $0.3f_c$, la contrainte du béton confiné est reste constante $0.3f_c$ quel que soit le croissant de la déformation.

1.4.7 Modèle de B. Bousalem et N. Chikh (2007)

L'évidence expérimentale montre que la courbe contrainte-déformation du béton confiné est composée de trois régions: la branche ascendante, la branche descendante et la branche maintenue. La courbe typique contrainte déformation utilisée pour le modèle proposé est schématiquement représentée dans la figure (1.10).

La formulation de la partie ascendante de la courbe est basée sur l'équation de Popovics (1973) adoptée également par Mander et al. (1988) et dont la relation est exprimée par:

$$f_c = \frac{f_{cc} xn}{n - 1 + x^n} \tag{1.36}$$

où

$$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \quad \text{et} \quad n = \frac{E_c \varepsilon_{cc}}{E_c \varepsilon_{cc} - f_{cc}}$$
(1.37)

avec

 $E_c = 1100 \sqrt[3]{f_{c0}}$, module d'élasticité longitudinal.



Figure 1.10 Courbe contrainte – déformation du béton confiné, B. Bousalem et N. Chikh (2007).

L'examen des coordonnées des points sur la ligne tombante montre que l'équation de la partie descendante de la figure (1.10) peut s'écrire:

$$f_{c} = f_{cc} - E_{s} \left(\varepsilon_{c} - \varepsilon_{cc0} \right) \ge 0.3 f_{cc}$$

$$E_{s} = \frac{4 \times f_{c0}^{2}}{ke \times \rho_{s} \times f_{vh}}$$

$$(1.38)$$

où E_s est la valeur contrôlant la pente de la partie descendante.

Il est clair que les facteurs gouvernants la relation contrainte-déformation du béton confiné matérialisés par les équations (1.36), (1.37) et (1.38) sont: la contrainte de compression pic f_{cc} , la déformation correspondante $\varepsilon = t$ le taux d'adoucissement Esoft.

Les essais ont montré que la contrainte résiduelle poursuivant la branche descendante est de l'ordre de 20 à 30 % de la résistance pic, Sheikh et al. (1982), Park et al. (1982), Saatcioglu et al. (1992). Dans le modèle proposé, la contrainte résiduelle est supposée égale à 30 % de la contrainte pic.

Avec :

- f_c : Contrainte du béton non confiné ;
- f_{cc} : Contrainte du béton confiné ;
- E_s : Module correspondant à la branche descendante du béton confiné ;
- k_{ρ} : Coefficient de confinement effectif ;
- f_{vh} : Contrainte limite des aciers transversaux ;
- ρ_s : Rapport entre le volume des armatures de confinement transversales et le volume du béton confiné,

 f_{c0} : Contrainte du béton non confiné à l'age j ;

 \mathcal{E}_{cc0} : Déformation au pic, correspondante à la contrainte du béton confiné ;

 ε_c : Déformation du béton confiné.

1.4.8 Modèle de Bouafia et al. (2010)

Plusieurs modèles théoriques pour prédire le comportement contrainte -déformation du béton confiné ont été proposés. Nous adoptons ici le modèle proposé par Bouafia et al. (2010), dont la courbe contrainte-déformation du béton confiné est composée de trois régions : la branche ascendante, la branche descendante et la branche maintenue.

La courbe définissant la relation contrainte-déformation du béton confiné utilisé pour le modèle proposé par Bouafia et al. (2010), est représentée dans la (Figure 1.11).



Figure 1.11 Diagramme contrainte – déformation du béton confiné, Bouafia et al. (2010).

La première partie est une courbe ascendante non linéaire, la loi de Sargin a été modifiée pour tenir compte du confinement :

*
$$0 \le \varepsilon < \varepsilon_{cc}$$
 :
 $\sigma_{cc} = f_{cc} \times \frac{k_c \times \varepsilon_c + (k_c - 1) \times \varepsilon_c^2}{2}$

$$\sigma_{cc} = f_{cc} \times \frac{k_c + \varepsilon(k_c - 2) + \varepsilon \varepsilon}{1 + (k_c - 2) \times \varepsilon + k_c \times \varepsilon^2}$$
(1.39)

Avec :

• f_{cc} : résistance à la compression maximale du béton confiné définie précédemment, elle est donnée par :

$$f_{cc} = f_{c0} \left(-1,254 + 2,254 \sqrt{1 + \frac{7,94f'_l}{f_{c0}}} - \frac{2f'_l}{f_{c0}} \right)$$
(1.40)

 f'_l : Pression latérale du renforcement transversale supposer uniformément distribuée sur la surface du béton.

Avec:
$$\overline{\varepsilon}_{c} = \frac{\varepsilon_{c}}{\varepsilon_{cc}}$$
; $\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0} \times \left[1 + 5\left(\frac{f_{cc}}{f_{c0}} - 1\right)\right]$ (1.41)
 $k_{c} = \frac{E_{bc0} \times \varepsilon_{cc}}{f_{cc}}$; $k_{c}' = k_{c} - 1$

La deuxième partie est descendante linéaire après le pic (poste pic), la relation est décrite par :

*
$$\varepsilon_{cc} \leq \varepsilon < \varepsilon_{65}$$
:
 $\sigma_{cc} = f_{cc} - E_s(\varepsilon_c - \varepsilon_{cc})$
(1.42)

Avec :

$$E_{s} = \frac{6 \times f_{c0}^{2}}{ke \times \rho_{s} \times f_{vh}} \qquad ; \qquad \qquad \mathcal{E}_{65} = \frac{0.35 \times f_{cc}}{E_{s}} + \mathcal{E}_{cc} \qquad (1.43)$$

Et la troisième partie représente un palier de ductilité, la relation contrainte –déformation est donnée par :

*
$$\varepsilon_{65} \leq \varepsilon \prec \varepsilon_{ccu}$$
:
 $\sigma_{cc} = 0.65 f_{cc}$
(1.44)

Dans ce palier linéaire de ductilité, l'acier participe jusqu'à sa plastification puis se rompe autour de 40% en terme de déformation, la relation qui a été proposé est décrite par :

$$\varepsilon_{ccu} = \varepsilon_{cu} + 0.40 \cdot \frac{f_l}{f_{c0}} = 0.0035 + 0.40 \cdot \frac{f_l}{f_{c0}}$$
(1.45)

1.5 Modèles de calcul

Plusieurs modèles de calcul ont été proposés pour le calcul des éléments en béton armé. Nous pouvons citer Vecchio et Collins (1982, 1986 et 1988), Hsu (1991), Drizi (1993), Stanciuliscu (1996) et Kachi (2006). Nous nous limiterons dans cette étude à la présentation du modèle de Vecchio et Collins et modèle du Stanciuliscu, ainsi que le modèle proposé par Kachi.

1.5.1 Modèle de Vecchio et Collins (1986)

Ce modèle a pour objectif de déterminer une relation $\tau_{xy} = f(\gamma_{xy})$ pour un élément en béton armé. Les auteurs ont d'abord étudié un élément isolé sous deux systèmes de sollicitation simples, effort tranchant variable et effort normal constant, et effort normal variable et effort tranchant constant. Ensuite, ils ont proposé un modèle général de résolution pour un élément isolé.

1.5.1.1 Élément sous effort tranchant et contraintes normales constantes

Il s'agit d'un élément en béton armé soumis à des contraintes normales constantes et au cisaillement. La figure (1.11) montre les conditions générales de chargement dans ce cas.



Figure 1.12 Elément en béton armé soumis à un cisaillement et à des contraintes normales constantes.

L'organisation de la méthode est présentée sous la forme d'un algorithme à 11 étapes de calcul. Il s'agit d'une méthode de résolution itérative où l'itération est faite sur trois variables (la déformation principale de compression, le contrainte longitudinale et l'angle d'inclinaison de la direction principale de compression). Les différentes étapes de calcul sont données par :

Première étape : donner les valeurs des contraintes normales appliquées à l'élément σ_x et σ_y . **Deuxième étape :** calculer les déformations initiales dans les deux directions par les relations suivantes :

$$\varepsilon_{xo} = \begin{cases} \frac{\sigma_x}{\rho_{sx} E_s} & \text{pour } \sigma_x \succ 0\\ -\varepsilon_o \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\sigma_x}{f_c} \left(1 + \frac{E_s \rho_{sx}}{E_c}\right)} \right) & \text{pour } \sigma_x \prec 0 \end{cases}$$

$$\epsilon_{yo} = \begin{cases} \frac{\sigma_y}{\rho_{sy} E_s} & \text{pour } \sigma_y \succ 0\\ -\epsilon_o \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\sigma_y}{f_c \left(1 + \frac{E_s \rho_{sy}}{E_c}\right)}}\right) & \text{pour } \sigma_y \prec 0 \end{cases}$$

Troisième étape : choisir une valeur de départ pour la déformation principale de compression ε_2 telle que :

$$\varepsilon_{2o} \leq \varepsilon_2 \leq 2\varepsilon_o$$
 avec $\varepsilon_{2o} = max(-\varepsilon_{xo}, \varepsilon_{yo}, 0)$

Quatrième étape : estimer la valeur de la déformation longitudinale.

Cinquième étape : estimer la valeur de l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de compression.

Sixième étape : calculer l'état de déformation dans l'élément à partir de la géométrie du cercle de Mohr des déformations :

$$\gamma_{xy} = 2 (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \operatorname{tg} \theta$$
$$\varepsilon_y = \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{tg} (\theta) - \varepsilon_2$$
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2$$

Septième étape : déterminer l'état de contrainte dans le ferraillage et le béton :

- Contrainte dans le ferraillage longitudinal :

$$\sigma_{sx} = E_s \epsilon_x$$

- Contrainte dans le ferraillage transversal :

 $\sigma_{sy} = E_s \ \epsilon_y$

- Contrainte dans le béton dans la direction x :

 $\sigma_{bx} = \sigma_x - \rho_{sx} \sigma_{sx}$

- Contrainte dans le béton dans la direction y :

 $\sigma_{by} = \sigma_y - \rho_{sy} \sigma_{sy}$

- Déterminer les contraintes principales de compression et de traction dans le béton avec les lois de comportement,
- Déduire la contrainte dans le béton dans la direction x du cercle de Mohr pour les contraintes:

 $\sigma'_{bx} = \sigma_{e} + \sigma_1 - \sigma_{by}$

- Déduire l'angle entre la direction principale de traction et la direction x du cercle de Mohr pour les déformations:

$$\theta' = tg^{-1} \sqrt{\frac{\sigma_2 - \sigma_y}{\sigma_1 - \sigma_x}}$$

Huitième étape : vérifier la condition de compatibilité

 $\theta = \theta'$

- si oui, passer à l'étape 9

- si non, revenir à l'étape 5 et prendre une autre valeur de θ .

Neuvième étape : vérifier la condition d'équilibre avec la contrainte dans la direction x :

$$\sigma'_x = \sigma_x$$

si oui, passer à l'étape 10

- si non, revenir à la quatrième étape et prendre une nouvelle valeur de ε_x .

Dixième étape : calculer la contrainte tangentielle déduite de la géométrie du cercle de Mohr pour les contraintes :

$$\tau = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin 2\theta$$

Onzième étape : répéter pour une nouvelle valeur de la déformation principale de compression ϵ_2 .
L'organigramme obtenu à partir de l'organisation des étapes de cette méthode est :



Figure 1.13 Organigramme de calcul d'élément sous effort tranchant et contraintes normales constantes.

1.5.1.2 Élément sous effort tranchant constant et contraintes normales variables

Il s'agit d'un élément en béton armé soumis à des contraintes normales variables et à un effort tranchant constant.

Dans ce cas de charge, les auteurs ont défini une condition d'équilibre basée sur la proportion entre les contraintes normales et la contrainte tangentielle. Les variables d'itération retenues dans ce cas sont la déformation principale de compression ε_2 , la déformation dans la direction x et l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de traction par rapport à la direction x. L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :

Première étape : calculer les paramètres définissant la proportion des contraintes normale par rapport aux contraintes tangentielles :

$$K_x = \frac{\sigma_x}{\tau}$$
 et $K_y = \frac{\sigma_y}{\tau}$

Deuxième étape : choisir une valeur de départ pour la déformation principale de compression ε_2 telle que :

$$0 \leq \epsilon_2 \leq 2\epsilon_0$$

Troisième étape : estimer la valeur de la déformation longitudinale.

Quatrième étape : estimer la valeur de l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de compression.

Cinquième étape : calculer l'état de déformation dans l'élément à partir de la géométrie du cercle de Mohr des déformations :

$$\begin{split} \gamma_{xy} &= 2 \, (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \, tg \, \theta \\ \varepsilon_y &= \frac{\gamma_{xy}}{2} \, tg \, (\theta) - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2 \end{split}$$

Sixième étape : déterminer l'état de contrainte dans le ferraillage et le béton :

- Contrainte dans le ferraillage longitudinal :

$$\sigma_{sx} = E_s \epsilon_x$$

- Contrainte dans le ferraillage transversal:

$$\sigma_{sy} = E_s \epsilon_y$$

- Contrainte dans le béton dans la direction x :

 $\sigma_{bx} = \sigma_2 \sin^2 \theta - \sigma_1 \cos^2 \theta$

- Contrainte dans le béton dans la direction y :

 $\sigma_{by} = \sigma_2 \cos^2 \theta - \sigma_1 \sin^2 \theta$

- Calculer les contraintes principales de compression et de traction dans le béton dans les lois de comportement
- Contrainte dans le béton dans la direction x :

$$\sigma_{\rm bx} = \sigma_2 \sin^2 \theta - \sigma_1 \cos^2 \theta$$

- Contrainte dans le béton dans la direction y :

$$\sigma_{\rm by} = \sigma_2 \cos^2 \theta - \sigma_1 \sin^2 \theta$$

- Contrainte tangentielle déduite de la géométrie du cercle de Mohr pour les contraintes :

$$\tau = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin 2\theta$$

- Contrainte extérieure dans le béton dans la direction x :

$$\sigma'_x = \sigma_{bx} + \rho_{sx} \sigma_{sx}$$

- Contrainte extérieure dans le béton dans la direction y :

$$\sigma'_{y} = \sigma_{by} + \rho_{sy} \sigma_{sy}$$

- Calculer les nouvelles valeurs des paramètres k_x et k_y :

$$K'_x = \frac{\sigma'_x}{\tau}$$
 et $K'_y = \frac{\sigma'_y}{\tau}$

Septième étape : vérifier la condition de compatibilité

 $K'_x K_y = K'_y K_x$

- si oui, passer à l'étape 8

-si non, revenir à l'étape 4 et prendre une autre valeur de θ .

Huitième étape : Vérifier la condition d'équilibre :

 $K'_x = K_x$

si oui, passer à l'étape 9

- si non, revenir à la troisième étape et prendre une nouvelle valeur de ϵ_x .

Neuvième étape : répéter le calcul pour une nouvelle valeur de la déformation principale de compression ε_2 .

L'organigramme obtenu à partir de l'organisation des étapes de calcul de cette méthode est :



Figure 1.14 Organigramme de calcul d'élément sous effort tranchant constant et contraintes normales variables.

1.5.1.3 Méthode générale de résolution pour un élément isolé

Dans le cadre de cette méthode, les auteurs ont choisi de tenir compte des contraintes locales de compression et des contraintes de cisaillement au niveau des fissures. Des relations et des inconnues supplémentaires ont été alors introduites à côté du système d'équations fondamental de la méthode. Le système d'équation ainsi obtenu est non linéaire. La méthode de résolution choisie est une méthode itérative avec des itérations sur la déformation principale de traction ε_1 , l'angle d'inclinaison de la direction principale de traction θ et la contrainte dans l'acier transversal σ_{sy} . De plus un choix de la distance entre les fissures dans les directions x et y a été introduit. L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :

Première étape : donner les valeurs de la distance entre les fissures dans les deux directions S_{mx} et s_{my} .

Deuxième étape : choisir une valeur de départ pour la déformation principale de compression ε_1 .

Troisième étape : estimer la valeur de l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de compression.

Quatrième étape : calculer w (fissure moyenne) :

$$w = \varepsilon_1 s_0$$
 avec $s_0 = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{S_{mx}} + \frac{\cos\theta}{S_{my}}}$

Cinquième étape : estimer la contrainte moyenne dans la plus faible armature (d'habitude σ_{sy}). **Sixième étape :** calculer la contrainte moyenne de traction dans le béton avec la loi de comportement.

$$\sigma_{1} = E_{c} \epsilon_{1} \qquad \text{pour } \epsilon_{1} \leq \epsilon_{f}$$

$$\sigma_{1} = \frac{ft}{1 + \sqrt{200 \epsilon_{1}}} \qquad \text{pour } \epsilon_{1} \geq \epsilon_{f}$$

La valeur de σ_1 obtenue doit respecter la condition suivante :

 $\sigma_{\rm l} \leq \tau_{\rm cimax}~(0.18 + 0.3 k^2~)~tg\theta$

où

$$k = 1.64 - \frac{1}{tg\theta} \ge 0$$
 et $\tau_{cimax} = \frac{\sqrt{-f_c}}{0.31 + 24\frac{w}{a + 16}}$

Septième étape : calculer la contrainte tangentielle dans le béton à partir de la géométrie du cercle de Mohr des contraintes :

- la contrainte dans le béton dans la direction y est donnée par :

$$\sigma_{by} = \sigma_y - \rho_{sy} \sigma_{sy}$$

- la contrainte tangentielle dans le béton est alors donnée par:

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_{by}}{tg\theta}$$

Huitième étape : calculer la contrainte principale de compression déduite du cercle de Mohr:

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \tau_{xy} (tg\theta + \frac{1}{tg\theta})$$

Neuvième étape : calculer la contrainte principale maximale du béton par :

$$\sigma_{2\max} = \frac{f_c}{0.8 - 0.34 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \le f_c$$

Dixième étape : vérifier la condition d'écrasement du béton des bielles comprimées :

 $\sigma_2 \leq \sigma_{2max}$

- si oui, passer à l'étape 11

- si non, revenir à la deuxième ou troisième étape et prendre une valeur de ϵ_1 plus petite

ou bien une autre valeur de θ ($\theta \approx 45^{\circ}$).

Neuvième étape : vérifier la condition d'équilibre avec la contrainte principale de compression :

 $\sigma'_2 = \sigma_2$

- si oui, passer à l'étape 10

- si non, revenir à la quatrième étape et prendre une nouvelle valeur de ε_x .

Onzième étape : Calculer la déformation principale de compression ε_2 :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_{2max}}}\right)$$

Douzième étape : calculer la déformation dans la direction y :

$$\varepsilon_{y} = \frac{\varepsilon_{1} + \varepsilon_{2} tg^{2}\theta}{1 + tg^{2}\theta}$$

Treizième étape : calculer la contrainte dans l'armature transversale :

$$\overline{\sigma}_{sy} \ = \ E_s \ \epsilon_y$$

Quatorzième étape : vérifier la condition d'équilibre par la contrainte dans l'armature

transversale :

$$\overline{\sigma}_{sy} = \sigma_{sy}$$

- si oui, passer à la quinzième étape

- si non, revenir à la cinquième étape prendre une autre valeur de σ_{sy} .

Quinzième étape : calculer la déformation dans la direction x par la géométrie du cercle de Mohr des déformations :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_y$$

Seizième étape : calculer la contrainte σ_{sx} dans l'acier longitudinal avec la loi de comportement de l'acier.

Dix-septième étape : calculer la contrainte, dans le béton, dans la direction x :

$$\sigma_{cx} = \sigma_1 - \frac{\tau_{xy}}{tg\theta}$$

Dix-huitième étape : calculer la contrainte totale dans la direction x :

$$\overline{\sigma}_{x} = \sigma_{cx} + \rho_{sx} \sigma_{sx}$$

Dix-neuvième étape : vérifier la condition d'équilibre en contrainte dans la direction x :

 $\overline{\sigma}_x = \sigma_x$

- si oui, passer à l'étape suivante

- si non, revenir à la troisième étape et prendre une autre valeur de θ (l'augmentation de θ conduit à l'augmentation de σ_x).

Vingtième étape : calculer les contraintes normales σ_{ci} et tangentielle τ_{ci} au niveau de la fissure :

$$\Delta \sigma_{ci} = \sigma_{ci} - \rho_{sx} (f_{ey} - f_{ex})$$

si $\Delta \sigma_{ci} \leq 0$ on prend $\tau_{ci} = 0$ et $\sigma_{ci} = 0$ et on passe à l'étape suivante.

si non

$$C = \Delta \sigma_{ci} tg\theta - 0.18 \tau_{cimax}$$

si

$$C \leq 0$$
 on prend $\sigma_{ci} = 0$ et $\tau_{ci} = \Delta \sigma_{ci} tg\theta$

si non, on prend :

$$A = \frac{0.82}{\tau_{cimax}} \quad \text{et } B = tg\theta - 1.64$$
$$\sigma_{ci} = \frac{(-B - \sqrt{B^2 - 4AC})}{2A}$$
$$\tau_{ci} = (\sigma_{ci} + \Delta\sigma_{ci}) tg\theta$$

Vingt et unième étape : calculer les contraintes dans l'acier au niveau de la fissure σ_{syf} et σ_{sxf} :

$$\sigma_{syf} = \sigma_{sy} + (\sigma_1 + \sigma_{ci} - \frac{\tau_{ci}}{tg\theta})\rho_{sy}$$

$$\sigma_{sxf} = \sigma_{sx} + (\sigma_1 + \sigma_{ci} - \tau_{ci} tg\theta)\rho_{sx}$$

Vingt deuxième étape : vérifier si le ferraillage peut transmettre les efforts au niveau de la fissure. Si $\sigma_{sxf} > f_{ex}$, revenir à la septième étape et prendre une valeur plus petite de la contrainte principale de traction.

Vingt troisième étape : calculer la déformation de cisaillement déduite de la géométrie du cercle de Mohr des déformations:

$$\gamma_{xy} = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) tg\theta$$

Organigramme de la méthode

L'organigramme de la méthode générale obtenue à partir de l'organisation proposée par les auteurs est :





Figure 1.15 Organigramme générale de résolution pour un élément isolé, Vecchio et Collins (1986).

La méthode de résolution générale proposée par Vecchio et Collins ne peut pas être programmée dans cette forme. Il est aisé de constater qu'il y a des problèmes concernant les inconnues choisies comme variable d'itération. Le premier problème est la vérification qui intervient au niveau de σ_2 pour laquelle les auteurs proposent deux possibilités de correction sur deux variables d'itération (ε_1 et θ). Même si on élimine ce problème en faisant un choix, il demeure que cette vérification du niveau de sollicitation doit intervenir à la fin du processus. Elle est imposée à ce niveau du calcul par les auteurs parce qu'elle doit être satisfaite à l'étape suivante pour pouvoir continuer le calcul. Le deuxième problème consiste dans le croisement des boucles d'itération, ce qui peut conduire à des problèmes de convergence insoupçonnés. Enfin le dernier problème est la correction qui doit intervenir à la dernière étape sur σ_1 . En effet, avec la correction faite directement sur σ_1 , on peut déterminer l'état de contrainte mais pas l'état de déformation. Les fonctions définissant les lois de comportement des matériaux ne sont pas des bijections. Il est alors judicieux d'effectuer les itérations sur les valeurs des déformations.

1.5.2 Modèle de Stanciulescu (1996)

Stanciulescu a développé une méthode de calcul des poutres basée sur la MCFT. Dans ce modèle, la section transversale de la poutre est modélisée comme une succession de couches de béton et d'éléments d'acier. Chaque couche ou élément d'acier longitudinal est analysé séparément mais les conditions d'équilibre sont satisfaites globalement en utilisant les équations de compatibilité, les équations d'équilibre et les lois de comportement des matériaux, dans l'hypothèse de la planéité des sections et de l'uniformité des contraintes normales sur chaque couche. Enfin, ce modèle a été développé dans le cas d'une flexion composée avec effort tranchant.

La distribution des contraintes tangentielles sur la hauteur de la section est déterminée dans chaque section en étudiant une section voisine distante de h/6 de la section de calcul, et soumise à des efforts déterminés à partir de ceux appliqués à la section de calcul.

La méthode de résolution est une méthode itérative, l'itération est effectuée sur la déformation longitudinale ε_x , la déformation principale de compression ε_2 et l'angle d'inclinaison de la direction principale de traction par rapport à l'axe longitudinal x. L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :

Première étape : déterminer les efforts appliqués à la section voisine en fonction de ceux appliqués à la section de calcul :

Soit N, M et V respectivement l'effort normal, le moment fléchissant et l'effort tranchant au niveau de la section de calcul. Les efforts qui s'en déduisent dans la section voisine distante de s sont donnés par :

$$N_{v} = N$$
$$M_{v} = M - s V$$
$$V_{v} = V$$

Deuxième étape : choisir une distribution des contraintes tangentielles sur la hauteur de la section telle que:

$$\sum_{i=1}^{m} \tau_i \ b_i \ h_i = V$$

où b_i est la largeur de la couche d'ordre i, h_i sa hauteur et τ_i la contrainte tangentielle au niveau de cette couche.

Troisième étape : estimer la distribution de la déformation longitudinale ε_x à partir des déformations sur la fibre le plus comprimée ε_b et sur la fibre la plus tendue ε_t .

- au centre de gravité de chaque couche de béton cette déformation est donnée par :

$$\varepsilon_{xi} = \varepsilon_t + (\varepsilon_b - \varepsilon_t) \frac{y_{gi}}{h}$$

- au niveau du centre de gravité de chaque élément d'acier longitudinale, elle vaut :

$$\varepsilon_{xj} = \varepsilon_t + (\varepsilon_b - \varepsilon_t) \frac{y_{sj}}{h}$$

Quatrième étape : calculer les contraintes dans le ferraillage longitudinal :

$$\sigma_{sxj} = \varepsilon_{sxj} E_s$$
$$|\sigma_{sxj}| \le f_{ex}$$

Cinquième étape : choisir une valeur pour la déformation principale de compression ε_2 tel que :

$$0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$$

Sixième étape : choisir une valeur de l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de compression et l'axe longitudinal.

Septième étape : déterminer toutes les valeurs caractéristiques de la déformation à partir de la géométrie du cercle de Mohr des déformations.

$$\gamma_{xy} = 2 (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \operatorname{tg} \theta$$

$$\varepsilon_y = \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{tg} (\theta) - \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + 2\varepsilon_2$$

Huitième étape : déterminer l'état de contraintes résultant dans le béton

- la contrainte dans l'acier transversal est donnée par :

 $\sigma_{ay} = Ea \epsilon_y$

$$|\sigma_{ay}| \leq f_{ey}$$

- la contrainte transversale dans le béton vaut alors :

 $\sigma_{by} = \rho_{ay} \sigma_{ay}$

- déterminer les contraintes principales de traction et de compression dans le béton avec les lois de comportement.

- calculer la nouvelle contrainte normale dans le béton suivant l'axe x

$$\sigma_{by} = \sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_{by}$$

Neuvième étape : calculer la nouvelle valeur de l'angle θ déduite de la géométrie du cercle de Mohr pour les contraintes

$$\theta' = \mathrm{tg}^{-1} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_{by}}{\sigma_2 - \sigma_{bx}} \right)^{1/2}$$

Dixième étape : calculer la valeur de la contrainte principale de compression en fonction de τ

$$\sigma_2 = \sigma_{by} - \tau_{xy} tg(\theta)$$

Onzième étape : vérifier la compatibilité

 $\theta = \theta'$

- si non ; revenir à la sixième étape prendre une autre valeur de l'angle θ

- si oui ; passer à la douzième étape

Douzième étape : vérifier l'équilibre

 $\sigma_2^{'} = \sigma_2$

- si non, revenir à la cinquième étape et prendre une autre valeur de la déformation principale de compression.

- si oui, passer à la treizième étape.

Treizième étape : vérifier l'équilibre de l'effort normal de la section globalement

Nint = Next Mint = Mext

- si non, revenir à la deuxième étape prendre une autre distribution de ε_x

- si oui, passer à la Quatorzième étape

Quinzième étape : répéter l'ensemble des étapes pour la section voisine

Seizième étape : calculer la nouvelle distribution des contraintes tangentielles qui vérifient l'équilibre de chaque couche de béton :

$$\tau_i = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{F}_{i+1}}{2 \, \mathrm{s} \, \mathrm{b}}$$

où les efforts F_i et F_{i+1} sont les efforts sur les faces inférieure et supérieure de la couche d'ordre i. Ils sont déterminés en écrivant l'équilibre de la couche entre les deux sections.

Dix-septième étape : vérifier si cette distribution correspond à celle présumée au début du calcul :

$$\tau_i' = \tau i$$

- si oui, passer à l'étape suivante

- si non, revenir à la deuxième étape considérer la nouvelle distribution de τ

Dix-huitième étape : vérifier les conditions à la rupture

Dix-neuvième étape : écrire le résultat

Organigramme de la méthode :

L'organigramme de la méthode construit à partir des étapes proposées par l'auteur est :





Figure 1.16 Organigramme générale de la méthode, Stanciulescu (1996).

Bien que les problèmes de croisement des boucles ainsi que celui de la vérification du niveau de sollicitation observés dans la méthode générale de Vecchio et Collins soient levés, cette méthode reste à améliorer. En effet, il est aisé de constater qu'elle n'est pas adaptée aux calculs classiques de structure basés sur la matrice de rigidité d'une section droite.

L'existence simultanée d'un effort normal et d'un moment fléchissant introduit une variable supplémentaire dans la définition de la distribution des déformations longitudinales, qui est la position de l'axe neutre (qui varie en fonction de l'évolution du chargement). D'autre part, dans le cas général d'une section en béton précontraint, le tracé des câbles de précontrainte est généralement incliné, ce qui induit une réduction d'effort tranchant dû à cette inclinaison. La valeur de cette réduction n'est connue qu'à l'étape de vérification de l'équilibre de la section sous les sollicitations normales (N et M). Cette réduction induit une variation de l'effort tranchant effectif repris par la section de béton et par les armatures passives, en fonction de laquelle la nouvelle distribution des contraintes tangentielles devrait être calculée, qui n'est pas prise en compte dans la définition des efforts appliqués à la section voisine. De plus, son introduction à ce niveau de calcul peut conduire le calcul à une oscillation entre deux valeurs de la distribution des contraintes tangentielles.

La contrainte dans le sens transversal calculée dans cette méthode ne vérifie pas la condition d'équilibre des contraintes : en effet, la contrainte totale appliquée à la section dans le sens transversal est, selon la théorie des poutres, nulle. L'équilibre des contraintes dans ce sens peut s'écrire :

$$\sigma_{y} = \sigma_{by} + \sigma_{ay} = 0$$

Or la formulation de la contrainte dans le béton à la huitième étape ne conduit pas à la satisfaction de cette condition d'équilibre.

La matrice de rigidité de la section droite ne peut être estimée dans ces conditions, en l'absence de relations explicites en déformation entre les sollicitations normales et l'effort tranchant.

L'analyse du comportement d'une structure suppose le calcul d'un nombre élevé de sections droites. Dans ce cas, l'analyse complète de la section voisine rend la durée de calcul trop longue.

Enfin, faire une hypothèse sur la distribution des contraintes tangentielles, afin de faire une bonne estimation de la distribution de celles-ci, permettra d'adapter cette méthode aux calculs classiques de structure, et ainsi son intégration dans un processus de calcul qui appelle le résultat de l'équilibre de la section sous les sollicitations normales en prenant en compte d'éventuelles réductions de l'effort tranchant dues à l'existence d'armatures inclinées dans le calcul de la distribution des contraintes tangentielles d'une part. D'autre part, il permettra également de limiter une trop longue durée de calcul en éliminant du calcul l'analyse complète de la section voisine. Enfin, il permettra de définir aisément les termes de la matrice de rigidité d'une section droite dans le cas de l'existence simultanée de M, N et V.

1.5.3 Modèle de Kachi (2006)

Dans son étude kachi (2006) a montré que la contrainte dans le béton dans la direction transversale est une contrainte de compression. Dans le calcul classique du béton armé à l'effort tranchant, le modèle du treillis constitué des bielles inclinées de l'angle θ et des armatures transversales (figure 1.17) soumis à l'effort de glissement longitudinal par unité de longueur G = V / z, permet le calcul des efforts de traction dans les armatures transversales :

$$F_{at} = G tg \theta \tag{1.46}$$

(armatures «droites» de direction y) et de compression dans les bielles de béton :



$$F_{bc} = G / \cos \theta \tag{1.47}$$

Figure 1.17 Modèle simple du treillis, Kachi (2006).

Plus finement (Figure 1.18), la traction dans l'armature varie entre le maximum F_{at} au niveau des fissures et F'_{at} à mi-distance des fissures. La bielle de béton est soumise à la compression F_{bc} parallèle aux fissures et à une traction F_{bt} dans la direction y de l'armature due à l'adhérence acier/béton (donc proportionnelle à $F_{at} - F'_{at}$) qui est nulle au niveau des fissures et maximale à mi-distance des fissures. On peut estimer grosso modo les valeurs absolues moyennes de ces efforts à :

$$F_{at,moy} = (F_{at} + F'_{at}) / 2$$

$$F_{bt,moy} = (F_{at} - F'_{at}) / 2$$
(1.48)

La résultante dans la direction y est nulle, aussi bien dans le treillis classique qu'en valeurs moyennes :

$$F_{at} - F_{bc} \sin \theta = 0$$

$$F_{at,moy} - (F_{bc} \sin \theta - F_{bt,moy}) = 0$$
(1.49)

Ceci correspond à l'hypothèse des poutres : la contrainte transversale σ_y est nulle (du moins dans les sections qui respectent le principe de Saint-Venant ; il serait possible de tenir compte de σ_y non nulle dans certaines sections).

L'allongement moyen de l'armature sera lié à l'effort $F_{at,moy}$. L'effort local dans le béton est une compression : $F_{bc} \sin \theta - F_{bt,moy}$. La modélisation doit tenir compte de ce paradoxe apparent d'une contrainte de compression du béton dans la direction où la contrainte des armatures est une traction, donc la déformation moyenne un allongement. On ne peut pas relier la contrainte de compression σ_{by} du béton à la déformation moyenne ε_y . En fait, celle-ci comprend deux termes :

$$\varepsilon_{\rm y} = \varepsilon_{\rm by} + w_{\rm y} / s_{\rm y} \tag{1.50}$$

Le premier est la déformation propre du béton entre les fissures (un raccourcissement d'après ce qui précède). Le second est un allongement dû aux fissures d'ouverture w_y et d'espacement s_y dans la direction y ; ce terme est prépondérant.

La transposition de la condition d'équilibre (1.49) en contraintes compte tenu des conventions de signe (traction positive) et des aires respectives d'acier et de béton donne :

$$\sigma_{by} = -\rho_y \,\sigma_{ay} \tag{1.51}$$



Figure 1.18 Comportement local du béton armé dans le sens y, dans l'âme.

1.6 Conclusion

Ce chapitre a pour but de donner les principaux éléments pour la suite du travail. Les lois de comportement rapportées dans ce chapitre sont basées sur les contraintes réelles et les déformations correspondantes en élasticité non linéaire.

La grande majorité des lois simulent de manière identique la partie ascendante des courbes $(\sigma - \varepsilon)$ du béton confiné et non confiné en compression. La partie descendante (post – pic) du béton confiné et non confiné présenté et décrite de manière différentes par les auteurs.

Pour le béton confiné en compression, Le modèle proposé par Mander et al., décrit uniquement la partie ascendante (une seule relation). L'expression mathématique n'est pas assez souple pour tenir compte des exactitudes des paramètres. Cette expression est limitative.

Les modèles proposés par Saatcioglu et Razvi (1992), Hoshikuma et al. (1997), H.-S. Chung et al. (2002), et B. Bousalem et N. Chikh (2007) tiennent compte du béton confiné et leur domaine d'application se limite à des pourcentages de confinement allant de 20 à 25 ‰, et celui proposé par Bouafia et al. (2010), le pourcentage de confinement allant de 10 à 25 ‰.

Le confinement en général est introduit par un coefficient de confinement effectif, le pourcentage d'armature transversal et la limite élastique des aciers.

L'ensemble de ces méthodes nous donne une idée claire sur la résolution du problème. En effet, la difficulté observée, dans un premier temps, sur la nature de la contrainte dans le béton dans le sens transversal a été levée par Kachi (2006). La résolution du système d'équations

régissant un élément en béton armé reste compliquée, elle fait appel à des méthodes itératives lourdes. Cette modélisation est introduite dans un logiciel de calcul en fortran 90 à partir des travaux effectués par Kachi et al. (2006), (2008), et (2009) capable de résoudre ce système d'équation, de simuler ainsi l'évolution de la distorsion des sections de poutre en fonction de celle de l'effort tranchant.

Chapitre 2

MODÉLISATION ET ÉTUDE D'UNE SECTION DROITE

2.1 Introduction

Après avoir établi, au chapitre précédent, le bilan des recherches sur quelques modèles des lois de comportement contrainte-déformation du béton confiné et les modèles utilisés dans la modélisation non linéaire des éléments en béton armé ou précontraint sollicités en cisaillement, nous allons présenter dans ce chapitre la modélisation de comportement réel de chaque matériau constituant, la modélisation des sections transversales de béton et la géométrie des armatures passives et actives. Enfin, l'étude d'une section droite d'un élément de poutre en béton armé et/ou précontraint.

Dans la présente étude, la loi de comportement du béton confiné (Bouafia et al. ,2010) est programmée dans un logiciel de calcul non linéaire développé par Kachi (2006) écrit en langage Fortran 90, dont tous les paramètres du béton confiné sont pris en compte.

2.2 Modélisation des matériaux à comportement réels

Nous allons donc présenter les lois des comportements réels retenus pour le béton et l'acier.

2.2.1 Comportement du béton non confiné

Le béton présente un comportement différent en traction et en compression. Une représentation de ce comportement est donnée par la courbe contrainte-déformation ci-dessous.



Figure 2.1 Diagramme représentant la loi de comportement du béton.

Cette courbe se caractérise par la valeur de $\varphi(\varepsilon)$ qui est considéré comme nulle au-delà de la rupture du béton en compression et en traction (respectivement pour des déformations ε_{cu} et $-\varepsilon_{rt}$).

 $\varphi(\varepsilon)$: définit le comportement réel des matériaux.

Différents modèles existent pour représenter le comportement du béton non confiné. Nous adoptons ici la loi de Sargin pour le comportement du béton en compression, et le modèle de Grelat pour le comportement du béton en traction.

2.2.1.1 Comportement du béton en compression selon Sargin (1968)

Les relations qui lient les contraintes aux déformations des fibres de béton comprimé sont connues à l'âge j quelconque.

Ces lois sont définies en fonction des paramètres ; E_{b0} , f_{ci} , ε_{b0} , ε_{rc} .





- Branche ascendante, à concavité vers le bas admettant un modèle tangent initial, et un maximum de contrainte qui correspond à la compression f_{cj} ;
- Branche descendante, commençant par le maximum de la branche ascendante et se termine par le point définissant la déformation ultime correspondante à la contrainte ultime du béton.

En admettant un comportement élastique non linéaire, la contrainte est décrite par la loi de Sargin suivante :

$$\sigma = f_{cj} \cdot \frac{k_b \cdot \overline{\varepsilon} + (k'_b - 1)\overline{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2)\overline{\varepsilon} + k'_b \overline{\varepsilon}^2}$$
(2.1)

Avec :

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad ; \quad k_b = \frac{E_{b0}.\varepsilon_0}{f_{cj}} \quad ; \quad E_{b0} = 11000\sqrt[3]{f_{c0}}$$

 E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton,

 \mathcal{E}_{b0} : Déformation de pic correspondant à f_{ci} ,

 f_{ci} : Résistance à la compression du béton à l'âge j.

 k'_b et k_b : paramètres adimensionnels, ajustent la branche descendante et ascendante, respectivement, de la loi de Sargin.

Le paramètre k'_b influe essentiellement sur l'allure de la branche descendante.

 $k'_b=0$ \Longrightarrow correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile, avec une descente brutale ;

 $k'_b = 1 \implies$ correspond à un béton ayant un comportement élastique ductile, plastique, correspond à un béton normal, de résistance moyenne.

Nous pourrons adopter d'après (Maia ,1979) :

$$K'_{b} = \begin{pmatrix} K_{b} - 1 & \text{pour} & f_{cj} \leq 30MPa \\ (K_{b} - 1) \cdot \frac{(55 - f_{cj})}{25} & \text{pour} & 30MPa < f_{cj} < 55MPa \\ 0 & \text{pour} & f_{cj} \geq 55MPa \end{pmatrix}$$
(2.2)

2.2.1.2 Comportement du béton en traction selon Grelat (1978)

Bien que le béton soit principalement conçu pour résister à la compression, la connaissance de ses propriétés en traction est importante.

La formulation de Grelat (1978) attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (Figure 2.3.).

La résistance ne s'annule pas brusquement mais décroît plutôt progressivement jusqu'à plastification et rupture des aciers tendus.





Les fibres du béton tendu d'un module de déformation E_{bt} qui est défini par la contrainte et la déformation instantanée du bord tendu :

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}} \tag{2.3}$$

Au-delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives. La contrainte ne s'annule pas brusquement, elle décroît selon une loi parabolique (Figure 2.4). Dans ce cas, l'étude concerne le comportement moyen d'une section situé entre deux fissures.



Figure 2.4 Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton sur le bord tendu, Grelat (1978).

Les relations liant les contraintes aux déformations sont :

- Domaine élastique linéaire

$$\sigma_{bt} = E_{b0} \cdot \varepsilon_{bt} \qquad \text{si} \qquad \left| \varepsilon_{bt} \right| < \varepsilon_{ft}$$

- Fissuration avec participation du béton tendu

$$\sigma_{bt} = -f_{tj} \frac{(\varepsilon_{bt} - \varepsilon_{rt})^2}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2} \qquad \text{si} \qquad \varepsilon_{ft} < |\varepsilon_{bt}| < \varepsilon_{rt}$$
(2.4)

- Fissuration sans participation du béton tendu :

$$\sigma_{bt} = 0$$
 si $|\mathcal{E}_{bt}| > \mathcal{E}_{rt}$

 f_{ti} : Résistance du béton a la traction,

 \mathcal{E}_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{ti} ,

 \mathcal{E}_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

 E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton.

2.2.2 Comportement du béton confiné

Plusieurs modèles théoriques pour prédire le comportement contrainte -déformation du béton confiné ont été proposés. Nous adoptons ici le modèle proposé par Bouafia et al. (2010), dont la courbe contrainte-déformation du béton confiné est composée de trois régions : la branche ascendante, la branche descendante et la branche maintenue.

La courbe définissant la relation contrainte-déformation du béton confiné utilisé pour le modèle proposé par Bouafia et al. (2010), est représentée dans la (Figure 2.5).



Figure 2.5 Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton confiné, Bouafia et al. (2010).

- La première partie est une courbe ascendante non linéaire, la loi de Sargin a été modifiée pour tenir compte du confinement :

$$\sigma_{cc} = f_{cc} \times \frac{k_c \times \bar{\varepsilon}_c + (k_c - 1) \times \bar{\varepsilon}_c^2}{1 + (k_c - 2) \times \bar{\varepsilon}_c + k_c \times \bar{\varepsilon}_c^2} \qquad \text{pour} \qquad 0 \le \varepsilon < \varepsilon_{cc} \qquad (2.5)$$

Avec :

 f_{cc} : Résistance à la compression maximale du béton confiné définie précédemment, elle est donnée par :

$$f_{cc} = f_{c0} \left(-1,254 + 2,254 \sqrt{1 + \frac{7,94f'_l}{f_{c0}}} - \frac{2f'_l}{f_{c0}} \right)$$
(2.6)

 f'_l : Pression latérale du renforcement transversale supposer uniformément distribuée sur la surface du béton.

Avec:
$$\overline{\varepsilon}_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}$$
; $\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0} \times \left[1 + 5\left(\frac{f_{cc}}{f_{c0}} - 1\right)\right]$
 $k_c = \frac{E_{bc0} \times \varepsilon_{cc}}{f_{cc}}$; $k'_c = k_c - 1$

- La deuxième partie est descendante linéaire après le pic (poste pic), la relation est décrite par :

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - E_s \left(\varepsilon_c - \varepsilon_{cc} \right) \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon_{cc} \le \varepsilon < \varepsilon_{65} \tag{2.7}$$

Avec :

$$E_{s} = \frac{6 \times f_{c0}^{2}}{ke \times \rho_{s} \times f_{yh}} \qquad ; \qquad \varepsilon_{65} = \frac{0.35 \times f_{cc}}{E_{s}} + \varepsilon_{cc}$$

- La troisième partie représente un palier de ductilité, la relation contrainte-déformation est donnée par :

$$\sigma_{cc} = 0.65 f_{cc}$$
 pour $\mathcal{E}_{65} \le \mathcal{E} \prec \mathcal{E}_{ccu}$ (2.8)

Dans ce palier linéaire de ductilité, l'acier participe jusqu'à sa plastification puis se rompe autour de 40% en terme de déformation, la relation qui a été proposé est décrite par :

$$\varepsilon_{ccu} = \varepsilon_{cu} + 0.40 \cdot \frac{f_l}{f_{c0}} = 0.0035 + 0.40 \cdot \frac{f_l}{f_{c0}}$$
(2.9)

2.2.3 Comportement des aciers

La loi de comportement contrainte – déformation de l'acier sous chargement monotone est supposée identique en traction et en compression. Les différents types d'aciers utilisés dans la présente étude sont les aciers écrouis et les aciers naturels dont la loi de comportement contrainte – déformation en élasto-plastique parfaite est simplifiée.

2.2.3.1 Comportement des aciers passifs

On distingue les aciers naturels et les aciers écrouis.

- Aciers naturels

Ils sont caractérisés par une loi élasto-plastique parfaite (Figure 2.6)



Figure 2.6 Diagramme contrainte –déformation d'un acier naturel (Loi élasto-plastique parfaite).

$$\begin{cases} \sigma = E_a \epsilon & \text{pour} & \epsilon \leq \epsilon_e \\ \sigma = \sigma_e & \text{pour} & \epsilon_e < \epsilon < \epsilon_u \\ \sigma = 0 & \text{pour} & \epsilon > \epsilon_u \end{cases}$$
(2.10)

Les déformations extrêmes sont fixées par le règlement BAEL (1991) à 10‰

E_a: Module longitudinal de l'acier,

 ϵ_{e} : Déformation limite élastique de l'acier,

 $\sigma_{e:}$ Contrainte limite élastique de l'acier,

 ϵ_u : Déformation ultime de l'acier.

- Aciers écrouis

Pour ce type d'acier, on adopte la loi préconisée par le règlement qui suppose un comportement élastique linéaire jusqu'à 70% de la limite élastique. Au-delà, on adopte une courbe de cinquième degré.



Figure 2.7 Comportement des aciers écrouis.

$$\begin{cases}
\sigma_{s} = E_{a}\varepsilon_{s} & \text{pour} & \sigma_{s} \leq 0.7\sigma_{e} \\
\varepsilon_{s} = \frac{\sigma_{s}}{E_{a}} + 0.823 \left(\frac{\sigma_{s}}{\sigma_{e}} - 0.7\right)^{5} & \text{pour} & 0.7\sigma_{e} < \sigma_{s} < 1.1\sigma_{e} \\
\sigma_{s} = 1.1\sigma_{e} & \text{pour} & 1\% < \varepsilon_{s} < \varepsilon_{r}
\end{cases}$$
(2.11)

2.2.3.2 Comportement des aciers actifs

Le comportement des armatures de précontrainte (les fils tréfilés et les torons) est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis du béton armé, recommandée par le nouveau règlement BPEL91, (Figure 2.8).



Figure 2.8 Comportement des aciers précontraints.

$$\begin{cases} \sigma_{p} = E_{p} \varepsilon_{p} & \text{pour} & 0 \leq \sigma_{p} < 0.9\sigma \\ \varepsilon_{p} = \frac{\sigma_{p}}{E_{p}} + 100.\left(\frac{\sigma_{p}}{f_{peg}} - 0.9\right)^{5} & \text{pour} & 0.9 f_{peg} \leq \sigma_{p} < 1.06 f_{peg} & (2.12) \\ \varepsilon_{p} = 1.06 f_{peg} & \text{pour} & \varepsilon_{p} \geq 2\% \end{cases}$$

 σ_p : Est la contrainte dans l'acier de précontrainte,

 $\epsilon_{p\,:}\,Est$ la déformation dans l'acier de précontrainte,

- E_p : Est le module d'Young à l'origine,
- f_{peg} : Est la limite élastique conventionnelle à 0,1%,
- 0.9 f_{peg} : Est la contrainte ou s'arrête le diagramme linéaire,
- $1.06 f_{peg}$: Est la contrainte de rupture.

2.3 Modélisation des sections

2.3.1 Modélisation de la section de béton

Pour mieux approcher le domaine délimité par le contour d'une section transversale de forme quelconque, on définit la section de béton par une succession de tables trapézoïdales. Chaque table est définie par les largeurs des fibres extrêmes b_j , b_{j+1} et les ordonnées de ces fibres y_j , y_{j+1} par rapport à un axe de référence (Figure 2.9).



Figure 2.9 Section de béton découpée en tables trapézoïdales.

Le procédé d'intégration étant numérique, il est nécessaire d'exprimer la largeur du trapèze d'ordre j à une cote y par une relation compatible avec le calcul numérique.

$$B(y) = b_j + (b_{j+1} - b_j)(y - y_j) / (y_{j+1} - y_j)$$
(2.13)

2.3.2 Modélisation géométrique des armatures

2.3.2.1 Les armatures passives

La section de chaque armature passive est concentrée en son centre de gravité. Les armatures passives sont donc définies comme une succession de lits d'armatures. Chaque lit est défini par son ordonnée y_{ai} et par l'aire totale des armatures situées à ce niveau A_{ai} avec i variant de 1 a ns, où ns est le nombre de lits d'armatures passives.

2.3.2.2 Les armatures actives

Les armatures actives sont définies par leur excentricité e_{pk} et leur aire A_{pk} , avec k variant de 1 a np où np est le nombre de câble de précontrainte.

A la mise en tension, les câbles subissent un allongement initial ε_{po} . L'action de la précontrainte sur la section est un effort de compression, égal et opposé à l'effort de traction dans

le câble. Cet effort est appliqué suivant la ligne moyenne du câble au point où il traverse la section. Quand le câble est rendu solidaire de la poutre (ancrage, injection de la gaine) il subit les mêmes variations de déformation que le béton situé au même niveau. Il devient alors un élément résistant, et possède une pré-déformation par rapport à la section.

2.4 Étude d'une section droite

Nous nous intéressons à l'étude d'une section droite d'un élément de poutre en béton armé et/ou précontraint (confiné ou non confiné). La section est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations et du comportement élastique non linéaire.

En admettant que les sections restent planes après déformation, que les aciers passifs et les câbles de précontrainte intérieurs après mise en tension, sont parfaitement solidaires au béton, que les aciers passifs et actifs ne reprennent que les efforts axiaux.



Figure 2.10 Description d'une section typique d'une poutre en béton armé et précontraint.

L'effet du précontraint est introduit en tenant compte du phasage éventuel sur la mise en tension des câbles. A la mise en tension, l'action de la précontrainte, sur la section, est un effort de compression, égal et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble, au point où il traverse la section.

Les câbles de précontrainte deviennent des éléments résistants, immédiatement après leur mise en tension, et possédant une pré-deformation par rapport à la section.

Dans le cadre de cette étude, l'analyse non-linéaire concerne aussi bien les sollicitations normales dues à un effort normal N et à un moment de flexion M, agissant dans le plan zy. Que la sollicitation tangente, dans le béton, due à l'effort tranchant T dans le plan zy. On admet que la distorsion due à l'effet de T influe peu sur les déformations normales de la section.

Compte tenu de l'hypothèse des sections planes et de l'adhérence parfaite entre les matériaux constituants la section et on négligeant l'influence de la distorsion sur les déformations normale de la section, la déformation longitudinale ε comptée positivement dans le sens des raccourcissements en un point courant de la section est donnée par :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{s} + \mathcal{Y}_{m} \cdot \phi_{z} \tag{2.14}$$

Où :

 ε_g : est l'allongement unitaire au centre de gravité de la section, on désigne par ϕ_z la rotation unitaire de flexion autour de l'axe Gy et y_m l'ordonnée du centre de gravité de la fibre d'ordre m.

La déformation tangente notée, γ_y , désigne la déformation de cisaillement de la section dans le plan xy.

Les déformations normales (ε_{g} , ϕ_{z}) peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\vec{\delta}_{n}$, défini par

$$\vec{\delta}_n = \left(\varepsilon_g, \phi_z\right)^T \tag{2.15}$$

De plus, la déformation tangente peut s'écrire sous forme :

$$\vec{\delta}_{t} = \gamma_{y} \tag{2.16}$$

Nous notons $\vec{\delta}_n$ le vecteur contenant l'accroissement de déformation de la section droite sous sollicitations normales et $\Delta \vec{\delta}_t$ la déformation de la section droite sous sollicitations tangentes.

$$\Delta \vec{\delta}_{n} = \left(\Delta \varepsilon_{g}, \Delta \phi_{z}\right)^{T} \tag{2.17}$$

$$\Delta \vec{\delta}_{t} = \Delta \gamma_{y} \tag{2.18}$$

A une déformation $\vec{\delta}_n$ et $\Delta \vec{\delta}_i$ de la section droite correspond, dans une armature adhérente et inclinée à la section, une déformation ε_{si} , défini par Nait-Rabah (1990). Dans l'hypothèse des armatures passives et actives qui ne reprennent que les efforts axiaux son expression est :

$$\varepsilon_{si} = \cos^2 \alpha_i \left\{ 1 , y_{si} \right\} \vec{\delta}_n \tag{2.19}$$

où α est l'angle que fait la ligne moyenne du câble avec l'axe Gx normal à la section droite.

Dans le cas d'une armature active, la mise en tension produit sur chaque section de l'élément un effort de compression opposé à l'effort de traction du câble, appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble au point de passage de celui-ci dans la section. La relation (2.19) doit être corrigée pour tenir compte de la pré-déformation ε_p^* du câble par rapport à la section droite. La déformation ε_p^* dans le câble correspond à l'état de la décompression du béton. Elle exprime la différence entre la déformation du câble et celle de la section, dans la direction du câble, au moment de la mise en tension. La déformation dans l'armature de précontrainte d'ordre i s'écrit dans les hypothèses admises dans cette étude sous forme :

$$\varepsilon_{pi} = \cos^2 \alpha_i \left\{ l \,, \, y_{pi} \right\} \vec{\delta}_n + \varepsilon_{pi}^*$$
(2.20)

2.4.1 Calcul des sollicitations internes

Les sollicitations normales à la section droite dues aux matériaux constituant la section, peuvent s'écrire sous la forme d'un vecteur \vec{F}_n , définit dans le repère principal Gzy , lié à la section droite par :

$$\vec{F}_n = \begin{cases} N_m \\ M_m \end{cases} = \iint_A \begin{cases} I \\ y \end{cases} \sigma_m \, dy dz \tag{2.21}$$

où :

 σ_m : est la contrainte normale en un point courant de la section transversale A de l'élément.

La section droite est composée généralement de béton et des armatures passives et actives. On peut écrire comme suit l'équation (2.21) en tenant compte de la contribution de chaque matériau constituant la section:

$$\vec{F}_{n} = \vec{F}_{nb} + \vec{F}_{ns} + \vec{F}_{np}$$
 (2.22)

où :

 \mathbf{F}_{nb} : représente la contribution du béton. Ce vecteur est donné par :

$$\vec{F}_{nb} = \iint_{A} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ y_m \end{matrix} \right\} \sigma_m \, dy dz \tag{2.23}$$

La contribution des armatures passives, considérées comme concentrées dans leur lit en leur centre de gravité, est donnée par le vecteur \vec{F}_{ns} défini par :

$$\vec{F}_{ns} = \sum_{i=1}^{nsi} \left\{ \begin{matrix} I \\ y_{si} \end{matrix} \right\} \sigma_{si} A_{si}$$
(2.24)

Où :

 $\sigma_{si}: est la contrainte normale au centre de gravité de la section de l'armature passive d'ordre i , A_{si} la section droite de l'armature et n_{si} le nombre d'armatures passives traversant la section droite.$

La contribution des armatures actives, considérées comme concentrées dans leur lit en leur centre de gravité, est donnée par le vecteur \vec{F}_{np} défini par :

$$\vec{F}_{np} = \sum_{i=1}^{npi} \begin{cases} I \\ y_{pi} \end{cases} \sigma_{pi} A_{pi} \cos \alpha_i$$
(2.25)

Où :

 σ_{pi} : étant la contrainte normale au centre de gravité de la section de l'armature active d'ordre i , A_{pi} la section droite de l'armature, α_i l'angle que fait la ligne moyenne du câble d'ordre i avec l'axe x et n_{pi} le nombre d'armatures actives traversant la section droite.

La variation des déformations normales notée, $\Delta \vec{\delta}_n$ de la section droite, produit une variation de sollicitations normales dans les matériaux de la section.

La variation des sollicitations normales $\Delta \vec{F}_{nb}$ dans le béton est donnée par :

$$\Delta \bar{F}_{nb} = \iint_{A} E_{m} \begin{bmatrix} 1 & y_{m} \\ y_{m} & y_{m}^{2} \end{bmatrix} dy dz \begin{cases} \Delta \varepsilon_{g} \\ \Delta \varphi_{z} \end{cases}$$
(2.26)

Où :

 E_m : désigne le Module élastique longitudinal en un point courant de la section du béton. Il relie l'accroissement de la contrainte normale $\Delta \sigma m$ à l'accroissement de déformation longitudinale $\Delta \varepsilon_m$ correspondant au point courant.

$$\Delta \sigma_m = \mathbf{E}_m \quad \Delta \varepsilon_m \tag{2.27}$$

La section A étant définie comme une succession de couches, les intégrales sur la section sont effectuées dans chaque couche en utilisant la formule de SIMPSON.

La variation de la sollicitation tangente due au béton est calculée en fonction des déformations correspondantes en supposant que le comportement est élastique non linéaire. Elles peuvent s'écrire sous forme :

$$\Delta T_{ym} = [K_{2b}] \Delta \gamma \tag{2.28}$$

Où :

 $\Delta \gamma$: est la déformation de la section sous sollicitations tangentes

$$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$$
 est la rigidité de la section à l'effort tranchant dans le plan xz.
où le terme $\frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$ constitue le module corde de cisaillement de la section. La méthode de calcul

proposée pour le calcul de ce terme est exposée au chapitre 3.

En tenant compte des relations (2.22) et (2.24), nous pouvons écrire sous forme matricielle la relation liant les accroissements de déformations dans une section droite, et les accroissements de sollicitations internes développés dans le béton :

$$\Delta \vec{F}_{b} = \begin{cases} \Delta \vec{F}_{nb} \\ \Delta T_{b} \end{cases} = \begin{bmatrix} K_{1b} & o \\ o^{T} & K_{2b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_{n} \\ \Delta \gamma \end{bmatrix}$$
(2.29)

Avec

$$\mathbf{K}_{1b} = \iint_{A} E_{m} \begin{bmatrix} I & y_{m} \\ y_{m} & y_{m}^{2} \end{bmatrix} dy dz$$
$$o = \begin{cases} O \\ O \end{cases}$$

$$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$$

La variation des déformations normales $\{\Delta \delta_n\}$ de la section droite produit une variation des sollicitations normales $\{\Delta F_{ns}\}$ dans les armatures passives donnée par :

$$\Delta F_{ns} = \sum_{i}^{ns} E_{si} A_{si} \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{g} \\ \Delta \varphi_{z} \end{bmatrix}$$
(2.30)

où E_{si} est le module élastique au niveau de l'armature passive d'ordre i. Il relie l'accroissement des contraintes à l'accroissement des déformations longitudinales correspondantes au niveau du centre de gravité de l'armature.

$$\Delta \sigma_{si} = \mathbf{E}_{si} \ \Delta \varepsilon_{si} \tag{2.31}$$

En négligeant la sollicitation tangente due aux armatures passives, la relation liant les accroissements des déformations aux accroissements des sollicitations internes développées dans les armatures passives s'écrit :

$$\Delta \vec{\mathbf{F}}_{s} = \begin{cases} \Delta \mathbf{F}_{ns} \\ \Delta \mathbf{T}s \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_{n} \\ \Delta \gamma \end{pmatrix}$$
(2.32)

où $[K_{1s}]$ est la matrice symétrique (2x2) définie par :

$$\mathbf{K}_{1s} = \sum_{1}^{ns} \mathbf{E}_{si} \mathbf{A}_{si} \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix}$$

La variation des sollicitations normales à la section droite dues aux armatures de précontrainte adhérentes inclinées et supposées concentrées en leur centre de gravité, elle peut s'écrire sous la forme d'un vecteur ΔF_{np} , en négligeant l'influence de la distorsion sur les déformations longitudinales au niveau de l'armature de précontrainte, comme suit :

$$\Delta \vec{F}_{np} = \sum_{i}^{np} E_{pi} A_{pi} \cos \alpha_{i} \begin{bmatrix} 1 & y_{pi} \\ y_{pi} & y_{pi}^{2} \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta \varepsilon_{g} \\ \Delta \phi_{z} \end{cases}$$
(2.33)

Équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta \vec{F}_{np} = K_{1p} \Delta \vec{\delta}_{n}$$
(2.34)

avec

$$K_{1p} = \sum_{i}^{ns} E_{pi} A_{pi} \begin{bmatrix} 1 & y_{pi} \\ & \\ y_{pi} & y_{pi}^{2} \end{bmatrix} \cos \alpha_{i}$$

La variation des sollicitations tangentes dans l'armature de précontrainte d'ordre i est donnée par :

$$\Delta \vec{F}_{np} = \sum_{l}^{np} E_{pi} A_{pi} \sin \alpha_{i} \cos^{2} \alpha_{i} \left\{ l \qquad y_{pi} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \varepsilon_{g} \\ \Delta \varphi_{z} \end{array} \right\}$$
(2.35)

Équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta \vec{\mathbf{F}}_{p} = \mathbf{K}_{12p} \Delta \vec{\delta}_{n} \tag{2.36}$$

Avec

$$\mathbf{K}_{2p} = \sum_{1}^{np} \mathbf{E}_{pi} \mathbf{A}_{pi} \sin \alpha_{i} \cos \alpha_{i}^{2} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{y}_{pi} \end{array} \right\}$$

$$\begin{split} E_{pi} &: \mbox{Module élastique longitudinal de l'armature de précontrainte d'ordre i. Il relie} \\ l'accroissement de contrainte $\Delta \sigma_{pi}$ à l'accroissement de déformation $\Delta \epsilon_{pi}$ au niveau de l'armature d'ordre i :$$

$$\Delta \sigma_{\rm pi} = E_{\rm pi} \Delta \varepsilon_{\rm pi}$$

 $\mathbf{o} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\}$

La relation matricielle liant les accroissements de déformations de la section aux accroissements de sollicitations internes développées dans les armatures de précontrainte s'écrit:

$$\Delta F_{p} = \begin{cases} \Delta F_{np} \\ \Delta F_{lp} \end{cases} = \begin{bmatrix} K_{1p} & o \\ K_{2p}^{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta \vec{\delta}_{n} \\ \Delta \gamma \end{cases}$$
(2.37)

avec
2.4.2 Déformation de la section à l'équilibre

La section droite est supposée soumise :

- d'une part aux accroissements d'efforts sollicitant dus aux forces extérieures.

$$\Delta \vec{F}_{s} = \begin{cases} \Delta N \\ \Delta M_{z} \\ \Delta T_{y} \end{cases}$$
(2.38)

- d'autre part à l'action de la précontrainte, lors de la mise en tension des câbles :

$$\vec{P}_{s} = -\sum_{l}^{np^{2}} \sigma_{0_{i}} A_{pi} \begin{cases} \cos \alpha_{i} \\ y_{pi} \cos \alpha_{i} \\ \sin \alpha_{i} \end{cases}$$
(2.39)

Où :

 σ_{oi} est la contrainte initiale dans le câble d'ordre i après pertes instantanées, n_{p2} le nombre de câbles de précontraintes traversant la section concernés par la mise en tension.

L'équilibre de la section droite se traduit par l'égalité des accroissements d'efforts sollicitant et les accroissements d'efforts internes.

$$\Delta \vec{F}_{s} + \Delta \vec{P}_{s} = \Delta \vec{F}_{b} + \Delta \vec{F}_{a} + \Delta \vec{F}_{p}$$
(2.40)

Le vecteur $\Delta \vec{P}_s$ contenant l'action de la précontrainte à la mise en tension des câbles est non nul. Ces composantes sont définies par la relation (2.21). Après la mise en tension des câbles intérieurs ce vecteur devient nul et ne participe à l'équilibre de la section que si de nouveaux câbles sont mis en tension à une étape de calcul quelconque. Dans le cas où l'en tient compte des effets différés, le vecteur $\Delta \vec{P}_s$ est non nul. Ces composantes sont alors fonction des contraintes et du temps. La condition d'équilibre de la section, tenant compte des relations (2.26), (2.28) et (2.30), peut être exprimée par la relation :

$$\Delta \vec{\mathbf{F}}_{s} + \Delta \vec{\mathbf{P}}_{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{s} \end{bmatrix} \Delta \vec{\delta} \tag{2.41}$$

[K_s] : Représente la matrice de rigidité de la section, donnée par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1b} + \mathbf{K}_{1s} + \mathbf{K}_{1p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{2p}^{\mathrm{T}} & \mathbf{K}_{2b} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \vec{\delta} = \begin{bmatrix} \Delta \delta_{n} \\ \Delta \gamma_{y} \end{bmatrix}$$
(2.42)

Pour un accroissement donné d'efforts sollicitant, la résolution en déformation d'équations (2.33) est itérative. La solution peut s'exprimer par :

$$\Delta \vec{\delta} = \left[K_s \right]^{-1} \left\{ \Delta F_s + \Delta P_s \right\}$$
(2.43)

où $[K_s]^{-1}$ représente la matrice de souplesse de la section.

2.4.3 Méthode itérative de résolution et critères de convergence

En élasticité non-linéaire, il est facile de calculer les efforts développés par une déformation donnée. Cependant il n'existe pas de méthode directe permettant de calculer les déformations produites par des efforts donnés. On est donc contraint à utiliser une méthode itérative pour la recherche de la solution en déformation.

Considérons un état d'équilibre de la section soumise à des sollicitations extérieures, qui peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur \vec{F}_s , définit par :

$$\vec{\mathbf{F}} = (\mathbf{N}, \mathbf{M}_z, \mathbf{T}_y)^{\mathrm{T}}$$
(2.44)

On note par $\vec{\delta}_s$, le vecteur de déformation de la section correspondant. IL est donnée par :

$$\vec{\delta}_{\rm s} = \left(\varepsilon_{\rm g} \,, \phi \,, \gamma \,\right)^{\rm T} \tag{2.45}$$

Pour une variation des sollicitations extérieures $\Delta \vec{F}_s$, et sous l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles, l'accroissement de déformation $\Delta \vec{\delta}_s$ de la section est recherché, en utilisant la méthode des substitutions successives utilisant les matrices cordes.

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions, $\Delta \vec{\delta}_0$, $\Delta \vec{\delta}_1$,....., $\Delta \vec{\delta}_i$ $\Delta \vec{\delta}_i$ étant calculé à partir de $\Delta \vec{\delta}_{i-1}$ en résolvant le système linéaire :

$$\Delta \vec{\mathbf{F}}_{s} + \Delta \vec{\mathbf{P}}_{s} = \left[\mathbf{K}_{s} \right]_{i-1} \Delta \vec{\delta}_{i}$$
(2.46)

où $[Ks]_{i-1}$ est la matrice de rigidité de la section, à l'itération (i-1) En partant de la solution initiale nulle, le schéma de résolution s'écrit :

$$\Delta \vec{\delta}_{0} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{\delta}_{i} = \left[\mathbf{K}_{s} \right]_{i-1}^{-1} \left\{ \Delta \vec{\mathbf{F}}_{s} + \Delta \vec{\mathbf{P}}_{s} \right\}$$
(2.47)

De façon générale l'équilibre d'une section est défini par deux conditions :

 La limitation de la variation des déformations entre deux itérations successives à une tolérance fixée a priori. Cette variation est déterminée avec la norme euclidienne des déformations :

$$\eta = \left[\frac{\langle\Delta\delta_{i} - \Delta\delta_{i-1}\rangle \cdot (\{\Delta\delta\}_{i} - \{\Delta\delta\}_{i-1})}{\langle\delta s + \Delta\delta i\rangle \cdot (\{\delta s\} + \{\Delta\delta\}_{i})}\right]^{1/2} \langle Tu$$
(2.48)

où $\{\delta s\}$ est la déformation à l'étape équilibrée précédente.

Généralement une dizaine d'itérations suffisent pour assurer la convergence.

2.4.4 Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section

Nous définissons ici l'organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section transversale lors d'un accroissement de sollicitations extérieures $\Delta \vec{F}_s$ et de l'action due à la précontrainte \vec{P}_s à la mise en tension des câbles.



Figure 2.11 Organigramme simplifié de la recherche de l'équilibre de l'état d'équilibre d'une section.

2.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, un ensemble de lois de comportement permettant la modélisation des comportements non linéaires des matériaux sous un chargement instantané et monotone jusqu'à la ruine. Nous disposons ainsi, des modèles de comportement réel des matériaux suivants :

- Pour le béton ordinaire : en compression la loi de Sargin, et en traction le modèle de Grelat.
- Pour le béton confiné : en compression le modèle proposé par Bouafia et al. (2010).
- Pour l'armature passive : la loi élasto-plastique parfaite ou bien la loi élastoplastique avec raffermissement pour l'acier naturel, et la loi préconisée par le règlement BAEL 91 pour l'acier écrouis.
- Pour l'armature active : la loi préconisée par le règlement BPEL 91.

Puis dans une seconde partie nous avons présenté, la modélisation de la section transversale de forme quelconque, on a défini la section de béton par une succession de tables trapézoïdales, et la modélisation de la géométrie des armatures passives et actives par une succession de lits d'armatures.

Enfin, Nous avons présenté l'étude d'une section droite d'un élément de poutre en béton armé et/ou précontraint. La section est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations et du comportement élastique non linéaire sous sollicitations normales à la section droite dues aux matériaux constituant la section.

En admettant que :

- Les sections restent planes après déformation.
- Les aciers passifs et les câbles de précontraint intérieurs après mise en tension, sont parfaitement solidaires au béton.
- Les aciers passifs et actifs ne reprennent que les efforts axiaux.

Chapitre 3

PRISE EN COMPTE DU CONFINEMENT DU BÉTON DANS LA MODÉLISATION À L'EFFORT TRANCHANT

3.1 Introduction

On présente ici un modèle théorique basé sur le modèle de Kachi (2006) permettant d'analyser le comportement en cisaillement jusqu'à rupture des sections des poutres en béton armé et précontraint en prenant en compte le confinement du béton, soumises à l'effet combiné d'une flexion plane et d'un effort tranchant en élasticité non-linéaire. Il permet l'estimation de la rigidité de cisaillement des poutres avec des formes de section et des détails de ferraillage variés. Ce modèle est intégré dans un logiciel de calcul non linéaire des poutres hyperstatiques.

3.2 Etude de l'équilibre d'une poutre en élasticité non linéaire

En élasticité non linéaire, l'étude de l'équilibre d'une poutre en béton armé et précontraint passe par la résolution d'un système d'équations de la forme :

$$[\Delta P] = [K] \cdot [\Delta U] \tag{3.1}$$

où $[\Delta P]$ est le vecteur représentant l'accroissement du chargement appliqué à la poutre, $[\Delta U]$ est le vecteur représentant l'accroissement des déplacements des nœuds de la poutre et [K] représente la matrice de rigidité globale de la poutre, qui est construite à partir des matrices de rigidité des sections [Ks].

En élasticité linéaire (module de Young E), l'expression de cette matrice est :

$$[Ks] = \begin{bmatrix} E.A & 0 & 0\\ 0 & E.I & 0\\ 0 & 0 & G.A_I \end{bmatrix}$$
(3.2)

dans laquelle interviennent l'aire A et l'inertie de flexion I de la section, le module transversal G = E / 2(1+v) et l'aire réduite A₁ pour l'effort tranchant. En élasticité non linéaire, pour une poutre en béton armé, l'expression qui sera utilisée est :

$$[Ks] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta N}{\Delta \delta u} & \frac{\Delta N}{\Delta \delta w} & 0\\ \frac{\Delta M}{\Delta \delta u} & \frac{\Delta M}{\Delta \delta w} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{moy}} \end{bmatrix}$$
(3.3)

où ΔN est l'accroissement de l'effort normal de la section, ΔM est l'accroissement du moment fléchissant de la section, $\Delta \delta u$ est l'accroissement de la déformation au niveau centre de gravité de la section et $\Delta \delta w$ est l'accroissement de la rotation différentielle (courbure) de la section.

Ces déformations répondent à l'hypothèse de planéité des sections (Navier-Bernoulli) ; la déformation longitudinale ε_x est une fonction linéaire de l'abscisse transversale y :

$$\varepsilon_{x}(y) = \delta u + \delta w \cdot y \tag{3.4}$$

 ΔV est l'accroissement de l'effort tranchant de la section et $\Delta \gamma_{moy}$ est l'accroissement de la distorsion moyenne de la section .

Dans beaucoup de logiciels de calcul non linéaire du comportement des poutres en béton armé, le terme dû à l'effort tranchant est soit totalement ignoré - Grelat (1978) - soit pris égal à la valeur G.A₁ de l'élasticité linéaire - Nait-Rabah (1990). Dans cette étude, on évalue la rigidité à l'effort tranchant de chaque section :

$$\overline{GA_{\rm I}} = \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{moy}} \tag{3.5}$$

à chaque étape de calcul, sans faire intervenir explicitement un module transversal G.

L'algorithme développé simule le comportement en cisaillement jusqu'à rupture d'une section de poutre en élasticité non linéaire. La rigidité de cisaillement globale de la poutre est obtenue alors à partir de celles des sections par un processus d'intégration numérique. Il permet ainsi d'évaluer la rigidité à l'effort tranchant de la poutre à chaque étape du chargement et les flèches correspondantes.

L'expression adoptée ci-dessus pour [Ks] est déjà une simplification. En effet, les termes de couplage entre ΔN et $\Delta \delta w$, et entre ΔM et $\Delta \delta u$, sont incontournables dans l'analyse de flexion composée, mais on a supposé que les termes de couplage entre ΔN et $\Delta \gamma_{moy}$ (ou ΔV et $\Delta \delta u$), et entre ΔM et $\Delta \gamma_{moy}$ (ou ΔV et $\Delta \delta w$), étaient négligeables. Le couplage entre les déformations dues à V et celles dues à (N , M) évoqué dans l'introduction va se trouver dans la dépendance de $\Delta \gamma_{moy}$ avec les contraintes et déformations dues à N et M.

Pour les poutres en béton précontraint, la matrice [Ks] est complétée par des termes dus à l'effet de la précontrainte, dans l'équilibre de flexion composée et dans l'équilibre d'une partie de l'effort tranchant par la composante transversale de l'effort des câbles inclinés – Nait-Rabah (1990).

3.3 Exposé général de la modélisation

3.3.1 Domaine d'application

L'étude porte sur des poutres assez élancées, soumises à une flexion plane avec effort tranchant. La section transversale est supposée constante par tronçons le long de la poutre. Elle présente une symétrie par rapport à l'axe y, ce qui permet sa décomposition en une succession de couches selon y. Le principe de Saint Venant est supposé applicable en toute section, la contrainte agissant dans le sens transversal y est alors nulle. L'hypothèse de Navier est appliquée aussi en toute section ; on ne peut donc pas traiter des poutres courtes.

Les poutres sont suffisamment armées pour être loin de la fragilité, donc présenter des fissures bien réparties.

3.3.2 Discrétisation de la poutre

La poutre est discrétisée en tronçons supposés suffisamment grands par rapport aux espacements des fissures. Les déformations dans une section droite sont alors exprimées par les valeurs moyennes représentatives du champ des déformations de l'élément de poutre. L'étude de l'équilibre d'un tronçon passe par l'étude de l'équilibre de plusieurs sections transversales. Chaque section transversale est discrétisée en une succession de couches de béton et d'éléments longitudinaux d'acier (figure 3.1). Les armatures transversales droites sont supposées constantes

sur toute la hauteur de la section et réparties sur toute la longueur du tronçon ; leur aire est exprimée alors en pourcentage de l'aire du béton. Chaque couche de béton et chaque élément longitudinal d'acier est analysé séparément mais la condition d'équilibre de la section est satisfaite globalement.



Figure 3.1 Section de poutre discrétisée en couches.

Les couches de béton sont caractérisées par : leur hauteur h_i , leur largeur b_i , leurs pourcentages de ferraillage longitudinal ρ_{xi} et transversal ρ_{yi} , et la position de leur centre de gravité par rapport à un axe de référence y_{Gi} . Les armatures longitudinales sont définies par : leur section transversale A_j , la déformation initiale de précontrainte $\Delta \epsilon_{pj}$, le seuil de plasticité f_e et leur position par rapport à un axe de référence y_{aj} . Les lois de comportement de l'acier et du béton sont des caractéristiques communes à toute la section.

3.3.3 Principes de la modélisation et équations générales

3.3.3.1 Milieux continus équivalents

- En déformations

Seules les armatures sont réellement continues. On fait l'hypothèse que les déformations moyennes du milieu continu équivalent à l'association du béton fissuré et des armatures sont gouvernées par celles des armatures ε_{ax} et ε_{ay} . Les relations générales entre les déformations moyennes sont :

$$\varepsilon_{\rm x} = \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_2 \cos^2 \theta \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_{\rm y} = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \tag{3.7}$$

$$\gamma = 2 \left(\epsilon_1 - \epsilon_2 \right) \sin \theta \cos \theta \tag{3.8}$$

La direction principale D_1 correspond à la plus grande déformation principale (valeur positive = allongement), la direction D_2 à la plus petite. L'angle de D_2 avec l'axe longitudinal x est :

$$\theta = (\overrightarrow{\text{GD}}_2, \overrightarrow{\text{Gx}})$$
(3.9)

La direction D_2 est aussi celle des fissures, du moins au début de la fissuration. Lorsque les sollicitations croissent, cette direction peut dévier de celle des fissures initiales, ce qui est physiquement admissible en raison des contraintes de cisaillement transmises par engrènement des lèvres des fissures. Ceci correspond aussi au concept des bielles d'inclinaison variable de l'Eurocode 2 (1992), § 4.3.2.4.4 Effort tranchant – Méthode des bielles d'inclinaison variable. Dans les directions particulières x et y, on a :

$$\varepsilon_{ax} = \varepsilon_x \tag{3.10}$$

$$\varepsilon_{ay} = \varepsilon_y$$
 (3.11)

Reliée aux déformations du béton tendu et fissuré, la déformation moyenne correspond à la somme de deux termes : la déformation moyenne propre du béton $\hat{\epsilon_{b}}$, liée à sa contrainte moyenne σ_{b} , et l'effet réparti des fissures d'ouverture w espacées de s :

$$\varepsilon_{b} = \varepsilon_{b}^{'} + \frac{w}{s}$$
(3.12)

Mais on n'explicite ni la déformation propre ε_{b} , ni w et s.

La distorsion moyenne γ qui intervient en (3.8) résulte aussi de la distorsion propre du béton et de l'effet des fissures, mais on n'explicite pas les deux termes.

- En contraintes

Le béton doit équilibrer seul les contraintes de cisaillement τ parallèles à x et y (on néglige les contraintes qui seraient équilibrées par « l'effet de goujon » des armatures). On fait l'hypothèse d'un milieu continu équivalent pour le béton seul. Les relations générales entre les contraintes du béton sont donc :

$$\sigma_{bx} = \sigma_{b1} \sin^2 \theta_b + \sigma_{b2} \cos^2 \theta_b \tag{3.13}$$

$$\sigma_{by} = \sigma_{b1} \cos^2 \theta_b + \sigma_{b2} \sin^2 \theta_b \tag{3.14}$$

$$\tau_{b} = \tau = (\sigma_{b1} - \sigma_{b2}) \sin \theta_{b} \cos \theta_{b}$$
(3.15)

On fait de plus l'hypothèse de la coïncidence des directions principales des contraintes du béton avec les directions principales des déformations moyennes :

$$\theta_{\rm b} = \theta \tag{3.16}$$

3.3.3.2 Compatibilité partielle des déformations du béton avec les déformations moyennes

On fait l'hypothèse que les déformations du béton dans les directions principales ε_{b1} et ε_{b2} , qui sont liées aux contraintes principales σ_{b1} et σ_{b2} , sont égales aux déformations moyennes principales :

$$\varepsilon_{b1} = \varepsilon_1 \tag{3.17}$$

$$\varepsilon_{b2} = \varepsilon_2 \tag{3.18}$$

Dans la direction D_1 , qui est grosso modo perpendiculaire aux fissures, devraient intervenir les deux termes de déformation propre du béton et d'ouverture des fissures. On contourne la difficulté en faisant intervenir une loi de comportement conventionnelle qui relie la contrainte de traction σ_{b1} à la déformation ε_1 moyenne (voir § 3.4.2).

Dans la direction D_2 qui est grosso modo celle des bielles comprimées parallèles aux fissures, on a effectivement continuité du béton.

3.3.3.3 Equations d'équilibre

- Equilibre local des couches

Dans les directions x et y, les contraintes σ_x et σ_y résultent de la somme des termes dus aux armatures et au béton, compte tenu des aires respectives :

$$\sigma_{\rm x} = \rho_{\rm x} \, \sigma_{\rm ax} \, + \sigma_{\rm bx} \tag{3.19}$$

$$\sigma_{y} = \rho_{y} \sigma_{ay} + \sigma_{by} = 0$$
 (cf. §1.5.3) (1.44)

- Equilibre global des sections

L'équilibre doit être assuré entre les sollicitations extérieures N, M, V et les résultantes des contraintes internes N_{int} , M_{int} , V_{int} . Pour la flexion composée, on fait la somme des contributions des contraintes longitudinales dans les armatures et dans le béton (ce qui est la traduction de l'équation (3.19)) :

$$N_{\text{int}} = \sum_{i} A_{xi} \sigma_{axi} + \sum_{i} b_i h_i \sigma_{bxi}$$
(3.20)

$$\mathbf{M}_{\text{int}} = \sum_{i} A_{xi} \ \sigma_{axi} \ y_{ai} \ + \sum_{i} b_i \ h_i \ \sigma_{bxi} \ y_i \tag{3.21}$$

Pour l'effort tranchant, seules les contraintes de cisaillement dans le béton interviennent :

$$\mathbf{V}_{\text{int}} = \sum_{i} b_i \ h_i \ \tau_{bi} \tag{3.22}$$

3.4 Lois de comportement des matériaux

La loi de comportement (contrainte – déformation) retenue pour le béton non confiné dans la présente étude est celle de Sargin pour le béton en compression et de Grelat pour le béton tendu. Afin de tenir compte du béton confiné, nous avons opté pour la loi proposée par Bouafia et al. (2010) qui met en évidence le pourcentage de confinement allant de 10 à 25 ‰.

Quant aux lois de comportement des aciers, nous avons pris celles des aciers écrouis et élasto – plastique. Le choix de l'une de ces deux lois dépend des aciers utilisés dans les essais expérimentaux.

3.4.1 Comportement du béton en compression dans la direction D₂

La contrainte principale σ_{b2} est une fonction des deux déformations principales ε_1 et ε_2 :

$$\sigma_{b2} = E_{b2}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2 \tag{3.23}$$

Pour le béton non confiné on utilise la relation contrainte-déformation uniaxiale de Sargin proposée à l'annexe 1 des Règles BPEL (1999).

$$\sigma = f_{cj} \cdot \frac{k_b \cdot \overline{\varepsilon} + (k'_b - 1)\overline{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2)\overline{\varepsilon} + k'_b \overline{\varepsilon}^2} \quad \text{avec} \quad \overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad k_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_0}{f_{cj}} \quad (3.24)$$

Pour le béton normal, généralement on prend $K_b = K_b - 1$

Et pour le béton confiné on utilise la relation contrainte-déformation proposé par (Bouafia et al.,2010).



Figure 3.2 Diagramme contrainte – déformation du béton confiné, Bouafia et al. (2010).

On se base sur la relation contrainte-déformation uniaxiale de Sargin proposée à l'annexe 1 des Règles BPEL (1999) pour le béton non confiné et pour le béton confiné le model proposé par Bouafia et al (2010), qui fait intervenir la résistance f_c et le raccourcissement correspondant ε_{b0} . On la transforme pour traduire le comportement du béton des bielles comprimées selon D₂ et tendu dans la direction D₁. La résistance est modifiée selon la relation proposée par Vecchio et Collins (1986) en fonction de la déformation ε_1 mais en bornant le rapport f_{c2}/f_c :

$$\frac{f_{c2}}{f_c} = \frac{1}{0.8 - 0.34 \varepsilon_1 / \varepsilon_{b0}} \qquad \text{avec} \qquad 0.7 \le \frac{f_{c2}}{f_c} \le 1 \qquad (3.25)$$

3.4.2 Comportement du béton en traction dans la direction D₁

La loi contrainte-déformation du béton en traction est linéaire avant la fissuration du béton. Au-delà, la contrainte de traction diminue avec l'augmentation de la déformation moyenne de traction laquelle inclut l'effet de l'ouverture des fissures (figure 3.3).



Figure 3.3 Comportement du béton en traction.

Avant fissuration du béton :

$$\sigma_1 = E_{bo} \cdot \varepsilon_1 \qquad \text{pour} \quad |\varepsilon_1| < \varepsilon ft \tag{3.26}$$

Pour décrire la branche décroissante, après fissuration, qui traduit l'influence du béton tendu entre les fissures sur la déformation moyenne, on adopte la relation proposée par Belarbi et Hsu (1994) :

$$\sigma_{I} = f_{t} \left(\frac{\varepsilon_{ft}}{\varepsilon_{I}}\right)^{0,4} \qquad \text{pour} \qquad |\varepsilon_{ft}| < \varepsilon_{1} < |\varepsilon_{rt}| \qquad (3.27)$$
$$\sigma_{1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad |\varepsilon_{1}| > \varepsilon_{rt} \qquad (3.28)$$

(3.28)

 $\sigma_1 = 0$ f où ε_f

$$ft = \frac{J_t}{E_{b0}}$$

 f_t est la résistance du béton à la traction et ε_{ft} est la déformation de fissuration du béton.

pour

Contrairement à une idée assez répandue (Grelat 1978, par exemple) la contribution de l'adhérence, donc du béton tendu entre les fissures, ne s'annule jamais totalement (Fouré, 2003). Par conséquent, cette loi (3.27) couvre l'ensemble du champ des déformations jusqu'à la rupture des armatures. Elle s'applique aussi dans le cas particulier du comportement uniaxial vis-à-vis des contraintes longitudinales, en remplaçant σ_{b1} par σ_{bx} et ε_1 par ε_x .

3.4.3 Comportement de l'acier

Les comportements des aciers passifs et de précontrainte sont caractérisés par les types de relations admises par les règles BPEL 1999 :

- armatures longitudinales	$\sigma_{ax} = E_a(\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$	(3.29)
- armatures transversales	$\sigma_{ay} = E_{at} \left(\epsilon_y \right) \cdot \epsilon_y$	(3.30)
- armatures de précontrainte	$\sigma_{px} = E_{ap}(\epsilon_x) \cdot \epsilon_x$	(3.31)

3.5 Calculs spécifiques relatifs à l'effort tranchant

3.5.1 Calcul de la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$

Pour calculer la distribution des contraintes tangentielles sur la hauteur d'une section, on associe à chaque section de calcul une section voisine distante de d. Les contraintes tangentielles sont alors déduites de l'équilibre des couches comprises entre la section de calcul sous l'état de sollicitation (N, M, V) et la section voisine soumise aux efforts (N₁, M₁, V₁) tels que :

$$N_{1} = N$$

$$M_{1} = M - V.d$$

$$V_{1} = V$$

$$(3.32)$$

La distance entre les deux sections est généralement prise égale à h/6 (où h est la hauteur totale de la poutre) (Vecchio et Collins, 1986). Une étude paramétrique permet de constater que la différence entre la valeur de l'effort tranchant extérieur et la résultante des $\tau(y)$ calculée avec cette distance reste inférieure à 1 % , ce qui est négligeable.

Les deux sections sont analysées de façon à satisfaire chacune aux deux équations d'équilibre. En appliquant la méthode classique de la RDM, on étudie l'équilibre de l'ensemble des forces agissant sur une couche d'ordre k présentée à la figure (3.4) :



Figure 3.4 Forces agissant sur une couche de béton entre deux sections.

où F_k et F_{k1} désignent les efforts normaux agissant sur la couche k dans les deux sections, G_{k-1} et G_k sont les efforts de glissement résultants sur les faces inférieure et supérieure de la couche k et V_k est la part de l'effort tranchant équilibrée par la couche k.

Ces efforts F_k sont déterminés à partir des contraintes normales longitudinales moyennes dans le béton et dans les armatures longitudinales s'il en existe dans la couche. Dans une couche quelconque i, on a :

$$F_i = \sigma_{bxi} b_i h_i + \sigma_{axi} A_{axi}$$
(3.33)

Les efforts horizontaux agissant sur les faces supérieure et inférieure de la couche de béton d'ordre k sont alors calculés comme suit :

$$G_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (F_{ii} - F_i)$$

$$G_k = G_{k-1} + F_{k1} - F_k$$
(3.34)

L'équilibre du tronçon permet de calculer la valeur de V_k , en écrivant que le moment des forces est nul au point P :

$$V_{k} = \frac{(G_{k-1} + G_{k})}{2} \frac{h_{k}}{d}$$
(3.35)

La valeur moyenne de la contrainte tangentielle de la couche k est alors donnée par :

$$\tau_{k} = \frac{V_{k}}{b_{k} h_{k}} = \frac{(G_{k-1} + G_{k})}{2 d b_{k}}$$
(3.36)

3.5.2 Calcul de la distorsion moyenne

La distorsion varie d'une couche de béton à une autre. On définit une distorsion moyenne de la section notée $\gamma_{moy.}$ Son calcul est effectué en remarquant, d'après le théorème des travaux virtuels, que l'accroissement ΔW_e du travail de l'effort tranchant extérieur est égal à l'accroissement ΔW_i du travail des contraintes tangentielles τ_i . Ces derniers peuvent s'écrire :

$$\Delta W_{e} = \Delta V \cdot \Delta \gamma_{moy} \tag{3.37}$$

$$\Delta W_i = b_i \cdot h_i \cdot \Delta \tau_i \cdot \Delta \gamma_i$$

On doit avoir, m étant le nombre des couches de béton :

$$\Delta W_{e} = \sum_{i}^{m} \Delta w_{i}$$

D'où : $\Delta \gamma_{moy} = \sum_{i}^{m} \frac{\Delta \tau_{i} \ b_{i} \ h_{i} \ \Delta \gamma_{i}}{\Delta V}$ (3.38)

3.6 Résolution du problème

3.6.1 Transformation des équations générales

Pour la résolution du problème on explicite certaines grandeurs à partir des équations générales précédentes. On tire de (3.6) :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x}{\sin^2 \theta} - \frac{\varepsilon_2}{tg^2 \theta}$$
(3.39)

On réécrit aussi les équations (3.13), (3.14) et (3.15) entre les contraintes du béton sous la forme suivante (en tenant compte de (3.16)):

$$\sigma_{bx} = \sigma_{b2} + \sigma_{b1} - \sigma_{by} \tag{3.40}$$

$$\theta = tg^{-1} \left(\frac{\sigma_{b2} - \sigma_{bx}}{\sigma_{b2} - \sigma_{by}} \right)^{\frac{1}{2}}$$
(3.41)

$$\sigma_{b2} = \sigma_{b y} - \frac{\tau}{tg\theta}$$
(3.42)

3.6.2 Algorithme de calcul

L'étude de l'équilibre d'une couche de béton armé (confiné ou non confiné) où ε_x et τ sont connus fait appel à un système de 10 équations (1.44) (3.7) (3.8) (3.23) (3.26 ou 3.27) (3.30) (3.39) (3.40) (3.41) (3.42) à 10 inconnues : ε_y , ε_1 , ε_2 , γ , θ , σ_{ay} , σ_{bx} , σ_{by} , σ_{b1} , σ_{b2} . Pour le résoudre, on fait appel à une méthode itérative. Pour une distribution donnée des déformations longitudinales, on suppose connue la déformation principale ε_2 et on cherche la valeur de l'angle θ qui permet de satisfaire les conditions de compatibilité et d'équilibre de la couche.

Les contraintes tangentielles $\tau(y)$ sont calculées par l'équilibre de deux sections voisines (équation (3.36)). La déformation longitudinale ε_x est tirée de Navier (3.4), dans laquelle δu et δw résultent de l'équilibre global en flexion composée sous N, M selon (3.20) et (3.21), avec un couplage à l'effort tranchant V. Enfin, la distorsion moyenne de la section est calculée a partir des efforts dans les couches successives.

L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :

Première étape : choisir un accroissement d'effort appliqué à la section

Deuxième étape : choisir des valeurs de la courbure δw et de la déformation δu au niveau

du CDG de la section.

Troisième étape : calculer la déformation longitudinale $\varepsilon_x(y) = \delta u + \delta w$. y conformément

à l'hypothèse de planéité des sections (NAVIER-BERNOUILLI).

Quatrième étape : calculer les contraintes du béton et de l'acier (σ_{ax} et σ_{bx} selon les lois de Comportement des matériaux

$$\sigma_{b2} = E_{b2}(\varepsilon_{2}, \varepsilon_{1}) \cdot \varepsilon_{2}$$
$$\sigma_{ax} = E_{a}(\varepsilon_{x}) \cdot \varepsilon_{x}$$
$$\sigma_{px} = E_{ap}(\varepsilon_{x}) \cdot \varepsilon_{x}$$

 $\label{eq:cinquième} \mbox{Cinquième étape : } Calculer \mbox{ les efforts internes } N_{int} \mbox{ et } M_{int} \mbox{ de la section.}$

$$\begin{split} N_{int} &= \sum_{i} \mathsf{A}_{\mathsf{x}i} \ \sigma_{\mathsf{a}\mathsf{x}i} \ + \sum_{i} \mathsf{b}_{i} \ \mathsf{h}_{i} \ \sigma_{\mathsf{b}\mathsf{x}i} \\ M_{int} &= \sum_{i} \mathsf{A}_{\mathsf{x}i} \ \sigma_{\mathsf{a}\mathsf{x}i} \ \mathsf{y}_{\mathsf{a}i} \ + \sum_{i} \mathsf{b}_{i} \ \mathsf{h}_{i} \ \sigma_{\mathsf{b}\mathsf{x}i} \ \mathsf{y}_{i} \end{split}$$

Sixième étape : Vérifier l'équilibre des efforts (N,M) de la section :

-Si non, revenir à la deuxième étape et choisir d'autre valeurs de δu et δw .

-Si oui, passer à la septième étape.

Septième étape : Calculer la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$ qui vérifient l'équilibre de chaque couche de béton :

$$\tau_{k} = \frac{V_{k}}{b_{k} h_{k}} = \frac{(G_{k-1} + G_{k})}{2 d b_{k}}$$

 G_K et G_{K-1} sont les efforts de glissement résultants sur les faces inferieure et supérieure de la couche K.

V_k est la part de l'effort tranchant équilibré par la couche k.

Huitième étape : vérifier l'équilibre de la section à ε (X) et τ (y) connus.

Neuvième étape : choisir une valeur de la déformation principale ε_2 et une valeur de l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de compression et l'axe longitudinal.

Dixième étape : déterminer les valeurs des déformations à partir du principe du milieu continue en déformations :

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_x}{\sin^2 \theta} - \frac{\epsilon_2}{tg^2 \theta} \qquad \qquad \epsilon_y = \epsilon_1 \cos^2 \theta + \epsilon_2 \sin^2 \theta$$

Onzième étape : Choix de loi de comportement (béton confiné ou béton non confiné) et détermination les contraintes principales de compression et de traction dans le béton :

$$\begin{array}{ll} Si \ |\epsilon_x| \leq |\epsilon_{ft}| & \sigma_{b2} = E_{b2} \left(\epsilon_2 \ , \ \epsilon_1 \ \right) \ . \ \epsilon_2 \\ \\ Si \ |\epsilon_x| > |\epsilon_{ft}| & \sigma_{b2} = 0 \\ \\ \sigma_1 = \ E_{bo} \ . \ \epsilon_1 \end{array}$$

-La contrainte dans l'acier transversal est donnée par: $\sigma_{ay} = E_{at}(\varepsilon_y)$. ε_y

- La contrainte transversal dans le béton est: $\sigma_{by} = -\rho_y \sigma_{ay}$ (l'équilibre dans le sens y). **Douzième étape :** calculer la nouvelle valeur de l'angle θ déduite de la géométrie du cercle de MOHR pour les contraintes :

$$\theta = tg^{-1} \left(\frac{\sigma_{b2} - \sigma_{bx}}{\sigma_{b2} - \sigma_{by}} \right)^{1/2}$$

Treizième étape : calculer la nouvelle valeur de la contrainte principale de compression en fonction de τ :

$$\sigma_{b2} = \sigma_{by} - \frac{\tau}{tg\theta}$$

Quatorzième étape : vérifier la compatibilité :

$$\theta' = \theta$$

 $\sigma'_{b2} = \sigma_{b2}$

-Si Non revenir à la neuvième étape et prendre une autre valeur de θ et ϵ_2

-Si oui, passer à la quinzième étape.

Quinzième étape : calculer la distorsion $\gamma = 2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin \theta \cos \theta$

Seizième étape: Répéter l'ensemble des étapes pour l'ensemble des couches.

Dix-septième étape : chercher l'équilibre en flexion composée avec interaction de l'effort V

Calculer les contraintes : $\sigma_{ax} = E_a(\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$

$$\sigma_{px} = E_{ap}(\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$$

 σ_{bx} est connue d'après l'équilibre des couches.

Dix-huitième étape : vérifier l'équilibre des couches :

N_{int}=N

-Si non revenir à la huitième étape et donner d'autres valeurs de δu et δw .

-Si oui, passer à la dix-neuvième étape

Dix-neuvième étape : calculer le terme de la rigidité à l'effort tranchant

$$GA = \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{moy}}$$

Vingtième étape : choisir une valeur initiale nulle des déformations $\Delta \vec{\delta}_0 = 0$

Vingt-unième étape : faire un teste sur la déformation des armatures.

-si non (il ya rupture des armatures), on divise l'accroissement d'effort choisis sur deux

- si oui, on passe à la 22eme étape.

Vingt-deuxième étape : calculer la matrice de rigidité de la section :

$$\begin{bmatrix} K_{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1b} + K_{1s} + K_{1p} & 0 \\ K_{2p}^{T} & K_{2b} \end{bmatrix}$$

Vingt-troisième étape : faire un teste sur le déterminant de la matrice [Ks].

- Si non, on divise l'incrément d'effort sur deux
- Si oui on passe à la 24eme étape

Vingt-quatrième étape : calcul de l'accroissement des déformations :

$$\Delta \vec{\delta}_i = \left[\mathbf{K}_{\mathbf{S}} \right]_{i=1}^{-1} \left\{ \Delta \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{S}} + \Delta \vec{\mathbf{P}}_{\mathbf{S}} \right\}$$

Vingt-cinquième étape : vérifier la convergence de la norme des déformations $\eta < Tu$

-si non revenir à la vingtième étape et donner une autre valeur des déformations $\Delta \vec{\delta}_0$

-si oui, passer à la vingt-sixième étape

Vingt-sixième étape : cumuler les déformations et les efforts.







Figure 3.5 Organigramme général de l'étude d'une section.

3.7 Conclusion

Le modèle analytique présenté est basé sur l'analyse multicouche des sections et sur une procédure de résolution itérative pour chaque couche, dans un état de déformation longitudinale et de contrainte de cisaillement donnée. L'équilibre global des sections est analysé dans l'hypothèse de planéité des déformations longitudinales mais avec, en principe, une interdépendance des contraintes normales longitudinales et des contraintes tangentielles. Le modèle utilise des lois de comportement qui traduisent l'affaiblissement du béton des bielles comprimées dû à la traction des armatures transversales, la prise en compte du confinement du béton, et la diminution de l'allongement moyen des armatures due à la contribution du béton tendu entre les fissures. Il introduit un terme diagonal de rigidité non linéaire à l'effort tranchant dans la matrice de rigidité des sections, afin de prédire le comportement effort tranchant — distorsion moyenne jusqu'à rupture en en cisaillement, pour des poutres présentant des sections de forme complexe et des détails de ferraillage variables, y compris une précontrainte interne.

Chapitre 4 EXEMPLE D'APPLICATION ET RÉSULTATS DES SIMULATIONS

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons, des exemples d'applications qui ont fait l'objet des simulations numériques effectuées par Kachi et al. (2006, 2008, et 2009) avec et sans confinement du béton. Les exemples traités sont des poutres en béton armé ou précontraint. Les poutres ont une section transversale rectangulaire pleine ou creuse soumise à des modes de chargement variables.

Les courbes présentées dans ce chapitre sont obtenues en considérant dans une première simulation que béton utilisé n'est pas confiné, puis en seconde simulation le béton est confiné par les armatures transversales.

La prise en compte du béton confiné dans la présente étude est engendrée par le pourcentage de confinement qui est fonction de plusieurs paramètres. Nous avons retenu les espacements des cadres permettant de mettre en évidence le pourcentage de confinement du béton.

4.2 Essais de l'université de Toronto – Comportement de section

Le modèle a été utilisé pour simuler le comportement de plusieurs sections de poutre testées par différents chercheurs à l'Université de Toronto (Vecchio Collins ,1988). Les poutres ont une section transversale rectangulaire pleine ou creuse. Elles sont en béton armé ou précontraint. La précontrainte est soit adhérente soit non adhérente (dans ce dernier cas, elle est équivalente à une force axiale extérieure). Pour le calcul, les armatures passives sont concentrées en deux lits inférieur et supérieur ; il n'y a pas d'armatures longitudinales réparties. Différents modes de chargement ont étés appliqués ; cependant, dans tous les cas, le moment fléchissant est nul dans la zone de poutre où se produit la rupture par effort tranchant et où on a mesuré la distorsion. Les caractéristiques géométriques et les propriétés des différents matériaux sont données au tableau 4.1.

	Dimensions		Béton		Armatures transversales		Armatures longitudinales		Armatures de précontrainte			
Repère de la poutre	EXT mm	INT mm	f _c MPa	ϵ_{b0} 10^{-3}	Barre ¢ (mm)	s _t mm	f _e Mpa	Nb.x ¢ (mm)	f _e Mpa	A _p mm ²	f _{pe} Mpa	$\Delta \epsilon_p$ 10^{-3}
SA3	305x610	152x406	40.0	2.8	9.5	72	373	12 x 29 4 x 22	345 462	-	-	-
SA4	305x610	152x406	40.0	2.8	9.5	72	373	12 x 29 4 x 22	345 462	-	-	-
SK1	305x610	-	26.9	2.25	9.5	100	400	8 x 25	442	1540	1450	4.82
SK2	305x610	121x381	26.9	2.25	9.5	100	400	8 x 25	442	1540	1450	4.82
SK3	305x610	-	28.2	2.2	9.5	100	400	8 x 25	442	-	-	-
SK4	305x610	121x381	28.2	2.2	9.5	100	400	16 x 25	442	-	-	-
SP0	305x610	152x406	25.0	2.3	9.5	150	373	16 x 25	421	-	-	-
SP1	305x610	152x406	33.5	2.3	9.5	150	373	12 x 22	421	510	1450	4.21
SP2	305x610	152x406	32.0	2.0	9.5	150	373	12 x 22	421	1010	1450	4.11
SP3	305x610	152x406	32.2	2.0	9.5	150	373	12 x 22	421	1520	1450	4.26
SM1	305x610	152x406	29.0	2.4	9.5	175	424	12 x 22	452	-	-	-
CF1	305x610	152x406	38.6	3.0	9.5	150	367	6 x 9.5	367	930	1450	5.17

Tableau 4.1Propriétés des différentes poutres (Vecchio et Collins 1982 et 1988).

4.2.1 Résultats obtenus

Après avoir introduit toutes les données nécessaires des poutres dons le programme écrit en langage Fortran 90, les résultats obtenus sont représentés sous forme des courbes comparatives qui représente l'influence du confinement du béton sur des poutres en béton armé ou précontraint. Il faut bien noter qu'il s'agit de la relation effort tranchant V – distorsion γ_{moy} d'une zone de poutre soumise au cisaillement.

Repère de la poutre	F _{cc} (MPa)	E _{bc0} (MPa)	€ _{cc0}	ε _{ccu}	E _s (MPa)	K _e
SA3	48,17	40024	0,0057	0,016	7574	0,87
SA4	48,86	40213	0,0059	0,017	6943,2	0,86
SK1	32,85	35231	0,0047	0,017	4672	0,77
SK2	32,89	35245	0,0048	0,017	4637,6	0,77
SK3	34,25	35724	0,0046	0,017	5061,6	0,79
SK4	34,34	35754	0,0046	0,017	4985,1	0,80
SP0	28,52	33610	0,0039	0,012	7019,3	0,67
SP1	37,07	36677	0,0035	0,010	12603,9	0,67
SP2	35,76	36242	0,0031	0,010	11644,7	0,67
SP3	35,76	36242	0,0031	0,010	11644,7	0,67
SM1	32,24	35011	0,0037	0,010	10372,2	0,61
CF1	42,15	38281	0,0044	0,009	16923,2	0,66

 Tableau
 4.2
 Caractéristique de la section confiné des différentes poutres.

- Poutre SA3

La Figure 4.1 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre SA3 et ainsi que la simulation numérique correspondante. Il est à noter que la poutre est une poutre en béton armé d'une section rectangulaire creuse. La résistance en compression du béton, est estimée à 40 MPa et la déformation correspondante est estimée à 2.8 ‰, avec d'espacement des armatures transversales 72mm.



Figure 4.1 Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SA3.

- Poutre SA4

La Figure 4.2 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre SA4 et ainsi que la simulation numérique correspondante, avec d'espacement des armatures transversales 72mm.



Figure 4.2 Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SA4.

- Poutre SK1

La Figure 4.3 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre SK1 et ainsi que la simulation numérique correspondante. Il est à noter que la poutre est une poutre en béton précontraint d'une section rectangulaire pleine. La résistance en compression du béton, est estimée à 26.9 MPa, avec d'espacement des armatures transversales 100mm.





- Poutre SK2

La Figure 4.4 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre SK2 et ainsi que la simulation numérique correspondante. Il est à noter que la poutre est une poutre en béton précontraint d'une section rectangulaire creuse, avec d'espacement des armatures transversales 100mm.



Figure 4.4 Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SK2.

- Poutre SK3

La Figure 4.5 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre SK3 et ainsi que la simulation numérique correspondante. Il est à noter que la poutre est une poutre en béton armé d'une section rectangulaire pleine. La résistance en compression du béton est 28.2 MPa, avec d'espacement des armatures transversales 100mm.





- Poutre SK4

La Figure 4.6 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre SK4 et ainsi que la simulation numérique correspondante. Il est à noter que la poutre est une poutre en béton armé d'une section rectangulaire creuse, avec d'espacement des armatures transversales 100mm.



Figure 4.6 Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SK4.

- Poutre SP0

La Figure 4.7 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre SP0 et ainsi que la simulation numérique correspondante. Il est à noter que la poutre est une poutre en béton armé d'une section rectangulaire creuse, avec d'espacement des armatures transversales 150mm.



Figure 4.7 Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP0.

- Poutre SP1

La Figure 4.8 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre SP1 et ainsi que la simulation numérique correspondante. Il est à noter que la poutre est une poutre en béton précontraint,, avec d'espacement des armatures transversales 150mm.



Figure 4.8 Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP1.

- Poutre SP2

La Figure 4.9 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre SP2 et ainsi que la simulation numérique correspondante, avec d'espacement des armatures transversales 150mm.





- Poutre SP3

La Figure 4.10 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre SP3 et ainsi que la simulation numérique correspondante, avec d'espacement des armatures transversales 150mm.





- Poutre SM1

La Figure 4.11 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre SM1 et ainsi que la simulation numérique correspondante. Il est à noter que la poutre est une poutre en béton armé d'une section rectangulaire creuse, avec d'espacement des armatures transversales 175mm.





- Poutre CF1

La Figure 4.12 illustre la réponse effort tranchant - distorsion de la poutre CF1 et ainsi que la simulation numérique correspondante. Il est à noter que la poutre est une poutre en béton précontraint. La résistance en compression du béton est 38.6 MPa, avec d'espacement des armatures transversales 150mm.





Le tableau 4.3 présente le récapitulatif des valeurs de l'effort tranchant ultime calculées par le présent modèle avec et sans confinement du béton.

Poutre	V _{nconf} (KN)	V _{conf} (KN)	$\frac{V_{nconf}}{V_{conf}}$	Poutre	V _{nconf} (KN)	V _{conf} (KN)	$\frac{V_{nconf}}{V_{conf}}$
SA3	742,5	835	0,889	SP0	405	418,75	0,967
SA4	550	615	0,894	SP1	448,75	460	0,976
SK1	755	820	0,921	SP2	470	487,5	0,964
SK2	590	651,25	0,906	SP3	476,25	488,75	0,974
SK3	727,5	771,25	0,943	SM1	395	411,25	0,960
SK4	603,75	668,75	0,903	CF1	457,5	482,5	0,948

 Tableau
 4.3
 Récapitulatif des valeurs de l'effort tranchant ultime.

4.2.2 Analyse des résultats

On peut remarquer que les poutres SA3, SA4, SK1, SK2, SK3 et SK4 ont des comportements similaires : domaine élastique, après fissuration du béton et après plastification des aciers transversales. Par contre, les poutres SP0, SP1, SP2 et SP3 possèdent des comportements différents.

On voit bien qu'il y a une augmentation de l'effort tranchant ultime calculé en tenant compte le confinement du béton. Par exemple, on passe d'un effort tranchant ultime égale à 742.5KN sans confinement du béton à un effort tranchant ultime égale 835KN avec confinement du béton. Soit une augmentation de l'ordre de 11% de la poutre SA3. Et pour la distorsion moyenne on remarque un écart observé, on passe d'une valeur de 0.91% sans confinement du béton à une valeur de 1.01% avec confinement du béton.

On remarque que l'augmentation de l'effort tranchant peut, dans certains cas, arriver jusqu'à une très faible valeur de l'ordre de 3% (voir figures 4.7, 4.8 et 4.9) pour une déformation de l'ordre de 10^{-4} . Cela est dû à fort espacement des cadres.

On peut remarquer que plus la résistance à la compression du béton est importante plus l'effort tranchant ultime est important (voir figures 4.1 et 4.2).

4.3 Influence du confinement du béton sur le module de cisaillement G

La figure 4.13 montre la courbe de contrainte de cisaillement (τ) en fonction de la distorsion (γ) des résultats des essais testés par Vecchio et Collins (1982) sur des voiles.

La courbe comprend une phase linéaire valeurs $\gamma \leq \gamma_{fiss}$ élastiques (Phase 1) : le module de déformation transversale (G) est calculé par la théorie de l'élasticité linéaire. Dans la deuxième partie (phase 2), pour des valeurs de γ entre γ_{fiss} et γ_{plas} , le module de déformation transversale (G) dépend des caractéristiques du béton et de l'acier. La phase 3, pour des valeurs de γ_{plas} de $\geq \gamma$, correspond à la plastification des aciers : le module G dépend aussi sur les caractéristiques des matériaux.



Figure 4.13 Forme des courbes expérimentales (contraintedéformation de cisaillement).

où τ est la contrainte de cisaillement, γ est la déformation de cisaillement, γ_{fiss} est la distorsion correspond à la fissuration du béton, γ_{plas} est la distorsion correspond à la plastification des aciers, γ_{fr} est la distorsion correspond à la fissuration des aciers.

$$GA = \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{moy}}$$

 ΔV est l'accroissement de l'effort tranchant de la section, $\Delta \gamma_{moy}$ est l'accroissement de la distorsion moyenne de la section, *A* est l'aire de la section.

Le Tableau 4.4 présente une comparaison entre les valeurs de module de cisaillement G du béton confiné et non confiné des différentes phases du courbe effort tranchant – distorsion.

	Phase 1 (Avant fissuration			Phase 2	(Après fis	suration	Phase 3 (Après		
Repère de la		du béton)			du béton)		plastification des aciers)		
poutre	GA _{nconf} (Mpa)	GA _{conf} (Mpa)	$\frac{GA_{nconf}}{GA_{conf}}$	GA _{nconf} (Mpa)	GA _{conf} (Mpa)	$\frac{GA_{nconf}}{GA_{conf}}$	GA _{nconf} (Mpa)	GA _{conf} (Mpa)	$\frac{GA_{nconf}}{GA_{conf}}$
SA3	1214,95	1460,67	0,83	134,77	162,43	0,83	26,50	35,97	0,74
SA4	900,00	1097,56	0,82	117,47	153,35	0,77	18,87	26,51	0,71
SK1	1818,18	2206,90	0,82	168,75	184,44	0,91	34,79	50,11	0,69
SK2	1208,79	1466,67	0,82	143,25	167,74	0,85	25,64	37,08	0,69
SK3	1979,17	2405,06	0,82	129,87	139,86	0,93	29,09	36,47	0,80
SK4	1313,13	1585,37	0,83	119,40	140,07	0,85	27,97	36,57	0,76
SP0	877,19	990,10	0,89	86,25	88,24	0,98	14,87	16,73	0,89
SP1	1164,38	1259,26	0,92	124,90	142,31	0,88	12,69	12,94	0,98
SP2	1307,19	1438,85	0,91	121,09	144,58	0,84	24,79	28,25	0,88
SP3	1294,12	1410,26	0,92	109,29	135,87	0,80	22,46	27,09	0,83
SM1	980,39	1075,27	0,91	93,39	101,33	0,92	17,54	18,90	0,93
CF1	1042,94	1125,83	0,93	137,80	147,06	0,94	19,52	23,22	0,84

Tableau 4.4Comparaison des valeurs de module de cisaillement G.

Avec l'augmentation de la déformation de cisaillement, le module de cisaillement G diminue pour toutes les poutres.

La prise en compte du confinement du béton a une forte influence sur le comportement des poutres vis-à-vis à l'effort tranchant.

Pour des poutres de mêmes caractéristiques, un confinement plus fort amène de meilleures propriétés de résistance.

En effet, plus le confinement du béton est grand, plus la valeur de module de cisaillement G est importante.

4.4 Etude paramétrique

4.4.1 Influence de l'espacement des armatures transversales

Le calcul est effectué pour les poutres SA3, SK3 et CF1. En faisant varier l'espacement des aciers transversaux de confinement de 5 à 15 cm, les caractéristiques du béton confiné sont données aux tableaux 4.5, 4.6 et 4.7. Les courbes de chargement en terme de l'effort tranchant – distorsion, et la confrontation des quarts courbes sont représentées sur les figures 4.14, 4.15 et 4.16.

Tableau 4.5 Caractéristique de la section confiné de la poutre SA3.

Esp (cm)	F _{cc} (MPa)	E _{bc0} (MPa)	€ _{cc0}	E _{ccu}	E _s (MPa)	Ke
5	48,65	40157	0,0058	0,017	7122,4	0,93
10	47,59	39863	0,0055	0,015	8194,6	0,80
15	46,58	39579	0,0051	0,014	9541,4	0,69



Figure 4.14 Confrontation des courbes Effort tranchant – Distorsion de la poutre SA3 avec espacement variable.
Esp (cm)	F _{cc} (MPa)	E _{bc0} (MPa)	ε _{cc0}	ε _{ccu}	E _s (MPa)	K _e
5	35,10	36016	0,0049	0,019	4393,4	0,91
10	34,25	35724	0,0046	0,017	5061,6	0,79
15	33,45	35441	0,0042	0,015	5903,5	0,67

 Tableau
 4.6
 Caractéristique de la section confiné de la poutre SK3.



Figure 4.15 Influence de l'espacement des armatures transversales pour la poutre SK3.

Esp (cm)	F _{cc} (MPa)	E _{bc0} (MPa)	ε _{cc0}	ε _{ccu}	E _s (MPa)	K _e
5	43,36	38644	0,0048	0,011	12479,4	0,89
10	42,74	38458	0,0046	0,010	14437,9	0,77
15	42,15	38281	0,0044	0,009	16923,2	0,66

 Tableau
 4.7
 Caractéristique de la section confiné de la poutre CF1.



Figure 4.16 Influence de l'espacement des armatures transversales pour la poutre CF1.

On remarque que l'effort tranchant ultime est plus important dans le cas d'un espacement de 5 et 10 cm par rapport à la valeur du l'effort tranchant ultime d'un espacement de 15 cm. Soit une variation de 8%.

Plus l'espacement des armatures transversales est petit, plus la pente de la partie ascendante du courbe effort tranchant – distorsion est grande donc une augmentation de la rigidité vis-à-vis aux efforts de cisaillement.

4.5 Conclusion

Nous pouvons remarquer que la prise en compte du confinement du béton permet de simuler l'influence de la densité des armatures transversales sur le comportement des sections en béton armée ou précontraint dans ces trois phases différentes. Avant la fissuration du béton, après fissuration du béton et après plastification des aciers.

On remarque la valeur ultime de l'effort tranchant est d'autant plus grande que l'espacement des cadres est plus petit, d'une part. D'autre part la valeur du module de cisaillement GA est améliorée par le confinement dans toutes les phases du comportement avec une nette amélioration après plastification des armatures.

Conclusions générales

Le modèle analytique présenté est basé sur l'analyse multicouche des sections et sur une procédure de résolution itérative pour chaque couche, dans un état de déformation longitudinale et de contrainte de cisaillement donné. L'équilibre global des sections est analysé dans l'hypothèse de la planéité des déformations longitudinales mais avec, en principe, une interdépendance des contraintes normales longitudinales et des contraintes tangentielles. Le modèle utilise des lois de comportement en élasticité non linéaire du béton confiné et non confiné. Il introduit un terme diagonal de rigidité non linéaire à l'effort tranchant dans la matrice de rigidité des sections, afin de prédire le comportement effort tranchant – distorsion moyenne jusqu'à rupture en cisaillement, pour des poutres présentant des sections de forme complexe et des détails de ferraillage variables.

L'allure des courbes de comportement effort tranchant - distorsion moyenne calculées pour un ensemble de poutres testées à l'Université de Toronto et l'étude paramétrique montre que le modèle est capable d'estimer l'influence du confinement du béton sur le module de cisaillement G.

La valeur de déformation correspondant au pic des contraintes de compression des bielles de béton comprimées semble avoir une influence non négligeable sur le la rigidité de cisaillement des sections de poutres en béton armé ou précontraint, particulièrement quand elles sont soumises à de fortes compressions.

La section réduite proposées par certains règlements pour le calcul du terme de rigidité de cisaillement des sections fissurées qui consiste à enlever 1cm de chaque côté de la section du béton, ne peut estimer la chute de cette rigidité après fissuration du béton. En effet, les résultats obtenus montrent qu'il y a une forte chute de rigidité de la section après la fissuration du béton, mais encore, après la plastification des armatures on observe un terme de la rigidité de cisaillement plutôt proche de 0 que du terme initial.

Le confinement du béton permet l'amélioration de l'effort tranchant ultime dans tous les cas de figure, il permet aussi l'amélioration de la rigidité de cisaillement GA dans toutes les phases du comportement jusqu'à rupture.

Nous pouvons remarquer que le model construit est capable d'estimer la diminution de la rigidité de cisaillement en fonction de l'augmentation de l'effort tranchant.

Enfin, le logiciel ainsi mis en œuvre peut être aisément introduit dans un logiciel de calcul global de structures a barres en béton armé ou précontraint comme un module de calcul du terme de rigidité de cisaillement des sections.

Bibliographie

1. Belarbi A, Hsu TTC. Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete. ACI Structural Journal 1994;91(4):465–74.

2. Bouafia Y, Iddir A, Kachi MS. Influence de la prise en compte du confinement dans le calcul non linéaire des sections en béton armé. ACMA, 2010, May 12-14, Marrakech, Morocco.

3. Bouafia Y. Simulation numérique du comportement moyen jusqu'à rupture d'une zone de poutre. Application au béton armé, au béton précontraint et au béton de fibres. Mémoire de D.E.A., Université Pierre et Marie CURIE, Paris VI, 1987.

4. Bousalem B, Chikh N. Development of a confined model for rectangular ordinary reinforced concrete columns. Materials and structures 2007;40(6):605-13.

5. BPEL. Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites. DTU- Règles BPEL 91, révisées 1999.

6. Chung HS, Yang KH, Lee YH, Eun HC. Stress-strain curve of laterally confined concrete. Eng. Struct. 2002;24(9):1153-63.

7. Drizi S. Contribution à l'étude du comportement des voiles porteurs en béton banché vis-à-vis des sollicitations sismiques. Thèse de docteur de l'Université Paris VI, Avril 1993.

8. Eurocode 2. ENV 1992-1-1. NF P 18 711. Calcul des structures en béton. Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments, Décembre 1992.

9. Fouré B. Déformations limites des armatures tendues et du béton comprimé pour le calcul sismique des structures. VI e. Colloque National AFPS, 2003;2:67-74.

10. Grelat A. Comportement non linéaire et stabilité des ossatures en béton armé. Annales de l'ITBTP, Novembre 1978.

11. Hognestad E. A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. Bulletin Series No 399, University of Illinois Engineering Experiment Station, Urbana, 1951.

12. Hsu TTC. Nonlinear analysis of concrete membrane elements. ACI Structural Journal 1991;88(5):552–61.

13. Iddir A. Influence de la prise en compte du béton confiné dans le calcul non linéaire des structures. Thèse de magister, Université de Tizi–Ouzou, Algérie, 2008.

14. Kachi MS. Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieure. Thèse de doctorat d'état, Université de Tizi-Ouzou, novembre 2006.

15. Kachi MS, Bouafia Y, Muller P. Modélisation du comportement jusqu'à rupture en cisaillement d'une section de poutre en béton armé et précontraint. Conférence Interntionale : Maitrise et Management des Risques Industriels (M2RI'08) Oujda 24-25 avril 2008.

16. Kachi MS, Bouafia Y, Muller P. Modelization of Prestressed or Reinforced Concrete beams until fracture in Non Linear Elasticity. 12th International Conference on Fracture (ICF12). Ottawa, Canada, July 12-17, 2009.

17. Kachi MS, Fouré B, Bouafia Y, Muller P. L'effort tranchant dans la modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint. Revue européenne de génie civil 2006;10(10):1235–64.

18. Kachi MS. Calcul non linéaire, jusqu'à rupture, d'une section en béton armé de fibres métalliques. Thèse de magister, Université de Tizi–Ouzou, Algérie, Février 1997.

19. Kaouane T. Modélisation du comportement en cisaillement jusqu'à rupture des sections de poutres en béton armé et précontraint. Thèse de magister, Université de Tizi–Ouzou, Algérie, 2011.

20. Kent DC, Park R. Flexural members with confined concrete. J. Struct. Div., ASCE 1971;97(7):1969–90.

21. Mahtout R. Vulnérabilité des structures poteaux-poutres en béton armé vis-à-vis des efforts sismiques. Thèse de magister, Université de Tizi–Ouzou, Algérie, 2010.

22. Maia ACF. Analyse non-linéaire des portiques en béton armé ou précontraint compte tenu du comportement rhéologique du béton. Thèse de Docteur Ingénieur, Université Pierre et Marie CURIE, Paris VI, 1979.

23. Mander JB, Priestley MJN, Park R. Observed stress-strain behavior of confined concrete. J. Struct. Engin., ASCE 1988;114(8):1827-49.

24. Mander JB, Priestley MJN, Park R. Theoretical stress–strain model for confined concrete. J. Struct. Engin., ASCE 1988;114(8):1804–26.

25. Nait-Rabah O. Simulation numérique du comportement non linéaire des ossatures spatiales. Thèse de docteur de l'Ecole Centrale de Paris, Décembre 1990.

26. Park R, Priestley MJN, Gill WD. Ductility of square-confined concrete columns. J. Struct. Div 1982;108(4):929–50.

27. Paultre P, Légeron F. Confinement reinforcement design for reinforced concrete columns. J. Struct. Engin., ASCE 2008;134(5):738–49.

28. Popovics S. A numerical approach to complete stress–strain curve of concrete. Cement and Concrete Res. 1973;3:583–99.

29. Saatcioglu M, Razvi SR. Strength and ductility of confined concete. J. Struct. Engin. ASCE 1992;118(6):1590–607.

30. Sargin M. Stress-strain relationship for concrete and the analysis of structural concrete sections. PhD Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, March 1968.

31. Sheikh SA, Uzumeri SM. Analytical model for concrete confinement in tied columns. J. Struct. Div., ASCE 1982;108(12):2703–22.

32. Sheikh SA, Uzumeri SM. Strength and ductility of tied concrete columns. J. Struct. Div 1980;106(5):1079–101.

33. Sheikh SA. A comparative study of confinement models. ACI Journal Proceedings 1982;79(4):296–06.

34. Stanciulescu-Panea I. Modélisation de l'influence de l'effort tranchant dans le comportement non linéaire des poutres en béton armé. Mémoire de DEA de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Juillet 1996.

35. Vecchio FJ, Collins MP. Compression response of cracked reinforced concrete. J. Struct. Engin., ASCE 1993;119(12):3590–610.

36. Vecchio FJ, Collins MP. Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using modified compression field theory. ACI Structural Journal 1988;85(3):258–68.

37. Vecchio FJ, Collins MP. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. ACI Structural Journal 1986;83(2):219–31.

38. Vecchio FJ, Collins MP. The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses. University of Toronto, Department of Civil Engineering, Publication No. 82-03, March 1982.