

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI TIZI-OUZOU
FACULTE DE GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

Sujet :

Modélisation et localisation d'Endommagements dans les Structures Mécaniques par Mesures Vibratoires

PRÉSENTÉ PAR :

ALMANSBA MOULOUD

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER EN GÉNIE MÉCANIQUE
OPTION : CONSTRUCTION MÉCANIQUE

Devant le jury composé de :

| | | |
|------------------------|-------|------------|
| Slimani mohand | UMMTO | Président |
| Tnachacht samir | UMMTO | Rapporteur |
| Behtani amar | UMMTO | Examineur |
| Ameziane hcene | USTHB | Examineur |

Soutenu le .../.../ 2006

REMERCIEMENTS

Avant tout, je tiens à remercier le dieu tout puissant qui m'a donné la santé, le courage, la détermination, la volonté, et la patience à mener ce modeste travail à terme.

Je voudrais également remercier infiniment mon promoteur Monsieur TIACHACHT. S de m'avoir prodigué son temps, ses conseils et surtout sa patience tout au long de ce présent travail.

Je remercie dès maintenant les membres de jury pour le temps qu'ils voudraient consacrer à l'analyse de mon mémoire.

Je remercie ma chère famille de m'avoir soutenu ainsi que tous mes amis.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS

SOMMAIRE

i

LISTE DES FIGURES

v

NOMENCLATURE

x

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I

Partie bibliographique :

Méthode de détection de l'endommagement

| | |
|--|------------------|
| <i>I.1. Introduction</i> | <i>02</i> |
| <i>I.2. Méthodes de contrôle non destructif.</i> | <i>02</i> |
| <i>I.3. Surveillance de l'état de la structure.</i> | <i>03</i> |
| <i>I.3.1. Méthodes basées sur des données vibratoires.</i> | <i>04</i> |
| <i>I.3.2. Fréquences naturelles</i> | <i>04</i> |
| <i>I.3.3. Déformées propres</i> | <i>05</i> |
| <i>I.3.4. Amortissement</i> | <i>06</i> |
| <i>I.3.5. Fonctions de réponse fréquentielle (FRF) Flexibilité.</i> | <i>07</i> |
| <i>I.3.6. Energie de déformation modale</i> | <i>08</i> |
| <i>I.3.7. Flexibilité modale</i> | <i>08</i> |
| <i>I.3.8 Le recalage des Matrices de masse et de raideur</i> | <i>09</i> |

CHAPITRE II**RAPPELS DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES**

| | |
|---|-----------|
| II.1. La dynamique des structures | 11 |
| II.1.1. Introduction | 11 |
| II.1.2. Étude des systèmes à 1 degré de liberté | 11 |
| II.2.2. Etude des systèmes à n degrés de liberté | 14 |
| II.2. Méthode des éléments finis en dynamique | 15 |
| II.2.1. Différentes étapes de l'écriture d'un élément | 15 |
| II.2.2. Différentes étapes de la résolution d'un problème | 16 |
| II.2.3. Principe de la méthode des éléments finis en dynamique | 16 |
| II.2.3.a. Discrétisations de la structure (choix d'un maillage) | 17 |
| II.2.3.b. Approximation du champ des déplacements (Représentation polynomiale) | 17 |
| II.2.4. Rappel sur l'énergie de déformation | 18 |
| II.2.5. Rappel sur l'énergie cinétique | 19 |
| II.2.6. Méthodes directes de formulation des éléments | 19 |
| II.2.7. Formulation des matrices élémentaire de raideur et de masse | 20 |
| II.2.7.1. Cas d'une barre de traction-compression | 21 |
| II.2.7.2. Cas d'une poutre de flexion | 22 |
| II.2.7.3. Cas d'une structure plane à treillis | 26 |

CHAPITRE III***modèle d'endommagement et applications***

| | |
|--|-----------|
| Partie I : Modélisation en éléments finis ressort de la poutre fissurée | 29 |
| Les travaux de Chih-Shiung Wang and Lin-Tsang Lee | 29 |
| Travaux de Nandwana and Maiti | 32 |
| Travaux de Ostachowicz, M. Krawczuk | 35 |
| Travaux de Dimarogonas et Paipetis | 35 |
| Travaux de Shpli and Dado | 36 |
| Travaux de Modélisation de fissure Lee | 36 |
| Partie II : Localisation d'endommagement | 40 |
| Indicateur d'endommagement | 40 |

| | |
|---|-----------|
| Application 1 : Un seul endommagement – Poutre encastrée-encastrée | 40 |
| Application 2 : Un seul endommagement – Poutre simplement appuyée | 44 |
| Application 3 : Un seul endommagement – Poutre Encastrée-Libre | 48 |
| Application 4 : Deux endommagements | 55 |
| | |
| <i>CONCLUSION GENERALE</i> | 56 |
| <i>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</i> | |

LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX

LISTE DES FIGURES :

Chapitre II :

Figure II.1 : système vibratoire à un ddl.

Figure II.2 : Allure de mouvement harmonique à amplitude décroissante

Figure II.3 : Discrétisation de la structure

Figure II.4: barre de traction-compression

Figure II.5 : élément poutre de flexion

Figure II.6 : système à treillis

Figure II.7 : Elément barre incliné

Chapitre III :

Figure III.1 : mode ressort Nandwana and Maiti de la poutre fissurée.

Figure. III.2. Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini

Figure. III.3. Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini

Figure. III.4. Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini

Figure. III.5. Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini

Figure. III.6. Poutre encastree – encastree.

Fig. III.7. Comparaison des trois premières fréquences : EF saine, EF [50] et mesurées

Figure. III.8. Comparaison du 1er mode mesurée (sain et endommagée) et EF

Figure. III.9. Localisation de l'endommagement en utilisant le 1er mode

Figure. III.10. Localisations de l'endommagement dans les différents cas test

Figure. III.11. Un schéma du dispositif expérimental et de la poutre.

Figure. III.12. Comparaisons du 1er mode mesurée et modélisée par élément finis

Figure. III.13. Résultat de localisation de l'endommagement de la poutre en utilisant le 1er mode.

Figure. III.14. Comparaisons du 1er mode mesurée et modélisée par les différents modèles d'endommagements

Figure. III.15. Agrandissement

Figure. III.16. Indicateur d'endommagements avec différents taux d'endommagements : de 10% a 35%.

Figure. III.17. Indicateur d'endommagements avec différents taux d'endommagements : de 40% a 65%.

Figure. III.18. Indicateur d'endommagements avec différents taux d'endommagements : de 70% a 85%.

Figure. III.19. Résultat de localisation de l'endommagement de la poutre en utilisant le 1er mode.

Figure III.20. expérience de Eun-Taik

Figure. III.21. Comparaisons du 1er mode mesurée et modélisée par éléments finis

Figure. III.22. Résultat de localisation de l'endommagement de la poutre en utilisant le 1er mode.

LISTE DES TABLEAUX :

Chapitre III :

Tableau 1 trois premières fréquences : EF saine, EF [50] et mesurées [50].

Tableau. 2. Fréquences naturelles d'une poutre simplement appuyée avec une fissure pour le premier mode

Tableau. 3. Fréquences naturelles d'une poutre simplement appuyée avec une fissure pour le 1er mode

Tableau. 4. Fréquences naturelles d'une poutre simplement appuyée avec une fissure pour le second mode

NOMENCLATURE

Pour tous le mémoire :

E : Module de Young.

I : Moment d'inertie.

... A : Masse linéique.

EI : Rigidité de flexion.

A, S : Surface.

$[M]$: Matrice de masse.

$[C]$: Matrice d'amortissement.

$[K]$: Matrice de raideur.

u : Déplacement horizontal

ϵ : Déplacement vertical.

U : Energie de déformation.

T : Energie cinétique.

CHAPITRE II

k : Raideur.

m : Masse.

c : Amortissement visqueux.

c_c : Coefficient d'amortissement critique.

F : Excitation extérieure.

t : Temps.

w : Pulsation naturelle.

Ω : Fréquence d'excitation

r : Coefficient d'amortissement visqueux.

A : Amplitude de la réponse.

w : Déphasage.

w_a : Pulsation naturelle du système amorti.

U_{st} : Déplacement statique

Q : Facteur de surtension.

T_p : Période

$\mathfrak{S}(\) = L[\]$: Transformée de Laplace

$\{F(t)\}$: Vecteur des sollicitations extérieures.

$[\{ (x, y, z) \}]$: Matrice des fonctions bases de l'approximation.

$[a]^e$: Vecteur des coordonnées généralisées de l'élément fini.

$[N]$: Matrice des fonctions de forme.

$[B]$: Dérivée des matrices de fonctions de forme.

$[D]$: Matrice des constantes matérielles.

J : Matrice Jacobienne du système de coordonnées locales et globales.

ϵ : Coefficient de Poisson.

\dagger : Contrainte.

v : Déformation.

L : Longueur de l'élément fini poutre, barre.

H : Energie dissipée par cycle

det : Déterminant.

u_{ij} : Symbole de Kronecker

CHAPITRE III

L : Longueur de la poutre.

a_p, a_{j+i} : Nœuds définissant l'élément j .

Fu_{ij} : Fraction d'énergie de déformation pour le cas non endommagé.

$()^*$: Indice d'endommagement.

Zu : Indicateur d'endommagement.

\overline{Zu} : Valeur moyenne de Zu .

\dagger_{zu} : Ecart type de Zu .

S_{jI} : Indicateur d'endommagement normalisé de la procédure initiale désigné : Indicateur β_{I} .

S_{jII} : Indicateur d'endommagement normalisé de la méthode proposé désigné : Indicateur β_{II} .

r_{jI} : Indicateur d'endommagement normalisé de la procédure initiale désigné : Indicateur α_{I} .

r_{jII} : Indicateur d'endommagement normalisé de la méthode proposé désigné : Indicateur α_{II} .

Ft_{ij} : Fraction d'énergie cinétique.

Zt : Indicateur d'endommagement.

\overline{Zt} : Valeur moyenne de Zt .

\dagger_{zt} : Ecart type de Zt .

$\}$: Valeur propre.

$\{w\}$: Vecteur propre de la structure saine.

$[k_j]$: Matrice élémentaire de raideur du $j^{\text{ème}}$ élément sain.

$[m_j]$: Matrice élémentaire de masse du $j^{\text{ème}}$ élément sain.

r : Rayon de giration

G : Module de cisaillement.

J : Moment de torsion.

CHAPITRE IV

np : Nombre de modes de projection.

c_o : Nombre de d.d.l optimum.

(a) : Indicateur de la structure élément fini.

(m) : Indicateur de la structure mesuré.

C_v : Vecteur de projection

y_v : $v^{\text{ème}}$ vecteur propre mesuré.

Λ : Matrice spectrale.

Y : Matrice modale.

I : Matrice identité.

$Rang(A)$: Rang de la matrice A.

$Cond(A)$: Conditionnement de la matrice A.

y_{vb} : $v^{\text{ème}}$ vecteur déplacement bruité au $v^{\text{ème}}$ capteur.

y_v : $v^{\text{ème}}$ vecteur déplacement simulé au $v^{\text{ème}}$ capteur.

gn : Pourcentage de bruit aléatoire introduit.

$abs(y_v)$: Valeur absolue du vecteur y_v .

y_{vbt} : Vecteur contenant des valeurs aléatoires entre 0 et 1 uniformément distribuées

nn : Dimension du vecteur y_v .

on : Vecteur unité de dimension nn .

$rand(nn,1)$: Vecteur de distribution uniforme de nombres aléatoires entre 0 et 1.

Introduction Générale

INTRODUCTION GENERALE

La fiabilité des systèmes industriels est devenue un élément essentiel que ce soit au stade de leur conception que lors de leur exploitation, car il affecte la durée de vie du matériel et sa rentabilité. Une maintenance mal adaptée à un système peut également conduire à une situation critique et dangereuse aussi bien pour les personnes que pour le matériel ou l'environnement. D'où Il est d'usage avant et après la mise en service d'une structure de la tester dans son intégrité. Le contrôle non destructif (CND) est le plus largement utilisé, de par son caractère non invasif qui laisse la structure intacte. Plusieurs méthodes de contrôle non destructif sont utilisées avec succès dans plusieurs domaines de l'industrie, telles que les ultra-sons, la radiographie par rayon X et le test par émission acoustique. Cependant, ces méthodes ne nous permettent pas de surveiller la structure en continu pendant son service. Le développement technologique, dans les domaines de capteurs, acquisition de données, le traitement du signal et l'outil informatique, a favorisé la surveillance de la structure en temps réel, et a fait que l'émergence de ce type de contrôle soit l'évolution naturelle des méthodes traditionnelles. La surveillance de l'état de la structure (en anglais Structural Health Monitoring « SHM ») peut être classée dans la littérature parmi les méthodes de contrôle non destructif en termes de technologie ; elle diverge avec les méthodes traditionnelles dans le but qui est l'automatisation et le contrôle continu, en temps réel, de la structure en service, avec un minimum d'intervention humaine.

De toutes les techniques de détection–localisation d’endommagements dans les structures mécaniques, celles utilisant les données vibratoires sont les plus utilisés. Dans le cadre d’une maintenance prédictive, plusieurs étapes sont nécessaires. Il faut dans un premier temps analyser de façon approfondie la structure du système afin d’optimiser le nombre et le positionnement des capteurs requis. Dans de nombreux cas, il est très difficile de définir de manière spécifique l’endommagement qui doit être suivi, en raison parfois d’un manque d’expérience quant à son influence dans le comportement dynamique de la structure. Pour des grands ouvrages, il est même impératif de définir avec précision le type d’endommagements à suivre de sorte à réduire le nombre de capteurs sur l’ouvrage. Il n’est aussi pas possible d’un point de vue pratique de laisser en permanence un grand nombre de capteurs sur la structure. Ceci ne peut se justifier que pour des interventions ponctuelles.

Le choix d’indicateurs de suivi d’endommagement est l’un des plus délicats à accomplir. Ils ont pour but de permettre de classer la structure en endommagée ou non. L’évaluation dynamique d’une structure fournit une grande quantité d’information. Dans ce mémoire, ce processus est mis en oeuvre pour l’estimation des paramètres modaux.

Le chapitre I du présent mémoire est destiné à une synthèse bibliographique des méthodes de détections et localisations d’endommagement.

Dans le chapitre II, il est rappelé les objectifs de la dynamique des structures ainsi que l’utilisation de la méthode des éléments finis.

Le chapitre III est subdivisé en deux parties, dans la première partie, nous nous intéressons à la présentation de différents modèles d’écritures pour l’introductions d’endommagements. Ensuite, dans la deuxième partie, nous présenterons un indicateur de localisations d’endommagement qui sera confrontées aux mesures expérimentales afin de valider sa robustesse.

Puis enfin, nous terminerons ce travail par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre I

I.1 Introduction

On regroupe sous le vocable **essais non destructifs** ou encore **contrôles non destructifs** (ce dernier évoquant mieux l'aspect qualité industrielle que le premier qui évoque plutôt les examens en laboratoire) l'ensemble des techniques et procédés aptes à fournir des informations sur la **santé** d'une pièce ou d'une structure sans qu'il en résulte des **altérations préjudiciables** à leur utilisation ultérieure. En ce sens, le contrôle non destructif (**CND**) apparaît comme un élément majeur du **contrôle de la qualité** des produits. Le contrôle non destructif est devenu un outil indispensable en contrôle de la qualité des produits. Ces techniques permettent de détecter les hétérogénéités et anomalies d'une pièce, sans altérer leurs utilisations futures.

Ces méthodes sont utilisées dans l'ensemble des secteurs industriels. On peut citer notamment :

- l'industrie pétrolière (pipelines, tubes, barres, soudures, réservoirs) ;
- l'industrie navale (contrôle des coques) ;
- l'aéronautique (poutres, ailes d'avion, nombreuses pièces moteurs, trains d'atterrissage, etc.) ;
- l'aérospatiale et l'armée ;
- l'industrie automobile (contrôle des blocs moteurs) ;
- la sidérurgie
- la chaudronnerie et la tuyauterie en fabrication
- l'industrie de l'énergie : réacteurs nucléaires, chaudières, tuyauterie, turbines, etc. (maintenance des installations) ;
- le ferroviaire en fabrication et en maintenance notamment pour les organes de sécurité (essieux, roues, bogies) ;
- l'inspection alimentaire ;
- le Génie Civil et le bâtiment ;

I.2 Méthodes de contrôle non destructif

Le Contrôle Non Destructif (C.N.D) est un ensemble de méthodes qui permet de caractériser l'état d'intégrité de structures industrielles, sans les dégrader, soit au cours de la production (les pièces qui sortent des fonderies ne sont jamais exemptes de défaut), soit en cours d'utilisation (apparition de défaut). Il faut donc déterminer (à la casse, de façon empirique) quelle taille de défaut est acceptable et ensuite pouvoir les détecter, sans casser la pièce. De nombreux ouvrages traitant de l'endommagement, proposent une description sommaire de quelques méthodes de C.N.D : Méthodes détectant les défauts en surface ou de faibles profondeurs et méthodes sensibles aux défauts dans la masse.

Il existe dans ce domaine une littérature importante qu'il est impossible de citer ici.

Cependant, nous en citons quelques-unes ci-dessous.

- Le contrôle par ressuage,
- La magnétoscopie,

- La radiographie,
- Les ultrasons,
- La thermographie,
- Micro-ondes,
- Emission acoustique.

I.3 Surveillance de l'état de la structure

Les méthodes de détection de l'endommagement ont contribué au développement de la SHM (Structural Health Monitoring). L'endommagement de la structure peut être défini comme un changement introduit au système, qui affecte ses performances présentes et futures (*Doebling et al.*) [1].

Un système de classification de détection de l'endommagement a été donné par *Rytter* [2] qui inclut 4 niveaux :

- Niveau 1 : détermination de l'existence de l'endommagement dans la structure ;
- Niveau 2 : plus la détermination du type d'endommagement et de sa localisation ;
- Niveau 3 : plus la quantification de la sévérité de l'endommagement ;
- Niveau 4 : plus la prédiction de la durée de vie en service restante, en se basant sur le suivi de l'endommagement et des conditions de service.

Le développement typique du diagnostique de l'endommagement, est le fruit d'une collaboration entre des domaines multidisciplinaires, tels que la technologie des capteurs, les matériaux intelligents, le traitement du signal, les systèmes intégrés, l'interprétation des données...etc.

La méthode de détection basée sur des données vibratoires tient une part importante de la recherche dans le domaine de la SHM ces dernières années. Le nombre important d'articles présentés, dans les conférences dédiées à la SHM, montre qu'une multitude de techniques d'acquisition de données et d'algorithmes de diagnostique ont été développés, et que plusieurs techniques ont des applications réelles dans les structures du génie civil, l'aéronautique, les plateformes de pétrole offshore et les pipelines souterrains.

I.3.1 Méthodes basées sur des données vibratoires

La vibration se réfère usuellement à un mouvement périodique dans le domaine élastique de la structure autour d'une position d'équilibre. Le fondement des méthodes basées sur des données vibratoires est que l'endommagement altère la raideur, la masse ou l'amortissement de la structure, ce qui affecte la réponse dynamique de cette dernière, comme les fréquences naturelles, déformées propres et les coefficients d'amortissement. Donc, intuitivement, ce changement dans les propriétés dynamiques est utilisé pour localiser et quantifier l'endommagement dans la structure.

I.3.2 Fréquences naturelles

De tous les paramètres dynamiques, les fréquences naturelles sont les plus faciles à mesurer. L'inspection de changement de fréquences naturelles pour la détection d'endommagement était l'approche majeure dans les méthodes basées sur les données vibratoires pendant les décennies passées, où l'analyse modale expérimentale n'était pas encore établie, et elle, l'inspection de changement de fréquences naturelles, captivait la plupart des recherches dans le domaine.

L'investigation systématique de ce changement, dans la détection d'endommagement, peut être attribuée à *Adams et al.* [3] et *Cawley et Adams* [4]. En partant du principe que le changement de raideur est indépendant de celui des fréquences, le rapport de changement de fréquences en deux modes est fonction seulement de la localisation de l'endommagement. Des expériences ont été faites sur une plaque d'aluminium avec un défaut sous forme d'un trou rectangulaire, et sur une plaque composite en polymère renforcé de fibres de carbone, avec des défauts sous formes de fissures et d'écrasement.

Avec un modèle éléments finis, de bons résultats furent obtenus en localisant l'endommagement sur la plaque d'aluminium, par contre, pour la plaque composite les résultats n'étaient pas concluants.

Stubbs et Osegueda [5] [6] ont développé une approche de détection de l'endommagement, à partir du changement de fréquences naturelles, qui est basée sur le critère de *Cawley-Adams*. *Friswell et al.* [7] ont aussi développé ce critère en introduisant des analyses statistiques sur les scénarios d'endommagement.

Palacz et Krawczuk [8] ont comparé différentes méthodes, basées sur les données vibratoires, incluant le critère de *Cawley-Adams*, pour la détection d'endommagement sur des poutres fissurées, ils indiquent dans leur travail que le changement dans les deux premières fréquences sans erreurs de mesure, et les quatre premières fréquences avec erreurs de mesure peuvent détecter avec succès la position et la profondeur de la fissure.

Cependant, comme mentionné par *Doebbling et al.* [1] et *Friswell et Penny* [9], l'identification de l'endommagement en utilisant le changement de fréquences naturelles seul a des limitations pratiques dans certaines applications. Par exemple, le changement de fréquences est plus affecté par la température et l'humidité que par l'endommagement dans l'inspection des ponts (*Ferrar et al.*) [10].

En outre, les fréquences naturelles nous informent sur la nature globale de la structure, mais elles sont insensibles aux endommagements naissants, plus spécialement quand ces derniers sont situés dans une région à faibles contraintes.

Messina et al. [11] ont développé un algorithme appelé « Damage Location Assurance Criterion (DLAC) ». L'indicateur DLAC est calculé à partir du vecteur de changement de fréquences expérimental et du vecteur de changement de fréquences théorique dans la région du présumé endommagement. La localisation de l'endommagement est obtenue en comparant les modèles de changement de fréquences. Plus tard, *Messina et al.* [12] ont généralisé l'approche pour des endommagements multiples (MDLAC), en incorporant les déformées propres aux fréquences.

Armon et al. [13] ont proposé un classement par rang des modes en changement de fréquences pour détecter des fentes et des fissures dans une poutre, et ils ont démontré que la méthode est efficace même en prenant en considération les erreurs expérimentales et les incertitudes sur le model.

Nicholson et Alnefaie [14] ont introduit un autre paramètre sensible à l'endommagement nommé l'indice du moment modal (Modal Moment Index MMI), qui extrait des paramètres modaux expérimentaux. L'indice a un changement brusque à l'endroit de l'endommagement et peut servir à le quantifier.

En résolvant un problème inverse des trois premières fréquences naturelles, *Chaudhari et Maiti* [15] ont utilisé la technique Frobenius qui gouverne des équations différentielles, et ont obtenu ainsi la localisation du défaut par une approche semi-numérique, tandis que *Chinchlkar* [16] a fait recours à la méthode des éléments finis pour modéliser une modification du premier ordre du problème aux valeurs propres.

Jones et Turcotte [17] ont pris les fréquences d'antirésonance dans un model éléments finis pour détecter les endommagements.

Moser et al. [18] ont étudié l'effet des conditions environnantes sur le changement de fréquences naturelles, ils ont, de la sorte, pu rendre les fréquences naturelles plus efficaces dans la détection d'endommagement.

I.3.3 Déformées propres

Les déformées propres sont les descriptions spatiales des amplitudes à chacune des fréquences de résonance. Le MAC (Modal Assurance Criterion), et les variantes qui lui sont reliées, a été développé durant les dernières décennies, comme un indicateur pour explorer l'information modale spatiale (*Allemang*) [19].

West [20] est probablement le premier à avoir proposé une investigation systématique en utilisant le MAC comme indicateur statistique, qui fait la corrélation entre les déformées propres d'une structure saine et une autre endommagée sans passer par la méthode des éléments finis.

Un autre critère largement utilisé est le COMAC (Coordinate Modal Assurance Criterion), qui fait l'identification des coordonnées où un ensemble de deux vecteurs propres ne se correspondent pas (*Liever et Ewins*) [21].

En outre, *Ratcliffe* [22] a proposé une méthode de détection d'endommagement basée seulement sur les déformées propres. La localisation peut être effectuée à partir d'une approximation aux différences finis de l'opérateur Laplacien aux vecteurs propres.

Khan et al. [23] ont utilisé un scanne continu avec laser Doppler vibromètre pour surveiller les discontinuités dans les déformées propres pour détecter l'endommagement.

Contrairement aux fréquences, l'estimation des déformées propres requiert la mesure dans chacun des points où il faut faire l'estimation, posant des difficultés pratiques dues au nombre limité de capteurs et à la capacité d'avoir une mesure fiable. En plus, l'estimation des vecteurs propres à partir de la réponse fréquentielle, même en l'absence d'endommagement, peut devenir problématique quand la structure a une configuration complexe. C'est une méthode qui dépend des techniques mises en œuvre ; la faisabilité et la fiabilité sont affectées par le type de structure, l'étendue de l'endommagement, la façon d'extraire les vecteurs propres et les algorithmes utilisés pour le traitement des données.

I.3.4 Amortissement

Malgré que l'estimation de la matrice d'amortissement par les fonctions de réponse fréquentielles (*Chen et al.*) [24], input/output data (*Fritzen*) [25] et plusieurs autres approches, ont été un thème de recherche dans le domaine d'identification des systèmes mécaniques pendant plusieurs années, la détection d'endommagement basée seulement sur le changement des paramètres d'amortissement n'a pas été intensément étudié, comparé aux méthodes basées sur les fréquences naturelles et les vecteurs propres. Cela peut être dû à l'existence de différents types d'amortissement et à l'incertitude relativement haute dans son estimation.

Tandis qu'un accroissement anormal des coefficients d'amortissement, ce qui suggère plus de dissipation d'énergie, peut indiquer un endommagement de la structure, comme observé expérimentalement dans presque tous les cas (*Morgan et Osterle*) [26] et (*Napolitano et Kosmarka*) [27], l'endommagement peut aussi résulter d'une diminution d'amortissement ou d'une augmentation précédée d'une diminution (*Salane et Baldwin*) [28] et (*Hearn et Testa*) [29]. *Williams et Salawu* [30] ont revu des études en génie civil, et ont conclu que l'amortissement seul ne peut pas donner une véritable signification à la détection d'endommagement (localisation et quantification).

Par contre, le changement d'amortissement peut détecter l'endommagement là où les méthodes conventionnelles basées sur le changement de fréquences et de déformées propres ne sont pas sensibles.

Modena et al. [31] ont démontré que des microfissures causent des changements négligeables dans les fréquences naturelles, mais une augmentation considérable d'amortissement, ce qui peut être utilisé pour localiser la fissure.

Les techniques de détection basées sur la mesure d'amortissement sont capables de nous renseigner seulement sur l'existence de l'endommagement.

I.3.5 Fonctions de réponse fréquentielle (FRF)

Les fonctions de réponse fréquentielle décrivent le domaine fréquentiel du système, et sont très utilisées dans la dynamique des structures et l'identification des systèmes mécaniques pour l'extraction des fréquences de résonance, l'estimation des vecteurs propres et des coefficients d'amortissement, et vérifier les matrices de masse, de raideur et d'amortissement. Plusieurs méthodes de détection d'endommagement basées sur l'évaluation des paramètres modaux sont reliées, directement ou indirectement, à la FRF. Cela implique que l'information contenue dans les données FRF, peut être directement utilisée pour détecter l'endommagement.

Wang et al. [32] ont développé un algorithme pour localiser et quantifier l'endommagement en utilisant directement les données FRF mesurées. Le vecteur d'endommagement, qui indique la position et la magnitude de ce dernier, est calculé à partir des perturbations dans les équations de la FRF.

Mottershead et al. [33] ont exploré la possibilité de détection d'endommagement, en utilisant des équations FRF rationnelles, basée sur l'observation que l'endommagement peut augmenter le comportement non-linéaire d'une structure. Des techniques ont été développées pour extraire ces distorsions des données FRF, afin de localiser et quantifier l'endommagement (*Vanhoenacker et al.*) [34].

Kirmsher [48] a illustré les effets des fissures sur la réponse structurale à travers de simples réductions des sections du modèle en utilisant des méthodes énergétiques.

Lifshitz et Rotem [49] ont proposé l'utilisation des mesures vibratoires comme une méthode de détection d'endommagement. Ils ont observé une variation des amplitudes dynamiques, qui pourraient être en relation avec les variations des fréquences, pour indiquer l'endommagement.

Cawley et Adams [50] ont proposé une formulation pour la détection d'endommagement pour les matériaux composites à partir des variations des fréquences. Un terme d'erreur a été construit en associant les changements des fréquences mesurées à celui supposé d'un modèle basé sur une réduction de raideur.

I.3.7 Energie de déformation modale

Yang et al. [35] ont utilisé la propriété de l'invariance d'énergie de déformation modale élémentaire pour localiser l'endommagement. Dans cette méthode, l'énergie de déformation modale est décomposée en deux parties qui définissent deux indicateurs d'endommagement. Le premier est le rapport de changement d'énergie de déformation modale de compression et le second représente le rapport de changement d'énergie modale de torsion.

L'énergie de déformation modale a été obtenue par des formes modales incomplètes et des matrices de raideur élémentaire. Plusieurs cas d'endommagement ont été simulés sur une plate forme pétrolière offshore. D'après les résultats obtenus, les auteurs ont montré l'efficacité et la précision de la méthode dans la détection d'endommagement sur des structures complexes.

Brehm et al. [36] ont développé une approche basée sur un model purement mathématique enrichi par des informations physiques obtenues par un model numérique basée sur l'énergie de déformation modale, ils ont ainsi pu localiser et quantifier l'endommagement.

Dixit et al. [37] ont présenté une méthode basée sur l'énergie de déformation modale obtenue à partir des fréquences naturelles et des déformées propres correspondantes, afin de localiser et de quantifier des endommagements sur des poutres, sous différentes conditions aux limites, et ils ont obtenu des résultats expérimentaux qui démontrent la robustesse de leur approche.

I.3.7 Flexibilité modale

Li et al. [38] ont présenté une nouvelle approche basée sur le changement de la matrice de flexibilité modale généralisée, qu'ils ont utilisé pour localiser et quantifier des endommagements. En comparaison avec la matrice de flexibilité modale, la matrice de flexibilité modale généralisée réduit l'effet de troncature des modes d'ordre supérieur.

Kazemi et al. [39] ont utilisé la variation de la flexibilité modale pour détecter des défauts sur des structures plaques minces. L'indicateur d'endommagement est formulé à partir de la matrice de flexibilité modale et des équations différentielles de variation des efforts.

Reynders et al. [40] ont proposé une méthode basée sur la flexibilité quasi statique. La matrice de flexibilité modale est combinée avec des forces virtuelles qui causent des contraintes non nulles sur de petites parties de la structure, où de possible changement de raideur sont à chercher. Ils ont démontré que, si la relation contraintes déformations est proportionnelle, le rapport entre certaines combinaisons de déformations avant et après endommagement, fait apparaître un changement de raideur, égal à l'inverse de la raideur locale. La méthode est appelée flexibilité locale.

I.3.8 Le recalage des Matrices de masse et de raideur

La méthode de recalage basée sur la notion de l'erreur en relation de comportement, cependant, l'évaluation de la qualité des prédictions se fait par le calcul de l'erreur globale, si cette dernière est supérieure à l'erreur spécifiée par l'utilisateur, le processus itératif du recalage paramétrique est enclenché en deux étapes :

a Etape de Localisation

Cette étape permet de localiser les zones présentant des défauts dominants au niveau de la modélisation initiale. Ces régions sont supposées responsables de l'écart entre les prédictions et le comportement réel de la structure, elles sont détectées en utilisant les erreurs locales élémentaires.

b Etape de Correction

Dans cette étape un processus d'optimisation paramétrique cherche à minimiser la fonction objectif, en corrigeant les paramètres de conception des seules régions décelées dans l'étape de localisation. Après chaque itération, l'erreur globale est recalculée. En cas de résultats non satisfaisants, on recommence l'opération autant de fois que nécessaire. Le processus itératif s'arrête lorsque le niveau toléré d'erreur défini par l'utilisateur est atteint.

Fritzen et al [43] ont étudié la possibilité de modélisation des erreurs et leurs influences pour l'exactitude de la localisation des défauts et ont présenté une approche pour des résultats plus fiables. Un intérêt particulier est porté à la sélection du paramètre pour traiter les équations de la sensibilité inverse mal posées.

Zang et Imregum [44] ont discuté sur La technique de recalage du modèle basé sur la sensibilité pour détecter et localiser des défauts d'une structure. *Hamez et Farhat* [45] ont utilisé la repense fréquentielle pour le recalage du modèle. Un ensemble de d'équations linéaires basé sur la corrélation de la forme globale. Une procédure de l'élimination itérative a été rendu effective pour l'emplacement de défaut. Les résultats ont indiqués que la méthode de recalage basé sur la sensibilité proposée qui utilise les données de la repense fréquentielles incomplète pourrait non seulement détecter, mais quantifier l'endommagement structural.

Bouazzouni et al. [45] ont proposé une technique des conditions aux limites artificielle pour fournir une base de données plus riches, pour le recalage du modèle. Il a été montré que les fonctions de la repense fréquentielle pour la structures sous une variété de conditions aux limites sont disponibles son aucune modification physique réelle des conditions aux limites, d'où le terme conditions aux limites artificielles. Cette technique a pu procurer potentiellement une base de connaissances plus riches de la structure.

Ce chapitre a été consacré à la revue de littérature du contrôle non destructif et des différentes méthodes de détection d'endommagement, en les classifiant par catégorie. Dans

Chap 1 : Partie bibliographique : Méthode de détection de l'endommagement

le chapitre suivant, nous allons développer le model éléments finis nécessaire à l'obtention des paramètres modaux que nous utiliserons pour appliquer les méthodes choisies.

Chapitre II

1. LA DYNAMIQUE DES STRUCTURES :

1.1. Introduction :

Un certain 7 novembre 1940 le pont de Tacoma en USA s'est écroulé après seulement quatre mois d'existence la cause de cet effondrement était liée au vent. La vitesse de vent ce jour-là ne dépassait pas les 67Km/h tandis que le pont avait été conçu pour des vitesses plus élevées mais ne tenant compte que des effets statiques. A partir de ce fait les ingénieurs commencèrent à inclure les effets dynamiques lors de la conception des structures mécaniques.

De nos jours, l'étude des vibrations des systèmes mécaniques fait partie intégrante de la démarche de conception de ces derniers, car elle conditionne la fiabilité et la résistance des systèmes mécaniques. De ce fait, la compréhension et la maîtrise des principes de base de domaine des vibrations des systèmes mécaniques ou la dynamique des structures (DDS) au sens large est indispensable.

Ce chapitre est consacré en premier lieu à un rappel sur quelques notions et principes de base de la DDS en second lieu, sur la méthode des éléments finis.

1.2. Étude des systèmes à 1 degré de liberté :

Les systèmes à 1 degré de liberté peuvent être assimilés à une masse reliée à une base rigide par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et un amortisseur visqueux c . Cette masse est soumise à une excitation extérieure F , fonction du temps $t(F(t))$, et le seul degré de liberté est son déplacement « u » suivant l'axe ox comme suit :

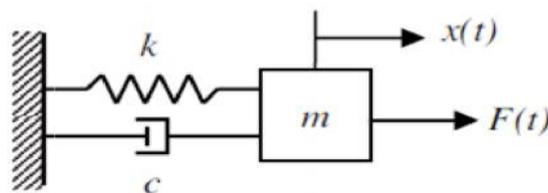


Figure II.1 : système vibratoire à un ddl

L'équilibre dynamique d'un tel système se traduit par l'équation suivante :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + ku = F(t) \quad (\text{II.1})$$

Dans le cas d'une vibration libre après l'arrêt de l'excitation c'est-à-dire $F(t)=0$ on va écrire :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + ku = 0 \quad (\text{II.2})$$

La solution de l'équation (II.2) sera de la forme

$$u = Ae^{rt} \quad (\text{II.3})$$

Où A et r sont des constantes.

En portant (II.2) dans (II.3), on obtient l'équation caractéristique

$$Mr^2 + Cr + k = 0 \quad (\text{II.4})$$

Qui a comme solution :

$$r_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m}} \quad (\text{II.5})$$

« u » se met donc sous la forme :

$$u = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad (\text{II.6})$$

$$\text{En désignant par : } \alpha = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{II.7})$$

La pulsation naturelle (rad /s) :

$$\text{Ou bien : } r_{1,2} = \pm \alpha \omega \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (\text{II.8})$$

Avec $\alpha = \frac{c}{2m\omega}$ est un coefficient d'amortissement et la solution de cette équation dépend des valeurs de α :

- Dans le cas ou $\alpha < 1$

$$u = A_1 e^{(-\alpha\omega + j\omega\sqrt{1-\alpha^2})t} + A_2 e^{(-\alpha\omega - j\omega\sqrt{1-\alpha^2})t} \quad (\text{II.9})$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$u = A_1 e^{-\alpha\omega t} \cdot \sin(\omega_\alpha t + \vartheta) \quad (\text{II.10})$$

$\omega_\alpha = \omega\sqrt{1-\alpha^2}$ pulsation propre du système amorti.

Les constantes A_1 et ϑ sont déterminées à partir des conditions initiales.

Nous pouvons déterminer expérimentalement le facteur d'amortissement à l'aide du décrément logarithmique δ défini comme suit :

$$\delta = Ln \frac{x_1}{x_2} = Ln \frac{e^{-\alpha.\omega.t1}}{e^{-\alpha.\omega.t2}} = Ln. e^{-\alpha.\omega.t} \quad (\text{II.10})$$

$$\text{Donc : } \delta = \alpha \cdot \omega \cdot T = \frac{2 \cdot \pi \cdot \omega}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (\text{II.11})$$

La solution (II.11) représente un mouvement harmonique à amplitude décroissante (fig.II.2).

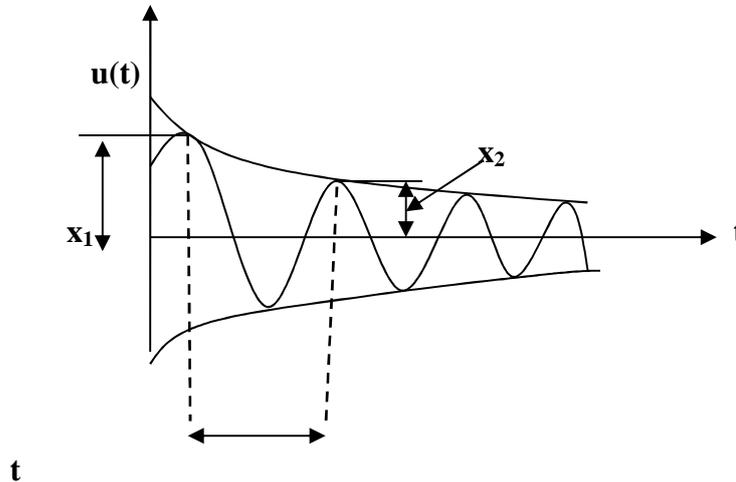


Figure II.2 : Allure de mouvement harmonique à amplitude décroissante

Si $\alpha < 1$

L'amplitude du système amorti, diminue par rapport au système non amorti au cours du temps

- Dans le cas ou $\alpha = 1$

$$r_{1,2} = -\omega$$

Le mouvement est dit apériodique critique et la solution du système est :

$$u = A_1 e^{-\omega t} (A_2 + A_1 t) \quad (\text{II.13})$$

- Dans le cas ou $\alpha > 1$:

Alors le mouvement est dit apériodique. Dans ce cas la solution devient :

$$u = A_1 e^{(-\alpha\omega + j\omega\sqrt{\alpha^2 - 1})t} + A_2 e^{(-\alpha\omega - j\omega\sqrt{\alpha^2 - 1})t} \quad (\text{II.14})$$

1.4. Etude des systèmes à n degrés de liberté

Dans cette partie nous présenterons les méthodes de résolutions Dans le cas de systèmes à plusieurs degrés de libertés. Le système d'équations différentielles du mouvement peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (\text{II.15})$$

Les matrices [M], [C] et [K] sont obtenus à partir de l'équation des forces (Newton) ou de l'écriture des énergies.

Dans le cas d'un système libre non amorti, l'équation (II.15) devient :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (\text{II.16})$$

Dans le cas de l'équation (II.15), nous pouvons découpler ces équations différentielles de mouvement en pré-multipliant par $[\phi]^t$ et multipliant par $[\phi]$ tel que $[\phi]$ est le vecteur propre normalisé :

$$[\phi]^t [M][\phi]\{\ddot{x}\} + [\phi]^t [K][\phi]\{x\} = \{0\} \quad (\text{II.16})$$

$$\tilde{M}\{\ddot{x}\} + \tilde{K}\{x\} = \{0\} \quad (\text{II.17})$$

Tel que : \tilde{M} et \tilde{K} les matrices de masse et de raideur modales.

De la manière dont sont définis les déplacements, la matrice de masse $[M]$ est diagonal et le système d'équations différentielles de mouvement est découplé initialement. Il peut être également possible de découpler élastiquement le système d'équation par un choix approprié des coordonnées utilisées.

Le découplage est une propriété de système de coordonnées utilisées il n'est pas une propriété caractéristique du système physique, il est alors possible de choisir un système de coordonnées particulier qui pourrait découpler le système d'équations initialement et élastiquement.

Supposons que nous avons établi le système d'équations différentielles (II.16) les solutions particulières harmoniques sont de la forme :

$$\{x\} = \{q\} e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (\text{II.18})$$

Nous obtenons

$$([K] - \omega^2[M])\{q\} = \{0\} \quad (\text{II.19})$$

L'équation (II.19) est le problème aux valeurs propres des systèmes conservatif

Ce système admet des solutions si :

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (\text{II.20})$$

Si le système est à « n » degrés de libertés, cette équation nous donne (i) valeurs propres ω_i . A chaque pulsation ω_i correspond un mode propre $\{q_i\}$. En remplaçant ω_i dans l'équation (II.20), la solution particulière associée à ω_i s'écrit :

$$\{x\} = \{q\} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (\text{II.21})$$

Plus généralement la solution du système s'écrit :

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n A_{ji} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (\text{II.22})$$

Où « n » est le nombre de degrés de libertés du système.

2. Méthode des éléments finis en dynamique

Principalement, les méthodes de détection des endommagements dans les structures mécaniques sont de deux types : celle utilisant un modèle analytique de leur comportement et celle n'en nécessite pas.

Pour le premier type de méthodes, il est présélectionné un ensemble de paramètres définissant le modèle de la structure étudiée et les mécanismes d'endommagements considérés.

L'état d'endommagement est alors déterminé par l'intermédiaire des variations des valeurs de ces paramètres. Typiquement, des modèles éléments finis sont utilisés.

2.1. Différentes étapes de l'écriture d'un élément

1. Choix de la géométrie de l'élément :
 - 1D segments droits ou courbes
 - 2D triangles, quadrangles à bords droits ou courbes
 - 3D tétraèdres, pyramides, prismes, cubes droits ou courbes
2. Choix des fonctions de base et des inconnues
3. Expression des champs et de leurs dérivées
4. Calcul de la matrice de raideur élémentaire

5. Calcul des vecteurs forces généralisés élémentaires associé aux différents cas de chargement

2.2. Différentes étapes de la résolution d'un problème

1. Maillage : découpage du domaine en éléments géométriques
2. Choix de la formulation : Choix des fonctions de base
3. Calcul des matrices de raideur : calcul des matrices élémentaires puis assemblage de la Matrice globale.
4. Calcul du vecteur des forces généralisées.
5. Prise en compte de CL sur les inconnues.
6. Résolution du système linéaire.
7. Détermination du champ en tout point.
8. Calcul des dérivées sur les éléments.
9. Détermination des réactions aux limites.

2.3. Principe de la méthode des éléments finis en dynamique

Le principe de base de la méthode des éléments finis consiste à subdiviser la structure continue en sous-domaines de formes relativement simple appelés (éléments finis), ce qui conduit à définir une approximation de la solution non pas pour l'ensemble de la structure mais pour chacun de ses éléments constitutif. Le choix des coordonnées généralisées de paramètres physiques, permet alors d'exprimer simplement les conditions de continuité de la solution entre éléments adjacents ainsi que les conditions d'équilibre inter-éléments et finalement de résoudre le problème à l'aide de la méthode des déplacements.

Il ya plusieurs sortes de formulations d'éléments finis en mécanique des structures : en déplacement, en contraintes, en hybrides et celles mixtes (à plusieurs champs).

Dans la démarche fondamentale de la méthode des éléments, il faut distinguer trois aspects :

- La discrétisation de la structure en éléments.
- Le choix d'une approximation pour chaque élément.
- Le choix des coordonnées généralisées (physique) (déplacements nodaux) pour chaque élément.

En dynamique, l'une des méthodes les plus utilisée est celle basé sur une discrétisation spatiale par éléments finis de type déplacements, permettant l'étude du comportement dynamique d'une structure par la connaissance des déplacements aux nœuds en fonctions du temps est la méthode des déplacements. Nous pouvons mettre en évidence les différents étapes de calcul comme suit de cette méthode considérer successivement :

- La discrétisation spatiale du domaine en éléments finis.
- La formulation au niveau de l'élément.
- La formulation globale après assemblage.

Ces trois aspects sont illustrés comme suit :

2.3.a. Discrétisations de la structure (choix d'un maillage)

Nous subdivisons la structure ou le milieu continu à étudier (*Figure II.3*) en éléments finis de forme de géométrie simple, de manière à approximer le mieux possible sa géométrie.

Dans cet exemple, il s'agit d'élément plan de forme triangulaire.

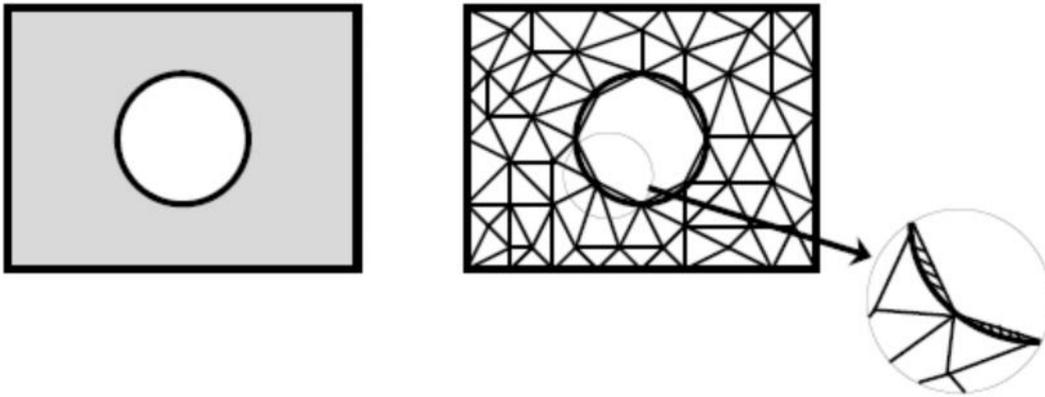


Figure II.3 : Discrétisation de la structure

2.3.b. Approximation du champ des déplacements (Représentation polynomiale)

Cette forme de représentation convient bien à la plupart des éléments à deux et trois dimension, en raison de sa souplesse d'accommodation à toutes les formes géométriques, que ce soit dans l'état au repos ou dans l'état déformé.

Dans le cas général l'écriture est :

$$\Delta = [p] \cdot \{a\} \quad (\text{II.23})$$

Δ : Déplacement d'un point, peut comporter jusqu'à trois composantes : u, v et w, selon les axes x, y et z; on peut donc attribuer à chacune de ces composantes une expression polynomiales auquel cas [p] serait une matrice rectangulaire à trois ligne.

$\{a\}$: vecteur des coordonnées généralisées de l'élément.

Nous avons donc :

$$u = a_1 + a_2 x = (1 \ x) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

$$v = a_3 + a_4 y = (1 \ y) \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

$$w = a_5 + a_6 z = (1 \ z) \begin{Bmatrix} a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

On aura :

$$\Delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

2.4. Rappel sur l'énergie de déformation

L'expression générale de l'énergie de déformation d'un $i^{\text{ème}}$ élément s'écrit comme suit:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^t \sigma \varepsilon d\tau \quad (\text{II.28})$$

le vecteur déplacement d d'un point de l'élément est relié au vecteur δ regroupant tous les déplacements nodaux de l'élément par l'intermédiaire d'une matrice N , résultant de l'hypothèse sur les déplacements à l'intérieur de l'élément. Ceci donne une relation de type :

$$d = N \delta \quad (\text{II.29})$$

Par dérivation, l'équation (II.29) devient :

$$\varepsilon = B \delta \quad (\text{II.30})$$

Dans la mesure où il n'y a pas de contraintes initiales, les contraintes et les déformations sont reliées par :

$$\sigma = D \varepsilon \quad (\text{II.31})$$

Où D est une matrice carrée symétrique dont les termes dépendent des caractéristiques mécaniques des matériaux, en général le module de Young E et le coefficient de poisson ν . En utilisant les équations 8 et 9, l'équation 6 devient :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{\tau} (B \delta)^t D B \delta d\tau \\ &= \frac{1}{2} \delta^t \left[\int_{\tau} B^t D B d\tau \right] \delta \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Et elle peut se mettre sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \delta^t K \delta \quad (\text{II.33})$$

K : la matrice de raideur de l'élément considéré.

$$K = \int_{\tau} B^t D B d\tau \quad (\text{II.34})$$

2.5. Rappel sur l'énergie cinétique :

L'expression de l'énergie cinétique d'un élément est :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V^2 d\tau \quad (\text{II.35})$$

En général $V = \dot{d}$, et compte tenu de l'équation (II.29):

$$V = N \dot{\delta} \quad (\text{II.36})$$

En reportant l'équation (II.36) dans l'équation (II.35) :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho (N\dot{\delta})^t N\dot{\delta} d\tau \quad (\text{II.37})$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t \left[\int_{\tau} \rho N^t N d\tau \right] \dot{\delta} \quad (\text{II.38})$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t m \dot{\delta} \quad (\text{II.39})$$

Avec m est la matrice de masse qui s'écrit comme suit :

$$m = \int_{\tau} \rho N^t N d\tau \quad (\text{II.40})$$

2.6. Méthodes directes de formulation des éléments

Dans la méthode directe on formule les éléments en combinant directement les trois systèmes d'équations élastiques (les équations de l'équilibre, les équations déformations-déplacements, et les équations intrinsèques du matériau)

Cette méthode est particulièrement utile pour préciser les rapports fondamentaux existant entre l'approximation par éléments finis et la structure réelle.

La méthode directe présente des caractéristiques qui sont communes à toutes les manières d'envisager la formulation des éléments ; en particulier les transformations de contraintes à forces et de déplacements à déformations.

2.7. Formulation des matrices élémentaire de raideur et de masse

2.7.1. Cas d'une barre de traction-compression :

a- Matrice de raideur

L'élément représenté sur la (Figure I.4) a deux nœuds et un degré de liberté par nœud : u déplacement longitudinal.

Le vecteur des déplacements nodaux s'écrit : $\delta = \{u_1, u_2\}^T$ (II.41)

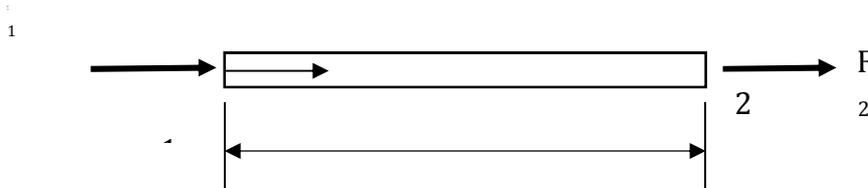


Figure II.4: barre de traction-compression

Pour dérivé la variation unidimensionnelle de u entre les deux extrémités nous choisirons une représentation polynomiale.

Comme il ya deux déplacements nodaux, la fonction de déplacement ne comprend que deux constantes.

$$u = a_1 + a_2 x = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.42)}$$

Les constantes a_1 et a_2 sont déduites des valeurs de u aux deux nœuds.

Nous cherchons à transformer cette représentation en une autre qui se rapport aux degrés de liberté physique u_1 et u_2 .

$$A ; x=0 \rightarrow u_1 = a_1 + a_2 \cdot 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.43)}$$

$$x=l \rightarrow u_2 = a_1 + a_2 l = \begin{pmatrix} 1 & l \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.44)}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.45)}$$

Qui s'écrit de manière générale comme suit: $\{\Delta\} = [B] \{a\}$ (II.46)

$$\{a\} = [B]^{-1} \{\Delta\} \quad \text{(II.47)}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.48)}$$

En substituant dans l'équation (I.2.6) nous trouvons :

$$u = \left(1 - \frac{x}{l}; \frac{x}{l}\right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = (N_1 \ N_2) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.49)}$$

$$\text{Soit, en notation générale : } \Delta = [p] [B]^{-1} \{\Delta\} = N \{\Delta\} \quad (\text{II.50})$$

$(1 - \frac{x}{l}) = N_1$ et $\frac{x}{l} = N_2$ sont appelées fonctions de déformée du champ des déplacements car ce sont ces fonctions qui permettent par leur combinaison d'exprimer l'état déformé de l'élément.

On peut dériver l'équation (II.49) et invoquer l'équation (II.50) pour parvenir à la relation finale recherchée.

$$\text{On a : } \varepsilon = \varepsilon_x = u' = \frac{du}{dx} = (0 \ 1) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

→ C'est la dérivée de l'équation (II.49), pour laquelle la notation générale est :

$$\varepsilon = [C] \{a\} \quad (\text{II.52})$$

$$\text{Et par l'équation 25 : } \varepsilon = u' = \frac{1}{l} (0 \ 1) \begin{bmatrix} l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ l & l \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

On peut également dériver l'équation (II.53) directement et obtenir :

$$\varepsilon = u' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ l & l \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.54})$$

$$\sigma = \sigma_x = \mathbf{E} \varepsilon \quad (\text{II.55})$$

En utilisant l'équation (II.53) :

$$\sigma_x = E \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ l & l \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.56})$$

$$\text{Soit : } \sigma = [E] [D] \{ \Delta \} \quad (\text{II.57})$$

La dernière étape c'est la transformation des contraintes en force nodales, ces dernières sont :

$$\{F\} = (F_1 \ F_2)^T \quad (\text{II.58})$$

Et on obtient chaque composante en multipliant la contrainte par l'aire A de la section droite.

Avec F_1 agissant dans la direction opposée aux σ_x positifs nous avons

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_x \quad (\text{II.59})$$

$$\text{Soit : } \{F\} = [A] \{ \sigma \} \quad (\text{II.60})$$

Et par introduction de l'équation (II.57) :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = A E \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ l & l \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.61})$$

Nous parvenons ainsi à l'expression des équations de rigidité de l'élément :

$$\{F\}^e = [K]^e \{u\}^e \quad (\text{II.62})$$

Ou la matrice de rigidité élémentaire s'écrit :

$$[K]^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{II.63}$$

b-Matrice de masse

A partir de l'équation (II.49) :

$$N = \left(1 - \frac{x}{l}; \frac{x}{l} \right) \tag{II.64}$$

D'où on a :

$$T = \frac{1}{2} \rho S \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix}^t \int_0^l \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 & \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \tag{II.65}$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho S l}{6} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \tag{II.66}$$

Et par identification, la matrice de masse est :

$$m = \frac{\rho S l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{II.67}$$

2.7.2. Cas d'une poutre de flexion

2.7.2.a .Matrice de raideur

La marche à suivre est à peu près la même que dans de la barre de traction-compression, mais on trouve tout de même une différence sensible dans le type de degrés de liberté à spécifier ; une autre différence réside dans la variation de champ des déformations au sein de l'élément.

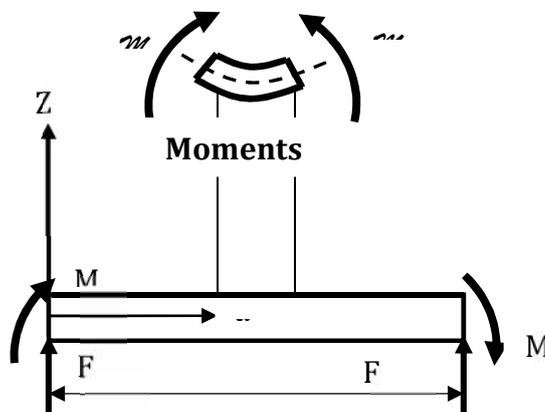


Figure II.5 : élément poutre de flexion

Nous négligeons la déformation d'effort tranchant. Il nous faut définir les déplacements transversaux des extrémités, w_1 et w_2 , et les déplacements angulaires θ_1 et θ_2 ; ces derniers sont égaux à l'opposé de la pente de la fibre neutre puisqu'une rotation positive (ici dans le sens des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique)) provoque un déplacement transversal négatif, donc :

$$\begin{aligned} A ; x=0 \rightarrow \theta_1 &= -\frac{dw}{dx} \\ x=l \rightarrow \theta_2 &= -\frac{dw}{dx} \end{aligned} \quad \text{(II.68)}$$

Ainsi :

$$\{ \} = (w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2)^T \quad \text{(II.69)}$$

Nous choisissons un polynôme pour décrire le champ des déplacements , il est défini par w .

Nous avons quatre degrés de liberté, il nous faudra donc une cubique :

$$w = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = (x^3 \ x^2 \ x \ 1) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.70)}$$

$$A ; x=0 \quad w_1 = a_4 = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.71)}$$

$$A ; x=0 \quad \theta_1 = -\frac{dw}{dx} = -a_3 = (0 \ 0 \ -1 \ 0) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{(I.72)}$$

$$A ; x=l \rightarrow w_2 = a_1 l^3 + a_2 l^2 + a_3 l + a_4 = (l^3 \ l^2 \ l \ 1) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.73)}$$

$$A ; x=l \rightarrow \theta_2 = -\frac{dw}{dx} = -a_1 3l^2 - a_2 2l - a_3 = (-3l^2 \ -2l \ -1 \ 0) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.74)}$$

On aura :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ l^3 & l^2 & l & 1 \\ -3l^2 & -2l & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{(II.75)}$$

Dont l'inverse est

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 2 & -l & -2 & -l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ 0 & -l^3 & 0 & 0 \\ l^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.76})$$

Et en substituant cela dans l'équation (II.75) :

$$w = (N) \{ _ \} \quad (\text{II.77})$$

$$w = (x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1) \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 2 & -l & -2 & -l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ 0 & -l^3 & 0 & 0 \\ l^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.78})$$

$$(N) = (x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1) \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 2 & -l & -2 & -l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ 0 & -l^3 & 0 & 0 \\ l^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.21})$$

$$(N) = (N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4)$$

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = (x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1) \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 2 & -l & -2 & -l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ 0 & -l^3 & 0 & 0 \\ l^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.79})$$

$$N_1 = 1 + 2\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2}$$

$$N_2 = -x \left(\frac{x}{l} - 1 \right)^2$$

$$N_3 = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \quad (\text{II.80})$$

$$N_4 = -x \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{l} \right)$$

En flexion, les déformations sont égales aux courbures w'' (dérivées secondes). d'où :

$$w'' = (N'') \{ _ \} \quad (\text{II.81})$$

Où :

$$N_1'' = -N_3'' = \frac{6}{l^2} \left(2\frac{x}{l} - 1 \right)$$

$$N_2'' = -\frac{2}{l} \left(3\frac{x}{l} - 2 \right) \quad (\text{II.82})$$

$$N_4'' = -\frac{2}{l} \left(3\frac{x}{l} - 1 \right)$$

De même, les contraintes peuvent être assimilées à des moments internes de flexion m , pour lesquels l'équation intrinsèque du matériau peut s'écrire sous la forme :

$$m = EI w'' \quad (\text{II.83})$$

Comme les dérivées secondes du système : (II.82) varient linéairement au sein de l'élément, on peut définir la courbure à l'aide des seules valeurs de w'' aux points 1 et 2 : en vertu de l'équation (II.81).

$$\begin{Bmatrix} w_1'' \\ w_2'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} -6 & 4l & 6 & 2l \\ 6 & -2l & -6 & -4l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} [D] \{ \} \quad (\text{II.84})$$

Si nous examinons l'équilibre des forces nous voyons que les moments internes aux points 1 et 2, m_1 et m_2 , sont positifs lorsqu'ils tendent à produire une courbure positive comme indiqué dans la (Figure I.3) : donc $m_1 = M_1$ et $m_2 = -M_2$. On peut exprimer l'équilibre des moments pour écrire F_1 et F_2 en fonction de m_1 et de m_2 .

$$\begin{aligned} M/2 = m_1 - m_2 + F_1 \cdot l = 0 & \quad (\text{II.85}) \\ \Rightarrow F_1 = \frac{-m_1 + m_2}{l} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M/1 = m_1 - m_2 - F_2 \cdot l = 0 & \quad (\text{II.86}) \\ \Rightarrow F_2 = \frac{m_1 - m_2}{l} = \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

En rassemblant l'ensemble des équations nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ l & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} = [A] \{ \sigma \} \quad (\text{II.87})$$

Comme nous voulons établir une relation entre les deux moments des extrémités et les courbures correspondantes, il faut écrire la loi contraintes-déformations de la flexion (équation 61) sous la forme développée suivante :

$$\{ m \} = [E] \{ w'' \} \quad (\text{II.88})$$

$$m_1 = EI \cdot w_1'' = (EI \quad 0) \begin{Bmatrix} w_1'' \\ w_2'' \end{Bmatrix} \quad (\text{II.89})$$

$$m_2 = EI \cdot w_2'' = (0 \quad EI) \begin{Bmatrix} w_1'' \\ w_2'' \end{Bmatrix} \quad (\text{II.90})$$

$$\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1'' \\ w_2'' \end{Bmatrix} = [E] \{ \varepsilon \} \quad (\text{II.90})$$

En fin, le produit $[K] = [A][E][D]$ nous obtenons la matrice de rigidité élémentaire :

$$\begin{aligned}
 [K]^e &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ l & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4l & 6 & 2l \\ 6 & -2l & -6 & -4l \end{bmatrix} = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & 3l & 6 & 3l \\ -3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix} \\
 [K]^e &= \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & 3l & 6 & 3l \\ -3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix} \tag{II.91}
 \end{aligned}$$

2.7.2.b. Matrice de masse

$$m = \frac{\dots SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{II.91}$$

2.7.3. Cas d'une structure plane à treillis

Les structures à treillis sont constituées par des assemblages de barres liées par des joints de telle sorte que le chargement extérieur soit uniquement par des forces axiales dans les barres. La (Figure I.6) montre un exemple à treillis.

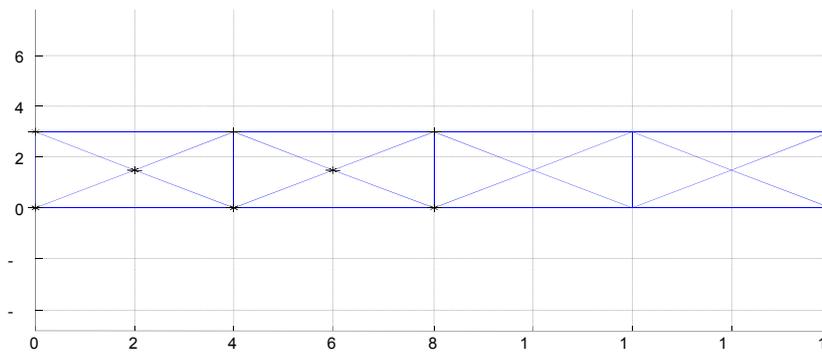


Figure II.6 : système à treillis

2.7.3.1. Matrice de raideur

On calcul pour chaque barre de système sa matrice de raideur :

2.7.3.1.a. matrice de raideur d'une barre a un axe longitudinal

$$[K]^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.7.3.1.b. Matrice de raideur d'une barre inclinée

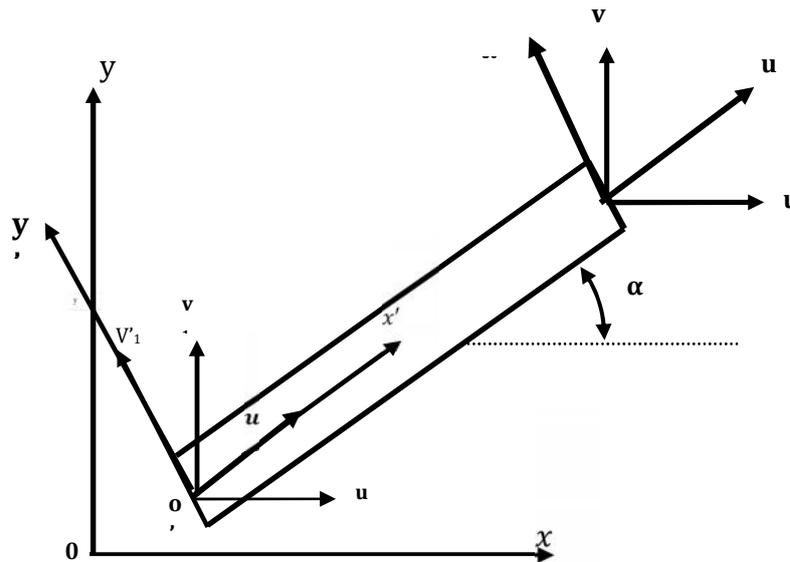


Figure II.7 : Élément barre incliné

La (Figure II.7) montre une barre inclinée d'un angle α par rapport à l'axe horizontal de repère (oxy) . On note (u, v) les composantes du déplacement dans ce système et (u', v') celle de déplacement dans le repère $(o'x'y')$ lié à la barre. On a aussi R la matrice de rotation de repère qui permet de faire le passage du système (oxy) au nouveau système $(o'x'y')$. On peut ainsi écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_1' \\ v_1' \end{cases} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2' \\ v_2' \end{cases} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{cases} u_2 \\ v_2 \end{cases}$$

Avec $c = \cos(\alpha)$ et $s = \sin(\alpha)$

Soit avec la totalité des vecteurs des déplacements élémentaires U_e et U_e'

$$\begin{Bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ u_2' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}; U_e' = R U_e$$

Il reste maintenant de lier le chargement aux déplacements dans le repère (oxy) , on a la relation repère est :

$$F_e' = R F_e$$

Ou bien : $F_e = R^T F_e'$

Avec : $F_e = \langle F_{x1} \ F_{y1} \ F_{x2} \ F_{y2} \rangle^T$

D'où il en résulte :

$$F_e = R^T K_e' U_e' = R^T K_e' R U_e = K_e U_e$$

On obtient ainsi la relation entre les expressions de la matrice de rigidité dans les deux repères :

$$K_e = R^T K_e' R$$

Soit :

$$[K] = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$[K]^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

Après assemblage des matrices de toutes les barres on obtient une matrice de raideur globale pour tout le système.

Chapitre III

MODELE D'ENDOMMAGEMENT ET APPLICATIONS

Partie I : Modélisation en éléments finis ressort de la poutre fissurée

Les travaux de **Chih-Shiung Wang and Lin-Tsang Lee [49]** considère Une poutre avec une fissure ouverte avec non propagation de la profondeur d'une longueur L , hauteur h , et la largeur t . La répartition des contraintes singulière à la pointe de la fissure prend la forme [49]

$$\sigma_x^s = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}},$$

Si on prend comme condition que s agit au niveau du rayon $r=b$ et K_I est le facteur d'intensité de contrainte. La contrainte normale agissant sur la section transversale réduite en passant par la pointe de la fissure est donnée à [49] :

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y,$$

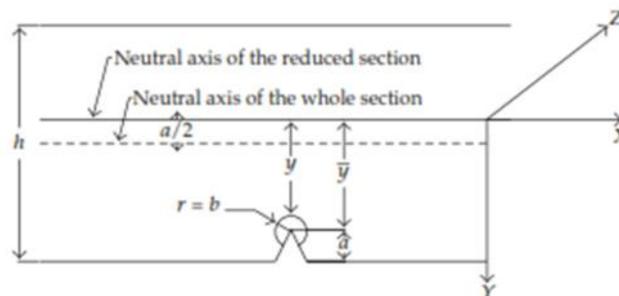


Figure III.1 : Géométrie d'une poutre avec une fissure [49]

Où M est le moment de flexion et I est le moment d'inertie de la section de la poutre comportant la fissure [49].

$$\sigma_x = \frac{12M}{t(h-a)^3} \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} - b \right),$$

$$K_I = \sqrt{2\pi b} \sigma_x = \frac{12M\sqrt{2\pi b}}{t(h-a)^3} \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} - b \right).$$

La distance b peut par l'équilibre des forces le long de l'axe x :

$$\int_0^b \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \int_{\bar{y}-b}^{\bar{y}} \sigma_x dy.$$

La partie gauche de l'intégrale est calculé à partir de l'expression de K_I , et la partie droite a partir de l'expression de σ_x , ce qui nous donne les expressions suivantes [49] :

$$\int_0^b \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \frac{24Mb}{t(h-a)^3} \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} - b \right). \quad \int_{\bar{y}-b}^{\bar{y}} \sigma_x dy = \frac{6Mb}{t(h-a)^3} (h-a-b).$$

La résolution du système précédant nous donne la valeur de $b = \frac{1}{3}(h-a)$, ce qui nous permet de déterminer la valeurs de K_I [49] :

$$K_I = \frac{6M}{th^{3/2}} F\left(\frac{a}{h}\right), \quad F\left(\frac{a}{h}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{27}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-a/h)^3}} = \frac{0.482}{\sqrt{(1-a/h)^3}}.$$

Les déplacements au niveau de la fissure peuvent être assimilés à un ressort rotationnel ce qui réduit le déplacement au niveau de la fissure à la rotation :

$$\theta = \frac{\partial U_T}{\partial M}$$

L'énergie de déformation est donnée par la formule suivante [49] :

$$U_T = \int_0^a \frac{\partial U_T}{\partial a} da = t \int_0^a J da,$$

Où J est la fonction de l'énergie de déformation. Et qui nous donne la valeur de θ [49] :

$$\theta = \frac{\partial}{\partial M} \left[t \int_0^a J(a) da \right].$$

A partir de l'expression de θ on peut définir l'expression du coefficient de flexibilité local C [49] :

$$c = \frac{\partial \theta}{\partial M} = \frac{\partial^2}{\partial M^2} \left[t \int_0^a J(a) da \right], \quad J = \frac{K_I^2}{E'}$$

Après résolution du système l'expression de C s'écrit sous la forme [49] :

$$c = \frac{\partial^2}{\partial M^2} \left[t \int_0^a \frac{K_I^2}{E'} da \right] = \frac{2\pi(1-\nu^2)h \left[1 - (1-a/h)^2 \right]}{9EI(1-a/h)^2},$$

Une écriture simplifiée de c est proposée en fonction de f(a/h) ou est donnée sous forme polynomiale, ci-dessous deux formes approchées de C [49] :

1^{er} forme :

$$c_2 = 6\pi(1 - \nu^2) \cdot \frac{h}{L} \cdot \Phi\left(\frac{a}{h}\right),$$

$$\Phi\left(\frac{a}{h}\right) = 0.6272\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 1.04533\left(\frac{a}{h}\right)^3 + 4.5948\left(\frac{a}{h}\right)^4 - 9.9736\left(\frac{a}{h}\right)^5 + 20.2948\left(\frac{a}{h}\right)^6$$

$$- 33.0351\left(\frac{a}{h}\right)^7 + 47.1063\left(\frac{a}{h}\right)^8 - 40.7556\left(\frac{a}{h}\right)^9 + 19.6\left(\frac{a}{h}\right)^{10}.$$

2^e forme :

$$c_3 = 6\pi\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cdot \frac{h}{L} \cdot f_I\left(\frac{a}{h}\right),$$

$$f_I\left(\frac{a}{h}\right) = 0.6384 - 1.035\left(\frac{a}{h}\right) + 3.7201\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 5.1773\left(\frac{a}{h}\right)^3$$

$$+ 7.553\left(\frac{a}{h}\right)^4 - 7.332\left(\frac{a}{h}\right)^5 + 2.4909\left(\frac{a}{h}\right)^6.$$

Plusieurs travaux ont été exposés pour la modélisation d'un endommagement local au niveau d'une poutre en acier. Une bonne partie des travaux font référence à une approche de la fissure par un ressort dont la raideur dépend essentiellement de la largeur et de la profondeur de la fissure.

Les travaux de **Nandwana and Maiti [43]** (figure 1) exprime la flexibilité locale par une fonction qui dépend la profondeur de la fissure qui peut être exprimée comme suit :

$$C = \frac{72 \pi q^2}{EBH^2} f(q)$$

où

$$f(q) = 0.6384 - 1.035 q + 3.7201 q^2 - 5.1773 q^3 + 7.553 q^4 - 7.332 q^5 + 2.4909 q^6$$

E est le module de Young, B et H sont l'épaisseur et la hauteur de la section, q désigne le rapport entre la profondeur r par rapport à la hauteur H.

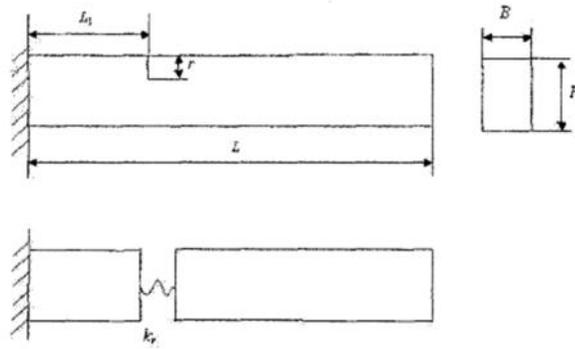


Figure III.1 : mode ressort Nandwana and Maiti de la poutre fissurée.

La raideur locale est exprimée sous forme d'un ressort de rotation K_t dont la forme la plus général est donnée la formule suivante :

$$K_t = \frac{L}{EIC}$$

I est le moment d'inertie de la surface et L est la longueur de la poutre.

Si on Néglige les effets de l'amortissement, l'équation du mouvement qui régit le comportement dynamique d'un tel système est représenté dans l'expression suivante :

$$K(K_r, \beta) - w^2 M = 0 ; \beta = \frac{L1}{L}$$

Il est supposé que l'effet de la fissure soit local et n'affecte pas le reste de la structure, par conséquent en négligeant les effets qui peuvent être incorporés dans la matrice de masses et d'amortissement. Ainsi, que la matrice de rigidité, à l'exception de l'élément confondu, peut être considéré comme inchangée dans une certaine limitation de la taille de l'élément. Par

conséquent, les fréquences ne sont déterminées que par l'emplacement de la fissure et la taille, tel que :

$$f_i(Kr, \beta) = w_i$$

Les fissures sont modélisées comme des ressorts de rotation et le problème vers l'avant est résolu par l'utilisation de la méthode des éléments finis basée sur la théorie d'Euler-Bernoulli des poutres.

Dans le modèle d'élément fini le nœud qui représente la fissure a trois degrés de liberté tandis que les autres nœuds ont deux degrés de liberté.

La géométrie de la poutre fissurée et son modèle d'élément fini sont donnés dans la Figure ci-dessus (Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini)

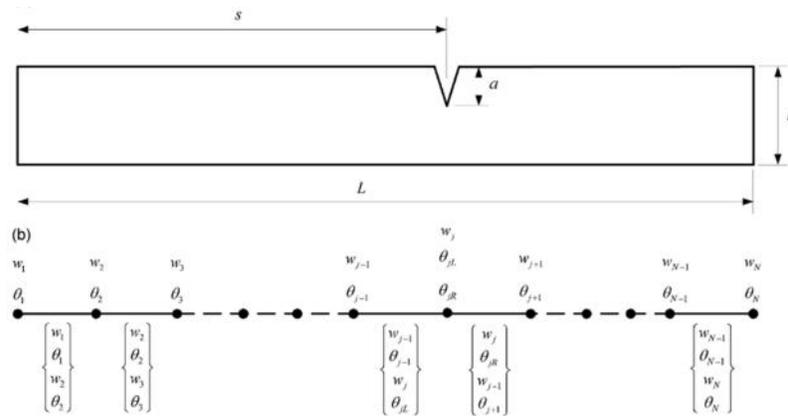


Figure. III.2. Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini

Les rotations de l'élément endommagé sont reliées par la matrice de rigidité avec fissuration K_S .

$$K_S = \begin{bmatrix} Kt & -Kt \\ -Kt & Kt \end{bmatrix}$$

Ostachowicz, M. Krawczuk [42] ont adopté une autre écriture pour définir le changement local de la raideur, Kr est définie par la formule suivantes :

$$Kt = \frac{E B H^2}{72 \pi f(q)} ;$$

Et

$$f(q) = 0.6384 q^2 - 1.035 q^3 + 3.7201 q^4 - 5.1774 q^5 + 7.553 q^6 - 7.3324 q^7 + 2.4909 q^8$$

Cette relation est considérée éligible seulement pour des valeurs de $q \leq 0.6$.

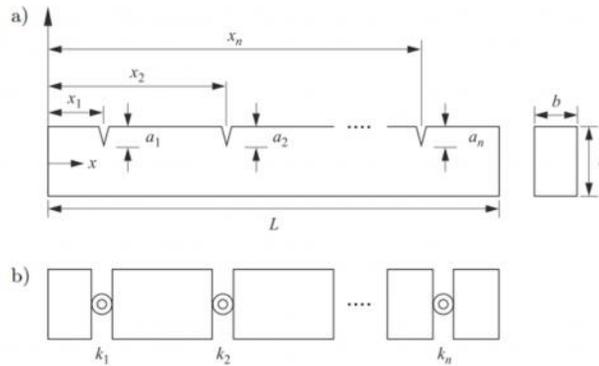


Figure. III.3. Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini

Dimarogonas et Paipetis [44] ont adopté une autre écriture pour définir le changement local de la raideur, Kr est défini par la formule suivante :

$$Kr = \frac{E I}{5.346 h f(q)} ;$$

Et

$$f(q) = 1.8624 q^2 - 3.95 q^3 + 16.375 q^4 - 37.226 q^5 + 76.81 q^6 - 126.9 q^7 + 172 q^8 - 143.97 q^9 + 66.56 q^{10}$$

Shpli and Dado [45] ont adopté une autre écriture pour définir le changement local de la raideur, Kr est définie par la formule suivantes :

$$Kr = \frac{EA}{L + 6f(q)} \quad ;$$

Et

$$f(q) = 1.98 q^2 - 1.910q^3 + 15.919q^4 - 34.823q^5 + 83.282q^6 - 152.564q^7 + 255.078q^8 - 243.972q^9 + 132.878q^{10}$$

Modélisation de fissure Lee [46]

Une poutre en double appuis, de longueur L affecté par deux fissures illustrées dans la figure 1, soumises à des conditions de chargement suivants le modèle Euler. Les deux fissures sur la poutre sont positionnées suivants les paramètres $\beta_1 = \frac{e_1}{L}$ et $\beta_2 = \frac{e_2}{L}$. Les fissures sont modélisées à travers de ressort rotationnel comme illustre la figure, on peut voir aussi la section locale au niveau de la fissure représenter par c qui est la profondeur maximale de la fissure qui est supposé être une section rectangulaire dont la longueur et la largeur sont b de h .

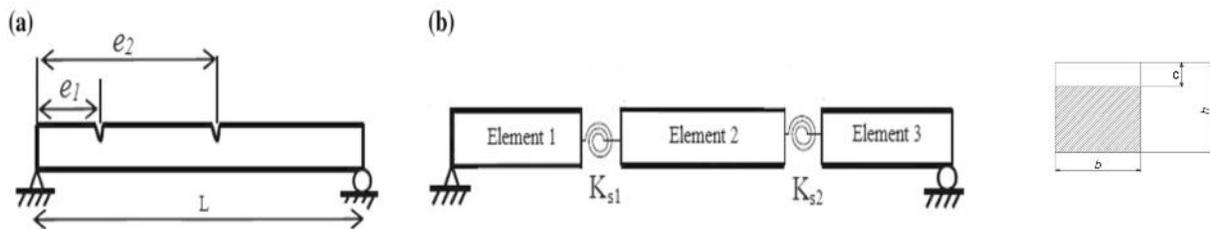


Figure. III.4. Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini [46]

Dans le but de satisfaire la condition de continuité au niveau de la fissure, les déplacements transversaux dans le nœud gauche, j , et le nœud droit, $j + 1$, devrait avoir un

déplacement égale ($U_j = U_{j+1}$), Tandis que les rotations sont reliées à travers la matrice de rigidité de fissure K_s .

$$K_s = \begin{bmatrix} Kt & -Kt \\ -Kt & Kt \end{bmatrix}; \quad Kt = \frac{E b h^2}{72 \pi \alpha^2 f(\alpha)}$$

Et

$$f(\alpha) = 0.6384 - 1.035 \alpha + 3.7201 \alpha^2 - 5.1773 \alpha^3 + 7.553 \alpha^4 - 7.332 \alpha^5 + 2.4909 \alpha^6$$

Où $\alpha = \frac{c}{h}$ représente la taille de la fissure normalisée. K est assemblé dans la matrice de rigidité globale de la structure. Les matrices de masse sont les mêmes.

Les deux premières fréquences naturelles de l'élément proposé est modélisée pour une poutre Euler avec une et deux fissures. La longueur de la poutre est $L = 0,4$ m, section carrée de la poutre est $A = 0,01 \times 0,01$ m², module d'élasticité est supposé $E = 216$ GPa, et la densité du matériau est $\rho = 7650$ kg / m³.

Les résultats obtenues sont comparées à celles des mesures expérimentales rapportées par Yoon et al dans la réf. [47]. Par souci de simplicité, la localisation des fissures est appliquée en utilisant les valeurs adimensionnelles suivantes :

$$\begin{cases} \beta = \frac{c}{L}, & \alpha = \frac{c}{h} & \text{single crack} \\ \beta_i = \frac{c_i}{L}, & \alpha_i = \frac{c_i}{h} & (i = 1, 2) \text{ double crack} \end{cases}$$

La géométrie d'une poutre à plusieurs fissures est donnée dans la figure ci-dessous. Les fissures sont représentées par des ressorts de rotation sans masse, qui sont définie par les Paramètres $\alpha = \frac{c}{h}$ et $\beta_1 = \frac{e_1}{L}$. h et L sont l'épaisseur et la longueur de la poutre. Equation d'un élément de longueur L d'après la théorie d'Euler-Bernoulli est donnée par :

$$[\mathbf{M}]^e \{\ddot{W}\}^e + [\mathbf{K}]^e \{W\}^e = \{F\}^e$$

Ou :

$$[M]^e = \frac{\rho A \Delta L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\Delta L & 54 & -13\Delta L \\ & 4(\Delta L)^2 & 13\Delta L & -3(\Delta L)^2 \\ SYM & & 156 & -22\Delta L \\ & & & 4(\Delta L)^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K]^e = \frac{EI}{(\Delta L)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\Delta L & -12 & 6\Delta L \\ & 4(\Delta L)^2 & -6\Delta L & 2(\Delta L)^2 \\ SYM & & 12 & -6\Delta L \\ & & & 4(\Delta L)^2 \end{bmatrix}$$

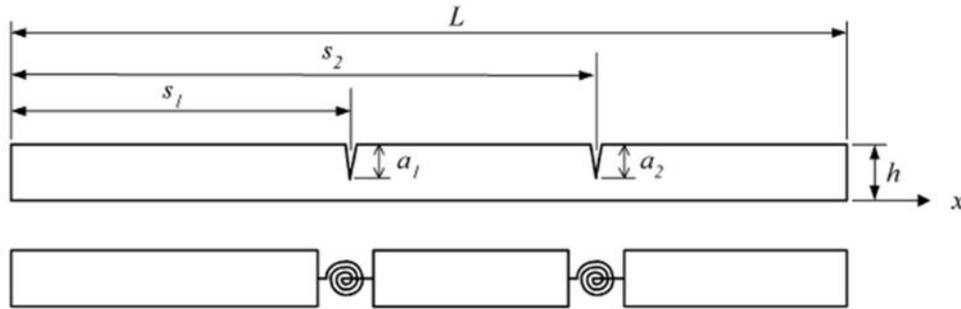


Figure. III.5. Poutre avec une fissure et son modèle d'élément fini [47]

Le ressort de rotation relie les nœuds j et j+1 tel que les déplacements transversaux dans le nœud gauche, j, et le nœud droit, j + 1, devrait avoir un déplacement égale ($U_j=U_{j+1}$), Tandis que les rotations sont reliées à travers la matrice de rigidité de fissure K_s :

$$K_s = \begin{bmatrix} Kt & -Kt \\ -Kt & Kt \end{bmatrix}$$

K_s : matrices de rigidité au niveau de la fissure.

Plusieurs modèles ont été définie pour le calcul de Kt notamment Nandwana and Maiti :

Et

$$Kt = \frac{E B H^2}{72 \pi f(q)} \quad ;$$

$$f(q) = 0.6384 - 1.035 q + 3.7201 q^2 - 5.1773 q^3 + 7.553 q^4 - 7.332 q^5 + 2.4909 q^6$$

Et Dimarogonas and Paipetis par :

$$Kr = \frac{EI}{5.346 hf(q)} ;$$

Et

$$f(q) = 1.8624q^2 - 3.95q^3 + 16.375q^4 - 37.226q^5 + 76.81q^6 - 126.9q^7 + 172q^8 \\ - 143.97q^9 + 66.56q^{10}$$

Les matrices [Me], [Ke] et [Ks] sont assemble pour former les matrices de masses et de raideur globale [M] et [K]. L'équation de mouvement s'écrit sous la forme de :

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{W}\} + [\mathbf{K}]\{W\} = \{F(t)\}$$

La poutre est soumise à une charge sinusoïdale de fréquences ω_i : $\{F(t)\} = \{F^*\} \sin \omega_i t$

Le vecteur déplacement est aussi sous la forme sinusoïdale : $\{U\} = \{U^*\} \sin \omega_i t$.

Si on néglige tout amortissement l'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$([\mathbf{K}] - \omega_i^2 [\mathbf{M}]) \{U^*\} = \{F^*\}$$

Si nous mettons on place une des configurations les plus simples de vibration forcée. Un agitateur est installé à l'extrémité libre de la poutre et excite la poutre à différentes fréquences.

Partie II : Localisation d'endommagement

Indicateur d'endommagement

En utilisant le 1^{er} mode de la structure saine et endommagé, nous proposons un indicateur de localisation d'endommagement comme suite :

$$\text{Indicateur}_j = \left| \frac{\vartheta_{i+1}^{FE} - \vartheta_i^{FE}}{\vartheta_{i+1}^m - \vartheta_i^m} \right| ; i = 1 \text{ to } Nn ; j = 1 \text{ to } N$$

où,

ϑ_i^{FE} représente le déplacement du $i^{\text{ème}}$ nœud du modèle élément fini ;

ϑ_i^m représente le déplacement mesuré du $i^{\text{ème}}$ nœud ;

Nn nombre de nœuds et N le nombre d'éléments finis.

Pour la vérification de la robustesse de cet indicateur plusieurs cas ont été traité.

Application 1 : Un seul endommagement – Poutre encastree-encastree [45]

La première application est celle utilisée par Hu et al [45]. Ils ont utilisé une poutre encastree-encastree en aluminium dans leur expérience, les caractéristiques mécaniques de cette poutre sont :

$$E = 70 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3, \quad \rho = 2.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

Les dimensions de la poutre sont données dans la figure 5. Une fissure a été introduit en découpant deux fissures sur la surface supérieure et inférieure de l'échantillon intact, comme illustré sur la Fig. 5. La profondeur d'une fissure est un quart de l'épaisseur totale de la poutre.

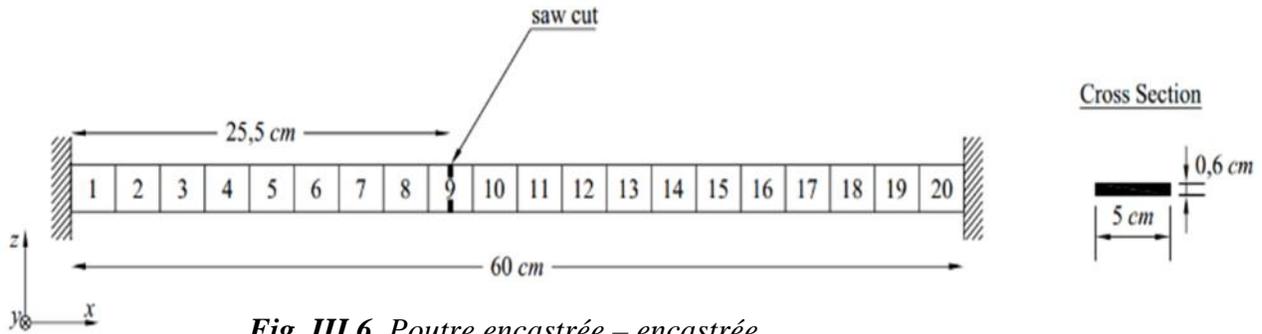


Fig. III.6. Poutre encastrée – encastrée.

La modélisation élément fini a été réalisée en utilisant une poutre de 20 éléments à deux nœuds ; il y a deux DDL, à savoir la déviation ϑ et la rotation θ_x . L'introduction de la fissure dans le calcul élément fini est simulé en utilisant la réduction de la rigidité à la flexion dans le 9 élément, à savoir une réduction 87.5% de I_y .

Les trois premières fréquences de la poutre saine et endommagé sont présentés dans le tableau 1. Dans ce tableau, on peut constater que les résultats numériques concordent avec celles expérimentales très bien pour la poutre saine.

Tableau 1 trois premières fréquences : EF saine, EF [45] et mesurées [45].

| | 1 ^{er} Fréquence | | 2 ^{ème} Fréquence | | 3 ^{ème} Fréquence | |
|---------------------------|---------------------------|------------|----------------------------|------------|----------------------------|------------|
| | Saine | Endommagée | Saine | Endommagée | Saine | Endommagée |
| FEM | 85.791 | | 236.494 | | 463.665 | |
| FEM [45] | 85.969 | 74.710 | 236.657 | 223.760 | 462.977 | 426.146 |
| Expérimentale [45] | 85.726 | 83.984 | 238.572 | 235.792 | 467.694 | 462.712 |

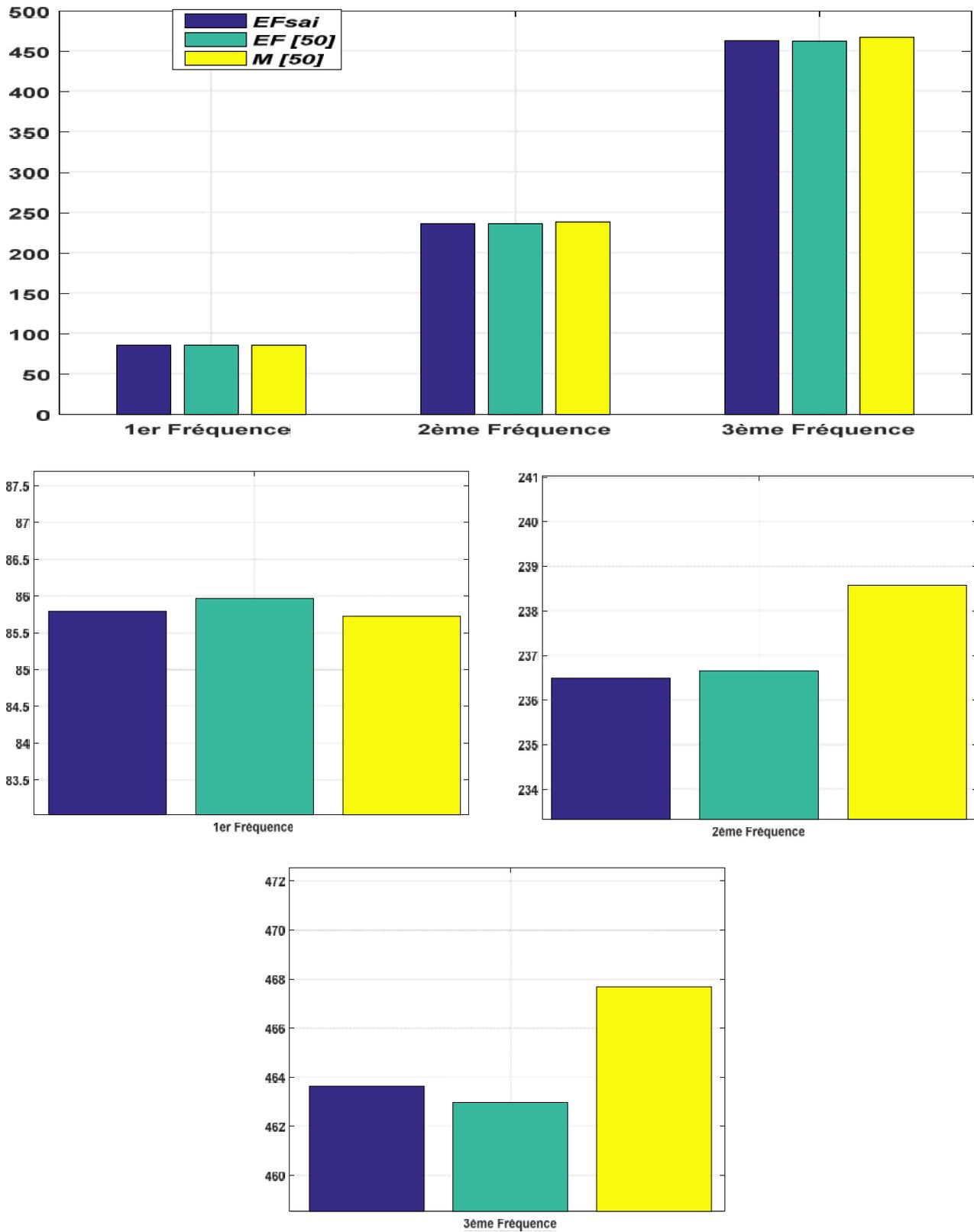


Fig. III.7. Comparaison des trois premières fréquences : EF saine, EF [45] et mesurées [45].

A partir de la figure 7 et du tableau 1, nous pouvons constater que les résultats numériques concordent avec celles expérimentales très bien pour la poutre saine.

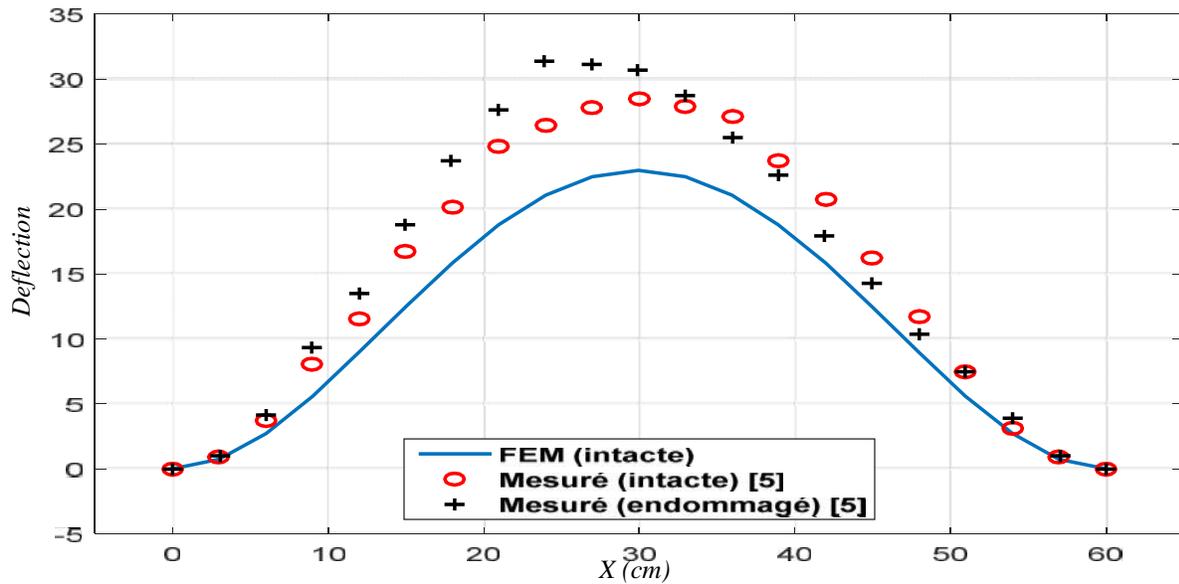


Figure. III.8. Comparaison du 1er mode mesurée (sain et endommagée) et EF

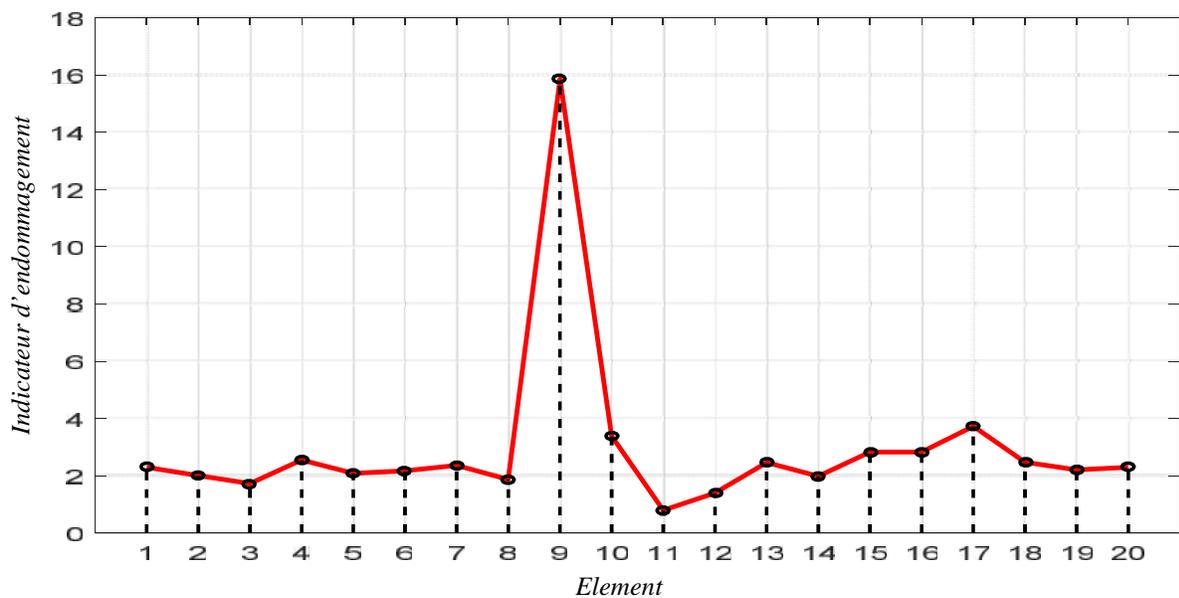


Figure. III.9. Localisation de l'endommagement en utilisant le 1er mode

La figure 8 représente la Comparaison du 1er mode mesuré sain [45], mesuré endommagé [45] et notre modélisation éléments finis.

La figure 9 représente les résultats de l'application de l'indicateur d'endommagement sur la poutre de [45]. Elle montre la présence d'un seul endommagement dans la poutre qui se situe dans le 9^{ème} élément.

Application 2 : Un seul endommagement – Poutre simplement appuyée [46]

Dans cet 2^{ème} application, Yoon et al [46], ont utilisé une poutre simplement appuyée dont ces caractéristiques sont : longueur de $L = 0.8m$, section carrée of $b \times h = 0,02 \times 0.02m^2$, module d'élasticité de $E = 190GPa$, coefficient de Poisson $\mu = 0,3$, et la densité $\rho = 8030 kg/m^3$, avec un endommagement de profondeur de $0.05h$ introduit à $e = 0.3L$ du support fixe.

Tableau. 2. Fréquences naturelles d'une poutre simplement appuyée avec une fissure pour le premier mode

| | <i>T : Theory</i> [28] | <i>E : expérimental</i> [28] | <i>S : FEM_{43éls}</i> | $\frac{\text{Erreur } \%}{100 \times E - S / E}$ |
|------------|---------------------------|---------------------------------|--------------------------------|--|
| f_1 (Hz) | 150.59 | 151.5 | 150.5932 | 0.5985 |
| f_2 (Hz) | 602.37 | 602.5 | 602.3731 | 0.0211 |

Dans le tableau 2, les première et seconde fréquences naturelles obtenues de la poutre sain en utilisant la méthode des élément finis sont comparés avec les mesures expérimentales et les résultats théoriques de Réf. [46]. Les résultats démontrent que la modélisations éléments finis à une excellente précision.

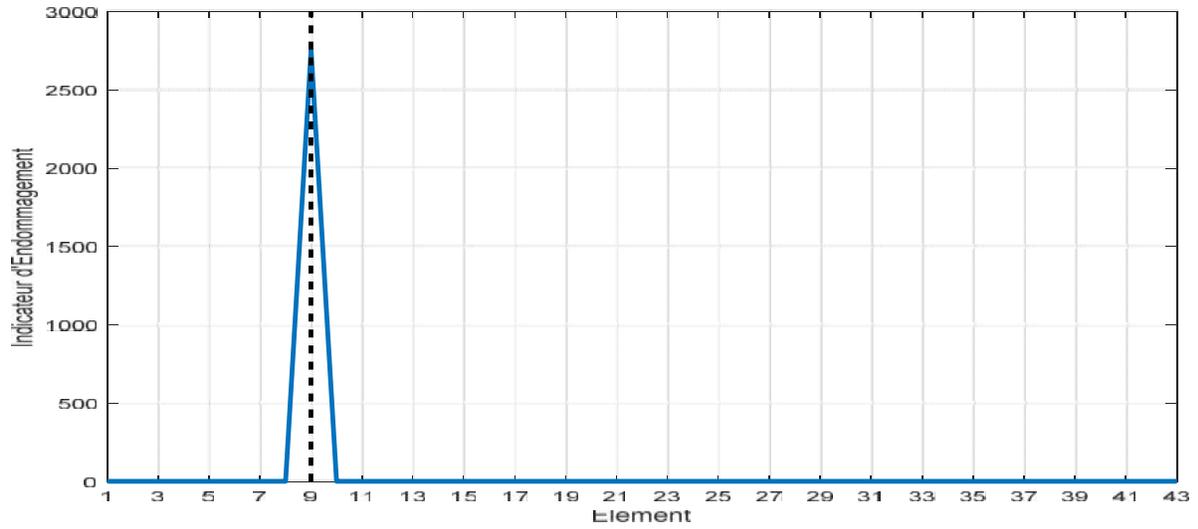
Tableau. 3. Fréquences naturelles d'une poutre simplement appuyée avec une fissure pour le 1^{er} mode

| Position de l'endommagement $\xi_c = x_c/L$ | $H = a/h$ | Fréquence (Hz) | | |
|---|-----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| | | E : Expérimental [46] | S : FEM _{43éls} | $\% E - S /E \times 100$ |
| Poutre sain | | 151.5 | 150.5932 | 0.5985 |
| 0.2 | 0.1 | 151.2 | 151.7883 | 0.3891 |
| | 0.3 | 151.0 | 151.7882 | 0.5220 |
| | 0.5 | 147.8 | 151.7879 | 2.6982 |
| 0.3 | 0.1 | 150.5 | 152.8278 | 1.5467 |
| | 0.3 | 149.8 | 152.8276 | 2.0211 |
| | 0.5 | 143.8 | 152.8272 | 6.2776 |
| 0.5 | 0.1 | 149.2 | 154.2181 | 3.3633 |
| | 0.3 | 146.8 | 154.2176 | 5.0529 |
| | 0.5 | 139.2 | 154.2169 | 10.7880 |

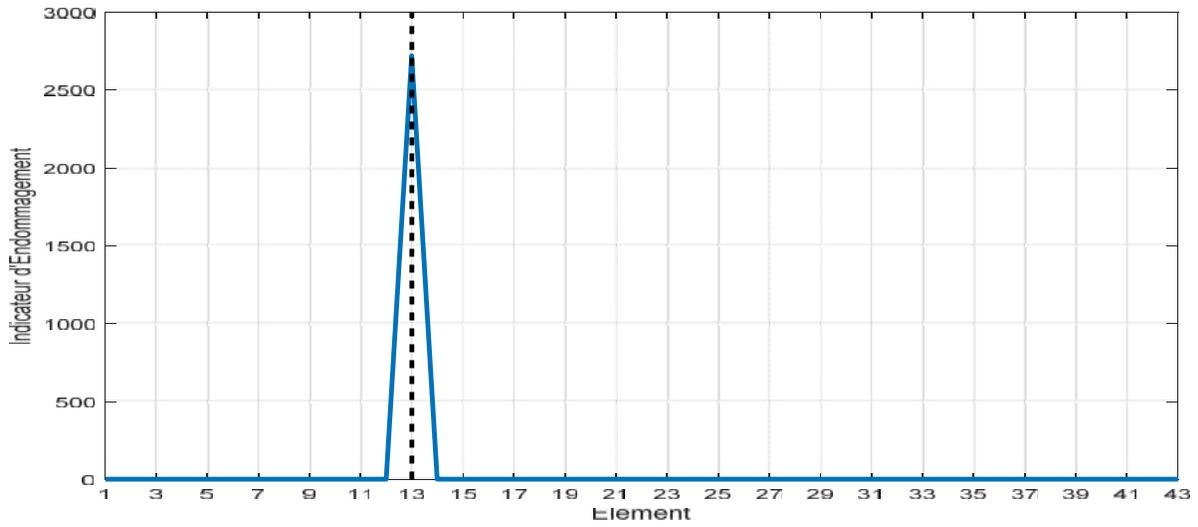
Tableau. 4. Fréquences naturelles d'une poutre simplement appuyée avec une fissure pour le second mode

| Position de l'endommagement $\xi_c = x_c/L$ | Profondeur $H = a/h$ | Fréquence (Hz) | | |
|---|-------------------------|--------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| | | E : Expérimental [51] | S : FEM _{43éls} | Erreur % $ E - S /E \times 100$ |
| Poutre sain | | 602.5 | 602.3731 | 0.0211 |
| 0.2 | 0.1 | 599.8 | 615.3534 | 2.5931 |
| | 0.3 | 588.2 | 615.3521 | 4.6161 |
| | 0.5 | 568.5 | 615.3493 | 8.2408 |
| 0.3 | 0.1 | 604.2 | 616.2852 | 2.0002 |
| | 0.3 | 594.2 | 616.2837 | 3.7165 |
| | 0.5 | 564.5 | 616.2807 | 9.1728 |
| 0.5 | 0.1 | 599.8 | 602.3730 | 0.4289 |
| | 0.3 | 597.8 | 602.3730 | 0.7649 |
| | 0.5 | 593 | 602.3730 | 1.5806 |

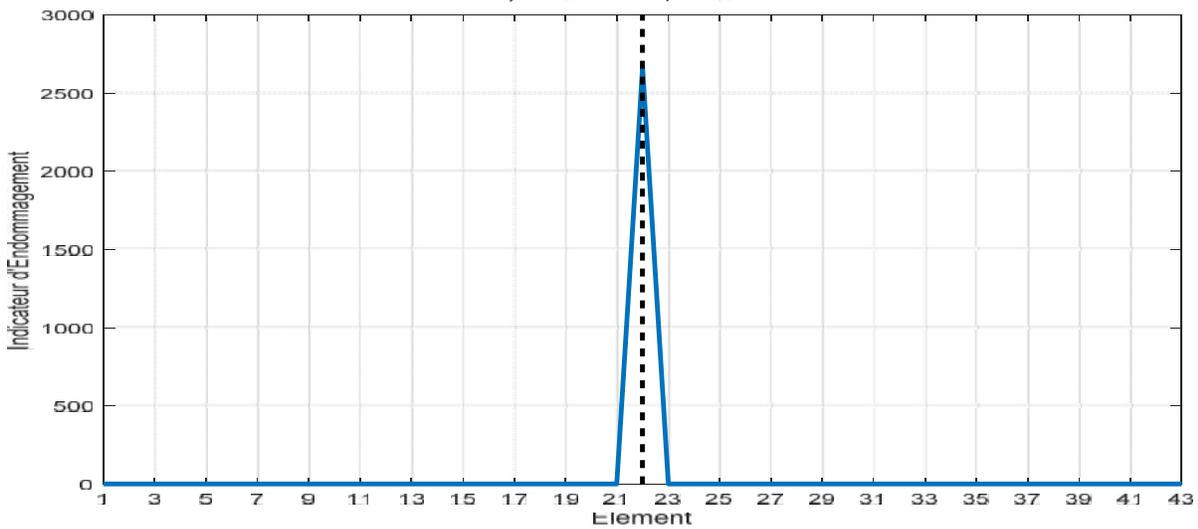
Les première et seconde fréquences naturelles de la poutre simplement supportée ayant un seul endommagement sont présentés dans les tableaux 3 et 4, respectivement. Dans ces tableaux, les valeurs obtenues de la poutre construite par éléments finis sont comparées à celles des mesures expérimentales de Réf. [46]



a) $\frac{\sigma}{\sigma_c} = 0.2$; $\frac{\sigma}{\sigma_c} = 0.1$



b) $\frac{\sigma}{\sigma_c} = 0.3$; $\frac{\sigma}{\sigma_c} = 0.3$



c) $\frac{\sigma}{\sigma_c} = 0.5$; $\frac{\sigma}{\sigma_c} = 0.5$

Figure. III.10. Localisations de l'endommagement dans les différents cas test

Les résultats de l'application de l'indicateur de détection d'endommagement sur la poutre simplement appuyée sont représentés dans la figure 10. Il nous permet de localiser exactement la position de l'endommagement, pour la figure 10.a l'élément endommagé et le 9^{ème} élément positionné à une distance de 0.2 de l'extrémité, pour la figure 10.b l'élément endommagé et le 13^{ème} élément positionné à une distance de 0.3 de l'extrémité et pour la figure 10.c l'élément endommagé et le 22^{ème} élément qui est positionné à une distance de 0.5 de l'extrémité

Application 3 : Un seul endommagement – Poutre Encastrée-Libre [48]

Le troisième exemple, les expériences ont été réalisées pour un poutre cantilever en acier encastré libre (Fig.11) de dimensions : $L \times H \times W = 1 \times 0,02 \times 0,01 \text{ m}^3$. La Figure 2 montre le dispositif expérimental utilisé pour la collecte de paramètres modaux de l'élément examiné.

Différents scénarios d'endommagements ont été analysés. Que les dommages d'une scie découpe située à $L1 = 0,3 \text{ m}$ de la longueur L de la poutre (en partant de l'extrémité encastrée) avec une profondeur de coupe Hc égale à 10% de la hauteur de la poutre a été testé. La largeur de la fissure a été maintenue constante et égale à $Lc = 0,001 \text{ m}$.

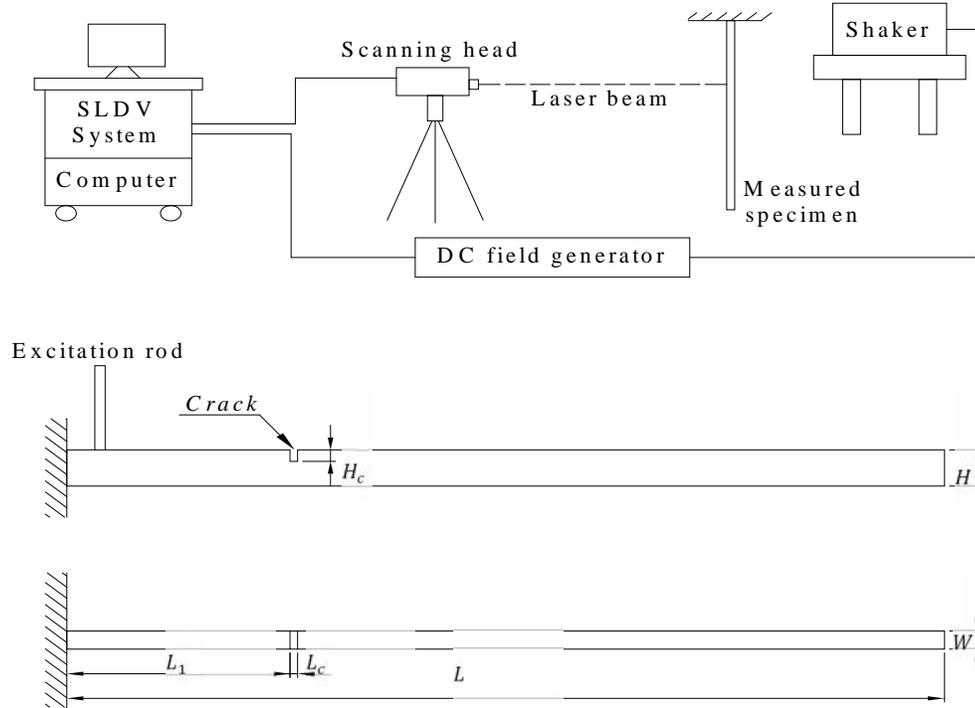


Figure. III.11. Un schéma du dispositif expérimental et de la poutre.

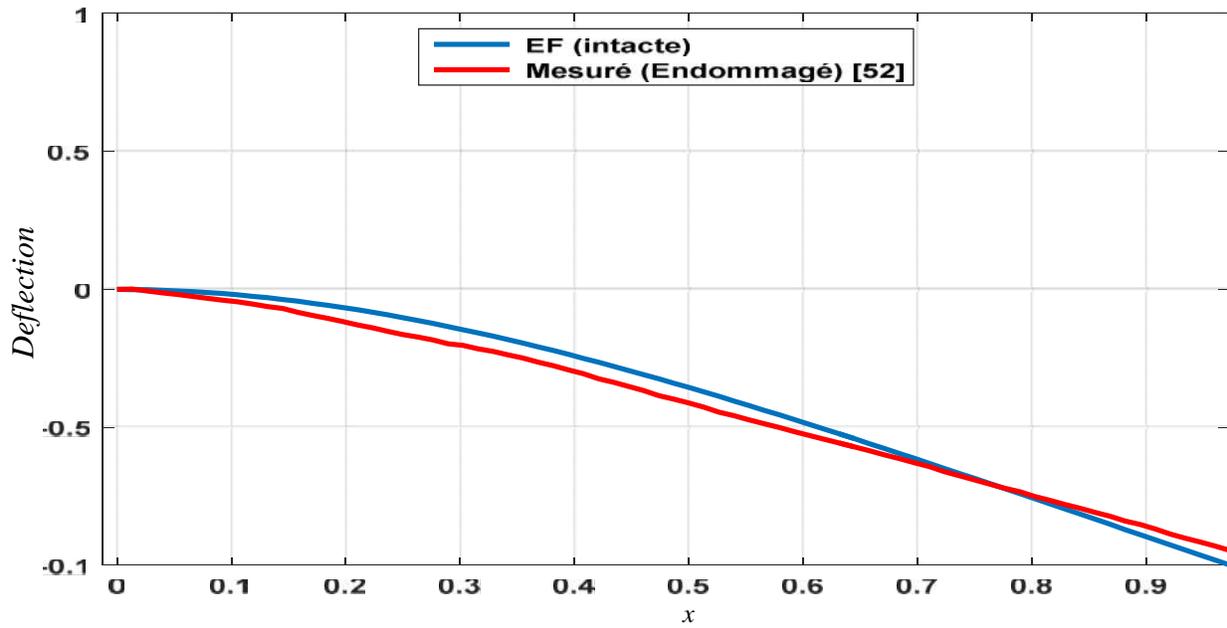


Figure. III.12. Comparaisons du 1er mode mesurée et modélisée par élément finis

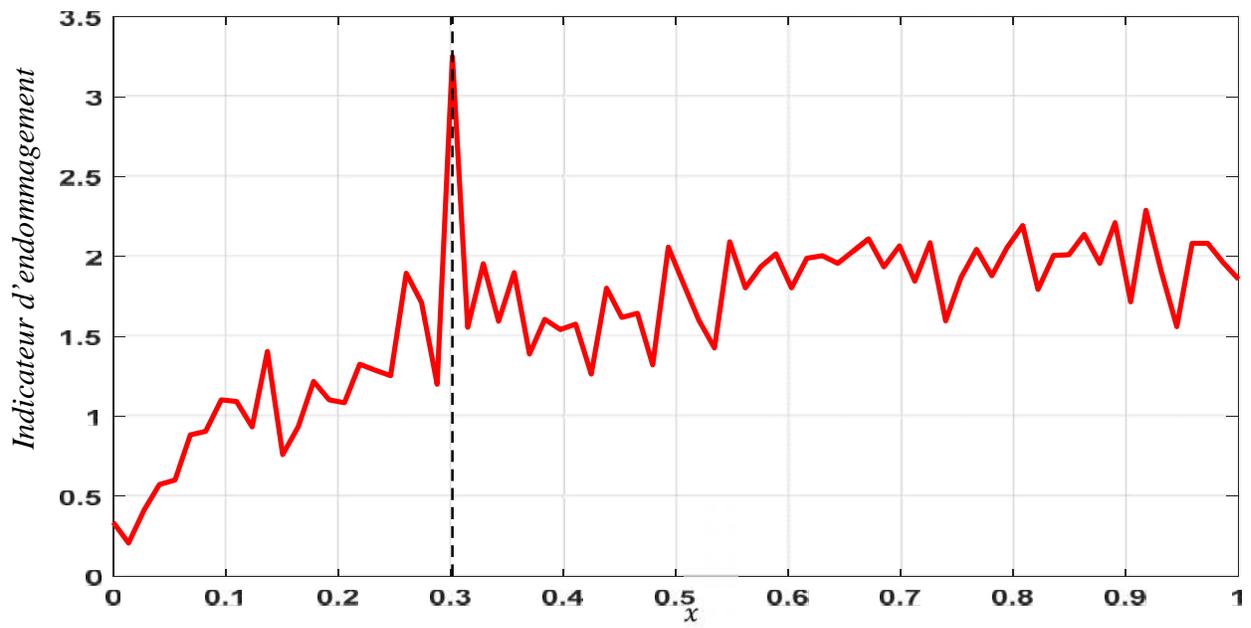


Figure. III.13. Résultat de localisation de l'endommagement de la poutre en utilisant le 1er mode.

Les résultats de l'introductions des différents modèles d'endommagement sont les suivants :

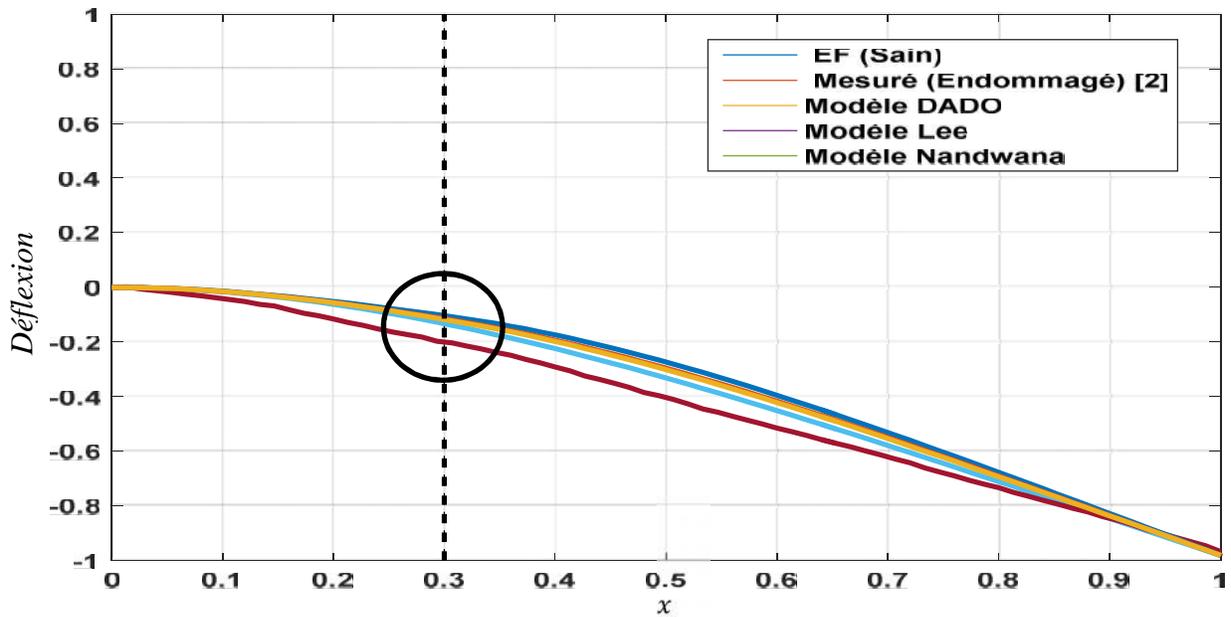


Figure. III.14. Comparaisons du 1er mode mesurée et modélisée par les différents modèles d'endommagement

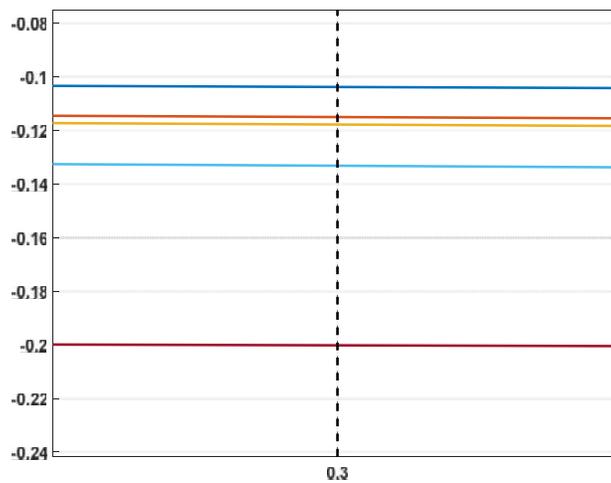


Figure. III.15. Agrandissement

Les résultats de l'introductions des différents modèles d'endommagement avec un changement du taux d'endommagements sont les suivants :

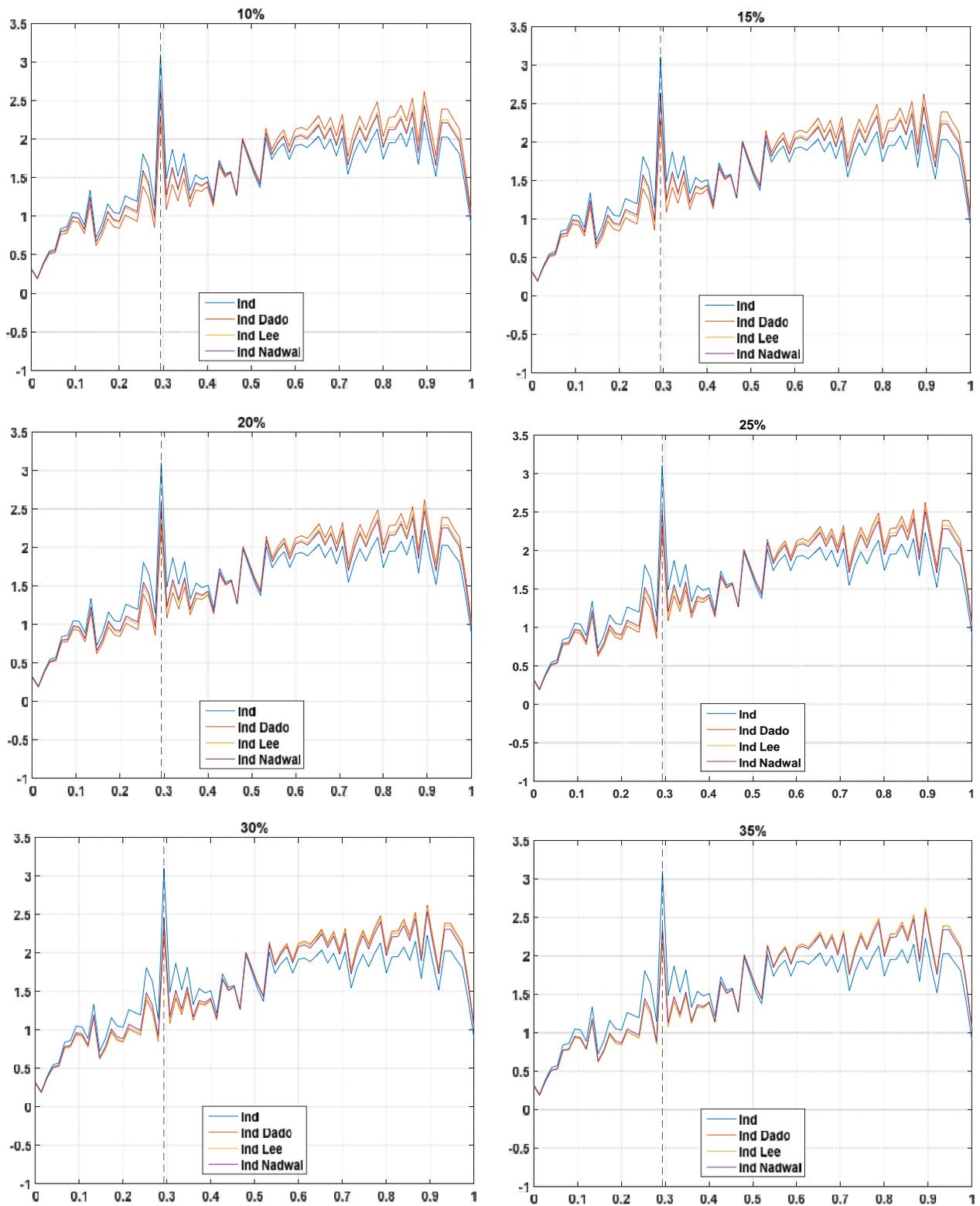


Figure. III.16. Indicateur d'endommagements avec différents taux d'endommagements : de 10% a 35%

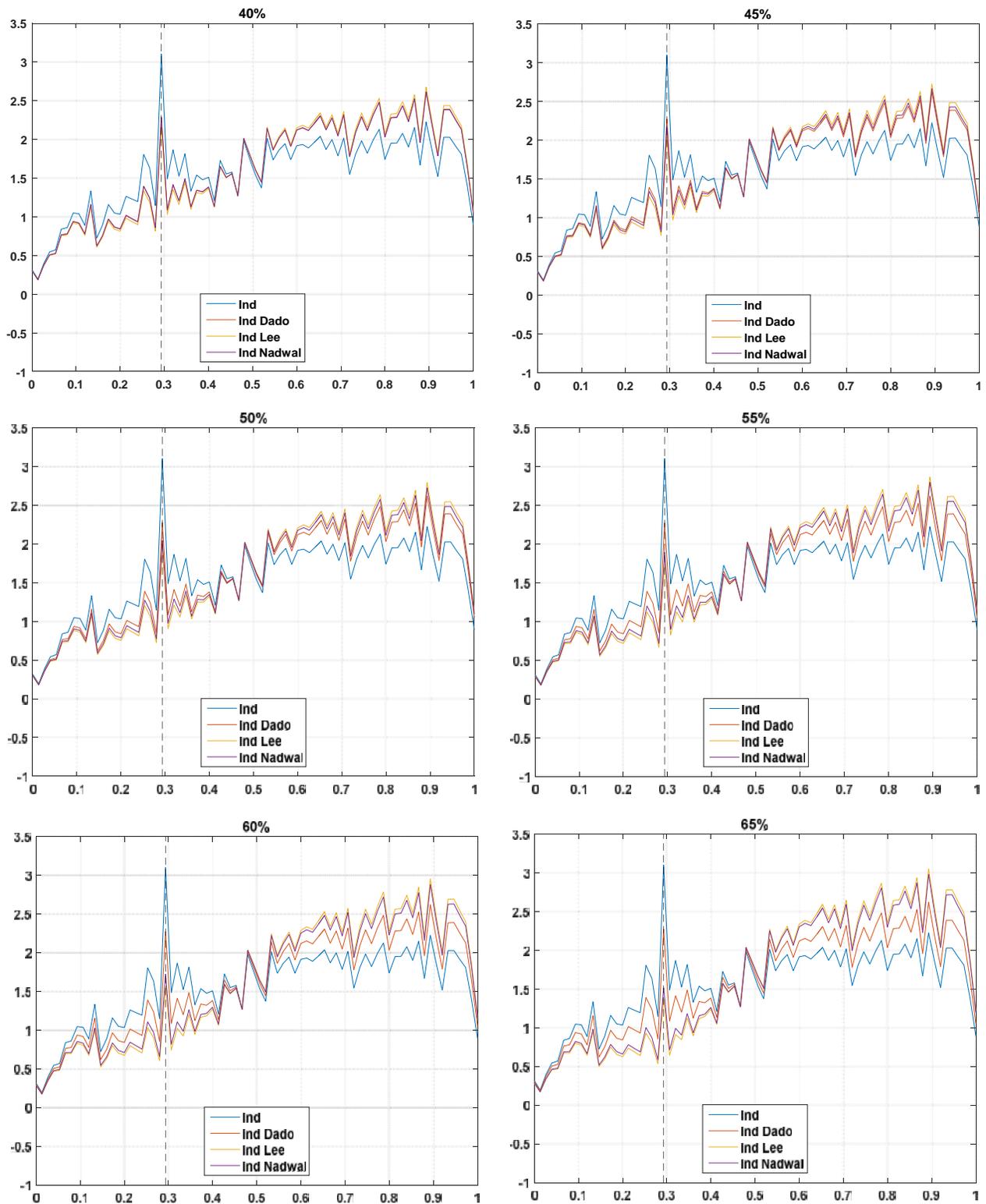


Figure. III.17. Indicateur d'endommagements avec différents taux d'endommagements : de 40% a 65%

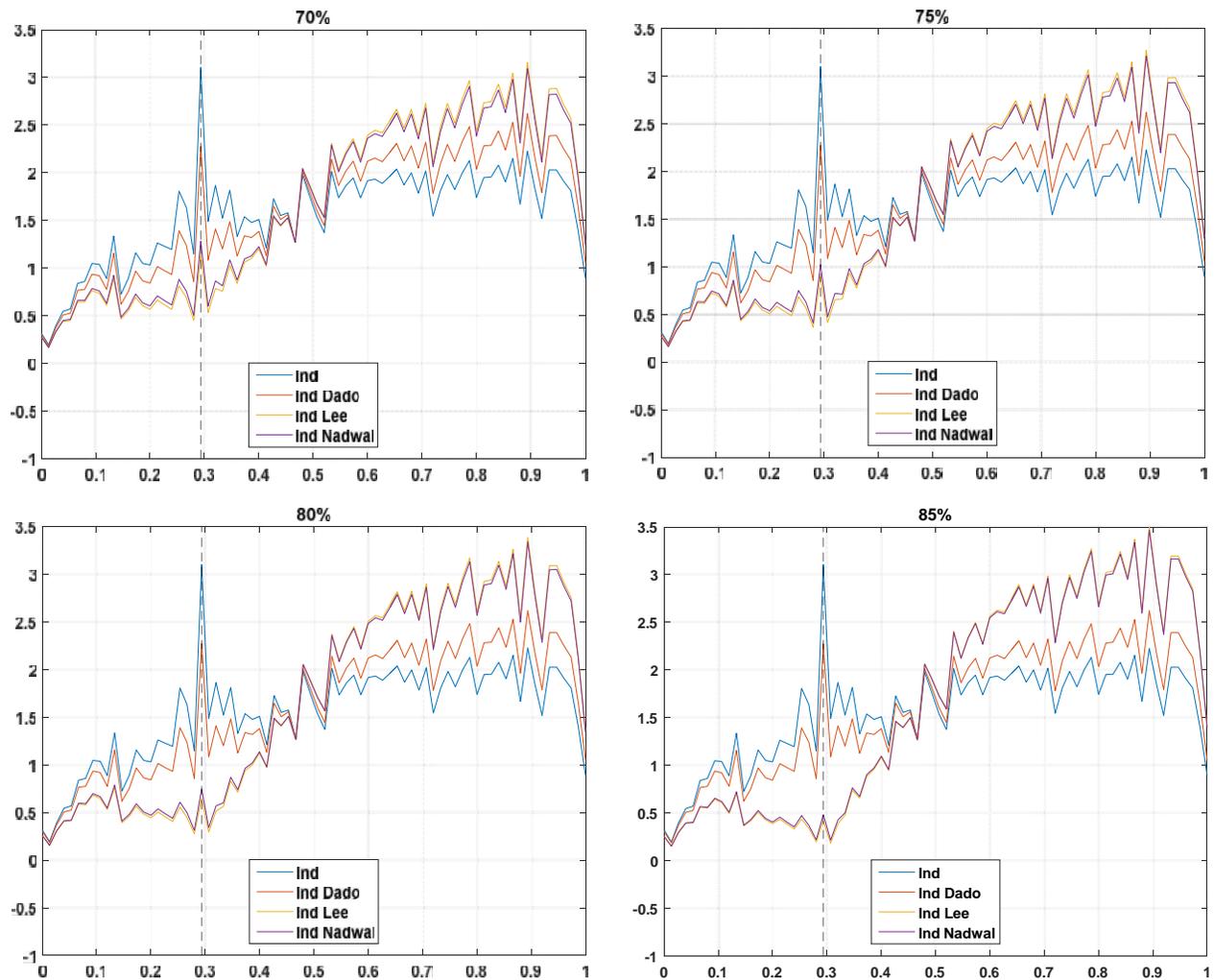


Figure. III.18. Indicateur d'endommagements avec différents taux d'endommagements : de 70% à 85%

Après avoir introduit pour chaque modèle la variation du taux d'endommagements (la profondeur de la fissure), les résultats obtenus nous montrent la variation entre les différents indicateurs comparés à celui calculé en utilisant les résultats de mesures. La forme des différents indicateurs se rapproche de l'indicateur calculé à base de la mesure jusqu'à 35% (figure 19) ou les 4 indicateurs ont la même allure, ensuite, tant que le taux d'endommagements augmente, tant que la variation des 3 indicateurs augmente. Nous pouvons conclure que le taux d'endommagements de la poutre est de 35%.

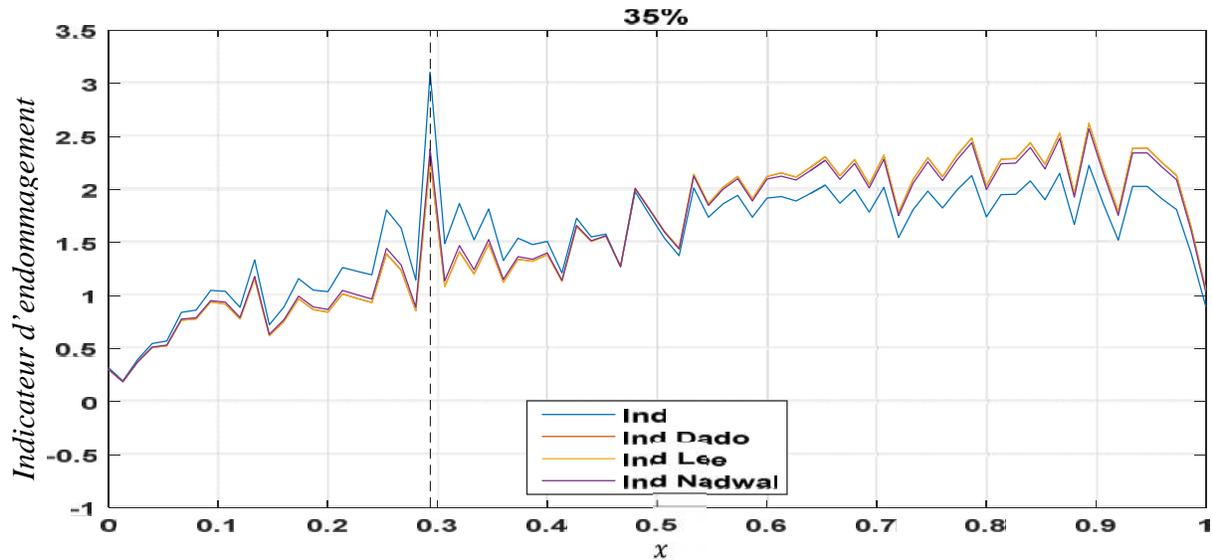


Figure. III.19. Résultat de localisation de l'endommagement de la poutre en utilisant le 1er mode.

Application 4 : Deux endommagements [47]

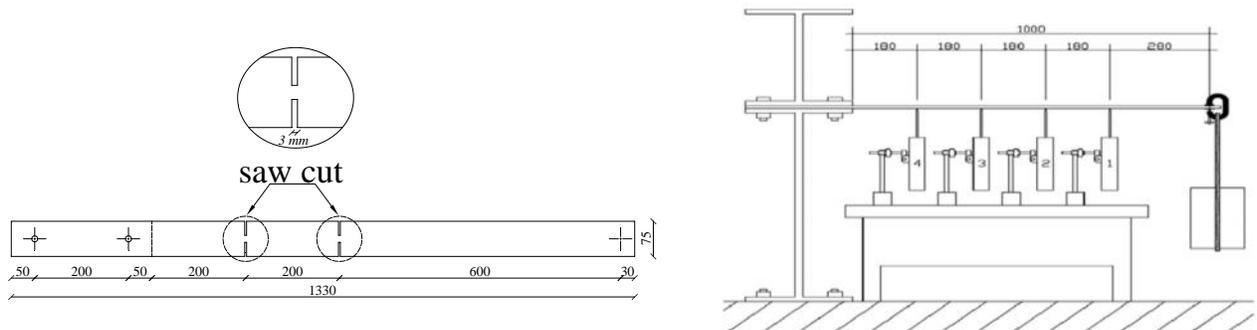


Figure III.20. expérience de Eun-Taik

Eun-Taik et al [47] ont fait une expérience sur une poutres simples en acier, en porte à faux, dans le cadre du dispositif de chargement représenté sur la figure. 20. ils ont supposé que chaque modèle pour l'approche analytique a été modélisée en utilisant la méthode des éléments finis avec 50 éléments et que la longueur d'un élément fini est de 20 mm. Avec un module d'élasticité de $1,95 \times 10^5$ MPa.

Les échantillons de poutre ont été testés, et les variables de test comprenaient l'emplacement et la taille des endommagements. Les échantillons sont résumés dans la Fig. 20.

L'expérience a été faite sur des poutres en porte à faux 1m avec une section transversale brute de 75mm × 9mm et la section de l'endommagement de 25mm × 9mm. L'introduction de l'endommagement a été considéré comme une réduction de 67% du moment d'inertie et leur position est situé à 200, 400mm, respectivement de l'extrémité fixe.

La figure 21 montre le 1^{er} mode de la structure modélisée en élément fini et celui de la mesure.

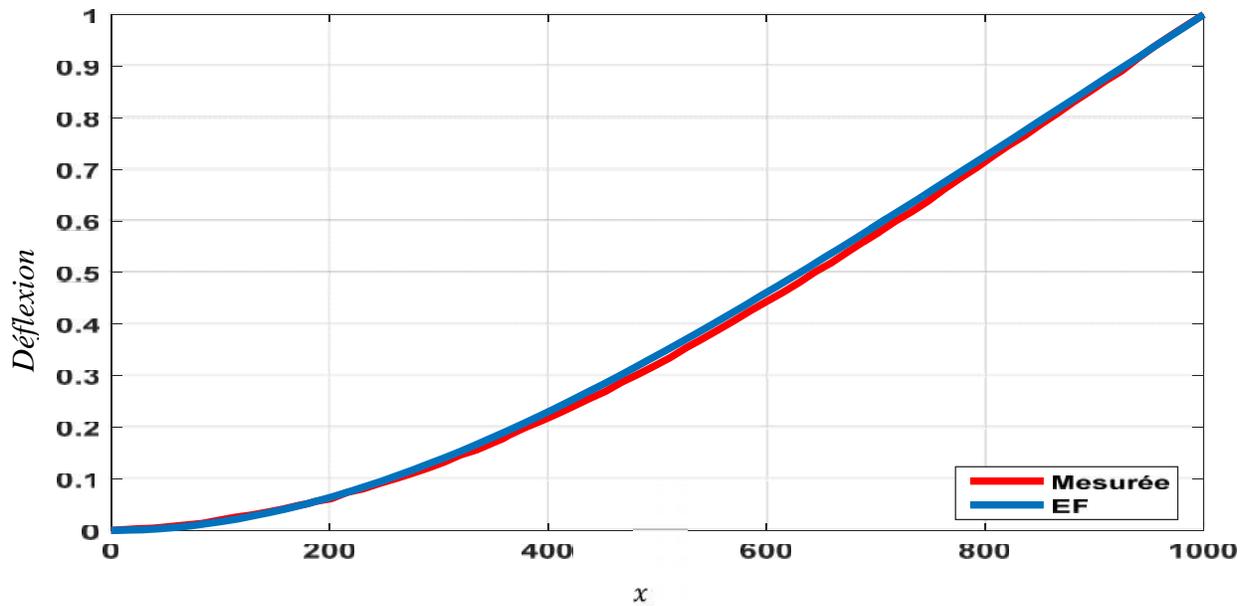


Figure. III.21. Comparaisons du 1er mode mesurée et modélisée par éléments finis

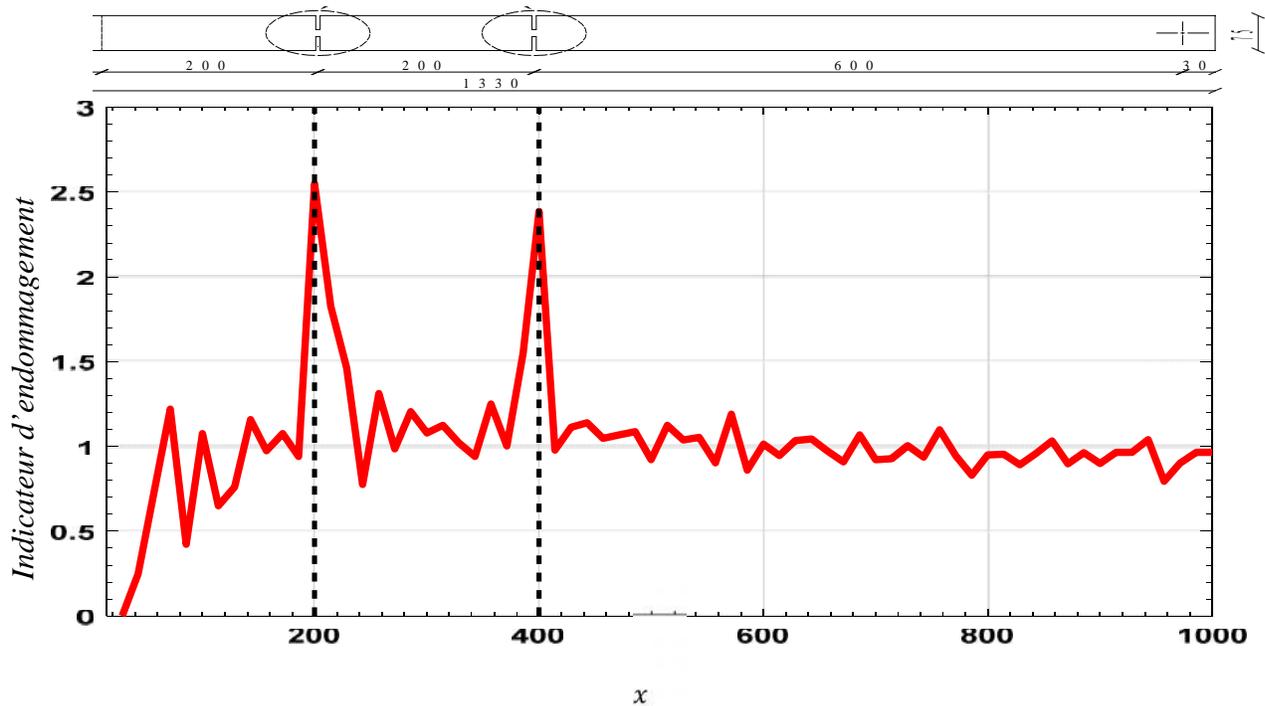


Figure. III.22. Résultat de localisation de l'endommagement de la poutre en utilisant le 1er mode.

L'application de l'indicateur de localisation d'endommagement sur cet essai sont représentée dans la figure 22. Les deux endommagements introduits par Eun-Taik dans son expérience sont parfaitement localisée et ils sont respectivement à 200mm et a 400mm de l'extrémité encastree.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Ce présent travail est consacré au thème d'identification d'endommagement dans les structures mécaniques par mesures vibratoires, une partie est consacré à la présentation de modèle de modélisation d'endommagement présenter dans la littérature. Plusieurs travaux ont été exposés pour la modélisation d'un endommagement local au niveau d'une poutre en acier. Une bonne partie des travaux font référence à une approche de la fissure par un ressort dont la raideur dépend essentiellement de la largeur et de la profondeur de la fissure.

Un indicateur de localisations d'endommagements des structures mécaniques par mesures vibratoires est proposé. Cet indicateur est basé sur l'utilisation du 1^{er} mode de vibrations de structures saines (modélisée par la méthode élément fini) et 1^{er} mode mesuré expérimentalement. Plusieurs cas test ont été appliquée à savoir :

Application 1 : Un seul endommagement – Poutre encastree-encastree

Application 2 : Un seul endommagement – Poutre simplement appuyée

Application 3 : Un seul endommagement – Poutre Encastree-Libre

Application 4 : Deux endommagements – Poutre Encastree-Libre

L'applications de cet indicateur sur les différents cas nous permet de localiser exactement la position de l'endommagement dans les structures.

La quantification de l'endommagement et l'application de cet indicateur sur des structures complexes reste comme des perspectives.

References bibliographies

- [1] Coppolino R.N., Rubin S., 1980, « *Detectability of structural failures in offshore platforms by ambient vibration monitoring* » , In Proceedings of the 12th Annual Offshore Tech. Conf., 101-110.
- [2] Salawu O.S., Williams C., 1994, « *Damage location using vibration mode shapes* » , In Proceedings of IMAC 12, 933-939.
- [3] Rytter A., 1993, « *Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures* » , PhD. Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark.
- [4] Dewen Liu, B.E., M.E, 2004, « *Damage detection in mechanical structures through coupled response measurements* », Thèse de doctorat de Division of Mechanical Engineering, The University of Queensland, Brisbane, Australia.
- [5] Scott W. Doebling, Charles R. Farrar, Michael B. Prime, Daniel W. Shevitz, 1996 « *Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in Their Vibration Characteristics: A Literature Review* » . Los Alamos National Laboratory, United States Department of Energy, University of California.
- [6] Cawley P., Adams R.D., 1979, « *The Location of Defects in Structures From Measurements of Natural Frequencies* » , Journal of Strain Analysis, Vol.14, No.2, 49-57.
- [7] Friswell M.I., Penny J.E.T., Wilson D.A.L., 1994 « *Using vibration data and statistical measures to locate damage in structures* » ,. International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 239-254.
- [8] Topole K.G., Stubbs, 1995, « *Non Destructive Damage Evaluation in Complex Structures from a Minimum of Modal Parameters* » , Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 10(2), 95-103.
- [9] Duggan D.M., Wallace E.R., Caldwell S.R., 1980, « *Measured and predicted Vibrational Behavior of Gulf of Mexico Platforms* » , In Proceedings of the 12th Annual Offshore Tech. Conf., 92-100.
- [10] Kirmsher, P. G. 1944. « *The effect of discontinuities on the natural frequency of beams* » , Proceedings of American Society of Testing and Materials, Vol. 44, pp. 897-904.
- [11] Lifshitz, J. M. and Rotem, A. 1969. « *Determination of reinforcement unbonding of composites by a vibration technique* » , Journal of Composite Materials, Vol. 3, pp. 412-423.

- [12] Cawley, P. and Adams, R. D. 1979. « *Location of defects in structures from measurements of natural frequencies* » , Journal of Strain Analysis for Engineering Design, Vol. 14, pp. 49-57.
- [13] Gudmundson, P. 1982. « *Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes* » , Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 30, pp. 339-353.
- [14] Yuen, M. M. F, 1985, « *A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever* » , Journal of Sound and Vibration, Vol. 103, pp. 301-310.
- [15] Osegueda, R.A., P.D. Dsouza, and Y. Qiang, 1992, «*Damage Evaluation of Offshore Structures Using Resonant Frequency Shifts,* » Serviceability of Petroleum, Process, and Power Equipment, ASME PVP 239/MPC 33, 31–37.
- [16] Silva, J.M.M. and A.J.M.A. Gomes, 1994, «*Crack Identification of Simple Structural Elements Through the use of Natural Frequency Variations: The Inverse Problem,* » in Proc. of the 12th International Modal Analysis Conference, 1728–1735.
- [17] Choy, F.K., R. Liang, and P. Xu, 1995, «*Fault Identification of Beams on Elastic Foundation,* » Computers and Geotechnics, 17, 157–176.
- [18] Vestroni, F. and Capecchi, D. 2000. « *Damage detection in beam structures based on frequency measurements* » , Journal of Engineering Mechanics-Asce, Vol. 126, pp. 761-768.
- [19] Xia, Y. and Hao, H. 2003. « *Statistical damage identification of structures with frequency changes* », Journal of Sound and Vibration, Vol. 263, pp. 853-870.
- [20] Salawu, O. S. 1997. « *Detection of structural damage through changes in frequency: A review* » , Engineering Structures, Vol. 19, pp. 718-723.
- [21] Wang, W. and Zhang, A. 1987. « *Sensitivity analysis in fault vibration diagnosis of structures* » , Proceedings of 5th International Modal Analysis Conference, pp. 496-501.
- [22] Stubbs, N., Broome, T. H. and Osegueda, R. (1990). « *Nondestructive construction error detection in large space structures* » , AIAA Journal, Vol. 28, pp. 146-152.
- [23a] Stubbs, N. and R. Osegueda, 1990a, «*Global Non-Destructive Damage Evaluation in Solids,* » Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 5(2), 67–79.
- [23b] Stubbs, N. and R. Osegueda, 1990b, «*Global Damage Detection in Solids–Experimental Verification,* » Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 5(2), 81–97.
- [24] Stubbs, N., J.-T. Kim, and K. Topole, 1992, «*An Efficient and Robust Algorithm for Damage Localization in Offshore Platforms,* » in Proc. ASCE Tenth Structures Congress, 543–546.

- [25] Richardson, M.H. and M.A. Mannan, 1992, «*Remote Detection and Location of Structural Faults Using Modal Parameters* », 10th International Modal Analysis Conference, 502–507.
- [26] West W.M., 1984, « *Illustration of the Use of Modal Assurance Criterion to Detect Structural Changes in an Orbiter Test Specimen* », In proceedings of Air Force Conference on Aircraft Structural Integrity, 1-6.
- [27] Farrar C.R., Jauregui D.V., 1996, « *Damage Detection Algorithms Applied to Experimental and Numerical Modal Data From the I-40 Bridge* », Los Alamos National Laboratory report LA-13074-MS.
- [28] Biswas M., Pandey A.K., Samman M.M., 1989, « *Diagnostic Experimental Analysis of a Highway Bridge* », International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 5(1), 33-42.
- [29] Salane H.G., Baldwin J.W., 1990, « *Identification of Modal Properties of Bridges* », ASCE J. Structural Engineering, 116(7), 2008-2021.
- [30] Mazurek D.F., Dewolf J.T., 1990, « *Experimental Study of Bridge Monitoring Technique* », ASCE Journal of Structural Engineering, 116-2532-2549.
- [31] Alampalli S., Fu G., Dillon E.W., 1995, « *On the use of measured vibration for detecting bridge damage* », In Proceedings of the 4th International Bridge Engineering Conference, 125-137.
- [32] Rizos, P.F., N. Aspragathos, and A.D. Dimarogonas, 1990, «*Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes*» Journal of Sound and Vibration, **138**(3), 381–388.
- [33] Fox, C. H. J. (1992). « *The location of defects in structures: A comparison of the use of natural frequency and mode shape data* », The 10th International Modal Analysis Conference, San Diego, USA, pp. 522-528.
- [34] Salawu, O.S. and C. Williams, 1994, «*Damage Location Using Vibration Mode Shapes*», 12th International Modal Analysis Conference, 933–939.
- [35] Salawu, O.S. and C. Williams, 1995, «*Bridge Assessment Using Forced-Vibration Testing*» Journal of Structural Engineering, **121**(2), 161–173.
- [36] Lam, H.F., J.M. Ko, and C.W. Wong, 1995, «*Detection of Damage Location Based on Sensitivity Analysis*» in Proc. of the 13th International Modal Analysis Conference, 1499–1505.
- [37] Pandey A.K., Biswas M., Samman M.M., 1991, « *Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes* », Journal of Sound and Vibration, 145(2), 321-332.

- [38] Stubbs N., Kim J-T., Topole K., 1992, « *An Efficient and Robust Algorithm for Damage Localization in Offshore Platforms* », In proceedings of the ASCE Tenth Structures Congress, 543-546.
- [39] Chance J., Tomlinson J., Worden K., 1994, « *A Simplified Approach to the Numerical and Experimental Modeling of the Dynamics of a Cracked Beam* », In Proceedings of IMAC 12, 778-785.
- [40] Dong, C., Zhang, P. Q., Feng, W. Q. and Huang, T. C. (1994). « *The sensitivity study of the modal parameters of a cracked beam* », *Proceedings of 12th International Modal Analysis Conference*, pp. 98-104.
- [41] Yang, H. Z., Li, H. S. and Wang, S. Q. (2003). « *Damage localization of offshore platforms under ambient excitation* », *China Ocean Engineering*, Vol. 17, pp. 495-504.
- [42] W.M. Ostachowicz, M. Krawczuk « *Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam*, » *Journal of Sound and Vibration* 150 (2) (1991) 191–201.;
- [43] B.P.Nandwana and S.K. Maiti « *detection of the location and size of a Crack in stepped cantilever beams based on Measurements of natural frequencies* » *Journal of Sound and Vibration* "0886# 192"2#\ 324_335;
- [44] Jinhee Lee « *Identification of multiple cracks in a beam using vibration amplitudes* » *Journal of Sound and Vibration* 326 (2009) 205–212;
- [45] N. Hu, X. Wang, H. Fukunaga, Z.H. Yao, H.X.Zhang, Z.S. Wu. « *Damage assessment of structures using modal test data* ». *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001) 3111-3126.
- [46] Han-Ik Yoon, In-Soo Son, Sung-Jin Ahn. « *Free Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beam with Double Cracks* ». *Journal of Mechanical Science and Technology* 21 (2007) 476-485
- [47] Eun-Taik Lee, Hee-Chang Eun. « *Damage detection of damaged beam by constrained displacement curvature* ». *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22 (2008) 1111-1120.
- [48] Maciej Radzienski, Marek Krawczuk, Magdalena Palacz. « *Improvement of damage detection methods based on experimental modal parameters* ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (2011) 2169–2190
- [49] Chih-Shiung Wang and Lin-Tsang. « *Modified and Simplified Sectional Flexibility of a Cracked* ». *Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics* Volume 2012, Article ID 543828, 16 pages doi:10.1155/2012/.

Fin de Bibliographies